



ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

ВЛАСОВ
ВИКТОР ВАЛЕНТИНОВИЧ

—
ВМК МГУ

—
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КЛЮШНИКОВА НИКИТУ СЕРГЕЕВИЧА



Оглавление

1	Лекция 1. Введение в ТФКП	6
1.1	Введение в примерах	6
1.2	Литература	7
1.3	Комплексные числа	7
1.4	Действия с комплексными числами	7
1.5	Стереографическая проекция.	11
1.6	Ряды и последовательности в ТФКП	12
1.7	Функции комплексного переменного.	13
1.8	Дифференцируемость комплексной функции.	13
2	Лекция 2. Интегрирование функций комплексного переменного. Часть 1 .	16
2.1	Обобщение предыдущей лекции	16
2.2	Регулярность в точке	17
2.3	Связь регулярности и дифференцируемости функции в точке	17
2.4	Интеграл функции комплексной переменной по кривым	18
2.5	Свойства и оценки интегралов	19
2.6	Формула Грина	19
2.7	Интегральная теорема Коши	20
3	Лекция 3. Интегрирование функций комплексного переменного. Часть 2 .	22
3.1	Теорема Коши (повторение)	22
3.2	Интегральная формула Коши	22
3.3	Интеграл типа Коши	24
3.4	Первая теорема Абеля	24
3.5	Формула Коши-Адамара	25
3.6	Теорема о представлении функции рядом Тейлора	26
4	Лекция 4. Теоремы Вейерштрасса и единственности	27
4.1	Теорема Вейерштрасса	27
4.2	Теорема единственности	28
4.3	Применение теоремы о единственности	30
5	Лекция 5. Ряды Лорана	31
5.1	Определение рядов Лорана	31
5.2	Сходимость ряда Лорана	31

5.3	Теорема Лорана-Вейерштрасса	32
5.4	Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана	33
5.5	Теорема Лиувилля	34
5.6	Изолированные точки однозначного характера (ИОТОХ)	34
5.7	Теорема об устранимой особой точке	35
6	Лекция 6. Особые точки однозначного характера	36
6.1	Доказательство теоремы из прошлой лекции	36
6.2	Теорема о существенно особой точке	36
6.3	Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечности	37
6.4	Теорема Сохоцкого	38
6.5	Теорема Пикара	38
6.6	Теорема Мореры	39
7	Лекция 7. Существенно особая точка	40
7.1	Теорема об эквивалентности утверждений	40
7.2	Теорема о существенно особой точке.	43
7.3	Теорема Сохоцкого.	43
7.4	Теорема Пикара.	46
7.5	Примеры.	47
8	Лекция 8. Теорема Мореры. Вычеты	50
8.1	Первообразная	50
8.2	Условия существования первообразной	50
8.3	Теорема Мореры	53
8.4	Определение регулярных (аналитических) функций	53
8.5	Теория вычетов	54
8.6	Основная теорема для конечных точек и ограниченных областей	55
8.7	Основная теорема 2 теории вычетов	56
8.8	Следствие из теоремы	58
9	Лекция 9. Теория вычетов	59
9.1	Пример (вычислить интеграл от заданной функции)	59
9.2	Лемма (формула вычисления вычета в случае полюса)	60
9.3	Следствие из леммы	61
9.4	Пример (вычислить интеграл от рациональной функции)	61
9.5	Пример (вычислить интеграл)	63
10	Лекция 10. Лемма Жордана	66
10.1	Лемма Жордана	66
10.2	Пример	67
10.3	Изолированная особая точка однозначного характера	69
10.4	Задача (исследовать особые точки заданной функции)	70
10.5	Пример (найти интеграл по окружности по заданным параметрам)	71

11	Лекция 11. Принцип аргумента. Теорема Руше	73
11.1	Многозначные числа	73
11.2	Логарифмический вычет. Принцип аргумента	74
11.3	Теорема Руше	76
11.4	Основная теорема алгебры	78
11.5	Задача (следствие теоремы Руше)	78
11.6	Теорема Гурвица	79
12	Лекция 12. Конформные отображения. Часть 1	80
12.1	Теорема 1 (принцип сохранения области)	80
12.2	Теорема 2 (принцип максимума модуля)	82
12.3	Следствие из теоремы 2	83
12.4	Задача Дирихле для уравнения Лапласа	84
12.5	Конформное отображение (определение)	84
12.6	Теорема Римана	84
12.7	Дробно-линейные отображения	85
12.8	Круговое свойство дробно-линейного отображения	86
12.9	Лемма 1	87
13	Лекция 13. Конформные отображения. Часть 2	89
13.1	Круговое свойство дробно-линейного отображения.	89
13.2	Свойство линейного отображения.	90
13.3	Функция Жуковского. Свойства функции Жуковского.	91
13.4	Обобщённая степенная функция.	95
13.5	Экспоненциальная функция.	95
13.6	Задача (конформные отображения)	97
13.7	Принцип симметрии	100

Лекция 1. Введение в ТФКП

Введение в примерах

Пример 1:

Рассмотрим функцию $\frac{1}{1+x^2}$:

- На любом отрезке $|x| < 1$ ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots \quad (1.1)$$

будет равномерно сходиться.

- При $|x| > 1$ необходимое условие сходимости не выполняется (общий член ряда не стремится к нулю), но можно поступить следующим образом:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \dots\right) \quad (1.2)$$

- При $|x| = 1$ сходимости рядов нет. Функция в точках ± 1 является бесконечное число раз дифференцируемой, так почему же два таких разложения и нет сходимости при $|x| = 1$? В комплексной плоскости у функции $\frac{1}{z^2+1}$ в точках $z = \pm i$ есть особенности. По теореме ... радиус сходимости степенного ряда определяется расстоянием от начала координат до ближайшей особой точки.

Пример 2:

Функция:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}), \exists f^{(k)}(0) = 0$$

$$f(x) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \equiv 0$$

Функция $f(x)$ бесконечно дифференцируемая, однако ее нельзя представить в виде ряда Тейлора. Перейдем в комплексную плоскость:

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \quad z = iy, f(iy) = e^{\frac{1}{y^2}}, y \neq 0$$

При $y \rightarrow \pm 0$ функция $f(iy)$ экспоненциально быстро растет.

Пример 3:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Интеграл сходится по признаку Дирихле: функция $\frac{x}{x^2+2x+2}$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, а функция $\cos x$ имеет ограниченную первообразную.

Комплексный анализ позволяет определить чему равен этот интеграл.

Литература

- А.Н. Тихонов, ... Свешников ТФКП
- Б. В. Шабат, Комплексный анализ, том 1
- Ю. В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.В Шабунин, ТФКП
- Т. С. Леонтьева, ...
- М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, ...

Комплексные числа

Имеет место обозначение:

$$z = x + iy \quad (1.3)$$

и соглашение

$$i^2 = -1 \quad (1.4)$$

Где x и y - действительные числа.

Действия с комплексными числами

Сложение

Сумма двух комплексных чисел - это просто операция сложения двух векторов по правилу параллелограмма (на плоскости XY).

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.5)$$

Умножение

Домножение на константу тривиально:

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha z = \alpha x + i\alpha y \quad (1.6)$$

Перемножение двух комплексных чисел, просто раскроем скобки:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \quad (1.7)$$

Определим модуль комплексного числа:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.8)$$

Тогда распишем:

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.9)$$

Получили полярную форму представления комплексного числа.

Здесь углы определены как:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi \quad (1.10)$$

и

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi \quad (1.11)$$

То есть:

$$|z| \cdot \cos \varphi = x \quad (1.12)$$

и

$$|z| \cdot \sin \varphi = y \quad (1.13)$$

Вводится аргумент комплексного числа:

$$\varphi = \arg z \quad (1.14)$$

Многозначный аргумент:

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.15)$$

Формула Эйлера. Введём как соглашение:

$$\varphi \in \mathbb{R}, \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1.16)$$

Получается представление комплексного числа, называемое полярным:

$$x + iy = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i \arg z} \quad (1.17)$$

Тогда, перемножение двух комплексных чисел будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)\} = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Таким образом, при перемножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

Деление

Если есть комплексное число:

$$z = x + iy \quad (1.19)$$

То существует комплексно сопряжённое к нему число:

$$\bar{z} = x - iy \quad (1.20)$$

Отсюда следует свойство:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (1.21)$$

Запишем деление двух комплексных чисел:

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{|z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) |\bar{z}_2| (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{|z_2|^2} = \\ &= \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_2|^2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (1.22) \end{aligned}$$

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Извлечение корня

Из любого комплексного числа можно извлечь корень любой степени. Решаем уравнение:

$$w^n = z \quad (1.23)$$

Тогда формально:

$$w = \sqrt[n]{z} \quad (1.24)$$

Перепишем комплексное число в виде:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.25)$$

где $\rho = |z|$

Итоговое тоже перепишем:

$$w = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.26)$$

Возведём в n -ую степень, это называется формулой Муавра:

$$w^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (1.27)$$

Она получается последовательным умножением комплексного числа само на себя:

$$w^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \quad (1.28)$$

Можно переписать в другой форме:

$$w^n = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.29)$$

Так как:

$$r^n = \rho \quad (1.30)$$

то

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad (1.31)$$

С аргументами получается сложнее. Имеем:

$$n\theta = \varphi + 2\pi k \quad (1.32)$$

где $k \in \mathbb{Z}$. То есть, получили не одно значение угла, а много:

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad (1.33)$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Таким образом, при извлечении комплексного числа, получаем не одно число, а n чисел. Числа отделены от начала координат на одно расстояние, а их аргументы лежат в вершинах правильного n -угольника.

Можно рассмотреть пример:

$$z = i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \quad (1.34)$$

Извлекаем корень 4 степени:

$$w = \sqrt[4]{z} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right) \quad (1.35)$$

При $k = 0$ имеем точку w_0 . При $k = 1$ второй корень поворачивается на прямой угол относительно первой. Далее прибавляется ещё $\frac{\pi}{2}$ и ещё. Таким образом, корни лежат в вершинах квадрата (рисунок 1.1).

Если рассмотреть общий случай, то получается правильный n -угольник.

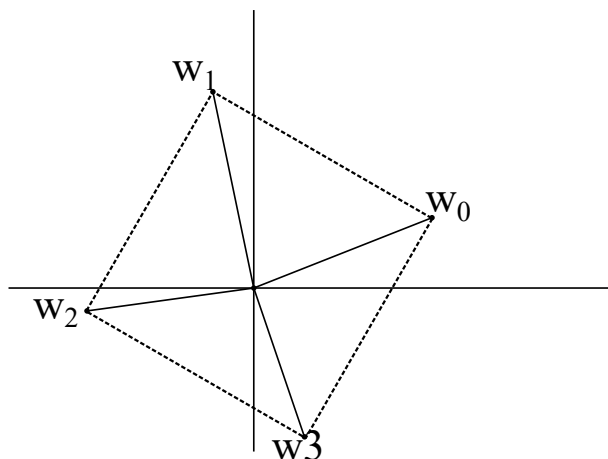


Рис. 1.1: Извлечение корня четвёртой степени из комплексного числа.

Стереографическая проекция.

Берётся сфера с любым радиусом и укладывается на комплексную точку. Для любой точки на комплексной плоскости можно указать точку на сфере (рисунок 1.2). Бесконечность - тоже часто используется в комплексном анализе.

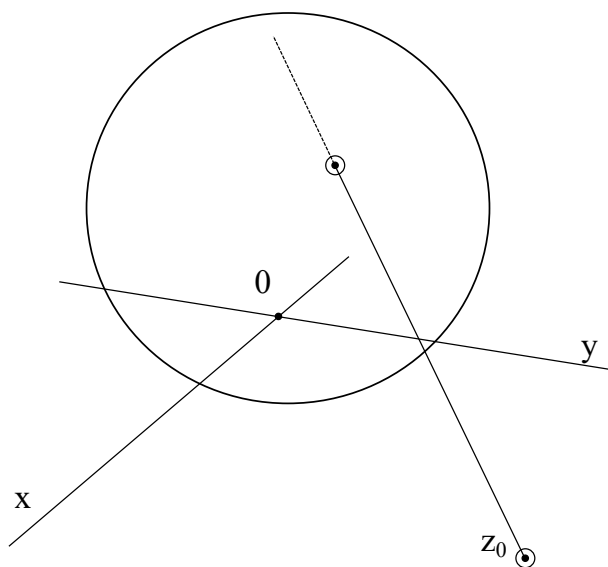


Рис. 1.2: Стереографическая проекция.

Естественная окрестность точек - круг:

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad (1.36)$$

Более научно - это:

$$B(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\} \quad (1.37)$$

Тогда окрестности точки z_0 соответствует окрестность на сфере. Эта стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми (между касательными на сфере).

Ряды и последовательности в ТФКП

В классическом мат анализе много изучаются ряды и последовательности. Рассмотрим последовательность комплексных чисел и предел этой последовательности.

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \quad a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \quad (1.38)$$

Запись предела в кванторах как в действительном анализе, только модуль - модуль комплексного числа:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N$$
$$|z_n - a| < \varepsilon \quad (1.39)$$

Если обозначить

$$z_n = x_n + iy_n \quad (1.40)$$

и

$$a = a_1 + ia_2 \quad (1.41)$$

то формулу с модулем можно переписать в виде:

$$\sqrt{(x_n - a_1)^2 + (y_n - a_2)^2} < \varepsilon \quad (1.42)$$

Имеет место неравенство:

$$\max(|x_n - a_1|, |y_n - a_2|) \leq \sqrt{(x_n - a_1)^2 + (y_n - a_2)^2} \leq |x_n - a_1| + |y_n - a_2| \quad (1.43)$$

Из сходимости комплексного числа следует сходимость вещественной и мнимой компоненты и наоборот. Поэтому достаточно изучать последовательности действительных чисел. В ТФКП теории последовательностей почти не рассматривают.

То же самое касается и рядов комплексных чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad (1.44)$$

Существует окрестность бесконечности. Ей будет соответствовать некая область вокруг “северного полюса” сферы. Под окрестностью бесконечности будет приниматься:

$$U_{\infty}(R) = \{z : |z| > R\} \quad (1.45)$$

Функции комплексного переменного.

Интересуют функции $f(z)$. Сама переменная:

$$z \in E \subseteq \mathbb{C} \quad (1.46)$$

Функция отображает точки:

$$f(z) : E \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.47)$$

Говоря о вещественных и мнимых частях, можно сказать, что функция комплексной переменной - это две функции:

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.48)$$

где

$$u(z) = \operatorname{Re} f \quad (1.49)$$

и

$$v(z) = \operatorname{Im} f \quad (1.50)$$

Если отбросить всё о комплексных числах, то остаётся отображение:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1.51)$$

Рассмотрим предел функции в точке:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \quad (1.52)$$

По определению будет по форме, как в действительном анализе, только всюду модули будут комплексными:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad 0 < |z - a| < \delta \quad |f(z) - A| < \varepsilon \quad (1.53)$$

Определение того, что функция непрерывна в точке a можно дать так:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a) \quad (1.54)$$

Первая теорема Вейерштрасса может быть применима к комплексным числам. Вторая уже не совсем, так как комплексные числа не упорядочены. Она может быть применена разве что к модулям комплексных функций.

Дифференцируемость комплексной функции.

Пусть существует какая-то точка $z_0 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим два определения:

1. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , если функция определена в некоторой окрестности точки z_0 и приращение функции

$$f(z) - f(z_0) = A(z - z_0) + \bar{o}(z - z_0) \quad (1.55)$$

где $A \in \mathbb{C}$. A о-маленькое можно записать как:

$$\alpha(z)(z - z_0) \quad (1.56)$$

где $\alpha(z)$ – бесконечно малая функция при $z \rightarrow z_0$, то есть

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha(z) = 0 \quad (1.57)$$

2. Производная функции $f(z)$ существует, если существует конечный предел:

$$f^{(1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1.58)$$

Из дифференцируемости вытекает существование первой производной. Покажем это:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{A(z - z_0) + \bar{o}(z - z_0)}{(z - z_0)} = A + \lim_{z \rightarrow z_0} \alpha(z) = A \quad (1.59)$$

Рассмотрим обратное утверждение. Если существует конечный предел:

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = A \quad (1.60)$$

То это возможно тогда и только тогда, когда имеет место представление:

$$F(z) = A + \alpha(z) \quad (1.61)$$

где $\alpha(z)$ – бесконечно малая величина. Покажем это:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + \alpha(z) \quad (1.62)$$

Тогда:

$$f(z) - f(z_0) = A(z - z_0) + \bar{o}(z - z_0) \quad (1.63)$$

Таким образом, из того, что производная первого порядка существует, вытекает, что функция дифференцируема. Таким образом, пока всё совпадает с действительным анализом.

Рассмотрим как наличие производной или дифференцируемости наследуется действительной и мнимой частью комплексного числа. Функция $f(z)$ представима в

виде:

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.64)$$

Точка:

$$z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0 \quad (1.65)$$

Имеет место **Теорема**. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

1. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы как функции двух вещественных переменных в точке (x_0, y_0) .
2. имеют место выражения

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \quad (1.66)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = - \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad (1.67)$$

Данные условия называются **условия Коши-Римана**

Предположим, что функции u, v дифференцируемы дважды. Продифференцируем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad (1.68)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (1.69)$$

Теперь сложим:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.70)$$

Получили, что вещественная часть функции комплексной переменной удовлетворяет уравнению Лапласа, то есть является гармонической функцией. То же верно и для мнимой части.

Лекция 2. Интегрирование функций комплексного переменного. Часть 1

Обобщение предыдущей лекции

Вспомним два ключевых определения из предыдущей лекции:

Определение: Функция комплексной переменной $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если её приращение в некоторой окрестности точки z_0 можно представить в виде

$$f(z) - f(z_0) = A(z - z_0) + o(z - z_0) \quad (2.1)$$

где A - некоторое комплексное число.

Определение: Первая производная функции комплексной переменной $f(z)$:

$$f^{(1)}(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A \quad (2.2)$$

Интересно понять, как на дифференцирование будут реагировать действительная и мнимая часть функции $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(z) = \operatorname{Re} f$, $v(z) = \operatorname{Im} f$. Возьмём произвольную точку $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда имеет место теорема:

Теорема: Функция комплексной переменной $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда выполнены 2 условия:

1. $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) .
2. Условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \quad (2.3)$$

Доказательство: Введём обозначения

$$\Delta f = f(z) - f(z_0), \quad \Delta z = z - z_0, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

Предложение: $o((z - z_0)) = o(|z - z_0|)$. Действительно, $o((z - z_0)) = \varepsilon(z)(z - z_0)$, где $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z) = 0$, то есть $\varepsilon(z)$ бесконечно малая функция. $o(|z - z_0|) = \varepsilon_1(z)|z - z_0|$, где $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon_1(z) = 0$. Однако, выражение $\left| \frac{z - z_0}{z - z_0} \right| = 1$. Тогда можно приравнять $\varepsilon_1(z) \frac{|z - z_0|}{(z - z_0)} = \varepsilon(z)(z - z_0)$. Воспользуемся этим:

$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \varepsilon(\Delta z)|\Delta z|$. $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, где $\Delta u = u(x, y) - u(x_0, y_0)$, а $\Delta v = v(x, y) - v(x_0, y_0)$. Пусть $A = (\alpha + i\beta)$. Тогда $\Delta f = (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1(\Delta x, i\Delta y) + i\varepsilon_2(\Delta x, i\Delta y))|\Delta z| = (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1(\Delta x, i\Delta y) + i\varepsilon_2(\Delta x, i\Delta y))\rho$.

Выделим действительную и мнимую части:

$$\Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \varepsilon_1\rho \quad (2.4)$$

$$\Delta v = \beta \Delta x + \alpha \Delta y + \varepsilon_2 \rho \quad (2.5)$$

Вспомним условие дифференцируемости функции двух вещественных переменных:

$$\Delta u = u(x, y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + o(\rho) \quad (2.6)$$

Сопоставим с выражениями для Δu и Δv и получим следующее:

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \quad (2.7)$$

$$\beta = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \quad (2.8)$$

Докажем в обратную сторону. Теперь мы знаем, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы, а также выполнены условия Коши-Римана. Получим выражения для Δu и Δv :

$$\Delta u = \alpha \Delta x - \beta \Delta y + \varepsilon_1 \rho$$

$$\Delta v = \beta \Delta x + \alpha \Delta y + \varepsilon_2 \rho$$

Домножим второе выражение на i и запишем их сумму:

$$\Delta u + i \Delta v = \alpha \Delta x - \beta \Delta y + \varepsilon_1 \rho + i(\beta \Delta x + \alpha \Delta y + \varepsilon_2 \rho) = (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1(\Delta x, i\Delta y) + i\varepsilon_2(\Delta x, i\Delta y))\rho = A\Delta z + \varepsilon(\Delta z)|\Delta z| = \Delta f. \text{ Необходимость и достаточность доказана.}$$

Регулярность в точке

Определение: Функция $f(z)$ **регулярна (аналитична)** в точке z_0 , если $\exists \mathcal{U}(z_0)$ такая, что $\exists f^{(1)}(z), \forall z \in \mathcal{U}(z_0)$, при этом $f^{(1)}(z) \in C(\mathcal{U}(z_0))$ (иначе говоря, $f \in C^1(\mathcal{U}(z_0))$).

Связь регулярности и дифференцируемости функции в точке

Допустим, что мы знаем, что f аналитична в точке z_0 . Очевидно, что из аналитичности вытекает дифференцируемость f в z_0 . Но вытекает ли аналитичность из дифференцируемости?

Покажем на примере, что это не так. Рассмотрим функцию $f(z) = z \operatorname{Re} z = x^2 + ixy$. Проверим условия Коши-Римана ($u_x = v_y, u_y = -v_x$):

$$2x = x \Rightarrow x = 0$$

$$0 = -y \Rightarrow y = 0$$

Значит, единственная точка, в которой $f(z)$ дифференцируема - это точка $0 + i0$. Но для аналитичности функция должна быть дифференцируема в окрестности точки \Rightarrow из дифференцируемости не следует аналитичность.

Что парадоксально, так это то, что в точке понятия дифференцируемости и регулярности различны, но если мы говорим о дифференцируемости и регулярности в

области, то эти понятия одинаковы.

Интеграл функции комплексной переменной по кривым

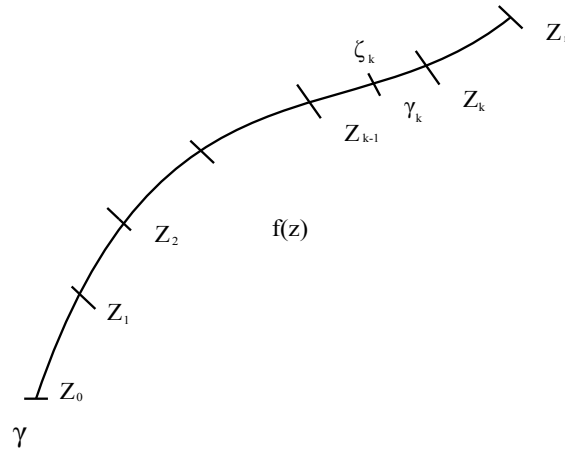


Рис. 2.1: Кривая γ .

Определим, что такое интеграл $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Рассмотрим гладкую кривую γ , в окрестности которой задана функция $f(z)$. Разобьём её точками $z_0, z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_{n-1}, z_n$ на более маленькие кривые $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots$, а на кривой γ_k выберем произвольную точку ζ_k . Составим интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \quad (2.9)$$

Обозначим “мелкость” разбиения как $\lambda(\gamma) = \max_k(l(\gamma_k))$. Если $\exists \lim \sum_{k=0}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ при $\lambda(\gamma) \rightarrow 0$, и он не зависит от выбора ζ_k , то мы говорим, что задан интеграл от функции комплексного переменного по кривой γ , и обозначаем его:

$$\int_{\gamma} f(z) dz \quad (2.10)$$

Перепишем наш интеграл в терминах $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Обозначим $z_k = x_k + iy_k$, $\Delta x = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. Тогда $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$. Запишем ещё раз интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (u_k + iv_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k) \quad (2.11)$$

Перейдём к пределу при $\lambda(\gamma) \rightarrow 0$. При этом $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k) = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) = \int_{\gamma} f(z) dz \quad (2.12)$$

Свойства и оценки интегралов

1. Линейность: $\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$
2. $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^{-1}} f(z) dz$ (при прохождении кривой в обратном направлении, знак перед интегралом меняется на противоположный)
3. Аддитивность по множествам: $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$

Оценка интеграла:

$$\int_{\gamma} |f(z) dz| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|, \quad (2.13)$$

где $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Доказательство: Вспомним два свойства комплексных чисел:

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

Зная их, можем записать:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) (z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |z_k - z_{k-1}| \quad (2.14)$$

В обеих частях неравенства заменим $z_k - z_{k-1}$ на Δz_k и перейдём к пределу при $\lambda(\gamma) \rightarrow 0$. Получим оценку интеграла, описанную выше:

$$\int_{\gamma} |f(z) dz| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \quad (2.15)$$

Утверждение доказано.

Формула Грина

Пусть функции $P(x, y), Q(x, y)$ и их частные производные P_x, P_y, Q_x, Q_y определены и непрерывны в односвязной области G . Тогда справедлива формула:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma=\partial G} P dx + Q dy \quad (2.16)$$

Интегральная теорема Коши

Теорема: Пусть функция комплексного переменного $f(z) \in A(\Omega)$ (аналитическая в Ω), G - односвязная область, $G \subset \Omega$, $\gamma = \partial G$.

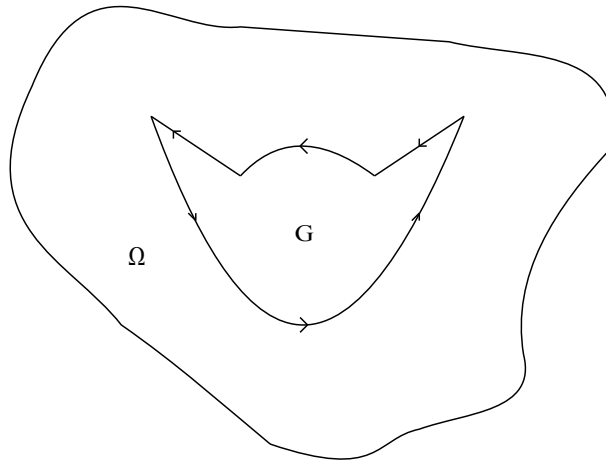


Рис. 2.2: Иллюстрация к теореме Коши.

Обходим контур γ так, чтобы область G всегда оставалась слева. Тогда:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Доказательство: $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy)$. Применим к каждому из двух интегралов формулу Грина:

$$\int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy + i \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy \quad (2.17)$$

Так как функция $f(z) \in A(\Omega)$, то для неё выполнены условия Коши-Римана, а значит, оба интеграла обращаются в нуль. Теорема доказана.

Замечание: Интегральная теорема Коши не выполняется в неодносвязных областях.

Пример 1: Пусть

$$\Omega = \{z : |z| < 2\} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{z} \in A(\Omega), G = \{z : |z| < 1\}. \quad (2.18)$$

Вопрос: чему будет равен интеграл $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$? $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$. Тогда:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = 2\pi i \neq 0 \quad (2.19)$$

Этот пример показывает, что условие односвязности играет важную роль в теореме

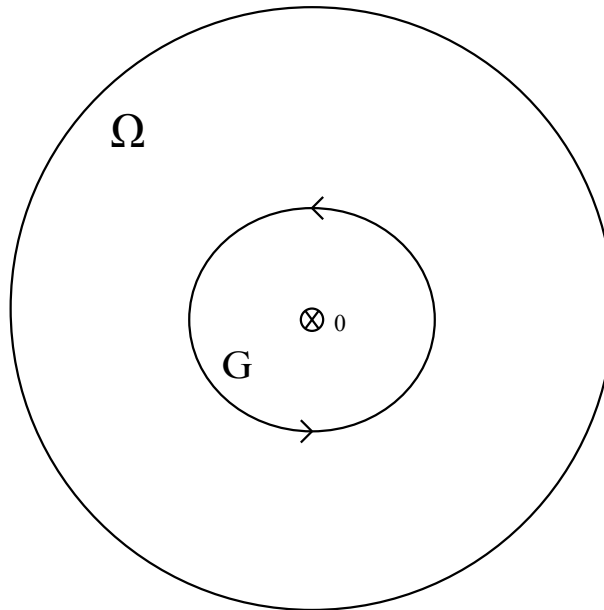


Рис. 2.3: Области Ω и G с выколотой точкой 0

Коши. Однако, для некоторого класса неодносвязных областей она всё же имеет место быть (см. начало Лекции 3).

Лекция 3. Интегрирование функций комплексного переменного. Часть 2

Теорема Коши (повторение)

В конце прошлой лекции мы говорили, что теорема Коши имеет место быть для некоторых неодносвязных областей. Покажем это на примере.

Пример: Дана область G с двумя “дырками”. Чему будет равен интеграл по её контуру?

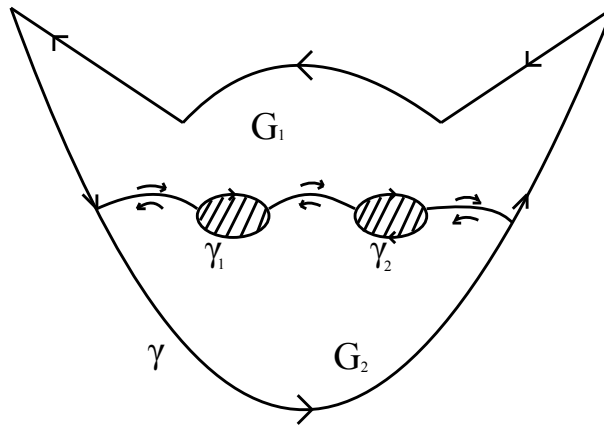


Рис. 3.1: Иллюстрация к примеру

Пусть $\Gamma = \gamma \cup \gamma_1^{-1} \cup \gamma_2^{-1}$. Сделаем из G две односвязные области. Для этого разрежем G возле “дырок” и будем проходить по разрезам дважды, но каждый раз в разных направлениях. Проходим по границе области G_1 . Она не имеет “дырок”, что можно сказать и про область G_2 . Тогда интеграл по полной границе области G равен:

$$\int_{\partial G_1} f(z) dz + \int_{\partial G_2} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz \quad (3.1)$$

Оба интеграла в левой части равны нулю \Rightarrow интеграл по границе G равен нулю, то есть для такого рода неодносвязных областей теорема Коши справедлива.

Интегральная формула Коши

Теорема (об интегральной формуле Коши): Пусть $f(z) \in A(\Omega)$, $G \subset \Omega$, $\gamma = \partial G$, $z \in G$. Тогда:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (3.2)$$

Замечательность теоремы в том, что значение функции в точке z определяется значением функции f на контуре γ (при условии, что функция аналитическая).

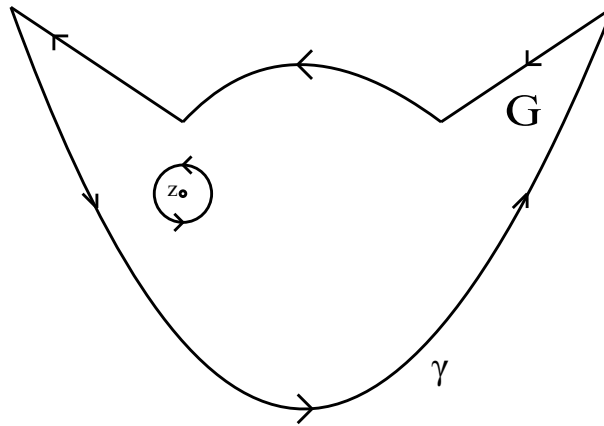


Рис. 3.2: Иллюстрация к доказательству теоремы

Доказательство: Пусть $G_\varepsilon = G \setminus \{z : |\zeta - z| < \varepsilon\}$, $F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \in A(G_\varepsilon)$. Тогда:

$$0 = \int_{\partial G_\varepsilon} F(\zeta) d\zeta = \int_\gamma F(\zeta) d\zeta - \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} F(\zeta) d\zeta \quad (3.3)$$

Из этого делается вывод, что $\int_\gamma F(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} F(\zeta) d\zeta$. Преобразуем:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3.4)$$

Вспомним, что $\gamma_\varepsilon = \{\zeta : |\zeta - z| = \varepsilon\}$. Тогда можем ввести параметризацию $\zeta = z + \varepsilon e^{i\varphi}$, $d\zeta = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$, $0 < \varphi \leq 2\pi$. Получим:

$$\int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = 2\pi i \quad (3.5)$$

Так как функция $f(z) \in A(G)$, то $f(\zeta) - f(z) = f^{(1)}(z)(\zeta - z) + o(\zeta - z)$, где $|o(\zeta - z)| \leq M|\zeta - z|$. Сделаем оценку:

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq (f^{(1)}(z) + M)|\zeta - z| = M_1|\zeta - z| \quad (3.6)$$

$$\int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \leq \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{M_1|\zeta - z|}{|\zeta - z|} |d\zeta| = M_1 * 2\pi\varepsilon \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (3.7)$$

Разделим исходное выражение на $2\pi i$ и получим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (3.8)$$

Теорема доказана.

Интеграл типа Коши

Пусть γ кусочно-гладкая кривая, $\varphi(z)$ непрерывна на кривой γ , $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Этот интеграл называется интегралом типа Коши. Тогда $F(z) \in C^{\infty}(\mathbb{C} \setminus \gamma)$ и:

$$F^{(k)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (3.9)$$

Доказательство: Докажем для $n = 1$. Рассмотрим выражение $\frac{F(z_0 + \Delta z) - F(z_0)}{\Delta z}$. Возьмём $|\Delta z| < \frac{d}{2}$, где $d = \text{dist}(z, \gamma)$. $\frac{F(z_0 + \Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i(\Delta z)} \left(\int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - (z_0 + \Delta z)} - \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - (z_0 + \Delta z))(\zeta - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)} \left(\frac{1}{\zeta - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta$. Перепишем второй интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \left(\frac{1}{\zeta - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta = \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^2 (\zeta - z_0 - \Delta z)} \quad (3.10)$$

Покажем, что второй множитель в правой части ограничен. Так как мы брали $|\Delta z| < \frac{d}{2}$, то $|\zeta - z_0 - \Delta z| \geq \frac{d}{2}$ и $|\zeta - z_0| \geq d$. Пусть $M = \sup_{\zeta \in \gamma} \varphi(\zeta)$. Тогда справедлива оценка:

$$\left| \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^2 (\zeta - z_0 - \Delta z)} \right| \leq \frac{M}{d^2 * \frac{d}{2}} \quad (3.11)$$

Устремим $\Delta z \rightarrow 0$ и получим искомую формулу:

$$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} \quad (3.12)$$

Для $n = 2, 3, \dots$ рассуждения схожие, но более громоздкие.

Важный комментарий: Сравним интегральную формулу Коши и интеграл типа Коши. Вполне допустимо вместо $f(\zeta)$ подставить $\varphi(\zeta)$, то есть:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \in C^{\infty}(G) \quad (3.13)$$

Утверждение: Пусть $f \in A(G) \Rightarrow f \in C^{\infty}(G)$.

Первая теорема Абеля

Теорема: Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится в $z_1 \neq z_0$. Тогда:

1. Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится абсолютно в круге $\{z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$.
2. Если $0 < r < |z_1 - z_0|$, то в круге $\{z : |z - z_0| < r\}$ ряд сходится равномерно.

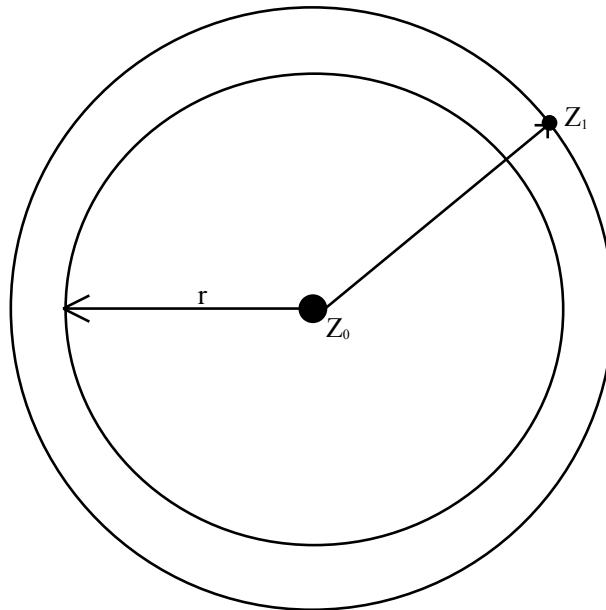


Рис. 3.3: Иллюстрация к доказательству теоремы

Доказательство: Вспомним, что числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$ сходится если $|c_n(z_1 - z_0)^n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty \Rightarrow |c_n(z_1 - z_0)^n| \leq M$, то есть $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}$:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_1 - z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^n$. В силу неравенства $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ получим, что $\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| = q < 1$. Внесём модули:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(z_1 - z_0)^n| \left|\left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^n\right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (3.14)$$

Ряд $M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится \Rightarrow исходный ряд сходится абсолютно.

2. $|z - z_0| \leq r \Rightarrow \frac{r}{|z_1 - z_0|} < 1$. Обозначим $|z_1 - z_0| = R$. Тогда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(z_1 - z_0)^n| \left|\left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^n\right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \quad (3.15)$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^n}$ сходится \Rightarrow ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ в круге $|z - z_0| \leq r$ сходится равномерно по теореме Вейерштрасса.

Теорема доказана.

Формула Коши-Адамара

$$R_{\text{сходимости}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad (3.16)$$

Теорема о представлении функции рядом Тейлора

Признак Коши: Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, то если $q < 1$ ряд сходится, $q > 1$ ряд расходится, $q = 1$ ничего сказать нельзя.

Теорема: Пусть функция комплексного переменного $f \in A(B(z_0, r))$ (в круге с центром в z_0 и радиусом r), $r > 0$, $0 < \rho < r$. Тогда в круге $B(z_0, \rho)$ $f(z)$ представима своим рядом Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (3.17)$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (3.18)$$

Доказательство: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$. Преобразуем и сделаем оценку:

$$\frac{f(z)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} \quad (3.19)$$

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} = q < 1 \quad (3.20)$$

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta) \quad (3.21)$$

z считаем зафиксированным. Рассмотрим поведение функции от переменной ζ :

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta) \right| \leq M_\rho \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^n * \frac{1}{\rho} \quad (3.22)$$

где $\left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^n = q^n$, $M_\rho = \sup_{|z| = \rho} |f(z)|$. Это значит, что ряд с $f(\zeta)$ сходится равномерно \Rightarrow его можно почленно интегрировать:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (3.24)$$

Вспомним, что $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$. Тогда $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Теорема доказана.

Лекция 4. Теоремы Вейерштрасса и единственности

Теорема Вейерштрасса

Теорема (Вейерштрасса): Пусть $f(z) \in A(G)$ и функциональный ряд $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится на G . Тогда:

1. $S(z) \in A(G)$
2. Ряд $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ допускает почленное дифференцирование \forall число раз, при этом

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z), k \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

причём на компакте $K \subset G$, $dist(K, \partial G) > 0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно.

Доказательство:

1. Возьмём $z_0 \in G$ и $\overline{B(z_0, r)} \subset G$. Тогда $S_N(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z)$. $S_N(z) \in A(G)$ так как это сумма конечного числа аналитических функций. Тогда $\forall z \in B(z_0, r)$:

$$S_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{S_N(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, \text{ по интегральной формуле Коши} \quad (4.2)$$

$$\forall \zeta : |\zeta-z| \geq |\zeta-z_0 - (z-z_0)| \geq |\zeta-z_0| - |z-z_0| = r - |z-z_0| = h > 0 \quad (4.3)$$

Запишем следующую цепочку неравенств:

$$\left| \frac{S_N(\zeta)}{\zeta-z} - \frac{S(\zeta)}{\zeta-z} \right| \leq \frac{1}{h} \sup_{|\zeta-z_0|=r} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \quad (4.4)$$

Тогда $\frac{S_N(\zeta)}{\zeta-z} \Rightarrow \frac{S(\zeta)}{\zeta-z}$ при $N \rightarrow +\infty$.

Вспомним теорему из вещественного анализа: если функциональная последовательность сходится равномерно, то её можно интегрировать. Применяем её:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{S_N(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{S(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = S(z) \quad (4.5)$$

Однако, по свойствам интеграла типа Коши:

$$\int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{S(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \in A(B(z), r) \Rightarrow S(z) \in A(B(z_0, r)) \quad (4.6)$$

2. $S_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{S_N(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{S(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$. Так как $S_N(z)$ и $S(z)$

аналитические функции, то их можно дифференцировать любое число раз:

$$S_N^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{S_N(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta \quad (4.7)$$

$$S^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{S(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta \quad (4.8)$$

Запишем разность этих выражений и сделаем оценку:

$$|S_N^{(k)}(z_0) - S^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{S_N(\zeta) - S(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k! * 2\pi r}{2\pi * r^{k+1}} \sup_{|\zeta-z_0|=r} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \quad (4.9)$$

В свою очередь $\sup_{|\zeta-z_0|=r} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0 \forall z_0 \in K, K \subset G, \text{dist}(K, \partial G) = d > 0$. Тогда $B(z_0, \frac{d}{2}) \subset G \forall z_0 \in K$. Возьмём $r = \frac{d}{2}$. В этом случае:

$$|S_N^{(k)}(z_0) - S^{(k)}(z_0)| \leq \frac{2^k k!}{d^k} \sup_{\zeta \in G} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \quad (4.10)$$

Так как данная оценка верна $\forall z_0 \in K$, то можно переписать неравенство:

$$\sup_{z_0 \in K} |S_N^{(k)}(z_0) - S^{(k)}(z_0)| \leq \frac{2^k k!}{d^k} \sup_{\zeta \in G} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (4.11)$$

Значит, сходимость действительно равномерная.

Теорема единственности

Теорема (Единственности): Пусть G - область в \mathbb{C} . Пусть есть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\exists \lim z_k = a \in G, z_k \neq a \forall k \in \mathbb{N}$. Пусть $f(z), g(z) \in A(G)$ и $f(z_k) = g(z_k) \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$.

Доказательство: Рассмотрим функцию $h(z) = f(z) - g(z)$

1. Нужно доказать, что $h(z) \equiv 0$ в $B(a, r) (B(a, r) \subset G)$. Докажем от противного. Предположим, что $h(z) \not\equiv 0$. Так как $h(z) \in A(B(a, r))$, то она представима в виде ряда Тейлора:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, c_n = \frac{1}{n!} h^{(n)}(a) \quad (4.12)$$

Заметим, что $h(z) = 0$. Действительно, $h(z_n) = f(z_n) - g(z_n) = 0, z_n \rightarrow a$. Перейдя к пределу, получим $h(a) = 0$, что также верно и для некоторого количества производных от h . В этом случае корректнее будет записать:

$$h(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n (z-a)^n (h^{(k)}(a) = 0, k = 1, \dots, N-1) \quad (4.13)$$

$$h(z) = (z - a)^N \sum_{n=N}^{\infty} c_n (z - a)^{n-N} = (z - a)^N \varphi_N(z), \varphi_N(z) \in A(B(a, r)) \quad (4.14)$$

Предположим, что $c_N = \frac{h^{(N)}(a)}{N!} \neq 0$. Значит, $\varphi_N(z) = c_N \neq 0 \Rightarrow B(a, r_0) : \varphi_N(z) \neq 0 \forall z \in B(a, r_0), r_0 < r$. Приходим к противоречию. В выражении $(z - a)^N \varphi_N(z) (z - a)^N \neq 0, z \neq a$, аналогично $\varphi_N(z) \neq 0$ в круге $B(a, r_0)$, но это не так (в круге радиуса $r_0 \varphi_N(z)$ обращается в ноль). Значит, $h(z) \equiv 0$.

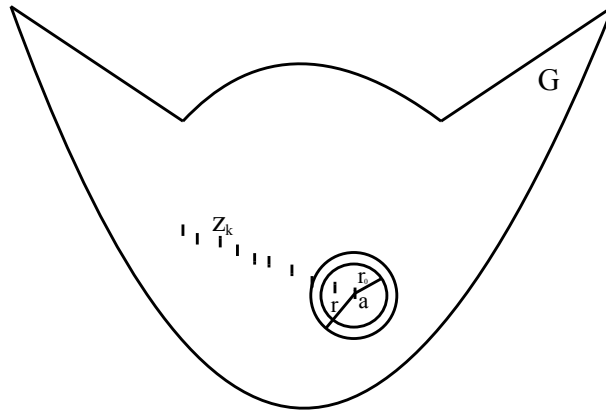


Рис. 4.1: Область G и последовательность z_k , сходящаяся к a.

2. Выберем $\forall b \in G$. Пусть $h(z) \equiv 0$ в $B(a, r)$. Нужно доказать, что $h(b) = 0$.

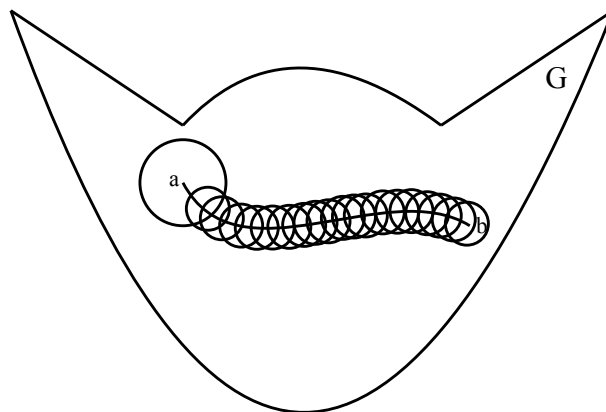


Рис. 4.2: Кривая, соединяющая точки a и b и окружности, заполняющие область G.

Соединим точки произвольной кривой, лежащей в G, и покроем эту кривую кругами.

Рассмотрим круги с центрами $z_0 = a$ и z_1 . $z_1 \in B(a, r) \Rightarrow h(z_1) = 0$ (см. первый пункт доказательства). Аналогичным образом выберем центр следующей окружности $z_2 \in B(z_1, r_1) \Rightarrow h(z_2) = 0$. Проводим аналогичные рассуждения до тех пор, пока не доберёмся до круга с центром в b. Тогда $h(b) \equiv 0$. Теорема доказана.

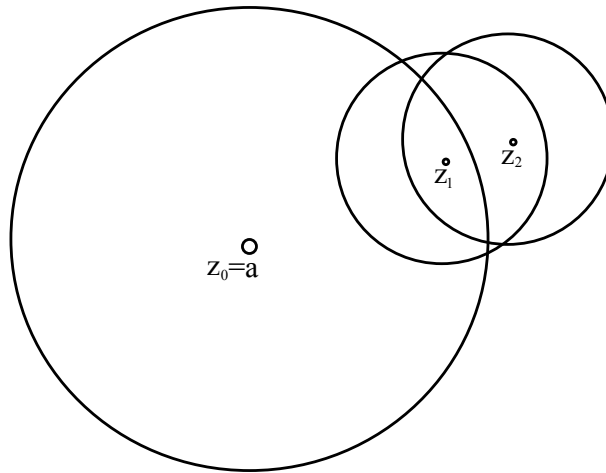


Рис. 4.3: Окружность с центром в a и окружности, покрывающие кривую.

Применение теоремы о единственности

Пример 1: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ из вещественного анализа. Будет ли $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$?
Распишем синус и косинус:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \in A(\mathbb{C}) \quad (4.15)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \in A(\mathbb{C}) \quad (4.16)$$

Обозначим $\cos^2 z + \sin^2 z$ за $f(z)$, а 1 за $g(z)$. В вещественном анализе $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ рассматривается при $z = x + 0 \cdot i$. Построим на числовой прямой последовательность $x_n \rightarrow 0$. Тогда $\cos^2 x_n + \sin^2 x_n = 1$. Тогда, по условиям теоремы единственности, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$. Аналогичным образом можно получить формулу $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_2)\cos(z_1)$.

Пример 2:

$$f(z) = \begin{cases} z^{100} \sin\left(\frac{1}{z}\right), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что если взять $z_n = \frac{1}{\pi n}$, то $f(z_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ при $z = iy$:

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sin\left(\frac{1}{iy}\right) = \frac{e^{i \frac{1}{iy}} - e^{-i \frac{1}{iy}}}{2i} = \frac{e^{\frac{1}{y}} - e^{-\frac{1}{y}}}{2i} \quad (4.17)$$

$e^{\frac{1}{y}} \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0 \Rightarrow$ при $z = 0$ у функции нет аналитичности \Rightarrow условие теоремы о единственности не выполнено.

Лекция 5. Ряды Лорана

Определение рядов Лорана

Рядом Лорана называется ряд следующего вида:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} \quad (5.1)$$

Ряд Лорана сходится, если одновременно сходятся ряды и по положительным, и по отрицательным степеням.

Сходимость ряда Лорана

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ будет сходиться в круге $B(z_0, R)$, $0 \leq R \leq +\infty$. Ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}$ перепишем: пусть $\frac{1}{z - z_0} = \zeta$, тогда:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} \zeta^m \quad (5.2)$$

Его область сходимости - круг $|\zeta| \leq \rho$, то есть $\left| \frac{1}{z - z_0} \right| < \rho \Rightarrow \frac{1}{\rho} < |z - z_0| \Rightarrow$ он сходится во внешности круга радиуса $r = \frac{1}{\rho}$, $0 \leq r < +\infty$.

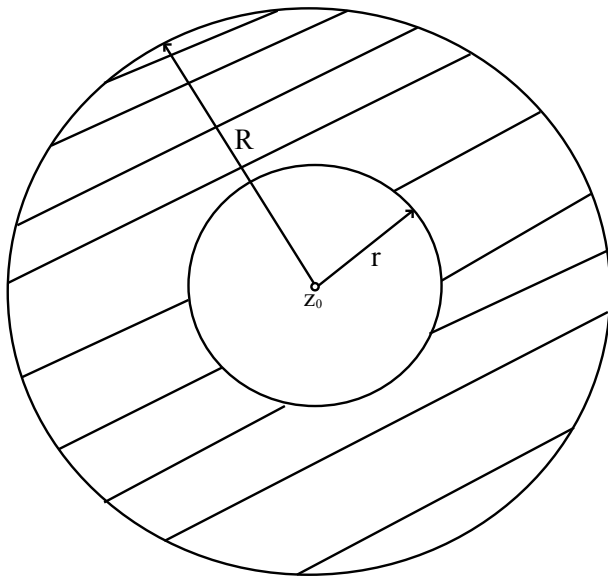


Рис. 5.1: Область сходимости ряда Лорана.

1. $R > r$: область сходимости - кольцо
2. $R = r$: граничный случай, в данном курсе не рассматривается

3. $R < r$: область сходимости \emptyset

Если $R > r$, то:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \in A(B(z_0, R)) \quad (5.3)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} \in A\{z : |z - z_0| > r\} \quad (5.4)$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \in A\{z : r < |z - z_0| < R\} \quad (5.5)$$

Теорема Лорана-Вейерштрасса

Теорема: Пусть $f(z) \in A\{z : r < |z - z_0| < R\} = A(K_{r,R})$. Тогда $f(z)$ представима в виде:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (5.6)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \forall \rho : r < \rho < R, n \in \mathbb{Z} \quad (5.7)$$

Доказательство:

1. Пусть $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Рассмотрим функцию $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \in A(K_{r,R}) \implies$

$$\int_{\partial K_{\rho_1 \rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = 0 = \int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta - \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (5.8)$$

2. По интегральной формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho_1 \rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (5.10)$$

Домножим равенство на $f(\zeta)$ и проинтегрируем по окружности радиуса ρ_2 :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (5.11)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (5.12)$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (5.13)$$

$$-\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0})} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^l}{(z - z_0)^{l+1}} \quad (5.14)$$

Домножим на $f(\zeta)$ и проинтегрируем по окружности ρ_1 :

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \sum_{l=0}^{\infty} (z - z_0)^{-(l+1)} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} (\zeta - z_0)^l f(\zeta) d\zeta \quad (5.15)$$

Пусть $-(l+1) = n$. Тогда $l = -(n+1)$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (z - z_0)^{-(l+1)} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} (\zeta - z_0)^l f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=-\infty}^1 (z - z_0)^n c_n \quad (5.16)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (5.17)$$

Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана

Лемма: Пусть $f(z) \in A(K_{r,R})$. $\forall \rho : r < \rho < R : |f(z)| \leq M_\rho, \forall z : |z - z_0| = \rho$. Тогда:

$$|c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n} \quad (5.18)$$

Доказательство: $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$. Параметризуем $\zeta = \rho e^{i\varphi}, d\zeta = i\rho e^{i\varphi} d\varphi, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Тогда интеграл будет выглядеть:

$$|c_n| = \left| \frac{i}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) \rho e^{i\varphi}}{\rho^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}} d\varphi \right| \leq \frac{M_\rho \rho 2\pi}{2\pi \rho^{n+1}} = \frac{M_\rho}{\rho^n} \quad (5.19)$$

Лемма доказана.

Теорема Лиувилля

Определение: Функция комплексной переменной $f(z)$ называется целой, если $f \in A(\mathbb{C})$.

Теорема (Лиувилля): Пусть $f(z)$ целая функция такая, что $|f(z)| \leq c(1+|z|)^N$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда $f(z)$ - многочлен степени $\leq N$, то есть:

$$f(z) = P_N(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N \quad (5.20)$$

Доказательство: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}$, $|\rho| = z$, $M_\rho = \sup_{0 \leq \varphi < 2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})| \leq c(1+\rho)^N$. Тогда:

$$|c_n| \leq \frac{c(1+\rho)^N}{\rho^N} \quad (5.21)$$

Пусть $n > N$. Тогда $|c_n| \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow +\infty$, то есть $c_n = 0$ для $n > N$.

Изолированные точки однозначного характера (ИОТОХ)

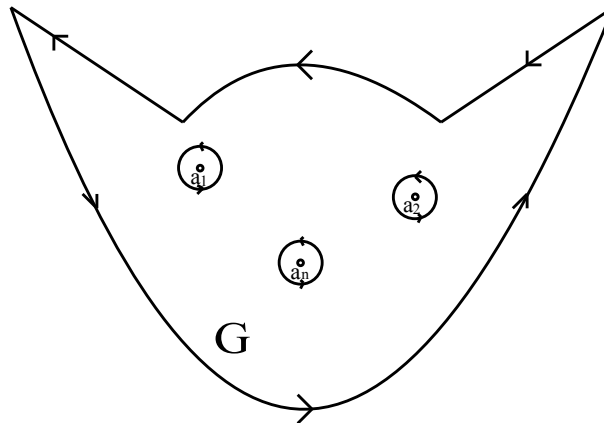


Рис. 5.2: ИОТОХ в области G.

$$f \in A(G \setminus \bigcup_{k=1}^n a_k)$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{a_i} f = 2\pi i \sum_{i=1}^n c_{-1}(a_i) \quad (5.22)$$

$\operatorname{res}_{a_i} f$ - вычет функции f в точке a_i .

Пусть $a \in \mathbb{C}$

1. a - устранимая точка, если $\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Пример: при $a = 0$, $\frac{\sin(z)}{z} \rightarrow 1$

2. a - полюс, если $\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

Пример: $\frac{1}{z^n}$ при $z \rightarrow 0$.

3. a - существенно особая точка, если $\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Пример: $e^{\frac{1}{z}}$ при $z = 0$.

Рассмотрим круг с проколотым центром (частный случай кольца). Тогда в этом круге:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n (\text{правильная часть}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} (\text{главная часть}) \quad (5.23)$$

Теорема об устранимой особой точке

Теорема: ИОТОХ $a \in \mathbb{C}$ является устранимой особой точкой \Leftrightarrow главная часть разложения в ряд Лорана отсутствует (равна нулю).

Доказательство:

1. Необходимость: a - устранимая особая точка $\Rightarrow c_{-m} = 0 \forall m = 1, 2, \dots$. \exists конечный $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \Rightarrow \exists B(a, r) : |f(z)| \leq M \forall z \in B(a, r)$. Используем оценку коэффициентов ряда Лорана:

$$|c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n} \quad (5.24)$$

Пусть $n < 0$. Тогда $n = -|n|$, а $|c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n} = M\rho^{|n|} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow c_n = 0, n = -1, -2, \dots$

2. Достаточность: $f(z) \in A(B(a, r)) \Rightarrow \exists$ конечный $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \Rightarrow a$ - устранимая точка.

Как “устранить” точку? Доопределим $f(z)$ в точке a значением предела $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Теорема: Пусть a - ИОТОХ функции $f(z)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. a - полюс
2. Главная часть разложения функции в ряд Лорана содержит конечное число слагаемых, то есть:

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z - a)^n, c_{-p} \neq 0 \quad (5.25)$$

3. Функция $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^p}$, $\varphi(z) \in A(B(a, r))$, $\varphi(a) \neq 0$, p - порядок полюса.

Доказательство приводится в начале следующей лекции.

Лекция 6. Особые точки однозначного характера

Доказательство теоремы из прошлой лекции

1. (1) \Rightarrow (3): a - полюс. Рассмотрим $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Тогда:

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \quad (6.1)$$

Доопределим $g(z)$ в точке a : $g(a) = 0$. Тогда можно сказать, что $\exists p : g(z) = (z - a)^p \psi(z)$ так как $g(z) \in A(B(a, r))$ (p - кратность нуля функции $g(z)$). Также, $\psi(z) \in A(B(a, r))$, $\psi(a) \neq 0$. По теореме из вещественного анализа, $\exists r_1 \leq r : \psi(z) \neq 0 \forall z \in B(a, r_1)$. Тогда:

$$f(z) = \frac{\frac{1}{\psi(z)}}{(z - a)^p} = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^p} = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^p} \quad (6.2)$$

$$\varphi(a) = \frac{1}{\psi(a)} \neq 0 \quad (6.3)$$

2. (3) \Rightarrow (1):

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{(z - a)^p} = \infty \quad (6.4)$$

3. (3) \Rightarrow (2): $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^p}$. Тогда:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (z - a)^k, \varphi(a) \neq 0 \quad (6.5)$$

Используем данное разложение в выражении для $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (z - a)^{k-p} = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (6.6)$$

Но в новом разложении $\gamma_0 = \varphi(a) = c_{-p} \neq 0$.

4. (2) \Rightarrow (3): $f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z - a)^n$, $c_{-p} \neq 0$. Домножим и разделим на $(z - a)^p$:

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z - a)^n \frac{(z - a)^p}{(z - a)^p} = \frac{1}{(z - a)^p} \sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z - a)^{n+p} = \frac{1}{(z - a)^p} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-p} (z - a)^k = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^p} \quad (6.7)$$

Теорема о существенно особой точке

Теорема: ИОТОХ является существенно особой точкой \Leftrightarrow главная часть ряда Лорана

содержит бесконечное число ненулевых членов.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} \quad (6.8)$$

Доказательство:

1. a - существенно особая точка. Предположим противное, то есть в разложении в ряд Лорана конечное число членов с отрицательными степенями. Но тогда (по предыдущим теоремам) a либо полюс, либо a устранимая особая точка. Противоречие.
2. $\exists m(i) \nearrow \infty, c_{-m(i)} \neq 0$. Но в этом случае a не может быть ни полюсом, ни устранимой особой точкой.

Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечности

Рассматривается множество $\mathcal{U}_a(\infty, R) = \{z : |z-a| > R\}$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} \quad (6.9)$$

1. ∞ - устранимая особая точка, если \exists конечный $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$
2. ∞ - полюс, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$
3. ∞ - существенно особая точка, если $\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$

Отметим, что на бесконечности $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$ есть главная часть, а $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}$ есть регулярная или правильная часть.

Примеры: $f(z) = \frac{1}{z}$ (устранимая точка). $f(z) = z^k$ (полюс). $f(z) = e^z$ (существенно особая точка)

Теорема о бесконечности как об устранимой особой точке: ∞ - устранимая точка \Leftrightarrow главная часть ряда Лорана в бесконечности равна нулю.

Теорема о бесконечности как о полюсе: Следующие утверждения эквивалентны:

1. ∞ - полюс
2. Главная часть разложения функции в ряд Лорана содержит конечное число слагаемых, то есть:

$$f(z) = \sum_{n=1}^p c_n(z-a)^n + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, c_p \neq 0 \quad (6.10)$$

3. Функция $f(z) = (z - a)^p \psi(z)$, $\psi(z) \in A(\mathcal{U}(\infty))$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z)$ - конечен

Теорема о бесконечности как о существенно особой точке: Бесконечность - существенно особая точка \Leftrightarrow когда главная часть разложения в ряд Лорана содержит бесконечное число членов.

Доказательство: Сделаем замену $\zeta = \frac{1}{z-a}$. Тогда разложение в ряд Лорана примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\zeta^n} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{-m} \zeta^m \quad (6.11)$$

Дальше доказательство аналогично доказательству соответствующих теорем для конечных точек.

Теорема Сохоцкого

Теорема (Сохоцкого): Пусть a - существенно особая точка, $a \in \mathbb{C}$. Тогда $\forall A \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty}, z_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

Доказательство:

1. Пусть $A = \infty$. Тогда $\forall r$ в круге $B(a, r)$ функция $f(z)$ является неограниченной. Значит, $\exists z_1 : |f(z_1)| > 1$. Тогда в круге $\{z : |z - a| < \frac{z_1 - a}{2}\}$ функция вновь не ограничена, то есть $\exists z_2 : |f(z_2)| > 2$. Тогда в круге $\{z : 0 < |z - a| < \frac{|z_1 - a|}{2^n}\} \exists z_n : |f(z_n)| > n$. В этом случае:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty \quad (6.12)$$

2. $A \neq \infty$. Тогда пусть $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$, $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$. Тогда точка a - существенно особая точка для функции $\varphi(z) \Rightarrow \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = \infty$ (в силу пункта (1)). В таком случае:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A + \frac{1}{\varphi(z_n)} \right) = A \quad (6.13)$$

Теорема Пикара

Теорема (Пикара): Пусть a - существенно особая точка. Тогда в \forall окрестности точки a ($\mathcal{U}(a)$) функция $f(z)$ принимает все комплексные значения, (причём каждое бесконечное число раз) (за исключением, может быть, одного).

$$\forall A \in \mathbb{C} \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ такая, что } f(z_n) = A, \forall n \in \mathbb{N} \quad (6.14)$$

Пояснение к фразе “за исключением, может быть, одного” : $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \neq 0 \forall z$, существенно особая точка $a = \infty$.

Теорема Мореры

Теорема (Мореры): Пусть G - односвязная область. $f(z) \in C(G)$ и \forall замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset G$ $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$. Тогда

$$f(z) \in A(G) \tag{6.15}$$

Доказательство будет приведено позднее.

Лекция 7. Существенно особая точка

Теорема об эквивалентности утверждений

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны

1. Точка a – полюс
2. Главная часть разложения функции в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (7.1)$$

Причём $c_{-p} \neq 0$.

3. В окрестности $U_a(z)$ точки a функция $f(z)$ представима в виде:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^p} \quad (7.2)$$

где

$$\varphi(z) \in \mathcal{A}(U_a(z)) \quad (7.3)$$

причём $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство. Изолированная особая точка однозначного характера называется полюсом, если:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \quad (7.4)$$

Самый сложный переход - от первого к третьему утверждению. Запишем окрестность:

$$\overset{\circ}{B}(a, \delta) = \{z : 0 < |z - a| < \delta\} \quad (7.5)$$

В это круге рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad (7.6)$$

Знаменатель не обращается в нуль, таким образом функция $g(z)$ определена корректно.

Из соотношения для предела функции $f(z)$ в точке a вытекает, что:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0 \quad (7.7)$$

Для функции $g(z)$ имеется:

$$g(z) \in \mathcal{A}\left(\overset{\circ}{B}(a, \delta)\right) \quad (7.8)$$

Доопределим функцию $g(z)$, так как точка a получается устранимой:

$$g(z) : g(a) = 0 \quad (7.9)$$

Таким образом получаем, что функция регулярна уже в полноценной окрестности:

$$g(z) \in \mathcal{A}(B(a, \delta)) \quad (7.10)$$

Тогда функция $g(z)$ в окрестности точки a представима в виде (из теоремы о единственности):

$$g(z) = (z - a)^p \psi(z) \quad (7.11)$$

Такое представление появляется, потому что функция регулярна в окрестности, поэтому её разложение в ряд Тейлора:

$$\sum_{n=p}^{\infty} d_n (z - a)^n = (z - a)^p \sum_{n=p}^{\infty} d_n (z - a)^{n-p} \quad (7.12)$$

Так как первые коэффициенты $d_0 = d_1 = \dots = d_{p-1} = 0$, $d_p \neq 0$, то сумма немного свернулась.

Итого знаем, что:

$$\psi(a) = d_p \neq 0 \quad (7.13)$$

Если непрерывная функция отлична от нуля в какой-то точке, то она будет отлична от нуля и в некоторой окрестности этой точки. То есть:

$$\exists \delta_1 \leq \delta \quad \psi(z) \neq 0 \quad (7.14)$$

в круге $B(a, \delta_1)$

Возвращаемся к функции $f(z)$. Теперь она представима в виде:

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^p \psi(z)} \quad (7.15)$$

Обозначим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)} \quad (7.16)$$

Тогда можно переписать:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^p} \quad (7.17)$$

Так как $\psi(a) \neq 0$, то и $\varphi(a) \neq 0$. Таким образом, установлена импликация из первого в третий пункт утверждения теоремы.

Теперь рассмотрим обратную импликацию (из третьего утверждения в первое). Так

как выяснили вид, в котором представима функция $f(z)$, ищем просто предел:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^p} = \infty \quad (7.18)$$

Тем самым, получили обратную импликацию. Доказано, что первый и третий пункт эквивалентны.

Теперь, для завершения доказательства, необходимо установить эквивалентность второго и третьего утверждения. Напомним второе утверждение. Необходимо, чтобы разложение в ряд Лорана в окрестности точки a имело вид:

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_{-p} \neq 0 \quad (7.19)$$

Знаем, что функция $\varphi(z)$ аналитична (регулярна) в окрестности точки a радиуса δ :

$$\varphi(z) \in \mathcal{A}(B(a, \delta)) \quad (7.20)$$

Тогда функция раскладывается в ряд:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-a)^n \quad (7.21)$$

Теперь подставим в выражение для $f(z)$ полученное разложение:

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-a)^n}{(z-a)^p} = \frac{\gamma_0}{(z-a)^p} + \frac{\gamma_1}{(z-a)^{p-1}} + \dots + \gamma_n (z-a)^{n-p} \quad (7.22)$$

Переобозначим коэффициенты:

$$c_n = \gamma_{n-p} \quad (7.23)$$

Таким образом, импликация из третьего во второе утверждение доказана.

Покажем, что обратная импликация (из второго в третье утверждение) имеет место быть. Перепишем разложение для $f(z)$:

$$f(z) = \frac{\sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-a)^{n+p}}{(z-a)^p} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (z-a)^k}{(z-a)^p} = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^p} \quad (7.24)$$

Здесь учтено, что $n \geq -p$ и произведено переобозначение:

$$\gamma_{n+p} = c_n \quad (7.25)$$

При этом

$$\varphi(z) \in \mathcal{A}(B(a, \delta)) \quad (7.26)$$

Таким образом, теорема полностью доказана. Все три утверждения эквивалентны.

Теорема о существенно особой точке.

Пусть a - изолированная особая точка однозначного характера. Пусть a - существенно особая точка. Это означает, что никакого предела не существует:

$$\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z) \quad (7.27)$$

Теорема. Точка a - существенная особая точка тогда и только тогда, когда главная часть разложения $f(z)$ в ряд Лорана содержит бесконечное число членов.

Разложение в ряд Лорана можно представить по положительным и отрицательным степеням, кроме того, сумму можно разбить на две.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} \quad (7.28)$$

Первое слагаемое - регулярная часть разложения, а вторая часть - главная часть разложения (разложение по отрицательным степеням). Тогда смысл теоремы в том, что, если a - существенно особая точка, то главная часть разложения содержит бесконечное число слагаемых.

Доказательство. Эта теорема вытекает из теоремы об устранимой особой точке и из теоремы 1 о полюсах (рассмотрена ранее). Доказательство проводится в две стороны:

1. В прямую сторону (то есть, если a - существенно особая точка, то главная часть разложения содержит бесконечное число членов). Предположим, что разложение содержит конечное число отрицательных степеней, то по теореме 1 получается, что точка a - полюс. Если разложение не содержит отрицательных степеней, то a - устранимая особая точка. Таким образом получено противоречие.
2. В другую сторону (если главная часть разложения в ряд содержит бесконечное число членов, то a - существенно особая точка). Точка a - не может быть полюсом, так как в полюсе конечное число отрицательных степеней. Точка a не может быть устранимой особой точкой, так как в устранимой особой точке нет отрицательных степеней. Таким образом, теорема доказана.

Теорема Сохоцкого.

Теорема. Пусть $a \in \mathbb{C}$ – существенно особая точка. Тогда, если взять:

$$\forall A \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (7.29)$$

такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \quad (7.30)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A \quad (7.31)$$

Теорема показывает, что в окрестности существенно особой точки поведение функции является непростым.

Доказательство.

1. Рассмотрим случай $A = \infty$. Тогда

$$\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} : z_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty), f(z_n) \rightarrow \infty \quad (7.32)$$

Если a – существенно особая точка, то тогда $f(z)$ является неограниченной функцией в любой окрестности $\overset{\circ}{B}(a, \delta)$. Это следствие оценок коэффициентов ряда Лорана.

Оценка коэффициентов ряда Лорана:

$$|C_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n} \quad (7.33)$$

где

$$M_\rho = \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)| \quad (7.34)$$

Рассмотрим случай отрицательных n . Если $n < 0$, тогда $n = -|n|$. Тогда получается, что:

$$|c_n| \leq M_\rho \cdot \rho^{|n|} \quad (7.35)$$

Предположим, что $f(z)$ – ограниченная в $B(a, \delta)$, то тогда

$$\exists M : M_\rho \leq M \quad (7.36)$$

Тогда

$$|c_n| \leq M_\rho \cdot \rho^{|n|} \leq M \cdot \rho^{|n|} \quad (7.37)$$

Рассмотрим случай $\rho \rightarrow 0$. Тогда $c_n = 0$ для отрицательных n . Тогда точка a – существенно особая точка. Таким образом, убедились, что $f(z)$ является неограниченной в любой указанной ранее окрестности. Тогда:

$$\exists z_1 \in \overset{\circ}{B}(a, \delta) \quad (7.38)$$

такая, что:

$$|f(z_1)| > 1 \quad (7.39)$$

Далее рассмотрим круг:

$$\left\{ z : 0 < |z - a| < \frac{|z_1 - a|}{2} \right\} \quad (7.40)$$

В этом круге функция неограниченна. Тогда:

$$\exists z_2 : |f(z_2)| > 2 \quad (7.41)$$

Далее уменьшаем окрестность:

$$\exists z_3 : |f(z_3)| > 3 \quad (7.42)$$

и так далее:

$$\exists z_n : |f(z_n)| > n \quad (7.43)$$

То есть, получилась последовательность вложенных кругов и точек в них.
Последовательность точек:

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty \quad (7.44)$$

2. Рассмотрим случай A – конечное число, $A \in \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию:

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A} \quad (7.45)$$

Тогда функцию $f(z)$ выражается через $\varphi(z)$ следующим образом:

$$f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)} \quad (7.46)$$

Необходимо будет показать, что существует последовательность точек $\{z_n\}$, таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

Точка a - это существенно особая точка для $\varphi(z)$ (она была существенно особой точкой для $f(z)$). Будем рассуждать от противного. Предположим, что a - это устранимая особая точка для $\varphi(z)$, то есть:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = b \neq 0 \quad (7.47)$$

Где b - какое-то конечное число. Тогда:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = A + \frac{1}{b} \quad (7.48)$$

Тогда точка a - это устранимая особая точка для $f(z)$, а предполагалось, что это существенно особая точка. Противоречие.

Другой случай - это, если:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0 \quad (7.49)$$

Тогда:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \quad (7.50)$$

Это так, так как $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$.

Пусть точка a - полюс для функции $\varphi(z)$, то есть:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \infty \quad (7.51)$$

Тогда аналогично:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \quad (7.52)$$

Тогда получается, что точка a - устранимая особая точка для $f(z)$. Противоречие.

Теперь a - существенно особая точка для $\varphi(z)$. Тогда по пункту 1 доказательства:

$$\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = \infty \quad (7.53)$$

Если теперь рассмотреть:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n)} = A \quad (7.54)$$

То получается, что теорема доказана.

Теорема Пикара.

Пусть $a \in \mathbb{C}$ – существенно особая точка для $f(z)$. Тогда в любой проколотой окрестности точки a $f(z)$ принимает все комплексные значения, причём каждое бесконечное число раз (за исключением, быть может, одного A).

Пояснение. Рассмотрим точку a и её окрестность (круг с центром в точке a). Рассмотрим число $A \in \mathbb{C}$. Тогда в этом круге число A принимается бесконечное число раз. То есть, существует такая последовательность $\{z_n\}$, что:

$$f(z_n) = A \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.55)$$

Таким образом можно выстроить такую последовательность $\{z_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \quad (7.56)$$

Тогда вытекает, что:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A \quad (7.57)$$

То есть, по сути, из теоремы Пикара вытекает теорема Сохоцкого для конечного A .

“За исключением быть может одного” - означает, что за исключением существенно одного A . Можно привести пример:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \quad (7.58)$$

Точка $z = 0$ – существенно особая точка. Это можно понять по определению. Если сужиться на вещественную ось ($z = x$), тогда:

$$\exists \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (7.59)$$

и

$$\exists \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty \quad (7.60)$$

То есть, никакого предела при $z \rightarrow 0$ не существует.

Однако

$$f(z) \neq 0 \quad \forall z \quad (7.61)$$

Это и означает “За исключением быть может одного”. Доказательство теоремы можно посмотреть в книге: Б. В. Шабат “Комплексный анализ. Том 1”.

Примеры.

Ранее рассматривался случай, когда $a \in \mathbb{C}$. Рассмотрим случай при $a = \infty$. Как реагирует разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечности на характер особенности.

1. ∞ – устранимая особая точка, если существует конечный

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \quad (7.62)$$

Например, можно взять функцию

$$f(z) = \frac{z+1}{z} \quad (7.63)$$

2. ∞ – полюс, если существует

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \quad (7.64)$$

Например, в качестве такой функции можно взять z^p , $p \in \mathbb{N}$.

3. ∞ – существенно особая точка, если

$$\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \quad (7.65)$$

Например,

$$f(z) = e^z \quad (7.66)$$

Рассмотрим разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечности:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-m}}{z^m} \quad (7.67)$$

Здесь разделили разложение на две суммы (главную часть и регулярную часть разложения соответственно). Окрестность бесконечности - это:

$$U_{\infty}(z) = \{z : |z| > R\} \quad (7.68)$$

Теперь рассмотрим, как реагируют на это коэффициенты ряда Лорана.

1. Если a - устранимая особая точка, то $c_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$
2. Если a - полюс. Это будет тогда и только тогда, когда $c_n = 0$, $n = p + 1, p + 2, \dots$, $c_p \neq 0$. То есть главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов.

$$f(z) = \sum_{n=1}^p c_n z^n + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{-m}}{z^m} \quad (7.69)$$

3. Если a - существенно особая точка, то $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $c_{n_k} \neq 0$: $n_k \rightarrow \infty$.

Если рассматриваем конечную точку, то разложение имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} \quad (7.70)$$

Чтобы перейти к бесконечности, необходимо просто сделать замену переменных:

$$\frac{1}{(z - a)} = \xi \quad (7.71)$$

Тогда получается:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi^{-n} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{-m} \xi^m \quad (7.72)$$

Итого положительные степени станут отрицательными степенями. При помощи такой замены можно использовать все результаты, которые касались конечных точек для бесконечных.

Лекция 8. Теорема Мореры. Вычеты

Первообразная

Рассмотрим некоторую область G и непрерывную в ней функцию $f(z) \in C(G)$. Тогда $F(z)$ - первообразная для функции $f(z)$, если существует первая производная:

$$\exists F^{(1)}(z) = f(z) \quad (8.1)$$

Необходимым условием существования первообразной - это то, что функция $f(z)$ - аналитическая или регулярная. То есть:

$$f(z) \in \mathcal{A}(G) \quad (8.2)$$

Стоит пояснить, почему присутствует данное условие. Если существует вышеупомянутая функция $f(z)$, то $F(z)$ - регулярная функция в области G . Тогда это бесконечно дифференцируемая функция из свойств интеграла типа Коши и интегральной формулы Коши. То есть:

$$F(z) \in C^\infty(G) \quad (8.3)$$

Условия существования первообразной

Теорема. Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(G)$, причём область G - односвязная (то есть в ней отсутствуют “дырки”). Тогда интеграл:

$$F_0(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \quad (8.4)$$

Взятый по любому гладкому пути γ в области G является первообразной функции $f(z)$. То есть:

$$F_0^{(1)}(z) = f(z) \quad (8.5)$$

Иллюстрация контура на рисунке 8.1.

Теорема. Пусть $f(z)$ - непрерывна в области G . И для любого замкнутого кусочно-гладкого контура:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (8.6)$$

Иллюстрация контура на рисунке 8.1. Тогда, интеграл из предыдущей теоремы не зависит от пути интегрирования, а функция $F_0(z)$ является первообразной $f(z)$.

Докажем для начала последнюю теорему. Тогда, из неё вытечет предыдущая.

Рассмотрим фиксированную точку z_0 и рассмотрим точку z , принадлежащую области G .

Тезис. Если интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то тогда интеграл не зависит от пути интегрирования.

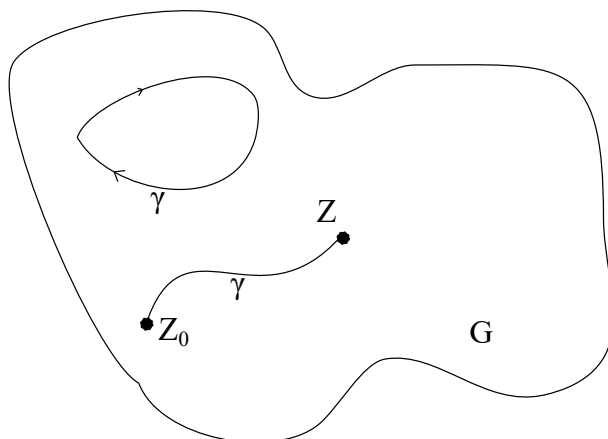


Рис. 8.1: Односвязная область G и два контура γ .

Пусть есть два пути интегрирования (γ_1 и γ_2 , рисунок 8.2).

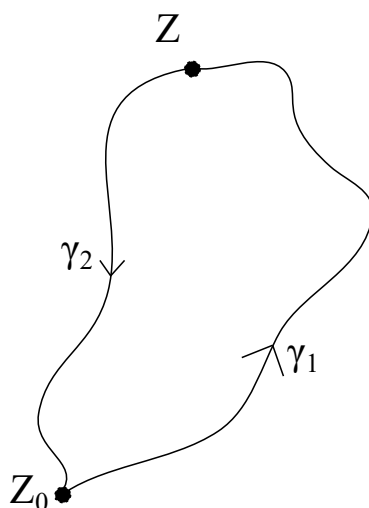


Рис. 8.2: К доказательству тезиса о независимости пути интегрирования.

Необходимо доказать, что:

$$\int_{\gamma_1} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma_2} f(\xi) d\xi \quad (8.7)$$

Интеграл по замкнутому контуру есть нуль, тогда рассмотрим контур:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2^{-1} \quad (8.8)$$

Степень контура означает, что он проходится в обратном направлении. Тогда γ - замкнутый, и интеграл по нему равен нулю. С другой стороны он равен разности двух

интегралов (сумма и знак из-за обхода в другую сторону). То есть:

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (8.9)$$

Значит независимость пути интегрирования (тезис) доказана.

Далее образуем функцию:

$$F_0(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \quad (8.10)$$

Интегрирование происходит по какому-то пути между точками z_0 и z . Рассмотрим $z + \Delta z$. И посчитаем интеграл:

$$F_0(z + \Delta z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_{\Delta z}} f(\xi) d\xi \quad (8.11)$$

Где $\gamma_{\Delta z}$ - это отрезок, соединяющий точки z и $z + \Delta z$ (рисунок 8.3).

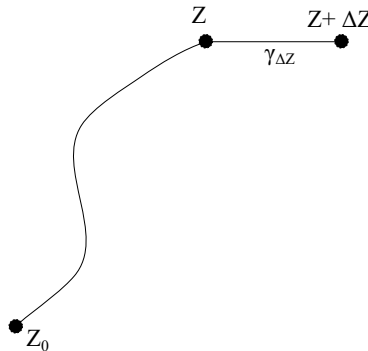


Рис. 8.3: Предельный переход при интегрировании от точки z до $z + \Delta z$.

Теперь необходимо рассчитать предел:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F_0(z + \Delta z) - F_0(z)}{\Delta z} \quad (8.12)$$

Требуется доказать, что данный предел равен $f(z)$. Предел можно выразить через интеграл:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\int_{\gamma_{\Delta z}} f(\xi) d\xi}{\Delta z} \quad (8.13)$$

Распишем интеграл:

$$\int_{\gamma_{\Delta z}} f(\xi) d\xi = f(z) \int_{\gamma_{\Delta z}} d\xi + \int_{\gamma_{\Delta z}} (f(\xi) - f(z)) d\xi \quad (8.14)$$

Необходимо учесть также, что $\int_{\gamma_{\Delta z}} d\xi = \Delta z$. Далее покажем, что последний интеграл при

$\Delta z \rightarrow 0$:

$$\int_{\gamma_{\Delta z}} (f(\xi) - f(z)) d\xi \rightarrow 0 \quad (8.15)$$

Обозначим функцию под знаком интеграла как $\varphi(z)$. Тогда, если $\xi \in \gamma_{\Delta z}$:

$$|\varphi(z)| \leq \sup |f(\xi) - f(z)| |\Delta z| \quad (8.16)$$

Причём супремум меньше чем такой же супремум, но только по кругу с центром в точке z и радиусом Δz ($B(z, |\Delta z|)$). То есть:

$$\left| \frac{\varphi(z)}{\Delta z} \right| \leq \sup_{\xi \in B(z, |\Delta z|)} |f(\xi) - f(z)| \quad (8.17)$$

Причём последний супремум стремится к нулю при стремлении $|\Delta z|$ к нулю, так как $f(z)$ непрерывна в области G . Получается, что:

$$F_0 = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \quad (8.18)$$

Является первообразной функции $f(z)$, то есть:

$$F_0^{(1)}(z) = f(z) \quad (8.19)$$

Теорема Мореры

Теорема. Пусть функция $f(z) \in C(G)$, G - односвязная область. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (8.20)$$

Тогда $f(z)$ регулярна в области G .

Было показано, что существует первообразная:

$$F_0^{(1)}(z) = f(z) \quad (8.21)$$

$F_0(z)$ - регулярная функция, значит она бесконечно-дифференцируемая в области G . Тогда производная такой функции - $f(z)$ - будет аналитической в области G :

$$F^{(1)}(z) = f(z) \in \mathcal{A}(G) \quad (8.22)$$

Определение регулярных (аналитических) функций

Существует три подхода определения регулярных функций:

1. Первый подход - Карла Вейерштрасса. Функция $f(z)$ регулярна в точке z_0 , если функция $f(z)$ представима в виде своего ряда Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (8.23)$$

2. Рассмотренный ранее подход, когда интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.
3. Подход Римана.

$$\exists f^{(1)}(z) \in C(G) \quad (8.24)$$

Теория вычетов

Пусть есть какая-то область и необходимо рассчитать интеграл по какому-то замкнутому контуру. Кроме того, пусть в области лежат изолированные особые точки однозначного характера. Тогда интеграл не будет равен нулю. Теория вычетов даёт ответ на данный вопрос.

Рассмотрим некоторую изолированную особую точку a однозначного характера и функцию $f(z)$ - аналитичную в проколотой окрестности точки a . Рассмотрим интеграл по окружности вокруг точки a с малым радиусом ε .

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} f(\xi) d\xi \quad (8.25)$$

Проколотый круг - это частный случай кольца. Следовательно функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - a)^n \quad (8.26)$$

Внутри кольца ряд сходится равномерно и его можно интегрировать почленно.

$$\oint_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (\xi - a)^n d\xi \quad (8.27)$$

На любом компакте, принадлежащем кольцу, сходимость равномерная. Тогда, можно менять порядок интегрирования и суммирования. Получается:

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (\xi - a)^n d\xi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{|z-a|=\varepsilon} (\xi - a)^n d\xi \quad (8.28)$$

Параметризуем окружность так, что $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z = a + \varepsilon e^{i\varphi}$, тогда $dz = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$. Интеграл

преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \int_{|z-a|=\varepsilon} (\xi - a)^n d\xi &= i \int_0^{2\pi} \varepsilon^n e^{in\varphi} e^{i\varphi} \varepsilon d\varphi = i \int_0^{2\pi} \varepsilon^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (8.29)$$

Возвращаясь к расчёту суммы, можно получить, что она равняется:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{|z-a|=\varepsilon} (\xi - a)^n d\xi = 2\pi i c_{-1} \quad (8.30)$$

Где c_{-1} - коэффициент разложения в ряд Лорана при степени n , отвечающей -1 .

Определение: Пусть $a \in \mathbb{C}$. **Вычетом** функции $f(z)$ в точке a называется коэффициент c_{-1} разложения функции в ряд Лорана. Обозначается как:

$$c_{-1} = \operatorname{res}_a f \quad (8.31)$$

Основная теорема для конечных точек и ограниченных областей

Пусть есть некоторая область. Такая, что в этой области лежит регулярная функция за исключением конечного числа особых изолированных точек однозначного характера. Таковыми точками являются устранимые особые точки, полюсы и существенно особые точки. Вычет в устранимой точке будет равен нулю. Основная задача - вычислить интеграл по замкнутому контуру:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{a_i} f \right) \quad (8.32)$$

Таким образом необходимо посчитать вычеты во всех особых точках внутри замкнутого контура. **Теорема.** Пусть функция f :

$$f \in \mathcal{A}(G \setminus \bigcup_{i=1}^n a_i) \quad (8.33)$$

Здесь a_i - изолированная особая точка однозначного характера. γ - граница области G , замкнутый кусочно гладкий контур.

Тогда

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{a_i} f \right) \quad (8.34)$$

Доказательство теоремы можно провести следующим образом. Образум из области

G другую:

$$G_\varepsilon = G \setminus \bigcup_{j=1}^n B(a_j, \varepsilon) \quad (8.35)$$

То есть, это область без объединения кругов вокруг особых точек с радиусом ε . Тогда граница новой области - будет объединение старой границы и все окружности вокруг особых точек, но с противоположным направлением обхода. То есть:

$$\partial G_\varepsilon = \partial G \cup \left(\bigcup_{j=1}^n \partial B(a_j, \varepsilon) \right) \quad (8.36)$$

Направление обхода окружностей изменено, так как при движении по контуру область должна находиться слева (правила ТФКП).

Тогда, по теореме Коши:

$$0 = \int_{\partial G_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\gamma=\partial G} f(z) dz - \sum_{j=1}^n \oint_{|z-a_j|=\varepsilon} f(z) dz \quad (8.37)$$

Кроме того:

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{|z-a_j|=\varepsilon} f(z) dz \quad (8.38)$$

Последняя сумма равна:

$$2\pi i \left(\sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{a_j} f \right) \quad (8.39)$$

Таким образом, теорема доказана.

Основная теорема 2 теории вычетов

Пусть существует некоторый компакт K - ограниченное замкнутое множество. Его внешность - это вся комплексная плоскость без компакта. То есть область:

$$G = \mathbb{C} \setminus K \quad (8.40)$$

В этой области снова лежит конечное число изолированных особых точек однозначного характера. Граница области G - это кусочно гладкий контур γ (рисунок 8.4). Тогда интеграл, который надо найти можно искать следующим образом:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_{a_j} f \right) + 2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f \quad (8.41)$$

Последнее слагаемое представляет собой вычет функции в бесконечности. Функция

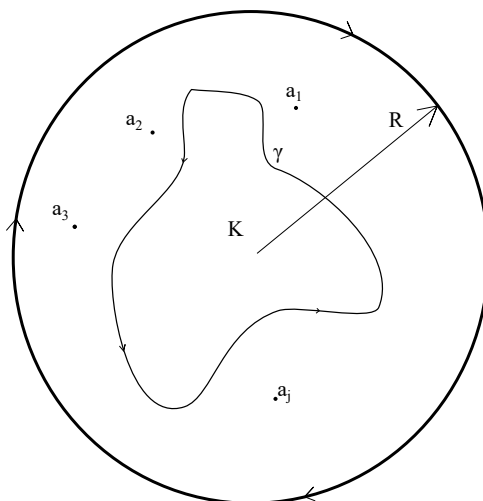


Рис. 8.4: Иллюстрация ко второй основной теореме теории вычетов.

задана в окрестности бесконечности:

$$U_{\infty}(R) = \{z : |z| > R\} \quad (8.42)$$

Тогда это специальный частный случай кольца. Значит функция располагается в ряд Лорана. Тогда вычет в бесконечности:

$$res_{\infty} f = -c_{-1} \quad (8.43)$$

Образуя большой круг радиуса R вокруг всей области, стоит обходить его по часовой стрелке. Получается, что область G_R имеет две границы:

$$G_R = G \cap \{z : |z| < R\} \quad (8.44)$$

По доказанной ранее теореме интеграл:

$$\int_{\partial G_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} res_{a_j} f \quad (8.45)$$

С другой стороны он равен:

$$\int_{\gamma=\partial G_R} f(z) dz = \int_{\partial G} f(z) dz + \int_{|z|=R} f(z) dz \quad (8.46)$$

Второе слагаемое - это интеграл по окружности, который был рассчитан ранее, он равен

$2\pi i C_{-1}(\infty)$. Отсюда вытекает, что:

$$\int_{\gamma=\partial G_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_{a_j} f - 2\pi i C_{-1}(\infty) = 2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_{a_j} f + 2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f \quad (8.47)$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие из теоремы

Пусть функция f аналитична на всей комплексной плоскости за вычетом конечным числом точек a_j . Тогда:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_{a_j} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0 \quad (8.48)$$

Лекция 9. Теория вычетов

Пример (вычислить интеграл от заданной функции)

Требуется вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^{13}(z^{10} - 1)} \quad (9.1)$$

Если посмотреть на подинтегральную функцию, то можно увидеть, что функция имеет 10 особых точек внутри круга (решение уравнения $z^{10} = 1$) и нуль (рисунок 9.1).

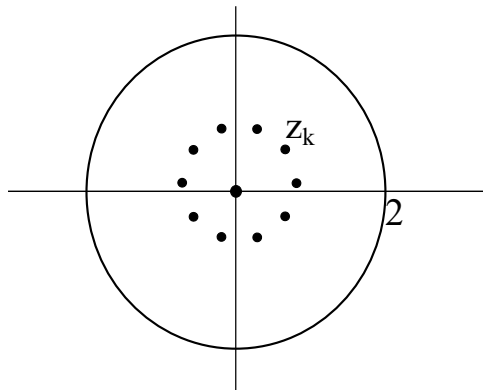


Рис. 9.1: Окружность и особые точки подинтегральной функции.

Ищем особые точки:

$$z^{10} = e^{2\pi ki} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)$$

$$z = e^{\frac{2\pi ki}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9 \quad (9.2)$$

Тогда можно рассчитать интеграл:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^{13}(z^{10} - 1)} = 2\pi i \left(\sum_{k=0}^9 \text{res}_{z_k} f + \text{res}_0 f \right) \quad (9.3)$$

Можно воспользоваться результатом следствия из предыдущей лекции. У данной функции всего 11 особых точек, тогда сумма вычетов равна вычету в бесконечности со знаком минус. Рассчитаем этот вычет. В рассматриваемой функции z будет большим, заведомо больше 2. Поэтому $\frac{1}{z} < \frac{1}{2}$. Преобразуем функцию, воспользовавшись геометрической прогрессией.

$$f(z) = \frac{1}{z^{13}(z^{10} - 1)} = \frac{1}{z^{23} \left(1 - \frac{1}{z^{10}}\right)} = \frac{1}{z^{23}} \left(1 + \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{20}} + \dots\right) = \frac{1}{z^{23}} + \frac{1}{z^{33}} + \frac{1}{z^{43}} + \dots \quad (9.4)$$

Получили ряд Лорана подинтегральной функции. Таким образом, коэффициент $c_{-1}(\infty) = 0$. Таким образом вычет и весь искомый интеграл будет равен 0.

Лемма (формула вычисления вычета в случае полюса)

Пусть a - это изолированная особая точка однозначного характера, а именно - полюс порядка p . Это означает, что функция аналитична в окрестности точки a , представима в виде:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^p} \quad (9.5)$$

Причём $\varphi(a) \neq 0$.

Выведем формулу вычисления вычета в таком полюсе. В итоге она выглядит так:

$$res_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^p f(z)]^{(p-1)} \quad (9.6)$$

Итак, в круге (окрестности точки a) функция $\varphi(z)$ аналитична. Тогда она представима в виде ряда Тейлора.

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(a)^{(k)}}{k!} (z-a)^k \quad (9.7)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\varphi(a) + \frac{1}{1!}\varphi(a)^{(1)}(z-a) + \dots + \frac{1}{(p-1)!}\varphi(a)^{(p-1)}(z-a)^{p-1} + \frac{1}{p!}\varphi(a)^{(p)}(z-a)^p + \dots}{(z-a)^p} = \\ &= \dots + \frac{1}{(p-1)!} \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(z-a)} + \dots \end{aligned} \quad (9.8)$$

Таким образом видно, что при разложении в ряд Лорана искомый коэффициент равен:

$$c_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(a) \quad (9.9)$$

Кроме того:

$$\varphi(z) = (z-a)^p f(z) \quad (9.10)$$

Причём z “бегаёт” в проколотой окрестности точки a , потому что сама функция в точке a не определена. Итоговую формулу можно сократить (подразумевая предельный переход к точке a):

$$res_a f = \frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(a) \quad (9.11)$$

Где p - натуральное число.

Следствие из леммы

Пусть функция $f(z)$ представима в виде:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \quad (9.12)$$

Где $\varphi(z), \psi(z)$ - аналитические в проколотой окрестности точки a . Причём $\varphi(a) \neq 0$, для $\psi(z)$ - a простой нуль. То есть, $\psi(z)$ в окрестности точки a можно представить в виде:

$$\psi(z) = (z - a)\psi_1(z), \quad \psi_1(z) \neq 0 \quad (9.13)$$

Тогда вычит:

$$res_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \quad (9.14)$$

Если выполнены вышеупомянутые условия, то $p=1$. Тогда:

$$res_a f = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z - a) \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \right] \quad (9.15)$$

Так как функция $\psi(z)$ имеет простой нуль в точке a , то она будет иметь разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(a)^{(k)}}{k!} (z - a)^k = \psi(z)^{(1)}(z - a) + \frac{1}{2!} \psi(z)^{(2)}(z - a)^2 + \dots = \\ &= (z - a)(\psi(z)^{(1)} + \frac{1}{2!} \psi(z)^{(2)}(z - a) + \dots) = (z - a)\psi_1(z) \end{aligned} \quad (9.16)$$

Теперь, подставляя разложение для функции $\psi(z)$:

$$res_a f = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z - a) \frac{\phi(z)}{(z - a)(\psi(z)^{(1)} + \frac{1}{2!} \psi(z)^{(2)}(z - a) + \dots)} \right] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \quad (9.17)$$

Пример (вычислить интеграл от рациональной функции)

Рассмотрим интеграл от рациональной функции:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx \quad (9.18)$$

Кроме того:

$$R(x) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \quad (9.19)$$

Где многочлены:

$$P_m(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m, \quad P_m(z) = m \quad (9.20)$$

$$Q_n(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n, \quad P_n(z) = n \quad (9.21)$$

Дополнительно $n - m \geq 2$. А также предполагаем, что $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Интеграл I сходится, так как можно рассмотреть оценку:

$$|R(x)| = \left| \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \right| = \left| \frac{x^m (a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_m}{x^m})}{x^n (b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n})} \right| \leq \frac{K}{|x^{n-m}|} \leq \frac{K_1}{x^2} \quad (9.22)$$

Где K - константа. Тогда, по признаку сходимости интеграл сходится.

Перейдём в комплексную плоскость. Многочлен Q степени n имеет ровно n корней с учётом кратности. Этот многочлен (как и любой другой) можно представить в виде:

$$Q(z) = d_0 (z - \alpha_1)^{p_1} \dots (z - \alpha_k)^{p_k}, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_k = n \quad (9.23)$$

Тогда все α_k будут полюсами. Полюсы будут как-то расположены на комплексной плоскости. Возьмём контур радиуса R в верхней полуплоскости (рисунок 9.2). Контур γ_R - это полуокружность, соединённая горизонтальным отрезком, проходится против часовой стрелки.

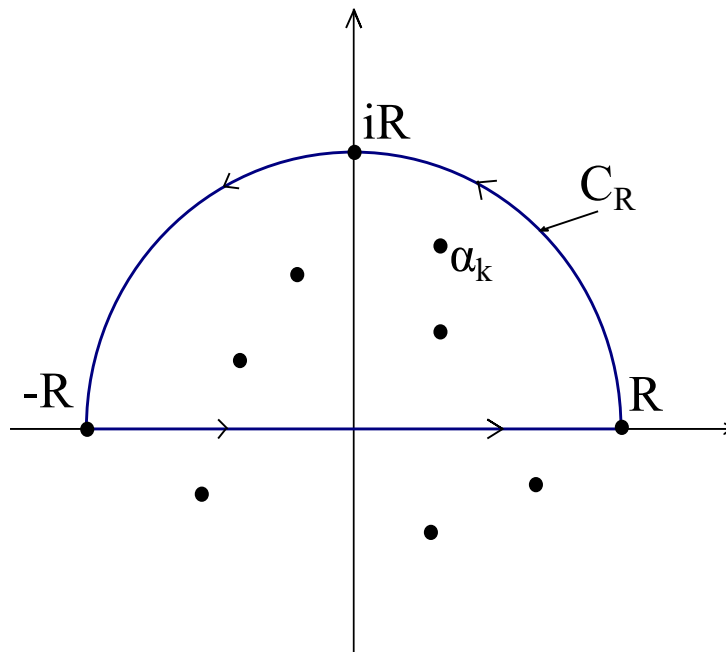


Рис. 9.2: Комплексная плоскость и полюсы интеграла вещественной функции, которая является частным двух многочленов.

Тогда интеграл:

$$\int_{\gamma_R} R(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^l \operatorname{res}_{\alpha_j} R(z), \quad l \leq k \quad (9.24)$$

Причём α_l - лежат в верхней полуплоскости. С другой стороны интеграл можно представить в виде суммы:

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R R(x) dx + \int_{C_R} \mathbb{R}(z) dz \quad (9.25)$$

Устремим $R \rightarrow +\infty$. Тогда первый интеграл в сумме будет искомым интегралом I :

$$\int_{-R}^R R(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = I \quad (9.26)$$

Теперь, можно показать, что интеграл по контуру C_R стремится к нулю. Интегрирование происходит по полуокружности радиуса R , естественно параметризовать:

$$\int_{C_R} \mathbb{R}(z) dz = i \int_0^{\pi} \mathbb{R}(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} d\varphi \quad (9.27)$$

Используя оценку (будет получена далее):

$$|\mathbb{R}(Re^{i\varphi})| \leq \frac{\operatorname{const}}{R^{n-m}} \quad (9.28)$$

Взяв модуль от последнего интеграла, можно получить неравенства:

$$\left| i \int_0^{\pi} \mathbb{R}(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} d\varphi \right| \leq i \int_0^{\pi} |\mathbb{R}(Re^{i\varphi})| R d\varphi \leq \frac{\pi \operatorname{const}}{R^{n-m-1}} \quad (9.29)$$

Так как $n - m - 1 \geq 1$, выражение стремится к нулю.

Покажем, что справедлива использованная оценка.

$$|R(z)| = \left| \frac{z^m (a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_m}{z^m})}{z^n (b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_n}{z^n})} \right| \leq \frac{R^m \left| a_0 + \frac{a_1}{Re^{i\varphi}} + \dots + \frac{a_m}{R^m e^{im\varphi}} \right|}{R^n \left| b_0 + \frac{b_1}{Re^{i\varphi}} + \dots + \frac{b_n}{R^n e^{in\varphi}} \right|} \leq \frac{\operatorname{const}}{R^{n-m}} \quad (9.30)$$

Пример (вычислить интеграл)

Рассмотрим интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{(x^4 + 1)^2} \quad (9.31)$$

Интеграл можно вычислить, используя теорию вычетов. Подынтегральная функция:

$$\mathbb{R}(z) = \frac{z^3}{(z^4 + 1)^2} \quad (9.32)$$

Сначала находятся точки, в которых необходимо вычислить вычеты. Решается уравнение:

$$z^4 = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)} \quad (9.33)$$

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)} \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (9.34)$$

Четыре корня расположены на комплексной плоскости симметрично (рисунок 9.3).

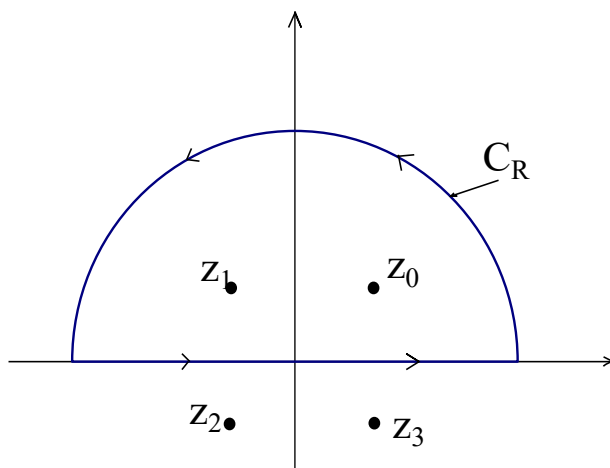


Рис. 9.3: Комплексная плоскость и полюсы интеграла.

Тогда, выбирая контур в верхней полуплоскости, интеграл будет равен сумме двух вычетов:

$$I = 2\pi i(\text{res}_{z=z_0} \mathbb{R}(z) + \text{res}_{z=z_1} \mathbb{R}(z)) \quad (9.35)$$

Точки, в которых рассчитываются вычеты - полюсы второго порядка. Если интеграл представить, как и ранее, в виде частного двух многочленов P и Q :

$$Q_8(z) = (z - z_0)^2 (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 (z - z_3)^2 \quad (9.36)$$

$$P_3(z) = z^3 \quad (9.37)$$

Тогда можно рассчитать непосредственно вычеты:

$$\text{res}_{z=z_0} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^2 \mathbb{R}(z)]^{(1)} \quad (9.38)$$

$$\operatorname{res}_{z=z_1} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow z_1} [(z - z_1)^2 \mathbb{R}(z)]^{(1)} \quad (9.39)$$

Вводится обозначение:

$$S(z) = \frac{z^3}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2 (z - z_3)^2} \quad (9.40)$$

Далее подставляется многочлен:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{z^3}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2 (z - z_3)^2} \right]^{(1)} = \frac{3z_0^2 S(z_0) - z_0^3 S'(z_0)}{S^2(z_0)} \quad (9.41)$$

Далее можно несложно получить ответ, проделав соответствующие арифметические действия.

Лекция 10. Лемма Жордана

Лемма Жордана

Пусть $f(z)$ непрерывна на множестве (рисунок 10.1)

$$Q_{r_0} = \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| > r_0\}, \quad r \geq r_0 \quad (10.1)$$

Обозначим:

$$M(f, r) = \sup_{|z|=r, \operatorname{Im} z > 0} |f(z)| = \sup_{0 \leq \varphi \leq \pi} |f(ze^{i\varphi})| \quad (10.2)$$

Кроме того, пусть $M \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$. Если $\alpha > 0$:

$$\int_{|z|=r, \operatorname{Im} z > 0} e^{i\alpha z} f(z) dz \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow +\infty) \quad (10.3)$$

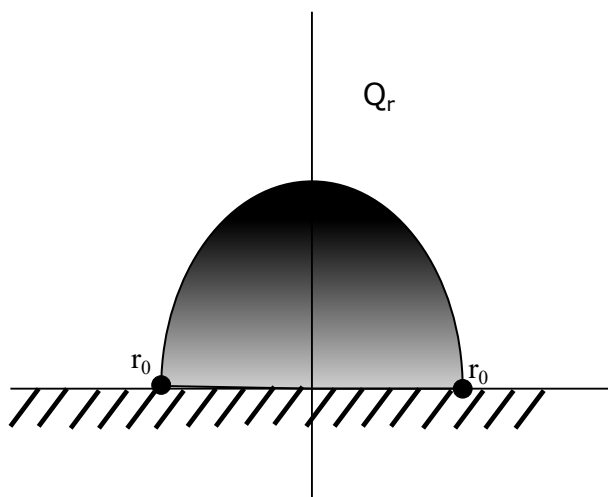


Рис. 10.1: Изображение области Q_r (незаштрихованная область, $\operatorname{Im} z > 0, |z| > r_0$) из формулировки леммы Жордана.

Доказательство. Распишем интеграл, параметризуя окружность:

$$\int_{|z|=r, \operatorname{Im} z > 0} e^{i\alpha z} f(z) dz = i \int_0^\pi e^{i\alpha r e^{i\varphi}} f(ze^{i\varphi}) r e^{i\varphi} d\varphi \quad (10.4)$$

Модуль интеграла при $r \rightarrow \infty$ можно оценить:

$$\left| i \int_0^\pi e^{i\alpha r e^{i\varphi}} f(ze^{i\varphi}) r e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \int_0^\pi |e^{i\alpha r e^{i\varphi}}| |f(ze^{i\varphi})| r d\varphi \leq M(r, f) r \int_0^\pi |e^{i\alpha r e^{i\varphi}}| d\varphi \quad (10.5)$$

Отметим, что по формуле Эйлера:

$$|e^{iar(\cos(\varphi)+isin(\varphi))}| = e^{-arsin(\varphi)} \quad (10.6)$$

Тогда:

$$M(r, f)r \int_0^\pi |e^{iare^{i\varphi}}| d\varphi = M(r, f)r \int_0^\pi e^{-arsin(\varphi)} d\varphi \quad (10.7)$$

Рассмотрим функцию $\sin(\varphi)$. График её симметричен относительно $\varphi = \pi/2$. Поэтому, последнее равенство можно переписать в силу симметрии:

$$M(r, f)r \int_0^\pi e^{-arsin(\varphi)} d\varphi = 2M(r, f)r \int_0^{\pi/2} e^{-arsin(\varphi)} d\varphi \quad (10.8)$$

Отметим также, что при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$:

$$\sin(\varphi) \geq \frac{2}{\pi}\varphi \quad \Rightarrow \quad -\sin(\varphi) \leq -\frac{2}{\pi}\varphi \quad (10.9)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} 2M(r, f)r \int_0^{\pi/2} e^{-arsin(\varphi)} d\varphi &\leq 2M(r, f)r \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}ar\varphi} d\varphi = 2M(r, f)r \frac{e^{-\frac{2}{\pi}ar\varphi}}{-\frac{2}{\pi}ar} \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= 2M(r, f)r \frac{(1 - e^{-ar})\pi}{2ar} \leq \frac{\pi}{2a} 2M(r, f) = \frac{\pi}{a} M(r, f) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (10.10)$$

Пример

Рассмотрим интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(5x)}{x^2 + 4x + 8} dx \quad (10.11)$$

Данный интеграл сходится по признаку Дирихле. Комплексный анализ способен не просто рассказать о сходимости интеграла, но и рассчитать его.

Рассмотрим интеграл:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{5ix}}{x^2 + 4x + 8} dx \quad (10.12)$$

Тогда $I = \text{Im}(J)$. Сопоставляя с леммой Жордана, видно, что $\alpha = 5$.

Рассмотрим контур $\gamma_r = (-r, r) \cup C_r$ (рисунок 10.2). Рассмотрим интеграл от функции комплексной переменной:

$$\int_{\gamma_r} \frac{ze^{5iz}}{z^2 + 4z + 8} dz = \int_{-r}^r \frac{xe^{5ix}}{x^2 + 4x + 8} dx = \int_{C_r} \frac{ze^{5iz}}{z^2 + 4z + 8} dz \quad (10.13)$$

Необходимо показать, что интеграл по контуру C_r (второй в сумме) стремится к нулю

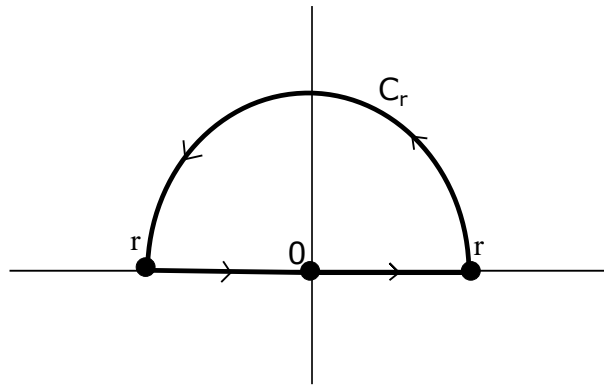


Рис. 10.2: К расчёту интеграла с использованием леммы Жордана.

при $r \rightarrow \infty$. Тогда расчёт искомого интеграла можно провести с помощью теории вычетов, применённой интегралу по замкнутому контуру γ_r .

Найдём нули знаменателя:

$$z^2 + 4z + 8 = 0, \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = -2 \pm 2i \quad (10.14)$$

В данном случае интерес представляет комплексный корень, находящийся в верхней полуплоскости. Этот корень равен $z = -2 + 2i$. Кроме того, этот корень является полюсом первого порядка. Тогда интеграл:

$$J = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-2+2i} \frac{ze^{5iz}}{z^2 + 4z + 8} \quad (10.15)$$

Покажем теперь, что интеграл по контуру действительно стремится к нулю. Функция

$$|f(z)| = \left| \frac{z}{z^2 + 4z + 8} \right| = \left| \frac{re^{i\varphi}}{r^2 e^{2i\varphi} + 4re^{i\varphi} + 8} \right| \leq \frac{1}{r \left| 1 + \frac{4}{re^{i\varphi}} + \frac{8}{r^2 e^{2i\varphi}} \right|} \leq \frac{2}{r} \rightarrow 0 \quad (10.16)$$

Таким образом, по Лемме Жордана интеграл по контуру C_r будет стремиться к нулю.

Теперь рассчитаем вычет. Так как это полюс первого порядка, то можно применить ранее полученную формулу:

$$\operatorname{res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \quad (10.17)$$

Обозначим $\varphi = ze^{5iz}$ и $\psi(z) = z^2 + 4z + 8$. Тогда интеграл будет равен:

$$J = 2\pi i \frac{ze^{5iz}}{2z + 4} \Big|_{z=-2+2i} = \frac{\pi}{2} (-2 + 2i) e^{-10} e^{-10i} = \frac{\pi}{2} (-2 + 2i) e^{-10} (\cos(10) - i \sin(10)) \quad (10.18)$$

Тогда искомый интеграл:

$$I = \operatorname{Im} J = \pi e^{-10} (\sin(10) + \cos(10)) \quad (10.19)$$

Отметим, что попутно был рассчитан интеграл:

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(5x)}{x^2 + 4x + 8} dx = \operatorname{Re} J = \pi e^{-10} (-\cos(10) + \sin(10)) \quad (10.20)$$

Данным методом можно рассматривать и более сложные интегралы вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx \quad (10.21)$$

Где Q_n, P_m - многочлены. Необходимым условием для расчёта данным методом является, что функция:

$$f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} dz \quad (10.22)$$

удовлетворяет лемме Жордана. Это условие выполняется, когда:

$$\deg Q_n - \deg P_m \geq 1 \quad (10.23)$$

Кроме того, необходимо, чтобы на вещественной оси $Q_n(x) \neq 0$.

Изолированная особая точка однозначного характера

Рассмотрим различные типы таких точек.

1. Точка a называется **устранимой** особой точкой, если \exists конечный $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.
2. Точка a называется **полюсом**, если $\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.
3. Точка a называется **существенно** особой точкой, если $\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Ранее был рассмотрен ряд теорем о том, как разложение в ряд Лорана в окрестности точки реагирует на характер особенности.

1. В случае устранимой точки главная часть ряда Лорана равна нулю.
2. В случае полюса главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями $(z - a)$.
3. В случае существенно особой точки - главная часть ряда Лорана содержит уже бесконечное число соответствующих членов.

Задача (исследовать особые точки заданной функции)

На практике ставится задача исследовать особые точки вполне конкретной функции. Рассмотрим функцию:

$$f(z) = \frac{e^{2\pi iz} - 1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (10.24)$$

Для начала рассмотрим точки, в которых знаменатель обращается в ноль. Кроме того, отметим, что рассматриваемая функция - функция комплексной переменной. Решим сначала уравнение:

$$\sin(\xi) = 0, \quad \sin(\xi) = \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2} \quad (10.25)$$

Делая замену $t = e^{i\xi}$, можно получить, что $t = \pm 1$. Решая уравнение далее, раскрывая замену, можно получить:

$$e^{i\xi} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} e^{i\xi} = e^{2\pi ki} \Rightarrow \xi = 2\pi k \\ e^{i\xi} = e^{i(\pi+2\pi k)} \Rightarrow \xi = \pi + 2\pi k \end{cases} \quad (10.26)$$

Объединяя случаи, получим, что $\xi = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Так как в оригинальной функции аргумент синуса - это $\frac{\pi}{z}$, то:

$$\frac{\pi}{z} = \pi n \quad \Rightarrow \quad z_n = \frac{1}{n} \quad (10.27)$$

Таким образом, получены однократные нули функции.

Точка a - нуль кратности n для функции

$$f(z) = (z - a)^n f_1(z), \quad f_1(a) \neq 0 \quad (10.28)$$

Тогда, когда все производные:

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (10.29)$$

Это так, потому что можно разложить функцию в ряд Тейлора, который будет начинаться по сути с n -ого члена (предыдущие слагаемые нулевые):

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (z - a)^j = (z - a)^n \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (z - a)^{n-j} \quad (10.30)$$

Для того, чтобы определить кратность нуля функции $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$. Для этого необходимо продифференцировать эту функцию и подставим ранее полученные нули z_n :

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{z_n}\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{z_n}\right) \left(-\frac{\pi}{z_n^2}\right) \neq 0 \quad (10.31)$$

Получается, что для данной функции точки $z_n = \frac{1}{n}$ - однократные нули. Однако, в знаменателе функции $f(z)$ стоит $\sin^2\left(\frac{\pi}{z}\right)$. Таким образом, нули имеют кратность равную двум.

Далее необходимо вычислить поведение числителя. Найдём его нули.

$$e^{2\pi iz} = 1 = e^{2\pi mi}, \quad \Rightarrow \quad z_m = m \quad (10.32)$$

Видно, что две серии нулей числителя и знаменателя пересекаются. Рассмотрим случаи:

1. Если $n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 1$, то есть серии не пересекаются. Тогда точки $z_n = \frac{1}{n}$ - полюсы второго порядка.
2. Если $m = n = \pm 1$. Тогда числитель имеет нуль кратности 1, а знаменатель нуль кратности два. Тогда точки $z_{\pm 1} = \pm 1$ - полюсы первого порядка.
3. Точка $z = 0$ - точка накопления полюсов. Эта точка не изолированная, её не надо включать в классификацию.
4. При $z = \infty$ необходимо дополнительное исследование. Далее будет показано, что это существенно особая точка.

Рассмотрим точку $z = \infty$. Покажем, что предела $\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$. Выберем две последовательности: z_m и ξ_m :

$$z_m : f(z_m) = 0, \forall m \in \mathbb{Z} \quad (10.33)$$

$$\xi_m = -im \rightarrow \infty (m \rightarrow \infty) \quad (10.34)$$

Тогда исходная функция:

$$f(\xi_m) = \frac{e^{2\pi m} - 1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{im}\right)} \simeq (e^{2\pi m} - 1) \frac{(-m^2)}{\pi^2} \rightarrow -\infty \quad (10.35)$$

Получается, что существует две разные последовательности. По одной из них предел равен нулю, а по второй равен бесконечности. Это означает, что предела не существует.

Пример (найти интеграл по окружности по заданным параметрам)

Найти:

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{z^2}{2-z} \cos\left(\frac{1}{2-z}\right) dz \quad (10.36)$$

Точка $z = 2$ для первого множителя является полюсом первого порядка, а для второго - существенно особой точкой. Разложим косинус в ряд:

$$\cos\left(\frac{1}{2-z}\right) = \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{4!} \frac{1}{(z-2)^4} + \dots\right) \quad (10.37)$$

Преобразуем первое слагаемое из разложения:

$$-\frac{z^2 - 4z + 4}{z-2} + \frac{4z-4}{z-2} = (z-2) + 4 + \frac{4}{z-2} = \frac{z^2}{z-2} \quad (10.38)$$

Далее необходимо совместить два полученных результата, перемножив результаты двух последних равенств (разложения и последнего). Интерес представляет коэффициент при степени $\frac{c-1}{z-2}$. Получается:

$$-\frac{1}{2} + 4 = c_{-1} \quad (10.39)$$

Тогда ответ (интеграл):

$$I = -2\pi i \frac{7}{2} = -7\pi i \quad (10.40)$$

Лекция 11. Принцип аргумента. Теорема Руше

Многозначные числа

В силу формулы Эйлера, получается, что:

$$e^{z+2\pi ki} = e^z e^{2\pi ki} = e^z \cdot 1 = e^z \quad (11.1)$$

Получается, что на комплексной плоскости функция e^z не может иметь обратную в классическом понимании, так как разные точки переходят в одну. В таком случае появляется многозначный логарифм:

$$\ln z = \ln_{\text{веществ}} |z| + i(\arg z) \quad (11.2)$$

Подставляя этот логарифм в экспоненту получается просто полярная форма представления комплексного числа:

$$e^{\ln|z|+i\arg z} = |z|e^{i\arg z} = z \quad (11.3)$$

Если к многозначному логарифму прибавить слагаемое:

$$(\ln z)_k = \ln_{\text{веществ}} |z| + i(\arg z) + 2\pi ki \quad (11.4)$$

То, подставив его в экспоненту можно также получить исходное число:

$$e^{(\ln z)_k} = |z|e^{i\arg z} = z \quad (11.5)$$

В таком случае можно говорить о ветвях логарифма. Если нормировать аргумент комплексной переменной следующим образом: $-\pi < \arg z \leq \pi$ и разрезать комплексную плоскость по отрицательной вещественной оси, то в разрезанной области будут независимо жить вышеописанные функции (многозначный логарифм). Они называются **аналитическими или регулярными ветвями** многозначной функции.

Такие ветви выделяются для того, чтобы была возможность работать с многозначной функцией так же, как и с однозначной. Если перейти к полярным координатам, то условие Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (11.6)$$

В декартовых координатах условия выглядят:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (11.7)$$

Таким образом, получается, что в полярных координатах:

$$\mathcal{L}n(z) = \ln(r) + i\varphi + 2\pi ki$$

Логарифм будет дифференцируемой функцией ($\ln(r) = u$, $i\varphi + 2\pi ki = v$).

Наряду с логарифмом непростой функцией является и корень. Рассматривая корень n -ой степени, получаем n значений:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i \arg(z) + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (11.8)$$

Все корни лежат в вершинах правильного n -угольника на комплексной плоскости. Тогда, аналогично, можно проверить условие Коши-Римана в полярных координатах. Многозначная функция корня допускает выделение регулярной ветви.

Рассмотрим функцию:

$$w(z) \neq 0, \quad w(z) \in \mathcal{A}(G) \quad (11.9)$$

От неё можно рассмотреть функцию $\mathcal{L}n(w(z))$. Тогда это:

$$\mathcal{L}n(w(z)) = \ln|w(z)| + i \arg(w(z)) + 2\pi ki \quad (11.10)$$

Аналогично можно рассмотреть сложную функцию:

$$\sqrt[n]{w(z)} = \sqrt[n]{|w(z)|} e^{\frac{i \arg(w(z)) + 2\pi k}{n}} \quad (11.11)$$

Логарифмический вычет. Принцип аргумента

Рассмотрим область G . Пусть

$$f(z) \in \mathcal{A}(G \setminus \bigcup_{j=1}^l b_j) \quad (11.12)$$

Где b_j - полюсы функции $f(z)$ в области G . Также - a_j , ($j = 1, 2, \dots, k$) - нули функции $f(z)$: $f(a_j) = 0$ в области G . Пусть нули имеют кратности n_1, n_2, \dots, n_k . Полюсы имеют порядки соответственно p_1, p_2, \dots, p_l . На рисунке 11.1 представлена область G .

Тогда:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^{(1)}(z)}{f(z)} dz = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - (p_1 + p_2 + \dots + p_l) = \frac{1}{2\pi} \text{Var}_{\gamma} \arg f(z) \quad (11.13)$$

Вариация Var - это, в данном случае, приращение аргумента $f(z)$, когда точка z бегает по контуру γ .

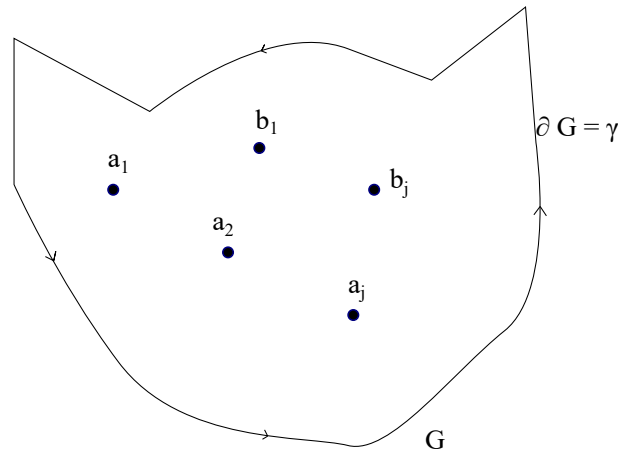


Рис. 11.1: Рассматриваемая область G с границей γ , полюсами b_j и нулями a_j .

Пометка: Логарифмическая производная:

$$\frac{f^{(1)}(z)}{f(z)} \quad (11.14)$$

Интеграл от логарифмической производной равен тому, чему он равен.

Разобьём утверждение на две части. Сначала будет приведено доказательство первой части равенства (вычисление интеграла).

1. Пусть a - нуль $f(z)$ кратности n . Тогда функцию $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z) = (z - a)^k \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0, \quad \varphi(z) \in \mathcal{A}(U(a)) \quad (11.15)$$

Тогда имеет место быть:

$$\frac{f^{(1)}(z)}{f(z)} = \frac{n(z - a)^{n-1} \varphi(z) + (z - a)^n \varphi'(z)}{(z - a)^n \varphi(z)} = \frac{n}{z - a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad (11.16)$$

Последнее слагаемое представляет собой аналитическую функцию.

Пусть b - полюс $f(z)$ порядка p . Тогда функция $f(z)$ представима в виде:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - b)^p}, \quad \psi(z) \in \mathcal{A}(U(a)), \quad \psi(a) \neq 0 \quad (11.17)$$

Найдём в этом случае:

$$\frac{f^{(1)}(z)}{f(z)} = \frac{-\frac{p}{(z-b)^{p+1}} \psi(z) + \frac{\psi'(z)}{(z-b)^p}}{\frac{\psi(z)}{(z-b)^p}} = -\frac{p}{z - b} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \quad (11.18)$$

Последнее слагаемое - аналогично регулярная функция.

Получается, что при вычислении интеграла остаются a_j и b_j - полюсы первого порядка для новой функции $\frac{f^{(1)}(z)}{f(z)}$. Получается, что, применяя теорию вычетов, интеграл будет иметь значение (после деления на $2\pi i$):

$$I = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - (p_1 + p_2 + \dots + p_l) \quad (11.19)$$

Первая часть утверждения доказана.

2. Если рассмотреть функцию $\ln(f(z))$ и продифференцировать её, то можно получить логарифмическую производную:

$$\ln(f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (11.20)$$

Тогда:

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i \operatorname{arg}(f(z)) \quad (11.21)$$

Здесь взяли только главную часть логарифма ($k = 0$). Тогда, по формула Ньютона-Лейбница при вычислении интеграла приращение по вещественной части логарифма будет нулевым, а аргумент получит приращение, не обязательно равное нулю, которое обозначается вариацией аргумента:

$$\int_{\gamma} \frac{f^{(1)}(z)}{f(z)} dz = i \operatorname{Var}_{\gamma} \operatorname{arg}(f(z)) \quad (11.22)$$

Тогда, поделив последнее выражение на 2π , вторая часть утверждения становится доказанной.

Доказанное утверждение (теорема) носит название **принцип аргумента**.

Теорема Руше

Теорема: Пусть $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области G , $\partial G = \gamma$ - замкнутый, кусочно гладкий контур. Известно, что:

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad z \in \gamma \quad (11.23)$$

Тогда функции $f(z) + g(z)$ и $f(z)$ имеют одинаковое количество нулей в области G (с учётом кратности).

Доказательство. Из условия теоремы видно, что:

$$|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0, \quad z \in \gamma \quad (11.24)$$

Тогда справедливо, что $f(z) + g(z) \neq 0$, а также $f(z) \neq 0$ для $z \in \gamma$. Если доказать, что:

$$\text{Var}_{\gamma} \arg(f(z) + g(z)) = \text{Var}_{\gamma} \arg(f(z)) \quad (11.25)$$

То справедливость теоремы следует из предыдущей теоремы, потому что эта вариация, поделённая на 2π равна как раз количеству нулей функции $f(z)$ с учётом кратности $((n_1 + n_2 + \dots + n_k))$.

Далее распишем равенство:

$$\text{Var}_{\gamma} \arg(f(z) + g(z)) = \text{Var}_{\gamma} \arg(f(z)) + \text{Var}_{\gamma} \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) \quad (11.26)$$

Оно получается из следующих соображений. Так как:

$$f(z) + g(z) = f(z) \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) \quad (11.27)$$

Тогда приращение аргумента является суммой (так как при перемножении двух комплексных их аргументы складываются).

Осталось доказать равенство нулю второй вариации. Заметим, что $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1, z \in \gamma$. Запараметризуем границу γ функцией $z = z(t)$. Значения $a = \frac{g(z)}{f(z)}$ лежат в круге $|z-1| < 1$. Рассмотрим функцию:

$$w(t) = 1 + \frac{g(z(t))}{f(z(t))}, t \in (\alpha_0, \beta_0) \quad (11.28)$$

Значения данной функции лежат в вышеуказанном круге с центром в точке 1 и радиусом 1. Тогда, если параметр t менялся какое-то время, а затем функция вернулась в начальную точку, то вектор из начала координат в эту точку не совершил никакого поворота (рисунок 11.2). Тогда приращение (вариация) будет равно 0.

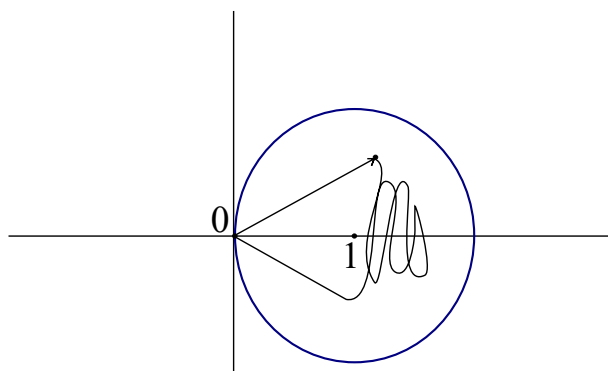


Рис. 11.2: Круг - область значений функции $w(t)$ при изменении аргумента. Таким образом, вектор из начала координат не совершает никакого поворота вокруг начала координат (полного оборота) при возвращении в исходную точку.

Таким образом теорема доказана.

Основная теорема алгебры

Теорема: Пусть есть многочлен:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n \quad (11.29)$$

Этот многочлен имеет ровно n нулей с учётом кратности на всей комплексной плоскости. То есть:

$$\sum_{k=1}^{k_0} n_k = n \quad (11.30)$$

Здесь n_1, \dots, n_k - кратности нулей a_1, \dots, a_k , $P(a_j) = 0$.

Многочлен можно представить в виде суммы двух функций, чтобы сослаться на теорему Руше.

$$P(z) = f(z) + g(z), \quad f(z) = z^n, \quad g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \quad (11.31)$$

Рассмотрим частное этих двух функций по модулю при очень большом R :

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| \Big|_{|z|=R} = \left| \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right| \leq \frac{|a_1|}{R} + \frac{|a_2|}{R^2} + \dots + \frac{|a_n|}{R^n} < 1 \quad (11.32)$$

Так как R очень большое ($\rightarrow \infty$), то это неравенство верно для $\forall R > R_0$. Таким образом $|g(z)| < |f(z)|$, то есть условия теоремы Руше выполняются. Тогда в круге радиуса R количество нулей у функции $P(z)$ будет столько же, сколько и у $f(z)$. Функция $f(z) = z^n$ имеет один нуль кратности n . Таким образом сумма будет иметь ровно n нулей с учётом кратности. Теорема доказана.

Задача (следствие теоремы Руше)

Рассмотрим многочлен:

$$z^{13} + 5z + 1 = 0 \quad (11.33)$$

В задаче спрашивается то, как много нулей он имеет в единичном круге ($|z| < 1$). Представим многочлен в виде суммы двух функций $f(z) = 5z$ и $g(z) = z^{13} + 1$. Тогда:

$$|g(z)| \Big|_{|z|=1} \leq |z^{13}| \Big|_{|z|=1} + 1 = 2 < 5 = |5z| \Big|_{|z|=1} = |f(z)| \Big|_{|z|=1} \quad (11.34)$$

Тогда по теореме Руше количество нулей функции $f(z)$ и $f(z) + g(z)$. Функция $f(z)$ имеет один ноль в нуле, первого порядка. Таким образом у исходной функции будет один нуль в единичном круге.

Теорема Гурвица

Теорема. Пусть последовательность:

$$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}, f_n(z) \in \mathcal{A}(G) \quad (11.35)$$

равномерно сходится к функции $f(z)$. То есть:

$$f_n(z) \Rightarrow f(z), n \rightarrow \infty \text{ в } G \quad (11.36)$$

Тогда для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$ существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что число нулей функции $f(z)$ и $f_n(z)$ в области, ограничиваемой контуром γ совпадают.

Если ввести константу m и положить, что на контуре γ $f(z) \neq 0$, то:

$$m = \min_{z \in \gamma} |f(z)| > 0 \quad (11.37)$$

Поскольку последовательность $f_n(z)$ равномерно сходится, то:

$$\exists n_0, \forall n > n_0 \quad |f_n(z) - f(z)| < m \quad (11.38)$$

Поэтому, если рассмотреть функцию $f(z)$ и $f(z) + (f_n(z) - f(z))$, то они по теореме Руше имеют одинаковое количество нулей. Значит, количество нулей функции $f(z)$ и $f_n(z)$ совпадают.

Лекция 12. Конформные отображения. Часть 1

Теорема 1 (принцип сохранения области)

Пусть есть регулярная в области G функция $f(z)$, тогда $f(G)$ - является областью.

Напомним несколько определений:

- **Область** - это открытое связное множество.
- Множество называется **открытой**, если для любой его точки найдётся такая окрестность, целиком принадлежащая ей.
- Множество называется **связным**, если любые две его точки можно соединить непрерывной прямой, принадлежащей этому множеству.

Тогда, для того, чтобы доказать теорему, необходимо сначала показать, что $f(G)$ - открытое множество. Рассмотрим две области (рисунок 12.1): G и $f(G)$. Рассмотрим точку $z_0 \in G$, которая посредством отображения $f(z_0)$ отображается в какую-то точку w_0 . То есть, $w_0 = f(z_0)$. Тогда необходимо показать, что найдётся такой круг с центром в точке w_0 , который целиком принадлежит множеству.

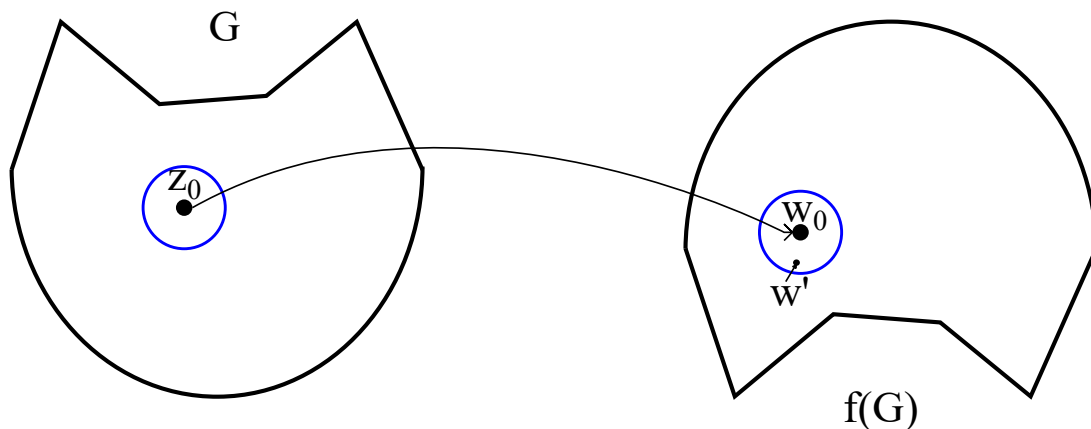


Рис. 12.1: Область G (слева) и $f(G)$ (справа).

Рассмотрим

$$C_0 = \{z : |z - z_0| \leq \rho\} \quad (12.1)$$

Это круг с центром в точке z_0 . Рассмотрим $z \in C_0$. Постараемся добиться того, что $f(z) \neq f(z_0)$ для $\forall z \in C_0$. Это можно всегда сделать. Предположим обратное. Пусть:

$$\forall C_0, \forall \rho, \exists z_1 : f(z_1) = f(z_0) \quad (12.2)$$

Тогда можно выстроить последовательность точек:

$$\{z_n\} : f(z_n) = f(z_0), \forall n \quad \text{и} \quad z_n \rightarrow z_0 \quad (12.3)$$

Тогда по теореме о единственности $f(z) \equiv f(z_0)$, а это не допускается, так как функция $f(z)$ - не константа, потому что константа отображит любое множество в точку.

Рассмотрим $\inf |f(z) - w_0| = \mu$. Этот модуль разности не может обращаться в нуль. Из курса матанализа известно, что непрерывная функция, заданная на компакте, достигает своей точной верхней и точной нижней грани. Однако, нижняя грань не может обращаться в нуль в данном случае. То есть, $\mu > 0$. Рассмотрим круг в плоскости:

$$\{w : |w - w_0| < \mu\} \quad (12.4)$$

Покажем, что все точки этого круга принадлежат множеству $f(G)$, что и будет обозначать открытость.

Рассмотрим уравнение $f(z) - w_0 = 0$. Решение данного уравнения - это $z = z_0$. Возьмём любую точку $w' \in w$. Тогда $|w_0 - w'| < \mu$. Тогда:

$$|f(z) - w_0| \geq \mu \quad (12.5)$$

Рассмотрим уравнение:

$$f(z) - w' = (f(z) - w_0) + (w_0 - w') = F(z) + G(z), \quad F(z) = f(z) - w_0, \quad G(z) = w_0 - w' \quad (12.6)$$

Теперь можно использовать теорему Руше. Если на границе области (в данном случае круга) $|F(z)| > |G(z)|$, то тогда количество нулей функции $F(z)$ и $F(z) + G(z)$ совпадают с учётом кратности. Функция $F(z)$ имеет один нуль, $|F(z)| \geq \mu$, а $|G(z)| < \mu$. Таким образом выполнены условия теоремы Руше. Значит, уравнение имеет решение в этом круге, то есть:

$$\exists z' \in G : f(z') - w' = 0 \quad (12.7)$$

Это утверждение означает открытость множества $f(G)$.

Далее необходимо показать связность. Рассмотрим области G и $f(G)$. Рассмотрим две точки в области $f(G)$: w_1 и w_2 . Необходимо доказать, что найдётся непрерывная кривая, принадлежащая множеству $f(G)$, целиком ему принадлежащая. Тогда есть и соответствующие точки: $z_1 : f(z_1) = w_1$ и $z_2 : f(z_2) = w_2$.

Отметим, что G - область, а значит, найдётся непрерывная кривая, соединяющая точки z_1 и z_2 , целиком лежащая в области G . Пусть эта кривая - $\gamma : z = \lambda(t)$. Параметр $t \in [\alpha, \beta]$. Кроме того $z_1 = \lambda(\alpha)$, $z_2 = \lambda(\beta)$ (рисунок 12.2). Рассмотрим множество, которое является образом этой кривой:

$$\Gamma = \{z : z = f(\lambda(t))\} \quad (12.8)$$

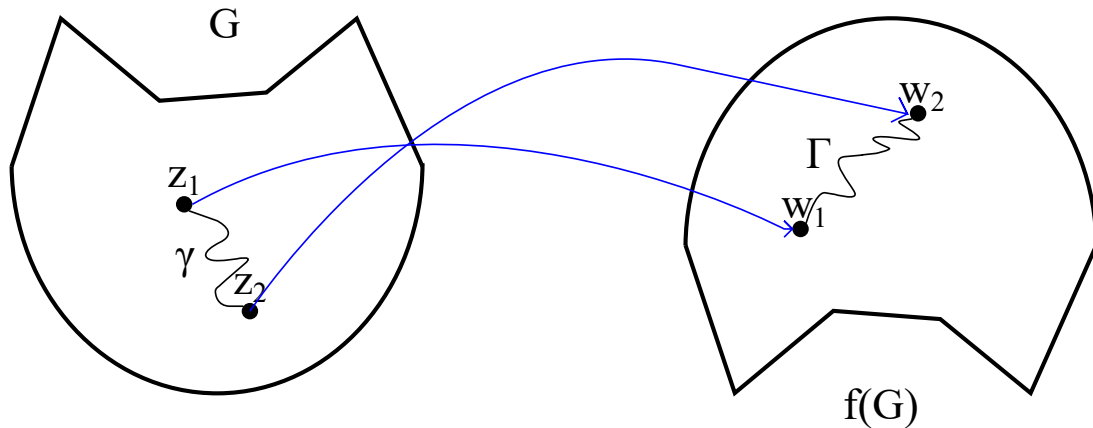


Рис. 12.2: Отображение двух точек и кривой, соединяющей их.

Рассмотрим образ кривой при отображении. $\Gamma = f(\gamma)$. Любая точка кривой γ отображается в точку кривой Γ . Тогда по теореме о непрерывности сложной функции, получается, что сложная функция $f(\lambda(t))$ является непрерывной. Потому что $\lambda(t)$ непрерывная функция, а f - ещё лучше, она аналитическая. Тогда связность доказана. Теорема доказана.

Теорема 2 (принцип максимума модуля)

Теорема. Пусть функция $f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Кроме того, $f(z) \neq const$. Тогда $|f(z)|$ - не может достигать своего максимума внутри области D .

Доказательство. Доказательство от противного. Пусть:

$$\exists z_0 \in D : |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D \quad (12.9)$$

Аналогично предыдущей теореме имеем область D и образ - область $f(D)$. Рассмотрим область $f(D)$ (рисунок 12.3), $w = f(z)$.

Отметим точку $w_0 = f(z_0)$. Рассмотрим круг с центром в начале координат и радиусом $R = |f(z_0)|$. По доказанной теореме 1, $f(D)$ - область (то есть, открытое и односвязное множество). Тогда, так как $w_0 \in f(D)$, то найдётся некоторый круг с центром в точке w_0 , который принадлежит $f(D)$. Однако, тогда найдётся точка такая, что расстояние до начала координат от неё будет больше, чем от z_0 , а ранее было предположение, что $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ для всех точек из $f(D)$. Таким образом, получено противоречие.

Рассмотрим минимум. Модуль может достигать своего минимума. Рассмотрим пример:

$$f(z) = z, \quad D = \{z : |z| < 1\} \quad (12.10)$$

Тогда получается, что $|f(z)| = |z|$ и при $z = 0$ модуль будет достигать своего минимального

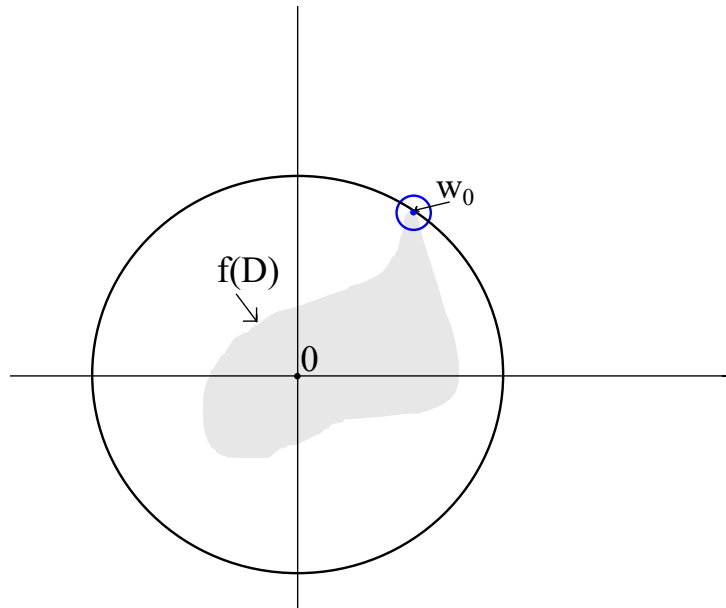


Рис. 12.3: Область $f(D)$ для доказательства теоремы о принципе максимума модуля.

значения.

Дополнительно предположим, что $f(z) \neq 0$ в D , тогда минимум достигаться не может. Рассмотрим функцию:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{A}(D) \quad (12.11)$$

Для этой функции справедлив принцип максимума модуля. То есть, её максимум не может достигаться внутри области. Однако, максимум для функции $g(z)$ будет минимумом для $f(z)$. Таким образом, если положить верным это дополнительное предположение о неравенстве нулю, то выполняется принцип минимума модуля.

Следствие из теоремы 2

Следствие. Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq const$ и D - ограниченная область. Тогда $|f(z)|$ достигает своего максимума на границе (∂D) области D .

Доказательство. Рассмотрим замыкание области D . Замыкание - это объединение самой области со своей границей:

$$\bar{D} = D \cup \partial D \quad (12.12)$$

Комплексная плоскость как множество - это \mathbb{R}^2 . Замыкание \bar{D} является компактом в \mathbb{R}^2 . Тогда по второй теореме Вейерштрасса:

$$\exists z_0 \in \bar{D} : \max_{z \in \bar{D}} |f(z)| = |f(z_0)| \quad (12.13)$$

По доказанной ранее теореме внутри области максимум достигаться не может. В замыкании, как было показано, максимум достигаться должен. Таким образом $z_0 \in \partial D$. Следствие доказано.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Конформные отображения важны в уравнениях матфизики. Рассмотрим классическую задачу Дирихле для уравнения Лапласа. Имеется область D с границей $\gamma = \partial D$. Уравнение Лапласа:

$$\Delta U = 0, \quad U|_{\gamma} = \varphi \quad (12.14)$$

Необходимо найти $U(x, y)$. В двумерном случае удобно пользоваться методами комплексного анализа. Изучаемую область можно конформно отобразить в единичный круг, в котором известно решение задачи Дирихле. Кроме того, область можно конформно отобразить в верхнюю полуплоскость. Удобство состоит в том, что оператор Лапласа при конформном отображении переходит сам в себя. Таким образом, можно произвести отображение, решить задачу в удобной области и сделать обратное отображение.

Полезная литература: “Методы ТФКП” - М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат.

Конформное отображение (определение)

Определение. Рассмотрим область G . Отображение $w = f(z)$ называется конформным, если выполнены три условия:

1. Отображение $f(z)$ - взаимно однозначно. В ТФКП такое отображение называется однолиственным.
2. $f(z) \in \mathcal{A}(G)$ за исключением может быть одного простого полюса.
3. $f'(z) \neq 0, \forall z \in G$

Теорема Римана

Любую односвязную область G в комплексной плоскости \mathbb{C} , граница которой содержит более чем одну точку, можно конформно отобразить ($w = f(z)$) в единичный круг $\{w : |w| < 1\}$. Если заданы три параметра: z_0, w_0, α , такие, что:

$$\forall z_0 \in D, \quad f(z_0) = w_0, \quad \arg(f'(z_0)) = \alpha \quad (12.15)$$

Доказательство теоремы крайне сложное и не будет приведено в рамках данного курса.

Важным моментом является тот факт, что в формулировке теоремы граница области содержит более чем одну точку. Рассмотрим разные случаи подробнее.

- Отметим, что, если область - это вся комплексная плоскость, то её нельзя конформно отобразить в единичный круг. Предположим обратное. Пусть $G = \mathbb{C}$. Тогда получится, что:

$$|w| = |f(z)| < 1 \text{ и } f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}) \quad (12.16)$$

В курсе присутствовала теорема Лиувилля, которая говорит, что, если есть аналитическая функция $f(z)$ во всей комплексной плоскости (целая функция), и она растёт не быстрее некоторой степени N , то тогда $f(z)$ - многочлен степени не выше N . В частном случае, когда $N = 0$, теорема также имеет место быть. В таком случае $f(z) = \text{const}$. Таким образом, при отображении всей плоскости все точки перейдут в одну, взаимной однозначности не будет, конформного отображения не получится.

- Предположим, что существует лишь одна граничная точка. То есть, пусть $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$. Можно показать, что в таком случае тоже нельзя произвести конформное отображение в единичный круг. Должно выполняться неравенство $|f(z)| < 1$. Точка z_0 может являться:

1. Устранимой особой точкой
2. Полюсом. Однако функция в полюсе стремится к бесконечности, поэтому полюс не подходит.
3. Существенно особой точкой. В окрестности существенно особой точки функция неограниченна, это следует из ранее рассмотренной теоремы Сохоцкого.

Таким образом, возможен только случай устранимой особой точки. Тогда, можно её устранить, и функция $f(z)$ будет аналитична во всей комплексной плоскости, а этот случай был рассмотрен выше.

Дробно-линейные отображения

Это отображения специального вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (12.17)$$

Здесь $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Рассматривается случай, когда дробь w несократима. Перепишем:

$$w = \frac{az + \frac{ad}{c} + b - \frac{ad}{c}}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c^2(z + \frac{d}{c})} \quad (12.18)$$

Где:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (12.19)$$

Таким образом, дробно-линейное отображение расщепилось в серию простых отображений.

1. Сдвиг $z \rightarrow z + \frac{d}{c}$.
2. Комплексная инверсия $\tilde{z} = \frac{1}{z}$.
3. Комплексная гомотетия $\xi \rightarrow -\frac{\Delta}{c^2}\xi$.
4. Сдвиг $\tilde{\xi} \rightarrow \xi + \frac{a}{c}$.

Дробно-линейное отображение образует группу (некоммутативную).

Круговое свойство дробно-линейного отображения

Рассмотрим окружность с центром в точке z_0 . Рассмотрим две точки P_1 и P_2 , лежащие на луче, исходящем из центра окружности (рисунок 12.4). Эти точки симметричны относительно окружности радиуса R , если:

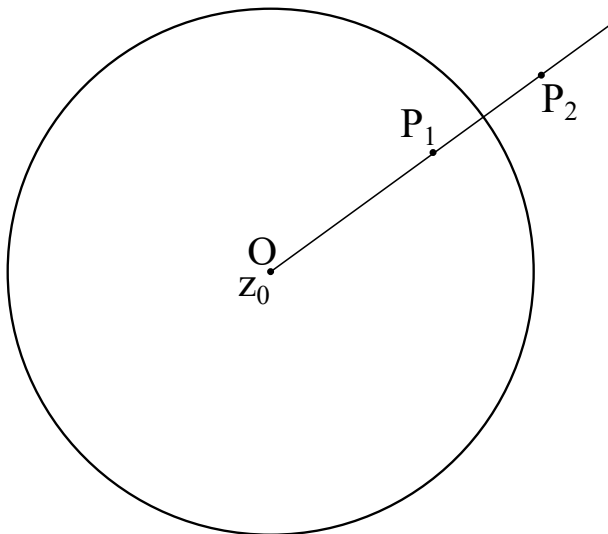


Рис. 12.4: Круговое свойство дробно-линейного отображения.

1. Точки P_1 и P_2 лежат на одном луче, исходящем из центра круга.
2. Произведения длин отрезков: $|OP_1||OP_2| = R^2$.

Будем считать, что прямая - это окружность бесконечного радиуса (всё вместе назовём обобщённой окружностью). Точки, симметричные относительно прямой, если они равноудалены от прямой и лежат на общем перпендикуляре к ней.

Теорема. Дробно-линейное отображение переводит любую обобщённую окружность в обобщённую окружность, при этом точки, симметричные относительно окружности переходят в точки, симметричные относительно образа этой окружности.

Лемма 1

Лемма. Геометрическое место точек (ГМТ), удовлетворяющих условию:

$$|z - z_1| = q|z - z_2|, \quad q > 0 \quad (12.20)$$

Представляет собой окружность, для которой точки z_1 и z_2 являются симметричными. В случае $q = 1$ - это прямая.

Доказательство.

1. $q = 1$. Тогда $|z - z_1| = |z - z_2|$. Геометрическое место точек будет действительно прямой линией (рисунок 12.5).

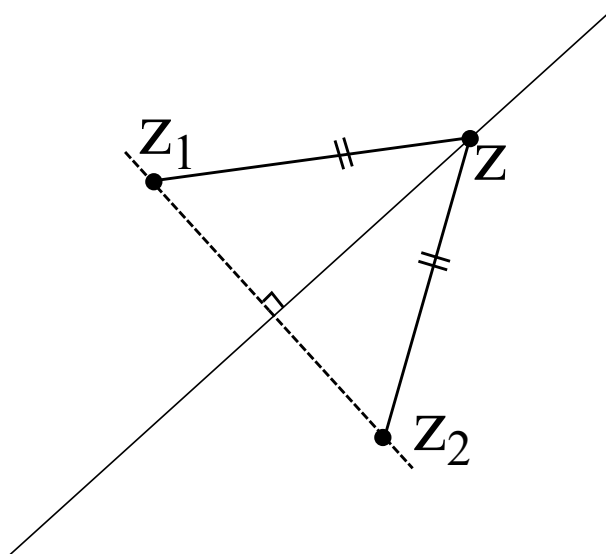


Рис. 12.5: Случай $q = 1$, ГМТ точек будет прямой, отрезки $Z_1Z = Z_2Z$.

2. Без ограничения общности будем считать, что $0 < q < 1$. Если $q > 1$, то можно просто произвести перенормировку. При линейной замене:

$$z_1 = a\xi_1 + b, \quad z_2 = a\xi_2 + b \quad (12.21)$$

Легко проверить, что уравнение $|z - z_1| = q|z - z_2|$ переходит в себя. Подставим

замену:

$$|a\xi - a\xi_1| = |a||\xi - \xi_1| = q|a\xi - a\xi_2| = q|a||\xi - \xi_2| \Rightarrow |\xi - \xi_1| = q|\xi - \xi_2| \quad (12.22)$$

Далее, раз при линейной замене можно перейти к другим точкам, то достаточно рассмотреть $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$. Так как такие точки линейным преобразованием можно перевести в любые точки. Осталось показать, что $|z| = q|z - 1|$ - окружность. Преобразуем:

$$|z|^2 = q^2|z - 1|^2, \quad z = x + iy \quad (12.23)$$

Тогда:

$$x^2 + y^2 = q^2((x - 1)^2 + y^2) \Rightarrow (1 - q^2)x^2 + 2q^2x + (1 - q^2)y^2 - q^2 = 0 \quad (12.24)$$

Дополняя до полного квадрата, можно получить:

$$x^2 + 2\frac{q^2}{1 - q^2}x + \frac{q^4}{(1 - q^2)^2} + y^2 - \frac{q^2}{1 - q^2} - \frac{q^4}{(1 - q^2)^2} = 0 \quad (12.25)$$

Тогда получается уравнение окружности:

$$\left(x + \frac{q^2}{1 - q^2}\right)^2 + y^2 = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2} \quad (12.26)$$

Получаем параметры:

$$z_0 = -\frac{q^2}{1 - q^2}, \quad |z_0 - z_1| = \frac{q^2}{1 - q^2}, \quad |z_0 - z_2| = 1 + \frac{q^2}{1 - q^2} = \frac{1}{1 - q^2} \quad (12.27)$$

Тогда:

$$|z_0 - z_1||z_0 - z_2| = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2} = R^2 \Rightarrow R = \frac{q}{1 - q^2} \quad (12.28)$$

Были точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Таким образом, эти точки симметричны относительно окружности и лемма доказана.

Лекция 13. Конформные отображения. Часть 2

Круговое свойство дробно-линейного отображения.

Хотим показать, что обобщённая окружность переходит в обобщённую окружность, а точки, симметричные относительно окружности переходят в точки, симметричные относительно окружности при дробно-линейном отображении.

Ранее дробно-линейное отображение представляли как суперпозицию сдвигов, умножений на константы и комплексных версий ($z \rightarrow \frac{1}{z}$). При сдвигах точки, симметричные относительно окружностей переходят в точки, симметричные относительно окружностей. Сами окружности просто сдвигаются. При умножении на константу происходит просто растяжение и поворот. Рассмотрим только неочевидное отображение:

$$z = \frac{1}{\xi} \quad (13.1)$$

Рассмотрим точки:

$$\xi_1 = \frac{1}{z_1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{z_2} \quad (13.2)$$

Тогда

$$z_1 = \frac{1}{\xi_1}, \quad z_2 = \frac{1}{\xi_2} \quad (13.3)$$

В силу рассмотренной ранее Леммы 1, обобщённая окружность - это:

$$|z - z_1| = q|z - z_2| \quad (13.4)$$

Рассмотрим комплексную версию, то есть, запись переходит в следующую:

$$\left| \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1} \right| = q \left| \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_2} \right| = \frac{|\xi - \xi_1|}{|\xi||\xi_1|} = q \frac{|\xi - \xi_2|}{|\xi||\xi_2|} \quad (13.5)$$

Сократив, получим, что:

$$|\xi - \xi_1| = q \frac{|\xi_1|}{|\xi_2|} |\xi - \xi_2| \quad (13.6)$$

Обозначим:

$$\tilde{q} = q \frac{|\xi_1|}{|\xi_2|} \quad (13.7)$$

Тогда получим:

$$|\xi - \xi_1| = \tilde{q} |\xi - \xi_2| \quad (13.8)$$

То есть, точки, симметричные относительно окружностей перейдут в симметричные. Это был случай, когда $z_1, z_2 \neq 0$.

Могут быть специальные случаи:

$$z_1 = 0, \quad z_2 \neq 0 \quad (13.9)$$

Тогда:

$$\xi_1 = \infty, \quad \xi_2 = \frac{1}{z_2} \quad (13.10)$$

Получается, что:

$$\frac{1}{|\xi|} = q \left| \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_2} \right| \quad (13.11)$$

Это так, потому что это окружность вида:

$$|z| = q|z - z_2| \quad (13.12)$$

Лёгкие преобразования показывают, что это тоже самое, что:

$$|\xi - z_2| = \frac{|\xi_2|}{q} = R \quad (13.13)$$

Таким образом, получилась окружность радиуса R .

Свойство линейного отображения.

Есть такое свойство, которое позволяет восстановить дробно-линейное отображение, переводящее три заданные точки в три заданные точки. Было три комплексные числа: z_1, z_2, z_3 . Есть три другие точки: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Необходимо построить отображение, переводящее $z_1 \rightarrow \omega_1, z_2 \rightarrow \omega_2$ и $z_3 \rightarrow \omega_3$.

Такое сделать возможно. Сначала переведём точку z_1 в нуль, точку z_2 в ∞ , а z_3 в единицу. Аналогично переводятся точки ω_1 в нуль, ω_2 в ∞ , ω_3 в единицу (рисунок 13.1). Тогда надо рассмотреть отображение:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \quad (13.14)$$

Для ω аналогично:

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} \cdot \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_2} \quad (13.15)$$

Затем приравниваем два отображения и выражаем ω из равенства. Тогда обратно отображение переведёт точки из нуля в ω_1 из ∞ в ω_2 и из единицы в ω_3 .

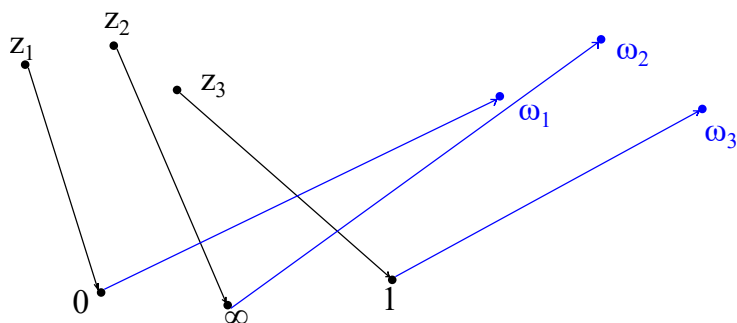


Рис. 13.1: Перевод трёх точек в три точки с помощью дробно-линейного отображения.

Функция Жуковского. Свойства функции Жуковского.

Функция Жуковского - это функция:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (13.16)$$

Жуковский использовал эту функцию при отображениях профиля крыла.

В некоторых областях эта функция может не являться конформным отображением, так как разные точки могут перейти в одну и ту же. Рассмотрим две точки, которые переходят в одну и ту же:

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \quad (13.17)$$

Преобразуем:

$$(z_1 - z_2) + \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} = (z_1 - z_2) \left(z - \frac{z}{z_1 z_2} \right) \quad (13.18)$$

Первая скобка в произведении отлична от нуля, но вторая может быть равна нулю:

$$z_1 z_2 = 1 \quad (13.19)$$

Исследуем, во что перейдут лучи и окружности при действии функции Жуковского. Рассмотрим полярные координаты.

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad (13.20)$$

По формулам Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (13.21)$$

Тогда функция Жуковского переходит в:

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \cos \varphi \right) + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \quad (13.22)$$

Рассмотрим луч:

$$z = te^{i\varphi} \quad (13.23)$$

где $\varphi = const, t \geq 0$. Ранее было записано, что:

$$u = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \cos \varphi + i \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \sin \varphi \quad (13.24)$$

Введём обозначения:

$$u = \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (13.25)$$

и

$$v = \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (13.26)$$

Тогда

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{4} \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \right) \quad (13.27)$$

и

$$\frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{4} \left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 \right) \quad (13.28)$$

Из чего видно, что:

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1 \quad (13.29)$$

Это является уравнением гиперболы.

Таким образом, при действии функцией Жуковского, лучи из начала координат переходят в гиперболы (рисунок 13.2).

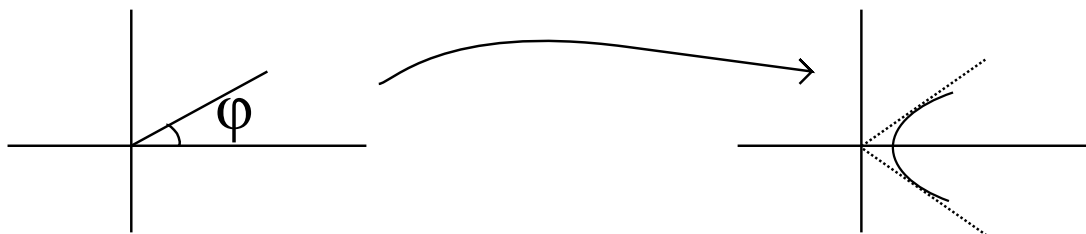


Рис. 13.2: Переход луча в гиперболу при действии функции Жуковского.

Рассмотрим во что переходят в окружности (в эллипсы). Имеем:

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \quad (13.30)$$

$$v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \quad (13.31)$$

Тогда:

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right)^2} = 1 \quad (13.32)$$

Здесь учли, что:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad (13.33)$$

Таким образом, окружности перейдут в эллипсы. Кроме того, можно понять, что лучи и окружности были перпендикулярны друг другу до действия функции Жуковского (окружности с центром в начале координат. Можно показать, что после действия функции Жуковского, эллипсы и гиперболы тоже будут перпендикулярны.

Рассмотрим частный случай $r = 1$. Тогда:

$$\omega = \cos \varphi \quad (13.34)$$

В результате окружность единичного радиуса переходит в отрезок, проходимый в обе стороны (сначала в одну сторону, потом в другую). То есть, окружность единичного радиуса “схлопывается”.

Рассмотрим полуокруг единичного радиуса (рисунок ??). “Выбросим” его и нижнюю полуплоскость из рассмотрения. Хотим отобразить эту картинку в верхнюю полуплоскость.

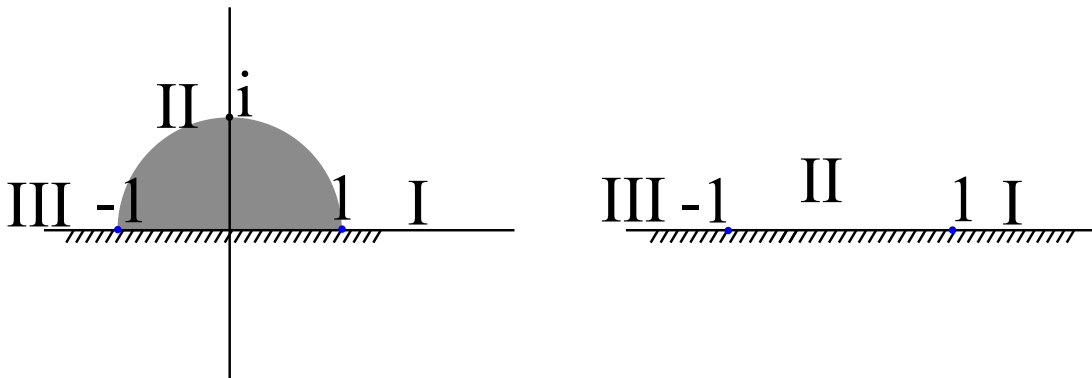


Рис. 13.3: Переход полуплоскости без полуокруга единичного радиуса в полуплоскость. Римскими цифрами отмечены части, переходящие друг в друга.

С помощью функции Жуковского:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (13.35)$$

это возможно сделать.

При отображении луча от единицы до бесконечности, он переходит сам в себя. Окружность единичного радиуса схлопывается, луч от -1 тоже перейдет сам в себя. На рисунке 13.3 римскими цифрами отмечены части, переходящие друг в друга.

Рассмотрим другое множество - полукруг в нижней полуплоскости. При действии функции Жуковского получается такая же картинка - верхняя полуплоскость (два луча и отрезок - граница). Проверить, что полуплоскость верхняя можно, выбрав некоторую точку внутри полукруга. Например, $-\frac{i}{2}$ (рисунок 13.4). Подставим в функцию Жуковского:

$$\omega\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{2} + 2i\right) = \frac{3}{4}i \quad (13.36)$$

Таким образом видно, что точка переходит в точку $\frac{3}{4}i$ - точка в верхней полуплоскости.

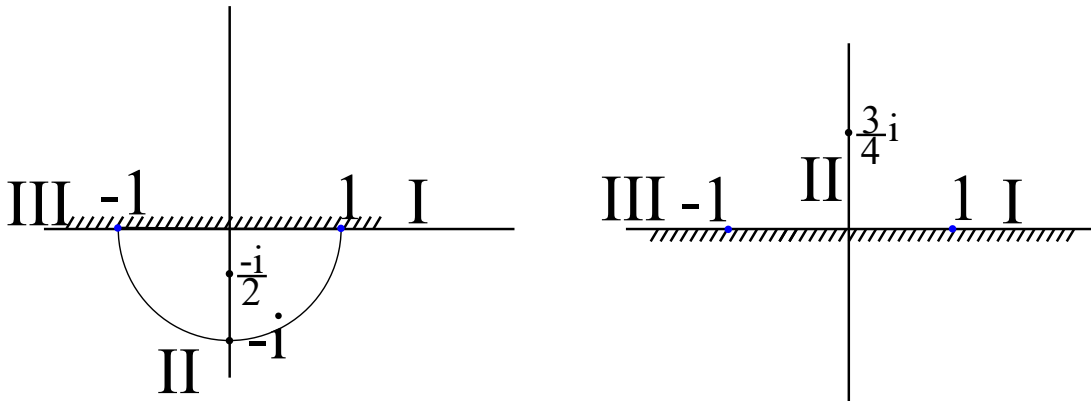


Рис. 13.4: Переход полукруга единичного радиуса из нижней полуплоскости в верхнюю полуплоскость. Римскими цифрами отмечены части, переходящие друг в друга.

Рассмотрим просто верхнюю полуплоскость. С помощью функции Жуковского, эта полуплоскость переходит во всю плоскость с двумя вырезанными лучами (от 1 до бесконечности и от -1 до $-\infty$). Если разбить верхнюю полуплоскость (мысленно) на полукруг и всё остальное (рисунок 13.5), то получается, что полукруг переходит в нижнюю полуплоскость. Круг из нижней полуплоскости переходит во всю верхнюю полуплоскость.

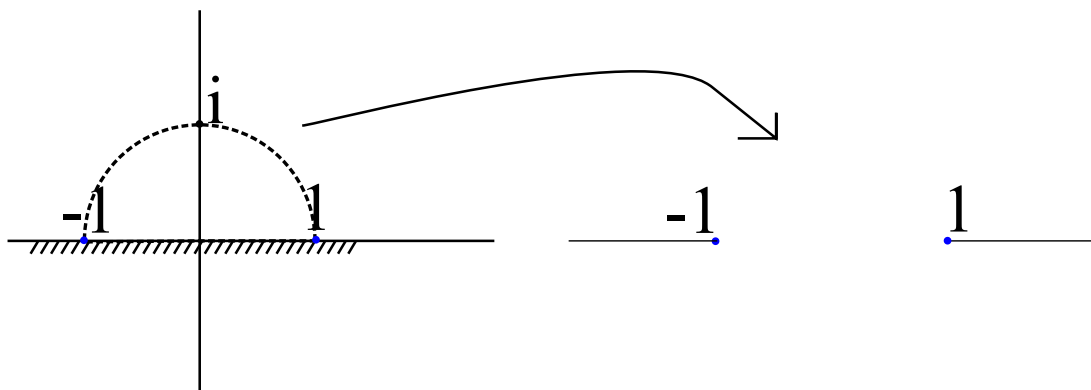


Рис. 13.5: Переход верхней полуплоскости во всю плоскость, за исключением двух лучей, исходящих из 1 и -1.

Обобщённая степенная функция.

Под степенной функцией подразумевается отображение:

$$\Omega = |z|^{\nu} e^{i \operatorname{var} g z} = e^{\nu(\ln |z| + i \operatorname{arg} z)} \quad (13.37)$$

Эта функция очень полезна при отображении углов, исходящие из начала координат (рисунок 13.6).



Рис. 13.6: Переход угла в угол с помощью степенной функции.

Луч параметризуется как:

$$te^{i\varphi} \quad (13.38)$$

где $\varphi = \text{const}$, $t \geq 0$. Получается, что:

$$\omega(te^{i\varphi}) = t^{\nu} e^{i\nu\varphi} \quad (13.39)$$

Таким образом, луч переходит в луч, только угол будет другим (не φ , а $\nu\varphi$). Если ν большое, то угол увеличится, иначе - наоборот. Необходимо быть осторожным, так как обязательно:

$$\nu\varphi < 2\pi \quad (13.40)$$

Иначе разные точки будут переходить в одно и то же.

Экспоненциальная функция.

Под такой функцией подразумевается:

$$\omega = e^z \quad (13.41)$$

Экспоненциальная функция подходит для отображения полос. По формуле Эйлера

$$e^{z+2\pi ki} = e^z \quad (13.42)$$

Поэтому нужно, чтобы расстояние между двумя изучаемыми точками отличалось более, чем на 2π .

Рассмотрим комплексную плоскость. Рассмотрим полосу максимально возможного размера до 2π (рисунок 13.7). Раскроем экспоненту:

$$e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (13.43)$$

Разобьём пространство, ограниченное этой прямой в верхней полуплоскости (между этой прямой и осью Re), на 4 области. Первая часть переходит в луч от 1 до бесконечности. Вторая часть переходит в отрезок от 0 до 1.

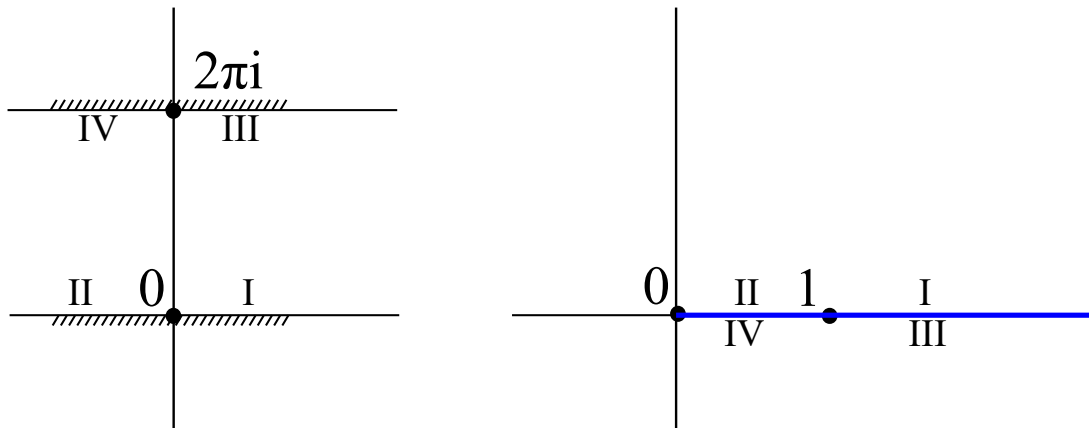


Рис. 13.7: Отображение полосы экспоненциальной функцией во всю плоскость без луча.

Так как:

$$e^{x+2\pi i} = e^x \quad (13.44)$$

Третья часть тоже перейдет в луч от 1 до бесконечности. Область четвертой части перейдет в отрезок от 0 до 1 аналогично. Получается, что комплексная плоскость с вырезанным лучом получилась из полосы шириной 2π .

Рассмотрим полосу вдвое уже. Первая и вторая область перейдут аналогично в луч и отрезок. Так как:

$$e^{x+\pi i} = -e^x \quad (13.45)$$

То области три и четыре перейдут в луч и отрезок, но только с другой стороны (отрицательные координаты). Итого получается, что область - вся верхняя полуплоскость (рисунок 13.8).

Рассмотрим полу полосу. Первая часть переходит в луч от 1 до бесконечности. Третья часть переходит в луч от минус 1 до минус бесконечности аналогично. Рассмотрим вторую часть. Так как:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (13.46)$$

То вторая часть переходит в полуокружность в верхней полуплоскости (рисунок 13.9).

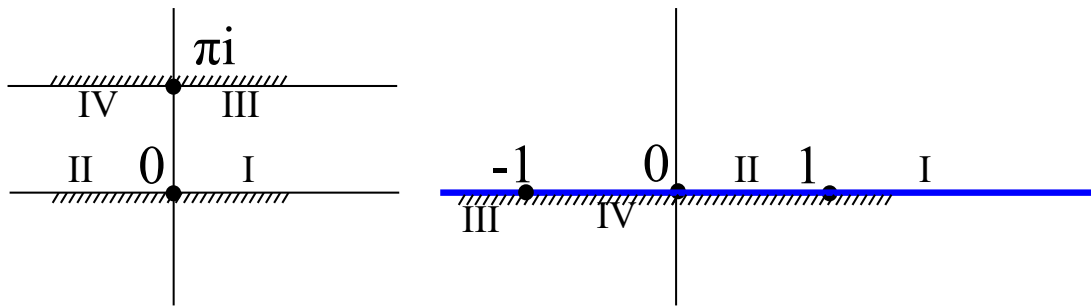


Рис. 13.8: Отображение узкой полосы экспоненциальной функцией в верхнюю полуплоскость.

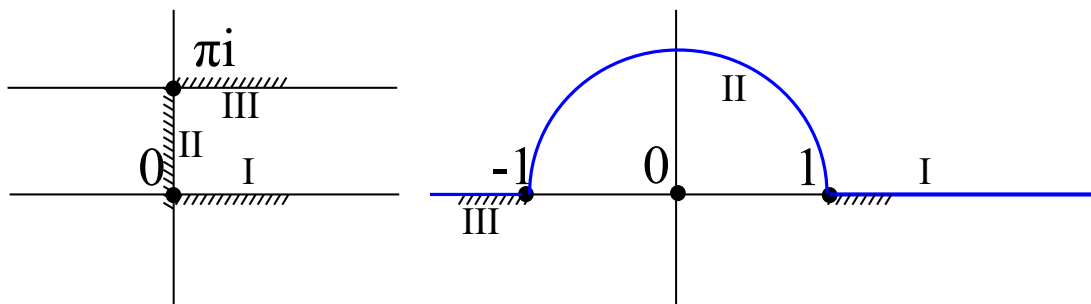


Рис. 13.9: Отображение узкой полу полосы экспоненциальной функцией в верхнюю полуплоскость без полуокружности.

Если применить к полученной области функцию Жуковского:

$$\omega = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \quad (13.47)$$

То получается верхняя полуплоскость.

Задача (конформные отображения)

Рассмотрим область (рисунок 13.10). Задача - отобразить конформно данную область в верхнюю полуплоскость.

В качестве первого отображения рассмотрим:

$$\omega_1 = \frac{1}{z} \quad (13.48)$$

Отрезок от 2 до 4 переходит в отрезок от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{4}$, аналогично второй отрезок (рисунок 13.11). Окружности переходят в обобщённые окружности, в прямые. Почему в прямые? Ноль лежит на этой окружности, при отображении он уйдёт на бесконечность, таким образом, это может быть только прямой. Прямая будет располагаться перпендикулярно вещественной оси, проходя через точку $\frac{1}{2}$. Аналогично

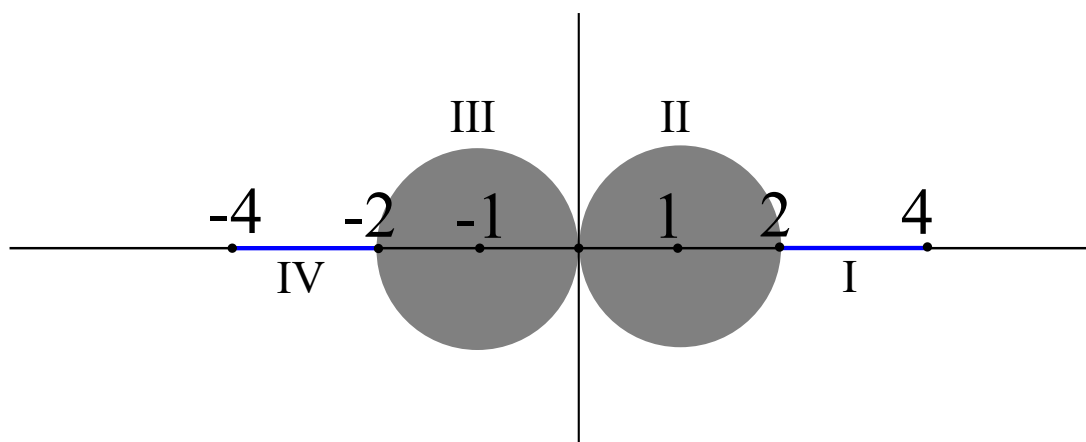


Рис. 13.10: Областью является вся комплексная плоскость без двух кругов и двух отрезков вдоль вещественной оси.

вторая окружность переходит в симметричную прямую. Таким образом, образом будет являться полоса между этими двумя прямыми.

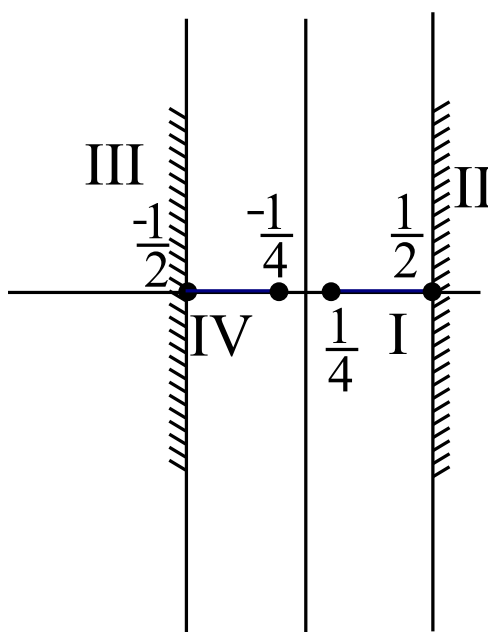


Рис. 13.11: Областью является вся полоса без двух отрезков.

Используем серию простых изображений, чтобы подогнать полосу под экспоненту. Для начала производится поворот на $\frac{\pi}{2}$:

$$\omega_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \omega_1 \quad (13.49)$$

Учитываем, что:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad (13.50)$$

Далее полоса поднимается вверх на $\frac{i}{2}$:

$$\omega_3 = \omega_2 + \frac{i}{2} \quad (13.51)$$

Далее происходит растяжение в π раз:

$$\omega_4 = \pi\omega_3 \quad (13.52)$$

Остались “отростки”, которые мешают перевести фигуру в полуплоскость экспонентой:

$$\omega_5 = e^{\omega_4} \quad (13.53)$$

Отрезки можно параметризовать, поэтому после применения экспоненты, получается верхняя полуплоскость без двух дуг полуокружности. Область выглядит так - рисунок 13.12

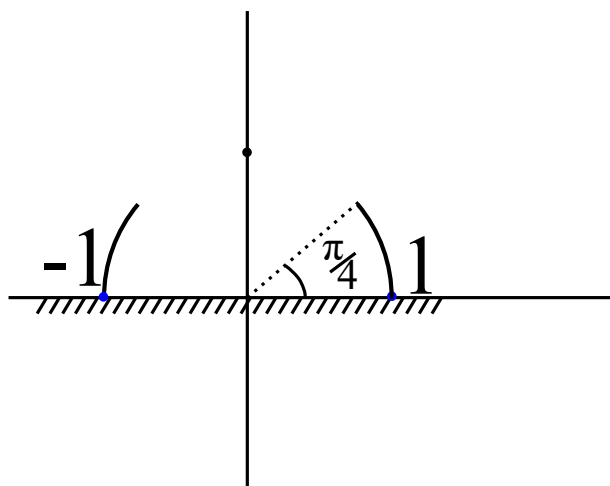


Рис. 13.12: Областью является верхняя полуплоскость без двух дуг полуокружности.

Следующее отображение - это функция Жуковского:

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \left(\omega_5 + \frac{1}{\omega_5} \right) \quad (13.54)$$

Без криволинейных дуг, при действии просто на полуплоскость функцией Жуковского, получалась вся плоскость без двух лучей, исходящих из 1 и -1 . Если рассматривается окружность единичного радиуса, то:

$$\omega_6 = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos \varphi \quad (13.55)$$

Точки, лежащие на единичной окружности перейдут в точки на вещественной прямой. Так как $\cos \frac{\pi}{4}$, то получится вся плоскость без двух лучей, то уже от $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Существует приём, как превратить плоскость с двумя разрезами превратить в плоскость с разрезом от 0 до ∞ :

$$\omega_7 = \frac{\omega_6 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\omega_6 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (13.56)$$

Получится плоскость с разрезом от 0 до ∞ , так как луч от $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до бесконечности перейдёт в интервал от 0 до 1, а второй кусок перейдёт в луч от 1 до бесконечности.

Итоговое преобразование - это извлечение квадратного корня.

$$\Omega_8 = \sqrt{|\omega_7|} e^{\frac{i \arg \omega_7}{2}} \quad (13.57)$$

При извлечении корня углы становятся в два раза меньше, таким образом получилась верхняя полуплоскость.

Принцип симметрии

Теорема. Пусть функция

$$f(z) \in \mathcal{A}(D) \quad (13.58)$$

граница области D содержит интервал

$$\gamma \subset \mathbb{R} \quad (13.59)$$

область D^* симметрична области D относительно вещественной оси. Также

$$\operatorname{Im} f(x) = 0, \quad x \in \gamma \quad (13.60)$$

Причём, области D^* и D не пересекаются. Тогда отображение $f(z)$ можно аналитически продолжить в область:

$$D \cup \gamma \cup D^* \quad (13.61)$$

Причём функция:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^* \end{cases} \quad (13.62)$$

Иллюстрация формулировки приведена на рисунке 13.13.

Доказательство. Обозначим:

$$f_1(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad (13.63)$$

Покажем ей дифференцируемость в области. Запишем разностное отношение для

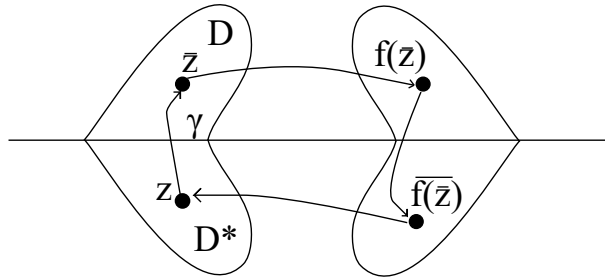


Рис. 13.13: Принцип симметрии. Рассматривается точка z , её комплексное сопряжение \bar{z} , затем на него действует функция $f(\bar{z})$ и тоже сопрягается, получается точка $\overline{f(\bar{z})}$, в которую можно просто перейти из начальной точки z , диаграмма замкнулась.

определения производной:

$$\frac{f_1(z + \Delta z) - f_1(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\bar{z} + \overline{\Delta z})} - \overline{f(\bar{z})}}{\Delta z} = \left[\frac{f(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - f(\bar{z})}{\overline{\Delta z}} \right] \quad (13.64)$$

Получается, что для того, что стоит в скобке существует предел. Получается, что существует:

$$\lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x) \quad (13.65)$$

Значит $f_1(z)$ - дифференцируема. Аналитичность получилась.

Функция $f(z)$ непрерывна вплоть до интервала γ . С другой стороны, можно изучать предел с другой стороны (рисунок 13.14):

$$\lim_{\bar{z} \rightarrow x} \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x)} \quad (13.66)$$

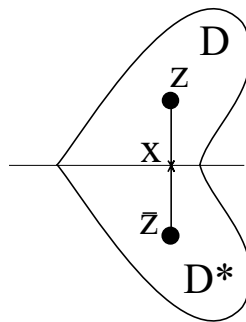


Рис. 13.14: Предел с двух сторон.

Однако, по условию теоремы:

$$\text{Im } f(x) = 0, \quad x \in \gamma \quad (13.67)$$

В таком случае $f(x) = \overline{f(x)}$.

По лемме об устранении разреза $F(z)$ будет аналитична в области

$$D \cup \gamma \cup D^* \tag{13.68}$$



ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ