МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ЧАСТЬ 2. СЕМИНАРЫ

ШАПОШНИКОВА
ТАТЬЯНА АРДОЛИОНОВНА

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Семинар 1. Обобщенные функции

Введение

Первые несколько семинаров будут посвящены теории обобщенных функций.

Одной из причин возникновения теории обобщенных функций – возникновения в физике δ-функции Дирака в 1930-е годы. δ-функция определяется как

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

С точки зрения математики такое определение функциии невозможно. Так как функция равна 0 почти всюду, интеграл от нее также должен быть равен 0.

Поскольку δ-функция использовалась в работах по физике, возникла необходимость устранить это противоречие и дать четкое математическое обоснование выводам, которые делали физики.

Пространство основных функций

Прежде, чем вводить обобщенные функции, введем в рассмотрение объект, называемый *пространством основных функций* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$.

Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (бесконечно дифференцируемая финитная функция). Бесконечная дифференцируемость означает, что у φ $\exists$ производные любого порядка на $\mathbb{R}^n$, а финитность – что $\varphi \equiv 0$ вне некоторой конечной области (можно считать, вне некоторого шара достаточно большого радиуса) $\subset \mathbb{R}$. На $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ введено понятие сходимости.

Определение 1.1. Будем говорить, что последовательность основных функций $\{\varphi_m\}$ *сходится* к φ:

$$\varphi_m \underset{m\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \varphi$$

в том и только том случае, когда

1. $\exists$ шар
$$T_R^0 = \{\ |x|\ <\ R\ \}$$
такой, что
$$\varphi_m(x) = 0, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus T_R^0.$$

2. Последовательность $\{D^\alpha \varphi_m\}$, где
$$D^\alpha \varphi_m = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi_m}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j,$$

сходится равномерно на замыкании T_R^0:

$$D^\alpha \varphi_m \underset{m\to\infty}{\overset{\overline{T_R^0}}{\rightrightarrows}} D^\alpha \varphi \ \forall\ \alpha.$$

Определение 1.2. Множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с введенной на нем сходимостью (определение 1.1), называется *пространством основных функций* и обозначается $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что $0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим некоторые нетривиальные примеры основных функций.

Пример 1.1. Рассмотрим функцию

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases} \tag{1}$$

(рис. 1.1). Отметим, что $\varphi_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

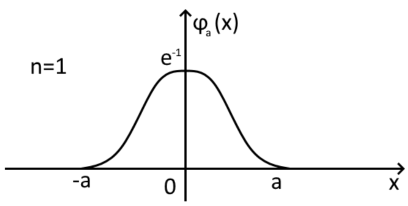


Рис. 1.1. График функции $\varphi_a(x)$

Кроме того, для любой $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\psi(x)\varphi_a(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Рассмотрим примеры некоторых сходящихся последовательностей в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Пример 1.2. Пусть $n = 1$ (то есть работаем на $\mathbb{R}$).

1. Рассмотрим
$$\varphi_m(x) = \frac{1}{m}\varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^1\right).$$
Тогда
$$\varphi_m \overset{\mathcal{D}}{\to} 0, \quad m \to \infty.$$
Действительно,
$$\operatorname{supp}\varphi_m = \operatorname{supp}\varphi = [-A, A],$$
а
$$(\varphi_m(x))^{(k)} = \frac{1}{m}\varphi^{(k)}(x).$$

2. Рассмотрим
$$\varphi_m(x) = \frac{1}{m}\varphi\left(\frac{x}{m}\right).$$
Выясним, сходится ли φ_m в смысле $\mathcal{D}$. Если это верно, то предельная функция равна 0, так как
$$\varphi_m \underset{\mathbb{R}^1}{\rightrightarrows} 0, \quad m \to \infty.$$
Заметим, однако, что, если
$$\operatorname{supp}\varphi = [-A, A],$$
то
$$\operatorname{supp}\varphi_m(x) = [-Am, Am].$$
Поэтому 1-е условие определения 1.1 не выполняется и
$$\varphi_m \overset{\mathcal{D}}{\not\to} 0, \quad m \to \infty.$$

3. Пусть
$$\varphi_m(x) = \frac{1}{m}\varphi(mx), \quad \varphi'(0) = 1.$$
Здесь, очевидно,
$$\varphi_m(x) \underset{m\to\infty}{\overset{\mathbb{R}^1}{\rightrightarrows}} 0, \quad m \to \infty.$$
Однако
$$\varphi_m'(x) = \varphi'(mx),$$
откуда получаем, что
$$\varphi_m'(0) = \varphi'(0) = 1,$$
а значит,
$$\varphi_m \overset{\mathcal{D}}{\not\to} 0, \quad m \to \infty.$$

Пространство обобщенных функций

Заметим, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – линейное пространство.

Возьмем $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – сопряженное пространство к пространству $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Обозначать такие функционалы будем как
$$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$
$$f: \underbrace{\varphi}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \to a_\varphi \text{ – число},$$
а действие f на основную функцию φ будем обозначать как (f, φ).

Определение 1.3. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется *пространством обобщенных функций.*

f линеен, то есть

$$(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2).$$

Непрерывность f определяется естественным образом. Пусть дана последовательность

$$\{\varphi_m\}, \quad \varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

$$\varphi_m \underset{m\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда

$$(f, \varphi_m) \ \underbrace{m \to \infty} \to (f, \varphi).$$

Замечание 1.1. Кроме линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ можно определить, например, нелинейные функционалы.

Примером такого функционала является длина кривой графика. Пусть

$$y = \varphi(x), \quad x \in [a, b], \quad \varphi \in C^1[a, b].$$

Тогда *длина кривой графика* f определяется как

$$(f, \varphi) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (\varphi')^2} dx.$$

Отметим, что $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ как сопряженное к линейному пространству $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ само является линейным пространством. Для $g, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$(\alpha g + \beta f, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \alpha(g, \varphi) + \beta(f, \varphi).$$

Определение 1.4. Пусть даны

$$\{f_m\}, \quad f_m \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Тогда

$$f_n \underset{m\to\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\to}} f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$\iff$ для $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$(f_m, \varphi) \underset{m\to\infty}{\to} (f, \varphi).$$

Регулярные и сингулярные обобщенные функции

Разобъем $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ на два класса.

Первый класс – *регулярные обобщенные функции*. Пусть

$$\text{loc} f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Напомним, здесь $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – множество функций $\in L_1$ на любой ограниченной области $\subset \mathbb{R}^n$. Тогда линейный непрерывный функционал f задается как

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx. \tag{2}$$

Отметим, что в (2) интегрирование будет вестись не по всему $\mathbb{R}^n$, а по шару, полностью включающему $\operatorname{supp}\varphi$. Очевидно,

$$(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2).$$

Нетрудно проверить, что если

$$\varphi_m \underset{m\to\infty}{\overset{\mathbb{D}}{\to}} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

то

$$(f, \varphi_m) \to (f, \varphi).$$

Это следует из (2) и того, что $\varphi_m(x)$ сходится равномерно на шаре, включающем в себя $\operatorname{supp}\varphi_m(x)\ \forall\ m$.

Все остальные обобщенные функции называются *сингулярными*.

Пример 1.3. Рассмотрим функционал

$$\delta(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

– *δ-функцию (функцию Дирака)*. Отметим, что x в записи $\delta(x)$ не является аргументом функции в привычном для нас смысле. Здесь

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0), \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Проверим, что $\delta(x)$ – линейный и непрерывный функционал. Линейность очевидна:

$$(\delta(x), \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_1(x)) = \alpha_1\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha\left(\delta(x), \varphi_1(x)\right) + \beta\left(\delta(x), \varphi_2(x)\right).$$

Перейдем к непрерывности. Пусть

$$\varphi_m(x) \underset{m\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \varphi(x).$$

Тогда

$$(\delta(x), \varphi_m(x)) = \varphi_m(0) \underset{m\to\infty}{\to} \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Покажем, что δ-функция из примера 1.3 сингулярна (то есть не является регулярной).

Утверждение 1.1. *δ-функция (3) сингулярна.*

Доказательство. (От противного) Предположим, что $\exists\ g \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Положим φ равной (1):

$$\varphi(x) = \varphi_a(x).$$

Тогда

$$\varphi_a(0) = e^{-1}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_a(x)dx = \int\limits_{|x|<a} g(x)\underbrace{\varphi_a(x)}_{<e^{-1}}dx \to 0, \quad a \to 0.$$

Получаем противоречие с (4). $\square$

δ-образные последовательности

Покажем, что δ-функцию можно приблизить в смысле $\mathcal{D}'$ последовательностью регулярных обобщенных функций – *δ-образной последовательностью.*

Пример 1.4. Построим

$$\delta_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$$

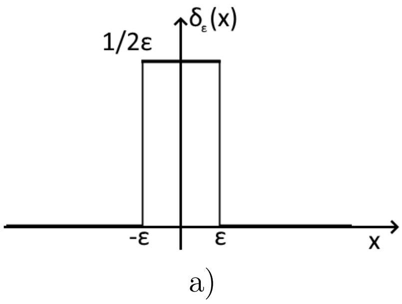
такие, что

$$\delta_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{\mathcal{D}'}{\to}} \delta(x).$$

1. Пусть

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \le \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

(рис. 1.2 a). Заметим, что площадь прямоугольника, образованного графиком $\delta_\varepsilon(x)$ и осью x, равна 1 для $\forall\ \varepsilon$. При $\varepsilon \to 0$ график меняется следующим образом (рис. 1.2 b).



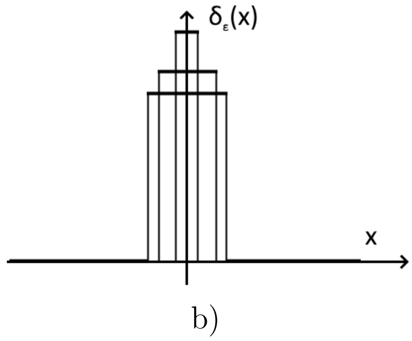


Рис. 1.2. График функции $\delta_\varepsilon(x)$

Очевидно, $\delta_\varepsilon(x)$ являются регулярными обобщенными функциями. Покажем, что они сходятся к $\delta(x)$. Для $\forall\ \varepsilon(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$(\delta_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)dx = \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)2\varepsilon = \varphi(x_\varepsilon) \ \to \ \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Здесь $x_\varepsilon \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

2. Пусть

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}$$

(рис. 1.3). Покажем, что

$$(\delta_\varepsilon(x), \varphi(x)) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} (\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0).$$

Пусть

$$\operatorname{supp}\varphi(x) \subset [-A, A].$$

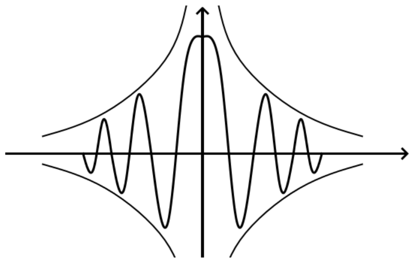


Рис. 1.3. График функции $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}$

Распишем

$$(\delta_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-A}^{A} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\varphi(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-A}^{A} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx + \varphi(0)\int\limits_{-A}^{A} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}dx. \qquad (5)$$

Из курса математического анализа известно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi.$$

Положим во втором интеграле в (5) $y = x/\varepsilon$. Тогда

$$\varphi(0)\int\limits_{-A}^{A} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}dx = \varphi(0)\int\limits_{-A/\varepsilon}^{A/\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon y}\sin y\varepsilon dy \ \underbrace{\varepsilon \ \to \ 0} \to \pi\varphi(0) = \pi\left(\delta(x), \varphi(x)\right).$$

Осталось показать, что первый интеграл в (5) стремится к 0.

Рассмотрим последовательность

$$f_\varepsilon(x) = \sin\frac{x}{\varepsilon}$$

– регулярные обобщенные функции. Покажем, что

$$f_\varepsilon(x) \ \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{\mathcal{D}'}{\to}} \ 0,$$

то есть

$$(f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-A}^{A} \sin\frac{x}{\varepsilon}\varphi(x)dx \ \to \ 0, \ \ \varepsilon \ \to \ 0.$$

Действительно,

$$\int\limits_{-A}^{A} \sin\frac{x}{\varepsilon}\varphi(x)dx = -\varepsilon\int\limits_{-A}^{A} \varphi(x)d\cos\frac{x}{\varepsilon} = \varepsilon\int\limits_{-A}^{A} \cos\frac{x}{\varepsilon}\varphi'(x)dx \ \to \ 0 \ \varepsilon \ \to \ 0,$$

так как $\cos\frac{x}{\varepsilon}$ ограничена, а $\varphi'(x)$ – гладкая функция.

Вернемся к первому слагаемому в (5):

$$\int\limits_{-A}^{A} \sin\frac{x}{\varepsilon} \underbrace{\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}}_{\psi(x)} dx \underbrace{\ \varepsilon \to 0\ }\to 0.$$

так как

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi'(0), & x = 0 \\ \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

– бесконечно дифференцируемая функция на $C^\infty[-A, A]$ (показать самостоятельно).

Итак, показали, что

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \pi\delta(x).$$

Поэтому $\{\delta_\varepsilon(x)/\pi\}$ – δ-образная последовательность функций.

Семинар 2. Операции над обобщенными функциями

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию

Напомним, в прошлый раз показали, что пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является линейным пространством. Иными словами, мы показали, что обобщенные функции можно складывать и умножать на число. Перейдем к обсуждению других операций над обобщенными функциями.

Первая операция, которую мы разберем – **умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию**. Пусть

$$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Введем

$$a(x)f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

следующим образом:

$$(a(x)f(x),\, \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (f(x),\, a(x)\varphi(x))\,. \tag{6}$$

Напомним, здесь $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Определение (6) корректно, так как

$$\forall\ \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad a \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow\ a\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Напомним, если f – регулярная функция (порождаемая функцией $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$), то

$$(f,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Если $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $af \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$,

$$(af,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} af\varphi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(a\varphi)dx = (f, a\varphi),$$

а значит, af – регулярная обобщенная функция.

Пример 2.1. Вычислим

$$(a(x)\delta(x),\varphi) = (\delta(x), a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)\,(\delta(x),\varphi(x))\,,$$

откуда

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x).$$

Если $a(0) = 0$, то

$$a(x)\delta(x) = 0.$$

В частности,

$$x\delta(x) = 0.$$

Линейная замена переменной

Перейдем к следующей операции – **линейной замене переменной**.

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Хотим определить

$$f(Ax+B), \quad A \text{ – матрица } n\times n, \quad \det A \neq 0, \quad B \text{ – вектор.}$$

Пусть $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, тогда

$$\widetilde{f}(x) = f(Ax+B) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

$$\left(\widetilde{f}(x), \varphi(x)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Ax+B)\varphi(x)dx. \tag{7}$$

Сделаем замену

$$y = Ax+B, \quad dy = |\det A|dx, \quad x = A^{-1}(y-B).$$

Тогда

$$(7) = \frac{1}{|\det A|} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi\left(A^{-1}(y-B)\right)dy = \frac{1}{|\det A|}\left(f(x), \varphi\left(A^{-1}(x-B)\right)\right).$$

Для любой (не только регулярной) $f \in\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ определим линейную замену переменной следующим образом:

$$(f(Ax+B), \varphi(x)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{|\det A|}\left(f(x), \varphi\left(A^{-1}(x-B)\right)\right).$$

Пример 2.2. Пусть $A = E$, $B = -C$. Тогда

$$(f(x-C), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+C)).$$

В частности, если $f(x) = \delta(x)$,

$$(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0).$$

Пример 2.3. Пусть $n = 1$. Тогда

$$(\delta(2x), \varphi(x)) = \frac{1}{2}\left(\delta(x), \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

При $n \geq 1$

$$(\delta(2x), \varphi(x)) = \frac{1}{2^n}\left(\delta(x), \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2^n}\varphi(0) = \frac{1}{2^n}(\delta(x), \varphi(x)).$$

Получаем, что

$$\delta(2x) = \frac{1}{2^n}\delta(x).$$

В общем случае, если $a \neq 0$,

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|^n}\delta(x).$$

Если $a = -1$, $n = 1$, то

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Дифференцирование

Последняя операция, которую рассмотрим – **дифференцирование обобщенной функции**.

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Определим

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

следующим образом:

$$(D^\alpha f, \varphi) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi). \tag{8}$$

Проверим корректность определения (8). Если

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Линейность $D^\alpha f$ очевидна. Если $\{\varphi_m\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такова, что

$$\varphi_m \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi, \quad m \to \infty$$

то

$$D^\alpha \varphi_m \overset{\mathcal{D}}{\to} D^\alpha \varphi, \quad m \to \infty$$

в силу (8), а значит, $D^\alpha f$ непрерывен. Отсюда $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Проверим, что определение (8) согласуется с регулярными обобщенными функциями.

Пусть регулярная обобщенная функция задается функцией $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$, то есть функцией, у которой определены $D^\alpha f$ $\forall$ α такого, что $|\alpha||leqN$.

Тогда $\forall$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f \varphi dx = \int\limits_{T_R^0} D^\alpha f \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{T_R^0} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi).$$

Здесь $\operatorname{supp} \varphi \subset T_R^0$. Итак, (8) верна для регулярных обобщенных функций.

Отметим, если $|\alpha| = 1$, (8) выглядит как

$$(f_{x_j}, \varphi) = -(f, \varphi_{x_j}) \;\forall\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad j = \overline{1, n}.$$

Пример 2.4. Пусть $n = 1$. Вычислим

$$(\delta'(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0).$$

Рассмотрим теперь

$$\delta(5x) = \frac{1}{5}\delta(x).$$

Тогда

$$\big((\delta(5x))', \varphi(x)\big) = -(\delta(5x), \varphi'(x)) = -\frac{1}{5}(\delta(x), \varphi'(x)) = -\frac{1}{5}\varphi'(0) = \left(\frac{1}{5}\delta'(x), \varphi(x)\right).$$

Отсюда

$$(\delta(5x))' = \frac{1}{5}\delta'(x).$$

Итак, от функции $\delta'(x)$ мы переходим к $\delta'(5x)$. По определению,

$$(\delta'(5x), \varphi(x)) = \frac{1}{5}\left(\delta'(x), \varphi\left(\frac{x}{5}\right)\right) = -\frac{1}{5}\left(\delta(x), \frac{1}{5}\varphi'\left(\frac{x}{5}\right)\right) = -\frac{1}{25}\varphi'(0) = \frac{1}{25}\left(\delta'(x), \varphi(x)\right).$$

Получаем, что

$$\delta'(5x) = \frac{1}{25}\delta'(x).$$

Итак, последовательность операций, совершаемых над обобщенными функциями, имеет значение.

Задача о дифференцировании разрывной функции

Пусть $n = 1$. Рассмотрим функцию

$$f \in C^1\left((x \le x_0) \cap (x \ge x_0)\right).$$

Заметим, что $f \notin C^1(\mathbb{R}^1)$, в точке x_0 f имеет разрыв первого рода (рис. 2.1). Скачок функции в точке x_0 обозначается

$$[f]\Big|_{x=x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0).$$

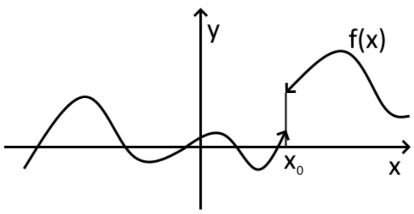


Рис. 2.1. График функции $f \in C^1\left((x \le x_0) \cap (x \ge x_0)\right)$

Заметим, что $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$. Обобщенная регулярная функция, порожденная f, дифференцируема, так как

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\left(f, D^\alpha \varphi\right).$$

Замечание 2.1. Результат $D^\alpha f$ для обобщенных функций не зависит от порядка, в котором вычисляются производные. Например,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f.$$

Это следует из определения (8), так как основные функции являются гладкими.

Вернемся к задаче. Оказывается, что f' как производная регулярной обобщенной функции имеет следующий вид.

Утверждение 2.1.

$$f' = \{f'\} + [f]\Big|_{x=x_0}\delta(x-x_0). \tag{9}$$

Здесь $\{f'\}$ – производная в смысле классической функции.

Доказательство. По определению,

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{-A}^{A} f(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{-A}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx -$$

$$-\int\limits_{x_0}^{A} f(x)\varphi'(x)dx = -f(x)\varphi(x)\Big|_{-A}^{x_0} + \int\limits_{-A}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{A} + \int\limits_{x_0}^{A} f'(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{-A}^{A} f'(x)\varphi(x)dx}_{(\{f'\},\varphi)} + \underbrace{\varphi(x_0)\left[f(x_0+0) - f(x_0-0)\right]}_{\varphi(x_0)[f]\big|_{x=x_0}}.$$

Итак, получили, что

$$(f',\varphi) = (\{f'\},\varphi) + [f]\Big|_{x_0}\left(\delta(x-x_0),\varphi(x)\right).$$

□

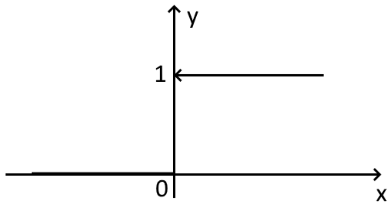


Рис. 2.2. График функции Хевисайда $\theta(x)$

Пример 2.5. Рассмотрим $\theta(x)$ – *функцию Хевисайда* (рис. 2.2):

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

По формуле (9) получаем, что

$$\theta'(x) = \delta(x-x_0).$$

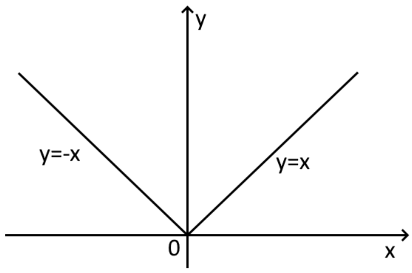


Рис. 2.3. График функции $|x|$

Пример 2.6. Рассмотрим функцию $|x|$ (рис. 2.3). Известно, что

$$|x|' = \mathrm{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{10}$$

По формуле (9) получим, что производная в обобщенном смысле совпадает с производной (10), так как скачок в $x = 0$ равен 0.

Вычислим

$$|x|'' = (\mathrm{sgn} x)' = 2\delta(x).$$

Для $k \geq 2$

$$|x|^{(k)} = 2\delta^{(k)}(x).$$

Задача

Покажем, что справедливо следующее равенство (в смысле $\mathcal{D}'$):

$$|\cos x| + |\cos x|'' = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{(2k+1)\pi}{2}\right). \tag{11}$$

Заметим, что в правой части (11) стоит обобщенная функция, определенная корректно:

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{(2k+1)\pi}{2}\right), \varphi(x)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \varphi(x_{k_1}) + \ldots + \varphi(x_{k_n}) < \infty,$$

так как φ – финитная функция, то есть

$$\mathrm{supp}\, \varphi \subset [-A, A].$$

$|\cos x|$ – π-периодическая функция, ее график имеет следующий вид (рис. 2.4). $|\cos x|$ имеет производную во всех точках, кроме точек вида

$$\frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{(2k+1)\pi}{2}.$$

Так как скачок $|\cos x|$ в этих точках равен 0, согласно (9) ее обобщенная производная совпадает с ее регулярной частью.

Воспользовавшись (9), вычислим $|\cos x|''$ (рис. 2.5). Из графиков $|\cos x|$ и $|\cos x|''$ видно, что при сложении этих функций регулярные части сокращаются. Отсюда и получаем (11).

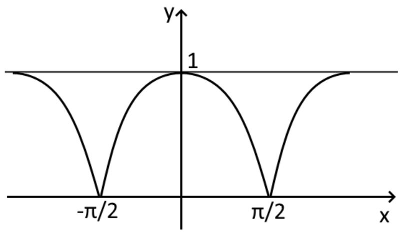


Рис. 2.4. График функции $|\cos(x)|$

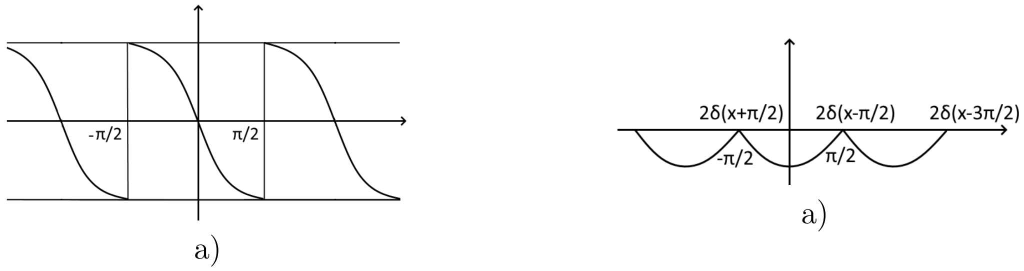


Рис. 2.5. Графики: a) $|\cos(x)|'$ и b) $|\cos(x)|''$

Семинар 3. Фундаментальное решение дифференциального оператора

Фундаментальное решение дифференциального оператора

Напомним, на первой лекции (лекционного курса) мы получили функцию, которую назвали фундаментальным решением оператора Лапласа.

На этом семинаре речь будет идти об обыкновенных дифференциальных операторах, линейных, разрешенных относительно старшей производной.

Будем обозначать *дифференциальный оператор порядка m, разрешенный относительно старшей производной*, через L:

$$Ly = y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0, \quad a_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{12}$$

Под *фундаментальным решением дифференциального оператора* будет пониматься решение уравнения

$$Ly = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака, $y \in \mathcal{D}'$. Фундаментальное решение, очевидно, не единственно. Пусть y_0 – решение уравнения

$$Ly_0 = 0.$$

Тогда $y + y_0$ также является фундаментальным решением дифференциального оператора. Действительно,

$$L(y + y_0) = Ly + Ly_0 = Ly = \delta(x).$$

Сделаем небольшое отступление.

1. Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(x)$ – функция Дирака. Тогда
$$a(x)\delta(x) \equiv a(0)\delta(x).$$
Вычислим также
$$(a(x)\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x), a(x)\varphi(x)) = -\big(\delta(x), (a(x)\varphi(x))'\big) =$$
$$= -(\delta(x), a'\varphi + a\varphi') = -(\delta(x), a'\varphi) - (\delta(x), a\varphi') = -a'(0)\varphi(0) - a(0)\varphi'(0) =$$
$$= -a'(0)\varphi(0) + (a(0), \delta'(x), \varphi(x)) = (-a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x), \varphi(x)).$$
Получаем, что
$$a(x)\delta'(x) = -a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x).$$

2. Убедимся, что для произведения гладкой и обобщенной функций верно правило Лейбница:
$$(a(x)f)' = a'f + af'. \tag{13}$$
Действительно,
$$\big((a(x)f)', \varphi\big) = -(af, \varphi') = -(f, a\varphi') = -(f, (a\varphi)') + (f, a'\varphi) =$$
$$= (af', \varphi) + (a'f, \varphi) = (af' + a'f, \varphi).$$

Решение однородного уравнения на обобщенных функциях

Рассмотрим уравнение
$$Ly = f, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{14}$$
Покажем, что у (14) не появляется новых решений при расширении пространства поиска до $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Достаточно обосновать это для случая, когда $f = 0$, поскольку решение (14) можно представить в виде
$$y = \widetilde{y} + y_0,$$
$$Ly_0 = f.$$
Итак, будем рассматривать
$$Ly = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{15}$$
Известно, что любое уравнение вида (15) можно свести к системе уравнений первого порядка. Обозначим
$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_m = y^{(m-1)}.$$
Если y – решение (15), то
$$Y = (y_1, \ldots, y_m)^T$$
– решение системы
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & \ldots - a_m & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Сокращенная запись:

$$Y' = AY \text{ в } \left(\mathcal{D}'(\mathbb{R})\right)^m. \tag{16}$$

Обозначим через Φ *фундаментальную матрицу* матрицу, столбцы которой образуют базисную систему решений:

$$\Phi = [Y_1, \ldots, Y_m].$$

Фундаментальная матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\Phi' = A\Phi.$$

Докажем, что (16) не имеет новых решений, от противного. Предположим, что $\exists$ $U \in \left(\mathcal{D}'(\mathbb{R})\right)^m$ такое, что

$$U' = AU. \tag{17}$$

Представим U в виде

$$U = \Phi W, \quad W \in \left(\mathcal{D}'(\mathbb{R})\right)^m.$$

Подставим $U = \Phi W$ в (17). Воспользовавшись правилом Лейбница (13), получим

$$\Phi' W + \Phi W' = A\Phi W. \tag{18}$$

Так как Φ является решением уравнения, получим, что $\Phi' W$ и $A\Phi W$ в (18) сократятся и

$$\Phi W = 0.$$

Так как Φ – фундаментальная матрица, она не может быть вырожденной, и значит,

$$W' = 0 \text{ в смысле } \left(\mathcal{D}'(\mathbb{R})\right)^m. \tag{19}$$

Отсюда $W = C$ (вектор из постоянных чисел). Отсюда любое такое U имеет вид

$$U = \Phi C, \quad C = (c_1, \ldots, c_m)^T,$$

и значит, является классическим решением (16) (бесконечно дифференцируемым).

Осталось показать, что все решения (19) действительно являются постоянными векторами. Достаточно показать это в скалярном случае:

$$y' = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{20}$$

Предположим, существует обобщенная функция y, удовлетворяющая (20). Тогда

$$0 = (y', \varphi) = -(y, \varphi'),$$

то есть равна 0 на всех основных функциях, которые являются производными основных функций:

$$(y, \varphi') = 0 \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{21}$$

Заметим, что $\psi = \varphi'$, $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \iff$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi dx = 0.$$

$\Rightarrow$ очевидно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi' dx = \int\limits_{-A}^{A} \varphi'(x) dx = 0.$$

$\Leftarrow$ Пусть $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ такова, что

$$(1, \psi) = 0.$$

Тогда положим

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(s) ds.$$

Гладкость $\varphi(x)$ очевидна. Покажем, почему $\varphi(x)$ финитна. Пусть

$$\operatorname{supp} \psi \subset [-A, A].$$

Тогда

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad x < -A,$$
$$\varphi(x) \equiv 0, \quad x > A.$$

Вернемся к (21). Обозначим через φ_0 функцию $\in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ такую, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1.$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ произвольна. Рассмотрим

$$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) ds \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{22}$$

С учетом выбора φ_0 получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(x) dx = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\widetilde{\varphi}(x) = \psi'(x),$$

а значит,

$$(y, \widetilde{\varphi}) = (y, \psi) = 0.$$

С учетом (22) получим

$$(y, \varphi) - (y, \varphi_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 0,$$

откуда получаем формулу для обобщенного решения (20):

$$(y,\varphi)=\underbrace{(y,\varphi_0)}_{\text{const}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\text{const}\varphi(x)dx=(\text{const},\varphi),$$

откуда $y\equiv\text{const}$. Итак, множество обобщенных решений (20) совпадает с множеством классических решений этого уравнения.

Нахождение фундаментального решения

Перейдем к нахождению фундаментального решения, то есть решения уравнения

$$Ly=\delta(x), \tag{23}$$

где дифференциальный оператор L имеет вид (12). Очевидно, среди решений (23) нет классических решений.

Воспользуемся следующим приемом. Будем искать решение (23), представленное в виде

$$y(x)=y_0(x)\theta(x), \tag{24}$$

где $y_0\in C^\infty(\mathbb{R})$, а $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Оказывается, что в качестве $y_0(x)$ можно взять решение задачи Коши:

$$\begin{cases}Ly_0=0, \quad x\in\mathbb{R}\\ y_0(0)=0, \quad y_0'(0)=0, \quad \ldots, \quad y_0^{(m-2)}(0)=0\\ y_0^{(m-1)}(0)=1\end{cases} \tag{25}$$

Напомним, такая задача имеет единственное решение $\in C^\infty(\mathbb{R})$. Покажем, что с y_0, которая является решением (25), обобщенная функция вида (24) будет являться решением (23).

Напомним, что

$$\theta'(x)=\delta(x).$$

Найдем производные (24) при помощи формулы Лейбница:

$$y'(x)=y_0'(x)\theta(x)+y_0(x)\theta'(x)=y_0'(x)\theta(x)+y_0(0)\delta(x)=y_0'(x)\theta(x),$$

$$y''(x)=y_0''(x)\theta(x)+y_0'(0)\delta(x)=y_0''(x)\theta(x)$$

и так далее. Наконец,

$$y^{(m-2)}(x)=y_0^{(m-2}(x)\theta(x).$$

Далее,

$$y^{(m-1)}(x)=y_0^{(m-1)}(x)\theta(x)+y_0^{(m-2)}(0)\delta(x)=y_0^{(m-1)}(x)\theta(x),$$

$$y^{(m)}(x)=y_0^{(m)}(x)\theta(x)+y_0^{(m-1)}(x)\delta(x)=y_0^{(m)}(x)\theta(x)+\delta(x).$$

Отсюда получаем, что

$$Ly=\underbrace{(Ly_0)}_{=0}\theta(x)+\delta(x)=\delta(x).$$

Итак, убедились, что (24) является фундаментальным решением (23). Любое другое фундаментальное решение этого уравнения может быть задано как

$$y = y_0\theta + g,$$

где g – произвольное решение однородного уравнения

$$Lg = 0,$$

то есть гладкая функция.

Пример 3.1. Пусть

$$Ly \equiv y'' + 4y.$$

Найдем фундаментальное решение оператора L, то есть решение

$$Ly = \delta(x)$$

по алгоритму, указанному выше. Для этого найдем решение y_0 задачи Коши

$$\begin{cases} y_0'' + 4y_0 = 0 \\ y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1 \end{cases}$$

Хорошо известно, что такое y_0 имеет вид

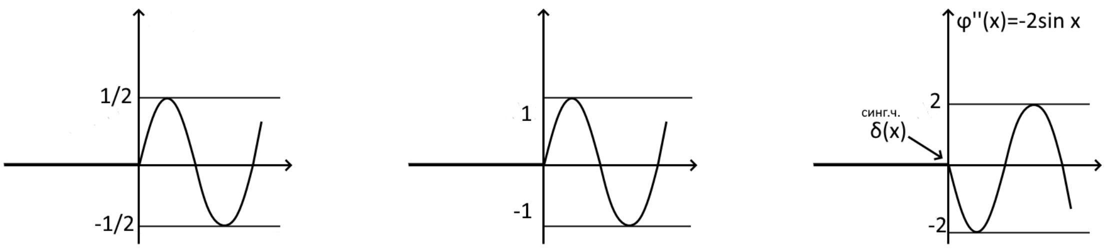
$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Из начальных условий получаем, что

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Окончательно получаем, что

$$y_0(x) = \frac{1}{2}\sin 2x.$$



a) b) c)

Рис. 3.1. Графики: a) $y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x\theta(x)$, b) $y'(x)$ и c) $y''(x)$

Фундаментальным решением L является π-периодическая функция

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x\theta(x) \tag{26}$$

(рис. 3.1 a). Убедимся графически, что такая $y(x)$ является решением

$$Ly = \delta(x).$$

Нарисуем график регулярной части производной $y'(x)$ (26) (рис. 3.1 b) и $y''(x)$ (рис. 3.1 c). Здесь

$$y''(x) = \{y'\} + \delta(x), \quad \{y'\} = -2\sin 2x.$$

Отсюда

$$Ly = -2\sin 2x + \delta(x) + 4\frac{1}{2}\sin 2x = \delta(x).$$

Обратим внимание, что (26) – не единственное фундаментальное решение. Построим еще несколько фундаментальных решений:

$$\widetilde{y}(x) = y(x) - \frac{1}{2}\sin 2x$$

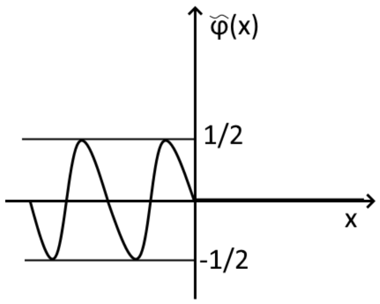
(рис. 3.2 a),

$$\widehat{y}(x) = \frac{1}{2}y(x) + \frac{1}{2}\widetilde{y}(x)$$

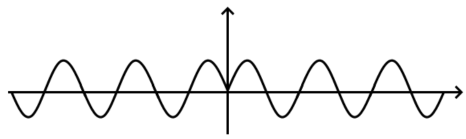
(рис. 3.2 b). Здесь, очевидно,

$$L\widetilde{y} = \delta(x), \quad L\widehat{y} = \delta(x).$$

Итак, мы можем получать разные по свойствам фундаментальные решения.



a)



a)

Рис. 3.2. Фундаментальные решения L

Семинар 4. Пространства Соболева

Обобщенная производная в смысле Соболева

Пространства Соболева предназначены для решения уравнений с частными производными и задач для таких уравнений. Большая часть материала читается в курсе функционального анализа.

В рамках курса будем говорить только о двух пространствах: $H^1(\Omega)$ и $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$, где под Ω на этом семинаре будет понимать ограниченную область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой (например, Липшецевой) границей.

Прежде, чем вводить определение пространств Соболева, вспомним определение обобщенной производной в смысле Соболева.

Определение 4.1. Функция $\omega_\alpha \in L_{1,\mathrm{loc}}$, называется *(обобщенной) производной в смысле Соболев* вида

$$\omega_\alpha = D^\alpha u$$

в области $\Omega \subset L_{1,\mathrm{loc}}$, $u \in L_{1,\mathrm{loc}}$, если выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \omega_\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \omega \alpha \varphi dx \ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Здесь

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

– мультииндекс, под записью $D^\alpha u$ понимается

$$D^\alpha u \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{27}$$

Из определения 4.1 следует, что порядок взятия производных в (27) не имеет значения.

Заметим, что обобщенная производная привязана не к точке пространства (как классическая производная), а к области.

Отметим следующие два факта, связанные с производными в смысле Соболева.

1. Пусть $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$,
$$u,\, v_j \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega),$$
$$v_j = u_{x_j} \text{ в } \Omega \tag{28}$$
(производная в смысле Соболева). Тогда (28) справедливо и в $\widetilde{\Omega}$.

   Это свойства является следствием того факта, что если $\varphi \in C_0^\infty\left(\widetilde{\Omega}\right)$, то можно построить $\widetilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$, положив
$$\widetilde{\varphi} \equiv 0 \text{ в } \Omega \setminus \widetilde{\Omega}.$$

2. Пусть $u \in C^1(\Omega)$. Тогда производные в классическом смысле $u_{x_j} \in C(\Omega)$, $j = \overline{1,n}$ являются производными в смысле Соболева в Ω. Этот факт следует из того, что
$$\int\limits_{\Omega} u_{x_j}\varphi dx = -\int\limits_{\Omega} u\varphi_{x_j}dx,$$
то есть производные u_{x_j} удовлетворяют определению 4.1.

Примеры

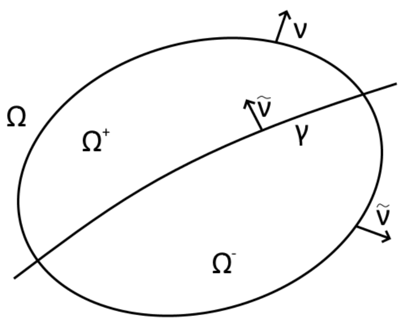


Рис. 4.1. Область Ω, поделенная на Ω^+ и Ω^- кривой γ

Пример 4.1. Пусть область Ω разделена на части Ω^+ и Ω^- кривой γ (рис. 4.1). Тогда
$$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \gamma.$$
Пусть
$$u \in C(\Omega) \cap C^1(\Omega^+ \cup \gamma) \cap C^1(\Omega^- \cup \gamma), \quad u \notin C^1(\Omega).$$
Покажем, что u имеет обобщенную производную в смысле Соболева в Ω вида u_{x_j}.

Во избежание путаницы обозначим обобщенную производную в смысле Соболева через $\{u_{x_j}\}$,
$$\{u_{x_j}\} = \begin{cases} u_{x_j}, & x \in \Omega^+ \\ u_{x_j}, & x \in \Omega^- \end{cases} \tag{29}$$
В силу интегрального характера определения 4.1 для (29) неважно, как именно задается $\{u_{x_j}\}$ на γ.

Убедимся в этом. Покажем, что
$$\int\limits_{\Omega} \{u_{x_j}\}\varphi dx = -\int\limits_{\Omega} u\varphi_{x_j}dx \ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{30}$$
Преобразуем правую часть (30):
$$-\int\limits_{\Omega} u\varphi_{x_j}dx \ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) = -\int\limits_{\Omega^+} u\varphi_{x_j}dx - \int\limits_{\Omega^-} u\varphi_{x_j}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega+} u_{x_j}\varphi dx - \int\limits_{\partial\Omega^+} u\varphi\nu_j ds + \int\limits_{\Omega^-} u_{x_j}\varphi dx - \int\limits_{\partial\Omega^-} u\varphi\widetilde{\nu}_j ds. \tag{31}$$

Здесь ν – вектор нормали ν к Ω^+, а $\widetilde{\nu}$ – к Ω^-,

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n), \quad \widetilde{\nu} = (\widetilde{\nu}_1, \dots, \widetilde{\nu}_n)\,,$$

$$\nu\Big|_\gamma = -\widetilde{\nu}\Big|_\gamma.$$

Каждый из интегралов $\int\limits_{\partial\Omega^+} \dots, \int\limits_{\partial\Omega^-}$ состоит из интеграла по соответствующему куску границы Ω и интеграла по γ. Так как φ – финитная функция, она равна 0 в окрестности $\partial\Omega$, откуда получаем, что

$$(31) = \int\limits_{\Omega+} u_{x_j}\varphi dx - \int\limits_{\gamma} u\varphi\nu_j ds + \int\limits_{\Omega^-} u_{x_j}\varphi dx - \int\limits_{\gamma} u\varphi(-\nu_j) ds = \int\limits_{\Omega} \{u_{x_j}\}\varphi dx.$$

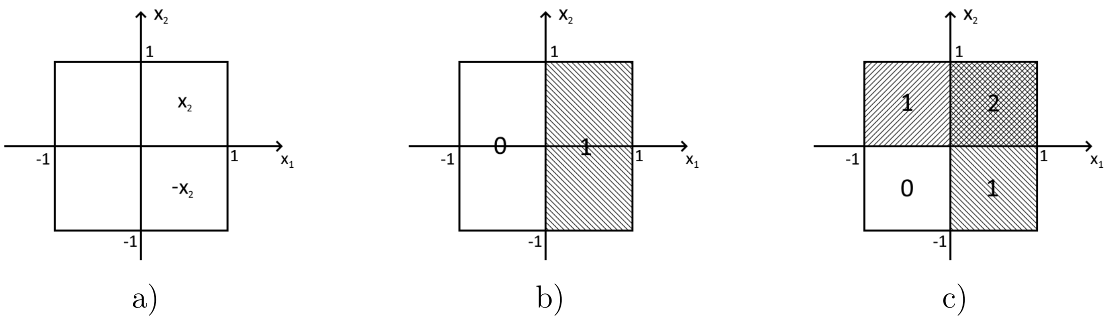


Рис. 4.2. Иллюстрации к конкретным примерам $u(x_1, x_2)$

Пример 4.2. Рассмотрим конкретный пример на утверждение примера 4.1. Пусть $n = 2$, $\Omega = (-1, 1)^2$,

$$u(x_1, x_2) = |x_2|$$

(рис. 4.2 a). По утверждению примеря 4.1 у функции u в Ω есть обобщенная производная в смысле Соболева,

$$\partial_{x_2}|x_2| = \mathrm{sgn} x_2,$$
$$\partial_{x_1}|x_2| = 0. \tag{32}$$

Проверим, что (32) верно, напрямую:

$$\int\limits_{\Omega} |x_2|\varphi_{x_1} dx_1 dx_2 = \int\limits_{-1}^{1} |x_2| \left(\int\limits_{-1}^{1} \varphi_{x_1} dx_1\right) dx_2 = \int\limits_{-1}^{1} |x_2| \underbrace{(\varphi_{x_1}(1, x_2) - \varphi_{x_1}(-1, x_2))}_{=0 \text{ т.к. } \varphi \in C_0^\infty} dx_2 = 0.$$

Заметим, что обобщенные производные в смысле Соболева обладают особенностью, которые отличают их от классических производных и обобщенных производных в смысле $\mathcal{D}'$. Функция из $L_{1,\mathrm{loc}}$ может иметь обобщенную производную в смысле Соболева высокого порядка и не иметь обобщенных производных в смысле Соболева низких порядков.

Пример 4.3. Пусть $\Omega = (-1,1)^2$,

$$u(x_1,x_2) = \theta(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 > 0 \\ 0, & x_1 \leq 0 \end{cases}$$

(рис. 4.2 b). Согласно рассуждениям выше, там, где функция u имеет классическую производную, она совпадает с производной в смысле Соболева. Это, очевидно, выполнено для областей $x_1 > 0$ и $x_1 \leq 0$ в Ω.

Заметим, что

$$\partial_{x_2}\theta(x_1) = 0.$$

Убедимся, что не существует производной в смысле Соболева на всем Ω, заданной как

$$\partial_{x_1}\theta(x_1) \tag{33}$$

Если бы такая производная в смысле Соболева существовали, мы бы ожидали, согласно рассуждениям выше, что она равна 0.

Предположим, что (33) существуют (и равны 0). Тогда бы выполнялось

$$0 = \int\limits_{\Omega} \theta(x_1)\partial_{x_1}\varphi dx_1 dx_2 \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отсюда

$$0 = \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 \partial_{x_1}\varphi dx_1 dx_2 = \int\limits_{-1}^1 \left(\int\limits_0^1 \partial_{x_1}\varphi(x_1,x_2)dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= -\int\limits_{-1}^1 \varphi(0,x_2)dx_2 \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

что, очевидно, неверно.

Пример 4.4. Построим пример функции, у которых есть смешанные приозводные второго порядка в смысле Соболева, но нет производных первого порядка в смысле Соболева.

Пусть $\Omega = (-1,1)^2$,

$$u(x_1,x_2) = \theta(x_1) + \theta(x_2)$$

(рис. 4.2 c). В силу примера 4.3 не существует

$$\partial_{x_1}u, \quad \partial_{x_2}u.$$

Покажем, что $\exists \ u_{x_1x_2}$ в смысле Соболева. Проверим, что выполняется

$$0 \stackrel{?}{=} \int\limits_{\Omega} u\varphi_{x_1x_2} dx_1 dx_2 \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Распишем

$$\int\limits_{\Omega} u\varphi_{x_1x_2}dx_1dx_2 = \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{1}\varphi_{x_1x_2}dx_1dx_2 + \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-1}^{0}\varphi_{x_1x_2}dx_1dx_2 + 2\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\varphi_{x_1x_2}dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{0}^{1}\varphi_{x_1x_2}dx_2\right)dx_1 + \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{0}\varphi_{x_1x_2}dx_2\right)dx_1 + 2\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1}\varphi_{x_1x_2}dx_2\right)dx_1 =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{0}\varphi_{x_1}(x_1,0)dx_1 + \int\limits_{0}^{1}\varphi_{x_1}(x_1,0)dx_1 - 2\int\limits_{0}^{1}\varphi_{x_1}(x_1,0)dx_1 =$$

$$= -\varphi(0,0) - \varphi(0,0) + 2\varphi(0,0) = 0.$$

Пространства Соболева

Напомним определение пространства Соболева из лекционного курса:

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \,|\, \exists \text{ обобщ. пр. в см. Соболева (в } \Omega\text{) вида } \partial_{x_j}u \in L^2(\Omega),\ j = \overline{1,n}\right\}. \tag{34}$$

Очевидно, $H^1(\Omega)$ является линейным пространством. Кроме того, на $H^1(\Omega)$ можно ввести структуру гильбертова пространства:

$$(u_1, u_2)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}(uv + <\nabla u, \nabla v>)\,dx. \tag{35}$$

Здесь ∇u – градиент, а $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение. Скалярное произведение (35) порождает норму

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u^2dx + \int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Перейдем к пространству $\overset{0}{H^1}(\Omega)$. Очевидно,

$$C_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega).$$

Введем

$$\overset{0}{H^1}(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$$

– подмножество $H^1(\Omega)$ такое, что $u \in \overset{0}{H^1}(\Omega) \iff \exists\ \{u_m\}_{m=1}^\infty,\ u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\|u_m - u\|_{H^1(\Omega)} \ \to\ 0, \quad m \to \infty.$$

Заметим, что вложение пространств строгое:

$$\overset{0}{H^1}(\Omega) \subset H^1(\Omega).$$

Например, функция

$$u \equiv 1$$

принадлежит $H^1(\Omega)$, но $\notin \overset{0}{H^1}(\Omega)$. Самым простым способом показать этот факт является применение неравенства Фридрихса.

Утверждение 4.1. *(Неравенство Фридрихса)* $\forall\ u \in \overset{0}{H^1}(\Omega)\ \exists\ C(\Omega) = const > 0$ *такая, что*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{36}$$

Применяя (36) к $u \equiv 1$, получим, что

$$\sqrt{\mathrm{Vol}(\Omega)} \leq 0.$$

Значит, наше предположение неверно и $1 \notin \overset{0}{H^1}(\Omega)$.

Примеры

Напомним важный пример, который был разобран на лекциях.

Пример 4.5. Рассмотрим функцию

$$u(x) = |x|^\alpha, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Требовалось выяснить, при каких значениях α $u(x) \in H^1(T_1^0)$, где T_1^0 – единичный шар с центром в начале координат. Ответом являются значения

$$\alpha > -\frac{n}{2} + 1 \text{ и } \alpha = 0. \tag{37}$$

Напомним, согласно определению (34), мы проверяли три факта о $|x|^\alpha$:

1. При каких α
$$|x|^\alpha \in L^2(T_1^0).$$
Заметим, что при больших n граница (37) становится отрицательной. Например, при $n = 3$
$$\alpha > -\frac{1}{2},$$
и у $|x|^\alpha$ появляются особенности в 0.

2. Напомним,
$$\nabla|x|^\alpha = \alpha|x|^{\alpha-1}\nabla|x| = \alpha|x|^{\alpha-1}\frac{x}{|x|}.$$
Требуется проверить, что
$$|\nabla|x|^\alpha| = \alpha|x|^{\alpha-1} \in L^2(T_1^0).$$

3. Остается проверить, что производная
$$\partial_{x_j}|x|^\alpha = \alpha|x|^{\alpha-1}\frac{x_j}{|x|}$$
является обобщенной производной в смысле Соболева в T_1^0.

Разберем похожий пример.

Пример 4.6. Рассмотрим функцию
$$u(x) = (\sin|x|)^\alpha\,, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
на шаре T_1^0 и шаре T_π^0. Требуется выяснить, при каких значениях α $u(x)$ является элементом H^1 на соответствующем шаре.

Разница между T_1^0 и T_π^0 состоит в следующем. В T_1^0 $u(x)$ имеет особенность только в начале координат $x=0$. В случае T_π^0 особенность в начале координат сохраняется, но к ней добавляется еще особенность на границе шара ($|x|=\pi$).

Рассмотрим сначала случай T_1^0. Известно, что
$$\sin|x| \sim |x|$$
в окрестности $x=0$, поэтому ответ будет аналогичен (37). Убедимся в этом по пунктам (как в случае примера 4.5).

1. Выясним, при каких α
$$\int\limits_{T_1^0} (\sin|x|)^{2\alpha}\,dx < \infty.$$
Это выполнено $\iff$
$$\int\limits_{T_1^0} |x|^{2\alpha}dx < \infty.$$
Перейдя к сферическим координатам, получим
$$\int\limits_{T_1^0} |x|^{2\alpha}dx = \omega_n\int\limits_0^1 r^{2\alpha}r^{n-1}dr.$$
Здесь ω_n – площадь поверхности единичной сферы. Такой интеграл конечен при
$$2\alpha + n > 0,$$
то есть
$$\alpha > -\frac{n}{2}.$$

2. Вычислим
$$\nabla\left(\sin|x|\right)^{\alpha} = \alpha\left(\sin|x|\right)^{\alpha-1}\cos|x|\frac{x}{|x|}.$$
Тогда
$$|\nabla\left(\sin|x|\right)^{\alpha}| = \alpha\left(\sin|x|\right)^{\alpha-1}\cos|x| \in L^2(T_1^0),$$
если
$$\alpha^2\int\limits_{T_1^0}\left(\sin|x|\right)^{2\alpha-2}\cos^2|x|dx < \infty.$$
Неравенство выше верно $\iff$
$$\int\limits_{T_1^0}|x|^{2\alpha-2}dx < \infty,$$
то есть
$$2\alpha-2 > -n,$$
откуда
$$\alpha > -\frac{n}{2}+1.$$

3. Покажем, наконец, что
$$\partial_{x_j}\left(\sin|x|\right)^{\alpha} = \alpha\left(\sin|x|\right)^{\alpha-1}\cos|x|\frac{x_j}{|x|}$$
являтеся обобщенной производной в смысле Соболева на T_1^0. Убедимся, что при
$$\alpha > -\frac{n}{2}+1$$
верно
$$\alpha\int\limits_{T_1^0}\left(\sin|x|\right)^{\alpha-1}\cos|x|\frac{x_j}{|x|}\varphi(x)dx \stackrel{?}{=} -\int\limits_{T_1^0}\left(\sin|x|\right)^{\alpha}\partial_{x_j}\varphi dx \ \forall\ \varphi\in C_0^{\infty}(T_1^0).$$

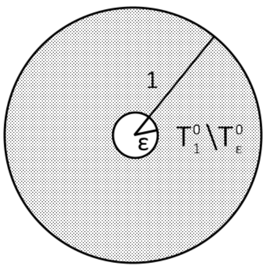


Рис. 4.3. Область $T_1^0\setminus T_\varepsilon^0$

Распишем
$$-\int\limits_{T_1^0}\left(\sin|x|\right)^{\alpha}\partial_{x_j}\varphi dx = -\int\limits_{T_1^0}\left(\sin|x|\right)^{\alpha}\partial_{x_j}\varphi dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{T_1^0\setminus\overline{T_\varepsilon^0}}\left(\sin|x|\right)^{\alpha}\partial_{x_j}\varphi dx.$$

(рис. 4.3). Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_{T_1^0\setminus\overline{T_\varepsilon^0}} (\sin|x|)^\alpha\,\partial_{x_j}\varphi dx =$$

$$= -\alpha \int\limits_{T_1^0\setminus\overline{T_\varepsilon^0}} (\sin|x|)^{\alpha-1}\cos|x|\frac{x_j}{|x|}\varphi(x)dx + \int\limits_{S_\varepsilon^0}(\sin|x|)^\alpha\,\varphi(x)\nu_j(x)ds. \tag{38}$$

Здесь S_ε^0 – граница шара T_ε^0, а $\nu(x)$ – вектор нормали в точке x. При стремлении $\varepsilon\to 0$ получим, что

$$(38) \;\to\; -\alpha\int\limits_{T_1^0}(\sin|x|)^{\alpha-1}\cos|x|\frac{x_j}{|x|}\varphi(x)dx + 0.$$

Действительно,

$$\int\limits_{S_\varepsilon^0}(\sin|x|)^\alpha\,\varphi(x)\nu_j(x)ds = (\sin\varepsilon)^\alpha\left|\int\limits_{S_\varepsilon^0}\varphi(x)\nu_j(x)ds\right| \le$$

$$\le \max_{\overline{T_1^0}}|\varphi(x)|\underbrace{(\sin\varepsilon)^\alpha}_{\sim\varepsilon^\alpha}\varepsilon^{n-1} \;\to\; 0, \;\; \varepsilon\;\to\;0.$$

Перейдем к случаю T_π^0. Выясним, при каких α $u(x)\in H^1(T_\pi^0)$.

1. Выясним, когда

$$\int\limits_{T_\pi^0}(\sin|x|)^{2\alpha}\,dx<\infty.$$

Распишем

$$\int\limits_{T_\pi^0}(\sin|x|)^{2\alpha}\,dx = \int\limits_{T_\pi^\varepsilon}(\sin|x|)^{2\alpha}\,dx + \int\limits_{T_{\pi-\varepsilon}^0\setminus\overline{T_\varepsilon^0}}(\sin|x|)^{2\alpha}\,dx + \int\limits_{T_\pi^0\setminus\overline{T_{\pi-\varepsilon}^0}}(\sin|x|)^{2\alpha}\,dx. \tag{39}$$

Первый из интегралов (39) сходится при $2\alpha>-n$, то есть

$$\alpha>-\frac{n}{2}.$$

Второй из интегралов сходится всегда. Рассмотрим отдельно

$$\int\limits_{T_\pi^0\setminus\overline{T_{\pi-\varepsilon}^0}}(\sin|x|)^{2\alpha}\,dx = \int\limits_{T_\pi^0\setminus\overline{T_{\pi-\varepsilon}^0}}(\sin(\pi-|x|))^{2\alpha}\,dx<\infty$$

тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{T_\pi^0\setminus\overline{T_{\pi-\varepsilon}^0}}(\pi-|x|)^{2\alpha}\,dx<\infty.$$

Переходя к сферическим координатам, получим, что необходимо, чтобы

$$\int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\pi} (\pi - r)^{2\alpha} r^{n-1} dr < \infty.$$

Заменив $\pi - r = \rho$, получим известный интеграл

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \rho^{2\alpha} (\pi - \rho)^{n-1} d\rho,$$

который сходится при $2\alpha + 1 > 0$, то есть

$$\alpha > -\frac{1}{2}.$$

Итак, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\alpha > -\frac{1}{2} \text{ и } \alpha > -\frac{n}{2},$$

откуда получаем окончательно, что

$$\alpha > -\frac{1}{2}.$$

2. Выясним, при каких α
$$|\nabla (\sin|x|)^{\alpha}| \in L^2(T_{\pi}^0).$$
Напомним,
$$|\nabla (\sin|x|)^{\alpha}| = \alpha (\sin|x|)^{\alpha-1} \cos|x|.$$
Найдем, когда сходится
$$\alpha^2 \int\limits_{T_{\pi}^0} (\sin|x|)^{2\alpha-2} \cos^2|x| dx.$$
Аналогично пункту 1, разобъем этот интеграл в сумму трех. Здесь
$$\int\limits_{T_{\varepsilon}^0} (\sin|x|)^{2\alpha-2} \cos^2|x| dx$$
тогда и только тогда, когда
$$\int\limits_{T_{\varepsilon}^0} |x|^{2\alpha-2} dx,$$
откуда $2\alpha - 2 > -n$, то есть
$$\alpha > -\frac{n}{2} + 1.$$

Интеграл по $T^0_{\pi-\varepsilon} \setminus \overline{T_\varepsilon}^0$ сходится при $\forall\ \alpha$. Наконец,

$$\int\limits_{T^0_\pi \setminus T^0_{\varepsilon-\pi}} (\sin|x|)^{2\alpha-2}\cos^2|x|dx < \infty$$

тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\pi} (\pi - r)^{2\alpha-2} r^{n-1} dr < \infty,$$

что эквивалетно сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\pi \rho^{2\alpha-1}(\pi-\rho)^{n-1}d\rho.$$

Это верно при

$$2\alpha - 2 > -1,$$

откуда

$$\alpha > \frac{1}{2}.$$

Итак, $(\sin|x|)^\alpha \in H^1(T^0_\pi) \iff \alpha > 1/2$.

Семинар 5. Пространства Соболева (продолжение)

Задача

Продолжим обсуждение пространств Соболева. Напомним, на прошлом семинаре был получен следующий результат:

$$(\sin|x|)^\alpha \in H^1(T^0_\pi) \iff (\alpha > 1/2) \cup (\alpha = 0).$$

Напомним, на $H^1(\Omega)$ скалярное произведение вводится как

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega uv dx + \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

Далее будем рассматривать $\alpha > 1/2$. Выясним, верно ли, что при таких α

$$(\sin|x|)^\alpha \in \overset{0}{H}{}^1(T^0_\pi).$$

Напомним,

$$u \in \overset{0}{H}{}^1(T^0_\pi)$$

тогда и только тогда, когда $\exists$ последовательность $u_m(x)$, $u_m \in C_0^\infty(T^0_\pi)$, такая, что

$$\|u_m - u\|_{H^1(T^0_\pi)} \to 0, \quad m \to \infty. \tag{40}$$

Заметим, что $\overset{0}{H}{}^1(T^0_\pi)$ является гильбертовым пространством, так как $\overset{0}{H}{}^1(T^0_\pi)$ – замкнутое подпространство гильбертова пространства $H^1(T^0_\pi)$.

Напомним **неравенство Фридрихса**: $\forall\ u \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Неравенство Фридрихса позволяет ввести на $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ норму, эквивалетную норме $H^1(\Omega)$:

$$(u,v)_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Вернемся к вопросу, верно ли при $\alpha > 1/2$

$$(\sin|x|)^\alpha \in \overset{0}{H}{}^1(T^0_\pi).$$

Построим $u_m(x)$, $u_m \in C_0^\infty(T^0_\pi)$ такую, что верно (40) для

$$u(x) = (\sin|x|)^\alpha.$$

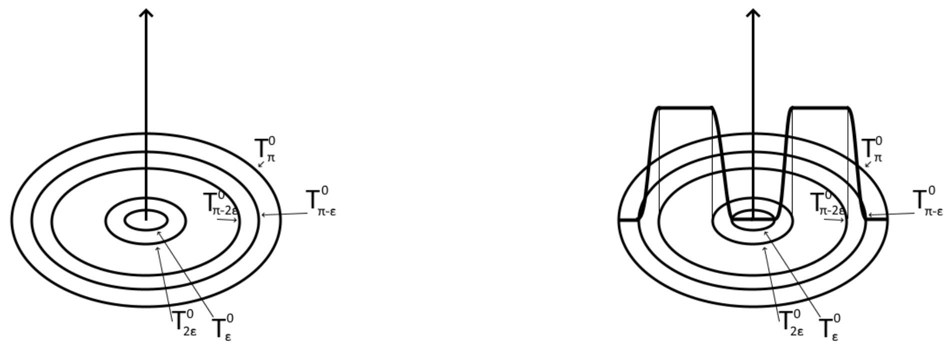


Рис. 5.1. a) Шары $T^0_{\pi-\varepsilon}$, $T^0_{\pi-2\varepsilon}$, T^0_ε и $T^0_{2\varepsilon}$ и b) $\varphi_\varepsilon(x)$ на T^0_π

Обратим внимание, что при $\alpha > 1/2$ ∇u имеет особенности в T^0_π.

Пусть $\varepsilon > 0$. Помимо T^0_π, рассмотрим шары $T^0_{\pi-\varepsilon}$, $T^0_{\pi-2\varepsilon}$, T^0_ε и $T^0_{2\varepsilon}$ (рис. **??**).

Построим $\varphi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(T^0_\pi)$,

$$0 \le \varphi_\varepsilon \le 1,$$

следующим образом:

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} 1, & 2\varepsilon < |x| < \pi - 2\varepsilon \\ 0, & \{\pi-\varepsilon \le |x| \le \pi\} \cup \{|x| \le \varepsilon\} \end{cases}$$

а вне указанных выше множеств $\varphi_\varepsilon(x)$ гладко меняется (рис. **??**). Известно, что существует такая последовательность $\varphi_\varepsilon(x)$,

$$|\nabla\varphi_\varepsilon| \le \frac{C}{\varepsilon}\ \forall\ x \in T^0_\pi.$$

Здесь $C = \mathrm{const} > 0$ не зависит от ε.

Обозначим

$$f(x) = (\sin|x|)^\alpha.$$

Рассмотрим последовательность

$$f_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x) f(x) \in C_0^\infty(T^0_\pi).$$

Выясним, выполняется ли

$$\|f_\varepsilon - f\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(T^0_\pi)} \xrightarrow{?} 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Распишем

$$\|f_\varepsilon - f\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(T^0_\pi)} = \|\nabla\left(f(x)\left(1-\varphi_\varepsilon(x)\right)\right)\|_{L^2(T^0_\pi)} =$$

$$= \int\limits_{T^0_{2\varepsilon}} |f(x)\left(1-\varphi_\varepsilon(x)\right)|^2\,dx + \int\limits_{T^0_\pi \setminus T^0_{\pi-2\varepsilon}} |f(x)\left(1-\varphi_\varepsilon(x)\right)|^2\,dx. \tag{41}$$

Оценим

$$|f(x)\,(1-\varphi_\varepsilon(x))|^2 \le (|\nabla f|(1-\varphi_\varepsilon)+|f||\nabla\varphi_\varepsilon|)^2 \le$$
$$\le 2|\nabla f|^2(1-\varphi_\varepsilon)+2|f|^2|\nabla\varphi_\varepsilon|^2.$$

Тогда

$$(41) \le \underbrace{2\int\limits_{T^0_{2\varepsilon}} |\nabla(\sin|x|)^\alpha|^2\,(1-\varphi_\varepsilon)^2\,dx}_{I_1} + \underbrace{2\int\limits_{T^0_{2\varepsilon}} |\sin|x||^{2\alpha}\,|\nabla\varphi_\varepsilon|^2 dx}_{I_2} +$$

$$+\underbrace{2\int\limits_{T^0_\pi\setminus\overline{T^0_{\pi-2\varepsilon}}} |\nabla(\sin|x|)^\alpha|^2\,(1-\varphi_\varepsilon)^2\,dx}_{I_3} + \underbrace{2\int\limits_{T^0_\pi\setminus\overline{T^0_{\pi-2\varepsilon}}} |\sin|x||^{2\alpha}\,|\nabla\varphi_\varepsilon|^2 dx}_{I_4}. \qquad (42)$$

Оценим четыре интеграла из суммы (42). Во-первых,

$$I_4 \le \frac{C}{\varepsilon^2}\int\limits_{T^0_{\pi-\varepsilon}\setminus\overline{T^0_{\pi-2\varepsilon}}} (\sin|x|)^{2\alpha}\,dx \le \frac{K_1}{\varepsilon^2}\varepsilon^{2\alpha}\varepsilon = K_1\varepsilon^{2\alpha-1},$$

так как

$$(\sin|x|)^{2\alpha} = (\sin(\pi-|x|))^{2\alpha} \sim K\varepsilon^{2\alpha},$$
$$\left|T^0_{\pi-\varepsilon}\setminus\overline{T^0_{\pi-2\varepsilon}}\right| = \mathrm{const}\varepsilon.$$

В силу условия $\alpha > 1/2$ получаем, что

$$I_4 \;\to\; 0,\quad \varepsilon \;\to\; 0.$$

Далее, оценим I_3. Напомним,

$$|\nabla(\sin|x|)^\alpha| = \alpha\,(\sin|x|)^{\alpha-1}\,|\cos|x|| = \alpha\,(\sin(\pi-|x|))^{\alpha-1}\,|\cos|x||\,.$$

Тогда

$$I_3 \le \alpha^2 C\int\limits_{T^0_\pi\setminus\overline{T^0_{\pi-2\varepsilon}}} (\pi-|x|)^{2\alpha-2}\,dx = \omega_n\int\limits_{\pi-2\varepsilon}^{\pi} (\pi-r)^{2\alpha-2}\,r^{n-1}dr =$$

$$= \omega_n\int\limits_0^{2\varepsilon} \rho^{2\alpha-2}(\pi-\rho)^{n-1}d\rho \le C_0(2\varepsilon)^{2\alpha-1} \;\to\; 0,\quad \varepsilon \;\to\; 0.$$

Напомним, здесь $\rho = \pi - r$, ω_n – площадь поверхности единичной сферы.

Теперь оценим

$$I_2 \le \frac{C}{\varepsilon^2}\int\limits_{T^0_{2\varepsilon}\setminus\overline{T^0_\varepsilon}} (\sin|x|)^{2\alpha}\,dx \le C_0\varepsilon^{-2}\varepsilon^n\varepsilon^{2\alpha} = C_0\varepsilon^{2\alpha-2+n} \;\to\; 0,\quad \varepsilon \;\to\; 0.$$

Наконец, оценим I_1. В окрестности точки 0 он эквивалентен интегралу

$$\int\limits_{T^0_{2\varepsilon}} (\sin|x|)^{2\alpha-2}\,dx \le K\varepsilon^{2\alpha-2+n} \;\to\; 0, \quad \varepsilon \;\to\; 0.$$

Итак, мы убедились, что

$$(\sin|x|)^{\alpha} \in \overset{0}{H}{}^{1}(T^0_{\pi}).$$

Пространство Соболева ($n=1$)

Прежде, чем перейти к краевым задачам в пространстве Соболева, рассмотрим пространство $\overset{0}{H}{}^{1}(a,b)$ $(n=1)$.

Покажем, что $\forall\ u \in \overset{0}{H}{}^{1}(a,b)\ \exists\ \widetilde{u} \in C[a,b]$ – непрерывная версия u,

$$\widetilde{u}(a) = \widetilde{u}(b) = 0.$$

По определению $\overset{0}{H}{}^{1}(a,b)$, $\exists$ последовательность $\{u_m(x)\}$, $u_m \in C_0^\infty[a,b]$ такая, что

$$\|u_m - u\|_{\overset{0}{H}{}^{1}(a,b)} \;\to\; 0, \quad m \;\to\; 0.$$

Отсюда u_m – фундаментальная в $\overset{0}{H}{}^{1}(a,b)$, то есть

$$\|u_m - u_s\|_{\overset{0}{H}{}^{1}(a,b)} = \|u'_m - u'_s\|_{L^2(a,b)} \;\to\; 0, \quad m,s \;\to\; \infty.$$

Тогда для

$$u_m(x) - u_s(x) = \int\limits_a^b (u'_m(t) - u'_s(t))\,dt$$

получаем

$$|u_m(t) - u_s(t)| \le \int\limits_a^b |u'_m(x) - u'_s(t)|\,dx \le \sqrt{b-a}\left(\int\limits_a^b |u'_m - u'_s|^2\,dx\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{b-a}\|u'_m - u'_s\|_{L^2(a,b)}.$$

Отсюда

$$\max_{x\in[a,b]} |u_m(x) - u_s(x)| \le \sqrt{b-a}\|u'_m - u'_s\|_{L^2(a,b)} \;\to\; 0, \quad m,s \;\to\; 0.$$

Применив критерий Коши, получим, что

$$u_m \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \widetilde{u}, \quad m \;\to\; \infty.$$

Заметим, что $\widetilde{u} \in C[a,b]$,
$$\widetilde{u}(a) = \widetilde{u}(b) = 0.$$

Оценим
$$\|\widetilde{u} - u\|_{L^2(a,b)} \le \|\widetilde{u} - u_m\|_{L^2(a,b)} + \|u_m - u\|_{L^2(a,b)} \ \to \ 0, \quad m \ \to \ \infty,$$
откуда u совпадает с $\widetilde{u}$ почти всюду.

Пример 5.1. Рассмотрим
$$u(x) = \sqrt{1-x^2} \text{ на } [-1,1].$$
Здесь $u(x) \in C[-1,1]$,
$$u(-1) = u(1) = 0,$$
но $u \notin \overset{0}{H}{}^1(-1,1)$. Более того, $u \notin H^1(-1,1)$. В противном бы случае выполнялось
$$\int\limits_{-1}^{1} (u')^2 dx < \infty.$$
То, что это неверно, следует из представления
$$u' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (u')^2 = \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} - 1.$$

Задача Дирихле для оператора Лапласа

Перейдем к решению краевых задач в пространствах Соболева.

Напомним постановку **задачи Дирихле для оператора Лапласа с нулевыми краевыми условиями**:
$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{43}$$
Напомним, в общем случае краевое условие имело бы вид
$$u = \varphi, \quad x \in \partial\Omega.$$
Под *классическим решением* задачи (43) понималась функция
$$u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right),$$
где
$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$
Здесь $f \in C(\Omega)$.

Под *обобщенным решением* задачи Дирихле для оператора Лапласа будем понимать функцию $u \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ такую, что для нее выполняется интегральное тождество

$$(u,v)_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} = (f,v)_{L^2(\Omega)} \ \forall\ v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega). \tag{44}$$

Напомним, здесь

$$(u,v)_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

а $f \in L^2(\Omega)$.

Заметим, что дифференциальная формулировка задачи (43) подразумевает наличие вторых производных, а принадлежность функции пространству $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ этого не гарантирует. Для обобщенных решений (решений в пространстве Соболева) используется запись (44). Здесь условие $u = 0$ на $\partial\Omega$ заменяется 0 в записи $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$.

Напомним следующий факт из лекционного курса. Пусть $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Тогда такое u удовлетворяет интегральному тождеству (44).

Напомним вариационную задачу и вариационный метод решения (44) в обобщенном смысле.

Рассмотрим пространство $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ и функционал

$$E: \ \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \ \to \ \mathbb{R},$$

$$E(u) = \|u\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + 2(f,u)_{L^2(\Omega)}, \quad f \in L^2(\Omega).$$

Рассмотрим задачу

$$E \ \to \min_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)}.$$

$\exists!\ u \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ такая, что

$$E(u) = \max_{v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)} E(v). \tag{45}$$

Вариационный смысл решения задачи Дирихле состоит в том, что u, удовлетворяющая (45), является обобщенным решением задачи Дирихле для оператора Лапласа.

Напомним рассуждения из лекционного курса. Пусть u удовлетворяет (45). Рассмотрим для $\forall\ v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$

$$E(u+tv) = \|u+tv\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + 2(f,u+tv)_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \|u\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + 2t(u,v)_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + t^2\|v\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + 2(f,u)_{L^2(\Omega)} + 2t(f,v)_{L^2(\Omega)}.$$

Заметим, что $E(u+tv) = P(t)$ – полином второй степени от t:

$$P(t) = t^2\|v\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + 2t\left((u,v)_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + (f,v)_{L^2(\Omega)}\right) + \|u\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + 2(f,u)_{L^2(\Omega)}.$$

Известно, что

$$P(0) = \min P(t),$$

откуда

$$P'(0) = 0.$$

Это эквивалентно тому, что

$$(u, v)_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + (f, v)_{L^2(\Omega)} = 0 \ \forall \ v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega).$$

Получаем (43) с точностью до знака.

Семинар 6. Вариационная постановка задачи Дирихле. Нахождение $\min$ функционала энергии

Постановка задачи Дирихле

Продолжим обсуждать вариационный метод решения задачи Дирихле. Напомним, задача Дирихле для уравнения Лапласа ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega \\ u = \varphi \text{ на } \partial\Omega \end{cases} \tag{46}$$

Рассматривалось два решения задачи (46). Функция

$$u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right),$$

поточечно удовлетворяющая уравнению (46) и принимающая соответствующие граничные значения, является классическим решением. В классической постановке, как правило, считается, что $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Сформулируем более простой частный случай, которые будем рассматривать сегодня:

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \end{cases} \tag{47}$$

Под обобщенным решением задачи (47) мы понимаем $u \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$, такую, что для $\forall\ v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$(u, v)_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + (f, v)_{L^2(\Omega)} = 0\ \forall\ v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega). \tag{48}$$

Отметим, что, говоря об обобщенной постановке задачи (47), f мы рассматриваем из $L^2(\Omega)$.

Напомним, в $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ скалярное произведение имеет вид

$$(u, v)_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

Заметим, что, обсуждая обобщенное решение задачи Дирихле, задача (47) будет иметься в виду как (48).

Напомним понятие $\min$ интеграла энергии. Рассмотрим $H^1(\Omega)$ и H – замкнутое подпространство $H^1(\Omega)$. В H подразумевается наличие скалярного произведения, эквивалентного скалярному произведению (как эквивалетность норм) в $H^1(\Omega)$.

Рассматривается функционал

$$E:\ \overset{0}{H}{}^1(\Omega)\ \to\ \mathbb{R},$$

$$E(u) = \|u\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} + 2(f,u)_{L^2(\Omega)}.$$

Здесь $f \in L^2(\Omega)$. Наконец, рассматривается задача его минимизации

$$E(u) \ \to \ \min_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} . \tag{49}$$

Известно, что $\exists !$ элемент $u_0 \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ такой, что

$$E(u_0) = \min_{v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)} E(v),$$

то есть

$$(u_0, v)_H + (f, v)_{L^2(\Omega)} = 0 \ \forall \ v \in H.$$

Возьмем в качестве H пространство $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$, в качестве скаялрного произведения рассмотрим

$$(u,v)_H = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \ \ \forall \ u, v \in H.$$

Тогда такое u_0 и является обобщенным решением задачи (46).

Задача (49) называется *вариационной постановкой задачи (46).*

Задачи

Задача 6.1. *(19.20 из сборника задач по уравнениям математической физики под редакцией В.С. Владимирова) Требуется найти* $v_0 \in \overset{0}{H}{}^1(0,1)$ *такую, что*

$$E(v_0) = \min_{v \in \overset{0}{H}{}^1(0,1)} E(v),$$

где

$$E(v) = \int\limits_0^1 \left((v')^2 + v^2\right) + 2\int\limits_0^1 v dx. \tag{50}$$

Решение. Заметим, что первое слагаемое в (50) является квадратом нормы на $H^1(0,1)$, а второе – скалярным произведением $(1,v)_{L^2(0,1)}$.

Поймем, как выглядит задача Дирихле. Требуется найти v_0 такую, чтобы она удовлетворяла следующему интегральному тождеству:

$$(v_0', v')_{L^2(0,1)} + (v_0, v)_{L^2(0,1)} + (1, v)_{L^2(0,1)} = 0 \ \forall \ v \in \overset{0}{H}{}^1(0,1).$$

Предполагая, что v_0' обладает достаточной гладкостью, перебросим производную с v_0' на v' в выражении выше:

$$\int\limits_0^1 \left(-v_0'' + v_0 + 1\right) v dx = 0 \ \forall \ v \in \overset{0}{}{}^1(0,1).$$

В силу плотности $\overset{0}{H}{}^1(0,1)$ получаем, что

$$\begin{cases} -v_0'' + v_0 + 1 = 0 \text{ почти всюду на } (0,1) \\ v_0(0) = v_0(1) = 0 \end{cases} \tag{51}$$

Итак, функционал, на котором достигается минимум (50), является обобщенным решением задачи (51).

Перепишем (51) как

$$\begin{cases} v_0'' - v_0 = 1 \text{ почти всюду на } (0,1) \\ v_0(0) = v_0(1) = 0 \end{cases}$$

Частным решением уравнения

$$v_0'' - v_0 = 1 \tag{52}$$

является

$$(v_0)_{\text{ч.}} = -1.$$

Найдем общее решение однородного уравнения

$$v_0'' - v_0 = 0.$$

Для этого решим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

откуда $\lambda = \pm 1$. Отсюда

$$v_{\text{о.}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Итак, общее решение (52) имеет вид

$$v_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1.$$

Найдем C_1 и C_2. Из начальных условий (51) получаем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 e + C_2 e^{-1} = 1 \end{cases}$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{e-1}{e-e^{-1}} = \frac{e}{1+e}, \quad C_1 = \frac{1-e^{-1}}{e-e^{-1}} = \frac{1}{1+e}.$$

Получаем, что

$$v_0(x) = \frac{e^x}{1+e} + \frac{e^{1-x}}{1+e} - 1. \tag{53}$$

Наконец, преобразуем (53):

$$v_0(x) = \frac{2\sqrt{e}\left(e^{x-1/2} + e^{-(x-1/2)}\right)}{2(1+e)} - 1 = \frac{2\sqrt{e}\,\mathrm{ch}(x-1/2)}{1+e} - 1.$$

Задача 6.2. *(19.35 из сборника задач по уравнениям математической физики под редакцией В.С. Владимирова) Доказать, что для* $u \in \overset{0}{H}{}^1(|x|<1)$, $n=3$ *верно*

$$\int\limits_{|x|<1} \left(|\nabla u|^2 + u\right) dx \geq -\frac{\pi}{45}. \tag{54}$$

Решение. Рассмотрим на $\{|x|<1\} = T_1^0$ функционал

$$E(u) = \int\limits_{T_1^0} \left(|\nabla u|^2 + u\right) dx. \tag{55}$$

Будем решать задачу

$$E(u) \;\to\; \min_{\overset{0}{H}{}^1(T_1^0)}.$$

По-другому (55) можно записать как

$$E(u) = \|u\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(T_1^0)} + 2\,(1/2, u)_{L^0(T_1^0)}. \tag{56}$$

Функция, на которой (57) достигает своего минимума, является решением задачи Дирихле. Соответствующее интегральное тождество имеет вид

$$(\nabla u, \nabla v)_{\overset{0}{H}{}^1(T_1^0)} + (1/2, v)_{L^2(T_1^0)} = 0 \;\forall\; v \in \overset{0}{H}{}^1(T_1^0).$$

Тогда задача Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 1/2, \quad x \in T_1^0 \\ u = 0 \text{ на } S_1^0 \end{cases}$$

Заметим, что здесь правая часть уравнения и краевые условия являются const, а значит, не зависят от угловых координат на сфере. Поэтому

$$u(x_1, x_2, x_3) = v_0(r).$$

Вспомним, что

$$\Delta v_0(r) = v_0'' + \frac{2}{r} v_0'.$$

Итак, решаем задачу

$$\begin{cases} \Delta v_0(r) \equiv v_0'' + \frac{2}{r} v_0' = 1/2, \quad 0 \leq r < 1 \\ v_0(1) = 0 \end{cases} \tag{57}$$

Здесь краевое условие в 0 учтено в области $0 \leq r < 1$. Иногда пишут

$$|v_0(0)| < \infty.$$

Решим дифференциальное уравнение (57). Обозначим

$$v_0' = h(r).$$

Тогда (57) записывается как

$$h' + \frac{2}{r}g = 1/2. \tag{58}$$

Возьмем в качестве частного решения

$$h_{\text{ч.}} = ar.$$

Подставляя в (58), получим, что

$$a + 2a = \frac{1}{2},$$

откуда

$$a = \frac{1}{6}, \quad h_{\text{ч.}} = \frac{1}{6}r.$$

Найдем теперь решение однородного уравнения:

$$h' + \frac{2}{r}h = 0,$$

$$\frac{dh}{h} = -\frac{2}{r}dr,$$

$$\ln|h| = -2\ln r + \ln|C|,$$

откуда

$$h = \frac{C}{r^2}.$$

Итак, решение (57) имеет вид

$$h = \frac{C}{r^2} + \frac{1}{6}r = v_0'.$$

Отсюда

$$v_0(r) = \frac{C_1}{r} + \frac{r^2}{12} + C_2.$$

Воспользовавшись краевыми условиями, получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{12}.$$

Окончательно получаем

$$v_0(r) = \frac{1}{12}\left(r^2 - 1\right),$$

или, в исходных координатах,

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{12}\left(|x|^2 - 1\right).$$

Итак, мы нашли функцию, на которой $E(v)$ (55) принимает минимальное значение. Вычислим значение $E(u)$. Если на нем верно (54), то оно верно и для произвольно $u \in \overset{0}{H}{}^1(T_1^0)$.

Здесь

$$|\nabla u|^2 = (v_0'(r))^2 = \frac{r^2}{36}.$$

Вычислим

$$E(u) = \int\limits_{T_1^0} \frac{r^2}{36} dx + \int\limits_{T_1^0} \left(\frac{1}{12} r^2 - \frac{1}{12}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{9} \int\limits_0^1 r^2 \int\limits_{S_r^0} ds dr - \frac{1}{12}\frac{4}{3}\pi = \frac{4\pi}{9} \int\limits_0^1 r^4 dr - \frac{\pi}{9} = \frac{4\pi}{45} - \frac{\pi}{9} = -\frac{\pi}{45}.$$

Задача 6.3. *Требуется найти минимум функционала*

$$E(u) = \int\limits_{T_1^0} |\nabla u|^2 dx, \quad n = 2, \quad T_1^0 = \left\{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$$

на множестве

$$M = \left\{ u \in H^1(T_1^0) : \ u - x_2^2 \in \overset{0}{H}{}^1(T_1^0) \right\}.$$

Решение. Сведем задачу к минимуму некоторого нового функционала на $\overset{0}{H}{}^1(T_1^0)$. По условию минимум ищется на множестве функций вида

$$u = x_2^2 + v, \quad v \in \overset{0}{H}{}^1(T_1^0).$$

Введем

$$\widetilde{E}(v) \equiv E(v + x_2^2) = \int\limits_{T_1^0} \left|\nabla(v + x_2^2)\right|^2 dx = \int\limits_{T_1^0} \left(|\nabla v|^2 + 2(\nabla v, \nabla x_2^2) + |\nabla(x_2^2)|^2\right) dx. \quad (59)$$

Задача сводится к нахождению

$$\min_{v \in \overset{0}{H}{}^1(T_1^0)} \widetilde{E}(v) = F(v_0).$$

Заметим, что

$$\int\limits_{T_1^0} |\underbrace{\nabla x_2^2}_{(2x_2)^2}|^2 dx = 4 \int\limits_{T_1^0} x_2^2 dx = 4 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r^3 \sin^2\varphi dr d\varphi = 4\pi \int\limits_0^1 r^3 dr = \pi.$$

Поэтому в (59) можно не учитывать слагаемое $|\nabla(x_2)^2|$ (оно дает одинаковый вклад для $\forall\ v$).

Рассмотрим отдельно

$$2\int\limits_{T_1^0}\left(\nabla v, \nabla x_2^2\right)dx = 4\int\limits_{T_1^0} v_{x_2}x_2dx = -4\int\limits_{T_1^0} vdx + \underbrace{4\int\limits_{\partial T_1^0} vx_2\nu_2 ds}_{=0}.$$

Итак, задача свелась к

$$\widetilde{E}(v) \equiv \int\limits_{T_1^0}\left(|\nabla v|^2 - 4v\right)dx + \pi \ \to \min_{\overset{0}{H}{}^1(T_1^0)}.$$

Перепишем задачу как

$$F(v) \equiv \int\limits_{T_1^0}\left(|\nabla v|^2 - 4v\right)dx \ \to \min_{\overset{0}{H}{}^1(T_1^0)}.$$

Функция $v_0 \in \overset{0}{H}{}^1(T_1^0)$, на которой достигается минимум $F(v)$, удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$(\nabla v_0, \nabla v)_{L^2(T_1^0)} - (2, v)_{L^1(T_1^0)} = 0 \ \forall \ v \in \overset{0}{H}{}^1(T_1^0).$$

Соответствующая задача Дирихле имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = -2, \quad x \in T_1^0 \\ v = 0 \text{ на } S_1^0 \end{cases}$$

Заметим, что правая часть уравнения не зависит от угловых координат на T_1^0:

$$v_0(x_1, x_2) \equiv \omega(r).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \omega'' + \frac{1}{r}\omega' = -2, \quad 0 \le r < 1 \\ \omega(1) = 0 \end{cases}$$

Понизим порядок:

$$\omega' = h,$$

$$h' + \frac{1}{r}h = -2. \tag{60}$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$h' = -\frac{1}{r}h,$$

$$\ln|h| = -\ln r + \ln|C|,$$

откуда
$$h = \frac{C}{r}.$$
В качестве частного решения (60) возьмем
$$h_{ч.} = ar.$$
Подставляя $h_{ч.}$ в (60), получим
$$2a = -2, \quad a = -1,$$
откуда
$$h_{ч.} = -r.$$
Итак, нашли решение (60)
$$h(r) = \frac{C}{r} - r.$$
Далее, получаем
$$\omega(r) = C \ln r - \frac{1}{2} r^2 + C_0.$$
Так как $g(r)$ должна быть определена в каждой точке T_1^0,
$$C \equiv 0,$$
$$\omega(r) = -\frac{1}{2} r^2 + C_0.$$
Из условия $\omega(1) = 0$
$$C_0 = \frac{1}{2}.$$
Окончательно получаем, что
$$\omega(r) = -\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2}.$$
Итак, минимум $\widetilde{F}(v)$ достигается на
$$v_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(r^2 - 1), \quad r = x_1^2 + x_2^2.$$
Далее,
$$F(v_0) = \min_{v \in \overset{0}{H}{}^1(T_1^0)} F(v) = \int\limits_{T_1^0} \left(|x|^2 - 2\left(1 - |x|^2\right)\right) dx = \int\limits_{T_1^0} (3|x|2 - 2)\, dx =$$
$$= 3 \int\limits_0^1 r^2 \int\limits_{RS_r^0} ds dr - 2\pi = 6\pi \int\limits_0^1 r^3 dr - 2\pi = \frac{3}{2}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{2}.$$
Тогда
$$\min_{v \in M} E(v) = \min_{\omega \in \overset{0}{H}{}^1(T_1^0)} \widetilde{E}(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Семинар 7. Потенциалы

Виды потенциалов

Сегодняшнее занятие будет посвящено потенциалам и некоторым методам их нахождения. Напомним сначала некоторые сведения о потенциалах, полученные в рамках лекционного курса. Пусть дана

$$u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right),$$

где Ω – ограниченная в $\mathbb{R}^n$ область с гладкой границей. В лекционном курсе была получена следующая формула (*представление функции в виде суммы трех потенциалов*): $\forall\ x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) = \underbrace{\int\limits_{\Omega} E(x,x_0)\Delta u(x)dx}_{\text{Ньютонов потенциал}} - \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} E(x,x_0)\partial_{\nu(x)}u(x)dS_x}_{\text{потенциал простого слоя}} + \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} u(x)\partial_{\nu(x)}E(x,x_0)dS_x}_{\text{потенциал двойного слоя}}.$$

Напомним,

$$E(x,x_0) \equiv \mathcal{E}\left(|x-x_0|\right) = \frac{|x-x_0|^{2-n}}{\omega_n(2-n)}, \quad n \geq 3,$$

и

$$E(x,x_0) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0|, \quad n=2,$$
$$\Delta_x E(x,x_0) = \delta(x-x_0).$$

Обсудим подробнее виды потенциалов.

1. **Ньютонов (объемный) потенциал**:

$$P_0(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi)|x-\xi|^{2-n}d\xi, \quad n \geq 3.$$

Здесь

$$\rho:\ \Omega\ \to\ \mathbb{R}$$

– плотность распределения заряда на Ω. При $n=2$

$$P_0(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi)\ln\frac{1}{|x-\xi|}d\xi.$$

Обсудим свойства $P_0(x)$:

1) $\Delta P_0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ при $n \geq 2$;

2) Верно

$$\Delta P_0(x) = -(n-2)\omega_n\rho(x), \quad x \in \Omega, \quad n \geq 3$$

и

$$\Delta P_0(x) = -2\pi\rho(x), \quad x \in \Omega, \quad n = 2;$$

3) $P_2 \in C^1(\mathbb{R}^n)$;

4) При $n \geq 3$

$$|P_0(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-2}},$$

откуда

$$P_0 \ \to \ 0, \quad |x| \ \to \ \infty.$$

2. **Потенциал простого слоя**:

$$P_1(x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)|x-\xi|^{2-n} dS_\xi, \quad n \geq 3.$$

Здесь Γ – некоторая гладкая поверхность (в большинстве случаев будем полагать, что Γ замкнута и является границей некоторой области),

$$\nu : \ \Gamma \ \to \ \mathbb{R}$$

– плотность распределения заряда.

При $n = 2$

$$P_1(x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \ln \frac{1}{|x-\xi|} dS_\xi.$$

Обсудим свойства $P_1(x)$:

1) $\Delta P_1(x) = 0$, $x \notin \Gamma$;

2) $P_1 \in C(\mathbb{R}^n)$;

3) Выполнено

$$|P_1(x)| \leq C/|x|^{n-2}, \quad n \geq 3,$$

то есть

$$P_1 \ \to \ 0, \quad |x| \to \infty;$$

4) (Теорема о скачке нормальной производной) Заметим, что обычно при рассмотрении поверхностных потенциалов (простого и двойного слоя) предполагают, что Γ – поверхность Ляпунова, то есть обладает следующими свойствами. Во-первых, в каждой точке Γ существует (внешняя единичная) нормаль $\nu(x)$ к Γ. Во-вторых, пусть θ – угол между нормалями $\nu(x)$ и $\nu(\xi)$ в двух разных точках x и $\xi \in \Gamma$. Тогда

$$\theta \leq C|x-\xi|^\alpha,$$

где $c, \alpha > 0$.

Итак, пусть Γ – поверхность Ляпунова. Будем обозначать

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{int}} \ \text{и} \ \left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{out}}$$

внутреннюю и внешнюю производные P_1 по нормали.

Тоерема о скачке нормальной производной говорит, что

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{int}}\Big|_{x_0\in\Gamma} = \frac{(n-2)\omega_n}{2}\nu(x_0) + \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu}(x_0)},$$

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{out}}\Big|_{x_0\in\Gamma} = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}\nu(x_0) + \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu}(x_0)}.$$

Здесь $\overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu}(x_0)}$ – прямое значение нормальной производной.

Как следствие из формул выше, скачок нормальной производной P_1

$$\left[\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right]\Big|_{x_0\in P} \equiv \left(\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{int}} - \left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{out}}\right)\Big|_{x_0\in P} = (n-2)\omega_n\mu(x_0), \quad n\geq 3.$$

Отметим, что для $n=2$ существует аналогичная формула (но на ней мы останавливаться не будем).

3. **Потенциал двойного слоя**:

$$P_2(x) = \int\limits_\Gamma \sigma(\xi)\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n}d\xi, \quad n\geq 3, \tag{61}$$

$$P_2(x) = \int\limits_\Gamma \sigma(\xi)\partial_{\nu(\xi)}\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|}\right)d\xi, \quad n=2. \tag{62}$$

Прежде, чем перейти к свойствам $P_2(x)$, перепишем выражение под знаком интеграла (61) в другом виде. Вычислим при $n\geq 3$

$$\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} = \big(\nabla_\xi|x-\xi|^{2-n}, \nu(\xi)\big) = -(n-2)|x-\xi|^{1-n}\left(\nabla_\xi|x-\xi|, \nu(\xi)\right) \tag{63}$$

Напомним,

$$\nabla_\xi|x-\xi| = \frac{\xi-x}{|x-\xi|}.$$

Тогда

$$(63) = -(n-2)|x-\xi|^{1-n}\left(\frac{\xi-x}{|\xi-x|}, \nu(x)\right) = -(n-2)\frac{\cos(\xi-x,\nu(\xi))}{|x-\xi|^{n-1}}.$$

Тогда при $n\geq 3$

$$P_2(x) = -(n-2)\int\limits_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\cos(\xi-x,\nu(x))}{|x-\xi|^{n-1}}dS_\xi.$$

Преобразуем аналогичным образом формулу (62) ($n=2$). Здесь

$$\partial_{\nu(\xi)}\ln\frac{1}{|x-\xi|} = -\partial_{\nu(\xi)}\ln|x-\xi| = -|x-\xi|^{-1}\left(\nabla_\xi|x-\xi|, \nu(\xi)\right) = -\frac{\cos(\xi-x,\nu(x))}{|x-\xi|}.$$

Тогда

$$P_2(x) = -\int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\cos(\xi - x, \nu(x))}{|x-\xi|} dS_\xi. \tag{64}$$

Перейдем к свойствам $P_2(x)$:

1) $\Delta P_2(x) = 0$, $x \notin \Gamma$;
2) $|P_2(x)| \le C/|x|^{n-1}$;
3) (Теорема о скачке потенциала) Справедливы формулы для $n \ge 3$:

$$P_{2,\text{int}}(x_0) = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}\sigma(x_0) + \overline{P_2(x_0)}, \quad x_0 \in \Gamma,$$

$$P_{2,\text{out}}(x_0) = \frac{(n-2)\omega_n}{2}\sigma(x_0) + \overline{P_2(x_0)}, \quad x_0 \in \Gamma,$$

скачок потенциала двойного слоя

$$[P_2]\Big|_{x_0\in\Gamma} = -(n-2)\omega_n \sigma(x_0).$$

Задачи

Будем брать задачи из сборника задач по уравнениям математической физики под редакцией В.С. Владимирова.

Задача 7.1. *(18.26 3) На плоскости*

$$x = (x_1, x_2),$$

дан отрезок[1]

$$-a \le x_1 \le a, \quad x_2 = 0.$$

Требуется найти логарифмический потенциал двойного слоя для данного отрезка с плотностью

$$\sigma(x_1) = x_1.$$

Решение. Размерность пространства $n = 2$. Воспользуемся формулой (64):

$$P_2(x) = -\int\limits_{-a}^{a} \xi_1 \frac{\cos(\xi - x, \nu(x))}{|x-\xi|} d\xi_1 = -\int\limits_{-a}^{a} \xi_1 \frac{\cos\gamma}{|x-\xi|} d\xi_1. \tag{65}$$

Здесь

$$\cos(\pi - \gamma) = \frac{x_2}{|x-\xi|}, \quad \cos\gamma = -\frac{x_2}{|x-\xi|}.$$

Следовательно,

$$(65) = x_2 \int\limits_{-a}^{a} \xi_1 \frac{\xi_1}{|x-\xi|^2} d\xi_1 = x_2 \int\limits_{-a}^{a} \frac{\xi_1 d\xi_1}{(x_1-\xi_1)^2 + x_2^2} = x_2 \int\limits_{-a}^{a} \frac{(\xi_1 - x_1) d(\xi_1 - x_1)}{(\xi_1 - x_1)^2 + x_2^2} +$$

[1]Обозначим этот отрезок через l.

$$+x_1x_2\int\limits_{-a}^{a}\frac{d(\xi_1-x_1)}{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}=\frac{x_2}{2}\int\limits_{-a}^{a}\frac{d\left((\xi_1-x_1)^2+x_2^2\right)}{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}+x_1\int\limits_{-a}^{a}\frac{d\left(\frac{\xi_1-x_1}{x_2}\right)}{\left(\frac{\xi_1-x_1}{x_2}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{x_2}{2}\ln\left[(\xi_1-x_1)^2+x_2^2\right]\Big|_{\xi_1=-a}^{\xi_1=a}++x_1\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi_1-x_1}{x_2}\right)\Big|_{\xi_1=-a}^{\xi_1=a}=$$

$$=\frac{x_2}{2}\ln\frac{(a-x_1)^2+x_2^2}{(a+x_1)^2+x_2^2}+x_1\left\{\operatorname{arctg}\frac{a-x_1}{x_2}+\operatorname{arctg}\frac{a+x_1}{x_2}\right\}.$$

Итак, в случае, когда $x_2\neq 0$, $x_1\in(-a,a)$, имеем

$$P_2(x)=\frac{x_2}{2}\ln\frac{(a-x_1)^2+x_2^2}{(a+x_1)^2+x_2^2}+x_1\left\{\operatorname{arctg}\frac{a-x_1}{x_2}+\operatorname{arctg}\frac{a+x_1}{x_2}\right\}.$$

Рассмотрим предельные случаи. Пусть $x_2\to+0$, $x_1\in(-a,a)$. Тогда

$$P_2(x_1,x_2)\ \to\ \pi x_1=\pi\sigma(x_1).$$

При $x_2\to-0$, $x_1\in(-a,a)$

$$P_2(x_1,x_2)\ \to\ -\pi x_1=-\pi\sigma(x_1).$$

Скачок потенциала двойного поля в данном случае

$$[P_2]\Big|_l=-2\text{ß}\sigma(x_1).$$

Рассмотрим еще случай $x_2\to+0$, $x_1>a$. Тогда

$$P_2(x_1,x_2)\ \to\ 0.$$

Аналогично при $x_2\to-0$, $x_1>a$

$$P_2(x_1,x_2)\ \to\ 0.$$

Задача 7.2. *(18.16) Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью на сфере радиуса R с центром в начале координат. Размерность пространства $n=3$,*

Решение. Дана сфера $|x|=R$, плотность распределения заряда

$$\mu(x)=\mu_0=\text{const}.$$

Вычислим

$$P_1(x)=\mu_0\int\limits_{|\xi|=R}\frac{dS_\xi}{|x-\xi|}. \qquad (66)$$

Отметим, что напрямую вычислять такой интеграл – не самая простая задача. Вычислим потенциал простого слоя в произвольной точке на сфере, используя свойства $P_1(x)$. Напомним их:

1) $\Delta P_1(x) = 0$, $x \notin S_R^0$, где

$$S_R^0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R \right\};$$

2) $P_1(x) \ \to \ 0$, $|x| \to \infty$;

3) $P_1 \in C\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Будем искать потенциал простого слоя в виде ункции, зависящей только от радиуса:

$$P_1(x) = h(r).$$

Здесь

$$\delta h(r) \equiv h''(r) + \frac{2}{r}h'(r) = 0.$$

Следовательно,

$$h(r) = \frac{C_1}{r} + C_2, \quad 0 \le r < R,$$

$$h(r) = \frac{D_1}{r} + D_2, \quad r > R.$$

Так как $P_1(x)$ должен быть определен и в центре шара ($x = 0$), $h(r)$ должна быть определена при $r = 0$, а значит, $C_1 = 0$. По свойствам $P_1(x)$ (пункт 2), $D_2 = 0$. Итак,

$$P_1(x) = C_2 = \text{const}, \quad 0 \le r < R,$$

$$P_1(x) = \frac{D_1}{r}, \quad r > R.$$

Так как внутри шара потенциал постоянен, вычислим его по формуле (66) при $x = 0$:

$$C_2 = P_1(0) = \mu_0 \int\limits_{|\xi|=R} \frac{dS_\xi}{|\xi|} = \frac{\mu_0}{R} 4\pi R^2 = \mu_0 4\pi R.$$

Получаем, что

$$P_1(x) = 4\pi R\mu_0, \quad |x| \le R.$$

Наконец, функция $P_1(x)$ непрерывна на границе шара, а значит,

$$\frac{D_1}{R} = C_2 = 4\pi R\mu_0,$$

откуда получаем, что

$$D_1 = 4\pi R^2\mu_0,$$

то есть

$$P_1(x) = \frac{4\pi R^2\mu_0}{|x|}, \quad |x| > R.$$

Найдем аналогичным образом потенциал двойного слоя на сфере с центром в начале координат.

Задача 7.3. *(18.20) Вычислить потенциал двойного слоя на S_R^0 с*

$$\sigma(x) = \sigma_0 = const.$$

Решение. Как и в предыдущей задаче, использовать представление

$$P_2(x) = -\sigma_0 \int\limits_{|\xi|=R} \frac{\cos(\xi - x, \nu(x))}{|x-\xi|^2} dS_\xi.$$

Известно, что $P_2(x)$ является гармонической функцией вне S_R^0:

$$\Delta P_2(x) = 0, \quad x \notin S_R^0.$$

Будем искать $P_2(x)$ как функцию от радуса:

$$P_2(x) = h(r).$$

Здесь, как и в предыдущей задаче, получаем, что

$$h(r) = \begin{cases} \frac{C_1}{r} + C_2, & 0 \le r < R \\ \frac{D_1}{r} + D_2, & r > R \end{cases}$$

Так как $P_2(x)$ должен быть определен в любой точке и в точке $x = 0$ в том числе, получим, что $C_1 = 0$, то есть

$$P_2(x) = C_2 = \text{const в } T_R^0.$$

Далее, $D_1 = 0$ и $D_2 = 0$, так как на бесконечности имеет место оценка

$$|P_2(x)| \le \frac{C}{|x|^2}.$$

Итак,

$$P_2(x) \equiv 0, \quad |x| > R.$$

Наконец, найдем C_2. Известно, что скачок

$$[P_2(x)]\Big|_{S_R^0} = -(n-2)\omega_n \sigma(x) = -4\pi\sigma_0.$$

Отсюда

$$P_2 = -4\pi\sigma_2, \quad |x| < R.$$

Вычислить $P_2(x)$ на S_R^0 (прямое значение потенциала) остается в качестве упражнения.

Семинар 8. Решение краевых задач с помощью потенциалов

Задача (нахождение объемного потениала)

Напомним, на прошлом семинаре мы решали задачи на нахождение потенциалов простого и двойного слоя. Разберем одну задачу на нахождение потенциала Ньютона.

Задача 8.1. *Пусть размерность пространства* $n = 3$,

$$T_R^0 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R\right\},$$

плотность распределения потенциала

$$\rho(x) \equiv \rho_0 = const.$$

Доказательство. Напомним,

$$P_0(x) = \int\limits_{T_R^0} \rho(\xi)|x-\xi|^{2-n} d\xi = \rho_0 \int\limits_{T_R^0} \frac{d\xi}{|x-\xi|}.$$

Вычислить такой интеграл напрямую достаточно сложно. Найдем $P_0(x)$, используя его свойства:

1) Объемнй потенциал является гармонической функцией вне заданной области:

$$\Delta P_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{T_R^0};$$

2) Внутри области

$$\Delta P_0(x) = -(n-2)\omega_n \rho(x) = -4\pi\rho(x) = -4\pi\rho_0, \quad x \in T_R^0;$$

3) $P_0(x) \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$;

4) $P_0(x) \to 0$, $|x| \to \infty$ в силу оценки

$$|P_0(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-2}}.$$

Будем искать объемный потенциал в виде

$$P_0(x) = \omega(r), \quad r = |x|.$$

В силу свойства 1

$$\Delta\omega(r) = \omega'' + \frac{r}{2}\omega' = 0, \quad r > R.$$

Отсюда

$$\omega(r) = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

В силу свойства 4 $C_2 = 0$.

Внутри T_R^0 будем искать объемный потенциал в виде

$$P_0(x) = h(r).$$

В силу свойства 2 получаем, что

$$h'' + \frac{r}{2}h' = -4\pi\rho_0. \tag{67}$$

Отсюда

$$h(r) = h_{\text{частн.}} + \underbrace{\frac{A_1}{r} + A_2}_{\text{реш. однородного}}. \tag{68}$$

Нетрудно видеть, что частное решение можно искать в виде

$$h_{\text{частн.}} = Br^2.$$

Подставляя $h_{\text{частн.}}$ в (67), получим

$$2B + 4B = -4\pi\rho_0,$$

откуда

$$B = -\frac{2}{3}\pi\rho_0,$$

и, соответственно,

$$h_{\text{частн.}} = -\frac{2}{3}\pi\rho_0 r^2.$$

Кроме того, A_1 в формуле (68) равно 0, так как $h(r)$ должна быть определена в центре шара.

Итак, получаем, что

$$P_0(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{|x|}, & |x| > R \\ -\frac{2}{3}\pi\rho_0 r^2 + A_2, & |x| < R \end{cases}$$

Найдем A_2:

$$P_0(0) = A_2 = \rho_0 \int\limits_{T_R^0} \frac{d\xi}{|\xi|} = \rho_0 \int\limits_0^R \frac{1}{r} \underbrace{\int\limits_{S_r^0} 1 ds}_{4\pi r^2} \, dr =$$

$$= 4\pi\rho_0 \int\limits_0^R r dr = 2\pi\rho_0 r^2 \Big|_0^R = 2\pi\rho_0 R^2.$$

Наконец, на сфере S_R^0 $P_0(x)$ должен быть непрерывен, а значит,

$$\frac{C_1}{R} = -\frac{2}{3}\pi\rho_0 R^2 + 2\pi\rho_0 R^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^2,$$

откуда
$$C_1 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3.$$

Итак, окончательно получаем, что

$$P_0(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3 \frac{1}{|x|}, & |x| > R \\ -\frac{2}{3}\pi\rho_0 |x|^2 + 2\pi\rho_0 R^2, & |x| < R \end{cases}$$

Проверим, что свойство 3 выполняется, то есть что $P_0(x)$ непрерывна вместе со своей производной. Так как $P_0(x)$ зависит только от $|x| = r$, проверим производную по r. Требуется убедиться, что

$$\left(\frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3 \frac{1}{r}\right)'\Big|_{r=R} = \left(\frac{2}{3}\pi\rho_0 r^2 + 2\pi\rho_0 R^2\right)'\Big|_{r=R}.$$

В левой части получаем
$$-\frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3 \frac{1}{R^2} = -\frac{4\pi\rho_0 R}{3},$$
в левой –
$$-\frac{4}{3}\pi\rho_0 R,$$
то есть производная непрерывна. □

Виды краевых задач

Перейдем к решению краевых задач с помощью потенциалов.

Пусть дана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}$, граница области является поверхностью Ляпунова. Будем обозначать
$$\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Рассмотрим следующие краевые задачи:

1. Внутренняя задача Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{69}$$

2. Внешняя задача Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega' \\ u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega \\ u(x) \ \to \ 0, \quad |x| \to \infty \end{cases} \tag{70}$$

3. Внутренняя задача Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}(x) = \psi(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{71}$$

4. Внешняя задача Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ \partial_\nu u(x) = \psi(x), \quad x \in \partial\Omega \\ u(x) \ \to \ 0, \quad |x| \to \infty \end{cases} \tag{72}$$

Везде выше $\varphi, \psi \in C(\partial\Omega)$.

Решения задач Дирихле (69) и (70) могут быть найдены с помощью потенциала двойного слоя. Решения задач Неймана (71) и (72) могут быть найдены с помощью потенциала простого слоя.

Замечание 8.1. Обратим внимание на замечание выше, что решение внешней задачи Дирихле (70) также может быть найдено в виде потенциала двойного слоя. Напомним, что потенциалы двойного слоя на ∞ убывают быстрее, чем гармонические функции: $C/|x|^{n-1}$ и $C/|x|^{n-2}$ соответственно.

Поэтому для решения задачи (70) применяется некоторая хитрость. Мы рассмотрим ее в конце семинара.

Далее подробнее обсудим внутренние задачи Дирихле и Неймана. Кроме того, несколько слов будет сказано о задаче (70). Внешняя задача Неймана предоставляется для самостоятельного рассмотрения.

Внутренняя задача Дирихле

Будем искать решение задачи (69) в виде

$$u(x) = P_2(x) = -(n-2) \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi) \frac{\cos(\xi - x, \nu(\xi))}{|x-\xi|^{n-1}} dS_\xi, \tag{73}$$

если $n \geq 3$, и

$$u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi) \frac{\cos(\xi - x, \nu(\xi))}{|x-\xi|} dS_\xi \tag{74}$$

в случае $n = 2$. Плотность $\sigma(x)$ неизвестна.

Вспомним теорему о скачке потенциала:

$$P_{2,\text{int}}(x) = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}\sigma(x) + \overline{P_2}(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{75}$$

$$P_{2,\text{out}}(x) = \frac{(n-2)\omega_n}{2}\sigma(x) + \overline{P_2}(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

Здесь $n \geq 3$, $\overline{P_2}(x)$ – прямое значение интеграла (73) или (74) при $x \in \partial\Omega$. Из формул выше следует, что

$$\overline{P_2(x)} = \frac{P_{2,\text{int}}(x) + P_{2,\text{out}}(x)}{2}.$$

Для $n = 2$ теорема о скачках дает следующие равенства:

$$P_{2,\text{int}}(x) = -\pi\sigma(x) + \overline{P_2(x)}, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$P_{2,\text{out}}(x) = \pi\sigma(x) + \overline{P_2(x)}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Для того, чтобы написать равенство, из которого можно найти $\sigma(x)$ для внутренней задачи Дирихле, мы будем использовать (75).

Заметим, что граничное условие (69) понимается по непрерывности. Напомним, классическое решение задачи Дирихле – это функция $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, если

$$\lim_{x \to x_0 \in \partial\Omega} u(x) = \varphi(x_0).$$

Тогда при $x \in \partial\Omega$

$$\varphi(x) = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}\sigma(x) - (n-2)\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\frac{\cos\left(\xi - x, \nu(\xi)\right)}{|x-\xi|^{n-1}}dS_\xi, \quad n \geq 3,$$

и

$$\varphi(x) = -\pi\sigma(x) - \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\frac{\cos\left(\xi - x, \nu(\xi)\right)}{|x-\xi|}dS_\xi, \quad n = 2. \tag{76}$$

Рассмотрим (76). Запишем данное интегральное уравнение в более удобном виде:

$$-\frac{1}{\pi}\varphi(x) = \sigma(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\frac{\cos\left(\xi - x, \nu(x)\right)}{|x-\xi|}dS_\xi. \tag{77}$$

Обратим внимание, что данное уравнение имеет вид

$$\left(\text{Id} - K\right)\sigma(x) = f(x), \tag{78}$$

где Id – тождественный, а K – компактный операторы. Такое уравнение (и аналогичное уравнение для $n \geq 3$) имеет единственное решение. Следовательно, рассматриваемая задача (69) имеет классическое решение.

Отметим, что K относится к операторам со слабой особенностью. Обычно в учебной литературе такой оператор имеет вид

$$(Ku)(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\Delta(\xi, x)}{|x-\xi|^\alpha}u(\xi)d\xi.$$

Если $0 \leq \alpha < n$, а A – достаточно хорошая функция (например, непрерывная по совокупности переменных на $\overline{\Omega}$), то такие операторы являются вполне непрерывными операторами на $C\left(\overline{\Omega}\right)$. Тогда к нашим уравнениям вида (78) применима теория Фредгольма.

Рассмотрим простой частный случай. Пусть $n = 2$, $\Omega = T_R^0$. Хотим решить задачу Дирихле в круге:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega$$

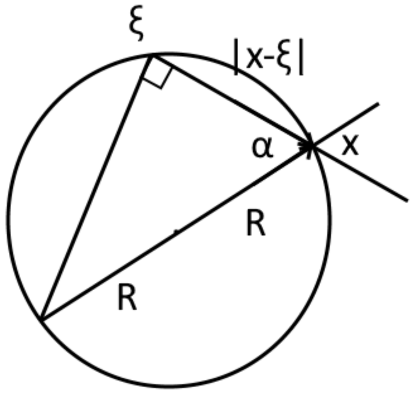


Рис. 8.1. $\cos(\xi - x, \xi)$

Найдем решение уравнения (77):

$$-\frac{1}{\pi}\varphi(x) = \sigma(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{S_R^0} \sigma(\xi)\frac{\cos(\xi - x, \xi)}{|x-\xi|}dS_\xi.$$

Здесь

$$\cos(\xi - x, \xi) = \cos\alpha = \frac{|x-\xi|}{2R}$$

(рис. 8.1), то есть

$$\frac{\cos(\xi - x, \xi)}{|x-\xi|} = \frac{1}{2R}.$$

Итак, наше интегральное уравнение на самом деле имеет вид

$$-\frac{1}{\pi}\varphi(x) = \sigma(x) + \frac{1}{2R}\int\limits_{S_R^0} \sigma(\xi)dS_\xi = \sigma(x) + <\sigma>_{S_R^0},$$

где

$$<\sigma>_{S_R^0} = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{S_R^0} \sigma(\xi)dS_\xi$$

– среднее значение.

Возьмем среднее значение от обеих частей уравнения. Получим

$$-\frac{1}{\pi} <\varphi(x)>_{S_R^0} = 2<\sigma>_{S_R^0}.$$

Отсюда получаем, что

$$<\sigma>_{S_R^0} = -\frac{1}{2\pi}<\varphi>_{S_R^0}.$$

Далее, получаем, что

$$-\frac{1}{\pi}\varphi(x) = \sigma(x) + <\sigma>_{S_R^0} = \sigma(x) - \frac{1}{2\pi}<\varphi>_{S_R^0},$$

откуда

$$\sigma(x) = -\frac{1}{\pi}\varphi(x) + \frac{1}{2\pi}<\varphi>_{S_R^0}.$$

Чтобы получить решение задачи Дирихле, осталось подставить $\sigma(x)$ в $P_0(x)$.

Внутренняя задача Неймана

Рассмотрим задачу (71):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ \partial_\nu u(x) = \psi(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Если задача (71) разрешима, то

$$\int\limits_{\partial\Omega} \psi(x) ds = 0. \tag{79}$$

Заметим, что это условие является не только необходимым, но и достаточным. Отметим, что решение задачи (71) не единственно: два решения могут отличаться на константу.

Рассмотрим частный случай. Пусть $\Omega = T_R^0$, $n = 2$.

Будем искать решение внутренней задачи Неймана в виде потенциала простого слоя:

$$u(x) = P_1(x) = \int\limits_{S_R^0} \mu(\xi) \ln \frac{1}{|x-\xi|} dS_\xi.$$

Вспомним теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя. Для $n \geq 3$

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{int}} \Big|_{x_0 \in \Gamma} = \frac{(n-2)\omega_n}{2} \nu(x_0) + \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu}(x_0)},$$

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{out}} \Big|_{x_0 \in \Gamma} = -\frac{(n-2)\omega_n}{2} \nu(x_0) + \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu}(x_0)}, \quad x \in \partial\Omega$$

Для $n = 2$, $x \in \partial\Omega$

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{int}} = \pi\mu(x) + \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu}(x_0)}, \tag{80}$$

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu}\right)_{\text{out}} = -\pi\mu(x) + \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu}(x_0)}.$$

Распишем (80) для нашей задачи:

$$\psi(x) = \pi\mu(x) + \int\limits_{S_R^0} \mu(x) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left(\ln \frac{1}{|x-\xi|}\right) dS_\xi. \tag{81}$$

Вычислим производную в подынтегральном выражении:

$$-\partial_{\nu(x)} \ln|x-\xi| = -\frac{1}{|x-\xi|} \left(\nabla_x |x-\xi|, \nu(x)\right) =$$

$$= -\frac{1}{|x-\xi|} \left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|}, \nu(x)\right) = -\frac{\cos\left(x-\xi, \nu(x)\right)}{|x-\xi|}.$$

Перепишем (81) в следующем виде:

$$\frac{1}{\pi}\psi(x) = \mu(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{S_R^0} \nu(\xi)\frac{\cos(x-\xi,\nu(x))}{|x-\xi|}dS_\xi.$$

Здесь, как и в предыдущей задаче,

$$\cos(x-\xi,\nu(x)) = \cos\alpha = \frac{|x-\xi|}{2R}$$

(рис. 8.1). Тогда уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\psi(x) = \mu(x) - \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{S_R^0} \mu(\xi)dS_\xi = \mu(x) - <\mu>_{S_R^0}.$$

Взяв среднее от обеих частей, получим, что

$$<\psi>_{S_R^0} = 0.$$

Из условия 79)

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi}\psi(x) + C_0.$$

Подставляя в уравнение выше, действительно, получим тождество:

$$\frac{1}{\pi}\psi(x) = \frac{1}{\pi}\psi(x) + C_0 - \frac{1}{\pi}\underbrace{<\psi>_{S_R^0}}_{=0} - C_0.$$

Внешняя задача Дирихле

Вернемся к внешней задаче Дирихле (70):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega' \\ u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi \\ u \ \to \ 0, \quad |x| \to \infty \end{cases}$$

Ранее было обговорено, что потенциала двойного слоя здесь недостаточно для решения, так как на бесконечности потенциалы двойного слоя убывают быстрее, чем гармонические функции.

Следует искать решение задачи при $n \geq 3$ в виде

$$u(x) = -(n-2)\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\frac{\cos(\xi-x,\nu(\xi))}{|x-\xi|^{n-1}}dS_\xi + \frac{1}{|x|^{n-2}}\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)dS_\xi.$$

Напомним, при $n = 2$ внешняя задача Дирихле ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega' \\ u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi \\ |u| \leq C \text{ в } \Omega' \end{cases}$$

В таком случае решение предлагается искать в виде

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\partial_{\nu(x)} \ln \frac{1}{|x-\xi|} dS_\xi + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi) dS_\xi.$$

Далее по аналогии с внутренней задачей Дирихле следует воспользоваться теоремой о скачках и решить соответствующее интегральное уравнение.

Семинар 9. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа

Функция Грина

Напомним определение[2] функции Грина

$$G(x,x_0), \quad x,x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$$G(x,x_0) = E(x,x_0) + g(x,x_0).$$

Здесь $E(x,x_0)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа, а $g(x,x_0)$ как функция переменной x для $\forall\ x_0 \in \Omega$ – гармоническая функция, то есть

$$\begin{cases} \Delta_x g(x,x_0) = 0, \quad x \in \Omega \\ g(x,x_0) = -E(x,x_0), \quad x \in \partial\Omega\ \forall\ x_0 \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь $g(\cdot,x_0) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Напомним,

$$E(x,x_0) = \mathcal{E}\left(|x-x_0|\right) = \begin{cases} \frac{|x-x_0|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, \quad n \geq 3, \quad \omega_n = |S_1| \\ \frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0|, \quad n = 2 \end{cases}$$

Так, например, для пространства размерности $n = 3$

$$E(x,x_0) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|}.$$

Итак, функция Грина однозначно определяется следующими двумя свойствами:

1. $G(x,x_0) = E(x,x_0) + g(x,x_0)$;
2. $G(x,x_0) = 0$, если $x \in \partial\Omega$ ($\forall\ x_0 \in \Omega$).

Другое определение функции Грина – решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta_x G(x,x_0) = \delta(x-x_0)\ (x_0 - \text{параметр}, x_0 \in \Omega) \\ G(x,x_0) = 0, \quad x \in \partial\Omega\ \forall\ x_0 \in \Omega \end{cases} \tag{82}$$

Определение с помощью задачи (82) помогает дать физическую интерпретацию функции Грина. Пусть в точку x_0 помещен единичный заряд. Его плотность задается δ-функцией Дирака. Потенциал электростатического поля, который этот заряд создает в области Ω при условии, что граница области заземлена, описывается функцией Грина $G(x,x_0)$.

[2]Функцию Грина можно определить несколькими разными способами. Сегоня будет рассмотрено два разных определения.

Решение задачи Дирихле

Обратим внимание, что $G(x, x_0)$ – функция области Ω. Оказывается, что если для области Ω мы научились строить функцию Грина, в области Ω мы можем написать решение задачи Дирихле.

Итак, пусть дана задача Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega \\ u = \varphi \text{ на } \Omega \end{cases} \tag{83}$$

Здесь f, φ – заданные функции. Пусть для области Ω известна $G(x, x_0)$. Тогда решение задачи (83) записывается в виде суммы двух интегралов:

$$u(x_0) = \int\limits_{\Omega} f(x)G(x, x_0)dx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x)\partial_{\nu(x)}G(x, x_0)dS_x.$$

Метод отражений

Перейдем к вопросу, как построить функцию Грина. К сожалению, для сложных областей это является трудной задачей.

Как уже было сказано выше, функция Грина строится по области, через нее выражается задача Дирихле. Сама же функция Грина определяется через решение задачи Дирихле. Возникает вопрос – что легче, построить функцию Грина или решить задачу Дирихле?

Кажется, что это равнозначные задачи. Для некоторых несложных областей, обладающих дополнительными свойствами, построить функцию Грина все-таки удается.

Разберем **метод отражений** построения функции Грина. Он заключается в следующем. Если рассматриваемая облсть обладает некоторой симметрией (например, имеет ось симметрии) и мы умеем строить функцию Грина для всей области, то мы умеем строить функцию Грина и для половины области.

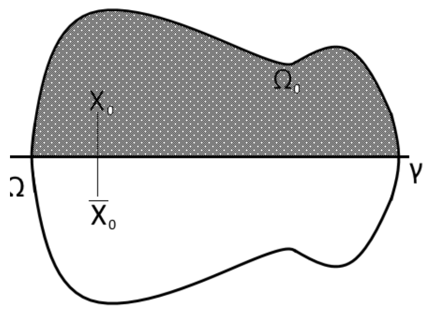


Рис. 9.1. Область Ω с осью симметрии

Рассмотрим область Ω, которая имеет ось симметрии γ (рис. 9.1). Одну половину области обозначим Ω_0. Предположим, что мы знаем, как выглядит функция Грина для всей области: $G_\Omega(x, x_0)$. Хотим понять, как выглядит функция Грина для Ω_0.

Пусть $x_0 \in \Omega_0$. Предлагается в качестве $G_{\Omega_0}(x, x_0)$ взять следующую функцию:

$$G_{\Omega_0}(x, x_0) = G_\Omega(x, x_0) - G_\Omega\left(x, \overline{x_0}\right), \tag{84}$$

где $\overline{x_0}$ – точка, симметричная точке x_0 относительно γ.

Обсудим, почему это верно. Во-первых,

$$\Delta_x G_{\Omega_0}(x, x_0) = \underbrace{\Delta_x G_\Omega(x, x_0)}_{\delta(x-x_0)} - \underbrace{\Delta G_\Omega\left(x, \overline{x_0}\right)}_{=0} = \delta(x - x_0).$$

Во-вторых,

$$G_{\Omega_0}(x, x_0)\Big|_{\partial\Omega_0} = 0. \tag{85}$$

Действительно, $\partial\Omega_0$ состоит из двух частей (рис. 9.1): части границы $\partial\Omega$ и куска оси[3] γ. На $\partial\Omega$ $G_{\Omega_0}(x, x_0)$ равна 0 в силу определения (84).

Поймем, почему $G_{\Omega_0}(x, x_0)$ равна 0 при $x \to x_1 \in \gamma$. Для этого нам понадобится **свойство симметрии** функции Грина.

Теорема 9.1. $\forall\ x_0, x_1 \in \Omega$

$$G(x_1, x_0) = G(x_0, x_1).$$

Итак, в силу свойства симметрии условие $x \to x_1 \in \gamma$ эквивалентно тому, что $x_0 \to x_0^* \in \gamma$. Но тогда $\overline{x_0} \to x_0^*$ и в (84) стоит разность функции Грина в одной и той же точке. Отсюда (85) верно.

Докажем теперь свойство симметричности.

Доказательство. (Теорема 9.1) Рассмотрим шары $T_\varepsilon^{x_0}$ и $T_\varepsilon^{x_1}$, $\varepsilon > 0$ мало (оба шара $\subset \Omega$).

Обозначим

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \left(\overline{T_\varepsilon^{x_0}} \cup \overline{T_\varepsilon^{x_1}}\right),$$

$$u(x) = G(x, x_1), \quad v(x) = G(x, x_0).$$

Заметим, что Ω_ε не содержит полюсов функции Грина x_0 и x_1. Поэтому $u(x)$ и $v(x)$ гладкие и гармонические функции на Ω_ε:

$$\Delta_x G(x, x_1) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon,$$

$$\Delta_x G(x, x_0) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon.$$

Согласно второй формуле Грина,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left(u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\right) dx = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u(x)\partial_{\nu(x)} v(x) - v(x)\partial_{\nu(x)} u(x)\right) ds. \tag{86}$$

[3]Или соответствующего куска плоскости, если бы мы рассматривали симметрию относительно плоскости.

Левая часть (86) равна 0, так как $\Delta v(x) = 0$ и $\Delta u(x) = 0$. Далее, граница $\partial\Omega_\varepsilon$ состоит из трех частей: $\partial\Omega$, $\partial T_\varepsilon^{x_0} = S_\varepsilon^{x_0}$ и $S_\varepsilon^{x_1}$. На $\partial\Omega$ функция Грина равна 0. Получаем, что интеграл в правой части (86) равен

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x0}\cup S_\varepsilon^{x1}} \big(G(x,x_1)\partial_{\nu(x)}G(x,x_0) - G(x,x_0)\partial_{nu(x)}G(x,x_1)\big)\,ds_x = 0.$$

Перегруппировав, получим

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x0}} G(x,x_1)\partial_{\nu(x)}G(x,x_0)ds_x - \int\limits_{S_\varepsilon^{x0}} G(x,x_0)\partial_{nu(x)}G(x,x_1)ds_x =$$

$$= -\int\limits_{S_\varepsilon^{x1}} G(x,x_1)\partial_{\nu(x)}G(x,x_0)ds + \int\limits_{S_\varepsilon^{x1}} G(x,x_0)\partial_{nu(x)}G(x,x_1)ds. \tag{87}$$

Устремим $\varepsilon \to 0$. Получим, что

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x0}} G(x,x_0)\partial_{nu(x)}G(x,x_1)ds_x \sim \varepsilon^{2-n}\varepsilon^{n-1} = \varepsilon \ \to\ 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Кроме того, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x0}} G(x,x_1)\partial_{\nu(x)}G(x,x_0)ds_x \sim \int\limits_{S_\varepsilon^{x0}} G(x,x_1)\partial_{\nu(x)}E(x,x_0)ds. \tag{88}$$

Напомним,

$$\mathcal{E} = \frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}.$$

Тогда

$$\partial_{\nu(x)}\mathcal{E}\left(|x-x_0|\right)\Big|_{x\in S_\varepsilon^{x0}} = -\left(\mathcal{E}(r)\right)'\Big|_{r=\varepsilon} = -\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}} = -\frac{1}{|S_\varepsilon^{x_0}|}.$$

Наконец,

$$(88) = -\frac{1}{|S_{\varepsilon^{x_0}}|}\int\limits_{S_\varepsilon^{x0}} G(x,x_1)ds_x \ \to\ -G(x_0,x_1), \quad \varepsilon \to 0.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x1}} G(x,x_1)\partial_{\nu(x)}G(x,x_0)ds \ \to\ 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x1}} G(x,x_0)\partial_{nu(x)}G(x,x_1)ds \ \to\ -G(x_1,x_0).$$

Итак, при $\varepsilon \to 0$ из (87) получаем, что

$$G(x_0,x_1) = G(x_1,x_0).$$

$\square$

Вернемся к методу отражений. Как было сказано ранее, он применим для областей, симметричных относительно оси (плоскости). Договоримся, что для $\mathbb{R}^n$

$$G(x,x_0)=E(x,x_0).$$

Пример 9.1. Построим функцию Грина для полушара.

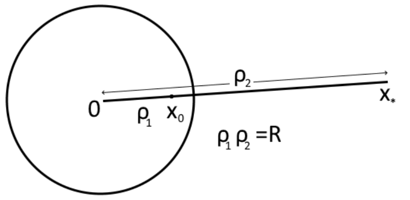


Рис. 9.2. Симметрия точки относительно сферы

Напомним, на лекциях была построена функция Грина для шара. Пусть T_R^0 – шар. Тогда

$$G_{T_R^0}(x,x_0)=\mathcal{E}\left(|x-x_0|\right)=\mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}|x-x_*|\right),$$

где $\rho=|x_0|$, а x_* – точка, симметричная точке x_0 относительно S_R^0, то есть границы данного шара (рис. 9.2). Из условия

$$\rho\rho_1=R^2,$$

где $\rho=|x_*|$, получаем, что

$$x_*=Cx_0=\frac{R^2}{|x_0|^2}x_0.$$

Воспользуемся методом отражений, чтобы построить функцию Грина для полушара. Пусть размерность пространства $n=3$,

$$\left(T_R^0\right)^+=T_R^0\bigcap\left\{x_3>0\right\}.$$

По (84),

$$G_{\left(T_R^0\right)^+}(x,x_0)=G_{T_R^0}(x,x_0)-G_{T_R^0}\left(x,\overline{x_0}\right)=$$

$$=\mathcal{E}\left(|x-x_0|\right)-\mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}\left|x-x_0^*\right|\right)-\mathcal{E}\left(|x-\overline{x_0}|\right)+\mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}\left|x-\overline{x_0^*}\right|\right).$$

(рис. 9.3).

Задача

Задача 9.1. *1. Построить функцию Грина для полуплоскости $x_2>0$;*

2. Решить задачу Дирихле

$$\begin{cases}\Delta u=0, \quad x_2>0\\ u\Big|x_2=0=\varphi(x_1)\end{cases} \tag{89}$$

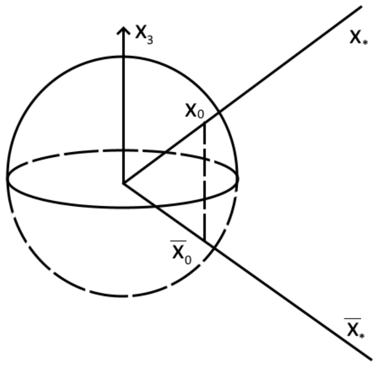


Рис. 9.3. Симметрия точек относительно полушара

Здесь $\varphi(x_1)$ – заданная функция. Пусть[4]

$$\varphi(x_1) = \cos x_1.$$

Решение. 1. Напомним, что

$$G_{\mathbb{R}^2}(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0|.$$

Тогда

$$G_{\mathbb{R}^2_+}(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |x - \overline{x_0}| . \tag{90}$$

Здесь

$$x_0 = (x_{01}, x_{02}), \quad \overline{x_0} = (x_{01}, -x_{02}).$$

Запишем представление (90) в координатах. Заметим, что

$$|x - x_0|^2 = (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2,$$
$$|x - \overline{x_0}|^2 = (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 + x_{02})^2.$$

Тогда

$$G_{\mathbb{R}^2_+}(x, x_0) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \ln \left((x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 \right) - \ln \left((x_1 - x_{01})^2 + (x_2 + x_{02})^2 \right) \right\}.$$

Проверим себя: при $x_2 = 0$ $G_{\mathbb{R}^2_+}(x, x_0)$ действительно обращается в 0.

2. Запишем решение (89):

$$u(x_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1) \left(\partial_{\nu(x)} G_{\mathbb{R}^2_+}(x, x_0) \right) \Big|_{x_2=0} dx_1. \tag{91}$$

Заметим, что на границе области $x_2 = 0$ координаты вектора нормали $\nu(x)$ имеют вид $(0, -1)$. Следовательно,

$$\left(\partial_{\nu(x)} G_{\mathbb{R}^2_+}(x, x_0) \right) \Big|_{x_2=0} = \left(-\partial_{x_2} G_{\mathbb{R}^2_+}(x, x_0) \right) \Big|_{x_2=0} = -\partial_{x_2} G_{\mathbb{R}^2_+}(x, x_0) =$$

[4] Этот пример часто разбирается на семинарах.

$$= \left\{ \frac{-2x_{02}}{(x_1 - x_{01})^2 + x_{02}^2} - \frac{2x_2}{(x_1 - x_{01})^2 + x_{02}^2} \right\} = \frac{x_{02}}{\pi} \frac{1}{(x_1 - x_{01})^2 + x_{02}^2}.$$

Тогда

$$(91) = \frac{x_{02}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x_1)}{(x_1 - x_{01})^2 + x_{02}^2} dx_1.$$

С учетом того, что

$$\varphi(x_1) = \cos x_1,$$

вычислим интеграл выше. Введем переобозначение: $x_0 \mapsto x$. Тогда

$$u(x) = \frac{x_2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos y}{(y - x_1)^2 + x_2^2} dy. \tag{92}$$

Сделаем замену переменной интегрирования:

$$\frac{y - x_1}{x_2} = \eta, \quad dy = x_2 d\eta.$$

Тогда

$$(92) = \frac{x_2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x_1 + \eta x_2)}{\eta^2 + 1} d\eta = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x_1 \cos \eta x_2}{1 + \eta^2} d\eta =$$

$$= \frac{\cos x_1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \eta x_2}{1 + \eta^2} d\eta = \frac{\cos x_1}{\pi} \mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\eta x_2}}{1 + \eta^2} d\eta. \tag{93}$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{e^{izx_2}}{1 + z^2} = \frac{e^{izx_2}}{(z - i)(z + i)},$$

$$\mathrm{ref}_{z=i} f(z) = \frac{e^{-x_2}}{2i}.$$

Вычислим интеграл (93). Возьмем контур, заключенный между $x_2 = 0$ ($\widetilde{\gamma_R}$) и дугой полуокружности S_R^0, $x_2 > 0$ (γ_R) (рис. 9.4).

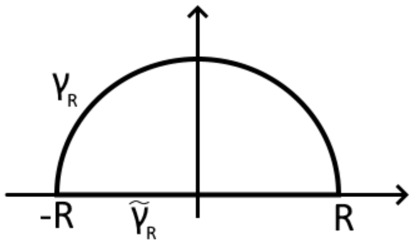


Рис. 9.4. Контур $\gamma_R \cup \widetilde{\gamma_R}$

Тогда, согласно теореме Коши,

$$\oint\limits_{\widetilde{\gamma_R}} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{ref}_{z=i} f(z) = \pi e^{-x_2}.$$

Перейдя к пределу $R \to \infty$, окончательно получим, что

$$(93) = \cos x_1 e^{-x_2}.$$

Семинар 10. Функция Грина для областей на плоскости

Построение функции Грина при наличии конформного отображения области в единичный круг

Речь пойдет о теореме Римана из области комплексного анализа. Напомним, теорема Римана говорит, что любую односвязную область Ω на плоскости, граница которой состоит из более чем одной точки, можно конформным преобразованием $w = w(z)$ перевести в единичный круг T_0^1.

Вторая часть теоремы Римана говорит, что конформное преобразование выше можно продолжить до гомеоморфизма замкнутых областей:

$$\overline{\Omega} \ \to \ \overline{T_1^0}.$$

Предположим, что для преобразования выше точка $z_0 \in \Omega \mapsto$ начало координат:

$$w(z_0) = 0.$$

Заметим, что для единичного круга на плоскости w с полюсом в начале координат функция Грина с полюсом в начале координат

$$G(w, 0) = \frac{1}{2\pi} \ln |w|.$$

Далее под записью $G(z, z_0)$ будем подразумевать $G(x, y, x_0, y_0)$, использовавшуюся ранее.

При наличии описанного выше отображения справедливо следующее утверждение.

Утверждение 10.1. *Функция Грина для области Ω имеет вид*

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z)| \,. \tag{94}$$

Определение 10.1. Функция f – *голоморфная в области* Ω, если $\forall\ z_0 \in \Omega$

$$\exists\ f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Напомним, если f – голоморфная и $\forall\ z_0 \in \Omega$

$$f'(z_0) \neq 0,$$

то функция f *задает конформное отображение.*

Доказательство. (Утверждение 10.1) Необходимо проверить выполнение двух равенств.

1. На границе области функция Грина обращается в 0:

$$G(z, z_0) = 0, \quad z \in \partial\Omega.$$

Согласно утвреждению второй части теоремы Римана, если $z \in \partial\Omega$, то

$$|w(z)| = 1.$$

Отсюда получаем, что

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z)| = \frac{1}{2\pi} \ln 1 = 0.$$

2. Воспользуемся следующим представлением функции Грина:

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| + g(z, z_0),$$

где $\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0|$ – фундаметальное решение, а $g(z, z_0)$ – гармоническая функция. Представим (94) в таком виде:

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| + \frac{1}{2\pi} \ln |w(z)| - \frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0|.$$

Напомним,

$$w(z_0) = 0.$$

Покажем, что

$$g(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z)| - \frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|w(z) - w(z_0)|}{|z - z_0|} \tag{95}$$

– гармоническая функция. Пусть сначала $z \neq z_0$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0|$$

– гармоническая функция.

Напомним, что если дана комплекснозначная аналитическая функция

$$u(x, y) = g(x, y) + ih(x, y)$$

Тогда в силу условия Коши – Римана

$$\begin{cases} \partial_x g = \partial_y f \\ \partial_y g = -\partial_x f \end{cases}$$

$g(x, y)$ и $h(x, y)$ являются гармоническими функциями.

Вспомним комплекснозначную функцию функцию

$$\text{Ln } z = \ln |z| + \text{Arg } z.$$

Тогда при $z \neq z_0$

$$\operatorname{Ln} w(z) = \ln |w(z)| + \operatorname{Arg} w(z).$$

Вещественная часть $\ln |w(z)|$ голоморфной функции является гармонической.

Итак, при $z \neq z_0$ функция $g(z, z_0)$ (95) является гармонической.

Пусть теперь $z \to z_0$. Тогда

$$(95) \ \to \frac{1}{2\pi} \ln |w(z)| .$$

Так как w – конформное преобразование,

$$w'(z_0) \neq 0.$$

Итак, гармоническая функция (95) определена всюду, кроме z_0 и ограничена в окрестности z_0. Поэтому особенности у $g(z, z_0)$ в точке 0 нет и можно доопределить $g(z, z_0)$ в этой точке.

$\square$

Пример 10.1. Построим функцию Грина для четверти плоскости $x > 0$, $y > 0$. Обозначим переменную плоскости как z и зафиксируем некоторую точку z_0.

Отображением

$$w(z) = z^2$$

переведем четверть плоскости в верхнюю полуплоскость. При этом z_0 переходит в точку z_0^2.

Дробно-линейным преобразованием

$$V(w) = \frac{w - z_0^2}{w - \overline{z_0^2}}$$

переведем полуплоскость в единичный круг.

Композиция отображений (отображения четверти плоскости на единичный круг) имеет вид

$$\widetilde{w}(z) = \frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - \overline{z_0^2}}.$$

При таком отображении z_0 переходит в начало координат,

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - \overline{z_0^2}} \right| .$$

Задачи

Обсудим, как применяется конформное преобразования для решения краевых задач.

Задача 10.1. *Найти решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta\widetilde{u} = 0 \text{ в } \Omega \\ \widetilde{u}\Big|_{S_1} = 1, \quad \widetilde{u}\Big|_{S_2} = 2 \end{cases} \tag{96}$$

в области Ω, ограниченной окружностями

$$S_1: \ |z-i| = 2, \quad S_2: \ |z+i| = 5. \tag{97}$$

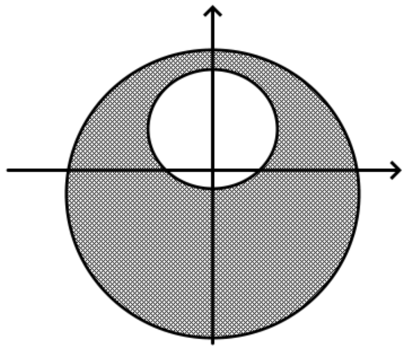


Рис. 10.1. Область Ω, ограниченная двумя окружностями

Решение. Область Ω, ограниченная окружностями (97), имеет следующий вид (рис. 10.1).

Существует дробно-линейное преобразование, переводящее область Ω в кольцо, то есть область, заключенную между двумя коцентрическими окружностями.

Найдем две точки (αi и βi), которые являются сферически симметричными относительно обеих окружностей (97). Очевидно, они будут лежать на прямой, соединяющей центры окружностей,

$$\begin{cases} (\alpha-1)(\beta-1) = 4 \\ (\alpha+1)(\beta+1) = 25 \end{cases}$$

Решим данную систему:

$$\begin{cases} \alpha\beta - \alpha - \beta = 4 \\ \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 25 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha\beta = \frac{29-2}{2} = \frac{27}{2} \\ \alpha + \beta = 25 - 1 - \frac{27}{2} = \frac{21}{2} \end{cases}$$

Получаем

$$\alpha\left(\frac{21}{2} - \alpha\right) = \frac{27}{2},$$

$$2\alpha^2 - 21\alpha + 27 = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 8\cdot 27}}{4} = \frac{21 \pm 15}{4} = \begin{cases} 9 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

Получаем, что
$$\alpha = 3/2, \quad \beta = 9$$
или наоборот. Соответствующие точки на мнимой оси имеют вид
$$\frac{3}{2}i, \quad 9i.$$

Перейдем к дробно-линейному преобразованию. Одну из найденных точек переведем в 0, а вторую – в ∞:
$$w(z) = \frac{z - \frac{3}{2}i}{z + 9i} = \frac{2z - 3i}{2z - 18i}.$$
Рассмотрим S_1. Точка $-i$ переходит при данном преобразовании в $1/4$, $3i$ – в $-1/4$. Поэтому
$$S_1 \ \to \ S^0_{1/4}.$$
Аналогично, рассмотрим S_2. Точка $-6i$ перешла в $1/2$, а $8i$ – в $-1/2$, то есть
$$S_2 \ \to \ S^0_{1/2}.$$

Итак, при преобразовании $w = w(z)$ область Ω переходит в область D (рис. 97, c).

Тогда задача (96) переходит в задачу
$$\begin{cases} \Delta h(u,v) = 0, \quad (u,v) \in D \\ h\Big|_{S^0_{1/4}} = 1, \quad h\Big|_{S^0_{1/2}} = 2 \end{cases}$$
Будем искать h в виде
$$h(u,v) = Ahr + B.$$
Учитывая граничные условия, получим
$$\begin{cases} A\ln 1/4 + B = 1 \\ A\ln 1/2 + B = 2 \end{cases}$$
Решая, получим
$$B = 3, \quad A = \frac{1}{\ln 2}.$$
Итак,
$$h = \frac{\ln|w|}{\ln 2} + 3.$$

Запишем решение исходной задачи (96):
$$\widetilde{u}(x,y) = \frac{\ln|w(z)|}{\ln 2} + 3 = \frac{1}{\ln 2}\ln\left|\frac{2z - 3i}{2z - 18i}\right| + 3.$$

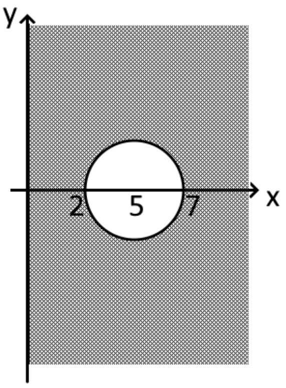


Рис. 10.2. Область Ω – полуплоскость без круга

Задача 10.2. *Решить задачу Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{в} \ \Omega \\ u\Big|_{Re\, z=0} = 0, \quad u\Big|_{|z-5|=3} = 1 \end{cases} \tag{98}$$

в области

$$\Omega: \ Re\, z > 0, \quad |z-5| > 3.$$

Решение. Область Ω имеет следующий вид (рис. 10.2).

Аналогично предыдущей задаче, нужно найти дробно-линейное преобразование, переводящее область Ω в кольцо. Две сферически симметричные точки будут иметь вид a и $-a$ (то есть лежать на вещественной оси). Условие симметричности имеет вид

$$(5-a)(5+a) = 9,$$

$$25 - a^2 = 9,$$

$$a^2 = 16 \ \Rightarrow \ a = \pm 4.$$

Выберем $a = 4$. Искомое дробно-линейное преобразование имеет вид

$$w(z) = \frac{z-4}{z+4}.$$

Разобраться, куда переходит область Ω, и решить задачу Дирихле (98) остается в качестве упражнения.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ