

4 Лекция №4.

Функции распределения

$$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \{ \omega : \xi(\omega) < x \} \in \mathbb{F} \Leftrightarrow \exists P\{\omega : \xi(\omega) < x\} \equiv P(\xi < x)$ — случайная величина (с.в.)

$F(x) = P(\xi < x), x \in \mathbb{R}$ — функция распределения

Определение 4.1 С.в. ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(z) dz, x \in \mathbb{R},$$

где $p(\cdot)$ - некоторая функция, $p(z) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz = 1$

$p(\cdot)$ - плотность распределения

$$\Rightarrow F(\cdot) \text{ непрерывна } \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad F'(x) = p(x)$$

Общие свойства функции распределения $F(x)$

[1] $F(\cdot)$ не убывает, т.е. если $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$

Тогда $A_k = \{\omega : \xi(\omega) < x_k\}, k = 1, 2$

$$F(x_k) = P(\xi < x_k) = P(A_k)$$

Если $x_1 \leq x_2$, то $\xi(\omega) < x_1 \Rightarrow \xi(\omega) < x_2$

$$\text{т.е. } A_1 \Rightarrow A_2, A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$$

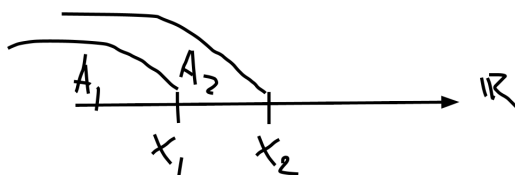


Рис. 4.1: 1 свойство функции распределения

2 $F(\cdot)$ непрерывна слева, $F(x-0) = F(x)$, т.е. $\forall \{x_n\}_{n=1, \infty}$

$$\begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < \dots < x \\ x_n \mapsto x \end{cases} \quad \boxed{F(x_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} F(x)}$$

$$A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}, n = 1, 2, \dots \Rightarrow F(x_n) = P(A_n)$$

$$A = \{\omega : \xi(\omega) < x\}, F(x) = P(A)$$

$$x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\text{Покажем, что } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

$$\text{Пусть } \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n : \omega \in A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \text{ т.е. } \xi(\omega) < x_n < x \Rightarrow \xi(\omega) < x \Leftrightarrow \omega \in A$$

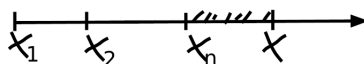


Рис. 4.2: 2 свойство функции распределения

$$\text{Пусть } \omega \in A \Leftrightarrow \xi(\omega) < x$$

$$x_n \rightarrow x-0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n : x - x_n < \epsilon$$

$$\epsilon = x - \xi(\omega) \Rightarrow x - x_n < x - \xi(\omega) \Rightarrow \xi(\omega) < x_n \Leftrightarrow \omega \in A_n \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$F(x) = P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty}$$

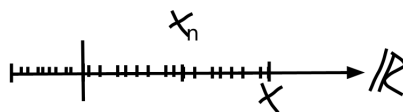


Рис. 4.3: 2 свойство функции распределения

$$A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$$

$$\boxed{3} \quad F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$$

$$\text{т.е. } \forall \{x_n\}_{n=1, \infty} \quad x_1 \geq x_2 \dots; x_n \rightarrow -\infty$$

$$F(x_n) \rightarrow 0, \forall \{z_n\}_{n=1, \infty} \quad z_1 \leq z_2 \leq \dots; \quad z_n \rightarrow +\infty \quad F(z_n) \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } A_n &= \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}, \\ B_n &= \{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \end{aligned} \quad n = 1, 2$$

Покажем, что $A_n \rightarrow \emptyset, B_n \rightarrow \Omega$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= P(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \\ 1 &= P(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \end{aligned}$$

$$z_1 \leq z_2 \leq \dots \Rightarrow B_1 \subset B_2 \subset \dots \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$\text{Пусть } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \neq \Omega \Leftrightarrow \exists \omega \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Leftrightarrow \omega \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \overline{B_n} = \{\omega : \xi(\omega) \geq z_n\} \quad \forall n$$

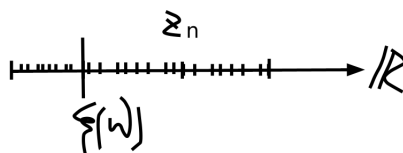


Рис. 4.4: 3 свойство функции распределения

$$z_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \forall m \exists n : z_n > M$$

$$M = \xi(\omega) \Rightarrow \xi(\omega) < z_n (\exists n)$$

Противоречие $\xi(\omega) \geq z_n \forall n$

$\boxed{1} - \boxed{3} \Rightarrow F(\cdot) - \text{функция распределения } F(x) = P(\xi < x)$

$\boxed{4} \quad (F(x-0) = F(x))$

$F(x+0) = P(\xi \leq x)$

(ср. с $F(x) = P(\xi < x)$)

Пусть $\{x_n\}_{n=1, \infty} : \begin{cases} x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n > \dots > x \\ x_n \rightarrow x \end{cases} A_n \Leftrightarrow \xi < x_n$

$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_N \supset \dots$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{?}{=} B - \{\omega : \xi(\omega)\}$

Пусть $\omega \in B \Leftrightarrow \xi(\omega) \leq x, x_n > x \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi(\omega) < x \quad \forall n = 1, 2, \dots \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

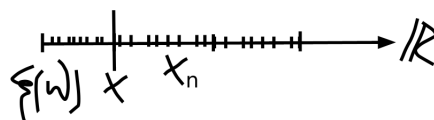


Рис. 4.5: 4 свойство функции распределения

Пусть $\omega \notin B \Leftrightarrow \xi(\omega) > x, x_n \rightarrow x+0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n : x_n < \xi(\omega) \Rightarrow \omega \notin B_n \Rightarrow \omega \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

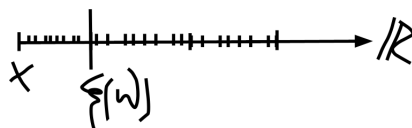


Рис. 4.6: 4 свойство функции распределения

$$\boxed{5} \quad P(\xi = x) = P(\xi \leq x) - P(\xi < x) = F(x+0) - F(x) = F(x+0) - F(x-0) \Rightarrow F(\cdot) \text{ непрерывна в т. } x \Leftrightarrow P(\xi = x) = 0$$

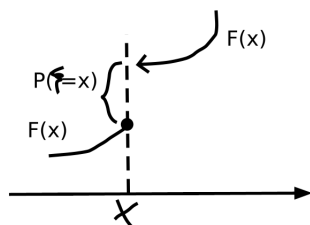


Рис. 4.7: 5 свойство функции распределения

$$\boxed{6} \quad P(x_1 \leq \xi < x_2) = P(\xi < x_2) - P(\xi < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2 + 0) - F(x_1)$$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1 + 0)$$

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2 + 0) - F(x_1 + 0)$$

Дискретное распределение $F(x) = \sum_{k: x_k < x}^{\infty} p_k \quad (\text{Д})$

$$p_n = F(x_k + 0) - F(x_k) = P(\xi = x_k)$$

$$(\text{Д}) \Leftrightarrow \begin{cases} P(\xi = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots \\ \sum_k^{\infty} p_k = 1 \end{cases}$$

$$\forall x \notin \{x_1, x_2, \dots\} F(\cdot) \text{ непрерывна в т. } x \Leftrightarrow P(\xi = x) = 0$$

$$x_k - \text{ точка роста функции } F(\cdot) \text{ т.е. } F(x_k + \epsilon) - F(x_k - \epsilon) > 0 \forall \epsilon > 0$$

$$\text{Если } x_k < x_{k+1} \forall k, \text{ то } F(x) = \text{const при } x \in (x_k, x_{k+1}]$$

$$(\text{Д}) \Rightarrow$$

$$1) F(\cdot) \text{ имеет точки разрыва } x_1, \dots, x_n$$

$$2) Gr - \text{ множество точек роста функции } F(\cdot), \underset{\text{длина}}{Gr} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

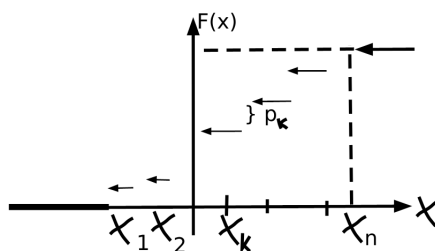


Рис. 4.8: Функция распределения

$$L(Gr) = \sum_k^{\infty} L(x_k) = 0$$

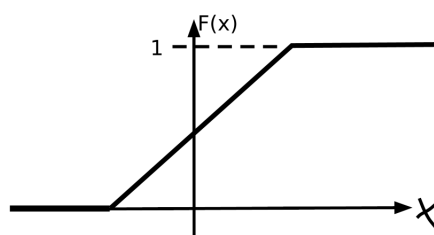
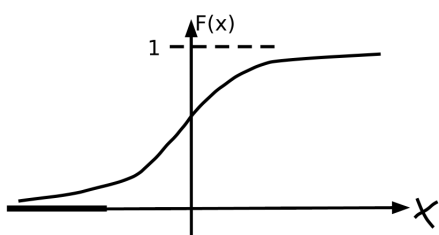
$$(AH) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$$

$F(\cdot)$ непрерывна $\forall x \Leftrightarrow P(\xi = x) = 0 \forall x$

$(AH) \Leftrightarrow F'(x) = p(x) \Leftrightarrow p(x)dx = P(x \leq \xi < x+dx) = F(x+dx) - F(x)$

(т.е. $p(x)\Delta x \underset{\Delta x \rightarrow +0}{=} F(x + \Delta x) - F(x)$)

$Gr = \{ x: p(x) > 0 \} \quad L(Gr) \neq 0$



Определение 4.2 Сингулярное распределение:

$F(\cdot)$ непрерывна $\forall x$ (см. AH)

$L(Gr) = 0$ (см. (Д))

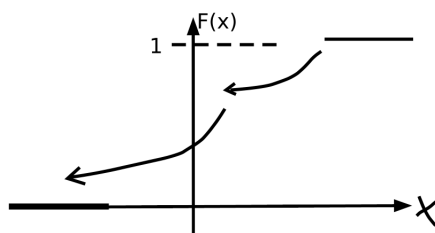


Рис. 4.9: Распределение

Теорема 6

$\forall F(\cdot)$ — функция распределения

$$F(x) = d_1 F_d(x) + d_2 F_{AH}(x) + d_3 F_{\text{синг}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ где}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$F_D(\cdot)$ имеет тип (D)

$F_{AH}(\cdot)$ имеет тип (AH)

$F_{\text{синг}}(\cdot) \leftrightarrow$ сингулярное распределение

У нас: $\alpha_3 = 0$

Если $\alpha_2 = 0$, то (D)

$\alpha_1 = 0$, то (AH)

Если $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2$, то :

$$\alpha_1 = \sum_k P(\xi = x_k)$$

$$\alpha_2 = \int_{x: F(x)=p(x) \neq 0} p(x) dx$$

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{R}) : \xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — с.в.

Пусть $\xi_k : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — с.в.

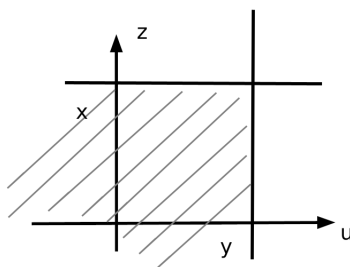


Рис. 4.10: Абс. непрер. распределение

Определение 4.3 Совместная функция распределения:

$$F(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) \equiv$$

$$\equiv P\left(\bigcap_{k=1}^n \{\tilde{\omega} : \xi(\omega)_k < x_k\}\right)$$

n=2

Дискретное распределение

$$F(x, y) = \sum_{\substack{k: x_k < x \\ j: y_j < y}} p_{kj}$$

$$p_{kj} = P(\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_j) > 0$$

Абс. непрерывное распределение

$$F(x, y) = \iint_{\substack{z < x \\ u < y}} p(z, u) dz du$$

$p(\cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — двумерная плотность распределения

$$F(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

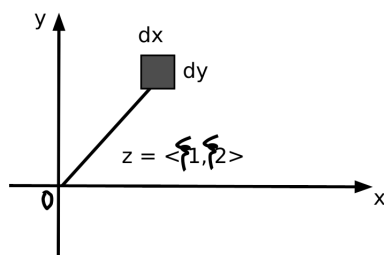


Рис. 4.11: Двумерная плотность распределения

$$P(x \leq \xi_1 < x + dx, y \leq \xi_2 < y + dy) = p(x, y) dx dy$$

Пусть $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ — некоторое вероятностное пространство

$A, B \in \mathbb{F}$ A, B — независимые события, если

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

(Несовместные: $A \cap B = \emptyset$)

Определение 4.4

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{F}$ — независимые (в совокупности) события, если

$$\forall \{j_1, j_2, \dots, j_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_m})$$

$$m = 2, 3, \dots, n; (j_1 < j_2 < \dots < j_m)$$