

## Лекция 4. Задача Коши для уравнения 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Существование решения

### Постановка задачи

#### 1) Признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n, \quad C_n \geq 0$$

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = q < 1,$$

то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  сходится.

#### 2) Признак Вейерштрасса

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

Если  $|U_n(t)| = C_n \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad \forall n \geq 2$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  сходится,

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)$$

сходится равномерно на отрезке  $[t_1, t_2]$ .

#### 3) Теорема о равномерной сходимости

Если  $U_n(t) \in C[t_1, t_2] \quad \forall n = 1, 2, \dots$  и  $U_n(t) \xrightarrow{\rightarrow} \bar{U}(t)$ , то  $\bar{U}(t) \in C[t_1, t_2]$ .

### Теорема существования

Пусть функция  $f(t, y)$  определена и непрерывна в прямоугольнике  $\Pi$  и удовлетворяет в  $\Pi$  условию Липшица по  $y$ . Тогда на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$ , где  $h = \min\left\{T, \frac{A}{M}\right\}$ ,  $M = \max|f(t, y)|$  существует функция  $\bar{y}(t)$  такая, что

$$\bar{y}(t) \in C^1[t_0 - h, t_0 + h],$$

$$\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t))$$

$$t \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

$$\bar{y}_0(t) = y_0$$

$$y'(t) = f(t, y(t)). \quad (8)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (9)$$

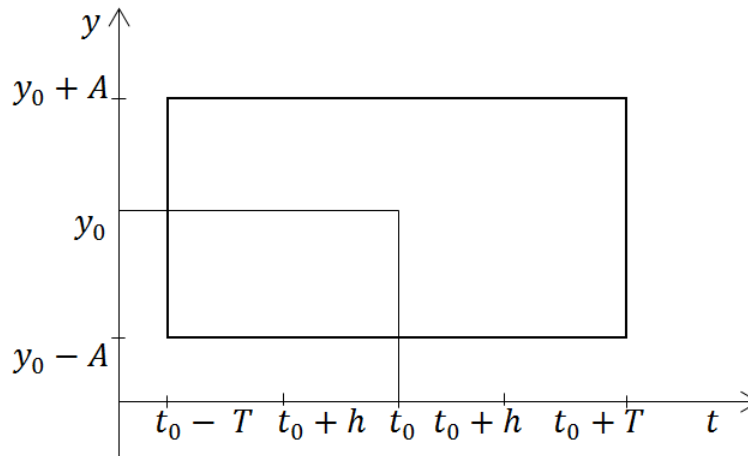


Рис. 4.1. Рассматриваемый прямоугольник

$$\Pi = \{(t, y_0): |t - t_0| \leq T, |y - y_0| \leq A\}$$

Рассмотрим на  $[t_0 - h, t_0 + h]$  интегральное уравнение

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (10)$$

1) Докажем, что если  $\bar{y}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ ,  $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$  и  $\bar{y}(t)$  является решением (10), то  $\bar{y}(t)$  решение задачи Коши (1),(2) на  $[t_0 - h, t_0 + h]$ .

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau \Rightarrow t = t_0$$

$$\bar{y}(t_0) = y_0$$

$$\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t))$$

$$\bar{y}(t) \in C^1[t_0 - h, t_0 + h]$$

**Доказательство:**

Определим последовательность функций  $y_n(t)$  на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$ . Возьмем  $y_0(t) = y_0$ ,

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_n(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

2) Докажем, что  $y_n(t)$  существует и непрерывно на  $[t_0 - h, t_0 + h]$  и  $|y_n(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ ,  $n = 1, 2 \dots$

**Доказательство:**

При  $n = 0$ ,  $y_0(t) = y_0 \exists$  непрерывна  $|y_0(t) - y_0| = 0 \leq A$ .

Пусть утверждение верно при  $n = m$ . Докажем при  $n = m + 1$ :

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_m(\tau)) d\tau$$

$$|y_m(t) - y_0| \leq A$$

$$y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$$

3) Докажем, что  $|y_{m+1}(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ .

**Доказательство:**

$$\left| y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_m(\tau)) d\tau - y_0 \right| \leq \left| \int_{t_0}^t M d\tau \right| \leq Mh \leq M \frac{A}{M} = A$$

4) Докажем, что  $|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq AL^n \frac{|t-t_0|^n}{n!}$ ,  $n = 0, 1 \dots t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ .

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq AL^n \frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad (11)$$

**Доказательство:**

Пусть  $n = 0$ , тогда:

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_0(\tau)) d\tau - y_0 \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_0(\tau))| d\tau \right| \leq Mh \leq M \frac{A}{M} = A. \end{aligned}$$

5) Пусть неравенство (11) верно для  $n = m - 1$ ,  $|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq AL^{m-1} \frac{|t-t_0|^{m-1}}{(m-1)!}$ .

Докажем, что  $|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leq AL^m \frac{|t-t_0|^m}{m!}$ .

**Доказательство:**

$$\begin{aligned}
 |y_{m+1}(t) - y_m(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_m(\tau)) d\tau - y_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \right| = \\
 &= \left| \int_{t_0}^t [f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))] d\tau \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))| d\tau \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_{t_0}^t L |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| d\tau \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_{t_0}^t L A L^{-1} \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| \leq \\
 &\leq A L^m \int_{t_0}^t \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \leq \\
 &\leq A L^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}.
 \end{aligned}$$

6) Рассмотрим выражение

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(t) - y_{k-1}(t)).$$

Докажем, что ряд  $\sum_{k=1}^n (y_k(t) - y_{k-1}(t))$  сходится равномерно на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned}
 |y_k(t) - y_{k-1}(t)| &\leq A L^{k-1} \frac{|t - t_0|^{k-1}}{(k-1)!} \leq \\
 &\leq A L^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}, \quad k = 1, 2, \dots, t \in [t_0 - h, t_0 + h] \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_{k+1}}{C_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L^{k+1} h^{k+1} k!}{(k+1)! L^k h^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Lh}{k+1} = 0 \\
 y_n(t) &\xrightarrow{\rightarrow} \bar{y}(t), \quad [t_0 - h, t_0 + h] \\
 \bar{y}(t) &\in C[t_0 - h, t_0 + h].
 \end{aligned}$$

7) Докажем, что  $\bar{y}(t)$  – решение уравнения (10).

**Доказательство:**

$$y_{n+1}(t) \xrightarrow{\rightarrow} \bar{y}(t), \quad [t_0 - h, t_0 + h].$$

8) Докажем, что  $\left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_n(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau \right| \xrightarrow{\rightarrow} 0 \quad n \rightarrow \infty \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_n(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_n(\tau)) - f(\tau, \bar{y}(\tau))| d\tau \right| \leq \\ & \leq Lh \max |y_n(t) - \bar{y}(t)| \rightarrow 0 \\ & \bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Почему существование решения рассматривается на маленьком отрезке, пример:

$$y'(t) = a((y(t))^2 + 1) \quad (12)$$

$$y(0) = 0 \quad (13)$$

$$f(t, y) = a(y^2 + 1)$$

$$y(t) = tgat$$