

Лекция 17

Суммирование расходящихся рядов

Например, если рассмотреть

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Если подставить $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ “} = \text{” } \frac{1}{2}$$

Ряд в левой части расходится, то есть выражение не существует при $x = -1$, при этом то, чему в остальных x оно равно, непрерывно продолжается на эту точку. Рассмотрим два способа суммирования.

(I) Суммирование Пуассона-Абеля.

Число A называется *суммой по методу Пуассона-Абеля ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (не предполагается сходящимся), если $\forall x \in (0, 1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится и

$$A = \lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (17.1)$$

Если предел существует, то говорят, что *ряд суммируем по Пуассону-Абелю*.

Требования к способу суммирования:

- 1) **Линейность.** Если $\sum_n a_n$ суммируемо к A , $\sum_n b_n$ суммируемо к B , то $\sum_n (\alpha a_n + \beta b_n)$ суммируемо к $\alpha A + \beta B$.
- 2) **Регулярность.** Если ряд сходится и его сумма A , то этот ряд суммируем к A .

Утверждение 33. *Метод суммирования Пуассона-Абеля линеен и регулярен.*

Доказательство. Возьмем $\sum_n a_n$ и $\sum_n b_n$, по ним составляем ряды $\sum_n a_n x^n$ и $\sum_n b_n x^n$, они сходятся на $(0, 1)$, тогда $\sum_n (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$ сходится на $(0, 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_n (\alpha a_n + \beta b_n) x^n = \lim_{x \rightarrow 1-} \alpha \sum_n a_n x^n + \lim_{x \rightarrow 1-} \beta \sum_n b_n x^n = \alpha A + \beta B$$

Пусть $\sum_n a_n x^n$, то есть $\sum_n a_n x^n$ сходится в 1, тогда по второй теореме Абеля этот ряд сходится равномерно на $[0, 1]$, тогда можно переставлять местами предел и сумму, значит

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_n a_n x^n = \sum_n \lim_{x \rightarrow 1-} a_n x^n = \sum_n a_n = A$$

□

Пример 22.

1) Таким способом мы уже получили, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$$

так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 1-} \frac{1}{2}$$

2) Рассмотрим $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n \right)' = \\ &= x \left(\frac{-x}{1+x} \right)' = -\frac{x}{(1+x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1-} -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Значит

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n = -\frac{1}{4}$$

(II) Суммирование по Чезаро. Пусть у нас есть ряд $\sum_n a_n$ (не обязательно сходится), S_N - его частичные суммы. Говорят, что ряд *суммируем по Чезаро* к A , если

$$\frac{S_1 + \dots + S_N}{N} \rightarrow A \quad (17.2)$$

Утверждение 34. Метод Чезаро линеен и регулярен.

Доказательство. Возьмем ряды $\sum_n a_n$ и $\sum_n b_n$ с частичными суммами S_N^a и S_N^b соответственно. У ряда $\sum_n (\alpha a_n + \beta b_n)$ будут частичные суммы $\alpha S_N^a + \beta S_N^b$, тогда если выписать средние арифметические, то получим

$$\alpha \frac{S_1^a + \dots + S_N^a}{N} + \beta \frac{S_1^b + \dots + S_N^b}{N} \rightarrow \alpha A + \beta B$$

Пусть $\sum_n a_n = A$, то есть $S_N \rightarrow A$, пусть

$$\tilde{S}_N = S_N - A \rightarrow 0$$

$$\frac{S_1 + S_N}{N} - A = \frac{\tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_N}{N}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists M : \forall N > M :$

$$|\tilde{S}_N| < \varepsilon$$

Рассмотрим

$$\frac{\tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_N}{N} = \frac{\tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_M}{N} + \frac{\tilde{S}_{M+1} + \dots + \tilde{S}_N}{N}$$

$$\left| \frac{\tilde{S}_{M+1} + \dots + \tilde{S}_N}{N} \right| < \varepsilon$$

А устремляя N к бесконечности можем добиться, что

$$\left| \frac{\tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_M}{N} \right| < \varepsilon$$

□

Пример 23. Рассматриваем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

$$S_N = \begin{cases} 1, & N = 2k \\ 0, & N = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\frac{S_0 + S_N}{N + 1} = \begin{cases} \frac{m+1}{2m+2} & N = 2m + 1 \\ \frac{m+1}{2m+1} & N = 2m \end{cases} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

Утверждение 35. Если ряд $\sum_n a_n$ суммируем по Чезаро, то

$$a_n = o(n)$$

Доказательство. Пусть

$$A_N = \frac{S_1 + \dots + S_N}{N}$$

тогда

$$S_N = NA_N - (N - 1)A_{N-1} = N \left(A_N - \left(1 - \frac{1}{N} \right) A_{N-1} \right) = o(N)$$

так как

$$A_N - \left(1 - \frac{1}{N} \right) A_{N-1} \rightarrow 0$$

$$a_N = S_N - S_{N-1} = o(N)$$

□

Теорема 35 (Фробениус). Если ряд суммируем по Чезаро к A , то этот ряд суммируем по Пуассону-Абелю к A .

Доказательство. Рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, так как $a_n = o(n)$, то ряд сходится при $0 < x < 1$. Считаем, что

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, S_{-1} = 0, \dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n - \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^{m+1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n (x^n - x^{n+1}) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = \\ &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n - (n-1)A_{n-1}) x^n = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n \\ \sum_{n=1}^{\infty} n x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Получаем, что

$$\begin{aligned} (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n &= Ax \\ (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n &= (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n - A)x^n + Ax \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N$

$$|A_n - A| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n - A)x^n + Ax &= (1-x)^2 \sum_{n=1}^N n(A_n - A)x^n + \\ &+ (1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n(A_n - A)x^n + Ax \\ \left| (1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n(A_n - A)x^n \right| &\leq \varepsilon x \\ (1-x)^2 \sum_{n=1}^N n(A_n - A)x^n &\xrightarrow{x \rightarrow 1-} 0 \end{aligned}$$

Получаем, что

$$(1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n - A)x^n + Ax \rightarrow A$$

□

Замечание 7. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по Пуассону-Абелю к A и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ суммируем по Пуассону-Абелю к B . Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)$ суммируем по Пуассону-Абелю к $A \cdot B$. Это происходит, так как если взять $\sum_n a_n x^n$ и $\sum_n b_n x^n$, когда $0 < x < 1$, то эти ряды сходятся абсолютно, поэтому

$$\left(\sum_n a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_n b_n x^n \right) = \sum_n (a_n b_0 + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) x^n$$

И устремляем $x \rightarrow 1$.

Пример 24. Рассматриваем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \infty$$

То есть по Абелю-Пуассону мы просуммировать не можем.

Попробуем сделать это при помощи ζ - регуляризации.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Формула Эйлера:

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n) = \int_1^N f(x) dx + \int_1^N \{x\} f'(x) dx$$

Если все сходится, то можем

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_1^{\infty} f(x) dx + \int_1^{\infty} \{x\} f'(x) dx$$

У этой формулы есть обобщение

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_1^{\infty} f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_1^{\infty} + (-1)^{m+1} \int_1^{\infty} \frac{B_m(\{x\}) f^{(m)}(x)}{m!} dx$$

где B_k - числа Бернулли.

$$0^m + 1^m + \dots + (n-1)^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}$$

числа Бернулли удовлетворяют следующему соотношению

$$\sum_{j=0}^m C_m^j B_j = 0$$

$$B_0 = 1$$

Найдем B_1 при $m = 1$

$$C_2^0 B_0 + C_2^1 B_1 = 0$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}$$

Аналогично можно находить остальные числа Бернулли, например

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

$$B_3 = 0$$

$B_m(t)$ - многочлены Бернулли

$$B_m(t) = \sum_{j=0}^m C_m^j B_j t^{m-j}$$

Хотим применить формулу к функции $f(x) = \frac{1}{x^s}$, $s > 1$, $m = 3$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$$

$$f^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} s(s+1)\dots(s+k-2)}{x^{s+k-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \frac{B_1}{1!} \cdot (-1) + \frac{B_2}{2!} s + (\text{в остальных слагаемых будет } s+1) +$$

$$+ (-1)^m \int_1^{\infty} \frac{B_m(\{x\}) s(s+1)\dots}{x^{s+m}} dx$$

Интеграл будет сходиться при $s+m > 1$. Возьмем $s = -1$, то получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12}$$

$\zeta(s)$ единственным образом продолжается со значений $s > 1$ на остальные, то есть мы находим это значение, используя единственное возможное продолжение.