

Лекция 8. Сильное взаимодействие. Группа симметрий $SU(3)$

Сильное взаимодействие

Ранее мы обсудили спектр адронов. Напомним, что адроны делятся на две большие группы – мезоны и барионы. Мезоны – это сильновзаимодействующие бозоны, а барионы – сильновзаимодействующие фермионы. Барионам приписывается барионный заряд. Для мезонов барионное число равно нулю.

Также мы отметили, что адроны группируются в мультиплеты по изоспину, причем соответствующие квантовые числа сохраняются. Так как группа изоспина – это группа $SU(2)$, то можно выбрать базис из

$$\vec{I}^2 = I(I + 1) \quad (8.1)$$

и третьей компонентой изоспина I_3 . Эти величины сохраняются в сильном взаимодействии.

Как было отмечено ранее, для нуклонов (в том числе возбужденных), пионов и Δ -изобар $N^{(*)}$, π , Δ справедливо следующее: легчайшие из этих состояний либо стабильны (как протон), либо распадаются по слабым или электромагнитным взаимодействиям. Более тяжелые состояния распадаются по сильным взаимодействиям:

$$N^{(*)} \rightarrow N + \pi \quad (8.2)$$

с временем, характерным для сильных взаимодействий

$$\tau \sim 10^{-22} - 10^{-24} \text{ с} \quad (8.3)$$

Эта группа адронов удачно классифицируется с помощью группы симметрий $SU(2)$, причем для этой группы заряд можно представить в виде

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B \quad (8.4)$$

где B – барионное число.

Через какое-то время были обнаружены частицы, которые не попадали под указанную классификацию. Например,

$$p + \pi^- \rightarrow \underbrace{\Lambda^0}_{B=1} + \underbrace{K^0}_{B=0} \quad (8.5)$$

Необычным было то, что образовавшиеся частицы долго живут. Здесь Λ -гиперон – это фермион, K^0 – нейтральный K -мезон (это псевдоскаляр). При этом сечение рождения этой пары частиц достаточно большое (характерно для сильных взаимодействий). При этом

характерное время жизни

$$\tau_{\Lambda} \sim \tau_K \sim 10^{-10} \text{ с} \quad (8.6)$$

Такое время распада говорит о том, что такой распад происходит за счёт слабых взаимодействий. Заметим, что масса Λ -гиперона

$$m_{\Lambda} \simeq 1116 \text{ МэВ} \quad (8.7)$$

При этом распадается он согласно

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad (8.8)$$

K^0 распадается

$$K^0 \rightarrow \pi\pi \quad (8.9)$$

Таким образом, получаем противотечение с известной схемой: все, кроме самых легчайших, распадались по сильным взаимодействиям.

Более того, были также обнаружены частицы, называющиеся Σ -гиперонами. Существует три вида таких частиц: Σ^0 , $\Sigma^{\pm}$. Их массы очень близки, то есть по изоспину получаем триплет. По массам они располагаются следующим образом: $\Sigma^+(1189 \text{ МэВ})$, $\Sigma^0(1193 \text{ МэВ})$, $\Sigma^-(1197 \text{ МэВ})$. Это барионы (фермионы со спином $\frac{1}{2}$). При этом время жизни $\Sigma^{\pm}$

$$\tau \sim 10^{-10} \quad (8.10)$$

а Σ^0 распадается по электромагнитному взаимодействию на Λ -гиперон и фотон с временем жизни, характерным для электромагнитных взаимодействий

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma \quad (8.11)$$

Помимо большого времени жизни, указанные частицы не вписывались в известную схему из-за формулы (8.4). Попробуем применить эту формулу к какой-нибудь из рассмотренных частиц, например, к Λ -гиперону. Заряд Λ -гиперона равен нулю, $I_3 = 0$, так как это синглет, а барионное число $B = 1$, так как это барион. Таким образом,

$$0 = \underbrace{0}_{I_3} + \frac{1}{2} \quad (8.12)$$

Значит, формула (8.4) не выполняется. Таким образом, для самого легкого набора барионов это соотношение выполняется, а для нового набора частиц – нет. Это странно, так как заряд Q сохраняется всегда, I_3 сохраняется в сильных взаимодействиях. Значит, и разница между этими величинами тоже должна сохраняться. Было предложено модифицировать это равенство, введя новую сохраняющуюся величину – странность S .

Для Λ -гиперона странность должна быть равна -1 :

$$S_{\Lambda^0} = -1 \quad (8.13)$$

Тогда правильное выражение для формулы типа (8.4) приобретает вид

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} (B + S) \quad (8.14)$$

Эта формула называется формулой Гелл-Мана — Нисидзимы.

Странность должна сохраняться в сильных взаимодействиях. Напомним, что Λ -гиперон и K^0 образуются в реакции

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0 \quad (8.15)$$

Частицы p, π^- не являются странными. Значит, для них странность $S = 0$. Для Λ^0 странность $S = -1$. Значит, чтобы реакция имела место, для K^0 странность нужно положить $S = +1$.

Заметим, что во всех реакциях, по которым распадаются странные частицы (за счет слабого взаимодействия), странность нарушается на единицу.

Сумму барионного числа и странности обозначают

$$Y = B + S \quad (8.16)$$

и называют гиперзарядом.

Итак, и странные, и нестранные барионы, характеризуются двумя квантовыми числами по сильным взаимодействиям – третьей компонентой изоспина и гиперзарядом.

Также были обнаружены частицы Ξ^0, Ξ^- . Они образуют дублет по изоспину. Их массы 1315, 1322 МэВ соответственно, а характерное время жизни

$$\tau \sim 10^{-10} \quad (8.17)$$

Они также распадаются за счет слабых взаимодействий.

Итак, все указанные выше барионы имеют спин $J = \frac{1}{2}$ и четность, равную единице

$$J^P = \left(\frac{1}{2}\right)^+ \quad (8.18)$$

Также отметим, что масса K^0 равна

$$m_{K^0} \simeq 498 \text{ МэВ} \quad (8.19)$$

K^0, K^+ образуют дублет по изоспину, причем масса K^+

$$m_{K^+} \simeq 494 \text{ МэВ} \quad (8.20)$$

У этих частиц есть античастицы: $\bar{K}^0$ и K^- соответственно. Эта пара частиц также является дублетом относительно группы изоспина. К ним же добавляются частицы π^0 , $\pi^\pm$. Также был обнаружен η^0 -мезон. Это нейтральный мезон, очень похожий на пион. Он является синглетом по изоспину, то есть $I = 0$, а его масса

$$m \simeq 548 \text{ МэВ} \quad (8.21)$$

Заметим, что у всего этого октета мезонов спин-четность одинакова и равна

$$J^P = 0^- \quad (8.22)$$

Схема классификации адронов. Группа симметрий $SU(3)$

Итак, у нас есть 8 легких мезонов и 8 достаточно легких барионов. Была предложена следующая схема классификации обычных и странных адронов.

Таблица 1: Схема классификации адронов

барионы	мезоны	I	Y
p, n	K^+, K^0	$\frac{1}{2}$	1
$\Sigma^0, \Sigma^+, \Sigma^-$	π^0, π^+, π^-	1	0
Λ^0	η	0	0
Ξ^0, Ξ^-	$\bar{K}^0, K^-$	$\frac{1}{2}$	-1

Отсюда возникает идея, что группа $SU(2)$ (то есть группа изоспина) не является самой общей группой симметрий сильных взаимодействий. Возможно, есть более широкая группа симметрий, причем в нее должны входить рассмотренные восьмимерные представления. Итак, нам нужно найти группу, в которой есть две сохраняющиеся величины. Такой группой симметрий является группа $SU(3)$.

Прежде, чем обсудить группу $SU(3)$, вспомним группу $SU(2)$. Это группа матриц ω

$$\omega^+ \omega = 1 \quad (8.23)$$

с единичным детерминантом

$$\det \omega = 1 \quad (8.24)$$

Причем матрицу представления можно разложить в окрестности единицы следующим образом

$$U = 1 + i\alpha^a I^a \quad (8.25)$$

причем для I^a известны коммутационные соотношения

$$[I^a, I^b] = i\epsilon^{abc} I^c \quad (8.26)$$

Итак, у нас есть две сохраняющиеся величины $\vec{I}^2$ и I_3 . Можно построить понижающие и повышающие операторы I_+ и I_- . С помощью этих операторов можно переходить между разными базисными элементами представления.

Теперь рассмотрим группу симметрий $SU(3)$. Это группа матриц 3×3 таких, что

$$\omega^\dagger \omega = 1 \quad (8.27)$$

$$\det \omega = 1 \quad (8.28)$$

Число генераторов равно восьми. Матрицу произвольного представления можно разложить в окрестности единицы следующим образом

$$U \simeq 1 + i\epsilon_a F_a \quad (8.29)$$

Здесь ϵ_a – некоторые параметры, F_a – базисные элементы. Если речь идет о некотором конечномерном представлении, то F_a – это некоторые матрицы, причем для них справедливы коммутационные соотношения вида

$$[F_a, F_b] = if_{abc} F_c \quad (8.30)$$

где f_{abc} – структурные константы алгебры (или группы).

В качестве базиса удобно выбрать

$$F_a = \frac{1}{2} \lambda_a \quad (8.31)$$

где λ_a – это матрицы Геллмана

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

Заметим, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ похожи на матрицы Паули. Это подалгебра $SU(2)$ алгебры $SU(3)$.

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

λ_4, λ_5 генерируют вращение в плоскости 13. Матрицы λ_6, λ_7 строятся аналогично:

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Матрица λ_8 диагональна и имеет вид

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

Естественно отождествить третью компоненту изоспина с генератором F_3

$$I_3 \equiv F_3 \quad (8.36)$$

Более того, можно построить оператор

$$\vec{F}^2 = F_a F_a \quad (8.37)$$

Легко показать, что он коммутирует со всеми операторами. Значит, это будет некоторое число в данном неприводимом представлении.

Чтобы построить базис, нужно понять, какие генераторы можно выбрать в качестве полного набора коммутирующих операторов. Естественно выбрать третью и восьмую компоненты, так как они коммутируют между собой. Далее мы увидим, что восьмую компоненту нужно отождествить с гиперзарядом

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \quad (8.38)$$

Представления можно строить как в группе $SU(2)$. Первые три базисных элемента похожи на группу $SU(2)$. Значит, из них можно построить понижающий и повышающий операторы, которые будут действовать в подгруппе изоспина, так как эти элементы образуют подгруппу изоспина. Построим эти операторы следующим образом

$$I_{\pm} = F_1 \pm iF_2 \quad (8.39)$$

$$U_{\pm} = F_6 \pm iF_7 \quad (8.40)$$

$$V_{\pm} = F_4 \pm iF_5 \quad (8.41)$$

Заметим, что теперь все неприводимые представления будут располагаться в плоскости (в случае $SU(2)$ все представления располагались на прямой). При этом базисные элементы нашего представления будут характеризоваться определенными значениями третьей

компоненты изоспина и гиперзаряда.

Задача на дом

Покажите, что построенные операторы действуют так, как показано на рис. 8.1.

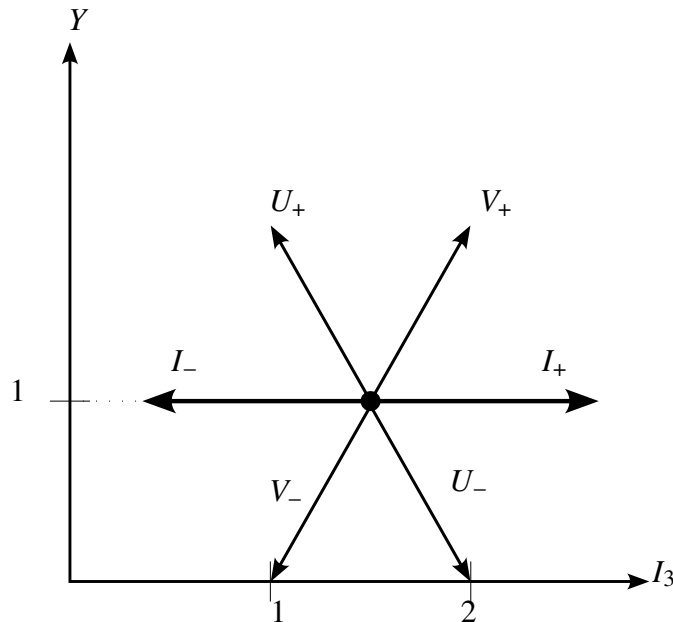


Рис. 8.1: Иллюстрация к объяснению.

Для этого надо найти коммутационные соотношения между $V_{\pm}$ и третьей компонентой изоспина и гиперзаряда.

Итак, все представления располагаются в плоскости $I_3 - Y$. Октетное представление группы $SU(3)$ представлено на рис. 8.2 (здесь каждая точка – это базисный элемент с соответствующими координатам квантовыми числами). Понятно, что горизонтальные линии образуют представления подгруппы $SU(2)$ группы $SU(3)$. Октет легчайших мезонов,

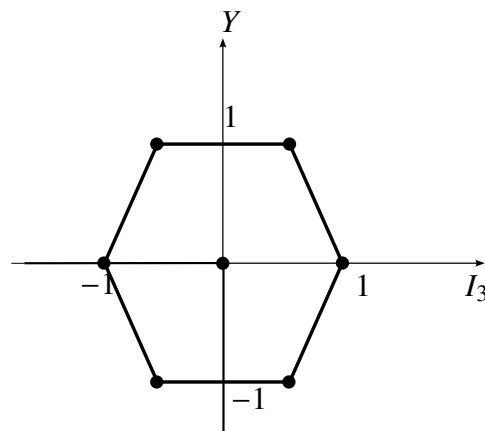


Рис. 8.2: Иллюстрация к объяснению.

для которых

$$J^P = 0^- \quad (8.42)$$

можно расположить на указанной схеме согласно рис. 8.3.

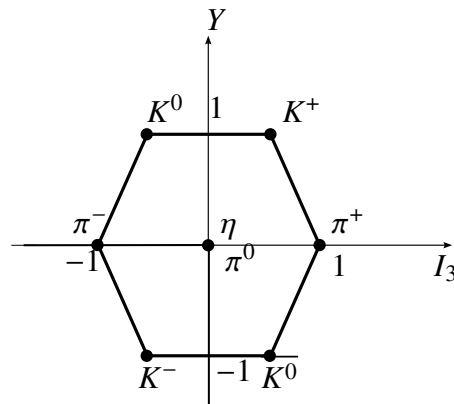


Рис. 8.3: Иллюстрация к объяснению.

Октет легчайших барионов, для которых спин-четность

$$J^P = \frac{1}{2}^+ \quad (8.43)$$

можно представить согласно рис. 8.4.

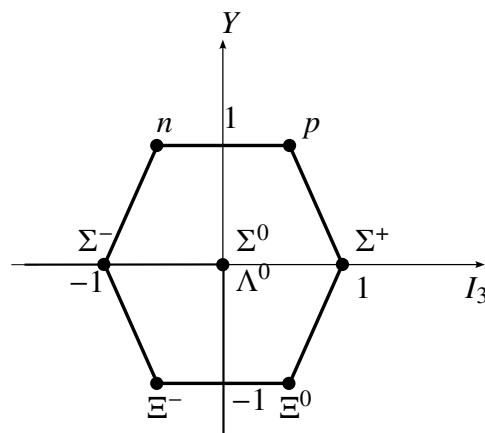


Рис. 8.4: Иллюстрация к объяснению.

Из таких графиков можно быстро получить квантовые числа, которыми характеризуются адроны относительно сильных взаимодействий.

У мезонов, помимо указанного октета была также обнаружена частица η' – мезон. Этот мезон является синглетом относительно группы $SU(3)$. Тот факт, что есть группа симметрий $SU(3)$ означает, что у всех реакций амплитуды реакций частиц, входящих в различные мультиплеты, связаны между собой групповыми свойствами. Это подтверждалось экспериментами по изучению указанных частиц. Тем самым, подтверждалось, что частицы

образуют октет по группе $SU(3)$ (рис. 8.3), а частица η' образует синглет по группе $SU(3)$. У барионов синглеты не были найдены. Когда начали изучать более тяжелые адронные состояния, то помимо псевдоскалярного октета мезонов был найден векторный октет мезонов (рис. 8.5), для которых

$$J^P = 1^- \quad (8.44)$$

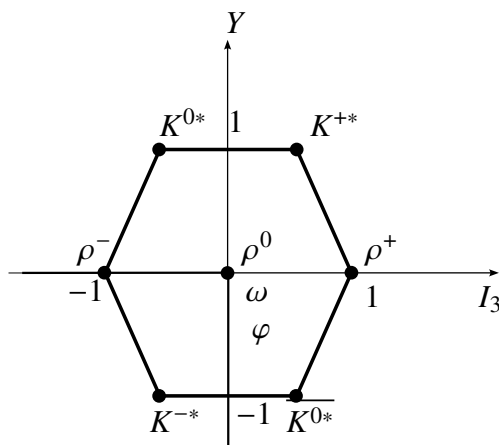


Рис. 8.5: Иллюстрация к объяснению.

Итак, анализируя мезоны, можно сделать вывод, что у нас есть октеты (восьмимерное представление группы $SU(3)$) и синглеты (одномерное представление группы $SU(3)$).

Следующим мультиплетом по бариону был найден триальный мультиплет из десяти компонент (рис. 8.6).

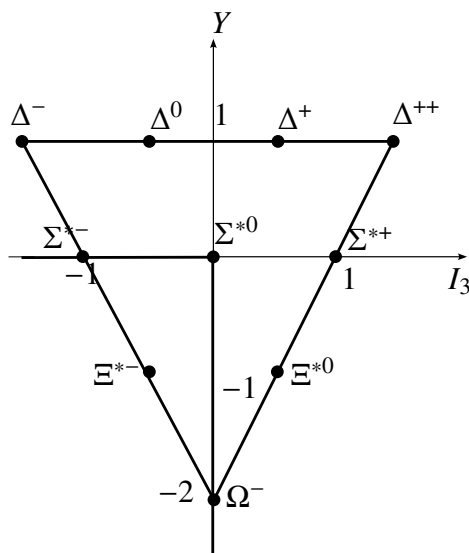


Рис. 8.6: Иллюстрация к объяснению.

Причем для частиц из этого мультиплета

$$J^P = \frac{3}{2}^+ \quad (8.45)$$

Это десятимерное представление группы $SU(3)$ или декуплет. Таким образом, среди барионов у нас есть октеты и декуплеты, а синглеты не были обнаружены. В связи с этим возникла идея создать некоторую упрощенную схему для объяснения этого спектра. Так как адронов так много и они классифицируются указанным способом, то скорее всего, они являются составными частицами.

Фундаментальные представления группы $SU(3)$

Заметим, что в рассмотренных случаях не встречаются более фундаментальные представления, характерные для группы $SU(3)$. Отсюда возникает идея, что все адроны состоят из кварков, которые преобразуются по фундаментальному представлению группы $SU(3)$. Было предложено ввести три кварка: u, d, s . Другими словами, у нас есть кварки, которые можно обозначить через q_i , где i – это флейворный индекс.

Кварки должны быть фермионами, так как составляющие должны уметь образовывать как барионы, так и мезоны. Мезоны можно представить в виде $q\bar{q}$, а барионы – в виде qqq . У кварков u, d, s заряды $+\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ соответственно. Мы предполагаем, что спин $J = \frac{1}{2}$, а барионное число кварков

$$B_q = \frac{1}{3} \quad (8.46)$$

а для антикварков –

$$B_{\bar{q}} = -\frac{1}{3} \quad (8.47)$$

Более того, предполагается, что объект q_i преобразуется по фундаментальному представлению группы $SU(3)$, то есть

$$q \rightarrow \omega q \quad (8.48)$$

где ω – это матрица группы $SU(3)$:

$$\omega \in SU(3) \quad (8.49)$$

На какие неприводимые представления группы $SU(3)$ разбиваются объекты типа $q\bar{q}$ и qqq ?

Сперва рассмотрим мезоны. Будем обозначать представления их размерностью. Таким образом, в данном случае 3 – это фундаментальное представление, а 3^* – сопряженное фундаментальное представление. Произведение таких представлений можно разложить на

неприводимые следующим образом

$$3 \times 3^* = 1 + 8 \quad (8.50)$$

Чтобы объяснить это, можно перейти к тензорным представлениям:

$$q_i \cdot \bar{q}^j \quad (8.51)$$

Из такого набора объектов можно собрать объект

$$\sum_i q_i \bar{q}^i \quad (8.52)$$

Этот объект будет синглетом. Итак, след матрицы (8.51) является синглетным представлением группы $SU(3)$, а все остальное (то есть бесследовая часть этой матрицы) является восьмимерным представлением группы $SU(3)$.

Теперь рассмотрим случай объектов, состоящих из трех кварков. Для начала рассмотрим случай 3×3 :

$$q_i q_j = q_{[ij]} + q_{\{ij\}} \quad (8.53)$$

Симметричное представление имеет размерность 6, а антисимметричное представление имеет размерность 3. Все эти представления можно получать, сворачивая с разными инвариантными тензорами: δ_i^j , ϵ^{ijk} и ϵ_{ijk} . Например, $q_i q_j \epsilon^{ijk}$.

Итак

$$3 \times 3 = 3^* + 6 \quad (8.54)$$

Задача на дом

Покажите, что

$$3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10 \quad (8.55)$$

Итак, для мезонов у нас есть синглеты и октеты (как и должно быть), а для барионов – есть октет, декуплет и синглет (хотя экспериментально синглет не наблюдается).

Рассмотрим мезоны как связанные состояния кварков: $q\bar{q}$. По аналогии с атомом водорода, для самых низколежащих состояний мы ожидаем $L = 0$. Для спина есть два варианта. В первом случае $S = 0$ и, соответственно, $J = 0$. Это соответствует легчайшему октету мезонов, для которого спин-четность

$$J^P = 0^- \quad (8.56)$$

– октет псевдоскалярных мезонов.

Чтобы объяснить отрицательную четность, учтем, что внутренняя четность фермиона

и антифермиона равна -1 :

$$P_{\text{внут}} (\text{ферм+антиферм}) = -1 \quad (8.57)$$

Полная четность определяется согласно формуле

$$P = P_{\text{внут}} \cdot (-1)^L \quad (8.58)$$

Поэтому для легчайших адронных состояний четность должна быть -1 .

Во втором случае спин $S = J = 1$. Тогда четность $P = -1$. Это состояние соответствует спин-четности

$$J^P = 1^- \quad (8.59)$$

это соответствует октету векторных мезонов.

Теперь рассмотрим барионы. В этом случае у нас три кварка. Рассмотрим различные случаи расположения спинов.

- Два кварка имеют спин в одну сторону, а третий – в противоположную. Это дает

$$S = J = \frac{1}{2} \quad (8.60)$$

При этом четность должна быть $P = +1$. Такая ситуация соответствует октету барионов.

- Если все спины сонаправлены, то

$$S = J = \frac{3}{2} \quad (8.61)$$

Эта ситуация соответствует декуплету барионов.

Однако тут возникает некоторое несоответствие. Можно показать, что все состояния в декуплете являются симметричными относительно перестановки флейворов. Это значит, что флейворная часть волновой функции симметрична относительно перестановки кварков. Теперь рассмотрим полную волновую функцию. У нее есть пространственная, спиновая и флейворная части:

$$\Psi = \Psi_{\text{простр}} \times \Psi_{\text{спин}} \times \Psi_{\text{флейв}} \quad (8.62)$$

Пространственная часть волновой функции имеет нулевой орбитальный момент. Это симметричная функция относительно перестановки кварков. Спиновая часть волновой функции тоже симметрична относительно перестановки кварков. Аналогично и для флейворной части волновой функции. Значит, вся волновая функция симметрична относительно перестановки кварков. Значит, получаем волновую функцию, симметричную относительно перестановки фермионов, что не согласуется с принципом Паули.

Предположили, что у кварков есть дополнительное квантовое число – цвет. Например, у кварка u есть три состояния $u_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$. Таким образом, волновая функция должна быть антисимметричной по цвету.

$$\Psi = \Psi_{\text{простр}} \times \Psi_{\text{спин}} \times \Psi_{\text{флейв}} \times \Psi_{\text{цвет}} \quad (8.63)$$

Чтобы построить антисимметричный объект из трех объектов в фундаментальном представлении, надо свернуть их с ϵ -символом:

$$u_\alpha u_\beta u_\gamma \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \quad (8.64)$$

Введение цвета также позволило объяснить отсутствие синглетов у барионов.