ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ЧАСТЬ 1. СЕМИНАРЫ

ШАПОШНИКОВА
ТАТЬЯНА АРДОЛИОНОВНА

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КАРПАЧЕВА ДЕНИСА ОЛЕГОВИЧА

Содержание

СЕМИНАР 1. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ 5

Канонический вид уравнений 5

Классификация уравнений. Приведение к каноническому виду на плоскости 6

Пример 7

Теорема о невырожденной замене переменных 8

Приведение к каноническому виду. Характеристики 9

Первый случай 10

Второй случай 11

Третий случай 12

Пример 13

СЕМИНАР 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 2-ОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ. ЧАСТЬ 1 15

Повторение определений 15

Повторение. Приведение к каноническому виду 16

Задача 1. Параболический тип 19

Задача 2. Эллиптический тип 20

Пример 3. Гиперболический тип 21

СЕМИНАР 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 2-ОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ. ЧАСТЬ 2 24

Задача 1. Уравнение с переменными коэффициентами 24

Задача 2. Трёхмерный случай 27

Задача Коши. Пример 30

Задача Коши. Начальные условия на характеристике 31

СЕМИНАР 4. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. ЧАСТЬ 1 34

Задача Коши для волнового уравнения. 34

Решение задачи Коши 35

Задача. Колеблющиеся точки 39
Метод Дюамеля 40
Двумерная задача Коши 42
Трёхмерная задача Коши 43
Неоднородное уравнение в задаче Коши 43
СЕМИНАР 5. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. ЧАСТЬ 2 45
Повторение материала предыдущей лекции 45
Профиль струны в различные моменты времени 45
Полуограниченная струна 48
Профиль полуструны с закреплённым концом 50
СЕМИНАР 6. ПОЛУОГРАНИЧЕННАЯ СТРУНА 58
Задача на характеристическую точку 58
Теорема о четырех точках 61
Задача на полуограниченную струну 62
Задача на полуограниченную струну с некоторыми краевыми условиями 66
Классическое решение задачи на полуограниченную струну 69
СЕМИНАР 7. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПЛОСКОСТИ 71
Формула Кирхгофа. Формула Пуассона 71
Принцип Гюйгенса 71
Задача на нахождение точек в состоянии покоя 73
Усложненная задача на нахождение точек в состоянии покоя 76
Волновое уравнение. Метод Фурье (метод разделения переменных) 78
СЕМИНАР 8. МЕТОД ФУРЬЕ. ЧАСТЬ 1 82
Задача Штурма-Лиувилля 82
Ряд Фурье 85
Общий случай (неоднородное уравнение) 87
Задача с неоднородными краевыми условиями 89

Пример (задача о колебаниях конечной струны с закрепленными концами) 90

СЕМИНАР 9. МЕТОД ФУРЬЕ. ЧАСТЬ 2 93

Задача о колебаниях конечной струны с закрепленными концами (продолжение решения задачи из предыдущего семинара) 93

Задача 2016 (8) из сборника задач по уравнениям математической физики под ред. В. С. Владимирова 97

Задача. Уравнение распространения тепла 102

СЕМИНАР 10. МЕТОД ФУРЬЕ. ЧАСТЬ 3. 107

Метод Фурье решения краевых задач для уравнения Лапласа 107

Пример решения задачи на нахождение гармонической функции в прямоугольнике. 108

Решение краевой задачи для уравнения 118

Лапласа в кольце. 118

Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в круге 123

Семинар 1. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости

Канонический вид уравнений

На данном занятии будем заниматься приведением к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости. Вспомним общую схему приведения уравнения к каноническому виду. Имеем уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} = \Phi(x, u, \nabla u) \quad (1)$$

Для классификации данного уравнения необходимо выбрать точку $x_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотреть матрицу главной части:

$$A(x_0) = \left(a^{ij}(x_0)\right)$$

Соответствующая квадратичная форма матрицы главной части имеет вид:

$$(A(x_0)\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)\xi_i \xi_j$$

Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду, пусть, в данном случае преобразование имеет вид:

$$\xi = T(x_0)\eta$$

Выполняя данное преобразование, получим квадратичную форму в каноническом виде:

$$(A(x_0)\xi, \xi) \to \eta_1^2 + \dots + \eta_{n_+}^2 - \eta_{n_+ +1}^2 - \dots - \eta_{n_+ + n_-}^2$$

Где n_+, n_- - соответственно число положительных и отрицательных СЗ квадратичной формы, являются её инвариантами. n_0 – число нулевых СЗ. По данным числам происходит классификация уравнения (1). Сделаем следующую замену переменных:

$$y = T^t(x_0)x$$

При этом, (1) запишется в каноническом виде с главной частью:

$$v_{y_1y_1} + \cdots + v_{y_{n_+}y_{n_+}} - v_{y_{n_++1}y_{n_++1}} - \cdots - v_{y_{n_++n_-}y_{n_++n_-}} = \widetilde{\Phi}(y, v, \nabla v)$$

Классификация уравнений. Приведение к каноническому виду на плоскости

Прежде всего, заметим, что к каноническому виду мы приводили уравнения при фиксированной точке $x = x_0$. Рассмотрим тип уравнения, в зависимости от рассмотренных инвариантов:

1) При $n_+ = n$ (или $n_- = n$) уравнение в точке x_0 эллиптического типа.

2) При $n_+ = n - 1,\ n_- = 1$ (или $n_- = n - 1, n_+ = 1$) уравнение в точке x_0 гиперболического типа.

3) При $n_0 > 0$ уравнение в точке x_0 параболического типа.

В отличие от других размерностей, в двухмерном случае имеется возможности классифицировать уравнение не только в точке, но и в области пространства. Рассмотрим уравнение на плоскости $n = 2$:

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = \Phi\big(x, y, u_x, u_y\big) \quad (2)$$

Предположим, что все коэффициенты непрерывны и хотя бы один в каждой точке отличен от нуля. Тогда, соответствующая матрица имеет вид:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

Характеристические числа находим, как корни следующего уравнения:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4} = 0$$

Имеем два вещественных корня:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2}$$

Для классификации необходимо знать информацию о знаке СЗ, из (2) имеем следующую классификацию на области:

1) При $b^2 - 4ac < 0$ уравнение эллиптического типа

2) При $b^2 - 4ac > 0$ уравнение гиперболического типа

3) При $b^2 - 4ac = 0$ уравнение параболического типа

Пример

В качестве примера рассмотрим уравнение:

$$yu_{xx} - xu_{yy} = 0$$

$$b^2 - 4ac = 4xy$$

Пространство разбилось на следующие области, в зависимости от знаков характеристических чисел (Рисунок 1.1):

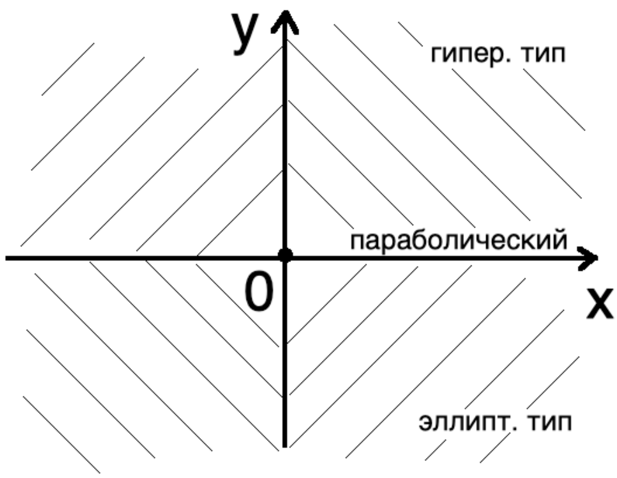


Рисунок 1.1

Исключая точку $(0,0)$, на осях уравнение имеет параболический тип, в первой и в третьей четвертях – гиперболический, во второй и в четвертой четвертях – эллиптический.

Теорема о невырожденной замене переменных

Теорема: Тип уравнения (2) не меняется (является инвариантом (2)) при невырожденной замене переменных.

Доказательство: производим невырожденную замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

В новых переменных ξ, η $\Big(u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)\Big)$ главная часть имеет вид:

$$v(\xi,\eta): \quad A(\xi,\eta)v_{\xi\xi} + B(\xi,\eta)v_{\xi\eta} + C(\xi,\eta)v_{\eta\eta} = \widetilde{\Phi}(\xi,\eta,v,\nabla v) \quad (3)$$

Найдём зависимость новых коэффициентов от старых, рассмотрим производные:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$$

$$u_{xx} = \big(v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x\big)\xi_x + \big(v_{\eta\xi}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x\big)\eta_x$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}\eta_x^2 + v_\xi\xi_{xx} + v_\eta\eta_{xx}$$

Аналогично имеем:

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}\eta_y^2 + v_\xi\xi_{yy} + v_\eta\eta_{yy}$$

Для смешанной производной получим:

$$u_{xy} = \big(v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\xi\eta}\eta_y\big)\xi_x + \big(v_{\eta\xi}\xi_y + v_{\eta\eta}\eta_y\big)\eta_x + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy}$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}\big(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\big) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy}$$

Подставим полученные выражения в уравнение для поиска коэффициентов:

$$v_{\xi\xi}:\ A(\xi,\eta) = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2$$

$$v_{\xi\eta}:\ B(\xi,\eta) = 2a\xi_x\eta_x + b\big(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\big) + 2c\xi_y\eta_y$$

$$v_{\eta\eta}:\ C(\xi,\eta) = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2$$

Тип уравнения зависит от знака выражения - $b^2 - 4ac$, как было отмечено выше. После несложных вычислений и приведения подобных получим для (3):

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)\cdot J^2$$

Приведение к каноническому виду. Характеристики

Для написания характеристики необходима главная часть уравнения. Для уравнения характеристики на плоскости:

$$\omega(x,y) = C$$

С матрицей:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

Имеем следующее уравнение характеристики:

$$(A_0\nabla\omega, \nabla\omega) = 0$$

$$a\omega_x^2 + b\omega_x\omega_y + c\omega_y^2 = 0$$

В случае плоскости от уравнения выше можем перейти к обыкновенному дифференциальному. Действительно, вдоль характеристик:

$$d\omega = 0$$

$$\Rightarrow\ \omega_x dx + \omega_y dy = 0$$

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = -\frac{dy}{dx}$$

$$a dy^2 - b dy dx + c dx^2 = 0 \quad (4)$$

Уравнение, полученное выше – уравнение характеристики. Основное утверждение для вывода канонического вида: характеристика переходит в характеристику при преобразовании независимых переменных, т.е. для характеристики - $\omega(x,y)=C$ при замене переменных:

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

Получим новое уравнение характеристики:

$$\widetilde{\omega}(\xi,\eta):\quad A\widetilde{\omega}_\xi^2+B\widetilde{\omega}_\xi\widetilde{\omega}_\eta+C\widetilde{\omega}_\eta^2=0.\quad (5)$$

Заметим, что при $a\neq 0$ (4) разрешается, как:

$$ay'^2-by'+c=0$$

$$y'=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Рассмотрим, как привести (2) к каноническому виду на множествах, где сохраняется знак $\sqrt{b^2-4ac}$, для этого рассмотрим три случая.

Первый случай

Пусть $\sqrt{b^2-4ac}>0$ (гиперболический тип), тогда:

$$y'=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$y'=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Предположим, что данные уравнения удалось разрешить, запишем их решения в виде первых интегралов, для первого и второго уравнений соответственно:

$$\xi(x,y)=C_1,$$

$$\eta(x,y)=C_2$$

Проведём замену переменных:

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

При этом, (2) примет канонический вид. Действительно, из утверждения выше характеристика должна удовлетворять (5). Нетрудно проверить, что

$$\widetilde{\omega} = \xi$$

$$\Rightarrow A \equiv 0$$

$$\widetilde{\omega} = \eta$$

$$\Rightarrow C \equiv 0$$

Из соотношений выше и (5) получим первый канонический вид для гиперболического уравнения:

$$v_{\xi\eta} = \Phi_0\big(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta\big)$$

Получим второй канонический вид, проделав замену переменных:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi + \eta \\ \eta_1 = \xi - \eta \end{cases}$$

$$V\big(\xi_1(\xi,\eta), \eta_1(\xi,\eta)\big) \equiv v(\xi,\eta)$$

$$v_\xi = V_{\xi_1} + V_{\eta_1}, \qquad v_\eta = V_{\xi_1} - V_{\eta_1}$$

$$v_{\xi\eta} = \big(V_{\xi_1} + V_{\eta_1}\big)_{\xi_1} - \big(V_{\xi_1} + V_{\eta_1}\big)_{\eta_1} = V_{\xi_1\xi_1} - V_{\eta_1\eta_1}$$

Окончательно, получаем второй канонический вид:

$$V_{\xi_1\xi_1} - V_{\eta_1\eta_1} = \Phi_1(\xi_1, \eta_1, v, \nabla v)$$

Второй случай

Пусть $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ (параболический тип), тогда:

$$y' = \frac{b}{2a}$$

В этом случае, вообще говоря, решая имеем один первый интеграл:

$$\xi(x, y) = C_1$$

Однако, для замены переменных в качестве второй функции можно взять любую достаточно гладкую функцию, главное, чтобы замена была не вырождена:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

Для нового уравнения справедливы соотношения:

$$B^2 - 4AC = 0$$

$$\widetilde{\omega}(\xi,\eta) = \xi \ (\text{решение } (5))$$

$$\Rightarrow A = 0$$

Сопоставляя соотношения, получим также, что $B = 0$. В новых переменных уравнение приобретёт канонический вид параболического уравнения на плоскости:

$$v_{\eta\eta} = \Phi_2(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

Третий случай

Пусть $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ (эллиптический тип), тогда имеем два комплексно сопряжённых корня, один из которых имеет следующий вид:

$$y' = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}$$

Разрешая, получим первый интеграл в следующем виде:

$$\xi(x,y) + i\eta(x,y) = C$$

Сделаем следующую замену:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

Аналогично предыдущим случаям, функция $\widetilde{\omega}(\xi,\eta) = \xi + i\eta$ (не являясь характеристикой при этом!) должна удовлетворять уравнению характеристик (5). Подставляя, получим:

$$A + iB - C = 0$$

$$\Rightarrow A = C, \qquad B = 0$$

Получаем канонический вид эллиптического уравнения на плоскости:

$$\Delta v \equiv v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Phi_3\big(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta\big)$$

Пример

В качестве примера рассмотрим уравнение:

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$$

Необходимо: определить тип, найти характеристики (если имеются), привести к каноническому виду.

Определим тип:

$$b^2 - 4ac = 16 > 0$$

Следовательно, имеем гиперболический тип на всей плоскости. Найдём характеристики, написав обыкновенное дифференциальное уравнение характеристик:

$$y'^2 + 2y' - 3 = 0$$

$$y' = -\frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

$$y' = 1: \quad \xi(x, y) \equiv x - y = C_1$$

$$y' = -3: \quad \eta(x, y) \equiv 3x + y = C_2$$

Нашли явно два семейства характеристик. Сделаем следующую невырожденную замену:

$$\begin{cases} \xi = x - y \\ \eta = 3x + y \end{cases}$$

$$u(x, y) = u\big(\xi(x, y), \eta(x, y)\big)$$

$$u_x = v_\xi + 3v_\eta,$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 9v_{\eta\eta} + 6v_{\xi\eta}$$

$$u_y = -v_\xi + v_\eta,$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = -\big(v_\xi + 3v_\eta\big)_\xi + v_{\xi\eta} + 3v_{\eta\eta}$$

$$-\left(v_\xi + 3v_\eta\right)_\xi + v_{\xi\eta} + 3v_{\eta\eta} = -v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + 3v_{\eta\eta}$$

Подставляя, получим:

$$v_{\xi\xi} + 9v_{\eta\eta} + 6v_{\xi\eta} + 2v_{\xi\xi} + 4v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta} - 3v_{\xi\xi} + 6v_{\xi\eta} - 3v_{\eta\eta} + v_\eta - v_\xi = 0$$

Приводя подобные, получим канонический вид уравнения:

$$v_{\xi\eta} = \frac{v_\xi - v_\eta}{16}$$

Семинар 2. Классификация линейных уравнений с частными производными 2-ого порядка на плоскости. Часть 1

Повторение определений

Вспомним общий вид уравнения с частными производными второго порядка на плоскости (линейно в главной части):

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = \Phi\big(x,y,u,u_x,u_y\big) \quad (1)$$

Правая часть в выражении (1) не влияет на классификацию уравнения, а также на приведение его к каноническому виду. Тип уравнения (1) в области пространства определяется следующим соотношением:

$$b^2 - 4ac = \begin{cases} > 0, & \text{гиперболический тип} \\ < 0, & \text{эллиптический тип} \\ = 0, & \text{параболический тип} \end{cases}$$

Важнейшее утверждение, сформулированное на прошлом семинаре: тип уравнения не меняется при невырожденной замене переменных:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

Так как замена невырожденная, то:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

Характеристикой уравнения (1) является кривая, заданная уравнением:

$$l\colon\ \omega(x,y) = 0$$

Если выполнено соотношение для каждой точки кривой:

$$(\mathrm{A}_0 \nabla\omega, \omega) = 0$$

Где A_0 – матрица главной части:

$$A_0(x,y) = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

Другое определение характеристики: характеристика – кривая на плоскости, нормаль к которой в каждой её точке имеет характеристическое направление:

$$\nu(x,y) \equiv \big(\nu_1(x,y), \nu_2(x,y)\big), \qquad \nabla\omega \parallel \nu$$

$$(A_0\nu, \nu) = 0$$

Также напомним второе утверждение, сформулированное ранее: характеристика переходит в характеристику при невырожденной замене координат, то есть:

Пусть $A(\xi,\eta), B(\xi,\eta), C(\xi,\eta)$ – коэффициенты в главной части (1) при невырожденной замене, тогда для новой характеристики - $\widetilde{\omega}(\xi,\eta)$ имеем уравнение:

$$A\widetilde{\omega}_\xi^2 + B\widetilde{\omega}_\xi\widetilde{\omega}_\eta + C\widetilde{\omega}_\eta^2 = 0$$

Также напомним иной вид для уравнения характеристики на плоскости:

$$a(dy)^2 - b\,dy\,dx + c(dx)^2 = 0$$

При $a \neq 0$ имеем более простой вид:

$$ay'^2 - by' + c = 0 \to y(x)$$

При $a = 0, c \neq 0$ имеем также более простой вид:

$$cx'^2 - bx' = 0 \to x(y)$$

При $a = 0, c = 0$ имеем $b \neq 0$, а также характеристики:

$$x = c_1, \qquad y = c_2$$

Повторение. Приведение к каноническому виду

Имеем различные случаи:

А) $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ (гиперболический тип), тогда:

$$y' = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad y' = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad a \neq 0$$

Запишем их решения в виде первых интегралов:

$$\xi(x,y) = C_1, \qquad \eta(x,y) = C_2$$

Проведём замену переменных для приведения к каноническому виду:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

Заметим, что замена не вырождена. Действительно, предположим, что это не так. Тогда имеем для их расположения на плоскости точки касания (Рисунок 2.1):

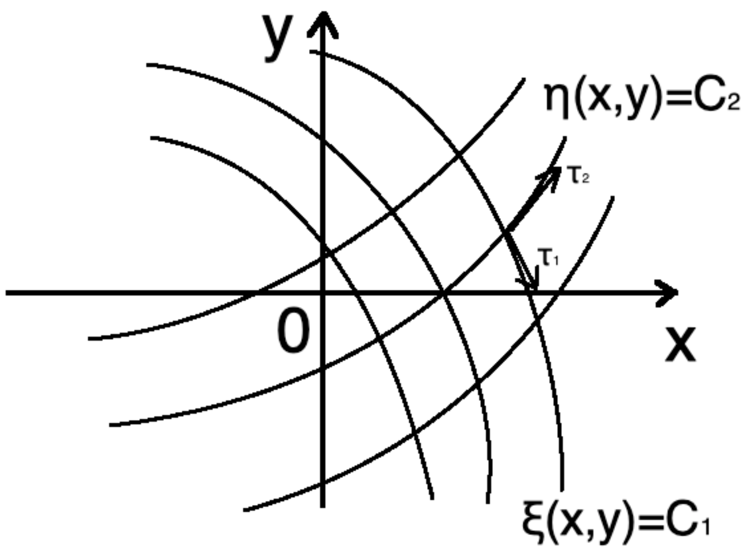


Рисунок 2.1

Однако, характеристики были получены для различных y', так как $\sqrt{b^2-4ac} > 0$, следовательно, характеристики одного семейства не касаются характеристик другого. Следовательно, угол между векторами касательных - $\angle(\tau_1, \tau_2) \neq 0, \pi$. Угол между нормалями к данным характеристикам такой же, как и между нормалями, поэтому:

$$\nabla\xi \nparallel \nabla\eta \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

При такой замене получим первый канонический вид:

$$u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)$$

$$v_{\xi\eta} = \widetilde{\Phi}\big(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta\big)$$

При следующей замене координат:

$$\begin{cases}\xi_1 = \xi + \eta \\ \eta_1 = \xi - \eta\end{cases}$$

Получим второй канонический вид уравнения:

$$\omega(\xi_1, \eta_1) = v\big(\xi_1(\xi, \eta), \eta_1(\xi, \eta)\big)$$

$$\omega_{\xi_1\xi_1} - \omega_{\eta_1\eta_1} = \widehat{\Phi}$$

B) $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ (эллиптический тип), тогда имеем два комплексно-сопряжённых корня:

$$y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}$$

Так как корни уравнения выше комплексны – характеристики отсутствуют. Запишем решение для одного из корней в виде первого интеграла:

$$\xi(x, y) + i\eta(x, y) = C \in \mathbb{C}$$

Сделаем следующую замену:

$$\begin{cases}\xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y)\end{cases}$$

В данных координатах (1) записывается в каноническом виде, как было доказано ранее:

$$\Delta v \equiv v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Phi_0(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

Данная замена является невырожденной. Действительно, если предположить, что якобиан равен нулю, то есть $\nabla\xi, \nabla\eta$ – линейно зависимы, то при подстановке $\xi(x, y) + i\eta(x, y) = C$ в уравнение характеристик, получим, что у данного уравнения характеристики вещественны – противоречие.

C) $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ (параболический тип), тогда:

$$y' = \frac{b}{2a}$$

В этом случае, вообще говоря, решая имеем один первый интеграл:

$$\xi(x, y) = C$$

Однако, для замены переменных в качестве второй функции можно взять любую достаточно гладкую функцию, главное, чтобы замена была не вырождена:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

В новых переменных уравнение приобретёт канонический вид параболического уравнения на плоскости:

$$v_{\eta\eta} = \Phi\big(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta\big)$$

Задача 1. Параболический тип

Рассмотрим следующую задачу. Для уравнения, данного ниже необходимо, определить тип, найти характеристики и привести к каноническому виду:

$$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$$

Определим тип уравнения:

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4^2 = 0 \text{ (параболический тип)}$$

Запишем уравнение характеристик:

$$4y'^2 - 4y' + 1 = 0$$

$$y' = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Пусть решением такого уравнения является функция вида (искомое семейство характеристик):

$$2y - x = c_1$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = -x + 2y \\ \eta = x \end{cases}$$

Замена невырожденная, действительно:

$$\mathrm{J} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

Для канонического вида необходимо пересчитать все производные в новых переменных:

$$u(x,y) = v(\xi,\eta) = v\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)$$

$$u_x = -v_\xi + v_\eta, \qquad u_{xx} = v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta},$$

$$u_y = 2v_\xi, \qquad u_{yy} = 4u_{\xi\xi},$$

$$u_{xy} = -2v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta}$$

Подставляя, получим следующие коэффициенты в главной части:

$$v_{\xi\xi}: \quad 4 - 8 + 4 = 0$$

$$v_{\eta\eta}: \quad 4, \qquad v_{\xi\eta} = -8 + 8 = 0$$

$$4v_{\eta\eta} - 4v_\xi = 0$$

В каноническом виде, окончательно, получаем уравнение теплопроводности:

$$v_{\eta\eta} = v_\xi$$

Задача 2. Эллиптический тип

Имеем ту же задачу для уравнения:

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0$$

Убедимся, что уравнение эллиптического типа:

$$b^2 - 4ac = 4\sin^2 x - 4\cdot(2 - \cos^2 x) = 4 - 8 = -4 < 0$$

Действительно, уравнение на всей плоскости эллиптического типа и характеристик нет. Уравнение характеристик имеет вид:

$$y'^2 + 2\sin x\, y' + 2 - \cos^2 x = 0$$

$$y' = \frac{-2\sin x \pm 2i}{2} = -\sin x \pm i$$

$$y = \cos x \pm ix + C$$

Разделяя мнимую и вещественную части:

$$(y-\cos x)\pm ix=C$$

Сделаем следующую замену:

$$\begin{cases}\xi = y-\cos x\\ \eta = x\end{cases}$$

Замена невырожденная, так как якобиан отличен от нуля:

$$\mathrm{J}=\begin{vmatrix}\sin x & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

Пересчитаем производные:

$$u_x=v_\xi\sin x+v_\eta$$

$$\begin{aligned}u_{xx}&=\cos x v_\xi+\sin x\left(v_{\xi\xi}\sin x+v_{\xi\eta}\right)+v_{\xi\eta}\sin x+v_{\eta\eta}\\&=\cos x\,v_\xi+\sin^2 x\,v_{\xi\xi}+2\sin x\,v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta}\end{aligned}$$

$$u_y=v_\xi,\qquad u_{yy}=v_{\xi\xi}$$

$$u_{xy}=v_{\xi\xi}\sin x+v_{\xi\eta}$$

Подставим их в уравнение, получим канонический вид:

$$\sin^2 x\,v_{\xi\xi}+2\sin x\,v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta}+\cos x\,v_\xi-2\sin^2 x\,v_{\xi\xi}-2\sin x\,v_{\xi\eta}+(2-\cos^2 x)v_{\xi\xi}=0$$

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\cos\eta\,v_\xi=0$$

Пример 3. Гиперболический тип

Разрешим ту же задачу, а также найдём общее решение для нового уравнения:

$$u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2 x\,u_{yy}-\sin x\,u_y=0$$

Определим тип уравнения:

$$b^2-4ac=4\cos^2 x+4\sin^2 x=4>0$$

Получаем, что оно на всей плоскости гиперболического типа. Уравнение характеристик имеет вид:

$$y'^2-2\cos x\,y'-\sin^2 x=0$$

$$y' = \frac{2\cos x \pm 2}{2} = \cos x \pm 1$$

$$y = \sin x + x + c_1, \qquad y = \sin x - x + c_2$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \equiv y - \sin x - x \\ \eta = \eta(x,y) \equiv y - \sin x + x \end{cases}$$

Замена невырожденная – достаточно проверить нетривиальность якобиана. Выразим производные:

$$\xi_x = -\cos x - 1, \qquad \eta_x = -\cos x + 1$$

$$u_x = v_\xi(-\cos x - 1) + v_\eta(-\cos x + 1)$$

$$\begin{aligned} u_{xx} = v_\xi \sin x + v_\eta \sin x + (-\cos x - 1)\left(v_{\xi\xi}(-\cos x - 1) + v_{\xi\eta}(-\cos x + 1)\right) \\ + (-\cos x + 1)\left(v_{\xi\eta}(-\cos x - 1) + v_{\eta\eta}(-\cos x + 1)\right) \\ = \sin x\left(v_\xi + v_\eta\right) + (1+\cos x)^2 v_{\xi\xi} - 2(1-\cos^2 x)v_{\xi\eta} + (1-\cos x)^2 v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$u_y = v_\xi + v_\eta, \qquad u_{yy} = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2v_{\xi\eta}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (-\cos x - 1)\left(v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}\right) + (1-\cos x)\left(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) \\ &= (-\cos x - 1)v_{\xi\xi} - 2\cos x\, v_{\xi\eta} + (1-\cos x)v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Подставим производные в уравнение, и, так как уравнение гиперболического типа, убедимся, что производные при $v_{\xi\xi}$ и при $v_{\eta\eta}$ – обнулятся:

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi}:\quad & (1+\cos x)^2 + 2\cos x\,(-\cos x - 1) - \sin^2 x \\ & = 1 + 2\cos x + \cos^2 x - 2\cos^2 x - 2\cos x - \sin^2 x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\eta\eta}:\quad & (1-\cos x)^2 + 2\cos x\,(1-\cos x) - \sin^2 x \\ & = 1 - 2\cos x + \cos^2 x + 2\cos x - 2\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta}:\quad & -2(1-\cos^2 x) + 2\cos x\,(-2\cos x) - 2\sin^2 x \\ & = -2 + 2\cos^2 x - 4\cos^2 x - 2\sin^2 x = -4 \end{aligned}$$

Получаем канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0$$

Разрешим уравнение, как:

$$\left(v_\xi\right)_\eta = 0 \Rightarrow v_\xi = c(\xi)$$

Интегрируя, получим:

$$v(\xi,\eta) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} c(\tau)\,d\tau + c_0(\eta) = g(\xi) + f(\eta)$$

Окончательно, запишем общее решение уравнения в терминах x, y:

$$v_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow v(\xi,\eta) = g(\xi) + f(\eta)$$

$$u(x,y) = g(y - \sin x - x) + f(y - \sin x + x)$$

Где f, g – дважды непрерывно дифференцируемые функции одной переменной.

Семинар 3. Классификация линейных уравнений с частными производными 2-ого порядка на плоскости. Часть 2

Задача 1. Уравнение с переменными коэффициентами

Ранее были рассмотрены примеры, которые нетривиальной заменой приводились к каноническому виду на всей плоскости. Рассмотрим пример, в котором замена различна в разных областях:

$$x^2u_{xx} - 2xy\,u_{xy} + y^2u_{yy} + 2x\,u_x = 0$$

Определим тип уравнения:

$$b^2 - 4ac = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 \equiv 0$$

Получаем, что тип параболический. Запишем и решим уравнение характеристик:

$$x^2(dy)^2 + 2xy\,dx\,dy + y^2(dx)^2 = 0$$

$$(x\,dy\ + y\,dx)^2 = 0$$

$$d(xy) = 0$$

$$\Rightarrow xy = c$$

Согласно общей теории необходима невырожденная замена:

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = x \end{cases}$$

Якобиан данной замены обращается в ноль при $x = 0$:

$$J = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x \neq 0$$

Получаем, что замена работает всюду, кроме оси ординат. С учётом замены пере считаем производные:

$$u(x, y) = v(\xi, \eta)$$

$$u_x = yv_\xi + v_\eta$$

$$u_y = xv_\xi$$

$$u_{xx} = y^2 v_{\xi\xi} + 2yv_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = x^2 v_{\xi\xi}$$

$$u_{xy} = (u_x)_y$$

$$(u_x)_y = v_\xi + xyv_{\xi\xi} + xv_{\xi\eta}$$

Подставим и посчитаем коэффициенты в главной части:

$$v_{\xi\xi}: \quad x^2y^2 - 2x^2y^2 + x^2y^2 = 0$$

$$v_{\xi\eta}: \quad 2x^2y - 2x^2y = 0$$

$$v_{\eta\eta}: \quad x^2 = \eta^2$$

Окончательно, получим уравнение в каноническом виде:

$$\eta^2 v_{\eta\eta} + 2xyv_\xi + 2xv_\eta - 2xyv_\xi = 0$$

$$\eta^2 v_{\eta\eta} + 2\eta v_\eta = 0$$

$$\eta v_{\eta\eta} + 2v_\eta = 0$$

$$v_{\eta\eta} = -\frac{2}{\eta} v_\eta$$

Решим полученное уравнение (уравнение Эйлера), понизив порядок:

$$v_\eta = g$$

$$\eta g_\eta + 2g = 0$$

$$g_\eta = -\frac{2}{\eta} g$$

Проинтегрируем данное уравнение:

$$\ln|g| = \ln|\eta|^{-2} + \ln|c_0|$$

$$g = \frac{c_0(\xi)}{\eta^2} = v_\eta$$

Общий вид решения (c_1, c_2 – произвольные функции):

$$v(\xi,\eta) = \frac{c_1(\xi)}{\eta} + c_2(\xi)$$

Возвращаясь к исходным переменным:

$$u(x,y) = \frac{c_1(xy)}{x} + c_2(xy), \qquad x \neq 0 \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда $x = 0$. Необходимо рассмотреть иную замену:

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = y \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y \neq 0$$

В данном случае, мы не можем использовать такую замену на оси OX. Посчитаем производные:

$$u_x = v_\xi y$$

$$u_y = xv_\xi + v_\eta$$

$$u_{xx} = y^2 v_{\xi\xi}$$

$$u_{yy} = x^2 v_{\xi\xi} + 2xv_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = \left(v_\xi y\right)_y$$

$$\left(v_\xi y\right)_y = v_\xi + y\left(xv_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}\right)$$

$$v_\xi + y\left(xv_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}\right) = v_\xi + xyv_{\xi\xi} + yv_{\xi\eta}$$

Рассчитаем коэффициенты при производных:

$$v_{\xi\xi}: \quad x^2y^2 + x^2y^2 - 2x^2y^2 \equiv 0$$

$$v_{\xi\eta}: \ -2xy^2 + 2xy^2 \equiv 0$$

$$v_{\eta\eta}:\quad 0,\qquad v_{\xi}:\quad 0$$

Окончательно, получим уравнение в каноническом виде:

$$\eta^2 v_{\eta\eta} = 0$$

$$\Rightarrow v_{\eta\eta} = 0$$

Уравнение разрешается, как:

$$v(\xi,\eta) = \tilde{c}_1(\xi)\eta + \tilde{c}_2(\xi)$$

В исходных переменных:

$$u(x,y) = \tilde{c}_1(xy)y + \tilde{c}_2(xy),\qquad y \neq 0\quad (2)$$

Рассмотрим, что будет в областях, где $x \neq 0, y \neq 0$. Пусть, (x_0, y_0) произвольная точка на плоскости ($x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$), тогда решением исходного уравнения являются (1) и (2). В данном случае очевидно, что решения семейства (1) также входят в семейство (2) и наоборот:

$$\tilde{c}_1(xy) = \frac{c_1(xy)}{xy}y,\qquad \tilde{c}_2(xy) = c_2(xy)$$

Точка $\mathrm{x} = 0, y = 0$ не рассматривается, так как в ней уравнение вырождается вовсе.

Задача 2. Трёхмерный случай

Ранее упоминалось про приведение к каноническому виду уравнения произвольной размерности. В заключение, рассмотрим трёхмерный случай. При этом, уравнение может быть приведено к каноническому виду во всём пространстве, если уравнение с постоянными коэффициентами. Рассмотрим следующий пример:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$$

Матрица главной части имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим квадратичную форму:

$$(A\xi,\xi) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2 + 6\xi_3^2$$

Используем метод Лагранжа для приведения формы:

$$(A\xi,\xi) = \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_2-\xi_3) + (\xi_2-\xi_3)^2 - (\xi_2-\xi_3)^2 + 2\xi_2^2 + 6\xi_3^2$$

$$\xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_2-\xi_3) + (\xi_2-\xi_3)^2 - (\xi_2-\xi_3)^2 + 2\xi_2^2 + 6\xi_3^2 = (\xi_1+\xi_2-\xi_3)^2 + \xi_2^2 + 2\xi_2\xi_3 + 5\xi_3^2$$

$$(\xi_1+\xi_2-\xi_3)^2 + \xi_2^2 + 2\xi_2\xi_3 + 5\xi_3^2 = (\xi_1+\xi_2-\xi_3)^2 + (\xi_2+\xi_3)^2 + (2\xi_3)^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$$

Так как все коэффициенты в каноническом виде формы одного знака, то уравнение эллиптического типа.

На следующем этапе необходимо выразить - $\xi = T\eta$:

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \\ \eta_2 = \xi_2 + \xi_3 \\ \eta_3 = 2\xi_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \\ \xi_2 = \eta_2 - \dfrac{\eta_3}{2} \\ \xi_3 = \dfrac{\eta_3}{2} \end{cases}$$

Соответствующая матрица имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Далее сделаем следующую замену:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = -x + y \\ \gamma = x - \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} \end{cases}$$

Так как уравнение эллиптического типа, можем ожидать, что при такой замене в каноническом виде:

$$\Delta v(\alpha, \beta, \gamma) \equiv 0$$

Пересчитаем производные для новых переменных:

$$u_x = v_\alpha - v_\beta + v_\gamma$$

$$u_{xx} = v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_{\gamma\gamma} - 2v_{\alpha\beta} + 2v_{\alpha\gamma} - 2v_{\beta\gamma}$$

$$u_y = v_\beta - \frac{1}{2}v_\gamma$$

$$u_{yy} = v_{\beta\beta} + \frac{1}{4}v_{\gamma\gamma} - v_{\beta\gamma}$$

$$u_z = \frac{1}{2}v_\gamma$$

$$u_{zz} = \frac{1}{4}v_{\gamma\gamma}$$

$$u_{xy} = \left(v_\alpha - v_\beta + v_\gamma\right)_y = v_{\alpha\beta} - v_{\beta\beta} + v_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}v_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}v_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}v_{\gamma\gamma}$$
$$= v_{\alpha\beta} - v_{\beta\beta} + \frac{3}{2}v_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}v_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}v_{\gamma\gamma}$$

$$u_{xz} = \frac{1}{2}\left(v_\alpha - v_\beta + v_\gamma\right)_\gamma = \frac{1}{2}v_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}v_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}v_{\gamma\gamma}$$

Рассчитаем коэффициенты при производных:

$$v_{\alpha\alpha}: \quad 1$$

$$v_{\beta\beta}: \quad 1 - 2 + 2 = 1$$

$$v_{\gamma\gamma}: \quad 1 - 1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$v_{\alpha\beta}:\quad -2+2=0$$

$$v_{\alpha\gamma}:\quad 2-1-1=0$$

$$v_{\beta\gamma}:\quad -2+3+1-2=0$$

Окончательно, в каноническом виде получим:

$$\Delta v = v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_{\gamma\gamma} = 0$$

Задача Коши. Пример

Рассмотрим следующую задачу Коши (уравнение + начальные условия):

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0 \\ u|_{y=0} = x^2, \qquad u_y|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

Для решения этой задачи рассмотрим тип уравнения, приведём его к каноническому виду и найдём общее решение. Определим тип:

$$b^2 - 4ac = 16 + 20 = 36 > 0$$

Получаем, что уравнение гиперболического типа. Уравнение характеристик:

$$y'^2 - 4y' - 5 = 0$$

$$y' = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Имеем два семейства характеристик:

$$y - 5x = c_1, \qquad y + x = c_2$$

Сделаем следующую замену для приведения к каноническому виду:

$$\begin{cases} \xi = y - 5x \\ \eta = x + y \end{cases} \Rightarrow v_{\xi\eta} = 0$$

$$v(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим общее решение:

$$u(x, y) = g(-5x + y) + h(x + y)$$

Из полученного множества всех решений необходимо выбрать только те, которые удовлетворяют начальным условиям:

$$u|_{y=0} = x^2 = g(-5x) + h(x)$$

$$\begin{cases} g(-5x) + h(x) = x^2 \\ g'(5x) + h'(x) = 0 \end{cases}$$

Для поиска функций продифференцируем первое уравнение по x, а второе умножим на 5:

$$\begin{cases} -5g'(-5x) + h'(x) = 2x \\ 5g'(5x) + h'(x) = 0 \end{cases}$$

Сложим их:

$$6h'(x) = 2x$$

$$h'(x) = \frac{x}{3}$$

$$h(x) = \frac{x^2}{6} + c_0$$

Вторую функцию найдём из первого уравнения исходной системы:

$$g(-5x) = x^2 - \frac{x^2}{6} - c_0 = \frac{5x^2}{6} - c_0 = \frac{(5x)^2}{30} - c_0$$

$$\tau = -5x, \qquad g(\tau) = \frac{\tau^2}{30} - c_0$$

Искомые функции найдены, при этом, они неоднозначны. Решение задачи Коши найдено:

$$u(x,y) = \frac{(y-5x)^2}{3} + \frac{(x+y)^2}{6}$$

Задача Коши. Начальные условия на характеристике

Рассмотрим случай, когда начальные условия определены на характеристике:

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0 \\ u|_{y=-x} = \phi(x), \qquad u_y|_{y=-x} = \psi(x) \end{cases}$$

Из предыдущей задачи найдено общее решение уравнения:

$$u(x,y) = g(y-5x) + h(x+y)$$

Подставим его в начальные условия:

$$\begin{cases} g(-6x) + h(0) = \phi(x) \\ g'(-6x) + h'(0) = \psi(x) \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение:

$$-6g'(-6x) = 0$$

$$g'(-6x) = \psi(x) - h'(0)$$

Откуда:

$$-6\psi(x) + 6h'(0) = \phi'(x)$$

$$\phi'(x) + 6\psi(x) = 6h'(0)$$

Замечание: при $\phi'(x) + 6\psi(x) \neq const\ \forall x \Rightarrow$ задача Коши не имеет решения.

Если условия заданы на одной из характеристик, то необходимо поставить дополнительное условие разрешимости. Предположим, что условие, сформулированное выше – выполнено, тогда:

$$\phi'(x) + 6\psi(x) = c_0 \quad (*)$$

$$\tau = -6x$$

$$g(\tau) = \phi\left(-\frac{\tau}{6}\right) - h(0)$$

Общее решение имеет вид:

$$u(x,y) = \phi\left(\frac{5x-y}{6}\right) - h(0) + h(x+y)$$

Данное решение удовлетворяет уравнению и первому из условий. Проверим, удовлетворяет ли оно второму начальному условию:

$$u_y|_{y=-x} = \psi(x) = -\frac{1}{6}\phi'(x) + h'(0)$$

Откуда

$$h'(0) = \frac{6\psi(x) + \phi'(x)}{6} = \frac{c_0}{6}$$

Вывод: данная задача Коши при условии (*) имеет бесконечно много решений в виде:

$$u(x,y) = \phi\left(\frac{5x - y}{6}\right) - h(0) + h(x+y)$$

Где h - произвольная дважды непрерывно дифференцируемая на прямой функция такая, что:

$$h'(0) = \frac{c_0}{6}$$

Вывод: задача Коши с начальным условием на характеристике либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много.

Семинар 4. Задача Коши для волнового уравнения. Часть 1

Задача Коши для волнового уравнения.

Рассмотрим уравнение следующего вида (одномерное однородное волновое уравнение):

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

В общем случае (однако, сводится к тому, что выше):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$u(x, t)$ может описывать колебание струны, стержня или газа в трубке. Рассмотрим колебание струны. Пусть в положении равновесия струна лежит на оси OX (Рисунок 4.1). Отклонение струны от положения равновесия в точке с координатой x в момент времени $t - u(x, t)$.

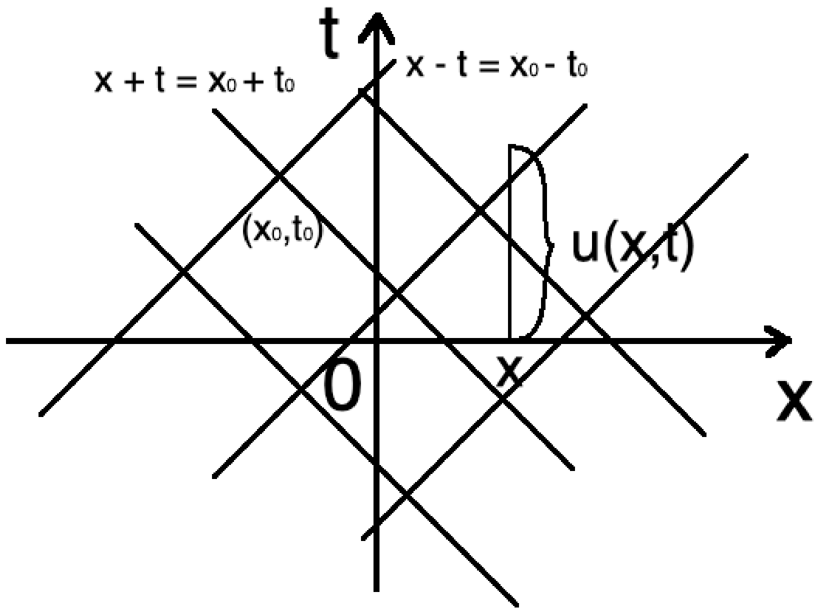


Рисунок 4.1

Пусть имеем профиль струны в фиксированный момент времени (Рисунок 4.2), при этом имеются точки, которые отклоняются, как вниз, так и вверх. Имеются также точки, которые не смещаются вовсе.

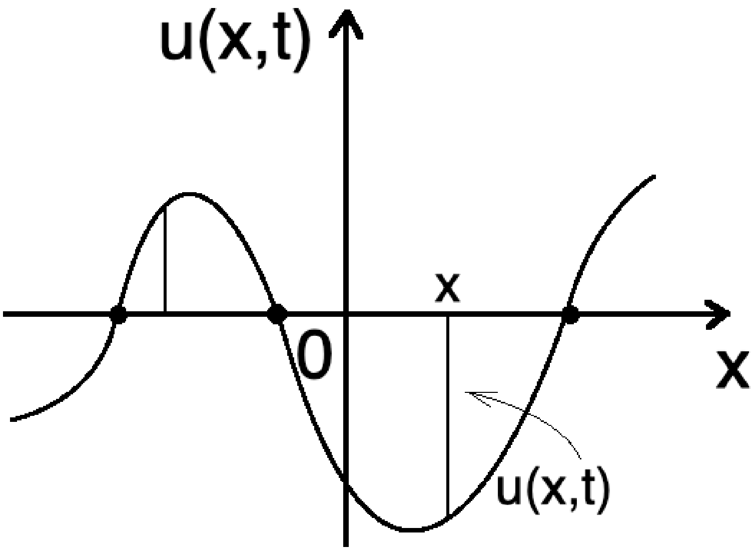


Рисунок 4.2

Необходимо поставить задачу Коши для данного уравнения, решить её и обсудить решение.

Решение задачи Коши

Задача Коши имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (1)$$

Необходимо найти профиль струны в любой момент времени заданному начальному положению струны - $\phi(x)$ и по заданной начальной скорости - $\psi(x)$.

Рассмотрим тип уравнения:

$$b^2 - 4ac = 4 > 0$$

Имеем простейшее уравнение гиперболического типа. Имеем уравнение характеристик:

$$(dx)^2 - (dt)^2 = 0$$

Из него получаем два семейства характеристик:

$$d(x+t)d(x-t) = 0$$

$$x - t = c_1$$

$$x + t = c_2 \ (x_0, t_0)$$

Через каждую точку области проходят характеристики каждого из семейств (Рисунок 4.1). Произведём следующую замену:

$$\begin{cases} \xi = x - t \\ \eta = x + t \end{cases}$$

Уравнение перейдёт в канонический вид:

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Его решения представимы в виде:

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

$$u(x,t) = f(x - t) + g(x + t)$$

Говорят, что решение представимо в виде двух движущихся волн, одна из которых движется слева-направо (Рисунок 4.3), а другая справа-налево с единичной скоростью (Рисунок 4.4).

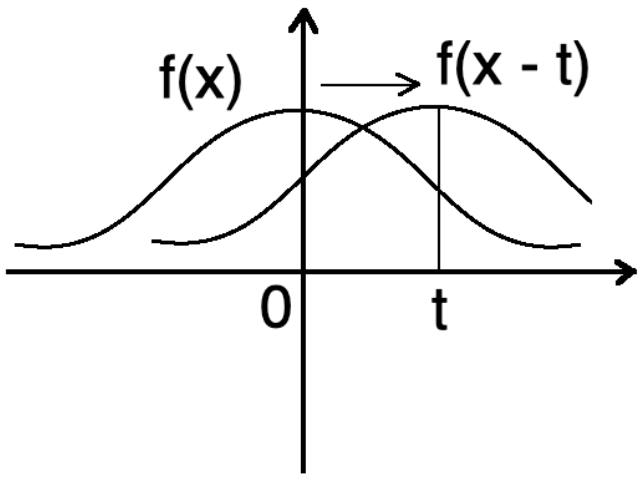


Рисунок 4.3

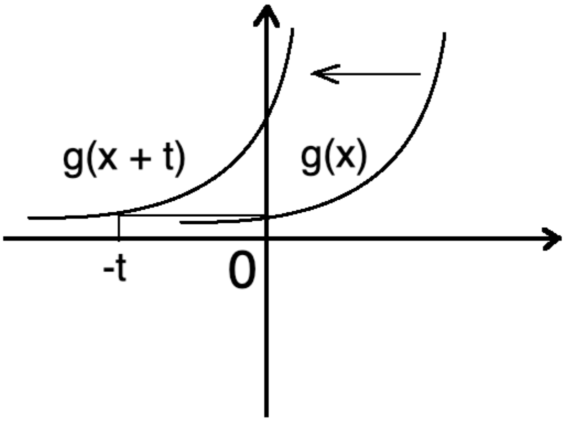


Рисунок 4.4

Необходимо найти те из функций, которые удовлетворяют начальным условиям. Подставим семейство решений в начальные условия:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \phi(x) \\ -f'(x) + g'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

Продифференцируем первое соотношение:

$$f'(x) + g'(x) = \phi'(x)$$

И сложим со вторым исходным:

$$2g'(x) = \phi'(x) + \psi(x)$$

Проинтегрируем до произвольной точки данное соотношение:

$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\tau)\,d\tau + c_0$$

Другую функцию выразим из исходного первого соотношения:

$$f(x) = \phi(x) - g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\tau)\,d\tau - c_0$$

Подставляя найденные функции в общее решение, получим:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\phi(x-t) - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x-t} \psi(\tau)\,d\tau - c_0 + \frac{1}{2}\phi(x+t) + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x+t} \psi(\tau)\,d\tau + c_0$$

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-t)+\phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\,d\tau$$

Получили формулу Даламбера задачи Коши для однородного волнового уравнения. Для того, чтобы $u(x,t)$ была решением задачи необходимо, чтобы $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R}), \psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

Рассмотрим, как зависит решение в фиксированной точке (x_0, t_0) от начального смещения и начальной скорости. Воспользовавшись формулой Даламбера, получим:

$$u(x_0,t_0) = \frac{\phi(x_0-t_0)+\phi(x_0+t_0)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} \psi(\tau)\,d\tau$$

Рассмотрим плоскость OXT (Рисунок 4.5), изобразим на ней рассматриваемую точку - (x_0, t_0) и проведём через неё две характеристики. Характеристики пересекут OX в точках $x_0 - t_0$ и $x_0 + t_0$ соответственно. При этом, решение в рассматриваемой точке зависит только от двух значений $\phi - \phi(x_0 - t_0)$ и $\phi(x_0 + t_0)$ и от значений ψ внутри отрезка - $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$. $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ – область зависимости решения задачи Коши (1) от начальных условий.

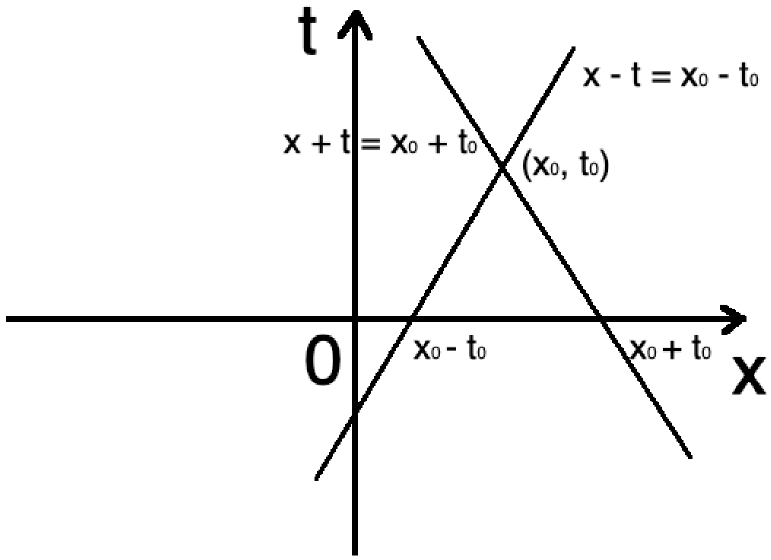


Рисунок 4.5

Задача. Колеблющиеся точки

Рассмотрим следующую задачу. Пусть:

$$supp\ \phi = [1,2]$$

$$supp\ \psi = [-2,-1]$$

Необходимо определить область пространства, в которой при $t > 0$ решение равно нулю.

Решим эту задачу методом характеристик. Изобразим в плоскости OXT характеристики, выходящие из граничных точек отрезков (Рисунок 4.6). Пронумеруем области, на которые была разбита верхняя полуплоскость. Нетрудно увидеть, что по формуле Даламбера такими областями являются – 1, 4, 6, 15:

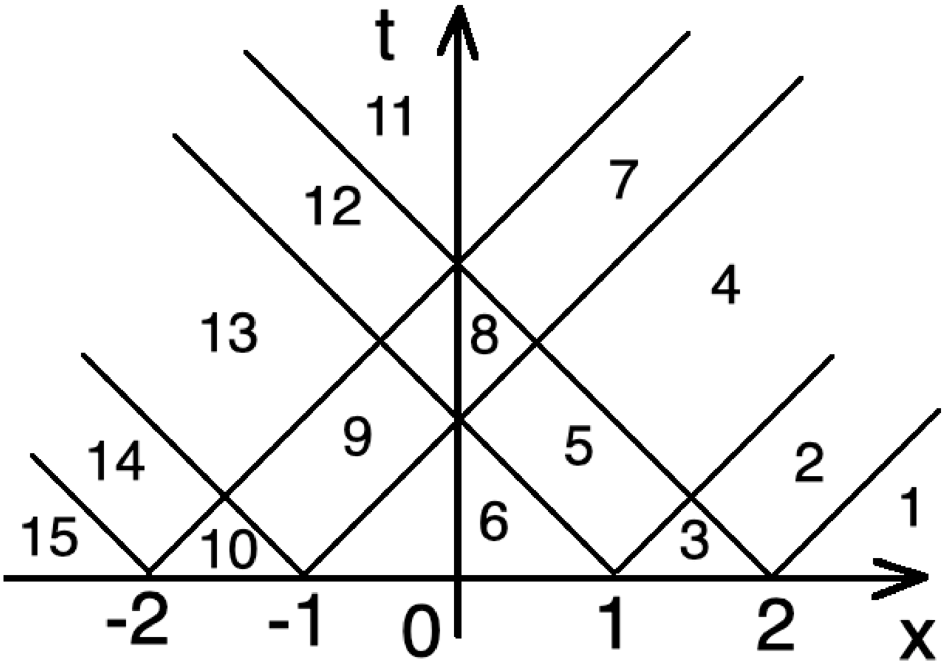


Рисунок 4.6

Метод Дюамеля

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения. Будем полагать, что начальные условия однородны, так как задача с неоднородными условиями сводится к решению предыдущей (однородной) и сформулированной задаче.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \quad u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Согласно методу Дюамеля, утверждается, что решением (2) является:

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\, d\tau$$

Где $v(x,t,\tau)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \quad v_{tt} = v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > \tau \\ v|_{t=\tau} = 0, \qquad v|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}$$

Однако, решение задачи выше мы знаем, так как найти его мы можем по формуле Даламбера:

$$v(x,t,\tau)=\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi$$

Откуда получаем решение (2)

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)\;d\xi\;d\tau$$

Если учесть начальные условия, получим также формулу Даламбера

$$u(x,t)=\frac{\phi(x-t)+\phi(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)\;d\xi\;d\tau$$

Для решения следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+f(x,t), & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u|_{t=0}=\phi(x), & u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases} \quad (3)$$

$К_{x_0,t_0}$ – область зависимости решения задачи Коши (3) от данных задачи – область внутри треугольника, стороны которого образованы характеристиками и осью OX (Рисунок 4.5). При этом, если также имеем задачу:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=\tilde{u}_{xx}+f_2(x,t), & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ \tilde{u}|_{t=0}=\phi_2(x), & \tilde{u}_t|_{t=0}=\psi_2(x) \end{cases} \quad (3')$$

И начальные условия с неоднородностью у (3) и (3') совпадают внутри области зависимости решения - $К_{x_0,t_0}$, то решение внутри $К_{x_0,t_0}$ у данных задач также совпадает.

Проверим, что решение, полученное по принципу Дюамеля, удовлетворяет задаче:

$$a)\ u|_{t=0}=0, \qquad \int\limits_0^0 \dots d\tau=0$$

$$b)\ u_t=\left(\int\limits_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau\right)_t=v(x,t,t)+\int\limits_0^t \partial_t v(x,t,\tau)\,d\tau$$

При этом, первое слагаемое должно обращаться в ноль. Откуда

$$v_t|_{t=0} = \int\limits_0^0 \dots d\tau$$

$$\text{c) } u_{tt} = \partial_t v(x,t,t) + \int\limits_0^t \partial_{tt}^2 v(x,t,\tau)\,d\tau$$

Однако

$$\partial_t v|_{t=\tau} = f(x,t) = \partial_t v(x,t,\tau)$$

$$\partial_{tt}^2 v(x,t,t) = u_{xx}$$

Откуда $u_{tt} = f(x,t) + u_{xx}$

Двумерная задача Коши

Решим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u|_{t=0} = e^{-x^2} + arctg\ y, u_t|_{t=0} = \cos x + \sin y \end{cases}$$

Для решения этой задачи достаточно формулы Даламбера. Пусть

$$u(x,y,t) = v(x,t) + w(y,t)$$

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, \\ v|_{t=0} = e^{-x^2}, v_t|_{t=0} = \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{yy} \\ w|_{t=0} = arctg\ y, w_t|_{t=0} = \sin y \end{cases}$$

По формуле Даламбера:

$$v(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \cos\tau\,d\tau$$

$$w(y,t) = \frac{arctg(y+t) + arctg(y-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{y-t}^{y+t} \sin\tau\,d\tau$$

Трёхмерная задача Коши

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1 + (x_1 + x_2 + x_3)^2} \end{cases}$$

Сведём к одномерной задаче:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = v(\xi, t)$$

$$\xi = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} = 3 v_{\xi\xi}$$

$$\begin{cases} v_{tt} = 3 v_{\xi\xi} \\ v|_{t=0} = 0, \qquad v_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1 + \xi^2} \end{cases}$$

Для использования формулы Даламбера, сделаем замену:

$$v(\xi, t) = w(\xi, \tau), \qquad \tau = \sqrt{3} t$$

$$v_t = w_\tau \sqrt{3}, \qquad v_{tt} = 3 w_{\tau\tau}$$

$$\begin{cases} w_{\tau\tau} = w_{\xi\xi} \\ w|_{\tau=0} = 0, \qquad v_\tau|_{\tau=0} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{1}{1 + \xi^2} \end{cases}$$

По формуле Даламбера:

$$w(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int\limits_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \frac{1}{1 + \eta^2} d\eta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \big(arctg(\xi + \tau) - arctg(\xi - \tau) \big)$$

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Big(arctg\big(x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{3}\tau\big) - arctg\big(x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{3}\tau\big) \Big)$$

Неоднородное уравнение в задаче Коши

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + 6xyt, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u|_{t=0} = x^2 - y^2 \\ u_t|_{t=0} = xy \end{cases}$$

Заметим, что t^3xy – частное решение неоднородного уравнения и начальные условия не меняет:

$$u(x,y,t) = t^3xy + v(x,y,t)$$

$$\begin{cases} v_{tt} = \Delta u \\ v|_{t=0} = x^2 - y^2 \\ v_t|_{t=0} = xy \end{cases}$$

Также заметим, что txy удовлетворяет уравнению выше, при этом:

$$v(x,y,t) = txy + w(x,y,t)$$

$$\begin{cases} w_{tt} = \Delta u \\ w|_{t=0} = x^2 - y^2 \\ w_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$w = \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} - \frac{(y+t)^2 + (y-t)^2}{2} = x^2 - y^2$$

Окончательно

$$u(x,y,t) = t^3xy + txy + x^2 - y^2$$

Семинар 5. Задача Коши для волнового уравнения. Часть 2

Повторение материала предыдущей лекции

Вспомним задачу Коши для однородного волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Для решения этой задачи была получена формула Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-t) + \phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\, d\tau$$

Будем использовать эту формулу для анализа колебаний струны в зависимости от начальных условий.

Профиль струны в различные моменты времени

Необходимо нарисовать профиль струны в различные моменты времени по начальному положению струны - $\phi(x)$ (Рисунок 5.1). На гладкость функции мы не будем обращать внимание (можем считать, что углы достаточно гладкие).

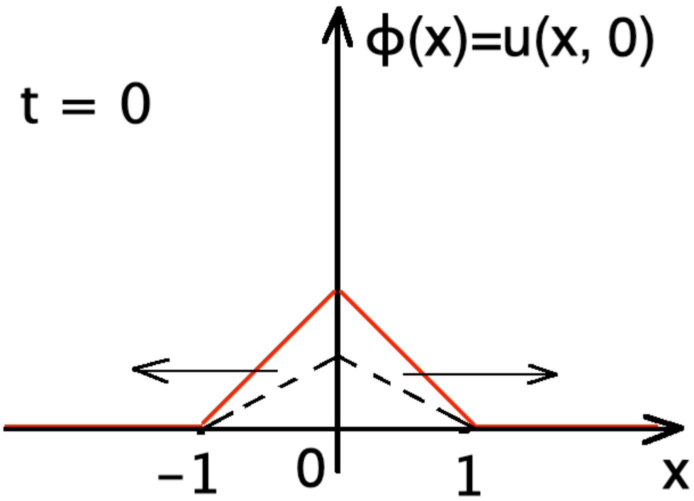


Рисунок 5.1

Рассмотрим, поведение решения в различные моменты времени. Из формулы Даламбера видно, что решение представимо в виде двух бегущих волн и при $t = \frac{1}{4}$ получим следующий профиль струны (Рисунок 5.2). Фронт изображён красным.

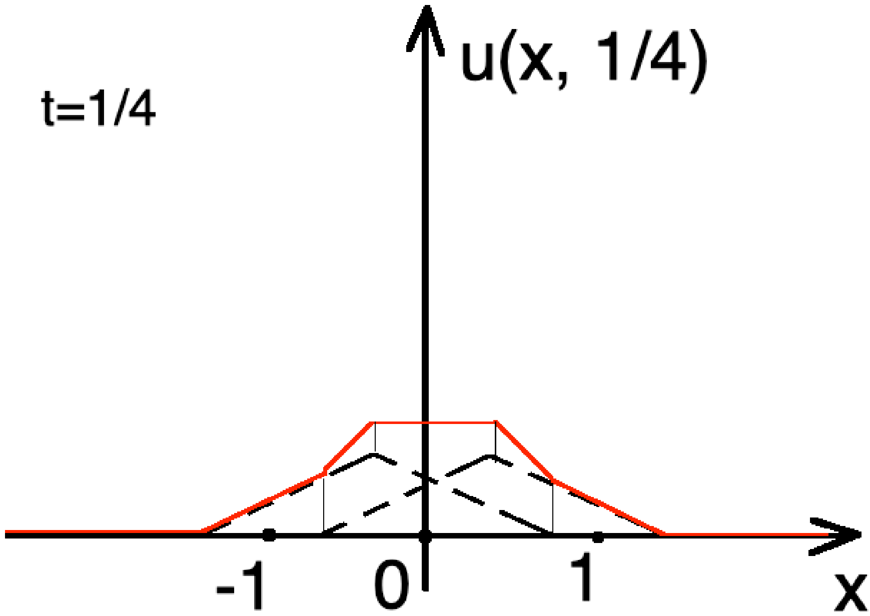


Рисунок 5.2

Рассмотрим момент времени $t = \frac{1}{2}$ (Рисунок 5.3). Профиль также изменится, так как две бегущие волны сместятся ещё больше.

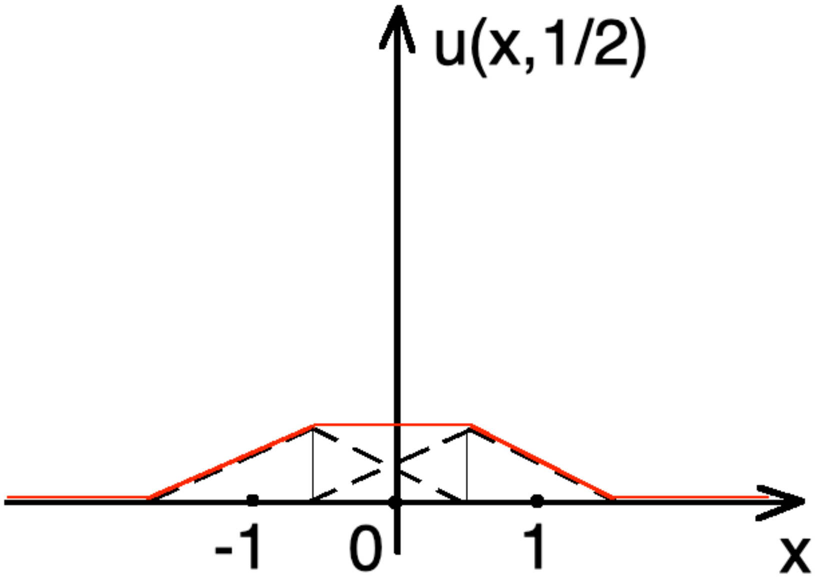


Рисунок 5.3

Рассмотрим также случай $t = 3/4$ (Рисунок 5.4).

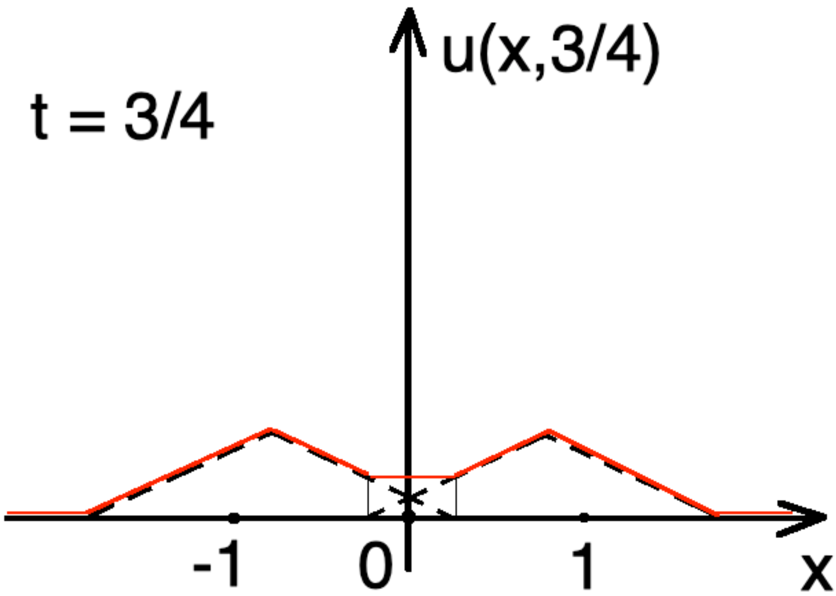


Рисунок 5.4

При $t = 1$ фронт изменится следующим образом (Рисунок 5.5).

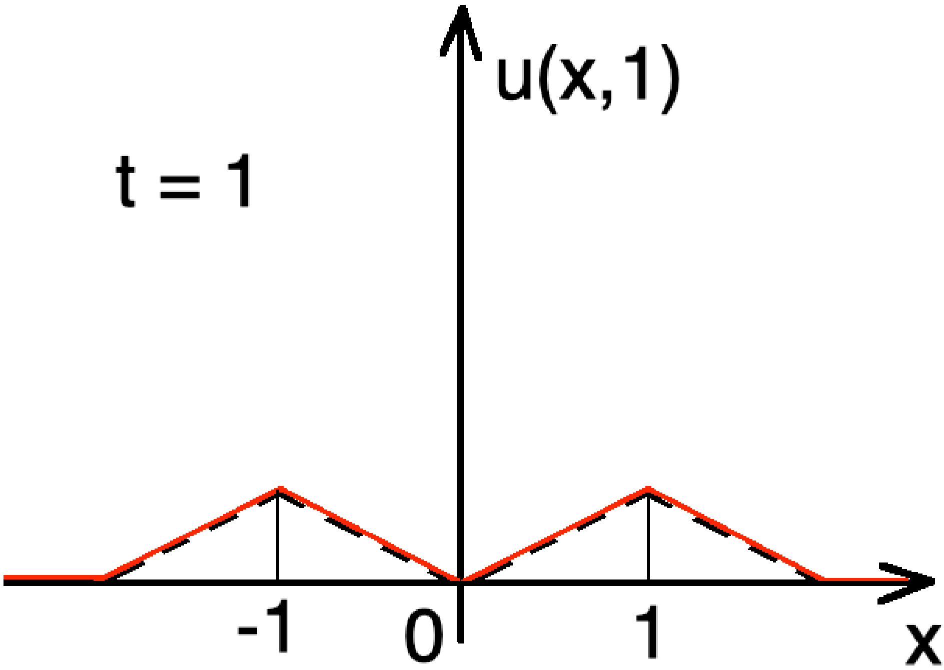


Рисунок 5.5

В последующие моменты времени волны будут “разбегаться” в разные стороны ещё больше.

Полуограниченная струна

Рассмотрим случай полуограниченной струны. Помимо ограничения на рассматриваемую область, в данной задаче необходимо добавить краевое условие. Рассмотрим краевое условие закреплённого конца:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

В общем случае мы могли поставить краевое условие в виде явного закона движения:

$$u(0,t) = g(t)$$

Или в виде свободного конца:

$$u_x(0,t) = 0$$

Или в виде упругого закрепления (закон Гука):

$$u_x(0,t) + ku(0,t) = 0$$

Вернёмся к поставленной задаче. Рассмотрим (главную) характеристику, проходящую в 1-ой четверти (Рисунок 5.6). Для точек, лежащих ниже характеристики (область 1), область зависимости от начальных условий входит в 1-ую четверть. Решение, в этом случае, находим по формуле Даламбера:

$$1: \quad u(x,t) = \frac{\phi(x-t) + \phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\, d\tau$$

В области 2 мы не можем явно использовать формулу Даламбера, так как область зависимости выходит за пределы 1-ой четверти. Однако, нам известно, что общий вид решения, следующий:

$$2: \quad u(x,t) = g(x-t) + h(x+t)$$

При этом h - известна (из соотношения в области 1), а g – неизвестна.

Зададимся вопросом: можем ли мы продолжить функции ϕ, ψ на отрицательную полуось так, чтобы воспользоваться формулой Даламбера и получить решение в области 2?

Рассмотрим следующую задачу, в предположении, что начальная скорость отсутствует:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & \end{cases}$$

Предположим, что мы смогли продолжить каким-то образом ϕ на отрицательную полуось в виде - $\tilde{\phi}$. Тогда по формуле Даламбера получим решение:

$$u(x,t) = \frac{\tilde{\phi}(x-t)}{2} + \frac{\tilde{\phi}(x+t)}{2}$$

Данная функция удовлетворяет уравнению и начальным условиям. Из граничного условия получим:

$$\mathrm{u}(0,t) = 0 = \frac{\tilde{\phi}(-t) + \phi(t)}{2}$$

Откуда:

$$\tilde{\phi}(-t) = \phi(t)$$

Заключаем: необходимо продолжить ϕ нечётным образом на отрицательную полуось.

Профиль полуструны с закреплённым концом

Рассмотрим полуструну с закреплённым концом при следующем начальном отклонении (Рисунок 5.6). Продолжим функцию нечётным образом на отрицательную полуось.

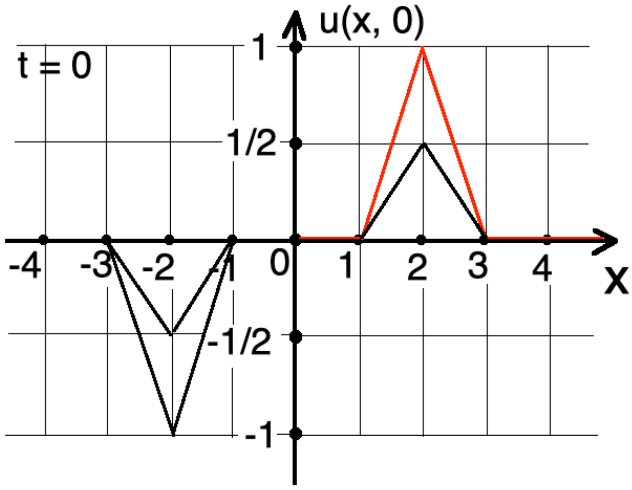


Рисунок 5.6

Рассмотрим профиль струны в момент времени $t = \frac{1}{4}$. Получим небольшое смещение профиля струны (Рисунок 5.7).

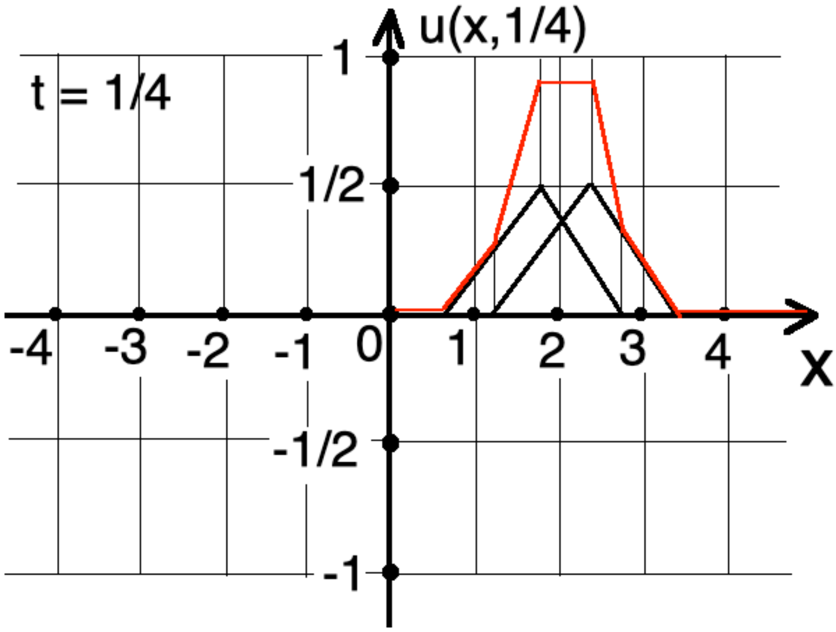


Рисунок 5.7

В момент времени $t = \frac{1}{2}$ получим следующий профиль (Рисунок 5.8).

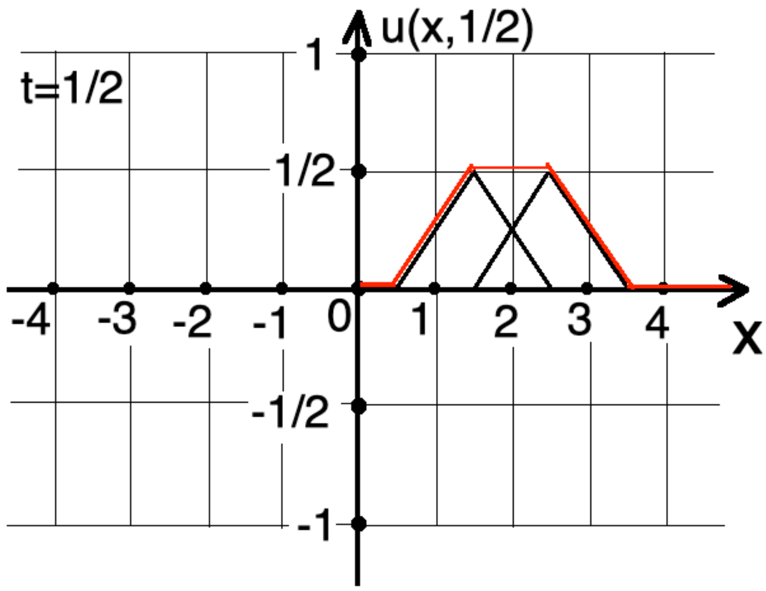


Рисунок 5.8

В момент времени $t = \frac{3}{4}$ профиль также изменится (Рисунок 5.9)

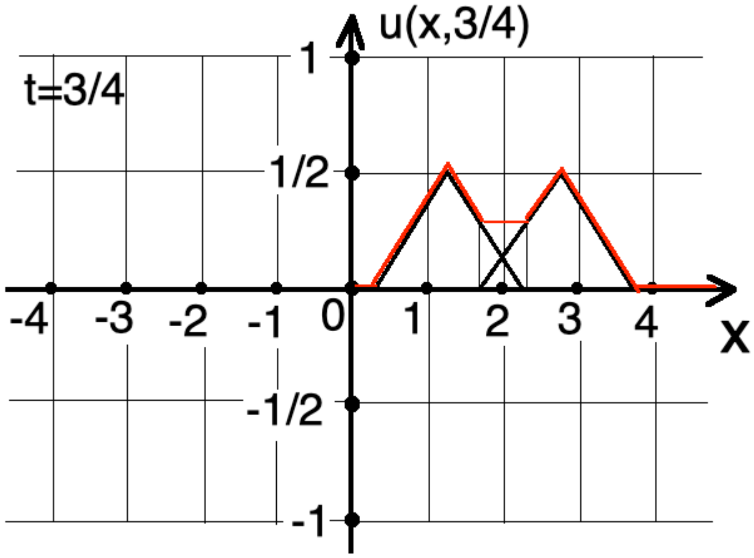


Рисунок 5.9

Момент времени $t = 1$ – последний момент времени, когда то, что происходит в левой части полуплоскости не влияет на то, что происходит справа (Рисунок 5.10).

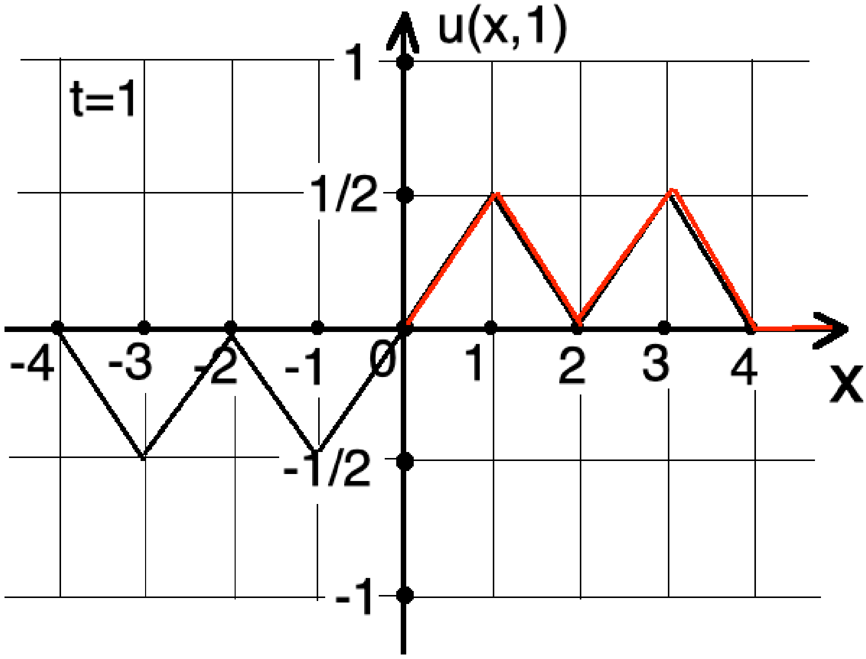


Рисунок 5.10

При $t = \frac{5}{4}$ левая часть полуплоскости влияет на то, что находится в правой (Рисунок 5.11).

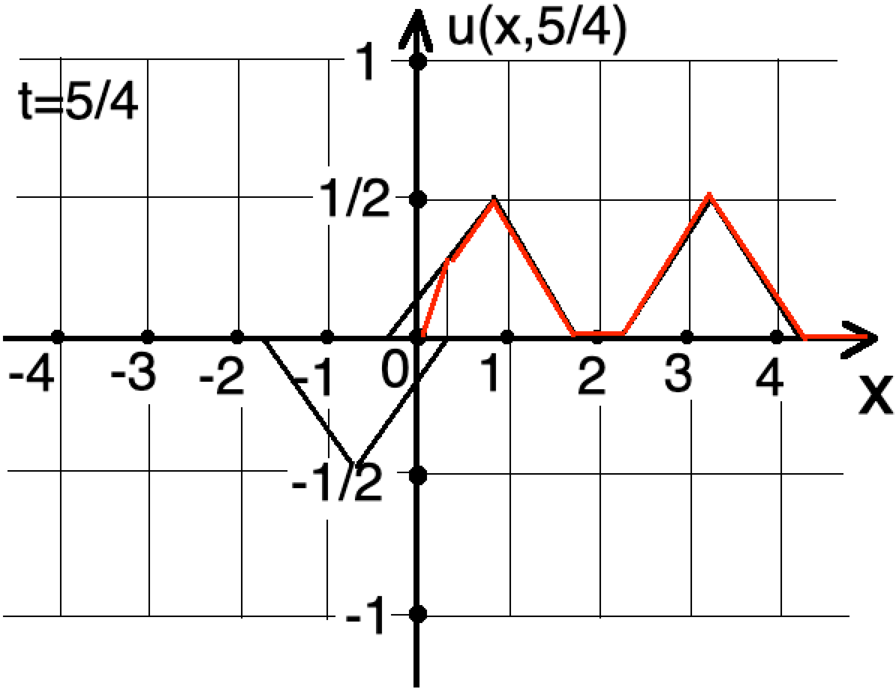


Рисунок 5.11

При $t = \frac{3}{2}$ получим следующий профиль (Рисунок 5.12).

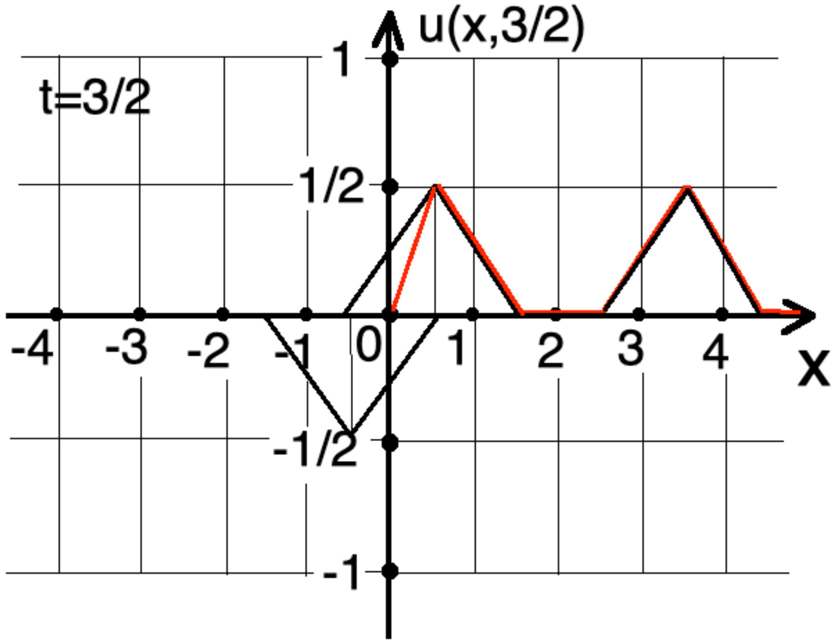


Рисунок 5.12

Рассмотрим также более поздний момент времени $t = \frac{7}{4}$ (Рисунок 5.13).

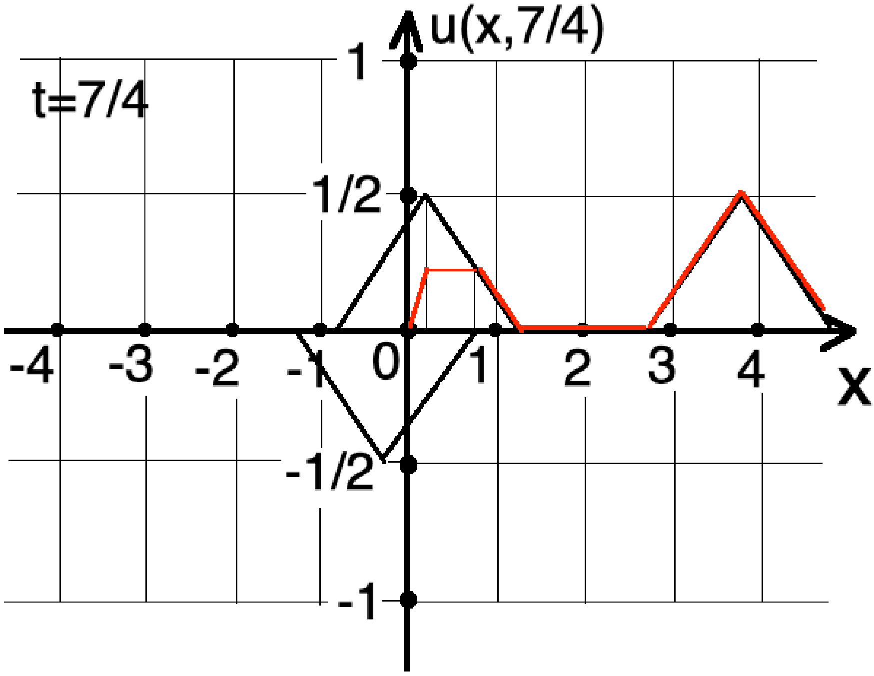


Рисунок 5.13

При $t = 2$ получим следующий профиль (Рисунок 5.14).

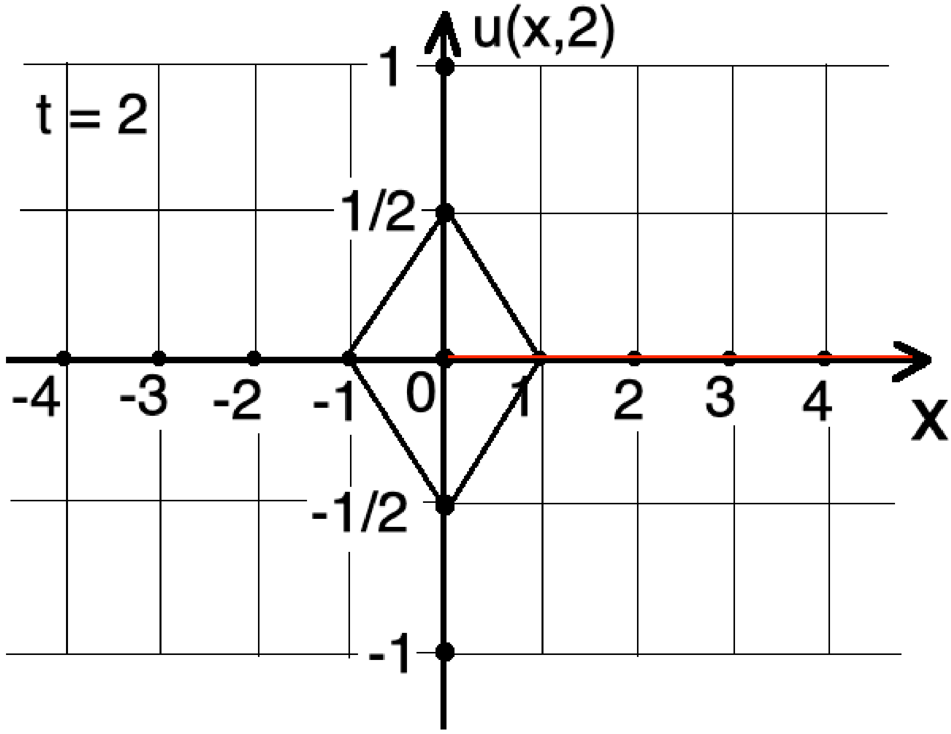


Рисунок 5.14

При $t = \frac{9}{4}$ получим “перевёрнутый профиль” от момента времени $t = \frac{7}{4}$ (Рисунок 5.15).

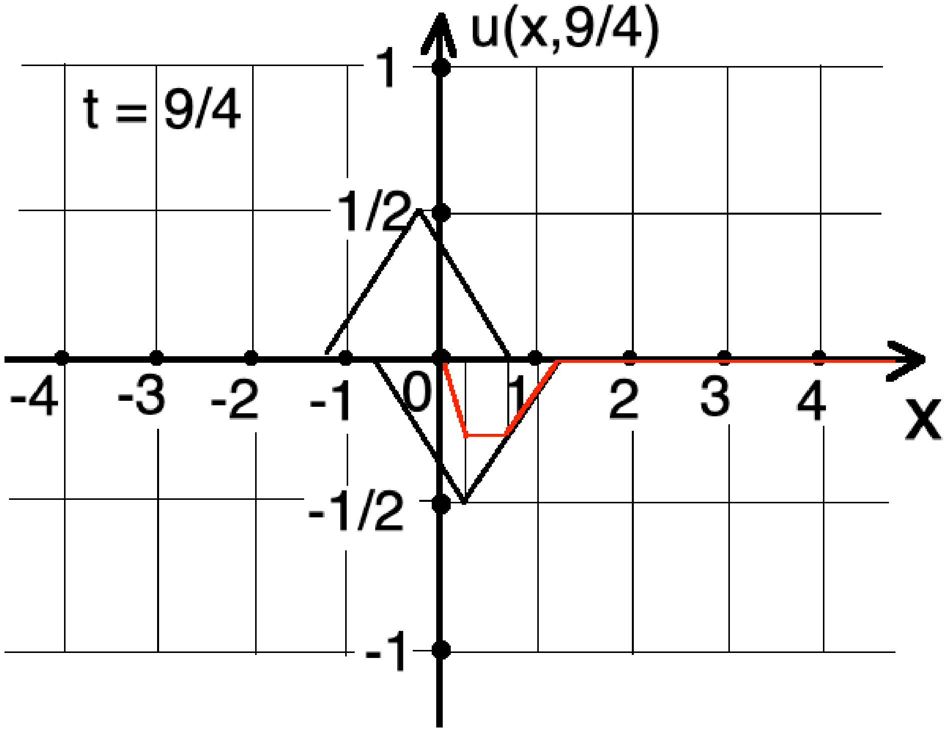


Рисунок 5.15

В момент времени $t = 2.5$ получаем следующий профиль (Рисунок 5.16).

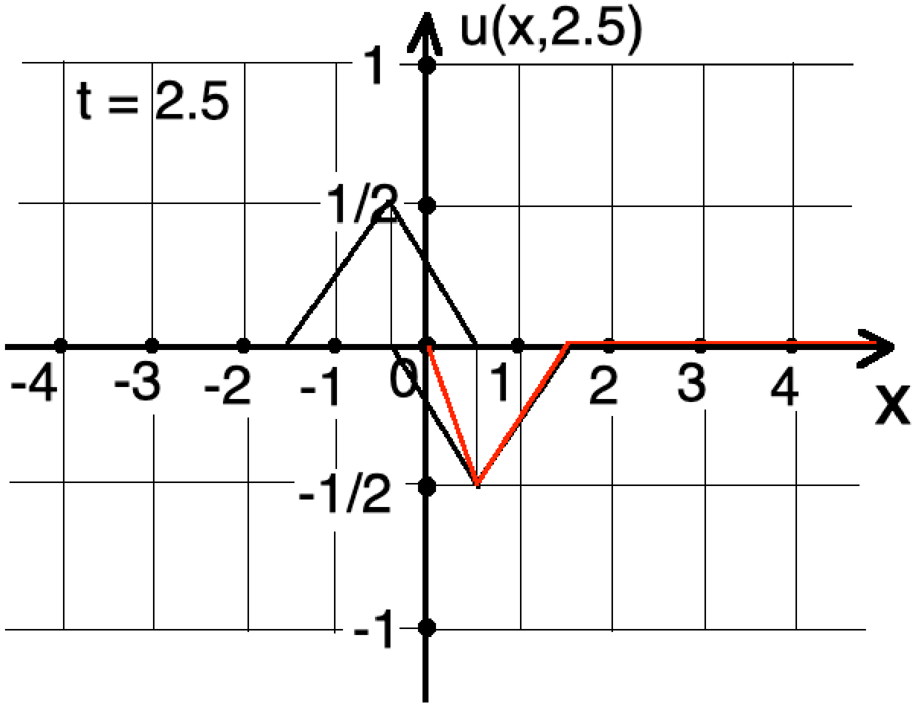


Рисунок 5.16

Семинар 6. Полуограниченная струна

Задача на характеристическую точку

Рассмотрим уравнение

$$a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+l(x,y)u_x+d(x,y)u_y+k(x,y)u=f(x,y) \quad (1)$$

Здесь $a(x,y), b(x,y), c(x,y), l(x,y), d(x,y), k(x,y), f(x,y)$ – заданные непрерывные функции на плоскости Oxy.

Предположим, что всю плоскость делит линия

$$\gamma\colon y=\varphi(x)$$

на две непересекающиеся части (рис. 6.1). Область, лежащую ниже этой кривой, обозначим Ω^-, а область, лежащую выше этой кривой - Ω^+.

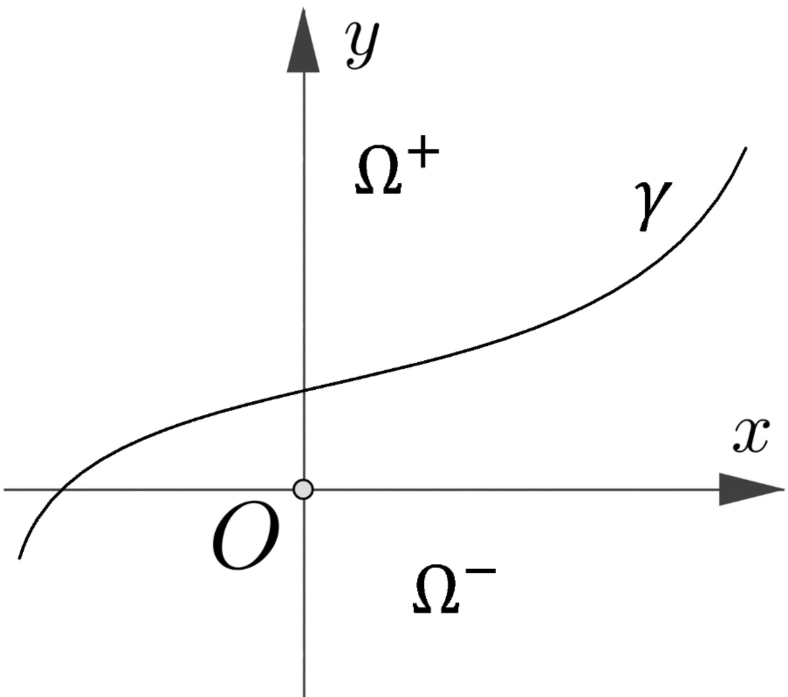


Рисунок 6.1

Предположим, что существует функция

$$u \in C^2\left(\overline{\Omega^+}\right) \cap C^2(\overline{\Omega^-}) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$u \notin C^2(\mathbb{R}^2)$$

Это означает, что в какая-то из вторых производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} претерпевает разрыв первого рода:

$$(x_0, y_0) \in \gamma$$

$$[u_{yy}]\big|_{(x_0,y_0)\in\gamma} = u_{yy}\Big|_{\substack{(x,y)\in\Omega^+\\(x,y)\to(x_0,y_0)}} - u_{yy}\Big|_{\substack{(x,y)\in\Omega^-\\(x,y)\to(x_0,y_0)}} = \lambda \neq 0$$

u – решение уравнения (1) в Ω^+ и Ω^-.

Покажем, что (x_0, y_0) – характеристическая точка уравнения (1).

Введем обозначение:

$$u(x,y) = \begin{cases} u^+(x,y), & (x,y) \in \Omega^+ \\ u^-(x,y), & (x,y) \in \Omega^- \end{cases}$$

Тогда скачок самой функции:

$$[u]|_\gamma = u^+\big(x, \varphi(x)\big) - u^-\big(x, \varphi(x)\big)$$

В нашем случае для любой точки x:

$$[u]|_\gamma = u^+\big(x, \varphi(x)\big) - u^-\big(x, \varphi(x)\big) \equiv 0$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}[u]|_\gamma = 0$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dx}[u]|_\gamma = u_x^+\big(x, \varphi(x)\big) + u_y^+\big(x, \varphi(x)\big)\varphi'(x) - u_x^-\big(x, \varphi(x)\big) - u_y^-\big(x, \varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

$$u_x^+\big(x,\varphi(x)\big)+u_y^+\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x)-u_x^-\big(x,\varphi(x)\big)-u_y^-\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) = [u_x]|_\gamma+[u_y]|_\gamma\varphi'(x)$$

$$[u_x]|_\gamma+[u_y]|_\gamma\varphi'(x)\equiv 0$$

Аналогично:

$$\frac{d}{dx}[u_x]|_\gamma=0$$

$$\frac{d}{dx}[u_x]|_\gamma=[u_{xx}]|_\gamma+[u_{xy}]|_\gamma\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[u_y]|_\gamma=0$$

$$\frac{d}{dx}[u_y]|_\gamma=[u_{xy}]|_\gamma+[u_{yy}]|_\gamma\varphi'(x)$$

Тогда

$$[u_{yy}]|_\gamma=\lambda$$

Следовательно,

$$[u_{xy}]|_{(x_0,y_0)\in\gamma}=-\lambda\varphi'(x_0)$$

$$[u_{xx}]|_{(x_0,y_0)\in\gamma}=-\varphi'(x_0)[u_{xy}]|_{(x_0,y_0)\in\gamma}=\lambda\big(\varphi'(x_0)\big)^2$$

Рассмотрим предельные значения функции в точке (x_0,y_0) и вычтем их друг из друга:

$$a(x,y)[u_{xx}]|_{(x_0,y_0)\in\gamma}+b(x,y)[u_{xy}]|_{(x_0,y_0)\in\gamma}+c(x,y)[u_{yy}]|_{(x_0,y_0)\in\gamma}=0$$

$$a(x,y)[u_{xx}]|_{(x_0,y_0)\in\gamma}+b(x,y)[u_{xy}]|_{(x_0,y_0)\in\gamma}+c(x,y)[u_{yy}]|_{(x_0,y_0)\in\gamma} = a(x,y)\lambda\big(\varphi'(x_0)\big)^2-b(x,y)\lambda\varphi'(x_0)+c(x,y)\lambda$$

$$a(x,y)\big(\varphi'(x_0)\big)^2-b(x,y)\varphi'(x_0)+c(x,y)=0$$

То есть функция

$$y=\varphi(x)$$

удовлетворяет уравнению

$$a(x,y)\big(\varphi'(x_0)\big)^2 - b(x,y)\varphi'(x_0) + c(x,y) = 0$$

когда $x = x_0$.

Отсюда следует, что точка (x_0, y_0) является характеристической.

Теорема о четырех точках

Рассмотрим уравнение $u_{tt} = u_{xx}$ на $\mathbb{R}^2$.

Его решение записывается как

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

Рассмотрим четырёхугольник, стороны которого лежат на характеристиках (рис. 6.2).

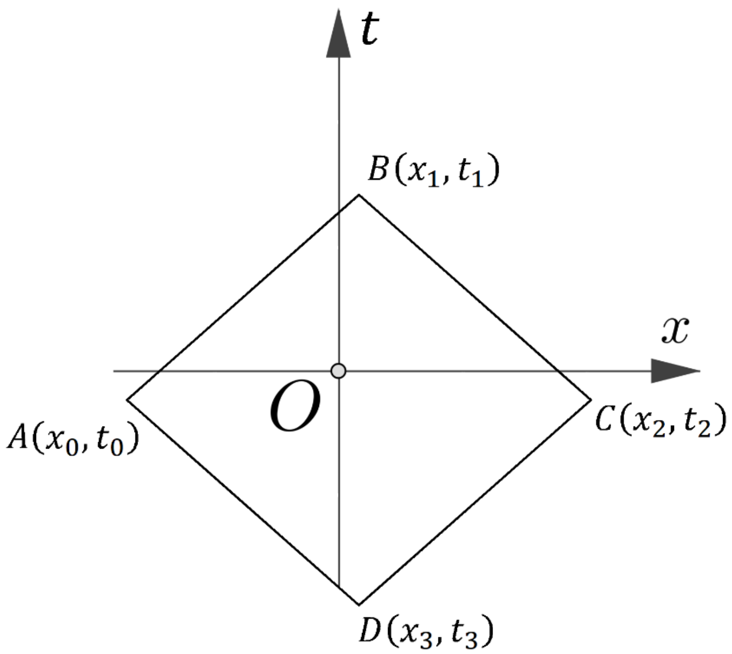


Рисунок 6.2

Любое решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ на $\mathbb{R}^2$ обладает свойством

$$u(x_0,t_0) + u(x_2,t_2) = u(x_1,t_1) + u(x_3,t_3)$$

Это свойство называется свойством четырёх точек.

Докажем это свойство.

Запишем уравнения характеристик, через которые проходят вершины четырехугольника:

$$AD \in \{x + t = x_0 + t_0\}$$

$$AB \in \{x + t = x_0 - t_0\}$$

$$BC \in \{x + t = x_2 + t_2\}$$

$$CD \in \{x - t = x_2 - t_2\}$$

Из этих уравнений получаем:

$$\begin{cases} x_1 - t_1 = x_0 - t_0 \\ x_1 + t_1 = x_2 + t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 - t_3 = x_2 - t_2 \\ x_3 + t_3 = x_0 + t_0 \end{cases}$$

Так как

$$u(x_0, t_0) + u(x_2, t_2) = u(x_1, t_1) + u(x_3, t_3)$$

и общий вид решения:

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t),$$

то

$$\begin{aligned} &f(x_0 + t_0) + g(x_0 - t_0) + f(x_2 + t_2) + g(x_2 - t_2) \\ &\qquad = f(x_2 + t_2) + g(x_0 - t_0) + f(x_0 + t_0) + g(x_2 - t_2) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Задача на полуограниченную струну

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, x > 0 \\ \qquad u(0, t) = \sin(\pi t) \end{cases}$$

$$t = 1,2,3,\ldots$$

Для полуограниченной струны мы должны решить задачу в первой четверти (рис. 6.3).

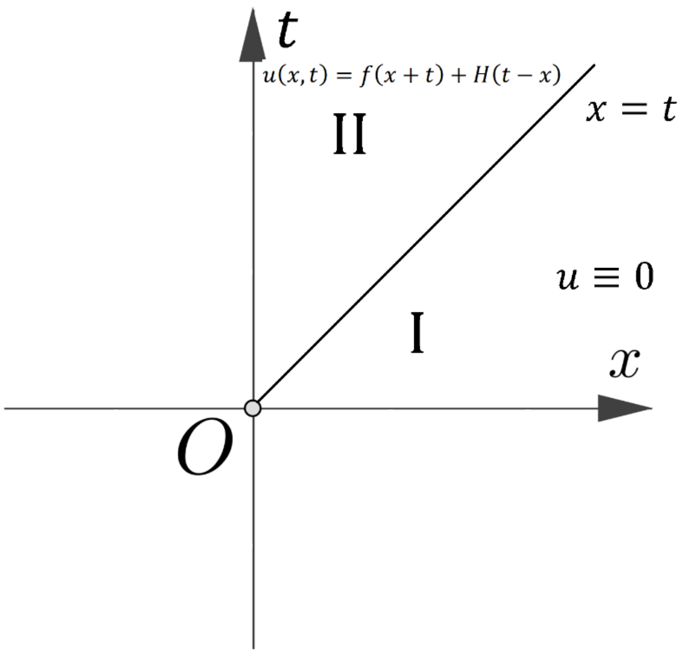


Рисунок 6.3

В области I:

$$u \equiv 0, \qquad x > t$$

В области II:

$$u(x,t) = H(t-x), \qquad t > x$$

Из краевого условия:

$$H(t) = \sin(\pi t)$$

Следовательно,

$$u(x,t) = H(t-x) = \sin\big(\pi(t-x)\big)$$

Рассмотрим случаи, когда $t = 1,2,3$ (рис. 6.4).

а)

$$t = 1$$

$$u(x,1) = 0, x \geq 1$$

$$u(x,1) = \sin(\pi - \pi x) = \sin(\pi x)\,, 0 \leq x \leq 1$$

б)

$$t = 2$$

$$u(x,2) = 0, x \geq 2$$

$$u(x,2) = \sin(2\pi - \pi x) = -\sin(\pi x)\,, 0 \leq x \leq 2$$

в)

$$t = 3$$

$$u(x,3) = 0, x \geq 3$$

$$u(x,3) = \sin(3\pi - \pi x)\,, 0 \leq x \leq 3$$

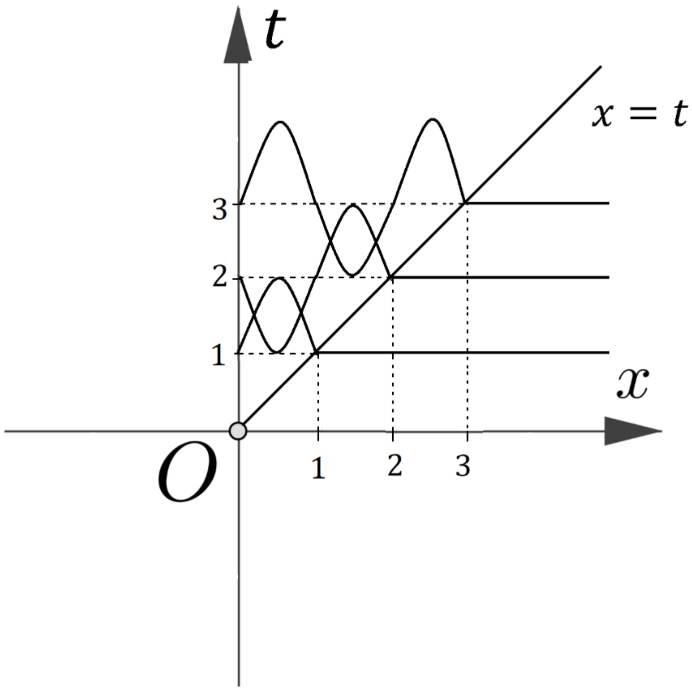


Рисунок 6.4

В общем случае в области I:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)d\tau$$

$$\frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)d\tau$$
$$= \frac{\varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{a_0}^{x+t} \psi(\tau)d\tau + \frac{\varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{a_0} \psi(\tau)d\tau$$

Обозначим:

$$\frac{\varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{a_0}^{x+t} \psi(\tau)d\tau = f(x+t)$$

$$\frac{\varphi(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{a_0}\psi(\tau)d\tau=g(x-t)$$

В области II решение ищется в виде

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{a_0}^{x+t}\psi(\tau)d\tau+H(t-x)$$

Тогда

$$[u(x,t)]|_{x=t}=H(+0)-\frac{\varphi(+0)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{+0}^{a_0}\psi(\tau)d\tau$$

$$H(t)=-\frac{\varphi(t)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{a_0}^{t}\psi(\tau)d\tau$$

$$H(+0)=-\frac{\varphi(+0)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{a_0}^{+0}\psi(\tau)d\tau$$

Итого, подставляя эти выражения в формулу для скачка $[u(x,t)]|_{x=t}$, получим:

$$[u(x,t)]|_{x=0}=\varphi(+0)=0$$

Задача на полуограниченную струну с некоторыми краевыми условиями

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+4, \qquad x>0, t>0 \\ u|_{t=0}=1-x, u_t|_{t=0}=0, x\geq 0 \\ (u_x+u)|_{x=0}=\frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$u(x,t)=2t^2+v(x,t)$$

Подставим его в уравнение задачи и получим:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, \qquad x > 0, t > 0 \\ v(x,0) = 1 - x \\ v_t(x,0) = 0 \\ (v_x + v)|_{x=0} = -\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

Теперь мы будем решать новую задачу для функции $v(x,t)$.

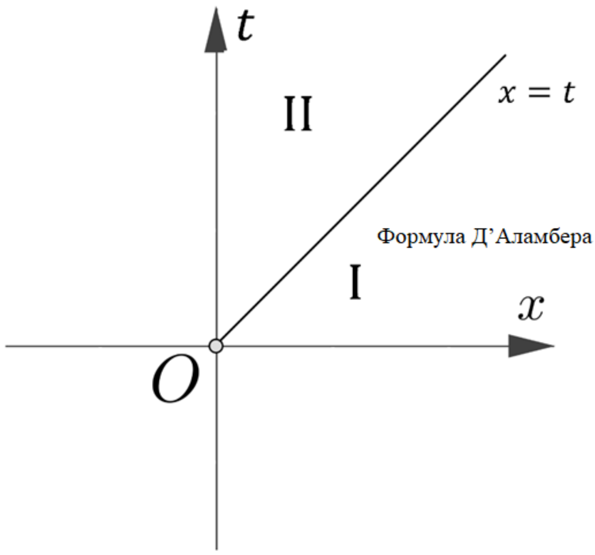


Рисунок 6.5

Решение в области I:

$$v(x,t) = \frac{1-(x+t)}{2} + \frac{1-(x-t)}{2}$$

$$\frac{1-(x+t)}{2} + \frac{1-(x-t)}{2} = -\frac{x+t}{2} + 1 - \frac{x-t}{2}$$

Введем обозначения:

$$f(x+t) = -\frac{x+t}{2}$$

$$g(x-t) = 1 - \frac{x-t}{2}$$

$$-\frac{x+t}{2}+1-\frac{x-t}{2}=1-x$$

Решение в области II:

$$v(x,t)=-\frac{x+t}{2}+H(t-x)$$

Подставим в краевое условие:

$$v_x|_{x=0}=-\frac{1}{2}-H'(t)$$

$$-\frac{1}{2}-H'(t)-\frac{t}{2}+H(t)=-\frac{t^2}{2}$$

$$\begin{cases} H'-H=\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}-\frac{1}{2} \\ H(0)=1 \end{cases}$$

Мы получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Решение этой задачи:

$$H(t)=C_0e^t+H_{\text{част}}$$

$$H_{\text{част}}=at^2+bt+c$$

$$2at+b-at^2-bt-c=\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}$$

Следовательно,

$$a=-\frac{1}{2}$$

$$b=-\frac{1}{2}$$

$$c=0$$

Итак, частное решение имеет вид

$$H_{\text{част}}=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t$$

Тогда

$$H(t) = C_0 e^t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$$

$C_0 = 1$, так как $H(0) = 1$

$$H(t) = e^t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$$

Тогда решение в области II имеет вид

$$v(x,t) = -\frac{x+t}{2} + e^{t-x} + \frac{1}{2}(t-x)^2 - \frac{1}{2}(t-x)$$

Классическое решение задачи на полуограниченную струну

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = \cos(wt) \\ u|_{t=0} = Ae^{-x^2} \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Есть ли такие параметры A, w, при которых задача имеет классическое решение (то есть решение класса $\mathbb{C}^2$ в первой четверти)?

Решение в области I:

$$u(x,t) = \frac{Ae^{-(x+t)^2}}{2} + \frac{Ae^{-(x-t)^2}}{2}$$

Решение в области II:

$$u(x,t) = \frac{Ae^{-(x+t)^2}}{2} + H(t-x)$$

При $x = 0$:

$$\frac{Ae^{-t^2}}{2} + H(t) = \cos(wt) \Rightarrow H(t) = \cos(wt) - \frac{Ae^{-t^2}}{2}$$

Следовательно, решение в области II:

$$u(x,t) = \frac{Ae^{-(x+t)^2}}{2} + \cos\big(w(t-x)\big) - \frac{Ae^{-(t-x)^2}}{2}$$

Обозначим

$$\widetilde{H}(t-x) = \frac{A}{2}e^{-(x-t)^2}$$

Нам нужно, чтобы

$$\widetilde{H}(0) = H(0)$$

$$\frac{A}{2} = 1 - \frac{A}{2} \Longrightarrow A = 1$$

$\widetilde{H}'(0) = H'(0) = 0$ – это верно для любого вещественного w.

$$\widetilde{H}''(0) = H''(0)$$

$$-1 = -w^2 + 1$$

Следовательно:

$$w = \pm\sqrt{2}$$

Семинар 7. Распространение волн в пространстве и на плоскости

Формула Кирхгофа. Формула Пуассона

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

Если $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3), u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, то

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} u_1(\xi) dS_\xi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} u_0(\xi) dS_\xi \right)$$

Эта формула называется формулой Кирхгофа. Она задает классическое решение поставленной задачи.

Теперь рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

Решение этой задачи задается формулой Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}} d\xi_1 d\xi_2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}} d\xi_1 d\xi_2 \right)$$

Принцип Гюйгенса

Предположим, что начальные условия u_0, u_1 задачи Коши отличны от нуля лишь в ограниченной области Ω. Будем считать, что

$$\operatorname{supp} u_0 = \overline{\Omega}$$

$$\operatorname{supp} u_1 = \overline{\Omega}$$

Пусть в области Ω что-то произошло (например, случился взрыв). Как будет распространяться волна?

Предположим, что в начальный момент времени мы находились не в области Ω, а в некоторой точке $x_0 \notin \Omega$. Что будет происходить в точке x_0 с течением времени? Ответ на этот вопрос нам даст формула Кирхгофа. Волну описывают функцией $u(x,t)$.

Рассмотрим сферу радиуса t с центром в точке x_0. Наступит момент t_*, когда сфера коснется границы области Ω. Начиная с этого момента, сфера начнет пересекать область Ω. Обозначим $\widetilde{t_*}$ момент, когда сфера перестает пересекать область Ω. Тогда, находясь в точке x_0, мы будем ощущать волну ограниченное время t:

$$t_* < t < \widetilde{t_*}$$

$$t \geq \widetilde{t_*}: u(x_0, t) = 0$$

$$t \leq \widetilde{t_*}: u(x_0, t) = 0$$

У волны есть два фронта: передний, начинающийся в точке t_*, и задний, начинающийся в точке $\widetilde{t_*}$.

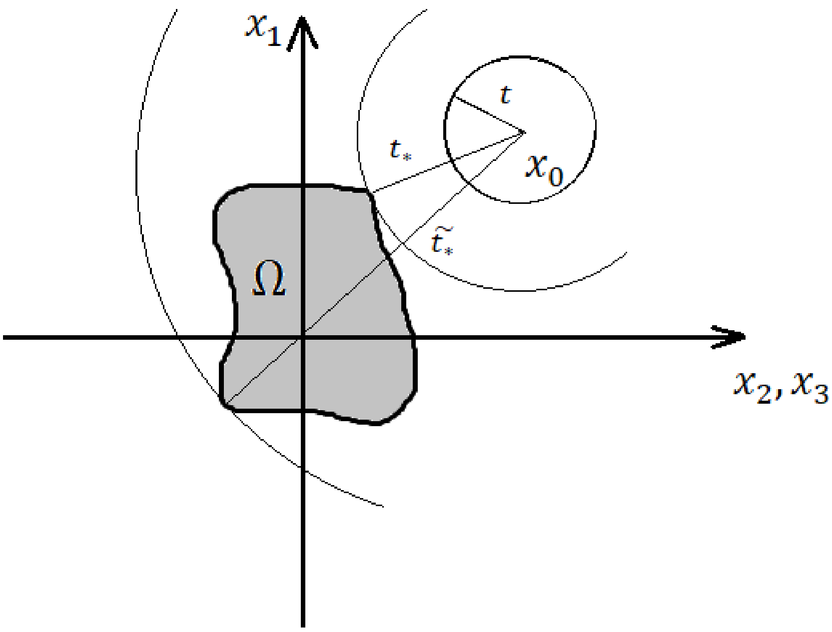


Рисунок 7.1

Это рассмотрение было верно для трёхмерного случая. Рассмотрим теперь двумерный случай. Теперь из точки x_0 мы откладываем не сферы, а круги. Эти круги будут пересекать область Ω при $t > t_*$. То есть заднего фронта волны в этом случае не существует.

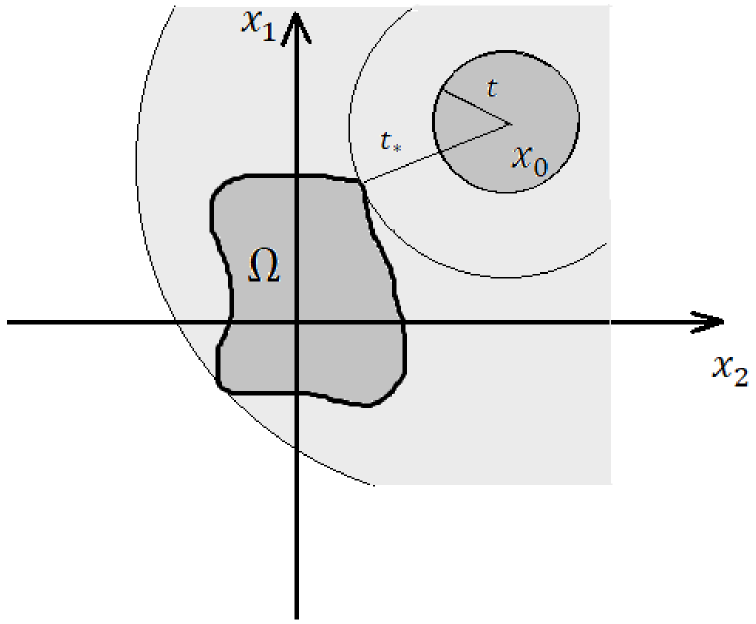


Рисунок 7.2

Вообще говоря, это верно для любого пространства четной размерности.

Задача на нахождение точек в состоянии покоя

Рассмотрим задачу Коши для $n = 3, n = 2$.

Пусть

$$u_0 \equiv 0, |x| \geq 1$$

$$u_1 \equiv 0, |x| \geq 1$$

Мы хотим узнать, в каких областях пространства $u(x,t) = 0$ в моменты времени $t = 1,2,3,4$.

Рассмотрим шар $|x - \xi| = t$. Возможны два случая: носитель расположен вне шара или носитель расположен внутри шара.

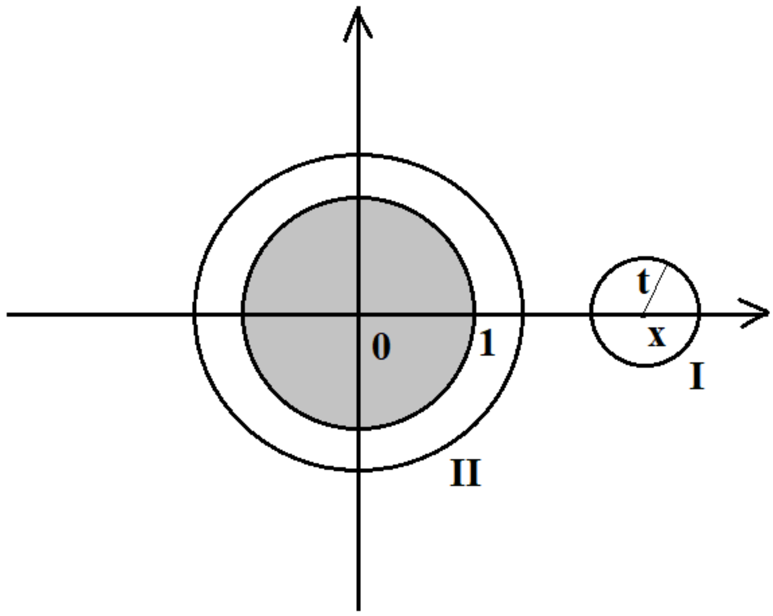


Рисунок 7.3

Ситуация I описывается неравенствами:

$$|x| - t \geq 1$$

$$|x| \geq 1 + t$$

Ситуация II описывается неравенствами:

$$t - |x| \geq 1$$

$$|x| \leq t - 1$$

При $t = 1$:

$$u(x, 1) = 0, |x| \geq 2$$

$$u(0,1) = 0$$

Следовательно, в этом случае волна распространяется тогда, когда

$$0 < |x| < 2$$

При $t = 2$:

$$u(x, 2) = 0, |x| \geq 3, |x| \leq 1$$

Следовательно, в этом случае волна распространяется тогда, когда

$$1 < |x| < 3$$

При $t = 3$:

$$u(x, 3) = 0, |x| \geq 4, |x| \leq 2$$

Следовательно, в этом случае волна распространяется тогда, когда

$$2 < |x| < 4$$

При $t = 4$:

$$u(x, 4) = 0, |x| \geq 5, |x| \leq 3$$

Следовательно, в этом случае волна распространяется тогда, когда

$$3 < |x| < 5$$

При $n = 2$ заднего фронта волны нет, поэтому возможна только ситуация I.

При $t = 1$:

$$u(x, 1) = 0, |x| \geq 2$$

Следовательно, в этом случае волна распространяется тогда, когда

$$0 < |x| < 2$$

При $t = 2$:

$$u(x, 1) = 0, |x| \geq 3$$

Следовательно, в этом случае волна распространяется тогда, когда

$$0 < |x| < 3$$

При $t = 3$:

$$u(x, 1) = 0, |x| \geq 4$$

Следовательно, в этом случае волна распространяется тогда, когда

$$0 < |x| < 4$$

При $t = 4$:

$$u(x, 1) = 0, |x| \geq 5$$

Следовательно, в этом случае волна распространяется тогда, когда

$$0 < |x| < 5$$

Усложненная задача на нахождение точек в состоянии покоя

Будем считать, что

$$\operatorname{supp} u_0 = \{2 \leq |x| \leq 4\}$$

$$\operatorname{supp} u_1 = \{2 \leq |x| \leq 4\}$$

Рассмотрим волну в моменты времени $t = 1,2,3,4,5$.

В этом случае существуют три возможных положения сферы относительно носителя (рис. 7.4).

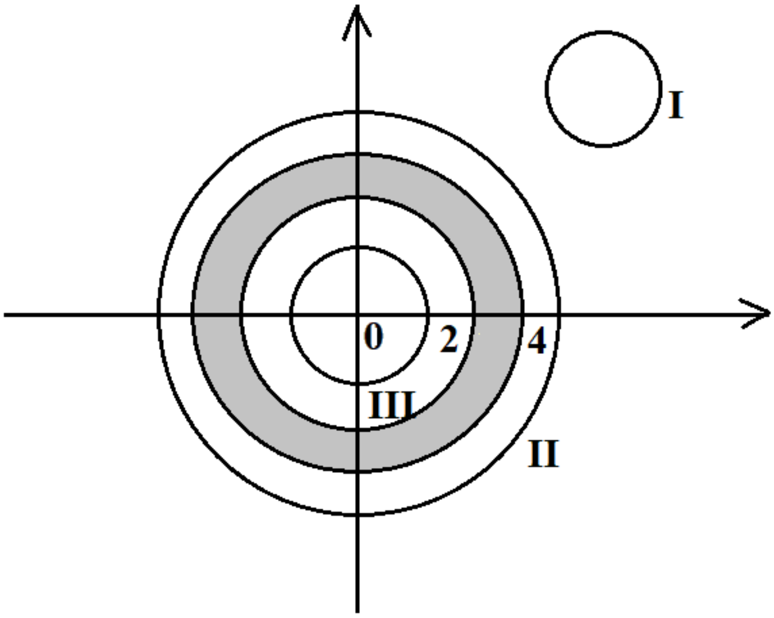


Рисунок 7.4

В случае I:

$$|x| - t \geq 4$$

$$|x| \geq t + 4$$

$$u(x,t) = 0$$

В случае II:

$$t - |x| \geq 4$$

$$|x| \leq t - 4$$

$$u(x,t) = 0$$

В случае III:

$$t + |x| \leq 4$$

$$|x| \leq 2 - t$$

$$u(x,t) = 0$$

При $t = 1$:

$$|x| \geq 5$$

$$|x| \leq 1$$

$$u(x,1) \neq 0, 1 < |x| < 5$$

При $t = 2$:

$$|x| \geq 6$$

$$|x| = 0$$

$$u(x,2) \neq 0, 0 < |x| < 6$$

При $t = 3$:

$$|x| \geq 7$$

$$u(x,3) \neq 0, |x| < 7$$

При $t = 4$:

$$|x| \geq 8$$

$$|x| = 0$$

$$u(x,4) \neq 0, |x| < 8$$

При $t = 1$:

$$|x| \geq 9$$

$$|x| \leq 1$$

$$u(x,5) \neq 0, 1 < |x| < 9$$

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. МЕТОД ФУРЬЕ (МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ)

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), 0 \le x \le l \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

Пусть $f \equiv 0$. Тогда эту задачу можно решить методом Д'Аламбера.

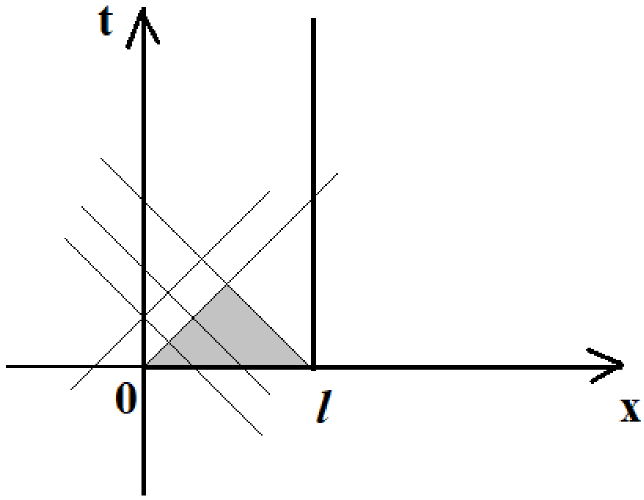


Рисунок 7.5

Метод Фурье:

1) Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in (0,l), t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

Её решение ищем в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$
$$XT'' = X''T$$

Разделим обе части этого уравнения на XT. Получим:

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda = const$$

Получаем:

$$X'' = \lambda X$$

$$T'' = \lambda T$$

Из граничных условий:

$$X(0)T(t) = 0$$
$$X(l)T(t) = 0$$

Следовательно:

$$X(0) = 0$$
$$X(l) = 0$$

Мы получили задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \qquad x \in (0, l) \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

1) Пусть

$$\lambda = 0$$

Тогда

$$X'' = 0$$
$$X = ax + b$$

Из краевых условий:

$$a = 0$$
$$b = 0$$

2) Пусть

$$\lambda > 0, \lambda = \beta^2$$

Тогда

$$X'' - \beta^2 X = 0$$
$$X = C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}$$

Из краевых условий:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\beta l} + C_2 e^{\beta l} = 0 \end{cases}$$
$$e^{\beta l} - e^{-\beta l} = 0$$
$$\Leftrightarrow \beta = 0$$

Так как $\beta \neq 0$, то нетривиальных решений не существует, то есть

$$C_1 = C_2 = 0$$

3) Пусть

$$\lambda < 0, \lambda = -\beta^2$$

Тогда

$$X'' + \beta^2 X = 0$$
$$X = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

Из краевых условий:

$$C_1 = 0$$
$$C_2 \sin \beta l = 0$$

Следовательно,

$$\sin \beta l = 0$$
$$\beta l = \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$\beta_k = \frac{\pi k}{l}$$
$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l} x$$

Семинар 8. Метод Фурье. Часть 1

Задача Штурма-Лиувилля

На прошлом семинаре была рассмотрена задача

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), 0 \le x \le l \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

Для решения этой задачи сначала составляем задачу Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in (0,l), t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

Её решение ищем в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$
$$XT'' = X''T$$

Разделим обе части этого уравнения на XT. Получим:

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda = const$$

Получаем:

$$X'' = \lambda X$$
$$T'' = \lambda T$$

Из граничных условий:

$$X(0)T(t) = 0$$
$$X(l)T(t) = 0$$

Следовательно:

$$X(0) = 0$$
$$X(l) = 0$$

Мы получили задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \qquad x \in (0, l) \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

1) Пусть $\lambda = 0$. Тогда

$$X'' = 0$$
$$X = ax + b$$

Из краевых условий:

$$a = b = 0$$

2) Пусть $\lambda > 0, \lambda = \beta^2$. Тогда

$$X'' - \beta^2 X = 0$$
$$X = C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}$$

Из краевых условий:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\beta l} + C_2 e^{\beta l} = 0 \end{cases}$$
$$e^{\beta l} - e^{-\beta l} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$$

Так как $\beta \neq 0$, то нетривиальных решений не существует, то есть

$$C_1 = C_2 = 0$$

3) Пусть $\lambda < 0, \lambda = -\beta^2$. Тогда

$$X'' + \beta^2 X = 0$$
$$X = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

Из краевых условий:

$$C_1 = 0$$
$$C_2 \sin \beta l = 0$$

Следовательно,

$$\sin \beta l = 0$$
$$\beta l = \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$\beta_k = \frac{\pi k}{l}$$
$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l} x$$

$$L^2(0, l), \qquad \int_0^l \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \frac{l}{2}, & k = m \end{cases}$$

I. Пусть $f \equiv 0$

$$T_k'' = \lambda_k T_k$$

$$T_k'' + \frac{\pi^2 k^2}{l^2} T_k = 0$$

$$T_k(t) = C_{1,k} \cos\frac{\pi k t}{l} + C_{2,k} \sin\frac{\pi k t}{l}$$

$$u_k(x,t) = X_k(x) T_k(t)$$

$$X_k(x) T_k(t) = \left(C_{1,k} \cos\frac{\pi k t}{l} + C_{2,k} \sin\frac{\pi k t}{l}\right) \sin\frac{\pi k x}{l}$$

Функция X_k называется k-ой гармоникой:

$$X_k = \sin\frac{\pi k x}{l}$$

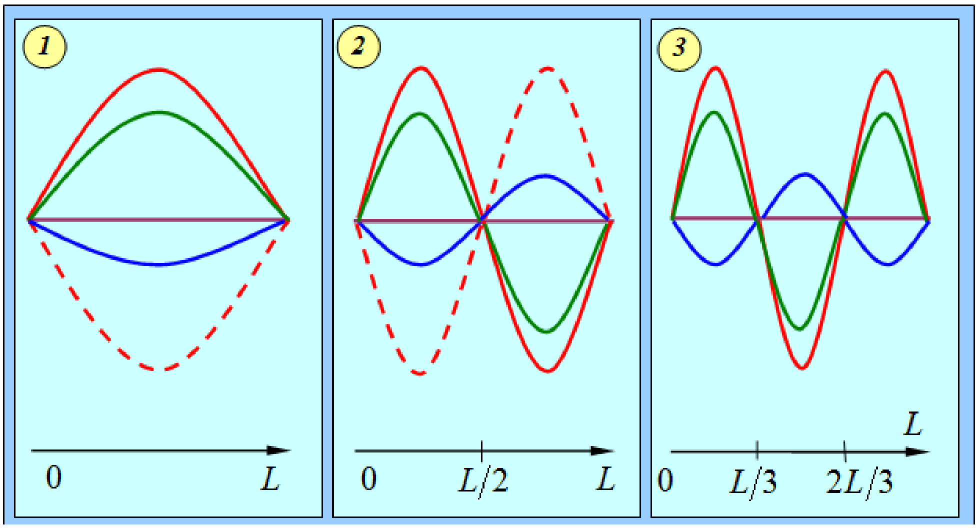


Рисунок 8.1 Гармоники при $k = 1,2,3$

$u_k(x,t)$ называется k-ой стоячей волной.

$$u_k(x,t) = \widetilde{C_k} \cos\left[\frac{\pi k}{l}(t+\varphi)\right] \sin\frac{\pi k x}{l}$$

Частота этой волны:

$$w_k = \frac{\pi k}{l} = k w_1$$

$$w_1 = \frac{\pi}{l}$$

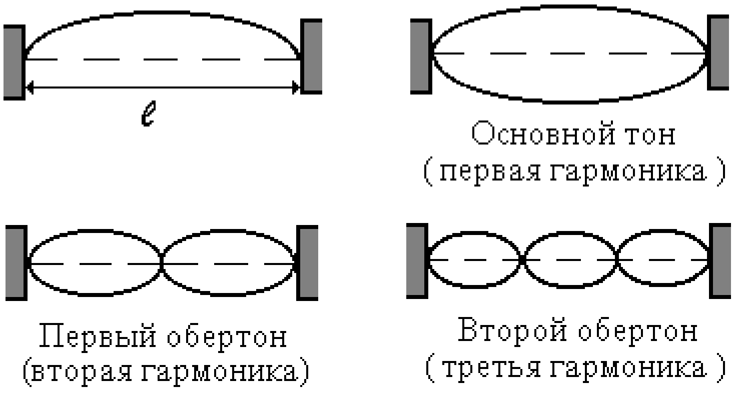


Рисунок 8.2 Стоячие волны

$\{w_k, k = 1,2,\dots\}$ - собственные частоты.

Ряд Фурье

Ищем решение в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{1,k} \cos\frac{\pi k t}{l} + C_{2,k} \sin\frac{\pi k t}{l} \right) \sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin\frac{\pi k x}{l}$$

Получаем:

$$\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi k x}{l}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \int_0^l \sin\frac{\pi k x}{l} \sin\frac{\pi m x}{l}\, dx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \int_0^l \sin\frac{\pi k x}{l} \sin\frac{\pi m x}{l}\, dx = \varphi_m \frac{\lambda}{2}$$

Следовательно,

$$\varphi_m = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx$$

II.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{1,k}\cos\frac{\pi k t}{l} + C_{2,k}\sin\frac{\pi k t}{l}\right)\sin\frac{\pi k x}{l}$$

$T_k = 2l$ – период u_k для любого k.

$$u_k(x,t+2l) = \widetilde{C_k}\cos\left[\frac{\pi k}{l}(t+2l+\varphi_k)\right]\sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$\widetilde{C_k}\cos\left[\frac{\pi k}{l}(t+2l+\varphi_k)\right]\sin\frac{\pi k x}{l} = \widetilde{C_k}\cos\left[\frac{\pi k}{l}(t+\varphi_k)+2\pi k\right]\sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$\widetilde{C_k}\cos\left[\frac{\pi k}{l}(t+\varphi_k)+2\pi k\right]\sin\frac{\pi k x}{l} = u_k(x,t)$$

Итого:

$$u_k(x,t+2l) = u_k(x,t)$$

Найдем коэффициенты в разложении:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{1,k}\sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{1,k}\sin\frac{\pi k x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi k x}{l}$$

Следовательно,

$$C_{1,k} = \varphi_k$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2,k}\frac{\pi k}{l}\sin\frac{\pi k t}{l}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{2,k}\frac{\pi k}{l}\sin\frac{\pi k t}{l} = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{\pi k x}{l}$$

Следовательно,

$$C_{2,k} = \frac{l}{\pi k}\psi_k$$

Итого, решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k\cos\frac{\pi k t}{l} + \frac{l}{\pi k}\psi_k\sin\frac{\pi k t}{l}\right)\sin\frac{\pi k x}{l}$$

Общий случай (неоднородное уравнение)

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), 0 \le x \le l \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

$$f(x,t) \not\equiv 0$$

Сначала, снова, рассматриваем однородное уравнение и сводим нашу задачу к задаче Штурма-Лиувилля.

Ортогональный базис в $L^2(0,l)$:

$$\left\{X_k(x) = \sin\frac{\pi k x}{l}, k = 1,2,\dots\right\}$$

Будем предполагать, что

$$\left(f \in L^2(0,l) \times (0,\tau)\right)$$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx$$

На втором шаге мы будем искать решение задачи в виде ряда Фурье.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t)\sin\frac{\pi k x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi^2 k^2}{l^2}\right)T_k(t)\sin\frac{\pi k x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{\pi k x}{l}$$

Запишем это как один ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)+\left(\frac{\pi^2k^2}{l^2}\right)T_k(t)-f_k(t)\right)\sin\frac{\pi kx}{l}=0$$

Следовательно,

$$T_k''(t)+\left(\frac{\pi^2k^2}{l^2}\right)T_k(t)-f_k(t)=0$$

Мы получили уравнение:

$$T_k''(t)+\frac{\pi^2k^2}{l^2}T_k(t)=f_k(t)$$

Решение в виде:

$$T_k(t)=T_{\text{одн}}+T_{\text{част}}$$

$$T_{\text{одн}}=C_{1,k}\cos\frac{\pi kt}{l}+C_{2,k}\sin\frac{\pi kt}{l}$$

Частное решение:

$$T_{\text{част}}=\frac{l}{\pi k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{\pi k(t-\tau)}{l}d\tau$$

$$T_{\text{част}}'=\int_0^t f_k(\tau)\cos\frac{\pi k(t-\tau)}{l}d(t-\tau)$$

$$T_{\text{част}}''=f_k(t)-\frac{\pi k}{l}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{\pi k(t-\tau)}{l}d\tau$$

Подставляем в начальные условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\sin\frac{\pi kx}{l}=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi kx}{l}$$

Следовательно,

$$T_k(0)=\varphi_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)\sin\frac{\pi k x}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{\pi k x}{l}$$

Следовательно,

$$T_k'(0)=\psi_k$$

Мы получили задачу Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t)+\dfrac{\pi^2k^2}{l^2}T_k(t)=f_k(t) \\ T_k(0)=\varphi_k \\ T_k'(0)=\psi_k \end{cases}$$

Задача с неоднородными краевыми условиями

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+f(x,t), \qquad 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=\alpha(t) \\ u(l,t)=\beta(t) \\ u(x,0)=\psi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

Решение в виде:

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),$$

где $v(x,t)$ и $w(x,t)$ – решения соответствующих задач.

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx}+w(x,t), \qquad 0<x<l, t>0 \\ v|_{t=0}=\varphi(x) \\ v_t|_{t=0}=\psi(x) \\ v(0,t)=0 \\ v(l,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt}=w_{xx}, \qquad 0<x<l, t>0 \\ w(0,t)=\alpha(t) \\ w(l,t)=\beta(t) \\ w(x,0)=0 \\ w_t(x,0)=0 \end{cases}$$

Найдем функцию, удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{cases} w(0,t) = \alpha(t) \\ w(l,t) = \beta(t) \end{cases}$$

Можно взять, например,

$$g(x,t) = \frac{x}{l}\beta(t) + \frac{l-x}{l}\alpha(t)$$

Тогда решение задачи для w ищем в виде:

$$w(x,t) = g(x,t) + h(x,t)$$

Подставим в исходное уравнение:

$$h_{tt} = h_{xx} - \frac{x}{l}\beta''(t) - \frac{l-x}{l}\alpha''(t)$$

Обозначим

$$f_0(x,t) = -\frac{x}{l}\beta''(t) - \frac{l-x}{l}\alpha''(t)$$

Тогда

$$\begin{cases} h_{tt} = h_{xx} + f_0(x,t) \\ h(0,t) = h(l,t) = 0 \\ h(x,0) = -\frac{x}{l}\beta(t) - \frac{l-x}{l}\alpha(t) = \varphi_0(x) \\ h_t(x,0) = -\frac{x}{l}\beta'(t) - \frac{l-x}{l}\alpha'(t) = \psi_0(x) \end{cases}$$

Пример (задача о колебаниях конечной струны с закрепленными концами)

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3\sin wt \sin 3\pi x, \qquad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = -\sin 2\pi x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Сначала построим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

Решение в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Получаем:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \qquad x \in (0,1) \\ X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$$

После подсчетов получим

$$\begin{cases} X_k(x) = \sin \pi k x \\ \lambda_k = -\pi^2 k^2 \end{cases}$$

Далее, будем искать решение задачи в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) + \pi^2 k^2 T_k(t)\right) \sin \frac{\pi k x}{l} = 3 \sin wt \sin 3\pi x$$

Отсюда можно сделать вывод: для любого $k \neq 3$:

$$T_k''(t) + \pi^2 k^2 T_k(t) = 0$$

Если же $k = 3$:

$$T_3''(t) + \pi^2 9 T_3(t) = 3 \sin wt$$

Подставим в начальные условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \pi k x = -\sin 2\pi x$$

$$T_k(t) = 0, \forall k \neq 2$$

$$T_k(t) = -1, k = 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin \pi k x = 0$$

$$T_k'(0) = 0, \forall k$$

Семинар 9. Метод Фурье. Часть 2

Задача о колебаниях конечной струны с закрепленными концами (продолжение решения задачи из предыдущего семинара)

Продолжим решать следующую задачу из семинара 8:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3\sin wt \sin 3\pi x, \qquad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = -\sin 2\pi x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Сначала построим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

Решение в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Получаем:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \qquad x \in (0,1) \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

После подсчетов получим

$$\begin{cases} X_k(x) = \sin \pi k x \\ \lambda_k = -\pi^2 k^2 \end{cases}$$

Далее, будем искать решение задачи в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) + \pi^2 k^2 T_k(t)\right) \sin \frac{\pi k x}{l} = 3\sin wt \sin 3\pi x$$

Отсюда можно сделать вывод: для любого $k \neq 3$:

$$T_k''(t) + \pi^2 k^2 T_k(t) = 0$$

Если же $k = 3$:

$$T_3''(t) + \pi^2 9 T_3(t) = 3 \sin wt$$

Подставим в начальные условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \pi k x = -\sin 2\pi x$$

$$T_k(t) = 0, \forall k \neq 2$$

$$T_k(t) = -1, k = 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin \pi k x = 0$$

$$T_k'(0) = 0, \forall k$$

Пусть $k \neq 2$ и $k \neq 3$. Тогда

$$\begin{cases} T_k''(t) + \pi^2 k^2 T_k(t) = 0 \\ T_k(0) = 0 \\ T_k'(0) = 0 \end{cases}$$

Мы получили задачу Коши для $T_k(t)$. В силу единственности решения задачи Коши получаем, что

$$T_k(t) \equiv 0$$

Итого получаем, что при разложении в ряд мы получаем только два ненулевых слагаемых. Задача Коши для $T_k(t)$ при $k = 2$:

$$\begin{cases} T_2''(t) + \pi^2 4 T_2(t) = 0 \\ T_2(0) = -1 \\ T_2'(0) = 0 \end{cases}$$

Задача Коши для $T_k(t)$ при $k = 3$:

$$\begin{cases} T_3''(t) + \pi^2 9 T_3(t) = 3\sin wt \\ T_3(0) = 0 \\ T_3'(0) = 0 \end{cases}$$

Ответ в исходной задаче:

$$u(x,t) = T_2(t)\sin 2\pi x + T_3(t)\sin 3\pi x$$

Решим задачу Коши для $T_k(t)$ при $k = 2$:

$$T_2(t) = C_1\cos 2\pi t + C_2\sin 2\pi t$$

Из граничных условий:

$$C_1 = -1$$

$$C_2 = 0$$

Тогда

$$T_2(t) = -\cos 2\pi t$$

Решим задачу Коши для $T_k(t)$ при $k = 2$:

$$T_3(t) = T_{\text{одн}}(t) + T_{\text{част}}(t)$$

$$T_{\text{одн}}(t) = C_1\cos 3\pi t + C_2\sin 3\pi t$$

Частное решение ищем в виде

$$T_{\text{част}}(t) = A\sin wt$$

$$-Aw^2\sin wt + 9\pi^2 A\sin wt = 3\sin wt$$

$$A(9\pi^2 - w^2) = 3$$

$$A = \frac{3}{9\pi^2 - w^2}, \qquad w \neq \pm 3\pi$$

$$T_{\text{част}}(t) = \frac{3}{9\pi^2 - w^2}\sin wt$$

Итого получаем

$$T_3(t) = C_1 \cos 3\pi t + C_2 \sin 3\pi t + \frac{3}{9\pi^2 - w^2} \sin wt$$

Из граничных условий:

$$T_3(0) = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$T_3(0) = 3\pi C_2 + \frac{3w}{9\pi^2 - w^2}$$

$$3\pi C_2 + \frac{3w}{9\pi^2 - w^2} = 0$$

$$C_2 = -\frac{w}{\pi(9\pi^2 - w^2)}$$

Тогда

$$T_3(t) = -\frac{w}{\pi(9\pi^2 - w^2)} \sin 3\pi t + \frac{3}{9\pi^2 - w^2} \sin wt, \qquad w \neq \pm 3\pi$$

Тогда ответ в исходной задаче:

$$u(x,t) = (-\cos 2\pi t) \sin 2\pi x + \left(-\frac{w}{\pi(9\pi^2 - w^2)} \sin 3\pi t + \frac{3}{9\pi^2 - w^2} \sin wt\right) \sin 3\pi x, \quad w \neq \pm 3\pi$$

Теперь найдем решение в случае, когда $w = \pm 3\pi$. Сначала рассмотрим случай $w = 3\pi$. В этом случае в системе возникает резонанс.

$$T_3''(t) + \pi^2 9 T_3(t) = 3 \sin wt$$

Частное решение в виде

$$T_{\text{част}} = At \cos 3\pi t$$

$$T_{\text{част}}'' = -9\pi^2 At \cos 3\pi t - 6A\pi \sin 3\pi t$$

$$-9\pi^2 At \cos 3\pi t - 6A\pi \sin 3\pi t + 9\pi At \cos 3\pi t = 3 \sin 3\pi t$$

$$-2A\pi = 1$$

$$A = -\frac{1}{2\pi}$$

Итого,

$$T_{\text{част}} = -\frac{1}{2\pi} t \cos 3\pi t$$

$$T_3(t) = C_1 \cos 3\pi t + C_2 \sin 3\pi t - \frac{1}{2\pi} t \cos 3\pi t$$

Из начальных условий:

$$C_1 = 0$$

$$3\pi C_2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{6\pi}$$

В конечном итоге

$$T_3(t) = \frac{1}{6\pi} \sin 3\pi t - \frac{1}{2\pi} t \cos 3\pi t$$

Тогда ответ исходной задачи в случае резонанса:

$$u(x,t) = (-\cos 2\pi t) \sin 2\pi x + \left(\frac{1}{6\pi} \sin 3\pi t - \frac{1}{2\pi} t \cos 3\pi t\right) \sin 3\pi x$$

Задача 2016 (8) из сборника задач по уравнениям математической физики под ред. В. С. Владимирова

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t, \qquad x \in (0,\pi), t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=\pi} = \pi t \\ u|_{t=0} = e^{-x} \sin x \\ u_t|_{t=0} = x \end{cases}$$

Начать решение этой задачи следует с приведения её к задаче с однородными граничными условиями.

Нужно найти функцию $g(x,t)$, которая удовлетворяет граничным условиям:

$$g(0,t) = 0$$

$$g(\pi,t) = \pi t$$

$$u(x,t) = g(x,t) + v(x,t)$$

В качестве такой функции мы можем взять

$$g(x,t) = xt$$

Будем искать решение исходной задачи в виде суммы двух функций:

$$u(x,t) = xt + v(x,t)$$

Подставим неизвестную функцию $v(x,t)$ в исходное уравнение:

$$v_{tt} - 3x - 3v_t = v_{xx} + 2t + 2v_x - 3x - 2t$$

$$v_{tt} - 3v_t = v_{xx} + 2v_x$$

Тогда мы получаем задачу на $v(x,t)$:

$$\begin{cases} v_{tt} - 3v_t = v_{xx} + 2v_x, \qquad x \in (0,\pi), t > 0 \\ v|_{x=0} = 0 \\ v|_{x=\pi} = 0 \\ v|_{t=0} = e^{-x}\sin x \\ v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Если бы наша задача имела вид

$$\begin{cases} v_{tt} - 3v_t = v_{xx}, \qquad x \in (0,\pi), t > 0 \\ v|_{x=0} = 0 \\ v|_{x=\pi} = 0 \\ v|_{t=0} = e^{-x}\sin x \\ v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

То мы могли бы искать решение в виде:

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{T'' - 3T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

Получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \qquad x \in (0, \pi) \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Но в нашем случае слагаемое $2v_x$ не позволяет напрямую использовать метод Фурье. Применим прием, позволяющий избавиться от этого слагаемого. Поэтому мы будем искать решение в виде

$$v(x,t) = e^{\alpha x} w(x,t)$$

Подставляем в краевые условия:

$$e^{\alpha x} w_{tt} - 3e^{\alpha x} w_t = \alpha^2 e^{\alpha x} w + e^{\alpha x} w_{xx} + 2\alpha e^{\alpha x} w_x + 2e^{\alpha x} w_x + 2\alpha e^{\alpha x} w$$

$$w_{tt} - 3w_t = w_{xx} + (\alpha^2 + 2\alpha) w + 2w_x(\alpha + 1)$$

Положим

$$\alpha = -1$$

Тогда мы получим уравнение

$$w_{tt} - 3w_t = w_{xx} - w$$

Мы получили задачу на w:

$$\begin{gathered} w_{tt} - 3w_t = w_{xx} - w, \qquad x \in (0, \pi), t > 0 \\ w|_{x=0} = 0 \\ w|_{x=\pi} = 0 \\ w|_{t=0} = \sin x \\ w_t|_{t=0} = 0 \end{gathered}$$

Эту задачу можно напрямую решать методом Фурье.

$$w(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{T'' - 3T'}{T} + 1 = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$X(0)T(t) = 0$$

Следовательно,

$$X(0) = 0$$

$$X(\pi)T(t) = 0$$

Следовательно,

$$X(\pi) = 0$$

Получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \qquad x \in (0, \pi) \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Базис этой задачи:

$$X_k(x) = \sin kx$$

$$\lambda_k = -k^2$$

$$k = 1,2, \dots$$

Тогда функцию $w(x,t)$ можно искать в виде ряда:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx$$

Подставим этот ряд в уравнение на $w(x,t)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) - 3T_k'(t) + T_k(t) + k^2 T_k(t)\right) \sin kx = 0$$

$$T_k''(t) - 3T_k'(t) + T_k(t) + k^2 T_k(t) = 0 \ \ \forall k = 1,2, \dots$$

$$w(x,t) = \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx$$

Из начальных условий:

$$T_1(0) = 1$$

$$T_k(0) = 0, k = 2,3, \dots$$

$$T_k'(0) = 0, k = 1,2,3, \dots$$

Тогда при $k \neq 1$ мы имеем задачу:

$$\begin{cases} T_k''(t) - 3T_k'(t) + T_k(t) + k^2 T_k(t) = 0 \\ T_k(0) = 0 \\ T_k'(0) = 0 \end{cases}$$

В силу единственности решения задачи Коши:

$$T_k(t) \equiv 0 \ \forall k \geq 2$$

При $k = 1$ мы имеем задачу:

$$\begin{cases} T_1''(t) - 3T_1'(t) + 2T_1(t) = 0 \\ T_1(0) = 1 \\ T_1'(0) = 0 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$p_1 = 2$$

$$p_2 = 1$$

Тогда решение этой задачи имеет вид

$$T_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t$$

Из начальных условий:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 = -1$$

$$C_2 = 2$$

$$T_1(t) = -e^{2t} + 2e^t$$

Тогда

$$w(x,t) = T_1(t)\sin x$$

$$w(x,t) = (-e^{2t} + 2e^t)\sin x$$

Ответ в исходной задаче:

$$u(x,t) = xt + e^{-x}\big((-e^{2t} + 2e^t)\sin x\big)$$

Задача. Уравнение распространения тепла

Предположим, что у нас есть стержень длины l и мы ходим описать распространение тепла в каждой точке этого стержня.

Уравнение, описывающее температуру данного стержня:

$$u_t = u_{xx}, x \in (0,l), t > 0$$

Будем предполагать, что концы стержня теплоизолированные. Тогда

$$u_x(0,t) = 0$$

$$u_x(l,t) = 0$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} a, & x \in \left(0, \frac{l}{2}\right] \\ b, & x \in \left(\frac{l}{2}, l\right] \end{cases}$$

В итоге мы имеем задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, x \in (0,l), t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u_x(l,t) = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} a, & x \in \left(0, \frac{l}{2}\right] \\ b, & x \in \left(\frac{l}{2}, l\right] \end{cases} \end{cases}$$

Будем решать её методом Фурье.

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$T'X = TX''$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

Краевые условия:

$$X'(0) = 0$$

$$X'(l) = 0$$

Получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \qquad x \in (0,l) \\ X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

1) $\lambda = 0$

$$X'' = 0$$
$$X(x) = ax + b$$

Из краевых условий:

$$a = 0$$
$$X = b$$

Возьмем в качестве $b = 1$. Тогда

$$X_0 \equiv 1$$
$$\lambda_0 = 0$$

2) $\lambda > 0, \beta^2 = \lambda$

$$X'' - \beta^2 X = 0$$
$$X(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}$$
$$X'^{(x)} = C_1 \beta e^{\beta x} - C_2 \beta e^{-\beta x}$$

Из краевых условий:

$$C_1\beta - C_2\beta = 0$$
$$\begin{cases} C_1 = C_2 \\ C_1 e^{\beta x} - C_2 e^{-\beta x} = 0 \end{cases}$$
$$e^{\beta x} + e^{-\beta x} \neq 0$$
$$\Longrightarrow C_1 = C_2 = 0$$

3) $\lambda < 0, \beta^2 = -\lambda$

$$X'' + \beta^2 X = 0$$

$$X(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$
$$X'^{(x)} = -C_1 \beta \cos \beta x + C_2 \beta \sin \beta x$$

Из краевых условий:

$$C_2 = 0$$
$$C_1 \beta \sin \beta l = 0$$
$$\beta l = \pi k$$
$$X_k = \cos \frac{\pi k x}{l}, \qquad k = 1,2, \ldots$$

Мы нашли базис в $L^2(0, l)$:

$$\left\{1, \cos \frac{\pi k x}{l}, (\ k = 1,2, \ldots)\right\}$$

Ищем решение нашей задачи в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cos \frac{\pi k x}{l} + T_0(t)$$

Подставляем в уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) \cos \frac{\pi k x}{l} + T_0'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left(-\frac{\pi^2 k^2}{l^2}\right) \cos \frac{\pi k x}{l}$$

$$T_0'(t) = 0$$

$$T_0(t) = const = C_0$$

$$T_k'(t) - \frac{\pi^2 k^2}{l^2} = 0$$

$$T_k(t) = C_k e^{-\frac{\pi^2 k^2}{l^2} t}$$

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{\pi^2 k^2}{l^2} t} \cos \frac{\pi k x}{l}$$

Из начальных условий:

$$u(x,0) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\frac{\pi k x}{l} = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} a, & x \in \left(0, \frac{l}{2}\right] \\ b, & x \in \left(\frac{l}{2}, l\right] \end{cases}$$

$$C_0 l = \int_0^b \varphi(x)dx$$

$$\int_0^l \varphi(x)dx = \int_0^{\frac{l}{2}} adx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} bdx$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} adx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} bdx = \frac{al}{2} + \frac{bl}{2}$$

Получаем:

$$C_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx = C_k \int_0^l \cos\frac{\pi k x}{l}dx = \frac{C_k l}{2}$$

$$\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx = \int_0^{\frac{l}{2}} a\cos\frac{\pi k x}{l}dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} b\cos\frac{\pi k x}{l}dx$$

$$C_k = \frac{2}{\pi k}\left[a\sin\frac{\pi k}{2} - b\cos\frac{\pi k}{2}\right]$$

Следовательно,

$$C_k = \frac{2(a-b)}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}$$

$$\frac{2(a-b)}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m, m = 1,2,\dots \\ \frac{2(a-b)}{\pi k}(-1)^m, & k = 2m-1 \end{cases}$$

Тогда получаем ответ:

$$u(x,0) = \frac{a+b}{2} + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m-1}e^{-\frac{\pi^2(2m-1)^2}{l^2}t}$$

Семинар 10. Метод Фурье. Часть 3.

Метод Фурье решения краевых задач для уравнения Лапласа

Уравнением Лапласа называется уравнение вида:

$$\Delta u = 0$$

где Δ – оператор Лапласа сумма вторых частных производных (несмешанных):

$u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} \equiv \Delta u$ (n-мерный оператор Лапласа)

На предыдущих занятиях были рассмотрены решения задач методом Фурье для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности.

Если в правой части уравнения вместо нуля находится функция f, то уравнение принимает вид уравнения Пуассона.

Обращаем внимание, что функция u – это функция только от пространственных переменных (от $x_1 x_n$), в отличие от предыдущих задач.

В основном, в курсе занимают значительную часть задачи Дирихле, а также задачи Неймана.

Под задачей Дирихле понимается нахождение решения уравнения Лапласа в некоторой ограниченной области (Ω) (Рисунок 10.1), которое принимало бы заданное значение на границе этой области.

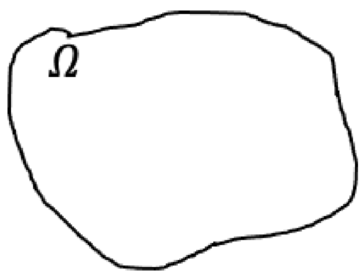


Рисунок 10.1

Записывается это так:

$$\Delta u = 0, x \epsilon \Omega\ ;$$

$$u\ (x) = \varphi(x), x \epsilon\ d\Omega$$

Интерпретаций физических у этой задачи очень много. Например, под (u) можно понимать стандартное распределение температур в точках, принадлежащих области Ω. Т.е. представить некоторое тело, которое совпадает в пространстве с областью Ω и стоит задача измерить температуру в каждой точке тела при условии, что известна температура на границе этой области. Так вот, если в теле нет тепловых источников и рассматривается установившийся температурный режим, то искомая температура будет удовлетворять уравнению Лапласа, так как согласно уравнению теплопроводности:

$$u_t = \Delta u\ ,$$

при постоянной температуре: $u_t = 0$

Другая интерпретация, где (u) – это потенциал электростатического поля. Если заряды распределены по границе области Ω и необходимо подсчитать потенциалы в каждой точке этой области, то потенциал будет гармонической функцией в области Ω.

Рассмотрим разбор метода Фурье для решения уравнения Лапласа для такого типа задач.

Пример решения задачи на нахождение гармонической функции в прямоугольнике.

Начнём изучение метода Фурье для нахождения функции $\Delta u = 0$, которая называется гармонической функцией, в некотором прямоугольнике на плоскости в декартовой системе координат.

Дано: Гармоническая функция, являющаяся решением уравнения:

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Прямоугольник Π, где

$$\Pi = (0, a) \times (0, b) = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

$$y$$

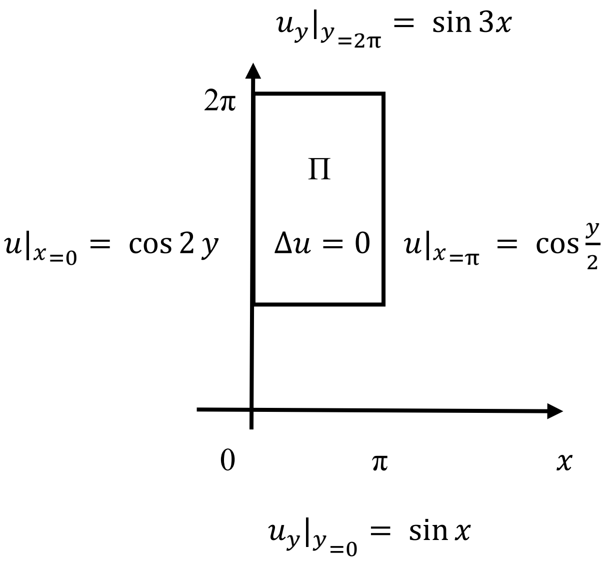


Рисунок 10.2

Как видно из условия задачи у нас есть два краевых условия Дирихле:

$$u|_{x=0} = \cos 2y$$

$$u|_{x=\pi} = \cos\frac{y}{2}$$

И два краевых условия Неймана:

$$u_y|_{y=2\pi} = \sin 3x$$

$$u_y|_{y=0} = \sin x$$

Необходимо найти функцию $\Delta u = 0$, которая является гармонической в этом прямоугольнике и удовлетворяет заданным краевым условиям.

В решении методом Фурье центральную часть занимает задача Штурма-Лиувилля.

Получается она из решения в виде произведения двух функций:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Подставим в это уравнение:

$$X''Y + XY'' = 0$$

и разделим переменные, поделив обе части уравнения на произведение X и Y:

$$X''Y + XY'' = 0$$

Получим выражение:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

Чтобы поставить задачу Штурма-Лиувилля необходимы однородные краевые условия. Так как на каждой из сторон прямоугольника заданы ненулевые функции, то эту задачу разбиваем на сумму двух задач, представив функцию Δu, как сумму двух функций Δv и Δw, разбив исходные данные краевых условий.

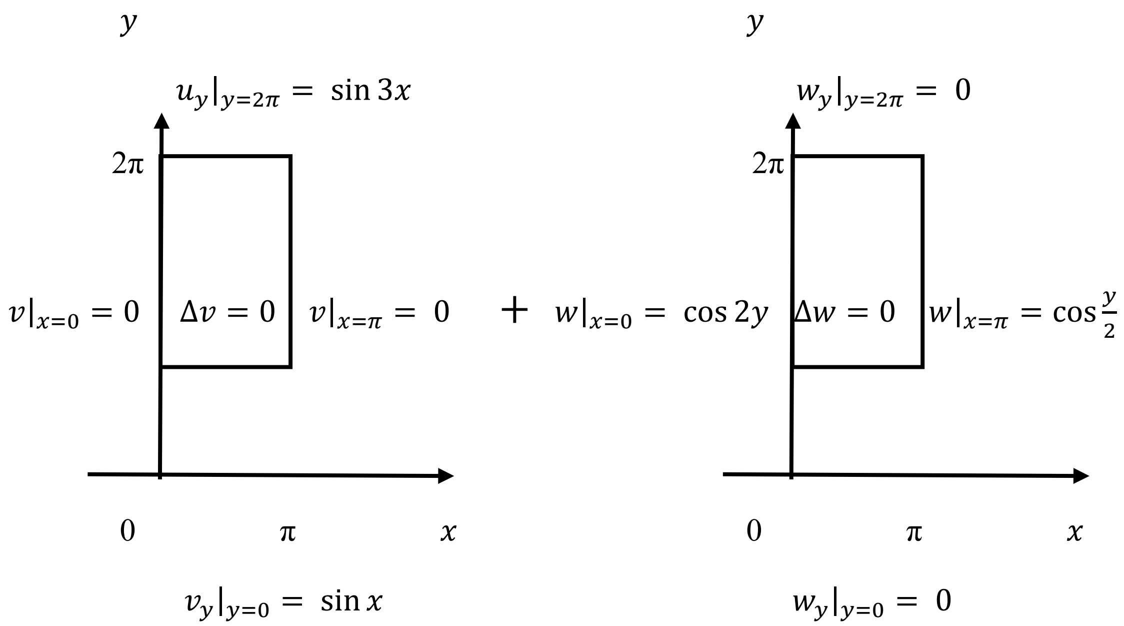


Рис. 10.3

Очевидно, что условие: $u = v + w$, удовлетворяет всем условиям исходной задачи и в то же время является гармонической функцией.

Находим функцию Δv.

$$v(x, y) = X(x)Y(y)$$

Подставляя это уравнение и разделяя переменные:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

Получаем два уравнения:

$$X'' = \lambda X \qquad x \epsilon (0, \pi)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \quad y \epsilon (0, 2\pi)$$

Затем подставляем это в краевые условия, т.е. для функции Δv находим частные гармонические функции в виде произведения двух функций, удовлетворяющих нулевым условиям, заданным при $x = 0$ и при $x = \pi$. Наличие двух противоположных сторон, на которых заданы однородные краевые условия, позволяет использовать задачу Штурма-Лиувилля.

$$X(0)\, Y(y) = 0$$

$$X(\pi) Y(y) = 0$$

Но, так как в нашем случае: $Y(y) \neq 0$, решение нетривиально:

$$X(0) = 0$$

$$X(\pi) = 0$$

Постановка задачи Штурма-Лиувилля для функции Δv:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \qquad x \epsilon (0, \pi) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Эта задача имеет счетное множественно решений.

Находим базис задачи на функцию Δv:

$$\{X_k(x) = \sin \mathrm{k}x, \; k = 1,2,\ldots\}$$

$$\lambda_k = -\mathrm{k}^2$$

Следовательно, функцию Δv можно искать в виде ряда Фурье по этому базису.

Для Y из уравнения Лапласа:

$$Y'' + \lambda Y = 0, \; y \epsilon \, (0,2\pi)$$

$$Y_k'' - \mathrm{k}^2 Y_k = 0$$

Запишем общее решение уравнения, как сумму соответствующего гиперболического косинуса и гиперболического синуса:

$$Y_k\,(y) = \mathrm{A}_k ch(ky) + \mathrm{B}_k sh(ky)$$

Тогда ряд для функции $v(x, y)$ имеет такой вид:

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(A_k ch(ky) + B_k sh(ky)\big) \sin kx$$

Имея два краевых условия и два неизвестных коэффициента A_K и B_K подсчитаем:

$$v_y(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(kA_k sh(ky) + kB_k ch(ky)\big) \sin kx$$

При $y = 0$ значение v_y должно совпадать с $\sin x$ (базисная функция при $k = 1$).

Следовательно, эта функция уже разложена в ряд Фурье.

Подставляя в уравнение $y = 0$, и учитывая, что: $\mathrm{sh}(0) = 0, \; \mathrm{ch}(0) = 1,$ получаем:

$$v_y|_{y=0} = \sin x = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{B}_K \mathrm{k} \, \sin kx$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых базисных функциях и делаем вывод:

$$\mathrm{B}_1 = 1 \quad \text{при } \mathrm{k} = 1$$

$$\mathrm{B}_k = 0 \quad \text{при } \mathrm{k} = 2,3,\ldots$$

Это первое условие позволило найти всё множество B_k.

При втором условии v_y при $y = 2\pi$, базисная функция должна совпадать с $\sin 3x$. Уравнение в этом случае имеет вид:

$$v_y|_{y=2\pi} = \sin x = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (k\,\mathrm{A}_K\,\mathrm{sh}(2\pi k) + \mathrm{B}_k k\,\mathrm{ch}\,(2\pi k))\sin kx = \sin 3x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых базисных функциях и получаем:

$$k\,\mathrm{A}_k\,\mathrm{sh}(2\pi k) + \mathrm{B}_k \mathrm{k}\,\mathrm{ch}\,(2\pi k) = 0 \text{ при } k \neq 3 \qquad (1)$$

$$3\,\mathrm{A}_3\,\mathrm{sh}(6\pi) + \mathrm{B}_3\,3\,\mathrm{ch}\,(6\pi) = 1 \quad \text{при } k = 3 \qquad (2)$$

Так как все значения $\mathrm{B}_k = 0$, кроме $\mathrm{B}_1 = 1$, то из первого равенства (1) следует,

что когда $k \neq 1$ и $k \neq 3$:

$$k\,\mathrm{A}_k\,\mathrm{sh}(2\pi k) + \mathrm{B}_k\,k\,\mathrm{ch}\,(2\pi k) = 0$$

Учитывая, что при $k \neq 1$, выражение: $\mathrm{B}_k\,k\,\mathrm{ch}\,(2\pi k) = 0$, делаем **вывод**:

$$\mathrm{A}_k = 0 \text{ при } k \neq 1, k \neq 3$$

Кроме того, из первого равенства (1), когда $k = 1$, $\mathrm{B}_1 = 1$ можно найти A_1:

$$\mathrm{A}_1\,\mathrm{sh}(2\pi) + \mathrm{ch}\,(2\pi) = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = -\frac{ch(2\pi)}{sh(2\pi)}$$

Из равенства (2), второе слагаемое сокращаем, т.к. $\mathrm{B}_k = 0$ и находим A_3:

$$\mathrm{A}_3 = \frac{1}{3\mathrm{ch}\,(6\pi)}$$

Найдя все коэффициенты и подставляя их для ряда разложения:

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(A_k ch(ky) + B_k sh(ky)\big) \sin kx$$

Можно написать ответ:

$$v(x,y) = \left(-\frac{\text{ch}\,(2\pi)}{\text{sh}(2\pi)}\,\text{ch}\,y + \text{sh}\,y\right)\sin x + \frac{1}{3\text{ch}\,(6\pi)} * \text{ch}\,(3y) * \sin 3x$$

Первое слагаемое представляем, как косинус разности двух углов, получаем выражение:

$$v(x,y) = -\frac{\text{ch}\,(2\pi - y)}{\text{sh}(2\pi)}\,\sin x + \frac{\text{ch}\,(3y)}{3\text{ch}\,(6\pi)}\sin 3x$$

Находим функцию Δw.

$$w(x,y) = X(x) * Y(y)$$

Подставим в уравнение Лапласа и получим:

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda$$

И, кроме того, функция должна удовлетворять паре однородных краевых условий:
$w_y|_{y=2\pi} = 0$; $w_y|_{y=0} = 0$ (Рис. 3)

Два уравнения ставят задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, y \in (0,2\pi) \\ Y'(0) = Y'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

$a)$ $\lambda_0 = 0$ – является первым собственным значением в этой задаче

и соответствующая ей функция: $Y_0 = const \equiv 1$

б) $\lambda > 0$, $\lambda = \beta^2$, $\beta \neq 0$ в этом случае, общее решение уравнения — это линейная комбинация соответствующих экспонент и нет нетривиальных решений среди экспонент, которые бы удовлетворяли бы краевым условиям.

в) $\lambda < 0$, $\lambda = -\beta^2$, $\beta \neq 0$ для этого случая, получаем уравнение:

$$Y'' + \beta^2 Y = 0$$

Его общее вещественное решение – это линейная комбинация косинусов и синусов:

$$Y = C_1 \cos\beta y + C_2 \sin\beta y$$

$$Y'(y) = -C_1\beta\sin\beta y + C_2\beta\cos\beta y$$

При подставлении значений в уравнение задачи Штурма-Лиувилля первое слагаемое даст «0». Сократив его, получаем:

$$Y'(0) = 0$$

$$C_2 = 0$$

При условии, когда Y'в точке 2π:

$$\sin 2\pi\beta = 0$$

Все решения, которые потребуются для задачи:

$$2\pi\beta = \pi k \quad \Rightarrow \beta_k = k/2, \text{ при } k = 1,2,\dots$$

Этот случай даёт счетное множество решений задачи. Выделяем базис задачи для нахождения функции Δw:

$$Y_{\text{к}} = \cos\frac{ky}{2}$$

$$\left\{\lambda_{\text{к}} = -\frac{k^2}{4} \qquad \text{k} = 1,2,\dots\right\}$$

$$\left\{1, \qquad \cos\frac{ky}{2}, \qquad \text{k} = 1,2,\dots\right\}$$

Следовательно, можно записать решение:

$$w(x,y) = X_0(x) + \sum_{\text{k}=1}^{\infty} X_k(x)\cos\frac{ky}{2}$$

Из уравнения Лапласа:

$$X_0''(x) + \lambda_0 X_0(x) = 0$$

$$\lambda_0 = 0, \qquad \Rightarrow X_0''(x) = 0$$

Тогда все решения – это линейные функции:

$$X_0(x) = ax + b$$

$X_к''$ является решением уравнения следующего вида:

$$X_к'' - \frac{k^2}{4} X_k = 0$$

Общее решение – это линейная комбинация экспонент. Запишем, общее решение как линейную комбинацию гиперболических функций синуса и косинуса:

$$X_k\,(x) = \mathrm{A}_k \operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}x\right) + \mathrm{B}_k\, sh\left(\frac{k}{2}x\right)$$

Запишем вид решения для функции:

$$w(x,y) = ax + b + \sum_{\text{k}=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_к \operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}\,x\right) + \mathrm{B}_k\, sh\left(\frac{k}{2}\,x\right)\right) \cos\left(\frac{ky}{2}\right)$$

Эта функция должна удовлетворять оставшимся двум краевым условиям.

При $x = 0$ запишем выражение для $w(0,y)$,одновременно преобразуя слагаемые суммы, где в первом слагаемом косинус будет равен единице, а во втором слагаемом синус равен нулю. Получаем:

$$w(0,y) = b + \sum_{к=1}^{\infty} \mathrm{A}_k \cos\left(\frac{ky}{2}\right) = \cos 2y \quad (3)$$

Для второго условия выражение имеет вид:

$$w(\pi,y) = a\pi + b + \sum_{\text{k}=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \mathrm{B}_k\, sh\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{ky}{2}\right) = \cos\left(\frac{y}{2}\right) \quad (4)$$

Получили два равенства на определение коэффициентов. Обратите внимание, что правая часть уравнения (3) $\cos 2y$ – это базисная функция, когда $k = 4$.

Следовательно, приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях из равенства (3), получаем вывод:

$$b = 0, \quad \mathrm{A}_к = 0 \quad \text{при}\, k \neq 4 \qquad \mathrm{A}_4 = 1$$

Для нахождения коэффициентов: a, $\mathrm{B}_к$, используем равенство (4):

Приравнивая коэффициенты при первой базисной функции, т.е. при «1», получаем:

$$a = 0,$$

$$\mathrm{A}_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \mathrm{B}_k sh\left(\frac{\pi k}{2}\right) = 0, \qquad \text{при } k = 2,3,\dots \tag{5}$$

$$\mathrm{A}_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{B}_1 sh\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad \text{при } k = 1, \tag{6}$$

Вывод:

$$\text{При } k \neq 1, k \neq 4 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}_k = 0, \mathrm{B}_k = 0$$

$$\text{При } k = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}_4 = 1,$$

Коэффициент B_4 находим из равенства (5):

$$\operatorname{ch}(2\pi) + \mathrm{B}_4 sh(2\pi) = 0,$$

$$1 * \operatorname{ch}(2\pi) + \mathrm{B}_4 sh(2\pi) = 0,$$

$$\mathrm{B}_4 = -\frac{\operatorname{ch}(2\pi)}{sh(2\pi)}$$

Если $\mathrm{A}_1 = 0$, то в равенстве (6) первое слагаемое равно нулю. Находим из равенства (6):

$$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{sh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

Получаем следующий ответ:

$$w(x,y) = \frac{sh\left(\frac{x}{2}\right)}{sh\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cos\left(\frac{y}{2}\right) + \left(\operatorname{ch}(2x) - \frac{\operatorname{ch}(2\pi)}{sh(2\pi)}\, sh(2x)\right)\cos 2y$$

Заметив в скобках синус разности, упрощаем выражение:

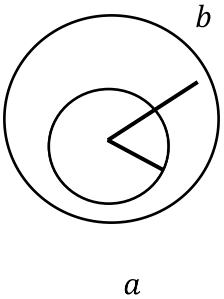
$$w(x,y) = \frac{sh\left(\frac{x}{2}\right)}{sh\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cos\left(\frac{y}{2}\right) + \left(\frac{sh(2\pi - 2x)}{sh(2\pi)}\right)\cos 2y$$

Складывая обе функции, находим решение на заданную функцию:

$$u = v + w$$

Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в кольце.

Задача на нахождение гармонической функции в кольце, заданном на плоскости неравенством радиуса, который меняется от некоторого числа a до некоторого числа b. Необходимо в этом кольце найти гармоническую функцию, т.е. решение уравнение Лапласа, удовлетворяющее заданным условиям на границе. Граница состоит из двух окружностей нашей области.



$$\begin{cases} \Delta u = 0, a < r < b \\ u|_{r=a} = g(\phi) \\ u|_{r=b} = h(\phi) \end{cases}$$

Рисунок 10.4

Поскольку задача задана в кольце, то удобнее искать функцию угловой переменной полярной системы координат:

$$u = u(r,\varphi)$$

Для этого нужно вспомнить, как выглядит оператор Лапласа в полярной системе координат:

$$\Delta u(r,\varphi) = u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\varphi\varphi} = 0$$

Найдём центральное место (задача Штурма-Лиувилля) для решения методом Фурье:

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

Подставляя значения в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получаем уравнение (для простоты написания обе части уравнения умножим на r^2):

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\,\Phi'' = 0$$

Чтобы разделить переменные обе части этого равенства делим на произведение $R\Phi$, и оставляем в левой стороне уравнения функцию, зависящую от r, а в правой от φ:

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

Для постановки задачи Штурма-Лиувилля выделяем два равенства:

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$$

Писать задачу на Штурма-Лиувилля по функции R не можем, т.к. краевые условия неоднородные. На функцию Φ можно написать условие, учитывая, что эта функция заданной окружности от угловой переменной φ. Следовательно, как функция, заданная на окружности, она должна быть 2π периодической:

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0 \qquad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

Это и будет условием задачи Штурма-Лиувилля для нахождения гармонической функции в кольце.

$a)$ $\lambda_0 = 0$ $\qquad \Phi_0 = const \equiv 1$

б) $\lambda < 0,\ \lambda = -\beta^2$ $\quad \Phi \equiv 0$ решением этого уравнения будет линейная комбинация экспонент.

в) $\lambda > 0,\ \lambda = \beta^2,\ \beta \neq 0$ — это условие позволяет решение линейных комбинаций косинусов и синусов, которое запишем так:

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos\beta\varphi + C_2 \sin\beta\varphi = \Phi(\varphi + 2\pi) = C_1 \cos\beta(\varphi + 2\pi) + C_2 \sin\beta(\varphi + 2\pi)$$

Учитывая косинус суммы, синус суммы:

$$= C_1 \left[\cos\beta\phi \cos 2\pi - \sin\beta\varphi \sin 2\pi\beta\right] + C_2\left[\sin\beta\varphi \sin 2\pi\beta + \cos\beta\varphi \sin 2\pi\beta\right]$$

Коэффициенты уравнения с правой и с левой стороны должны совпадать, поэтому:

$$C_1 = C_1 \cos 2\pi\beta + C_2 \sin 2\pi\beta$$

$$C_2 = -C_1 \sin 2\pi\beta + C_2 \cos 2\pi\beta$$

Получили однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \cos 2\pi\beta - 1 + C_2 \sin 2\pi\beta = 0 \\ -C_1 \sin 2\pi\beta + C_2 \cos 2\pi\beta - 1 = 0 \end{cases}$$

Система имеет нетривиальное решение лишь тогда, когда её определитель равен нулю.

Рассмотрим матрицу этого решения.

$$\begin{vmatrix} \cos 2\pi\beta - 1 & \sin 2\pi\beta \\ -\sin 2\pi\beta & \cos 2\pi\beta - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем этот определитель:

$$(\cos 2\pi\beta - 1)^2 + \sin^2 2\pi\beta = 0$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, получится:

$$2 - 2\cos 2\pi\beta = 0$$

$$\cos 2\pi\beta = 1$$

$$2\pi\beta = 2\pi k$$

$$\beta_k = k$$

Получаем стандартный базис из условия:

$$\lambda > 0, \qquad \lambda = \beta^2, \ \beta \neq 0 \Rightarrow \quad \Phi_к^{(1)} = \sin k\varphi$$

$$\Phi_к^{(2)} = \cos k\varphi$$

$$\{1, \ \cos k\varphi, \sin k\varphi \ \ (\mathrm{k} = 1,2, \dots)\}$$

$$\lambda_к = k^2$$

Вспомним, что R является решением уравнения: $r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$, где λ – собственное значение. Тогда, если $\lambda_0 = 0$:

$$r^2 R'' + rR' = 0$$

Общее решение этого уравнения будет линейная комбинация единицы и логарифма в виде:

$$R_0 = C_0 + \mathrm{D}_0 ln\, r$$

При условии: $\lambda_к = к^2$, получаем уравнение:

$$r^{2} R_k'' + rR_k' - k^2 R_k = 0 \qquad \text{(уравнение Эйлера)}$$

Так как функция сохраняет степень в каждом слагаемом решаем уравнение в виде степенной функции:

$$R_к(r) = r^{\alpha}$$

Подставляем вместо $R_к$ в уравнение r^{α}, получаем:

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - k^2 r^{\alpha} = 0$$

Сокращаем на r :

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha - k^2 = 0$$

$$\alpha^2 - k^2 = 0$$

$$\alpha = \pm k$$

$$r^{k}, r^{-k}$$

Общее решение этого уравнения — это линейные комбинации:

$$R_k = C_k r^k + D_k r^{-k}$$

Запишем ряд, в виде которого будем искать решение для задачи.

$$u(r,\varphi) = C_0 + D_0 ln\, r + \sum_{к=1}^{\infty} R_к^{(1)}(r)\cos k\varphi + \sum_{к=1}^{\infty} R_k^{(2)}(r)\sin k\varphi$$
$$= C_0 + D_0 ln\, r \sum_{к=1}^{\infty} (A_к r^k + B_к r^{-k})\cos k\varphi + \sum_{к=1}^{\infty} (C_k r^k + D_k r^{-k})\sin k\varphi$$

Для того, чтобы найти все коэффициенты этого уравнения, вспомним, что в условии задачи заданы два краевых условия: $u|_{r=a} = g(\varphi),\ u|_{r=b} = h(\varphi)$
Как и в предыдущих задачах, предполагаем, что функции $g(\varphi)$ и $h(\varphi)$ разложены в ряд Фурье по определённому базису: $\{\ 1,\ \cos k\varphi, \sin k\varphi\ \ (k = 1,2, \dots)\ \}$

Распишем функции в виде ряда:

$$g(\varphi) = g_0 + \sum_{к=1}^{\infty} g_к^{(1)}(r)\sin k\varphi + \sum_{к=1}^{\infty} g_к^{(2)}(r)\cos k\varphi$$

$$h(\varphi) = h_0 + \sum_{к=1}^{\infty} h_к^{(1)}(r)\sin k\varphi + \sum_{к=1}^{\infty} h_к^{(2)}(r)\cos k\varphi$$

Находим коэффициенты по радиусу a :

$$\begin{aligned} u(a,\varphi) = g(\phi) \\ &= C_0 + D_0 ln\, a \\ &+ \sum_{к=1}^{\infty} (\mathrm{A}_k a^{\,k} + \mathrm{B}_k a^{\,-k})\cos k\varphi + \sum_{к=1}^{\infty} (C_k\, a^k + + \mathrm{D}_k a^{\,-k})\sin k\varphi \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получаем:

$$C_0 + D_0 \ln a = g_0$$

$$C_k\, a^{\,k} + \mathrm{D}_k a^{\,-k} = g_k^{(1)}$$

$$\mathrm{A}_k a^{\,k} + \mathrm{B}_k a^{\,-k} = g_k^{(2)}$$

Аналогично находим коэффициенты по радиусу b :

$$\begin{aligned} u(b,\varphi) = h(\varphi) \\ &= C_0 + D_0 ln\, b \\ &+ \sum_{к=1}^{\infty} (\mathrm{A}_k b^{\,k} + \mathrm{B}_k b^{\,-k})\cos k\varphi + \sum_{к=1}^{\infty} (C_k b^{\,k} + + \mathrm{D}_k b^{\,-k})\sin k\varphi \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты и получаем:

$$C_0 + D_0 ln\, b = h_0$$

$$C_к\, b^{\,к} + \mathrm{D}_к b^{\,-к} = h_к^{(1)}$$

$$\mathrm{A}_к b^{\,к} + \mathrm{B}_к b^{\,-к} = h_к^{(2)}$$

Получаем бесконечную цепочку систем линейных уравнений на определение всех коэффициентов, входящих в задачу:

$$\begin{cases} C_0 + \mathrm{D}_0 ln\, a = g_0 \\ C_0 + \mathrm{D}_0 ln\, b = h_0 \end{cases}$$

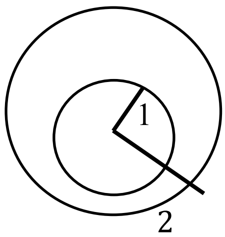
$$\begin{cases} C_к\, a^{\,к} + D_к a^{-к} = g_к^{(1)} \\ C_к\, b^{\,к} + D_к b^{-к} = h_к^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_к a^{\,к} + B_к a^{-к} = g_к^{(2)} \\ A_к b^{\,к} + B_к b^{-к} = h_к^{(2)} \end{cases}$$

Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в круге

Для решения краевых задач в круге в рядах разложения предыдущей задачи в кольце (7) убираем те слагаемые, которые не определены в круге, т.е. те слагаемые, которые не определены в центре круга в нуле: логарифмы и отрицательные степени. То, что останется и будет рядом Фурье для задачи в круге.

Рассмотрим на конкретном примере.



$$\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2 \\ u|_{r=1} = x \\ u|_{r=2} = y \end{cases}$$

Рисунок 10.5

1. Запишем задачу в полярной системе координат:

$$u|_{r=1} = x = \cos\varphi = g(\varphi)$$

$$u|_{r=2} = y = \sin k\varphi = h(\varphi)$$

Примечание: Эти функции уже разложены в ряд Фурье поэтому мы не записываем их разложение.

2. Находим все остальные коэффициенты, представленные в разложении предыдущей задачи в кольце, отличные от нуля и равные нулю.
   Из представленного ряда в предыдущей задаче гармонической функции в кольце (7) запишем ряд для круга:

$$u(1,\varphi) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k)\cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k + D_k)\sin k\varphi$$

$\Rightarrow\ C_0 = 0,\quad A_1 + B_1 = 1,\qquad A_k + B_k = 0,\quad (\text{при}\quad k = 2, \dots)$

$C_k + D_k = 0\quad (\text{при}\quad k = 1,2, \dots)$

$$u(2,\varphi) = 2\sin\varphi = C_0 + D_0 ln2 \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 2^{\,k} + B_k 2^{\,-k})\cos k\varphi$$

$$+ \sum_{к=1}^{\infty} (C_k 2^{\,k} + D_k 2^{\,-k})\sin k\varphi$$

$$\Rightarrow\quad C_0 + D_0 ln2 = 0$$

$$A_k 2^{\,k} + B_k 2^{\,-k} = 0,\quad (\text{при}\quad k = 1,2, \dots)$$

$$C_1 * 2 + D_1 * \frac{1}{2} = 2$$

$$C_k 2^{\,k} + D_k 2^{\,-k} = 0\quad (\text{при}\quad k = 2,3, \dots)$$

3. Рассмотрев полученные выводы, находим пары нетривиальных уравнений, которые дают ненулевые решения:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 1 \\ 2A_1 + \frac{1}{2}B_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + D_1 = 0 \\ 2C_1 + \frac{1}{2}D_1 = 2 \end{cases}$$

4. Все остальные уравнения равны нулю и имеют вид однородных линейных систем с тривиальными решениями:

$$\begin{cases} A_к + B_к = 0 \\ A_к 2^{\,к} + B_к 2^{\,-к} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ A_к = B_к = 0\ \ (\text{при}\quad k = 2,3, \dots)$$

$$\begin{cases} C_к + D_к = 0 \\ C_к 2^{\,к} + D_к 2^{\,-к} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C_к = D_к = 0\ (\text{при}\ k = 2,3, \dots)$$

Из ряда разложения сделали вывод, что отличные от нуля: $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$

Находим эти числа из системы уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1 = 1 \\ 2\mathrm{A}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{B}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + \mathrm{D}_1 = 0 \\ 2C_1 + \frac{1}{2}\mathrm{D}_1 = 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{A}_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{B}_1 = \frac{4}{3}$$

$$C_2 = \frac{4}{3}$$

$$\mathrm{D}_1 = -\frac{4}{3}$$

5. Ответ задачи:

$$u(r,\varphi) = \left(-\frac{1}{3}r + \frac{1}{r} * \frac{4}{3}\right)\cos\varphi + \left(\frac{4}{3}r - \frac{4}{3}r^{-1}\right)\sin\varphi$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ