Лекция 1. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение. Примеры

Определение 1.1. Пусть области $D_1 \subset D_2 \subset \mathbb{C}$, функции f_1 и f_2 голоморфны в областях D_1 и D_2 соответственно и $f_1 = f_2$ на D_1. Тогда f_2 называется *аналитическим продолжением* f_1 с D_1 на D_2.

Пример 1.1. Пусть $D_1 = \{|z| < 1\}$, а

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Функцию $f_1(z)$ можно продолжить на $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Замечание 1.1. По теореме единственности, при данных D_1, f_1 и D_2, существует не более одной функции f_2 такой, что $f_2 = f_1$ на D_1.

В вещественном анализе это не так. Гладкая функция может иметь более, чем одно продолжение на больший отрезок.

Пример 1.2. Вспомним теорему Римана об устранимой особенности.

Пусть
$$D_1 = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}, \quad D_2 = \{|z-a| < \varepsilon\},$$
а $f_1 \in \mathcal{O}(D_1)$ ограничена. Тогда $\exists\ f_2 \in \mathcal{O}(D_2)$ такая, что

$$f_1 = f_2, \quad \text{на } D_2.$$

Бывает, что вместо D_1 исходная функция f_0 задана на интервале или луче $I \subset \mathbb{R}$:

$$f_0 : \ I \to \mathbb{C} \text{ или } (\mathbb{R}).$$

Ищется область $D_2 \supset I$ и функция $f_2 \in \mathcal{O}(D_2)$ такая, что

$$f_2 = f_0 \text{ на } I.$$

По теореме единственности, при заданных I, f_0, D_2 таких функций f_2 не более одной.

Пример 1.3. Пусть
$$I = (0, +\infty) \subset \mathbb{R},$$
$$f_0(x) = \ln x.$$

Например, сначала продолжим f_0 с I на

$$D_1 = \{\mathrm{Re} z > 0\}$$

по формуле

$$f_1(z) = \ln|z| + \arg z, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

Хотелось бы найти большую область, на которую можно продолжить f_0. Для $\forall$ $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ $\exists$ $f_2^\alpha \in \mathcal{O}(D_2^\alpha)$, где (рис. 1.1)

$$D_2^\alpha = \{z \in \mathcal{C} : \ \alpha - 2\pi < \arg z < \alpha\},$$

такая, что

$$f_2^\alpha = f_1 \text{ на } D_1 \subset D_2^\alpha.$$

А именно,

$$f_2^\alpha(z) = \ln|z| + i \arg z, \quad \alpha - 2\pi < \arg z < 2\pi.$$

Итак, не $\exists$ аналитического продолжения (D_2, f_2) пары (D_1, f_1), которое содержало бы все остальные аналитические продолжения этой пары.

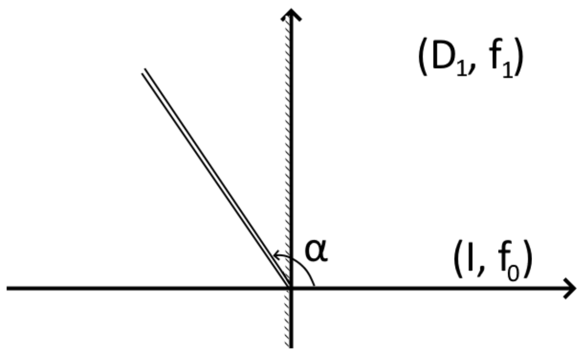

Рис. 1.1. Области АП $f_0 = \ln x$.

Два аспекта задач аналитического продолжения

- (min) Найти хотя бы одно аналитическое продолжение (D_2, f_2) данной пары (D_1, f_1) (или (I, f_0)).
- (max) Описать возникающую в результате всех возможных продолжений «многозначную функцию».

Голоморфная зависимость интеграла от параметра

Теорема 1.1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, а*

$$\varphi : \ [a, b] \times D \to \mathbb{C}$$

– непрерывная функция такая[1]*, что $\varphi(t, \cdot) \in \mathcal{O}(D)$ при $\forall$ $t \in [a, b]$. Тогда функция*

$$f(z) := \int\limits_a^b \varphi(t, z)dt$$

[1]Напомним, что обозначение $\varphi(z) \in \mathcal{O}(D)$ означает голоморфность $\varphi(z)$ на D.

тоже $\in \mathcal{O}(D)$.

Доказательство. Для любого открытого круга $U \subset D$ функция f непрерывна на U (в силу равномерной непрерывности φ на $[a,b] \times K$ для $\forall$ компакта $K \subset U$).

Для $\forall$ открытого треугольника[2] $T \subset\subset U$ имеем

$$\int\limits_{\partial T} f(z)dz = \int\limits_{\partial T} \int\limits_a^b \varphi(t,z)dtdz.$$

По теореме Фубини из курса математического анализа,

$$\int\limits_{\partial T} \int\limits_a^b \varphi(t,z)dtdz = \int\limits_a^b \int\limits_{\partial T} \varphi(t,z)dzdt = \int\limits_a^b 0dt = 0$$

по лемме Гаусса (или теореме Коши).

Следовательно, $f \in \mathcal{O}(U)$ по теореме Морера. В силу произвольности $U \subset D$, $f \in \mathcal{O}(D)$. □

Гамма-функция Эйлера

По определению,

$$\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad \forall\ x > 0.$$

Утверждение 1.1. *При* $z = x + iy$, $x > 0$, *интеграл*

$$f_1(z) := \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

сходится к $f_1 \in \mathcal{O}(D_1)$, *где*

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ Rez > 0\}. \tag{1}$$

Доказательство. Справедливо представление

$$f_1(z) = \varphi(z) + \psi(z),$$

где

$$\varphi(z) := \int\limits_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt, \quad \psi(z) := \int\limits_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

По определению,

$$t^{z-1} := e^{(z-1)\ln t}, \quad t > 0, \quad z \in \mathcal{C}.$$

[2]Запись $T \subset\subset U$ означает компактное включение, то есть замыкание T лежит в U.

Из того, что
$$|e^A| = e^{\mathrm{Re}A}, \quad A \in \mathcal{C},$$
следует, что
$$|t^{z-1}| = e^{(x-1)\ln t} = t^{x-1},$$
где $x = \mathrm{Re}z$.

Поэтому для
$$\psi(z) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(z),$$
где
$$\psi_n(z) := \int\limits_1^n e^{-t}t^{z-1}dt,$$
верно, что $\psi(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ в силу теоремы 1.1.

Кроме того,
$$\psi_n \to \psi$$
равномерно на компакте в $\mathbb{C}$. Это следует из того, что
$$|\psi_n(z) - \psi(z)| = \left|\int\limits_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leq \int\limits_n^\infty e^{-t}t^{x-1}dx,$$
откуда
$$\max_{z\in K}|\psi_n(z) - \psi(z)| \leq \int\limits_n^\infty e^{-t}t^{M-1}dt \ \to \ 0, \quad n \ \to \ \infty,$$
где
$$M = \max_{z\in K}(\mathrm{Re}z).$$
Тогда по теореме Вейерштрасса о рядах $\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Аналогично показывается, что $\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{Re}z > 0)$, поскольку
$$\underbrace{\int\limits_{1/n}^1 e^{-t}t^{-z}dt}_{\in\mathcal{O}(\mathrm{Re}z>0)} \ \to \ \int\limits_0^1 e^{-t}t^{-z}dt$$
равномерно на компакте в $\{\mathrm{Re}z > 0\}$. □

Утверждение 1.2. $\exists$ *единственная* $F \in \mathcal{O} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ *такая, что*
$$F(z) = \Gamma(z), \quad \forall\, z \in D_1,$$
или, эквивалетно,
$$F(x) = \Gamma(x), \quad \forall\, x \in I = (0, +\infty).$$

При этом[3] $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ *имеет при* $z = n$, $n \in \{0, -1, -2, \dots\}$, *полюс* 1*-го порядка с вычетом*

$$\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Доказательство. Разложив в ряд e^{-t}, получим, что

$$\varphi(z) = \int\limits_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \int\limits_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+2-1}}{n!} dt = S_1, \tag{2}$$

поскольку при $\mathrm{Re} z > 1$ все члены ряда непрерывны на $[0,1]$ и ряд сходится равномерно на $[0,1]$ (по теореме Вейерштрасса). Более того, если $\mathrm{Re} z > 1$ (а не просто $\mathrm{Re} z > 0$), то

$$\int\limits_0^1 t^{n+z-1} dt = \frac{1}{n+z}$$

по формуле Ньютона – Лейбница. Тогда сумма (2) равна

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}, \quad \mathrm{Re} z > 1. \tag{3}$$

Ряд (2) сходится равномерно на $\forall$ компакте $K \subset \mathbb{C}$, если отбросить те его члены (их конечное число), которые имеют полюсы на K (рис. 1.2), так как

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \right| \le \frac{1}{n! d}, \quad \forall\, z \in K,$$

где

$$d = \mathrm{dist}\left(\mathbb{Z} \setminus \{\text{полюса из } K\}, K\right).$$

Следовательно, функция

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$$

– мероморфная на всей плоскости функция с полюсами и вычетами, как обозначенными в утверждении. Тогда функция

$$F(z) := g(z) + \psi(z)$$

является искомой функцией. $\square$

Замечание 1.2. Утверждение 1.2 позволяет расширить продолжение $\Gamma(z)$ с D_1 (1) на D_2 (рис. 1.2).

[3] Напомним, что запись

$$f \in \mathcal{M}(D)$$

означает, что $f(z)$ является мероморфной в области D.

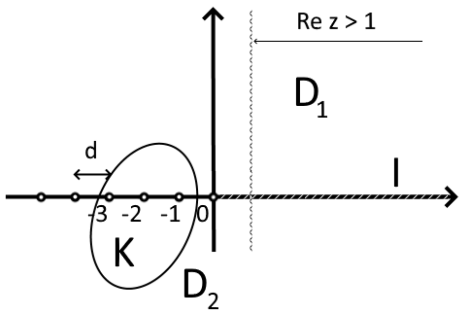

Рис. 1.2. Области в АП $\Gamma(z)$

Формула дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$

Утверждение 1.3. *Справедлива формула*[4][5]

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z, \quad \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Доказательство. По теореме единственности, достаточно доказать (4) для всех $z = \alpha \in (0,1)$. В определении

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

сделаем замену

$$t = 2^s, \quad dt = 2sds.$$

Получим

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty s^{2\alpha-2} e^{-s^2} 2sds = 2\int\limits_0^\infty x^{2\alpha-1} e^{-x^2} dx.$$

Аналогично,

$$\Gamma(1-\alpha) = 2\int\limits_0^\infty y^{2(1-\alpha)-1} e^{-y^2} dy.$$

Отсюда

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = 4\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x^{2\alpha-1} y^{1-2\alpha} e^{-x^2+y^2} dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ dxdy = rdrd\theta. \end{cases}$$

[4]Здесь и далее функцию F из утверждения 1.2 будем обозначать $\Gamma(z)$ в силу единственности продолжения функции.

[5]Вообще говоря, при $z \in \mathbb{Z}$ обе части (4) обращаются в бесконечность, а значит, (4) остается справедливой. Будем, однако, рассматривать только конечный случай.

При этом область интегрирования $X \times Y = (0,\infty) \times (0,\infty)$ переходит в область $P \times \Theta = (0,\infty) \times (0,\pi/2)$. Получим

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = 4\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\infty} r^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\alpha-1}r^{1-2\alpha}(\sin\theta)^{1-2\alpha}e^{-r^2}rdrd\theta =$$

$$= 2\int\limits_0^{pi/2}(\operatorname{ctg}\theta)^{2\alpha-1}d\theta = I_1, \tag{5}$$

так как

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2}2rdr = 1.$$

Вычислим интеграл (5). Для этого сделаем замену

$$x = (\operatorname{ctg}\theta)^2, \quad x^{1/2} = \operatorname{ctg}\theta,$$

$$\frac{1}{2}x^{-1/2}dx = -\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = -(x+1)d\theta.$$

Отсюда

$$I_1 = 2\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{2}\frac{x^{-1/2}dx}{x+1}\cdot x^{\alpha-1/2} = \int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{x+1}.$$

Такой интеграл вычисляется с помощью вычетов.

Положим область

$$D_{\varepsilon,R} := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R, \quad 0 < \arg z < 2\pi\}$$

и функцию

$$f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z+1},$$

где

$$z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln z},$$

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Формально говоря, $D_{\varepsilon,R}$ не является областью с простой границей, но ее можно разбить на области D_1 и D_2 (рис. 1.3). Можно вычислить по границе D_1 и D_2 интегралы. При их суммировании интегралы по добавленным разрезам сократятся, поэтому теорему о вычетах можно применить и ко всей $D_{\varepsilon,R}$.

Итак, по теореме Коши о вычетах для D_1 и D_2

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}\{z=-1\}\cdot f(z) = \int_{\partial D_{\varepsilon,R}} f(z)dz =$$

$$= \int\limits_r^R\left(\frac{x^{\alpha-1}}{x+1} - \frac{e^{(\alpha-1)(\ln x + 2\pi i)}}{x+1}\right)dx + \int\limits_{\gamma_R} f(z)dz - \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz. \tag{6}$$

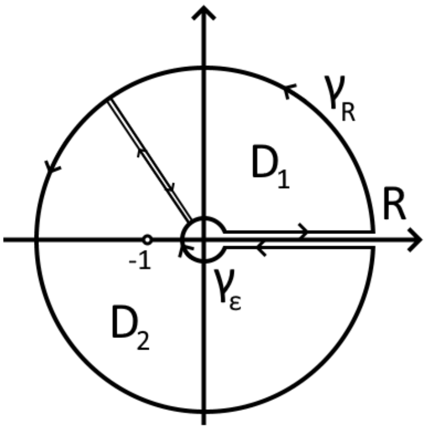

Рис. 1.3. Область $D_{\varepsilon,R}$

Так как по стандартной оценке

$$\left|\int\limits_{\gamma_R}\ldots\right| \le \max_{\gamma_R}|f(z)|2\pi R \le \frac{R^{\alpha-1}}{R-1}2\pi R \to 0, \quad R\to\infty,$$

так как $\alpha < 1$, и, аналогично,

$$\left|\int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz\right| \to 0, \quad \varepsilon\to 0,$$

так как $\alpha > 0$, два последних интеграла в (6) равны $o(1)$. Тогда

$$\int_{\partial D_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \left(1-e^{(\alpha-1)2\pi i}\right)\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx + o(1), \quad \varepsilon\to 0, \quad R\to\infty,$$

откуда

$$2\pi i e^{(\alpha-1)\pi i} = \left(1-e^{(\alpha-1)\pi i}\right)\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx.$$

С помощью несложных арифметических преобразований получим, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \quad 0<\alpha<1.$$

Формула (4) доказана. □