

Лекция 12

Выпишем кинетическое уравнение Больцмана (см. Лекция 11).

$$f = F(t, \vec{r}, \vec{v})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = J_{\text{ст}} = \int (f' f'_1 - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1$$

Перед нами интегро-дифференциальное уравнение.

Все функции f записаны в один и тот же момент времени и в одной и той же точке.

Хотя на рис.23 все эти функции относятся к частицам в разных местах. Значит, мы не замечаем этой разницы, и огрубление масштаба по расстояниям составляет размеры области взаимодействия. Т.е., нам все равно, где вблизи этой сферы, очерчивающей область взаимодействия, находятся частицы. Тогда любые изменения координат или изменение радиус-вектора они много больше, чем радиус действия потенциала:

$$\Delta r \gg r_0$$

$$\Delta t \gg \tau_{\text{вз}} \sim \frac{2r_0}{g}$$

В левой части интеграла столкновений появились два дрейфовых члена. Если посмотреть на один из них $\left(-\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right)$, $-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$ – внешняя сила. Тогда мы оказываемся перед задачей, в которой две частицы взаимодействуют друг с другом на фоне внешних сил (на фоне третьего тела). Значит, мы должны сказать в каком смысле и на каком масштабе времен и длин допустимо добавление дрейфовых членов. На длине свободного пробега внешнее поле должно быть несущественным. Это означает, что изменение потенциала внешнего поля заметно на расстояниях, которые много больше, чем длина свободного пробега. Т.е., возникает ограничение на расстояние:

$$\Delta r \gg \lambda_{\text{св.пробега}}$$

Заменив в кинетическом уравнении t на $-t$ и $\vec{v}$ на $-\vec{v}$, т.е., обратив движение, в левой части получаем общий знак « $\leftarrow$ », а в правой – неизвестно.

§20. Н-теорема Больцмана.

1. Лемма

$$I \equiv \int \varphi(\vec{v}) J_{\text{ст}} d\vec{v} = \int \varphi(\vec{v}) (f' f'_1 - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1 d\vec{v}$$

Сделаем следующие замены: $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}_1$; $\vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v}_1'$. Тогда получим:

$$I = \int \varphi(\vec{v}_1) (f' f'_1 - f f_1) g d\sigma d\vec{v} d\vec{v}_1 = \frac{1}{2} \int [\varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{v}_1)] (f' f'_1 - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1 d\vec{v}$$

Пусть теперь $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}'$; $\vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{v}_1'$.

$$I = \frac{1}{2} \int [\varphi(\vec{v}') + \varphi(\vec{v}_1')] (f f_1 - f' f'_1) g' d\sigma' d\vec{v}_1' d\vec{v}'$$

$$g' d\sigma' d\vec{v}_1' d\vec{v}' = inv$$

$$I = \frac{1}{4} \int \left[\varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{v}_1) - \varphi(\vec{v}') - \varphi(\vec{v}_1') \right] (f' f_1' - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1 d\vec{v}$$

Лемма утверждает, что первоначальный интеграл I можно свести к этой симметризованной форме.

2. Введем функцию $H(t)$:

$$H(t) = \int F(t, \vec{r}, \vec{v}) \ln F(t, \vec{r}, \vec{v}) d\vec{r} d\vec{v}$$

$d\vec{r} d\vec{v}$ – фазовый объем для одной частицы.

Наша система состоит из N частиц, значит, когда мы предположим перейти к суммированию, которое предшествовало интегрированию, то это будет сумма по состояниям одночастичного гамильтониана.

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int \frac{\partial F}{\partial t} \ln F d\vec{r} d\vec{v} + \int F \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t} d\vec{r} d\vec{v} \\ \int \frac{\partial F}{\partial t} d\vec{r} d\vec{v} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int F d\vec{r} d\vec{v} \right) = \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int (\ln F) \cdot J_{\text{ст}} d\vec{r} d\vec{v} - \int \vec{v} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} \ln F d\vec{r} d\vec{v} + \frac{1}{m} \int \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} \ln F d\vec{r} d\vec{v} \\ &\quad \int \vec{v} \int \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}} \ln F d\vec{r} \right) d\vec{v} \\ \int \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}} \ln F d\vec{r} \right) &= \int \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (F \ln F - F) d\vec{r} = 0 \\ \int \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} \ln F d\vec{r} d\vec{v} &= \int \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \int \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} \ln F d\vec{v} \right) d\vec{r} \\ \int \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} \ln F d\vec{v} \right) &= \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (F \ln F - F) d\vec{v} = 0 \end{aligned}$$

В результате:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int (\ln F) (f' f_1' - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1 d\vec{v} = \\ &= \frac{1}{4} \int (\ln f + \ln f_1 - \ln f' - \ln f_1') (f' f_1' - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1 d\vec{v} = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\ln \frac{f f_1}{f' f_1'} \right) (f' f_1' - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1 d\vec{v} \end{aligned}$$

Пусть $(f' f_1' - f f_1) = a - b$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\ln \frac{f f_1}{f' f_1'} \right) &= \ln \left(\frac{b}{a} \right), a > 0, b > 0 \\ \left(\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right) (a - b) &\leq 0 \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{4} \int \left(\ln \frac{f f_1}{f' f_1'} \right) (f' f_1' - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1 d\vec{v} \leq 0$$

H-теорема Больцмана:

$$\frac{dH}{dt} \leq 0$$

§21. Функция, обращающая в нуль интеграл столкновений Больцмана
1.

$$J_{\text{ст}} = \int (f' f_1' - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1$$

Достаточно:

$$f' f_1' = f f_1$$

Прологарифмируем

$$\ln f' + \ln f_1' = \ln f + \ln f_1$$

$$1' + 1_1' = 1 + 1_1$$

Из ЗСИ:

$$\vec{v}' + \vec{v}_1' = \vec{v} + \vec{v}_1$$

Из ЗСМЭ:

$$v'^2 + v_1'^2 = v^2 + v_1^2$$

Т.о., интегралы движения аддитивного характера, которые сохраняются в задаче двух тел:

$$\begin{cases} 1' + 1_1' = 1 + 1_1 \\ \vec{v}' + \vec{v}_1' = \vec{v} + \vec{v}_1 \\ v'^2 + v_1'^2 = v^2 + v_1^2 \end{cases}$$

$$\ln f = \ln F(t, \vec{r}, \vec{v}) = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{v} + \gamma v^2$$

$$f \equiv F(t, \vec{r}, \vec{v}) = e^{\alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{v} + \gamma v^2}$$

Вспомним локальное распределение Максвелла:

$$f \equiv F(t, \vec{r}, \vec{v}) = n(t, \vec{r}) w(t, \vec{r}, \vec{v}) = n(t, \vec{r}) \left(\frac{m}{2\pi\theta(t, \vec{r})} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\vec{v} - \vec{u}(t, \vec{r}))^2}{2\theta(t, \vec{r})}}$$

Сопоставим этот результат и предыдущий. Объявим, что $\vec{v} = 0$. Тогда

$$e^{\alpha} = n(t, \vec{r}) \left(\frac{m}{2\pi\theta(t, \vec{r})} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\vec{u}(t, \vec{r}))^2}{2\theta(t, \vec{r})}}$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(\vec{\beta} \cdot \vec{v}) = \frac{m}{\theta} (\vec{v} \cdot \vec{u}) \Rightarrow \vec{\beta} = \frac{m}{\theta} \vec{u}$$

$$\gamma v^2 = \frac{m}{2\theta} v^2; \gamma = -\frac{m}{2\theta}$$

Т.о., получили систему

$$\left\{ \begin{array}{l} e^\alpha = n(t, \vec{r}) \left(\frac{m}{2\pi\theta(t, \vec{r})} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\vec{u}(t, \vec{r}))^2}{2\theta(t, \vec{r})}} \\ \vec{\beta} = \frac{m}{\theta} \vec{u} \\ \gamma = -\frac{m}{2\theta} \end{array} \right.$$

§22. Линеаризованное уравнение Больцмана. Оценка времени релаксации к локальному равновесию.

1. Запишем исходное уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int (f' f'_1 - f f_1) g d\sigma d\vec{v}_1$$

2. Пусть

$$1) \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv 0$$

2) Переход к локальному рассмотрению внутри большой системы: $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \equiv 0$.

$$3) f(t, \vec{v}) = f_0(\vec{v})[1 + h(t, \vec{v})]; |h| \ll 1$$

3.

$$f_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \int (f'_0 f'_{01} (1 + h') (1 + h'_1) - f_0 f_{01} (1 + h) (1 + h_1)) g d\sigma d\vec{v}_1$$

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\theta}}$$

Приходим к следующему выводу:

$$f_0 f_{01} = f'_0 f'_{01}$$

Получаем:

$$f_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \int f_0 f_{01} (1 + h' + h'_1 - 1 - h - h_1 + \dots) g d\sigma d\vec{v}_1$$

Окончательный ответ:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \int n \cdot w(\vec{v}_1) (h' + h'_1 - h - h_1) g d\sigma d\vec{v}_1$$

– линеаризованное уравнение Больцмана

4. Оценка времени релаксации к равновесию.

Наша цель:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{h}{\tau}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -h \cdot \int n w(\vec{v}_1) g d\sigma d\vec{v}_1 = -\frac{h}{\tau}$$

$$\frac{1}{\tau} = n \int w(\vec{v}_1) g d\sigma d\vec{v}_1$$

Пусть $d\omega$ не зависит от скоростей. Тогда $\int d\omega = \sigma$ – полное сечение рассеяния.

$$\frac{1}{\tau} = n\sigma \int w(\vec{v}_1) |\vec{v}_1 - \vec{v}| d\vec{v}_1$$

Умножим последнее равенство на $w(\vec{v})$ и проинтегрируем по $\vec{v}$:

$$\overline{\left(\frac{1}{\tau}\right)} = \int w(\vec{v}) \frac{1}{\tau} d\vec{v} = n\sigma \int w(\vec{v}_1) w(\vec{v}) |\vec{v}_1 - \vec{v}| d\vec{v}_1 d\vec{v}$$

$$\int w(\vec{v}_1) w(\vec{v}) |\vec{v}_1 - \vec{v}| d\vec{v}_1 d\vec{v} = \overline{v_{\text{отн}}} = \sqrt{2} \cdot \bar{v} = \sqrt{\frac{8\theta}{\pi m}}$$

Получаем

$$\overline{\left(\frac{1}{\tau}\right)} = n\sigma\sqrt{2} \cdot \bar{v} = \frac{\bar{v}}{l_{\text{св.пробега}}}$$

$$\overline{\tau_{\text{лок}}} \sim \tau_{\text{св.пробега}}$$