Лекция 5

Распределение Больцмана

Это распределение молекул по плотности, которое устанавливается в потенциальном силовом поле. Если распределение Максвелла — это распределение по скоростям, то распределение Больцмана – это распределение по координатам, потому что потенциальная энергия зависит от координат.

Барометрическая формула - формула, показывающая изменение давления газа с высотой (рис.17).

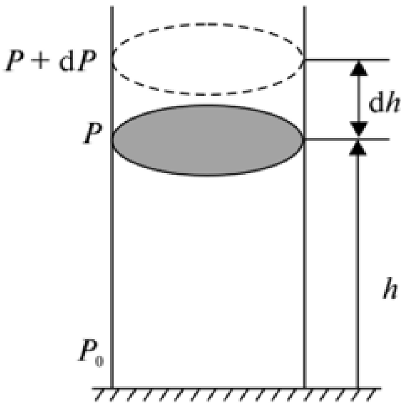

рис.17. Цилиндр с газом.

$$p - (p + dp) = \rho g dh \Rightarrow dp = -\rho g dh$$

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow \rho = \frac{\mu P}{RT}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{-\mu g}{RT} dh$$

$$\boxed{p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}}$$

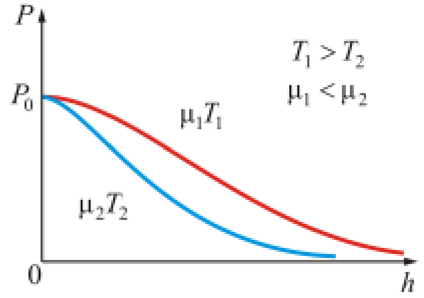

рис.18. Изменение P(h) с температурой.

$$p = nkT;\ p_0 = nkT;\ \frac{\mu}{R} = \frac{m}{k}$$

Тогда барометрическая формула приобретает вид:

$$\boxed{n = n_0 e^{\frac{-mgh}{kT}}}$$

Больцман предположил, что данная формула справедлива не только для поля сил земного тяготения, но и для произвольного стационарного потенциального силового поля, и для произвольной совокупности частиц типа идеального газа, находящегося в состоянии хаотического теплового движения.

$$n = n_0 e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}} | dxdydz$$

$$dN = n_0 e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}} dxdydz$$

$$dP(x,y,z) = Ae^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}} dxdydz$$

В данном случае это вероятность попадания молекулы в объем $dxdydz$ в окрестности точки с координатами (x, y, z), в которой потенциальная энергия имеет значение U.

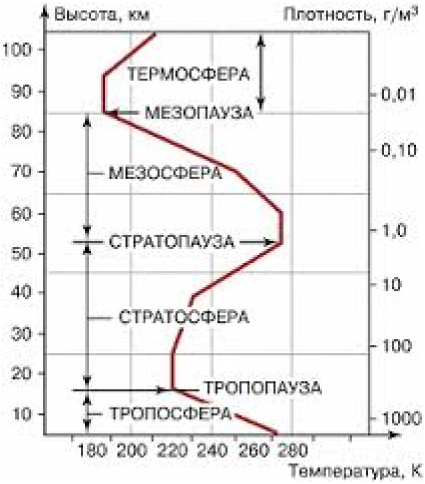

рис.19. Изменение температуры с высотой.

Рассмотрим распределение Больцмана на примере газа в центрифуге:

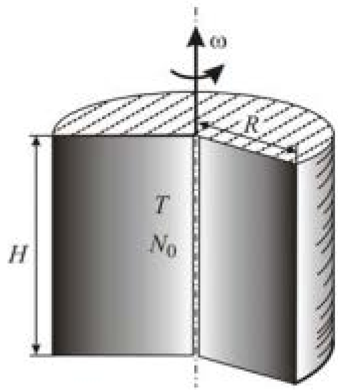

Рис.20. Центрифуга с газом.

$f = m\omega^2 R$ - центробежная сила

Данной силе можно сопоставить потенциальную энергию $u(r)$:

$$u(r) = -\frac{m\omega^2 R^2}{2}$$

Следовательно,

$$n(r) = n_0 e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}}$$

$$N = \int_0^R n(R) 2\pi R H \, dR$$

$$T \to \infty \Rightarrow p(R) = \langle n \rangle kT$$

$$T \to 0 \Rightarrow p(R) = \frac{N}{2\pi R H} m\omega^2 R$$

Условие теплового равновесия двух систем

$$\frac{\partial \ln \Gamma(E_1)}{\partial E_1} = \frac{\partial \ln \Gamma(E_2)}{\partial E_2}$$

$$\frac{\partial \ln \Gamma(E)}{\partial E} = \frac{1}{kT} \Rightarrow T_1 = T_2$$

Идеальный газ

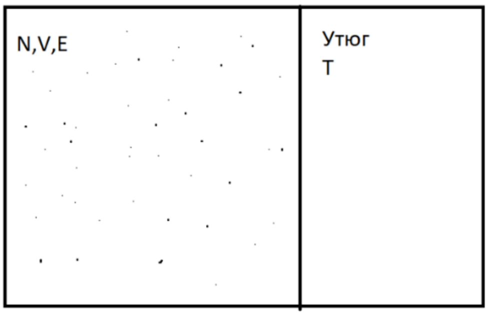

рис.21. Газ в объёме V.

$$\Gamma(N, V, E) = C V^N E^{3/2N}$$

$$\frac{\partial \ln \Gamma}{\partial E} = \frac{3}{2} N \frac{1}{E} = \frac{1}{kT}$$

$$E = \frac{3}{2} NkT$$

Две подсистемы (рис. 22)

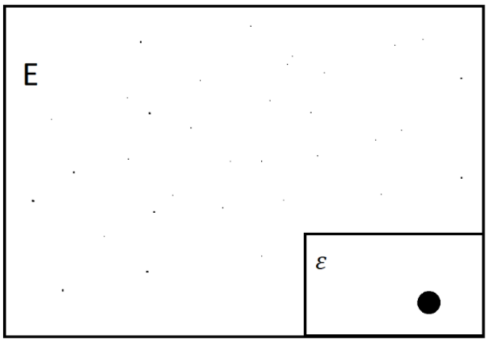

рис.22. Подсистемы.

$$E + \varepsilon = E_0;\ \varepsilon \ll E$$

$$P(\varepsilon) = \frac{\Gamma(E)}{\Gamma_0} = \frac{1}{\Gamma_0}\Gamma(E_0 - \varepsilon) =$$

$$\frac{1}{\Gamma_0} e^{ln\,\Gamma(E_0-\varepsilon)} = A_e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

$$\boxed{P(\varepsilon) = Ae^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} - \text{распределение Гиббса}$$