



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ. СЕМИНАРЫ

ШАФАРЕВИЧ
АНДРЕЙ ИГОРЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА СТУДЕНТКУ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ЦВЕТКОВУ ТАТЬЯНУ АНДРЕЕВНУ



Содержание

Семинар 1. Элементы теории графов	4
Необходимые сведения из теории графов	4
Задача 1 о числе ребер произвольного графа	5
Задача 2 о количестве вершин нечетной степени	6
Задача 3 о минимальном числе маршрутов	6
Уникурсальные графы	7
Задача 4 о маршрутах в связном графе	8
Задача 5 о простых цепочках	8
Циклы	9
Задача 6 об электрических цепях	9
Раскраски графов	11
Хроматическое число графа	12
Минимальное хроматическое число	12
Раскраски в пространстве	13
Сфера	13
Тор	14
Лента Мёбиуса	15
Семинар 2. Регулярно гомотопные кривые. Двумерные поверхности	16
Гладкая регулярная замкнутая плоская кривая	16
Регулярно гомотопные кривые	16
Вычисление чисел вращения	17
Построение гомотопии между двумя окружностями	19
Построение гомотопии между окружностью и эллипсом	19
Построение гомотопии между эллипсом и кривой	20
Двумерные поверхности	20
Примеры поверхностей	21
Операции над поверхностями	24
Эйлерова характеристика	24
Эйлерова характеристика	26
Склейки поверхностей с помощью других поверхностей	30
Семинар 3. Движение. Группы движений, группы симметрий	31
Группы движений	31
Движение плоскости	32
Композиции движений	33
Некоторые сведения о группах	35
Исследование группы D_n	36
Какие классы сопряженности?	36
Нормальные подгруппы	36
Группы симметрий трехмерных фигур	37

Семинар 1. Элементы теории графов

Необходимые сведения из теории графов

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^3 с координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Определение 1. *Простая дуга* — это множество точек трехмерного пространства, задаваемая параметрическими уравнениями $x = r(t)$

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t),$$

где r — радиус-вектор точки. Причем, должны быть выполнены следующие условия

- 1) $t \in [a; b]$
- 2) $r(t)$ — бесконечно дифференцируема на $[a; b]$.
- 3) $\dot{r} \neq 0$.
- 4) $r(t_1) = r(t_2) \implies t_1 = t_2$, либо $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$.

Неформально говоря, мы рассматриваем траекторию движения точки, и время меняется на конечном отрезке (условие (1)); бесконечная дифференцируемость означает отсутствие разрывов в траектории и ее малое изменение при малом изменении параметра t . Третье условие означает отсутствие изломов.

Пример 1. Пример кривой с изломами, задаваемой бесконечно дифференцируемой функцией.

$$x_1 = t^3, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = 0, \quad t \in [-1; 1].$$

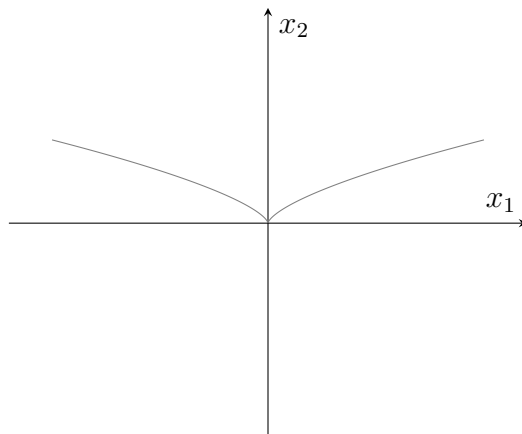
Это плоская кривая (в силу $x_3 = 0$). Из первого уравнения выражаем t и подставляем во второе. Получим

$$x_2 = x_1^{2/3}$$

Вектор скорости

$$\dot{r} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

обращается в 0 при $t = 0$.



Четвертое свойство означает либо отсутствие самопересечений, либо замкнутость этой дуги («конец совпадает с началом»).

Более точно простую дугу такого вида называют «гладкая регулярная простая кривая без самопересечений».

Определение 2. Геометрический граф Γ — это конечный набор точек $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^3$, некоторые пары из которого соединены одной или несколькими простыми и не пересекающимися дугами e_1, \dots, e_N .

Точки v_j называются вершинами графа, а дуги e_i — ребрами.

Обозначения: V — множество вершин, E — множество ребер, v — число вершин, e — число ребер.

Вообще говоря, граф в разных источниках может определяться по-разному. В данном определении мы допускаем пели и кратные ребра.

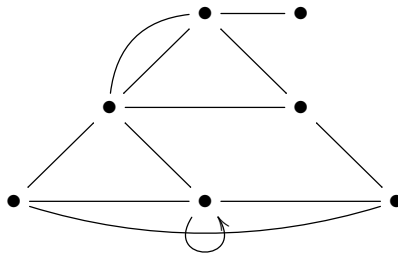


Рис. 1: Пример графа

С помощью графов можно моделировать железнодорожные сети, нервную систему, электрические сети и так далее.

Определение 3. Определим *степень вершины*. Вокруг каждой вершины рассмотрим шар с достаточно малым радиусом ε , и рассмотрим пересечения графа с этим шаром. Число пересечений и будет степенью вершины — $\deg v_i$.

Таким образом петля дает вклад «2» в степень вершины.

Задача 1

Обозначим $v(k)$ — число вершин степени k в графе.

Задача 1. Пусть все $v(k)$ в графе известны. Выразить e через $v(1), \dots, v(m)$.

Решение. Сначала посчитаем все ребра, которые выходят из вершин со степенью 1. Их $v(1)$ ребер. Далее посчитаем все ребра, которые выходят из вершин со степенью 2. Их $2v(2)$ ребер (на каждую вершину, коих $v(2)$ приходится по 2 ребра). И так далее: для вершин со степенью m — $mv(m)$ ребер.

Итак, получаем сумму

$$v(1) + 2v(2) + \dots + mv(m).$$

Однако при этом мы каждое ребро посчитали два раза, потому что про каждое ребро верно, что оно входит в некоторую вершину один раз и выходит из некоторой (может быть той же) вершины один раз.

Следовательно, ответ:

$$\frac{v(1) + 2v(2) + \dots + mv(m)}{2} = e.$$

□

Задача 2

Задача 2. Доказать, что число вершин нечетной степени четно.

Решение. Обозначим общее число нечетной степени как $v^{(1)}$. Тогда

$$v^{(1)} = v(1) + v(3) + \dots$$

Запишем выражение количества ребер следующим образом следующим образом:

$$\frac{v(1) + v(3) + 2v(3) + v(5) + 4v(5) + \dots + 2v(2) + \dots}{2} = e.$$

$$v(3) + 2v(5) + \dots + v(2) + 2v(4) + \dots + \frac{v^{(1)}}{2} = e.$$

Следовательно, $\frac{v^{(1)}}{2}$ целое число, следовательно $2 \mid v^{(1)}$, что и требовалось доказать. □

Задача 3

Задача 3. Рассмотрим все маршруты в следующем графе (см. рис. (??)).

Маршрут — это последовательность ребер и вершин $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_n e_n v_{n+1}$, при этом ребро e_j соединяет v_j с v_{j+1} . При этом каждое ребро в этой последовательности должно встречаться ровно 1 раз.

Нужно по заданному связному графу Γ построить систему маршрутов, которые обладают следующим свойством: любое ребро графа Γ содержится ровно в 1 маршруте.

Какое минимальное число маршрутов для этого нужно?

Решение. Граф из примера можно покрыть тремя маршрутами:

На лекции была доказана более общая теорема: если m — минимальное число маршрутов, а k — число вершин нечетной степени связного графа, то

$$m = \begin{cases} \frac{k}{2}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}.$$

□

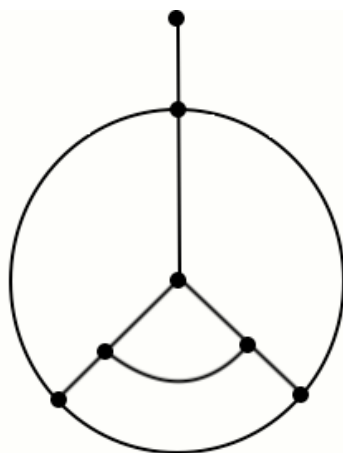


Рис. 2: Граф для задачи 3

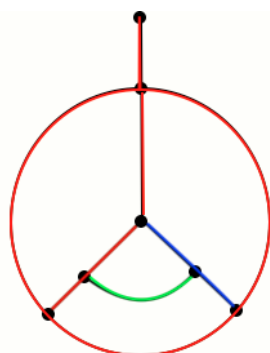


Рис. 3: Решение задачи 3

Уникурсальные графы. Полные графы

Из задачи 3 вытекает следующее определение:

Определение 4. Граф называется *уникурсальным*, если $t = 1$.

Неформально говоря, если уникурсальный граф плоский, то его можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

Граф уникурсальный $\iff k = 0$ или 2 .

Определение 5. Граф Γ — полный, если каждая пара различных вершин соединена 1-им ребром, а петель нет.

Полный граф на n вершинах обозначается K_n .

Например, K_2 — это отрезок, K_3 — треугольник, K_4 — тетраэдр.

Полный граф уникурсален $\iff n$ нечетно.

Возникает закономерный вопрос: если разрешить проходить по ребру два раза (каждое ровно 2 раза), то какие графы можно нарисовать одним росчерком?

Ответ: любой граф можно нарисовать таким способом.

Доказательство. По исходному графу Γ построим $\tilde{\Gamma}$, удваивая каждое ребро. Теперь вопрос свелся к уникурсальности графа $\tilde{\Gamma}$. А он является таковым из-за того, что каждая вершина у него четной степени. \square

Задача 4

Определение 6. *Полный граф*— граф, в котором любые две вершины соединяются цепочкой ребер.

Задача 4. *Верно ли что в любом связном графе любые две вершины можно соединить маршрутом так, что любые две вершины будут встречаться один раз? Да, верно.*

Решение. Рассмотрим произвольные две вершины и соединим их некоторым маршрутом. Предположим, что в этом маршруте какая-то вершина проходится два раза. Исключим участок маршрута между первым и вторым попаданием в вершину. При этом все равно останется путь соединяющий две выбранные вершины.

Продедаем так с каждой вершиной, в которую при прохождении маршрута попадаем более одного раза.

Таким образом, так как маршрут имеет конечную длину, мы добились, что каждая вершина проходится один раз. \square

Задача 5

Определение 7. Цепочки называются *простыми*, если это маршрут, в котором каждая вершина проходится 1 раз.

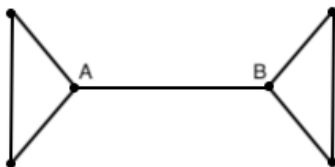
Задача 5. *Пусть в графе любые две вершины можно соединить по крайней мере двумя простыми цепочками.*

Доказать, что

- 1) *в этом случае в графе нет вершин степени 1.*
- 2) *верно ли обратное? Т.е. если в графе нет вершин степени 1, то в графе любые две вершины можно соединить по крайней мере двумя простыми цепочками.*

Решение. 1) Предположим обратное. Рассмотрим вершину со степенью 1 — $v(1)$. По условию ее можно соединить по крайней мере двумя простыми цепочками с любой другой вершиной. Но всякая простая цепочка, берущая начало в вершине $v(1)$ всегда проходит через вершину, между которой с $v(1)$ есть ребро — v_2 . Так как такая вершина единственная, то, например, $v(1)$ и v_2 нельзя соединить двумя разными простыми цепочками. Противоречие.

- 2) Приведем контрпример: точки A и B нельзя соединить двумя разными простыми цепочками.



\square

Циклы

Определение 8. Маршрут $v_1e_1v_2 \dots e_nv_{n+1}$ называется *замкнутым*, если $v_1 = v_{n+1}$. Такие маршруты называются *циклами*.

Определим число Бетти — β_1 или цикломатическое число. Это будет число независимых циклов в графе. Оно определяется индуктивно.

Пусть в связном графе (далее рассматриваем только их) нет циклов. Такой граф называется *деревом*. У него $\beta_1 = 0$.

Теперь если есть хотя бы один цикл, то сотрем в нем одно ребро. Если получилось дерево, то считаем, что у исходного графа $\beta_1 = 1$. Если в оставшемся графе есть еще циклы, то стираем в одном из них одно ребро. Если получилось дерево, то $\beta_1 = 2$. И так далее. «Количество стертых ребер» = β_1 . Так как ребер конечное число, и, стирая ребра, мы всегда будем получать связный граф, то, проводя описанную процедуру, всегда в конце получим дерево, которое будем называть *максимальным деревом исходного графа*. Оно, вообще говоря, не единственно. Ребра, которые стирали в этом алгоритме, называются *перемычками*. Т.е. число Бетти — это число перемычек.

Если e — число ребер в связном графе, v — количество вершин в связном графе, то

$$v - e = 1 - \beta_1. \quad (1)$$

Если граф несвязный, то рассмотрим по отдельности его связные компоненты. Через β_0 обозначим число связных компонент графа (нулевое число Бетти). Для каждой связной компоненты запишем тождество (1). Сложим их все и получим

$$v - e = \beta_0 - \beta_1.$$

Справа стоят топологические характеристики графа, а слева — комбинаторные.

Мы уже говорили о том, что максимальное дерево в графе может быть не единственным. Бывает ли так, что оно единственно? Да. Например, когда исходный граф является деревом. Или, например, граф, который получается из дерева добавлением нескольких петель. Верно и обратное: если максимальное дерево графа единственно, то этот граф — дерево, к которому добавили некоторое количество петель.

Задача 6

Пусть задан некоторый граф Γ .

Определение 9. Говорят, что на графе Γ задана система токов, если на каждом ребре указано направление и фиксировано неотрицательное число x , причем для любой вершины выполнено следующее соотношение:

$$\sum_{v+} x_{v+} = \sum_{v-} x_{v-},$$

где $v+$ — вершины, входящие в v , а $v-$ — вершины, выходящие из v . То есть величина входящего тока равна величине исходящего.

В физике это равенство именуется законом Кирхгофа.

Итак, у нас имеется система, в которой v уравнений и e неизвестных. Как устроено множество решений такой линейной системы? Вообще говоря, числа x_j неотрицательны, однако чтобы упростить запись системы, поступим следующим образом: зададим изначально направления движения тока. Далее считаем, что x положителен, если наше выбранное направление совпало с направлением на заданном графе. В обратном случае, считаем, что $x < 0$. Тогда в изначальном определении числа x можно рассматривать любого знака.

Задача 6. 1) Доказать, что если граф Γ — дерево, то любая система токов нулевая.

2) Доказать, что для произвольного графа любая система токов однозначно восстанавливается по токам на перемычках, которые можно задавать произвольно (размерность пространства решений равна β_1)

Решение. 1) Докажем индукцией по числу вершин. На двух вершинах ток может быть только нулевой. Пусть доказано для дерева с $v \leq m$. Рассмотрим Γ -дерево с $m + 1$ вершиной. В этом дереве есть вершина со степенью 1. На выходящем из нее ребре ток равен нулю. Удалим эту вершину вместе с ее ребром. По предположению индукции в получившемся дереве сумма токов — 0. Следовательно, и в исходном графе система токов нулевая.

2) Достаточно доказать для связного графа.

Рассмотрим произвольный связный граф с числом перемычек β_1 . Построим β_1 циклов, которые устроены следующим образом: каждая перемычка принадлежит ровно одному из этих β_1 циклов. Эти циклы назовем базисными циклами. Их ровно β_1 .

Нужно доказать, что, во-первых, на этих перемычках можно задать ток произвольным образом, а затем продолжить его до тока на всем графе. Во-вторых, нужно доказать, что если на перемычках токи уже заданы, то на всем графе токи восстанавливаются однозначно.

Докажем второе. Пусть имеется две разные системы токов на графе, при этом на выделенных перемычках токи одинаковые. Вычтем две системы токов друг из друга. Получим систему токов, в которой на перемычках токи равны нулю. Удалим перемычки из графа, получим дерево с системой ненулевых токов. Противоречие с первым пунктом.

Докажем первое. Пусть на перемычках уже задан ток. Рассмотрим произвольный базисный цикл. На нем ток восстанавливается по перемычке. Таким образом независимо восстановим токи на каждом цикле по отдельности. На тех ребрах, которые не вошли в циклы, ток равен нулю. Теперь все получившиеся β_1 системы токов сложим. Получим систему токов на всем графе. Поскольку перемычки входят в один базисный цикл, то ток на них при сложении не изменится. Таким образом, утверждение доказано. □

Связь с линейной алгеброй: у нас есть v уравнений и e неизвестных. Размерность пространства решений — β_1 . Для связного графа

$$v - 1 = e - \beta_1.$$

Следовательно, ранг данной системы линейных уравнений — $e - \beta_1 = v - 1$.

Раскраски графов

Данная задача родилась в географии. в первой половине XIX века молодой английский географ Фрэнсис Гутри изучал карту графств Англии вместе с морем и выяснил, что ее можно раскрасить в 4 цвета. А именно, если графства имеют границу (граница содержит более одной точки), то они будут покрашены в разные цвета.

Так появилась задача о 4-х красках: если имеется произвольная карта на плоскости, можно ли ее покрасить в 4 цвета.

Задача о 5-ти красках решена в конце XIX века. Теорему о пяти красках доказал Перси Хивуд.

Задача о 4-х красках решена в 1976 году. Теорему о пяти красках доказали Апфель и Хакен при помощи компьютера.

Рассмотрим граф, двойственный к карте. А именно: каждая область в новом графе будет вершиной, а если области соседствуют, то между вершинами, которые им соответствуют, будет ребро. Теперь мы красим не области, а вершины по изложенным выше правилам.

Итак, пусть Γ — это связный граф. Тогда *правильная раскраска графа* Γ — это соответствие, сопоставляющее каждой вершине свой цвет, причем если две вершины соединены ребром, то им должны соответствовать разные цвета.

На лекции было доказано, что если граф планарный (т.е. изоморфен графу, расположенному в плоскости), и у него нет петель и кратных ребер, то тогда всегда существует правильная раскраска в не более, чем 5 цветов.

Рассмотрим следующую карту. Если обозначить за n минимальное число цветов,

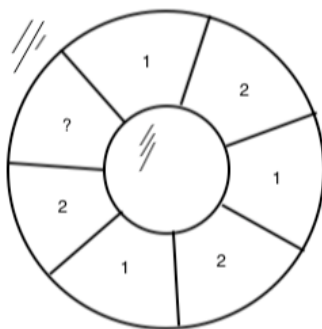


Рис. 4: Карта для задаче о раскраске

нужно e для правильной раскраски этой карты, то

$$n = \begin{cases} 3, & 2 \nmid n \\ 2, & 2 \mid n \end{cases}.$$

Хроматическое число графа

Определение 10. *Хроматическое число графа* — это минимальное число цветов правильной раскраски.

Будем рассматривать графы без петель, потому что в таких графах в принципе не может быть правильной раскраски. Кроме того, будем рассматривать графы без кратных ребер, так как раскраска такого графа эквивалентна раскраски графа, в котором удалили мультиребра.

Задача 7. Пусть имеется полный граф K_n . Какое у него хроматическое число?

Решение. У полного графа каждая вершина соединена с каждой. Следовательно, каждая из них должна быть покрашена в разные цвета \implies хроматическое число графа K_n равно n . \square

Задача 8. Пусть имеется граф $K_n \setminus \{\text{ребро}\}$. Какое у него хроматическое число?

Решение. Когда мы удаляем ребро, то вершины которое одно соединяло можем покрасить в 1 цвет. Для остальных вершин ситуация остается прежней. Т.е. хроматическое число данного графа равно $n - 1$. \square

Минимальное хроматическое число

Рассмотрим графы, у которых хроматическое число равно 2.

Напомним, что если граф плоский, то по теореме Эйлера

$$v - e + f = 2$$

Примеры непланарных графов: K_n , где $n \geq 5$; $K_{m,n}$, где $m, n \geq 3$.

Хроматическое число для графа $K_{m,n}$ равно двум (вершины разбиваются на два подмножества, между которыми нет ребер). Графы с хроматическим числом 2 получаются из $K_{m,n}$ удалением ребер. Такие графы еще называют *двудольными*. Кроме того, хроматическим числом 2 обладают циклы четной длины.

Утверждение 1. Если хроматическое число графа равно 2-м, то в нем нет циклов нечетной длины.

Оказывается, верно и обратное:

Утверждение 2. Если в графе все циклы четной длины, то хроматическое число равно 2.

Доказательство. Рассмотрим первую некоторую вершину A и покрасим ее в цвет 1. Далее, двигаясь от нее по простой цепочке до некоторой вершины B , посчитаем, сколько в этой простой цепочке ребер. Если нечетное, то покрасим B в цвет 2, если четное, то в цвет 1.

Утверждается, что цвет вершины B не зависит от цепочки, которой эту вершину соединили с вершиной A . Это действительно так: пусть есть другая простая цепочка, идя по которой мы покрасим B в цвет, отличный от первого случая. Это значит,

что в цепочках количество ребер имеют разную четность. Но тогда эти две простые цепочки образуют цикл нечетной длины, что противоречит условию.

Кроме того, осталось поверить, что раскраска правильная. Пусть есть вершины B и C , которые соединены ребром. Если бы им сопоставлялся один цвет, то получили бы цикл нечетной длины: цепочки от A до B и от A до C , которые имеют одинаковую четность + ребро между B и C . В сумме получается нечетное количество ребер. Получили противоречие условию. \square

Раскраски в пространстве

Сфера

Допустим, что карта расположена на сфере. Сколько цветов достаточно для раскраски?

Очевидно, что количество цветов на сфере и на плоскости одинаковое — 4. Для доказательства рассмотрим *стереографическую проекцию*.

Стереографическая проекция. Рассмотрим сферу и плоскость, которая касается сферы. Будем считать, что точка касания — это южный полюс S . Рассмотрим диаметрально противоположную точку — северный полюс N . Без ограничения общности будем считать, что N лежит в «мировом океане» нашего «глобуса». Далее сопоставляем точкам сферы точки плоскости по следующему правилу: соединяем точку сферы и N прямой, которая пересечет касательную плоскость. Точка пересечения этой прямой и плоскости будет сопоставляться выбранной точке на сфере. В результате вся сфера, кроме северного полюса N , разворачивается на плоскость. Получилось взаимно однозначное непрерывное отображение

$$f : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

При таком отображении карта на сфере перейдет в карту на плоскости, следовательно раскраска сохранится.

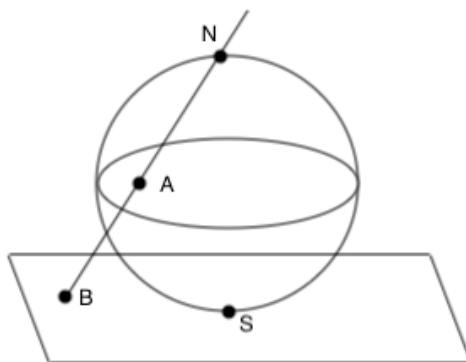


Рис. 5: Стереографическая проекция

Тор

Рассмотрим карту на торе. Сколько цветов достаточно для раскраски карты?

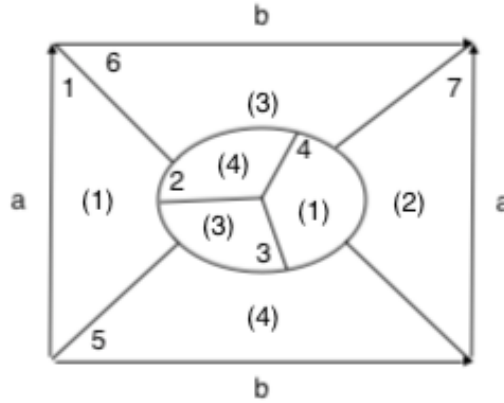


Рис. 6: Карта на торе

Первую страну покрасим в цвет 1. Седьмая страна граничит с первой по ребру склейки, поэтому мы обязаны покрасить ее в другой цвет, например, в цвет 2. Шестая страна граничит с первой и седьмой, поэтому ее покрасим в цвет 3. Пятая страна граничит с первой, седьмой и шестой странами, следовательно, покрасим ее в цвет 4. Легко понять, что оставшиеся три страны можно покрасить в три использованных цвета, например, в 1,3,4.

Может сложиться ощущение, что на торе такая же ситуация, как и на плоскости со сферой. Однако это не так. Приведем контрпример. На этой карте каждая страна граничит со всеми остальными, а значит для раскраски нужно 7 цветов.

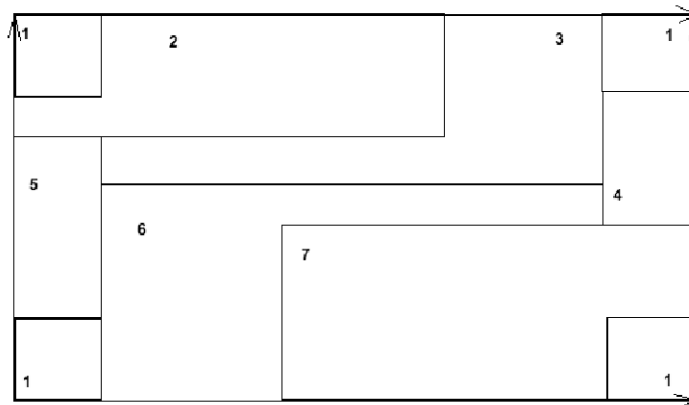


Рис. 7: Контрпример

На самом деле достаточное число цветов для раскраски карты на торе как раз равно 7.

Лента Мёбиуса

Пример карты на ленте Мёбиуса, для которой достаточно двух цветов для правильной раскраски.

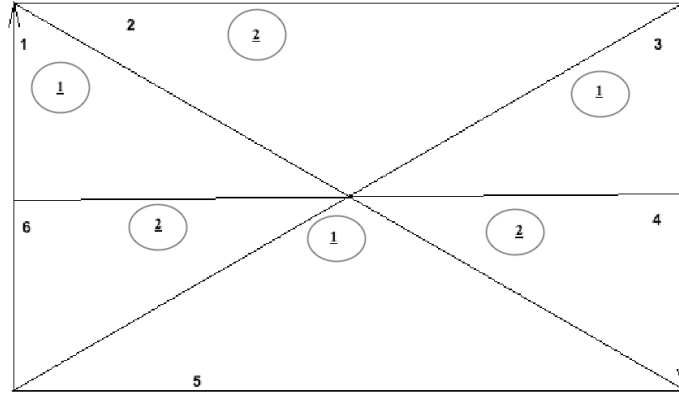


Рис. 8: Карта-1 на ленте Мёбиуса

Приведем еще один пример–карту на ленте Мёбиуса. В этом случае для раскраски необходимо 5 цветов. Следовательно, теорема о четырех красках для ленты Мёбиуса неверна.

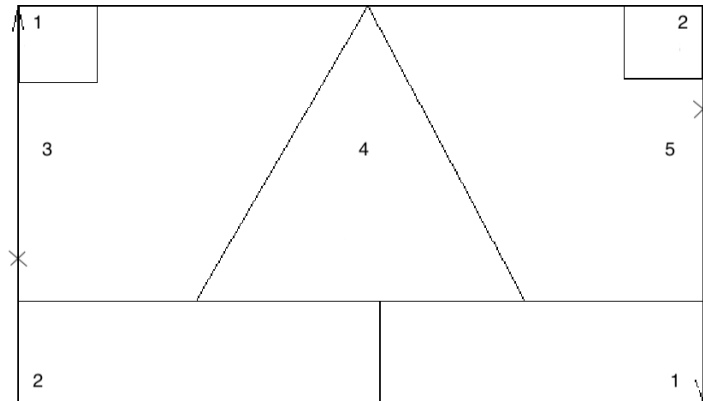


Рис. 9: Карта-2 на ленте Мёбиуса

Так происходит, потому что у приведенных поверхностей разные эйлеровы характеристики

$$v - e + f = \chi(M).$$

Для сферы $\chi(S^2) = 2$, для ленты Мёбиуса $\chi(M) = 0$, для тора $\chi(T^2) = 2$.

Семинар 2. Регулярно гомотопные кривые. Двумерные поверхности

Гладкая регулярная замкнутая плоская кривая

Рассмотрим двумерную плоскость \mathbb{R}^2 . Пусть на ней фиксированы декартовы координаты $x = (x_1, x_2)$.

Определение 11. Гладкая регулярная замкнутая плоская кривая — это множество точек $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, задаваемое параметрическими уравнениями $x = r(t)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t), \end{cases}$$

причем

- 1) $t \in \mathbb{R}$,
- 2) $r(t)$ — бесконечно дифференцируема (т.е, кривая гладкая),
- 3) $\dot{r}(t) \neq 0$ (т.е, кривая регулярная, без изломов),
- 4) $r(t)$ — периодическая, т.е. существует $T > 0$

$$r(t + T) = r(t).$$

Регулярно гомотопные кривые

Обозначим $\tau \in [0; 1]$ — время деформации кривой.

Определение 12. Кривые γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны, если существует векторная функция $r(t, \tau)$ такая, что

- 1) $r(t, \tau)$ — бесконечно дифференцируема по t и τ .
- 2) $\forall \tau_0 \in [0; 1]$ параметрические уравнения $x = r(t, \tau_0)$ задают гладкую регулярную замкнутую плоскую кривую γ_{τ_0} .
- 3) $x = r(t, 0)$ — γ_0 (изначальная кривая), $x = r(t, 1)$ — γ_1 — кривая после деформации.

Когда две кривые регулярно гомотопны?

Рассмотрим кривую и ее вектор скорости (касательный вектор). Напомним, что натуральный параметр определяется так:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{r}(t_1)| dt_1, \quad \dot{s}(t) = |\dot{r}(t)| > 0$$

Имеем

$$\frac{dr}{ds} = v(s), \quad |v| = 1.$$

Будем откладывать касательный вектор от начала координат. При движении по кривой этот вектор будет вращаться. Так как кривая замкнута, то в итоге вектор вернется в исходной положение. Каждый поворот вектора против часовой стрелки будем считать со знаком $+$, а по часовой — со знаком $-$.

Определение 13. Число вращения кривой γ — число оборотов \dot{r} . Будем обозначать $m(\gamma)$.

Теорема 1 (Уитни-Грауштейн). Две кривые регулярно гомотопны \iff их числа вращения равны.

Вычисление чисел вращения

Задача 9. Пусть $x = r(s)$ — натуральная параметризация. Найти число вращения кривой.

Решение. Параметризация натуральная, следовательно, $|v| = 1$.

Тогда $v(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$, $\alpha(s)$ — угловая функция кривой γ . Заметим, что эту функцию можно сделать гладкой при некоторых условиях.

$$r(s + L) = r(s), \quad L \text{ — длина кривой}$$

$$\alpha(s + L) = \alpha(s) + 2\pi m$$

$$m = \frac{1}{2\pi}(\alpha(s + L) - \alpha(s)) = \frac{1}{2\pi}(\alpha(L) - \alpha(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \alpha'(s) ds$$

$$v' = \alpha' \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \alpha' n(s), \quad n(s) = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = R_v.$$

Следовательно,

$$(v', n) = \alpha'$$

Итак,

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^L (v', n) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^L (v_1 v_2' - v_2 v_1') ds.$$

□

Замечание 1. Можно от натуральной параметризации перейти к произвольной с помощью формулы

$$v = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}.$$

Кроме того,

$$ds = \frac{ds}{dt} dt = |\dot{r}| dt.$$

Получим формулу

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^T (v_1 v_2' - v_2 v_1') dt.$$

Задача 10. Рассмотрим окружность S^1 с радиусом R . Найдите число вращения.

Решение. В случае окружности $s = \alpha R$, т.е. угловая функция

$$\alpha = \frac{s}{R},$$

$$x = x_0 + R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ \sin \frac{s}{R} \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{R} \\ \cos \frac{s}{R} \end{pmatrix}.$$

Посчитаем число вращения при $L = 2\pi R$

$$v' = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ \sin \frac{s}{R} \end{pmatrix}$$

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} \left(-\frac{1}{R} \sin^2 \frac{s}{R} + \frac{1}{R} \cos^2 \frac{s}{R} \right) ds = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} ds = -1.$$

□

Задача 11. Рассмотрим кривую $x = (2 \cos t; -\sin t)$. Найдите число вращения.

Решение. Запишем явный вид кривой

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + x_2^2 = 1.$$

Это эллипс, который обходится по часовой стрелке. Следовательно, $m = -1$.

□

Задача 12. Рассмотрим кривую $x = (\cos t; \sin 2t)$. Найдите число вращения.



Рис. 10: Кривая из задачи 12

Решение. Эта кривая — восьмерка. Число оборотов по часовой стрелке равно числу оборотов против часовой. Следовательно, число вращения $m = 0$.

□

Построение гомотопии между двумя окружностями

Пусть даны две окружности

$$\gamma_0 : x = r_0 + R_0 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 : x = r_1 + R_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Зададим между ними явную гомотопию:

$$r(t, \tau) = r_0(1 - \tau) + r_1\tau + (R_0(1 - \tau) + R_1\tau) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\dot{r} = (R_0(1 - \tau) + R_1\tau) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \neq 0.$$

Построение гомотопии между окружностью и эллипсом

Пусть

$$\gamma_0 : x = r_0 + R_0 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad x = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

Построим гомотопию между ними:

$$r(t, \tau) = \begin{pmatrix} [a\tau + R(1 - \tau)] \cos t \\ [b\tau + R(1 - \tau)] \sin t \end{pmatrix}$$

Эта функция бесконечно дифференцируема, и удовлетворяет всем необходимым условиям, потому что

$$\dot{r}(t, \tau) = \begin{pmatrix} -[a\tau + R(1 - \tau)] \sin t \\ [b\tau + R(1 - \tau)] \cos t \end{pmatrix} \neq 0.$$

Построение гомотопии между эллипсом и кривой

Пусть

$$\gamma_0 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad x = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 : \frac{x_1^4}{\alpha^4} + \frac{x_2^4}{\beta^4} = 1, \quad x = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos t \\ \rho(t) \sin t \end{pmatrix}, \quad \rho(t) = \left(\frac{1}{\frac{\cos^4 t}{\alpha^4} + \frac{\sin^4 t}{\beta^4}} \right)^{1/4}.$$

Построим гомотопию между ними:

$$r(t, \tau) = \begin{pmatrix} [a(1 - \tau) + \rho\tau] \cos t \\ [b(1 - \tau) + \rho\tau] \sin t \end{pmatrix}$$

Эта функция бесконечно дифференцируема, и удовлетворяет всем необходимым условиям, потому что

$$\dot{r}(t, \tau) = \begin{pmatrix} -[a(1 - \tau) + \rho\tau] \sin t \\ [b(1 - \tau) + \rho\tau] \cos t \end{pmatrix} + \tau \dot{\rho} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \neq 0.$$

Двумерные поверхности

Определение 14. Криволинейный 2-симплекс в \mathbb{R}^n — это множество точек $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, задаваемое параметрическими уравнениями

$$x = r(u), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad u = (u_1, u_2),$$

причем

- 1) u принадлежит треугольнику
- 2) $r(u)$ бесконечно дифференцируема
- 3) $\frac{\partial r}{\partial u_1}, \frac{\partial r}{\partial u_2}$ линейно независимы
- 4) $r(u) = r(u^*) \implies u = u^*$.

Задать ориентацию на симплексе — задать направление его обхода.

Определение 15. Двумерная триангулируемая поверхность в \mathbb{R}^n — это объединение конечного числа криволинейных симплексов, причем

1) Для всяких Δ_i, Δ_j

$$\Delta_i \cap \Delta_j = \begin{cases} \emptyset, \\ 1 \text{ ребро} \\ 1 \text{ вершина} \end{cases}$$

2) Всякое ребро принадлежит не более, чем двум симплексам.

3) Для любой пары симплексов A, B существует цепочка $\Delta_1 = A, \Delta_2, \dots, \Delta_m = B$, причем, $\Delta_i \cap \Delta_j = \text{ребро}$.

4) Если $A \cap B = \text{вершина } P$, то цепочку можно выбрать так, чтобы P принадлежала всем симплексам цепочки. ($P \in \Delta_i \forall i$).

Ребро e — *внутреннее*, если оно принадлежит двум симплексам; *краевое* — если одному.

Определение 16. *Край* δM поверхности M — это объединение краевых ребер.

Поверхность M *ориентирована*, если ориентирован каждый входящий в нее симплекс. Причем, если два симплекса пересекаются по ребру, то два направления на нем противоположны.

Поверхность M *ориентируема*, если на M можно задать ориентацию.

Можно рассматривать замкнутые цепочки симплексов $\Delta_1, \dots, \Delta_m$: $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \text{ребро}$, $\Delta_m \cap \Delta_1 = \text{ребро}$. Тогда возникнут два направления обхода — изначальный и тот, который получился при проходе до конца по замкнутой цепочке. Если эти две ориентации совпали, то будем говорить, что замкнутая цепочка сохраняет ориентацию. Если они оказались противоположны, то цепочка обращает ориентацию.

Поверхность M *ориентируема* тогда и только тогда, когда любая замкнутая цепочка симплексов сохраняет ориентацию.

Примеры поверхностей

Диск D^1

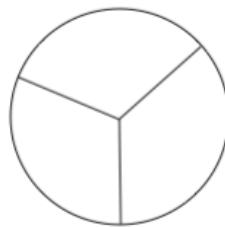


Рис. 11: Триангуляция диска

Сфера S^1

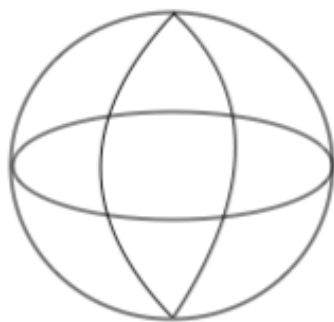


Рис. 12: Триангуляция сферы

Цилиндр



Рис. 13: Склейка цилиндра



Рис. 14: Цилиндр

Лента Мебиуса



Рис. 15: Склейка ленты Мебиуса

Тор

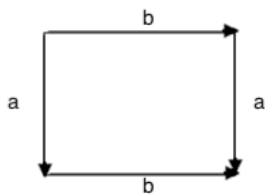


Рис. 16: Склейка тора

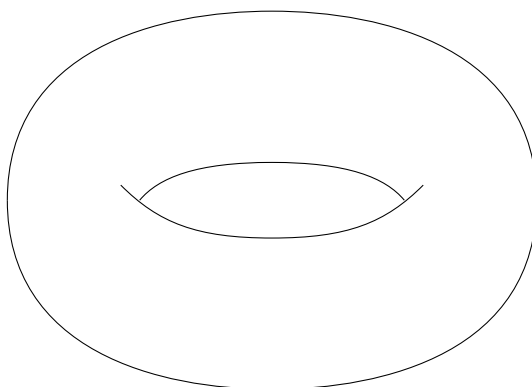


Рис. 17: Тор

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$

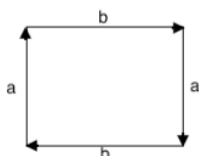


Рис. 18: Склейка проективной плоскости

Бутылка Клейна K^2

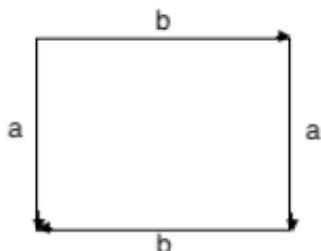


Рис. 19: Склейка бутылки Клейна

Операции над поверхностями

- 1) Вырезание дырки (диска)
- 2) Заклейка дырки диском
- 3) Вклейка ручки
- 4) Вклейка ленты Мебиуса

Теорема 2. Любая двумерная поверхность гомеоморфна либо M_g^m — сфера с g ручками и m дырками, $g \geq 0$, $m \geq 0$, либо N_k^m — сфера с k лентами Мебиуса и m дырками, $k \geq 1$, $m \geq 0$.

Эйлерова характеристика

Рассмотрим граф Γ на поверхности M такой, что все области, на которые он разбивает M , гомеоморфны диску.

Аналогично графу на плоскости мы можем посчитать у графа Γ числа e , f и v .

$$\chi(M) = v + f - e$$

Задача 13. Вычислим эйлерову характеристику диска D^1 .

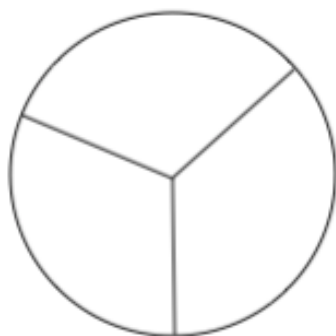


Рис. 20: Триангуляция диска

Решение. Имеем: $v = 4$, $e = 6$, $f = 3 \implies \chi(M) = 4 + 3 - 6 = 1$. □

Вырежем дырку в поверхности M . Получим поверхность M_1 . Как связаны эйлеровы характеристики M и M_1 .

Фактически при вырезании дырок мы удаляем один симплекс. Число вершин и ребер остается таким же, а число областей f уменьшается на 1. Следовательно,

$$\chi(M_1) = \chi(M) - 1.$$

Задача 14. Вычислим эйлерову характеристику тора.

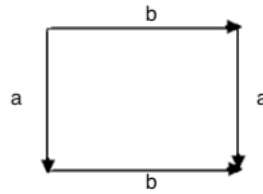


Рис. 21: Склейка тора

Решение. Имеем: $v = 1, e = 2, f = 1 \implies \chi(M) = 1 + 1 - 2 = 0$. □

Что произойдет с эйлеровой характеристикой, если мы склеим две поверхности?

Сначала в каждой поверхности мы вырезали дырку, уменьшив тем самым их эйлеровы характеристики и число областей — f'_1 и f'_2 . Далее количество вершин и ребер сложатся. Кроме того, сложатся f'_1 и f'_2 . Следовательно, склейка двух поверхностей «без дырок» дает поверхность Q с

$$\chi(Q) = \chi(M) + \chi(N) - 2$$

Ручкой называется поверхность, полученная из тора вырезанием диска. Пусть M — ручка. Тогда $\chi(M) = -1$. Следовательно, приклейка ручки изменяет эйлерову характеристику так:

$$\chi(M_1) = \chi(M) - 2.$$

Какая эйлерова характеристика у ленты Мебиуса?



Рис. 22: Склейка ленты Мебиуса

Имеем: $f = 1, e = 3, v = 2$.

$$\chi = 2 + 1 - 3 = 0$$

Итого:

Вырезание дырки	$\chi \longrightarrow \chi - 1$
Заклейка дырки диском	$\chi \longrightarrow \chi + 1$
Вклейка ручки	$\chi \longrightarrow \chi - 2$
Вклейка листа Мебиуса	$\chi \longrightarrow \chi - 1$
M_g^m	$\chi(M_g^m) = 2 - 2g - m$
M_k^m	$\chi(M_k^m) = 2 - k - m$

Решение задач

Задача 15. Найти эйлерову характеристику поверхности

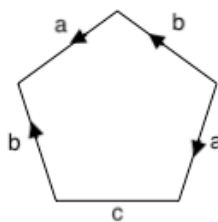


Рис. 23: Склейка поверхности из задачи 15

Решение. Имеем: $f = 1$, $e = 3$, $v = 1$ (все вершины склеились в одну).

$$\chi = 1 + 1 - 3 = -1.$$

$$m = 1 \text{ (т.к. число компонент края} = 1).$$

Поверхность ориентируема. Следовательно, $g = 1$. □

Задача 16. Найти эйлерову характеристику поверхности

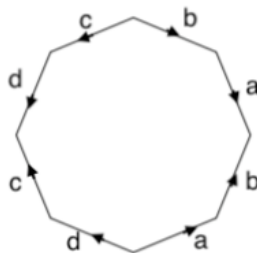


Рис. 24: Склейка поверхности из задачи 16

Решение. Поверхность ориентируема.

Имеем: $f = 1$, $e = 4$, $v = 1$.

$$\chi = 1 + 1 - 4 = -2.$$

$$m = 0.$$

Следовательно, $g = 2$. Сфера с двумя ручками. □

Задача 17. Пусть есть шар, в котором просверлили два отверстия, которые не пересекаются между собой. Какая получилась поверхность?

Решение. Сфера с двумя ручками — M_2^0 .

Если высверлить g отверстий, то получится M_g^0 . □

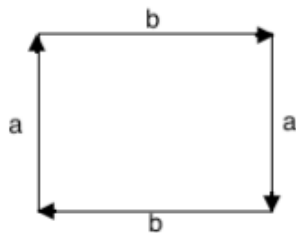


Рис. 25: Склейка проективной плоскости

Задача 18. Найти эйлерову характеристику проективной плоскости.

Решение. Поверхность не ориентируема.

Имеем: $f = 1$, $e = 2$, $v = 2$.

$$\chi = 2 + 1 - 2 = 1.$$

$$m = 0.$$

Следовательно, $k = 1$. Сфера с одной лентой Мебиуса.

□

Задача 19. Найти эйлерову характеристику бутылки Клейна.

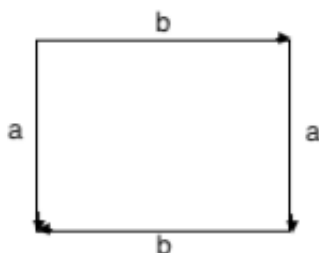


Рис. 26: Склейка бутылки Клейна

Решение. Поверхность не ориентируема.

Имеем: $f = 1$, $e = 2$, $v = 1$.

$$\chi = 1 + 1 - 2 = 0.$$

$$m = 0.$$

Следовательно, $k = 2$. Сфера с двумя лентами Мебиуса.

□

Задача 20. Найти эйлерову характеристику поверхности

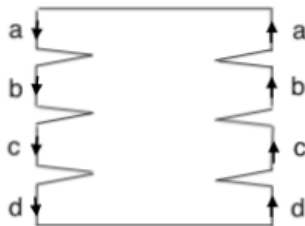


Рис. 27: Склейка поверхности из задачи 20

Решение. Поверхность не ориентируема. Число компонент края равно 1.

Имеем: $f = 1$, $e = 12$, $v = 8$.

$$\chi = 8 + 1 - 12 = -3.$$

Следовательно, $k = 2 + 3 - 1 = 4$. Получаем поверхность N_4^1 . □

Задача 21. Пусть дана замкнутая поверхность M (т.е. без края). На ней изображена карта, где каждая область — пятиугольник и в каждой вершине сходится 4 ребра. Поверхность ориентируема. Доказать, что число областей (стран) делится на 8.

Решение. Так как поверхность ориентируема и без края, то

$$\chi = 2 - 2g.$$

Каждая область — пятиугольник. По каждому ребру склеивается 2 области. Следовательно,

$$2e = 5f.$$

В одной вершине сходится 4 ребра, но каждая вершина соединяет 2 ребра. Следовательно,

$$4v = 2e.$$

Имеем:

$$e = \frac{5f}{2}, \quad v = \frac{e}{2} = \frac{5f}{4}.$$

$$\chi = 2 - 2g = \frac{5f}{4} + f - \frac{5f}{2}$$

$$5f + 4f - 10f = 8(1 - g)$$

$$f = 8(g - 1) \implies 8 \mid f.$$

□

Задача 22. Пусть дана замкнутая поверхность M . Страны на ней — n -угольники. В каждой вершине сходится по k ребер. Доказать, что в этом случае выполнено

$$\boxed{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e}}.$$

Решение. Каждая область — n -угольник. По каждому ребру склеивается 2 области. Следовательно,

$$2e = nf.$$

В одной вершине сходится k ребра, но каждая вершина соединяет 2 ребра. Следовательно,

$$kv = 2e.$$

Имеем:

$$\chi = \frac{2e}{k} + \frac{2e}{n} - e$$

$$\chi + e = \frac{2e}{k} + \frac{2e}{n}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e}.$$

□

Пусть M — тор. Тогда для него

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}, \quad n, k \geq 3.$$

Найдем все разбиения тора.

Если $n = 3$, то

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \implies k = 6.$$

Если $n = 4$, то

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \implies k = 4.$$

Если $n = 5$, то

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \implies \text{не бывает такого случая.}$$

Если $n = 6$, то

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \implies k = 3.$$

Если $n > 6$, то

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{6} \implies \frac{1}{2} - \frac{1}{n} > \frac{1}{3} \implies k < 3$$

\implies такого случая не бывает.

Аналогичное верно для бутылки Клейна, так как у них с тором совпадают эйлеровы характеристики.

Склейки поверхностей с помощью других поверхностей

Задача 23. Пусть взяли 4 сферы и склеили их попарно между собой с помощью цилиндров. Очевидно, что это M_g^0 . Сколько ручек получилось?

Решение. Изначально у нас было 4 сферы, в которых мы проделали по 3 дырки. То есть у каждой новой сферы

$$\chi(Q_i) = -1.$$

У цилиндра $\chi = 0$. Следовательно, в сумме получим

$$\chi(M_g^0) = -4 = 2 - 2g \implies g = 3.$$

□

Задача 24. Рассмотрим тор, бутылку Клейна и сферу и соединим их цилиндрами. Очевидно, что это N_k^0 . Сколько лент Мебиуса получилась?

Решение. Пусть Q_1 — бутылка Клейна, Q_2 — тор, Q_3 — сфера. Штрихом будем обозначать поверхность, из которой вырезали две дырки. Получим

$$\chi(Q'_1) = -2$$

$$\chi(Q'_2) = -2$$

$$\chi(Q'_3) = 0$$

У цилиндра эйлерова характеристика равна 0. Следовательно,

$$\chi(N_k^0) = -4 \implies k = 6.$$

□

Семинар 3. Движение. Группы движений

Группы движений

Кристаллическое вещество:

- 1) Дискретность
- 2) Периодичность

Определение 17. *Движение плоскости* — это взаимно однозначное отображение $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что $\forall A, B$

$$|g(A)g(B)| = |AB|$$

G — совокупность движений таких, что $g(K) = K$.

$$g_1, g_2 \in G \implies g_1 g_2 \in G, \quad g_1 g_2(A) = g_1(g_2(A))$$

$$g \in G \implies g^{-1} \in G$$

- 1) G — группа движений.

A и B эквиваленты, если $\exists g \in G: g(A) = B$.

- 2) Дискретность: $\forall A \in \mathbb{R}^2 \exists$ круг с центром в точке A , такой что в нем нет точек, эквивалентных A , кроме A (G — дискретная группа).
- 3) Существует ограниченная фундаментальная область.

Определение 18. Подмножество $D \subset \mathbb{R}^2$ называется *фундаментальной областью* группы движений G , если $\forall A \in \mathbb{R}^2 \exists B \in D: B$ эквивалентна A ($\exists g \in G: g(A) = B$).

Пример 2. 1) $G = \{\text{id}\}, D = \mathbb{R}^2$

- 2) $G : \{\text{сдвиги векторы } m\vec{a}, m \in \mathbb{Z}\}$. Тогда D — это полоса шириной $|\vec{a}|$, перпендикулярная прямой $l \ni \vec{a}$.
- 3) $G : \{\text{сдвиги векторы } m\vec{a} + n\vec{b}, m, n \in \mathbb{Z}\}$. Тогда D — параллелограмм, построенный на векторах \vec{a} и \vec{b} .
- 4) $C_m := G : \{\text{повороты вокруг т. } D \text{ на углы вида } \frac{2\pi k}{m}, m \in \mathbb{Z}, m > 1, k = 0, \dots, m-1\}$. Тогда D — угол $\frac{2\pi}{m}$.
- 5) $G : \{\text{все повороты вокруг т. } O\}$. Тогда D — луч, выходящий из точки O .
- 6) $G : \{\text{все движения}\}$. Тогда D — точка.

Определение 19. Группа G называется *кристаллографической*, если она дискретна и у нее существует ограниченная фундаментальная область.

Движение плоскости

- 1) Сдвиг на вектор \vec{a} .
- 2) Поворот вокруг т. A на угол α .
- 3) Отражение относительно оси l .
- 4) Скользящая симметрия — это отражение относительно оси l с одновременным сдвигом на некоторый вектор параллельный этой оси.

Задача 25. Пусть A, B, A', B' — точки \mathbb{R}^2 , причем, $|AB| = |A'B'|$. Доказать, что всегда найдется движение g , являющееся поворотом или сдвигом, такое что $g(A) = A', g(B) = B'$, причем g (поворот или сдвиг) единственное.

Решение: Угол поворота должен равняться углу между прямыми AB и $A'B'$ — α .

Рассмотрим отрезок AA' и серединный перпендикуляр через него. Точку пересечения обозначим M . Далее на этом серединном перпендикуляре выбираем точку O так, что $\angle AOM = \alpha$. Точка O — центр поворота.

Теперь пусть прямые AB и $A'B'$ параллельны. Если векторы \vec{AB} и $\vec{A'B'}$ одинаковы по направлению, то нужно сделать сдвиг на вектор $\vec{AA'}$. Если они противоположны по направлению, то нужно сделать поворот на π вокруг точки $O = AA' \cap BB'$. \square

Задача 26. Пусть A, B, A', B' — точки \mathbb{R}^2 , причем, $|AB| = |A'B'|$. Доказать, что всегда найдется движение g , являющееся скользящей симметрией, такое что $g(A) = A', g(B) = B'$, причем g единственное.

Решение: Проведем отрезок AA' . Рассмотрим его середину — точку O . Через O проведем лучи, которые параллельны $AB, A'B'$. Получился угол с вершиной в точке O . Построим биссектрису этого угла — l . Это и будет осью скользящей симметрии. Теперь возьмем проекцию точки A — A_l и проекцию точки A' — A'_l . Вектор $A_l A'_l$ и будет вектором скользящей симметрии. \square

Задача 27. Пусть A, B, A', B' — точки \mathbb{R}^2 , причем, $|AB| = |A'B'|$. Доказать, что существует не более двух движений, переводящих A в A', B в B' . При этом одно из этих движений сохраняет ориентацию, а второе меняет.

Решение: Пусть прямая AB делит плоскость на две полуплоскости — α и β , а $A'B'$ — на α' и β' .

Рассмотрим точку P в α . Рассмотрим треугольник PAB . Так как при движении сохраняются расстояния, то точка P должна перейти P' : $\triangle PAB = \triangle P'A'B'$. Кроме того, $P' \in \alpha'$, если движение сохраняет ориентацию, и $P' \in \beta'$, если не сохраняет. Такая точка в каждом случае одна. \square

Задача 28 (Теорема Шаля). Доказать, что любое движение — либо поворот, либо сдвиг, либо скользящая симметрия.

Решение: Пусть g — некоторое движение плоскости.

Рассмотрим сначала движение, которое сохраняет ориентацию. Рассмотрим точки $A, B, A' = g(A), B' = g(B)$:

$$A' = g(A), \quad B' = g(B), \quad |AB| = |A'B'|.$$

Такое движение g только одно и это либо поворот, либо сдвиг.

Пусть теперь движение меняет ориентацию. Согласно предыдущей задаче такое движение только одно, и мы знаем, что с такими свойствами существует скользящая симметрия. Значит это единственное движение — скользящая симметрия.

Доказано. □

Задача 29. *Зафиксируем точку $O \in \mathbb{R}^2$ (начало координат). Пусть G_0 — множество движений, оставляющих точку O на месте (повороты вокруг точки O , отражения относительно осей, проходящих через точку O). Доказать, что любое движение представляется так:*

$$g(x) = A(x) + b, \quad A \in G_0.$$

Решение: $g(x) = x + b$. Если исходное движение g — это поворот вокруг точки P на угол α , A — поворот вокруг точки O на угол α . В итоге получается поворот вокруг точки O на угол α . □

Композиции движений

T_a — сдвиг на вектор \vec{a} .

R_A^α — поворот вокруг точки A на угол α .

S_l — отражение относительно прямой l .

$S_l^{\vec{a}}$ — скользящая симметрия с осью l и вектором \vec{a} .

1) $T_a T_b = T_{a+b}$

2) Если l_1 и l_2 не параллельны, то получится поворот (точка пересечения прямых остается на месте и движение сохраняет ориентацию. Единственное такое движение — поворот).

$$S_{l_2} S_{l_1} = R_A^{2\alpha}, \quad l_2 \cap l_1 = A, \quad \angle \alpha = l_2 \wedge l_1.$$

Если l_1 параллельна l_2 . Рассмотрим некоторую точку A . При отражении относительно l_1 получим A_1 . Теперь A_1 при отражении относительно l_2 перейдет в A_2 . Следовательно, это будет сдвиг на вектор $\vec{AA_2}$, где $|\vec{AA_2}| = 2|a|$, где a — расстояние между прямыми

$$S_{l_2} S_{l_1} = T_{2a}$$

3) $R_B^\beta R_A^\alpha = ?$

В качестве оси l_2 берем прямую, которая проходит через A и B . Прямую l_1 подбираем так, что $R_A^\alpha = S_{l_2} S_{l_1}$.

Аналогично: $R_B^\beta = S_{l_3} S_{l_2}$.

Таким образом,

$$R_B^\beta R_A^\alpha = S_{l_3} S_{l_2} S_{l_2} S_{l_1} = S_{l_3} S_{l_1} = R_C^\gamma, \quad C = l_3 \cap l_1, \quad \gamma = \alpha + \beta.$$

Однако в случае, если l_3 и l_1 оказались параллельными (т.е. $\alpha = -\beta$), то получится сдвиг на вектор, который соединяет l_3 и l_1 :

$$R_B^\beta R_A^\alpha = S_{l_3} S_{l_2} S_{l_2} S_{l_1} = S_{l_3} S_{l_1} = T_a.$$

4) $T_a S_l = ?$

Разложим вектор $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, где $\vec{a}_1 \parallel l$, $\vec{a}_2 \perp l$. Тогда

$$T_a S_l = T_{a_1} T_{a_2} S_l.$$

$$T_{a_2} S_l = S_{l'} S_l S_l = S_{l'}$$

$$T_a S_l = T_{a_1} T_{a_2} S_l = T_{a_1} S_{l'} = S_{l'}^{a_1},$$

где $l' \parallel l$ и расстояние между ними равно $a/2$.

5)

$$R_A^\alpha S_l = S_{l_2} S_{l_1} S_l = S_{l_2} T_{2a} = S_{l_2} T_{b_2} T_{b_1} = S_{l_2} S_{l_2} S_{l_3} T_{b_1} = S_{l_3}^{b_1}.$$

Замечание 2. Любое движение плоскости представляется в виде не более, чем трех отражений.

Пусть имеется фигура на плоскости $\Phi \subset \mathbb{R}^2$. С ней можно связать группу движений плоскости

$$G_\Phi = \{g \mid g(\Phi) = \Phi\}.$$

Пример 3. 1) $\Phi = \mathbb{R}^2$, G_Φ — все.

2) $\Phi = \{0\}$, $G_\Phi = O(2)$ — ортогональные преобразования \mathbb{R}^2 .

3) Φ — окружность. $G_\Phi = O(2)$.

4) Φ — отрезок.

$$G_\Phi = \{\text{id}, R_O^\pi, S_{l_1}, S_{l_2}\}.$$

O — середина отрезка, l_1 — прямая, которая содержит отрезок, $l_2 \perp$ отрезку.

Покажем, что это действительно группа

	e	R	S_1	S_2
e	e	R	S_1	S_2
R	R	e	R	e
S_1	S_1	R	e	S_2
S_2	S_2	e	S_2	e

5) Φ — ромб (не квадрат).

$$G_{\Phi} = \{\text{id}, R_O^{\pi}, S_{l_1}, S_{l_2}\}.$$

6) Φ — правильный n -угольник.

$$D_n := G_{\Phi} = \{R_O^{2\pi k/n}, S_1, S_2, \dots, S_n\},$$

угол между соседними осями равен $\frac{\pi}{n}$.

Некоторые сведения о группах

Определение 20. Элементы g_1 и g_2 сопряжены при помощи h , если $g_2 = hg_1h^{-1}$.

Отношение сопряженности — это отношение эквивалентности. Таким образом, вся группа разбивается на классы сопряженности.

Определение 21. Подгруппа H в G — это подмножество G , которое является группой с той же самой групповой операцией.

Определение 22. Подгруппа H называется нормальной, если $\forall h \in H: \forall g \in G$

$$ghg^{-1} \in H.$$

Подгруппа нормальна, если вместе с каждым своим элементом она содержит его класс сопряженности.

Определение 23. Рассмотрим группу G и подгруппу H . Множества, состоящие из $gh, h \in H$ и $hg, h \in H$ называются правым и левым смежным классом элемента g по подгруппе H соответственно.

Если подгруппа нормальна, то правый и левый смежный класс по ней совпадают.

Определение 24. Фактор-группа G/H — множество смежных классов по H .

Вернемся к рассмотрению группы движений.

1) Если g_1, g_2 — повороты на α_1, α_2 , то

$$g_1g_2 = g_2g_1 = \text{поворот на } \alpha_1 + \alpha_2.$$

2) g — поворот на α , S — отражение относительно l , то

$$gS_l = S_{l_1}S_lS_l = S_{l_1}$$

отражение относительно l , поворот на $\alpha/2$.

$$S_lg = S_lS_lS_{l_1} = S_{l_1}$$

отражение относительно l , поворот на $-\alpha/2$.

3) $S_{l_2}S_{l_1}$ — поворот на угол 2α , где α — угол между l_1 и l_2 .

4) g, h — повороты. Тогда $ghg^{-1} = h$.

5) h — поворот на α , S — отражение относительно l .

$$ShS^{-1} = S_l h S_l = S_l S_{l_1} S_l S_l = S_l S_{l_1} = h^{-1}.$$

6) h — отражение относительно l , S — отражение относительно l_1 .

$$ShS^{-1} = ShS = SR_{2\alpha} = SSS_{l_2} = S_{l_2}$$

— отображение относительно оси, симметричной к l , относительно l_1 .

7) h — отражение, g — повороту

$$ghg^{-1} = S_{l_1} S_l S_l g^{-1} = S_{l_1} S_{l_1} S_{l_2} = S_{l_2}.$$

Исследование группы D_n

Какие классы сопряженности?

Пусть n нечетно.

$$\{e\}, \quad \{h, h^{-1}\} \text{ (таких поворотов } \frac{n-1}{2}), \quad \{s\} \text{ — все отражения.}$$

Итого

$$1 + \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+3}{2}$$

классов сопряженности, если n нечетно.

Если n четно, то

$$\{e\}, \quad \{h, h^{-1}\} \text{ (таких поворотов } \frac{n-2}{2}), \quad \{h_0\}, \quad \{s_2\}, \quad \{s_1\},$$

где h_0 — поворот на π , s_1 — отражение относительно оси, соединяющей противоположные вершины, s_2 — отражение относительно оси, соединяющей середины противоположных ребер.

Если n четно, то всего классов сопряженности

$$1 + \frac{n-2}{2} + 1 + 2 = \frac{n+6}{2}.$$

Нормальные подгруппы

1) Если взять любую подгруппу в C_n , то она будет нормальной.

2) Если n нечетно. Предположим, что есть некоторая подгруппа H , которая содержит отражение s . Допустим, что H нормальная. Тогда H содержит все отражения и повороты. Т.е. $H = D_n$.

Если n четно. То H содержит все отражения, сопряженные с s + все повороты на углы $\frac{4\pi k}{n}$. Получили еще одну нормальную подгруппу.

Группы симметрий трехмерных фигур

1) Φ — прямая правильная призма (n -угольная).

G_Φ = повороты на $\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$; n отражений относительно плоскостей. Всего $2n$ элементов. Добавим сюда все композиции — еще $2n$ элементов. Итак,

$$|G_\Phi| = 4n.$$

2) Пирамида. $G_\Phi = D_n$.

3) Куб. G_0 — группа вращений куба.

e — тождественное преобразование.

$3 \times 3 = 9$ вращений — относительно осей, соединяющих центры противоположных граней.

$4 \times 2 = 8$ вращений относительно диагоналей

$6 \times 1 = 6$.

Всего 24 вращения. Группа вращений куба изоморфна S_4 .

Группа всех симметрий тетраэдра — S_4 .

Количество всех движений, при которых куб остается на месте — 48.





МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ