ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

СЕРДОБОЛЬСКАЯ МАРИЯ ЛЬВОВНА

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ

АХМАДЕЕВА ИЛЬДАРА ИЛНУРОВИЧА

Содержание

1 Лекция №1. Основные понятия теории вероятности.

Литература по курсу:

- Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А. «Теория вероятностей, математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков»
- Гнеденко Б.В. «Курс теории вероятностей»
- Ширяев А.Н. «Вероятность»
- Феллер В. «Теория вероятностей и ее приложения»
- Кафедра математического моделирования и информатики cmp.phys.msu.ru

Предмет теории вероятности

Для чего теория вероятностей нужна — математические теории, конечно, интересны сами по себе, но вообще все математические конструкции, которые мы строим, нужны нам, прежде всего, как инструмент для создания математической модели физического явления.

Проводится эксперимент или изучается теоретически какое-то явление, а для того, чтобы его описать применяется некоторая математическая модель. И теория вероятностей — это замечательный инструмент для создания математических моделей явлений. Но при этом нужно обязательно иметь в виду, что, как и любая другая математическая теория, теория вероятности не способна описать все на свете.

Эксперименты со случайным исходом

Определение 1.1 ***Случайный исход*** *— это нечто противоположное детерминированному исходу, недетерминированность.*

1. Недетерминированность исхода
2. Повторяемость эксперимента

Один акт эксперимента влечет две взаимоисключающие возможности:

- Исход реализовался
- Исход не реализовался

Исход A имеет частоту:

$$\frac{n(A)}{n} = \frac{\text{Число раз когда } A}{\text{Число повторений}}$$

Статистическая устойчивость частоты

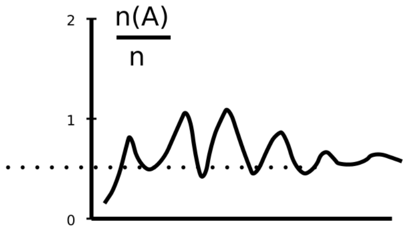


Рис. 1.1: Статистическая устойчивость частоты

При увеличении количества повторений значение частоты стабилизируется, выходит на некий уровень, и этот уровень и есть вероятность события A.

$$\mathsf{P}(A) \approx \frac{n(A)}{n} \quad \text{— вероятность исхода } A \text{ при больших n}$$

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

При повторениях эксперимента условия воспроизводятся практически без изменений.

Теория вероятности используется в огромном количестве физических ситуаций. Можно заменить на более точное как предел при n, стремящемся к бесконечности. У исхода A в одном акте повторения есть всего две возможности до события - A либо происходит, либо не происходит, а частота — это случайная величина, случайное число, которое может принимать любые значения от 0 до 1 с шагом $\frac{1}{n}$, при этом n - случайная величина.

Мы можем показать, что при определенных условиях и при определенным образом заданном пределе, такая последовательность случайных величин сходится к той вероятности, которая определяет поведение этой частоты.

Вероятность нужно определять как-то по-другому.

$$\boxed{\mathsf{P}(A)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} \Rightarrow \text{способ эмпирической проверки}$$

Вероятность как математическая конструкция

Вероятность — это мера множества. *Мера* — это числовая характеристика, то есть это некоторое правило, которое множеству приписывает числовое значение.

Эксперимент с неопределенным исходом. Каждый исход 1 акта эксперимента = элементарный исход (обозначается ω).

Все возможные элементарные исходы в данном эксперименте образуют множество элементарных исходов (обозначается Ω)

«Неэлементарные» исходы: $A \subset \Omega$

Определение 1.2 *Вероятность* — это мера множества элементарных исходов.

1 раз брошена монета:

Математическая модель $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где $\omega_1 =$ "орел", $\omega_2 =$ "решка"

Множество элементарных исходов содержит конечное число элементарных исходов.

Вопрос: Могут ли быть бесконечные множества элементарных исходов?

Ответ: Как математическая модель несомненно могут быть

Монету бросают до первого выпадения «орла»

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n, \ldots\}$, где $\omega_1 = \text{О}, \omega_2 = \text{РО}, \ldots, \omega_n = \text{РРР}\ldots\text{О}$

Ω — счетное множество

$\Omega \longleftrightarrow_{\text{взамно-однозначно}} \aleph = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

Определение 1.3 *Счетное множество* — которое можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством натуральных чисел.

Определение 1.4 *Несчетное множество* — множество, которое не является счетным и не является конечным.

Вопрос: Могут ли быть несчетные множества моделью случайного эксперимента?

Ответ: Да.

Измерение температуры: $\Omega = \{T_{min}, T_{max}\}$, $\mathrm{T}_{min} = -40°, T_{max} = +15°$
Эксперимент $\Leftrightarrow$ множество Ω, Событие $A \subset \Omega$

Элементы теории множеств

События	Множества
ω влечет наступление A	$\omega \in A$

$\Omega = \{T_{min}, T_{max}\}$, A = [0, T_{max}]

Множество элементарных исходов $\omega \in \Omega$ распадается на множество тех исходов, которые принадлежат A и другие, которые не принадлежат A.

A — множество тех исходов ω, которые влекут A.

$A \subset B \Rightarrow \forall\ \omega \in A,\ \omega \in B$ — if A then B

B = [-5°, T_{max}], $A \Rightarrow B$ (A влечет B, B — следствие A)

Операции над множествами

$\overline{A}$ = событие A не произошло	$\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ **-дополнение**
$\bigcup_\alpha A_\alpha = \{\omega \in \Omega :\ \exists\alpha,$ при котором $\omega \in A_\alpha\}$ - происходит хотя бы 1 из $A_\alpha \omega \in B\}$	$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ или **-объединение**
$\bigcap_\alpha A_\alpha$ = происходят все A_α в одном акте эксперимента	$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ и $\omega \in B\}$ **-пересечение** $\omega \in \bigcap_\alpha A_\alpha \Leftrightarrow \forall\alpha\ \omega \in A_\alpha$
	$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ но $\omega \notin B\} =$ $= A \cap \overline{B}$ – **разность**
	$A \triangle B = \{\omega \in \Omega : \omega \in$ ровно одному из A, B $\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ **-симметрическая разность**

Свойства операций

$$\left.\begin{aligned}(A \cup B) = (B \cup A)\\(A \cap B) = (B \cap A)\end{aligned}\right] - \textbf{коммутативность}$$

$$\left.\begin{aligned}(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\\(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\end{aligned}\right] - \textbf{ассоциативность}$$

$$\left.\begin{aligned}(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\\(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{aligned}\right] - \textbf{дистрибутивность}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ &\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ &\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha} \\ &\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \end{aligned}\right] - \textbf{формулы двойственности}$$

$\mathrm{A} \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

$\varnothing \subset A \subset \Omega$

если $\mathrm{A} \subset B$, то $A \cap B = A, A \cup B = B$

$\overline{\overline{A}} = A$

$\mathrm{A} \subset \Omega \longleftrightarrow$ Индикаторная функция $\chi\odot : \Omega \Rightarrow \{0, 1\}$

Определение 1.5 *Индикаторная функция*

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases}$$

$\mathrm{A} \subset B \Leftrightarrow \chi_A(\omega) \leq \chi_B(\omega) \forall\ \omega \in \Omega$

$\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \chi_A(\omega) = \chi_B(\omega) \forall\ \omega \in \Omega$

$\chi_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \chi_A(\omega)$

$\chi_{A \cup B}(\omega) = max\{\chi_A(\omega), \chi_B(\omega)\} \quad \forall \omega \in \Omega$

$\chi_{A \cap B}(\omega) = min\{\chi_A(\omega), \chi_B(\omega)\} \quad \forall \omega \in \Omega$

Последовательность множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \ \lim\limits_{n \to \infty} A_n -?$
$\exists\ A = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$, если:

$\forall \omega \in \Omega \ \ \exists \lim\limits_{n \to \infty} \chi_{A_n}(\omega) \Leftrightarrow$

$\forall \omega \in \Omega$ либо $\chi_{A_n}(\omega) = 1 \ \ \forall n \geq n_0$
либо $\chi_{A_n}(\omega) = 0 \ \ \forall n \geq \overline{n_0}$

$$\lim_{n \to \infty} \chi_{A_n}(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases} = \chi_A(\omega)$$

2 Лекция №2. Алгебры и сигма-алгебры событий. Аксиомы вероятностей

$$\Omega; A, B, C, \dots, \subset \Omega$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases}$$

$$\chi_A(\omega) = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(\omega), \forall \omega \in \Omega$$

Теорема 1 (О пределе) *Пусть* $\{x_n\} \subset \Re, n = \overline{1,\infty},$ *откуда* $\exists\ x = \lim x_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\ x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\ x_n = x$

Определение 2.1 *Верхний предел - максимальная из предельных точек:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\ x_n = \inf_{n\to\infty} \sup_{k=n,n+1,\dots} x_k$$

Определение 2.2 *Нижний предел - минимальная из предельных точек*

$$\lim_{n\to\infty} \inf\ x_n = \sup_{n\to\infty} \inf_{k=n,n+1,\dots} x_k$$

Операции над множествами и операции над индикаторными функциями связаны следующими соотношениями:

$$\bigcup_k \longleftrightarrow \max_k; \quad \bigcap_k \longleftrightarrow \min_k;$$

Множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\ A_n$называется верхним пределом$\{A_n\}_{n=1,\infty}$

Множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\ A_n$называется нижним пределом$\{A_n\}_{n=1,\infty}$

$$\bigcup_k \longleftrightarrow \exists k; \quad \bigcap_k \longleftrightarrow \forall k$$

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \forall n = 1, 2, \dots \quad \exists k \geq n : \omega \in A_k, \text{т.е.}$$

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n, \dots, k_n \to +\infty : \omega \in A_{k_n} \forall n = 1, 2, \dots$$

— условие включения ω в верхний предел эквивалентно тому, что ω принадлежит некоторой подпоследовательности

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \exists n : \quad \forall k \geq n : \omega \in A_k, \text{т.е.}$$

$$\omega \in A_n, A_{n+1}, \dots$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\ A_n \supset \lim\limits_{n\to\infty} \inf\ A_n$

Из формул двойственности получаем, что:

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty} \inf\ A_n} = \lim_{n\to\infty} \sup\ \overline{A_n}$$

$$\{x_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \quad \longleftrightarrow \quad \{1 - x_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$$

$\exists\ A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\ A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\ A_n \overset{def}{=} A$

Лемма 2 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \subset \Omega$ *(монотонно неубывающая последовательность). Тогда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\ A_n \overset{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\ A_n \overset{!}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\ A_n \overset{def}{=} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \overset{?}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Пусть $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \forall n \exists k_n \geq n : \omega \in A_{k_n} \Rightarrow \omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Пусть $\omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n_o : \omega \in A_{n_o} \subset A_{n0+1} \subset \dots \subset A_{n0+m} \subset \dots \Rightarrow$

$\omega \in A_{n0+m} \quad \forall m \geq 0$

а именно $k = \begin{cases} n_0, & \text{если } n \leq n_0; \\ n_0 + m, & \text{если } n > n_0, \text{ т.е. } n = n_0 + m \text{ при m} > 0 \end{cases}$

т.е. $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

2) $\omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$, т.к. $\mathrm{A}_1 \subset A_2 \subset \cdots \Rightarrow \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ ∎

Лемма 3 *Пусть* $\Omega \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \dots$ *Тогда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Доказательство. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty} A_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{A_n} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ∎

Цель: мы хотим для A построить $\mathsf{P}(A)$ $\quad (A \subset \Omega)$

$\mathsf{P}(\cdot)$— функция : $\underset{A\subset\Omega}{\text{подмножество}} \to \underset{\mathsf{P}(A)}{\text{число}}$

Построение любой функции начинаем с области определения

Область определения для $\mathsf{P}(\cdot)$

$\{\mathrm{A} \subset \Omega : \exists \mathsf{P}(A)\}$ — ? (возможно, $\mathsf{P}(A) = 0$)

Если $\exists \mathsf{P}(A), \exists \mathsf{P}(\overline{A})$

Если $\exists \mathsf{P}(A), \mathsf{P}(B)$, то $\exists \mathsf{P}(A \cup B)$, $\exists \mathsf{P}(A \cap B)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Система $\mathbb{F}$ подмножеств Ω называется **алгеброй** подмножеств, если выполнены

$\boxed{\mathrm{F}_1}$: $\quad A \in \mathbb{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathbb{F}$

$\boxed{\mathrm{F}_2}$: $\quad A, B \in \mathbb{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathbb{F}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathbb{F} \\ \varnothing, \Omega \in \mathbb{F}, \text{ т.к. если } A \in \mathbb{F}, \text{ то} \\ \begin{cases} \text{либо A} = \varnothing \Rightarrow \overline{A} = \Omega \\ \text{либо A} = \Omega \Rightarrow \overline{A} = \varnothing \in \mathbb{F} \\ \text{либо A} = \varnothing, \Omega, \text{но } A \cup \overline{A} = \Omega \in \mathbb{F} \; A \cap \overline{A} = \varnothing \in \mathbb{F} \end{cases} \end{cases}$$

$\mathbb{F}_{min} = \{\varnothing, \Omega\}$ — алгебра

$\mathbb{F}_{min} \subset \mathbb{F} \qquad \forall \mathbb{F}$ - алгебра — минимальная (по включению) алгебра есть подмножество в любой другой алгебре. (Алгебра - множество, значит можно выделить поднмножество)

Алгебра, содержащая любые подмножества Ω :
F_{max} = все подмножества $\Omega \quad (2^{\Omega})$
$\forall \mathbb{F}$- алгебра $\quad \mathbb{F} \subset \mathbb{F}_{max}$
Пример: $\qquad \varnothing \neq A \neq \Omega$
$\mathbb{F} = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$

Утв. Если в алгебре конечное количество подмножеств, то это число равно 2^n

Из $\boxed{\mathrm{F}_2} \Rightarrow (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathbb{F}$, если $A_k \in \mathbb{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{F} \quad \forall n < \infty$, если $A_k \in \mathbb{F}$
$\not\Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{F}$, если $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{F}$

В математике часто случается следующее: попытка сделать предельный переход. Пример: Возьмем конечные суммы — коммутативны, всегда существуют. Переходим к рядам — заменяем конечную сумму бесконечным рядом:

- его может $\nexists$ (сумма ряда может не сходиться)
- даже сходящийся ряд может не обладать свойством коммутативности (перестановкой членов можно получать любые суммы)

$\Rightarrow$ операция предельного перехода может существенно изменить свойства объекта

Система $\mathbb{F}$ подмножеств Ω называется **сигма-алгеброй**, если

- $A \in \mathbb{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathbb{F}$
- $A, B \in \mathbb{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathbb{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{F}$

Следствие Если $\mathbb{F}$ — сигма-алгебра, то $\mathbb{F}$ - алгебра

Если $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, $N < \infty$, то $\forall$ $\mathbb{F}$-алгебра, $\mathbb{F}$ — сигма-алгебра

($\mathbb{F}$ содержит $2^N < \infty$ подмножеств)

Задать на $\mathbb{F}$ частоту $\mathsf{P}(\cdot)$

$\mathsf{P}(A) \approx \frac{n(A)}{n}$ — частота A

$0 \le \mathsf{P}(A) \le 1$

$\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$

Если $A \cap B = \oslash$ (несовместность событий A и B) : $\nexists \omega : \omega \in A \cap B$, то

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Введем обозначение «+»:

$$A + B = A \cup B, \text{ при условии } A \cap B = \oslash$$

$\Rightarrow \mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ — аддитивность функции

$\mathsf{P}(\Omega) = 1, \mathsf{P}(\oslash) = 0$ и т.д.

Система аксиом вероятности

$\boxed{\mathrm{A}_0}$ Множество $\mathbb{F} = \{A \subset \Omega : \exists \mathsf{P}(A)\}$ есть сигма-алгебра

$\boxed{\mathrm{A}_1}$ $\forall A \in \mathbb{F}\, \mathsf{P}(A) \geq 0$ (частота неотрицательна)

$\boxed{\mathrm{A}_2}$ $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathbb{F} : A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

$$\mathsf{P}(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k)$$

— аксиома счетной аддитивности $\mathsf{P}()$

$\boxed{\mathrm{A}_3}$ $\mathsf{P}(\Omega) = 1$

$\mathsf{P}(\varnothing) = 0$

Пусть $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \dots = \varnothing$

Тогда:
1) $\varnothing \in \mathbb{F} \Rightarrow \mathsf{P}(A_k) = p \geq 0$
2) $\mathrm{A}_i \cap A_j = \varnothing$ при $\forall i, j$
3) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, т.к. если $\exists\ \omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\omega \in A_k (\exists k)$, но $A_k = \varnothing$

Из $\boxed{\mathrm{A}_2}$ $\Rightarrow$
$p = \mathsf{P}(\varnothing) = \mathsf{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p \Rightarrow \exists! p = 0$

Если $A \cap B = \varnothing$, то $\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ (конечная аддитивность)

$A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \dots = \varnothing$ (дополняем систему пустыми множествами)

$\Rightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \underset{\boxed{\mathrm{A}_2}}{\Rightarrow} \mathsf{P}(A+B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

Замечание!

$\boxed{\mathrm{A}_2''}$ $\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ — дополн. аксиома

$\Omega = A + \overline{A} \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(A) + \overline{\mathsf{P}(A)} \Rightarrow \mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$

Если $A, B \in \mathbb{F}, A \subset B$, то $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$

$B = A + (B \backslash A); B \backslash A = B \cap \overline{A} \in \mathbb{F} \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \underset{\geq 0}{\mathsf{P}(B \backslash A)} \geq \mathsf{P}(A)$

(См. рис 2.1)

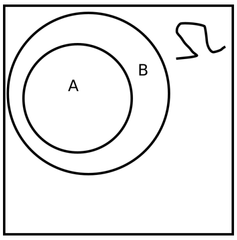


Рис. 2.1: Определение множеств

Лемма 4 *Непрерывность вероятности*

Непрерывность функции: $f() : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = (\lim_{n\to\infty} F(x_n))$$

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n)$$

Доказательство.

Пусть $\{A_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \subset \mathbb{F}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}(\lim\limits_{n\to\infty}(A_n)) = \mathsf{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$

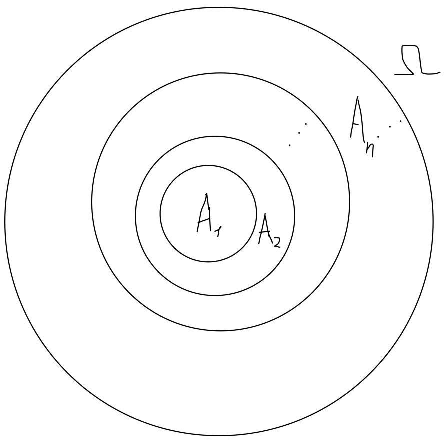


Рис. 2.2: Определение множеств

$B_1 = A_1$
$B_2 = A_2 \backslash A_1$
$\vdots$

$\mathrm{B}_n = A_n \backslash A_{n-1}$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$

$\mathsf{P}(B_k) = \mathsf{P}(A_k) - \mathsf{P}(A_{k-1})$

$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k) = \lim\limits_{n\to\infty} [\mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_3) -$

$\mathsf{P}(A_2) + \cdots + \mathsf{P}(A_n) - \mathsf{P}(A_{n-1})] = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n)$ ■

3 Лекция №3. Вероятностное пространство и случайные величин

Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \subset \Omega$, то $\mathsf{P}(\lim\limits_{n\to\infty}(A_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}(A_n)$

Пусть:

$B_1 = A_1$
$B_2 = A_2 \backslash A_1$
$\vdots$
$B_n = A_n \backslash A_{n-1}$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_k$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{\smile}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}(\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_k) = \lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}(A_n)$
$A_{n+1} = A_n + B_n, n = 1, 2\dots$

$$1)\quad A_n \bigcap B_n = A_n \bigcap B_n = A_n \bigcap \underbrace{(A_{n+1} \bigcap \overline{A_n})}_{A_{n+1}\backslash A_n} = \underbrace{(A_n \bigcap \overline{A_n})}_{\varnothing} \bigcap A_{n+1} =$$

$$= \varnothing \Rightarrow \bigoplus 2)\quad A_n + B_n = A_n \bigcup (A_{n+1} \bigcap \overline{A_n}) = (A_n \bigcup \overline{A_n}) \bigcap (A_n \bigcup A_{n+1}) =$$

$$= \Omega \bigcap A_{n+1} = A_{n+1}$$

$$\Rightarrow \mathsf{P}(A_{n+1}) = \mathsf{P}(A_n) + \mathsf{P}(B_n) \Rightarrow \mathsf{P}(B_n) = \mathsf{P}(A_{n+1}) - \mathsf{P}(A_n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = B \\ A_2 = A_1 + B_2 \\ A_3 = A_2 + B_3 = B_1 + B_2 + B_3 \end{cases} \qquad \text{т.е.} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_k$$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_k$, т.к.

$$1)\ B_{n+p} \bigcap B_n = A_{n+p} \bigcap \underbrace{\overline{A_{n+p-1}} \bigcap A_n}_{\varnothing} \bigcap \overline{A_{n-1}}$$

$\forall p = 1, 2, \dots$

$\forall n = 1, 2, \dots,$ т.к. $A_{n+p-1} \supset A_n$

$\Rightarrow \overline{A_{n+p-1}} \subset \overline{A_n} \Rightarrow \bigoplus$

2) если $\omega \in \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, то $\exists k$:

$\omega \in B_k = A_k \bigcap \overline{A_{k-1}} \Rightarrow \omega \in A_k \Rightarrow \omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n;$

если $\omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\exists n : \omega \in A_n = B_1 + \cdots + B_n$

$\Rightarrow \exists(!)\quad \text{k} \quad (k \leq n) : \omega \in B_k \Rightarrow \omega \in \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k$

Если $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$, то $\mathsf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n)$

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$\overline{A_1} \subset \overline{A_2} \subset \cdots \subset \overline{A_n} \Rightarrow \mathsf{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty})\overline{A_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(\overline{A_n}$

$\mathsf{P}(\bigcap\limits_{A_n}^{\infty}) = \mathsf{P}(\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}}) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(\overline{A_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \mathsf{P}(\overline{A_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n)$

$\forall \{A_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \quad (A_n \in \Omega)$

$(*) \qquad \mathsf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \mathsf{P}(A_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup \mathsf{P}(A_n) \leq \mathsf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n)$

$\underline{(2:)} \quad \{\mathsf{P}(A_n)\}_{n=\overline{1,\infty}} \subset \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \exists \quad P_* = \lim\limits_{n\to\infty} \inf \mathsf{P}(A_n) \\ \exists \quad P^* = \lim\limits_{n\to\infty} \inf \mathsf{P}(A_n) \end{matrix}\right\} \quad \mathsf{P}_* \ \leq \ \mathsf{P}^* \ (2)$$

Пусть $\quad \text{A}^* = \lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

$\text{B}_{n+1} = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k \Rightarrow B_n = A_n \bigcup B_{n+1} \Rightarrow \begin{cases} \text{B}_n \supset A_n \\ \text{B}_n \supset B_{n+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathsf{P}(B_n) \geq \mathsf{P}(A_n),\, n = 1, 2\ldots \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = A^* \end{cases}$$

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathbb{F};\ \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathbb{F}$$

$\underline{(3:)}\quad \Rightarrow\ \mathsf{P}(A^*) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(B_n)$

Числовые последовательности

$\{\mathsf{P}(A_n)\}_{n=\overline{1,\infty}}$ (ограничена, но не сходится)

$\{\mathsf{P}(B_n)_{n=\overline{1,\infty}}\}\quad \mathsf{P}(B_n) \to \mathsf{P}(A^*)$

$\mathsf{P}(B_n) \geq \mathsf{P}(A_n),\quad n = 1, 2, \ldots$

$\exists\ P(A^*) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \mathsf{P}(A_n) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathsf{P}(A_{n_m}),$

где $\{A_{n_m}\}_{m=\overline{1,\infty}}$ - некоторая подпоследовательность

$\mathsf{P}(A_{n_m}) \leq \mathsf{P}(B_{n_m})\quad \forall m = 1, 2, \ldots (m \to \infty)$

$\Rightarrow\ \mathsf{P}^* = \lim\limits_{m\to\infty} \mathsf{P}(A_{n_m}) \leq \lim\limits_{m\to\infty} \mathsf{P}(B_{n_m}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(B_n)$, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup \mathsf{P}(A_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup$

$$\mathsf{P}(A^*) \leq P_* \leq \underset{=\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}(A_n)}{P^*} \leq \underset{=\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}(B_n)}{\mathsf{P}(A^*)}$$

$\mathsf{P}(B_n) \geq \mathsf{P}(A_n), n = 1, 2, \ldots \Rightarrow\ \mathsf{P}(B_n)) \geq \mathsf{P}(A_{n_m})$

$$\underset{=P(A^*)}{\lim_{m\to\infty} \mathsf{P}(B_{n_m})} \geq \underset{=\lim supP(A_{n_m})}{\lim_{m\to\infty} \mathsf{P}(A_{n_m})}$$

$\{A_n\}_{n=1,\infty} \subset \mathbb{F}$, то $\mathsf{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(A)_n$

$\mathrm{A}^* = A_* = A$

$\Rightarrow\ (*) \Leftrightarrow \mathsf{P}(A_*) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \mathsf{P}(A_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup \mathsf{P}(A_n) \leq \mathsf{P}(A^*)$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \inf \mathsf{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}(A)$

$\Leftrightarrow\ \ \exists \lim\limits_{n\to\infty}$
$\mathrm{A}_n = \mathsf{P}(A)$

Определение 3.1 *Вероятностное пространство —* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P})$:

Ω *— некоторое множество*

$\mathbb{F}$ *— сигма-алгебра подмножеств* Ω

$P(\cdot) : A \subset \Omega : A \in \mathbb{F} \to \mathsf{P}(A)$ *— число + аксиомы* $\boxed{A_1}$ — $\boxed{A_3}$

(Берем некоторое множество Ω, выделяем подмножества $\mathbb{F}$, которые удовлетворяют сигма-алгебре, а затем на каком-то подмножестве A задаем вероятность, которая удовлетворяет аксиомам)

Определение 3.2 *Дискретное вероятностное пространство* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P})$:

Если $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}, \ N \leq \infty$

($N \leq \infty$ *— конечное* Ω, $N = \infty$ *— счетное* Ω)

$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{max} =$ все подмножества Ω

$\forall \omega_k, k = 1, \ldots, N$, задана $p_k = \mathsf{P}(\omega_k) > 0, \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$

$\forall A \subset \Omega \, \mathsf{P}(A) = \sum\limits_{K:\omega_k \in A} p_k$

Если $N < \infty, p_k = \frac{1}{N} \forall k$, то $\mathsf{P}(A) = \frac{M}{N}$ $\forall$ A $= \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$— классическая вероятность

Определение 3.3 *Непрерывное вероятностное пространство* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P})$:

Если ω *— точка в n-мерном пространстве,*

Ω *— область в n-мерном пространстве:* $0 < V(\Omega) = \int\limits_{\Omega} p(x)dx < \infty$

(p() — некоторая «весовая» функция)

$\mathrm{F} = \{\mathrm{A} \subset \Omega : \quad \exists\ \mathbb{V}(A) = \int\limits_A p(x)dx$

$\mathsf{P}(A) = \frac{\mathbb{V}(A)}{\mathbb{V}(\Omega)}$

$\mathsf{P}(x) \equiv 1 \quad \forall x \in \Omega$

$\mathsf{P}(A)$— «геометрическая» вероятность

$\int \cdots =$ интеграл Лебега, а не интеграл Римана

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{\triangle x\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x)\triangle x_k$

$\underset{\text{Лебега}}{\int\limits_a^b} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S_n}$

Теорема 5 (Лебег-Риман) $\exists\ f(\cdot)$, *интегрируемые по Лебегу, но не по Риману.*

Но если $f(\cdot)$ интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и численные значения интегралов совпадают

$\underset{\textit{Лебега}}{\int\limits_a^b} f(x)dx = \underset{\textit{Римана}}{\int\limits_a^b} f(x)dx$

(Пример - функция Дирихле)

$\mathbb{F} = \{A \subset \Omega : \quad \exists\ \int\limits_A p(x)dx\} \neq \mathbb{F}_{max} =$ все подмножества Ω

p(x) $\equiv$ 1(геом. вероятность), $\Omega = [0,1] \quad \exists\ A \subset [0,1] V(A) = L(A)$ - длина множества A не существует

Если $\quad \exists\ l = L(A)$, то можно указать $A_1, A_2, \ldots$:

$$\begin{cases} \mathsf{P}(A_k) = l \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega \end{cases} \Rightarrow 1 = \sum_{k=1}^{\infty} l$$

$\omega \mapsto$ число $\xi(\omega)$

$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

Чему равны $\mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) = x\} \equiv \mathsf{P}(\xi < x)$

или $\mathsf{P}\{\omega : x_1 < \xi(\omega) < x_2\} \equiv \mathsf{P}(x_1 < \xi < x_2)$ и т.д.

$\Rightarrow$ Нужно $\{\omega : \xi(\omega) = x\} \in \mathbb{F}$, $\{\omega : x_1 < \xi(\omega) < x_2\} \in \mathbb{F}$

Определение 3.4 *Случайная величина над вероятностным пространством* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P})$:
Если функция $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R} \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathbb{F}$

$\Leftrightarrow \quad \exists \ \mathsf{P}(\xi < x) \equiv \mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ \ \exists$ *значение функции* $F(\cdot)$:

$$F(x) = \mathsf{P}(\xi < x)$$

$F(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ *называется* ***функцией распределения***

$\underset{\text{теория вероятностей}}{\text{с.в. } \xi} \equiv \underset{\text{теория меры}}{\text{измеримая функция}}$

с.в. $\Leftrightarrow \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathbb{F}$;

$\{\omega : \xi(\omega) > x\} \in \mathbb{F}$;

$\{\omega : x_1 < \xi(\omega) < x_2\} \in \mathbb{F}$

$\forall x \in \mathbb{R} \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathbb{F}$

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P}) \mapsto_{\xi - r.v} (\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathbb{F}_3(\cdot))$

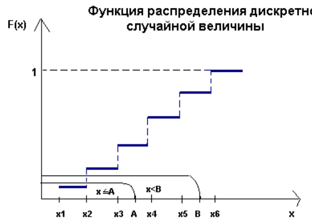


Рис. 3.1: Функция распределения

Определение 3.5 *Борелевская сигма-алгебра $\mathbb{B}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω, т.е.*

сигма-алгебра:

1) $(-\infty, x) \in \mathbb{B}$

2) $\mathbb{B}$ минимальна по включению

$\mathsf{P}(-\infty, x) = \mathsf{P}(\xi < x) = F(x)$

Определение 3.6 *Дискретное распределение случ.величины ξ — распределение с.в. такое, что:*

$$\text{Если} \quad F(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k, \text{ где}$$

$\{(x_k, p_k)\}_{k=\overline{1,N}}; N \leq \infty$ – *конечный или счетный набор*

$p_k > 0; \sum_{k=1}^{N} p_k = 1$

Если $\quad x_k < x_{k+1}, \forall k$, то

$F(x) = const x \in (x_k, x_{k+1}]$

$F(x_k + 0) - F(x_k - 0) = p_k$

4 Лекция №4. Функции распределения

$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathbb{F} \Leftrightarrow \quad \exists\ \mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\} \equiv \mathsf{P}(\xi < x)$ — случайная величина (с.в.)

$\mathbb{F}(x) = \mathsf{P}(\xi < x), x \in \mathbb{R}$ — функция распределения

Определение 4.1 *С.в. ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если:*

$$\mathbb{F}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(z)dz, x \in \mathbb{R},$$

где $p(\cdot)$- некоторая функция, $p(z) \geq 0, \int\limits_{\infty}^{\infty} p(z)dz = 1$

$p(\cdot)$***- плотность распределения***

$\Rightarrow\ F(\cdot)$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}$ и $F'(x) = p(x)$

Общие свойства функции распределения F(x)

$\boxed{1}$ $F(\cdot)$ не убывает, т.е. если $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$

Тогда $A_k = \{\omega : \xi(\omega) < x_k\}, k = 1, 2$

$F(x_k) = \mathsf{P}(\xi < x_k) = \mathsf{P}(A_k)$

Если $x_1 \leq x_2$, то $\xi(\omega) < x_1 \Rightarrow\ \xi(\omega) < x_2$

т.е. $A_1 \Rightarrow\ A_2, A_1 \subset A_2 \Rightarrow\ \mathsf{P}(A_1) \leq \mathsf{P}(A_2)$

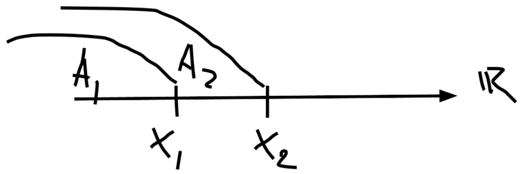


Рис. 4.1: 1 свойство функции распределения

$\boxed{2}$ $F(\cdot)$ непрерывна слева, $F(x-0)=F(x)$, т.е. $\forall\{x_n\}_{n=1,\infty}$

$$\begin{cases} x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n < \dots < x \\ \qquad\qquad\qquad x_n \mapsto x \end{cases} \quad \boxed{\mathrm{F(x}_n) \to_{n\to\infty} F(x)}$$

$\mathrm{A}_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}, n = 1, 2 \ldots \Rightarrow \ F(x_n) = \mathsf{P}(A_n)$

$\mathrm{A} = \{\ \omega : \xi(\omega) < x\}, F(x) = \mathsf{P}(A)$

$\mathrm{x}_n \le x_{n+1} \Rightarrow \ A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Покажем, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$

Пусть $\omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \ \exists\, n : \omega \in A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}$ т.е. $\xi(\omega) < x_n < x \Rightarrow \ \xi(\omega) < x \Leftrightarrow \omega \in A$

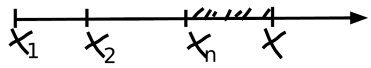


Рис. 4.2: 2 свойство функции распределения

Пусть $\omega \in A \Leftrightarrow \xi(\omega) < x$

$\mathrm{x}_n \to x - 0 \Rightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists\, n : x - x_n < \epsilon$

$\epsilon = x - \xi(\omega) \Rightarrow \ x - x_n < x - \xi(\omega) \Rightarrow \ \xi(\omega) < x_n \Leftrightarrow \omega \in A_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \ \omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$\mathrm{F(x)} = \mathsf{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty}$

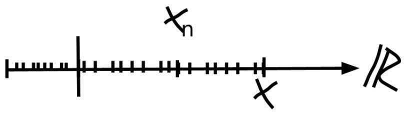


Рис. 4.3: 2 свойство функции распределения

$\mathrm{A}_n = \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)$

$\boxed{3}\quad F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

т.е. $\forall\{x_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \qquad x_1 \geq x_2 \ldots ; x_n \to -\infty$

$\mathrm{F}(\mathrm{x}_n) \to 0, \forall\{z_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \quad z_1 \leq z_2 \leq \ldots ; \quad z_n \to +\infty \quad F(z_n) \to 1$

$$\text{Пусть}\quad \begin{matrix} A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}, \\ B_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \end{matrix} n = 1, 2$$

Покажем, что $A_n \to \varnothing, B_n \to \Omega$

$$\Rightarrow\ 0 = \mathsf{P}(\varnothing) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$$
$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$$

$$\mathrm{z}_1 \leq z_2 \leq \ldots \Rightarrow\ B_1 \subset B_2 \subset \ldots \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Пусть $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq \Omega \Leftrightarrow\ \ \exists\ \omega \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \Leftrightarrow \omega \in \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$

$\Leftrightarrow \omega \in \overline{B_n} = \{\omega : \xi(\omega) \geq z_n\} \quad \forall n$

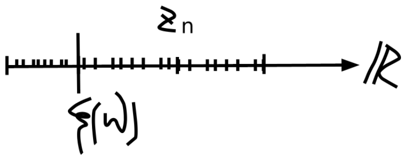


Рис. 4.4: 3 свойство функции распределения

$\mathrm{z}_n \to +\infty \Rightarrow\ \forall m\ \ \exists\ n : z_n > M$

$\mathrm{M} = \xi(\omega) \Rightarrow\ \xi(\omega) < z_n(\ \ \exists\ n)$

Противоречие $\xi(\omega) \geq z_n \forall n$

$\boxed{1} - \boxed{3} \Rightarrow$ $F(\cdot)$ — функция распределения F(x) $=$ P$(\xi < x)$

$\boxed{4}$ $(F(x-0) = F(x))$

$F(x+0) = \mathsf{P}(\xi \leq x)$

(ср. с F(x) $=$ $\mathsf{P}(\xi < x)$)

Пусть $\{\mathrm{x}_n\}_{n=\overline{1,\infty}} : \begin{cases} x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n > \dots > x \\ x_n \to x \end{cases} \mathrm{A}_n \Leftrightarrow \xi < x_n$

$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_N \supset \dots$

$\Rightarrow \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \overset{?}{=} B - \{\omega : \xi(\omega)\}$

Пусть $\omega \in B \Leftrightarrow \xi(\omega) \leq x, x_n > x \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi(\omega) < x \quad \forall n = 1, 2 \dots \Rightarrow \omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

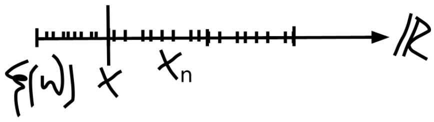


Рис. 4.5: 4 свойство функции распределения

Пусть $\omega \notin B \Leftrightarrow \xi(\omega) > x, x_n \to x + 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \exists\, n : x_n < \xi(\omega) \Rightarrow \omega \notin B_n \Rightarrow \omega \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

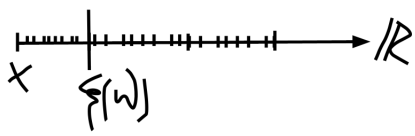


Рис. 4.6: 4 свойство функции распределения

$\boxed{5}$ $\mathsf{P}(\xi = x) = \mathsf{P}(\xi \leq x) - \mathsf{P}(\xi < x)=$ F(x+0)-F(x)=F(x+0)−

$-F(x-0) \Rightarrow$ $F(\cdot)$ непрерывна в т. x $\Leftrightarrow \mathsf{P}(\xi = x) = 0$

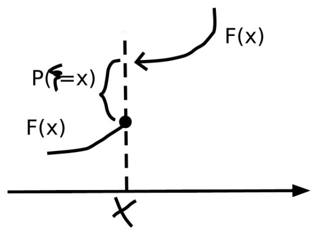


Рис. 4.7: 5 свойство функции распределения

$\boxed{6}$ $\mathsf{P}(x_1 \leq \xi < x_2) = \mathsf{P}(\xi < x_2) - \mathsf{P}(()\xi < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$

$\mathsf{P}(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2+0) - F(x_1)$

$\mathsf{P}(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1+0)$

$\mathsf{P}(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2+0) - F(x_1+0)$

Дискретное распределение F(x) $= \sum\limits_{k:x_k<x}^{\infty} p_k$ (Д)

p$_n = F(x_k+0) - F(x_k) = \mathsf{P}(\xi = x_k)$

$$(\text{Д}) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathsf{P}(\xi = x_k) = p_k, k = 1, 2\ldots \\ \sum\limits_{k}^{\infty} p_k = 1 \end{cases}$$

$\forall x \notin \{x_1, x_2 \ldots\} F(\cdot)$ непрерывна в т. x $\Leftrightarrow \mathsf{P}(\xi = x) = 0$

x_k - точка роста функции $F(\cdot)$ т.е. F(x$_k + \epsilon) - F(x_k - \epsilon) > 0 \forall \epsilon > 0$

Если $x_k < x_{k+1} \forall k$, то F(x)=const при $x \in (x_k, x_{k+1}]$

(Д) $\Rightarrow$

1) $F(\cdot)$ имеет точки разрыва x$_1, \ldots, x_n$

2) Gr — множество точек роста функции $F(\cdot)$, $\underset{\text{длина}}{Gr} = \{x_1, x_2, \ldots\}$

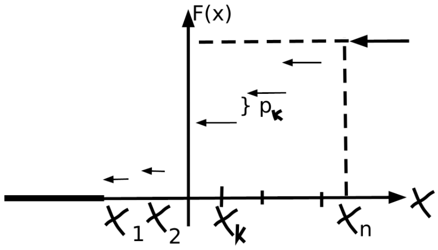


Рис. 4.8: Функция распределения

$$L(Gr) = \sum_{k}^{\infty} L(x_k) = 0$$

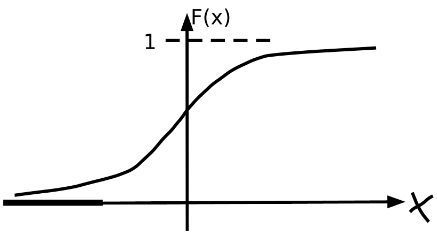
$$(AH) \qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx$$

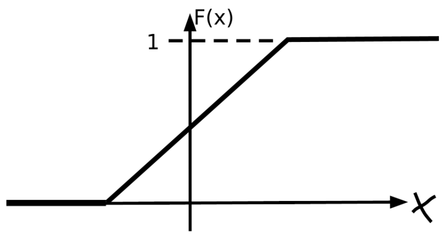
$F(\cdot)$ непрерывна $\forall x \Leftrightarrow \mathsf{P}(\xi = x) = 0 \forall x$

(AH) $\Leftrightarrow F'(x) = p(x) \Leftrightarrow p(x)dx = \mathsf{P}(x \leq \xi < x + dx) = F(x+dx) - F(x)$

(т.е. $p(x)\triangle x \underset{\triangle x \to +0}{=} F(x + \triangle x) - F(x)$)

Gr = { x: p(x) $>$ 0 }   L(Gr $\neq$ 0)





Определение 4.2 *Сингулярное распределение:*

$$F(\cdot) \textit{непрерывна} \quad \forall x (\textit{см. AH})$$

$$L(Gr) = 0 \quad (\textit{см. (Д)})$$

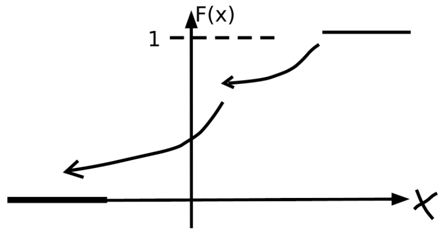


Рис. 4.9: Распределение

Теорема 6

$$\forall F(\cdot) - \textit{функция распределения}$$

$$F(x) = d_1 F_d(x) + d_2 F_{AH}(x) + d_3 F_{\textit{синг}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \textit{ где}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = const, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$F_D(\cdot)$*имеет тип (Д)*

$F_A H(\cdot)$*имеет тип (АН)*

$F_{СИНГ}(\cdot) \leftrightarrow$ *сингулярное распределение*

У нас: $\alpha_3 = 0$

Если $\quad \alpha_2 = 0,$, то $\quad (D)$

$\alpha_1 = 0,$, то $\quad (AH)$

Если $\quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2$, то $\quad$:

$$\alpha_1 = \sum_k \mathsf{P}(\xi = x_k)$$

$$\alpha_2 = \int\limits_{x: F(x) = p(x) \neq 0} p(x) dx$$

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{R}) : \xi : \Omega \mapsto \mathbb{R} -$ с.в.

Пусть $\quad \xi_k : \Omega \mapsto \mathbb{R} -$ с.в.

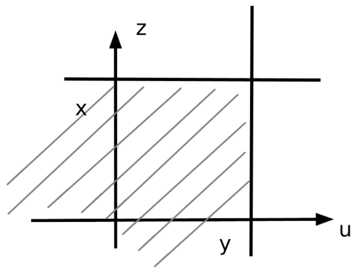


Рис. 4.10: Абс. непрер. распределение

Определение 4.3 *Совместная функция распределения:*

$$F(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto [0,1]$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathsf{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) \equiv$$

$$\equiv \mathsf{P}(\bigcap_{k=1}^{n} \{\widetilde{\omega} : \xi(\omega)_k < x_k\})$$

n=2

Дискретное распределение

$$F(x, y) = \sum_{\substack{k: x_k < x \\ j: y_j < y}} p_{kj}$$

$$p_{kj} = \mathsf{P}(\xi_1 = x_n, \xi_2 = y_j) > 0$$

Абс. непрерывное распределение

$$F(x, y) = \iint\limits_{\substack{z<x \\ u<y}} p(z, u) dz du$$

p$(\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$— **двумерная плотность распределения**

$$F(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

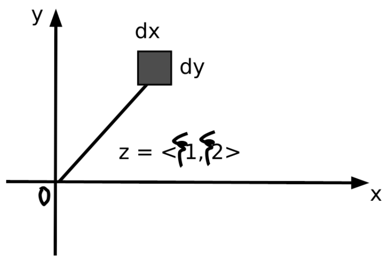


Рис. 4.11: Двумерная плотность распределения

$\mathsf{P}(x \leq \xi_1 < x + dx, y \leq \xi_2 < y + dy) = p(x,y)dxdy$

Пусть $(\Omega, \mathbb{F}, P)$— некоторое вероятностное пространство

A,B $\in \mathbb{F}$ A, B— независимые события, если

$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$

(Несовместные: A$\cap B = \oslash$)

Определение 4.4

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{F}$— *независимые (в совокупности) события, если*

$$\forall \{j_1, j_2, \ldots, j_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$\mathsf{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_n}) = \mathsf{P}(A_{j_1})\,\mathsf{P}(A_{j_2}) \ldots \mathsf{P}(A_{j_n})$$
$$m = 2, 3, \ldots, n; (j_1 < j_2 < \cdots < j_m)$$

5 Лекция №5. Условная вероятность

$A_1, \dots, A_n$ — независимые события, если:

$\forall \quad 2 \le m \le n$

$\mathsf{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_n}) = \mathsf{P}(A_{j_1})\,\mathsf{P}(A_{j_2}) \dots \mathsf{P}(A_{j_n})$**(Н)**

$(\mathrm{j}_1 < j_2 < \dots < j_m)$

$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2)\,\mathsf{P}(A_3)$

$\not\Downarrow \qquad\qquad \not\Uparrow$

$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) \quad = \quad \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2)$

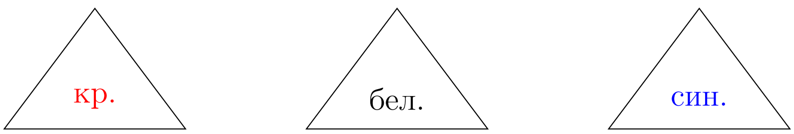
$\boxed{\not\Downarrow}$ Пусть $\quad \mathrm{A}_3 = \varnothing, A_1 = A_2 = A : \mathsf{P}(A) = p; p \neq 0; 1$

$\Rightarrow \; A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subset A_3 = \varnothing$

$\Rightarrow \; 0 = \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2)\underbrace{\mathsf{P}(A_3)}_{=0} = 0$

$\mathrm{p} = \mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2) = p^2$

$\boxed{\not\Uparrow}$ **Бросают правильный тетраэдр**



K = тетраэдр лег на грань, содержащую красный цвет

C = тетраэдр лег на грань, содержащую синий цвет

B = тетраэдр лег на грань, содержащую белый цвет

$\mathsf{P}(K) = \mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(W) = \frac{1}{2}$

$\mathsf{P}(K \cap C \cap B) = \mathsf{P}(K \cap C) = \mathsf{P}(B \cap C) = \mathsf{P}(B \cap K) = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} = \mathsf{P}(K \cap C) = \mathsf{P}(K)\,\mathsf{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \mathsf{P}(K \cap C \cap B) \neq \mathsf{P}(K) \cap \mathsf{P}(C) \cap \mathsf{P}(B) = \frac{1}{8}$$

Если $\mathsf{P}(A) = 0$ или $\mathsf{P}(A) = 1$, то $\forall B \quad A, B$— независимые события

$\mathsf{P}(A) = 0 \Rightarrow \underset{=\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)=0\cdot\mathsf{P}(B)=0 \quad \forall B}{\mathsf{P}(A \cap B)} = 0$ (т.к. $A \cap B \subset A$)

Пусть $\mathsf{P}(A) = 1$

$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$

$A \cup B \supset A$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) \geq \mathsf{P}(A) = 1 \\ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cup B) = 1 + \mathsf{P}(B) - 1 =$

$= \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B)\,\underbrace{\mathsf{P}(A)}_{1} \quad \forall B$

Если A,B независимы, то $\overline{A}$ и B независимы

$B = B \cap \Omega = B \cap (A + \overline{A}) = (B \cap A) + (B \cap \overline{A})$

$\Rightarrow\ \mathsf{P}(B) = \underbrace{\mathsf{P}(B \cap A)}_{\text{нез.}} + \mathsf{P}(B \cap \overline{A}) = \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \cap \overline{A})$

$\Rightarrow\ \mathsf{P}(B \cap \overline{A}) = \mathsf{P}(B)(1 - \mathsf{P}(A)) = \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(\overline{A})$

Если A, B независимы , то $\overline{A}, \overline{B}$ независимы

Пусть на $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ заданы с.в. ξ_1, ξ_2

Определение 5.1 ξ_1, ξ_2 *— независимые случайные величины (н.с.в.), если:*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2)$$

т.е. $\mathsf{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2) = \mathsf{P}(\xi_1 < x_1)\,\mathsf{P}(\xi_2 < x_2)$

($A_1 = \{\omega : \xi_1(\omega) < x_1\}$ и $A_2 = \{\omega : \xi_2(\omega) < x_2\}$ независимы)

Пусть на $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ заданы с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

Определение 5.2 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— независимые случайные величины (н.с.в.), если:*

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \quad F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \ldots F_{\xi_n}(x_n)$$

Дано: $\mathrm{F}_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) \overset{def}{=} \mathsf{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2)$

Найти: $\mathrm{F}_{\xi_1}(x_1)$

$\mathrm{F}_{\xi_1}(x_1) = F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, +\infty) = \lim\limits_{x_2 \to \infty} F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$

$\Rightarrow$ Если $F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x_1, x_2, x_3) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) F_{\xi_3}(x_3)$, то

$$(\text{при} \quad x_3 \to \infty) \quad F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2)$$

Если ξ_1, ξ_2 — н.с.в и распределения дискретны, т.е.

ξ_1 принимает $x_1, \ldots, x_n \quad (n \leq \infty)$

ξ_2 принимает $y_1, \ldots, y_m \quad (m \leq \infty)$

$\mathsf{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = p_{ij} = \mathsf{P}(\xi_1 = x_i)\,\mathsf{P}(\xi_2 = y_j)$

Если распределение абс. непр., т.е.

$\exists\ p_{\xi_1,\xi_2}(\cdot)$ — совместная плотность распределения

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \iint\limits_{\substack{z_1<x_1\\ z_2<x_2}} p_{\xi_1,\xi_2}(z_1,z_2)dz_1dz_2$$

$\Rightarrow\ \mathsf{P}(x_1 \le \xi_1 < x_1 + dx_1, x_2 \le \xi_2 < x_2 + dx_2) = p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$

Если ξ_1, ξ_2 - н.с.в., , то

$$\mathsf{P}(x_1 \le \xi_1 < x_1 + dx_1, x_2 \le \xi_2 < x_2 + dx_2) =$$
$$= \mathsf{P}(x_1 \le \xi_1 < x_1 + dx_1)\,\mathsf{P}(x_2 \le= \xi_2 < x_2 + dx_2) =$$
$$= \mathsf{P}_{\xi_1}(x_1)dx_1 \cdot \mathsf{P}_{\xi_2}(x_2)dx_2$$

$\Rightarrow\ \mathsf{P}_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \mathsf{P}_{\xi_1}(x_1)\,\mathsf{P}_{\xi_2}(x_2)$

Пусть $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ — вероятностное пространство

Пусть $\mathrm{B} \in \mathbb{F} : \mathsf{P}(B) \neq 0$

$(\Omega_B, \mathbb{F}_B, P_B)$:

$\Omega_B = B, \qquad \mathbb{F}_B = \{A_B \subset B : A_B = A \cap B, A \in \mathbb{F}\}$

$\boxed{\mathrm{P}_B}$:

$$\forall \quad A_B = A \cap B \qquad \mathsf{P}_B(A_B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

$(\Omega_B, \mathbb{F}_B, P_B)$ — **условное** (при условии, что произошло B) вероятностное пространство

$\boxed{\mathrm{P}_B}$:

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

Не путать с $\mathsf{P}(A \backslash B) = \mathsf{P}(A \cap \overline{B})$

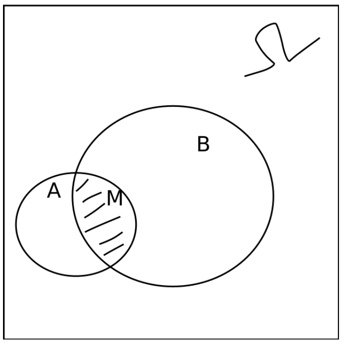


Рис. 5.1: A,M,B,Ω

(Ср.с f(x|y))

Бывает $\mathsf{P}(A) = \frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)}$

$(\Omega_B, \mathbb{F}_B, P_B)$ удовлетворяет аксиомам $\boxed{\text{A0}}$ - $\boxed{\text{A4}}$

$\boxed{\text{A0}}$ $\quad \mathbb{F}_B =$ сигма-алгебра подмножеств B

$\boxed{\text{F}_B}$: $\quad$ M$\in \mathbb{F}_B \Leftrightarrow \ \exists\, A \in \mathbb{F}: \quad M = A \cap B$

Дополнение (до B): если $M \in \mathbb{F}_B$, то $\quad$ B$\backslash M = B \cap \overline{(A \cap B)} = B \cap \overline{A}$

B$\backslash M = B \cap \overline{A}, \overline{A} \in \mathbb{F} \Rightarrow \ B\backslash M \in \mathbb{F}_B$

Объединение: $M_k = A_k \cap B; \quad A_k \in \mathbb{F}, k = 1, 2, ...$

$$\bigcup_k M_k = \ \underbrace{(\bigcup_k A_k)}_{\mathbb{F}} \ \cap B \Rightarrow \ \bigcup_k M_k \in \mathbb{F}_B$$

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

$\Rightarrow \ \mathsf{P}(A|B) \geq 0, \mathsf{P}(B) = 1$

$$\mathsf{P}(\sum_{k=1}^{\infty} A_k|B) = \frac{\mathsf{P}((\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k \cap B)$$

$\mathsf{P}(A) \approx$ доля случаев A среди всех повторений эксперимента Ω

$\mathsf{P}(A|B) \approx$ доля случаев A среди случаев B Ω

$\mathsf{P}(|B)$ при B=fix идентична P()

$\mathsf{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathsf{P}(A|B)$

Если $\quad A_1 \subset A_2$, то $\quad \mathsf{P}(A_1|B) \leq \mathsf{P}(A_2|B)$ и т.д.

Формула полной вероятности

Пусть $\quad \mathrm{B}_1, \ldots, B_n \quad (n \leq \infty):$

1) $\mathrm{B}_i \bigcap B_j = \oslash \quad$ при $i \neq j$

2) $\mathrm{B}_1 + \cdots + B_n = \Omega$

3) $\mathsf{P}(B_k) \neq 0, k = 1, \ldots, n$

Тогда $\quad \forall A \in \mathbb{F}$

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|B_k)\,\mathsf{P}(B_k)$$

1)+2) $\Rightarrow \ \forall \quad \omega \in \Omega \ \ \exists\, !B_k : \omega \in B_k$

1+2 — $\{B_k\}_{k=\overline{1,n}}$ — полная группа событий

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \bigcap \Omega) = \mathsf{P}(A \bigcap (\sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k)) = \mathsf{P}(\sum\limits_{k=1}^{\infty} A \bigcap B_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \bigcap B_k) =$

$$\boxed{\mathsf{P}(A|B) = \tfrac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}}$$

$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|B_k)\,\mathsf{P}(B_k)$

$\mathsf{P}(B_k) \neq 0$ можно снять (для некоторых k), если $\mathsf{P}(B_k) = 0$, то $\quad \mathsf{P}(A|B_k)$ не определена, но $\mathsf{P}(A \bigcap B_k) = 0$

2)$B_1 + \dots + B_n = \Omega$ можно заменить на $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_k) = 1$,т.е.

$B_1 + \dots + B_n = \Omega' \subset \Omega$, но $\mathsf{P}(\Omega') = 1$

$\Rightarrow\ \mathsf{P}(\Omega \backslash \Omega') = 0$ и $\mathsf{P}(A \bigcap \Omega) = \mathsf{P}(A \bigcap \Omega')$

Формула Байеса

$\mathsf{P}(A \bigcap B) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B) \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(B \bigcap A) = \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A)$

Если $\quad \mathsf{P}(A) \neq 0, \mathsf{P}(B) \neq 0$, то

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)} \qquad \textbf{(ФБ)}$$

Если $\quad B = B_k$ — событие из полной группы, то:

$$\mathsf{P}(B_k|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B_k)\,\mathsf{P}(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_j)\,\mathsf{P}(B_j)} \qquad \textbf{(ФБ)}$$

Условные распределения

Пусть $\quad \xi$— с.в. на $(\Omega, \mathbb{F}, P)$

Пусть $\quad$ B$\in \mathbb{F}, \mathsf{P}(B \neq 0)$

F(x|B) $= \mathsf{P}(\xi < x|B), x \in \mathbb{R}$— условная функция распределения

Пусть $\quad \xi, \eta$— с.в. на $(\Omega, \mathbb{F}, P)$

Пусть $\quad \mathsf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}; \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \quad (n, m \leq \infty)$

B$_j \Leftrightarrow \eta = y_j; \quad j = 1, \dots, m$

$$B_j \bigcap B_{j'} = \varnothing \qquad \text{при } j \neq j'$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mathsf{P}(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \mathsf{P}(\eta = y_j) = 1$$

$$\mathsf{P}(\xi = x_i | \eta = y_j) \stackrel{def}{=} \frac{\mathsf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathsf{P}(\eta = y_j)}$$

$y_j = fix; \qquad i = 1, \ldots, n \Rightarrow$ условное распределение с.в. ξ при

условии $\eta = y_j$ $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\xi = x_i | \eta = y_j) = 1$, т.к.

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathsf{P}(\eta = y_j)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathsf{P}(\eta = y_j)} = \frac{\mathsf{P}(\eta = y_j)}{\mathsf{P}(\eta = y_j)} = 1$$

$$\textbf{ФПВ}\, \mathsf{P}(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \mathsf{P}(\xi = x_i | \eta = y_j) \mathsf{P}(\eta = y_j)$$

$$\textbf{ФБ}\, \mathsf{P}(\eta = y_j | \xi = x_i) = \frac{\mathsf{P}(\xi = x_i | \eta = y_j)\, \mathsf{P}(\eta = y_j)}{\sum\limits_{k=1}^{m} \mathsf{P}(\xi = x_i | \eta = y_k)\, \mathsf{P}(\eta = y_k)}$$

Пусть $\quad \exists\; p_{\xi,\eta}(\cdot)$

$\Rightarrow\; \forall\, x \quad \mathsf{P}(\xi = x) = 0, \quad \forall\, y \quad \mathsf{P}(\eta = y) = 0$

6 Лекция №6. Условные распределения случайных величин

Пусть ξ, η — с.в. имеют абс. нормальное распределение

$\mathsf{P}(\cdot)_{\xi,\eta}$ — совместная плотность

$\mathsf{P}(x \leq \xi < x + dx, y \leq \eta < y + dy) = p_{\xi,\eta}(x, y)dxdy$

$$p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x, y)dy$$

$$p_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x, y)dx$$

$\Rightarrow\ \forall y \in \mathbb{R}\, \mathsf{P}(\eta = y) = 0$

$\Rightarrow$ нет вмозможности для $\mathsf{P}(\cdot|\eta = y) = 0$

Пусть y: $\mathrm{p}_\eta(y) \neq 0 :\Rightarrow\ \mathsf{P}(y \leq \eta < y + dy) = \mathsf{P}_\eta(y)dy \neq 0$

$$\mathsf{P}(x \leq \xi < x + \triangle x | y \leq \eta < y + \triangle) \overset{def}{=} \frac{\mathsf{P}(x \leq \xi < x + \triangle x, y \leq \eta < y + \triangle)}{\mathsf{P}(y \leq \eta < y + \triangle)} =$$

$$= \frac{\iint\limits_{x \leq z < x + \triangle x, y \leq u < y + \triangle} p_{\xi,\eta}(z, u)dzdu}{\int\limits_{y \leq u < y + \triangle} p_\eta(u)du} = \frac{p_{\xi,\eta}(x^*, y^*)\triangle x\triangle y}{p_\eta(y^{**})\triangle y} = \frac{p_{\xi,\eta}(x^*, y^*)}{p_\eta(y^{**})}\triangle x$$

$$\text{где} \qquad \left.\frac{p_{\xi,\eta}(x^*, y^*)}{p_\eta(y^*)}\right|_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \to \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\eta(y)}$$

т.е.

$$\mathsf{P}(x \leq \xi < x + dx, y \leq \eta < y + dy) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\eta(y)}$$

$\dfrac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\eta(y)} \overset{def}{=} p_{\xi|\eta}(x|y)$ — условная плотность распределения с.в. ξ

(при условии $\eta = y$)

$$(\text{Ср. с. } \mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)})$$

Формула полной вероятности

$$p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{p_{\xi|\eta}(x|y) p_\eta(y)}_{p_{\xi|\eta}(x,y)} \, dy$$

$$(\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|B_k)\, \mathsf{P}(B_k))$$

Формула Байеса

$$p_{\eta|\xi}(y|x) = \frac{p_{\xi|\eta}(x|y) p_\eta(y)}{p_\xi(x)} = \frac{p_{\xi|\eta}(x|y) p_\eta(y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi|\eta}(x|u) p_\eta(u) du}$$

Если A, B независимы,, то

$$\mathsf{P}(A|B) \overset{def}{=} \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(A)$$

т.е. $\quad \mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) \quad \forall \quad A, B$

Если ξ, η - н.с.в., и $p_{\xi,\eta}(x_{ij})$ существует , то :

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = p_\xi(x) p_\eta(y) \Rightarrow \; p_{\xi,\eta}(x|y) = p_\xi(x) \forall x, \forall y : p_\eta(y) \neq 0$$

$\Omega \mapsto B \qquad P(\cdot|B)$

Пусть $\quad \xi$ - с.в. (т.е. $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$) и $g(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Пусть $\eta : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$\eta(\omega) = g(\xi(\omega)), \omega \in \Omega$

$\forall \eta$ - с.в., если $\forall y \in \mathbb{R}\{\omega : g(\xi(\omega)) < y\} \in \mathbb{F}$

Это верно почти $\forall g()$

$\eta = g(\xi)$ - с.в.

$$F_\eta(y) \stackrel{def}{=} \mathsf{P}(g(\xi) < y) = \left[\begin{array}{ll} \sum\limits_{k:g(x_k)<y} \mathsf{P}(\xi = x_k) & (\text{Д}) \\ \int\limits_{x:g(x)<y}^{p_\xi(x)dx} & (AH) \end{array}\right.$$

Если ξ распределена дискретно, то $\eta = g(\xi)$ имеет дискретное распределение

$$\mathsf{P}(\eta = y) = \sum_{k:g(x_k)=y_j} \mathsf{P}(\xi = x_k)$$

Если $\exists\, p_\eta() : F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} p_\eta(u)du \quad \forall \quad y \in \mathbb{R}$, то $p_\eta(\cdot)$ — плотность распределения с.в. $\eta = g(\xi)$

Пусть ξ_1, ξ_2 - с.в. на Ω и $g(\cdot) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$\eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)), \omega \in \Omega$ — с.в., если

$\forall y \in \mathbb{R}\{\omega : g(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) < y\} \in \mathbb{F}$

Это верно почти $\forall g()$

$$F_\eta(y) = \mathsf{P}(g(\xi_1, \xi_2) < y) = \left[\begin{array}{ll} \sum\limits_{k,j:g(x_k,z_j)<y} \mathsf{P}(\xi_1 = x_k, \xi_2 = z_j) & (\text{Д}) \\ \iint\limits_{x,z:g(x,z)<y} p_{\xi_1,\xi_2}(x, zdxdz) & (AH) \end{array}\right.$$

Если ξ_1, ξ_2 - н.с.в., , то :

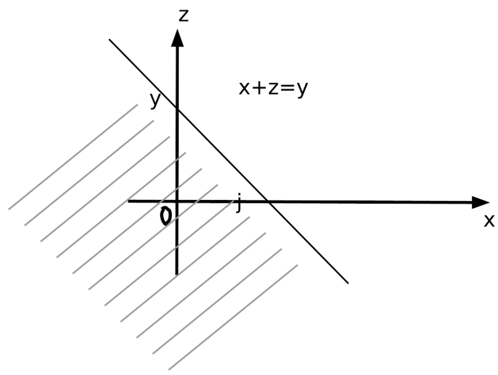


Рис. 6.1: x, y, z

$$\mathsf{P}(\xi_1 = x_k, \xi_2 = z_j) = \mathsf{P}(\xi_1 = x_k)\,\mathsf{P}(\xi_2 = z_j) \qquad (Д)$$

$$p_{\xi,\eta}(x,z) = p_\xi(x) p_\eta(y) \qquad (AH)$$

Пусть ξ_1, ξ_2 - н.с.в.,

Пусть $\exists\ p_{\xi 1}(\cdot) \equiv p_1(\cdot)$

Пусть $\exists\ p_{\xi 2}(\cdot) \equiv p_2(\cdot)$

Пусть $\eta = \xi_1 + \xi_2$, Найдем $p_\eta(y)$

$$F_\eta(y) = \mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 < y) = \iint\limits_{x+z<y} p_{\xi_1,\xi_2}(x,z)dxdz =$$

$$= \begin{bmatrix} & x = x \\ & x + z = t \\ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow & dxdz = dzdt \end{bmatrix} =$$

$$\iint\limits_{t<y} p_{\xi_1}(x) p_{\xi_2}(t-x)dxdt = \int\limits_{-\infty}^{y} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x) p_{\xi_2}(t-x)dx$$

$$\mathsf{P}_{\xi_1+\xi_2}(y) = F'_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x) p_{\xi_2}(y-x)dx$$

Если ξ_1, ξ_2 — н.с.в. и $\eta_1 = g(\xi_1), \eta_2 = h(\xi_2)$ — с.в. То η_1, η_2 — н.с.в.

Пусть ξ_1, ξ_2 распределены дискретно $\Rightarrow$ η_1, η_2 распределены дискретно

$\mathsf{P}(\eta_1 = y_j, \eta_2 = u_s) \overset{?}{=} \mathsf{P}(\eta_1 = y_j)\,\mathsf{P}(\eta_2 = u_s)$

$(\eta_1 = g(\xi_1), \eta_2 = h(\xi_2))\,\mathsf{P}(\eta_1 = y_j, \eta_2 = u_s) = \sum\limits_{i,k: g(x_i)=y_j, h(z_k)=u_s} \mathsf{P}(\xi_1 = x_i)\,\mathsf{P}(\xi_2 = z_k) \overset{©}{=}$

$$\sum_{i:g(x_i)=y_j} \mathsf{P}(\xi_1 = x_i) \sum_{k:h(z_k)=u_s} \mathsf{P}(\xi_2 = z_k) = \mathsf{P}(g(\xi_1) = y_i)\,\mathsf{P}(h(\xi_2) = u_s)$$

Если $\sum\limits_{ij:...}(...)$ — конечна, то $\sum\limits_{ij:...}(...) = \sum\limits_i \sum\limits_j (...)$

Если $\sum\limits_{ij:...}(...)$ — ряд, то $\sum\limits_{ij:...}(...)$ не зависит от порядка суммирования, если ряд сходится абсолютно (т.е. сходящийся ряд $\sum\limits_{ij:...}|(...)|$)

Если $\sum\limits_{ij:...}(...)$ сходится условно (т.е. $\exists \sum\limits_{ij:...}(...)$,но $\sum\limits_{ij:...}|(...)| = \infty$), то $\forall S \in \mathbb{R}$ $\exists$ перестановка слагаемых $\{i,j\} \to \widetilde{\{i,j\}} \sum\limits_{ij:...}(...) = S$

$\boxed{\overset{©}{=}}$ все слагаемые $\geq 0 \Rightarrow$ абс. сходимость

Определение 6.1 ***Математическое ожидание с.в.*** ξ

— это число M_ξ***:***

$$M_\xi = \sum_k x_k\,\mathsf{P}(\xi = x_k) \qquad (Д)$$

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\ p_\xi(x)\ dx \qquad (АН)$$

Если $F_\xi(x) = \alpha_1 F_D(x) + \alpha_2 F_{AH}(x)$, т.е.

$\exists \ \{x_k\} : \mathsf{P}(\xi = x_k \neq 0$

$\exists \ \mathbb{X} \subset \mathbb{R} : F'_\xi = p_\xi(x) \neq 0, x \in \mathbb{X}$, то

$$M_\xi = \sum_k x_k \, \mathsf{P}(\xi = x_k) + \int\limits_{x:p_\xi(x)\neq 0} x \ p_\xi \ dx$$

M_ξ существует, если и только если ряд/интеграл сходится абсолютно

Пусть с.в. есть $g(\xi)$

Чему равно $M_g(\xi)$?

1) Найти распределение с.в. $\eta = g(\xi)$, т.е. $F_\eta()$. Найти M_η

2) Верны формулы

$$M_g(\xi) = \sum_k g(x_k) \, \mathsf{P}(\xi = x_k) \qquad (\text{Д})$$

$$M_g(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) p_\xi(x) dx \qquad (\text{АН})$$

Доказательство в случае (Д)

Пусть распределение ξ дискретно, заданы $P(\xi = x_k), k = 1, ..., N$

(N$\leq \infty$)

$\Rightarrow$ распределение с.в. η дискретно

$\mathrm{P}(\eta = y_j) = \sum\limits_{k:g(x_k)=y_j} P(\xi = x_k)$

$\mathrm{M}_\eta \overset{def}{=} \sum\limits_j |y_j \, \mathsf{P}(\eta = y_j)| < \infty$

$\mathrm{M}_\eta = \sum\limits_j y_j \sum\limits_{k:g(x_k)=y_j} \mathsf{P}(\xi = x_k) = \sum\limits_j \sum\limits_{k:g(x_k)=y_j} y_j \, \mathsf{P}(\xi = x_k) =$

$= \sum\limits_{j} \sum\limits_{k: g(x_k)=y_j} g(x_k)\,\mathsf{P}(\xi = x_k) = \sum\limits_{k=1}^{N} g(x_k)\,\mathsf{P}(\xi = x_k)\{k = 1, 2, ..., N\} = \sum\limits_{j}\{k : g(x_k) = y_j\}$

(Д) + (АН) + комбинированный случай

примем общее обозначение

$$M_\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) = \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k} \mathsf{P}(\xi = x_k)(D) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{p_\xi(x)dx}_{dF_\xi(x)} \ (AH) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \ Mg(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_\xi(x)$$

Распределение Коши

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

$\xi = \tan\phi$, где $p_\phi(z) = \frac{1}{\pi}$ для $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$

$$M_\xi = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx = \infty$$

$\frac{|x|}{1+x^2} dx \sim O(\frac{1}{|x|})$ при $|x| \to \infty$

Из определени $M_\xi \Rightarrow \quad \exists\ M_\xi \Leftrightarrow \quad \exists\ M_{|\xi|} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| dF_\xi(x)$

$Mg(\xi)$

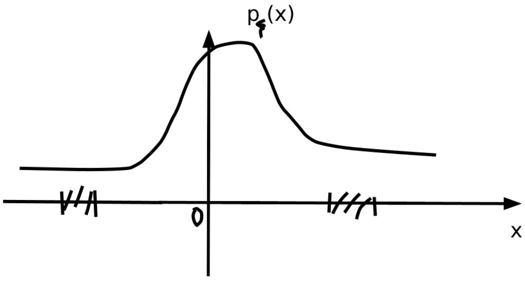


Рис. 6.2: Распределение Коши

$M\xi^k$ — начальный момент k-го порядка ($g(x) = x^k$))

$M(\xi - M\xi)^k$ — центральный момент k-го порядка ($g(x) = (x - M\xi)^k$))

$M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$ — дисперсия с.в. ξ

7 Лекция №7. Математическое ожидание и дисперсия

$$M_\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) = \left[\begin{array}{ll} M_\xi = \sum\limits_k x_k \,\mathsf{P}(\xi = x_k) & \text{(Д)} \\ M_\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ p_\xi(x)\ dx & \text{(АН)} \end{array}\right. \quad \text{(Д)+(АН)}$$

$\exists\ M_\xi \Leftrightarrow$ ряд/интеграл сходится абсолютно

$$Mg(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x)$$

$$Mg(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) \quad \underbrace{dF_\xi(x_1, \dots, x_n)}_{p_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)dx_1,\dots,dx_n}$$

Свойства мат.ожидания

$\boxed{1}$ Линейность М.О.

а) если $\exists\ M\xi$; если $a, b = const$, то

$$M(a\xi + b) = aM\xi + b = a\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)dx + b = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(ax+b)p_\xi(x)dx = M(a\xi + b)$$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1\right)$$

б) Если $\exists\ M\xi_1, .., M\xi_n,$, то $M(\xi_1 + \dots + \xi_n) = M\xi_1 + \dots + M\xi_n$

(АН) n=2:

$$M\xi_1 + M\xi_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 p_{\xi_1}(x_1)dx_1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 p_{\xi_2}(x_2)dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_2 \right) dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1+x_2)p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_1, dx_2 = M(\xi_1+\xi_2)$$

$$\Rightarrow \; M(a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n + b) = a_1 M\xi_1 + \dots + a_n M\xi_n + b_1$$

Если $\quad \exists \; M\xi_1, \dots, M\xi_n$ и $a_1, ..., a_n, b = const$

$\boxed{2}$ Если $\quad \exists \; M\xi_1, \dots, M\xi_n$ и $\xi_1\xi_2\dots\xi_n$— н.с.в., то

$(\xi_1\xi_2\dots\xi_n) = M\xi_1 M\xi_2 \dots M\xi_n$

(АН) n=2:

$$M\xi_1 \cdot M\xi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_{\xi_1}(x_1)dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p_{\xi_2}(x_2)dx_2 =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 \underbrace{p_{\xi 1}(x_1)p_{\xi 2}(x_2)}_{p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) \text{ если н.с.в.}} dx_1, dx_2 = M(\xi_1\xi_2)$$

Определение 7.1 *Дисперсия*

$$D\xi \overset{def}{=} M(\xi - M\xi)^2$$

$\boxed{3}$ $\quad$ $\mathrm{D}\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

$D\xi = M(\xi^2 - \underbrace{2M\xi \cdot \xi}_{const} + \underbrace{(M\xi)^2}_{const}) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M(\xi - M\xi)^2$

$\boxed{4}$ $\quad$ $\mathrm{D}(a\xi + b) = a^2 D\xi$

$D(a\xi + b) = M[a\xi + b - M(a\xi + b)]^2 = a^2 M(\xi - M\xi) = a^2 D\xi$

Определение 7.2 *Коэффициент ковариации с.в. ξ и η — это:*

$$M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)] \overset{def}{=} cov(\xi, \eta)$$

Аналогично $\boxed{3} \Rightarrow \; cov(\xi,\eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta$

$\mathrm{cov}(\xi,\xi) = D\xi$

$\boxed{5}$ $\quad \mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sum\limits_{k=1} D\xi_k + \sum\limits_{k\neq j} cov(\xi_k, \xi_j)$

Пусть $\overline{\xi_k} = \xi_k - M\xi_k$

$\Rightarrow D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \mathrm{M}(\overline{\xi}_1 + \overline{\xi}_2 + \dots + \overline{\xi}_n)^2 = M\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{\xi_k} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n}\overline{\xi_j}\right) =$

$$= M\sum_{k,j=1}^{n}\overline{\xi_k\xi_j} = \sum_{k,j=1}^{n} M\overline{\xi_k\xi_j} = \sum_{k=1}^{n} M\overline{\xi_k}^2 + \sum_{k\neq j} M\overline{\xi_k}\cdot\overline{\xi_j} = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + \sum_{k\neq j} cov(\xi_k\xi_j)$$

$\boxed{6}$ $\quad$ Если ξ, η — н.с.в., то $cov(\xi,\eta) = 0$

$(\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta)$

$\Downarrow$

$\bigoplus$ Если $\xi_1\xi_2\dots\xi_n$ независимы попарно, т.е. ξ_1, ξ_k - н.с.в. $\forall k \neq j$, то

$\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n$

$\xi_1\xi_2\dots\xi_n$ - н.с.в. (в совокупности)

$$F_{\xi_1..\xi_n}(x_1\dots x_n) = F_{\xi 1}(x_1)\dots F_{\xi n}(x_n)$$

$\not\Uparrow\Downarrow$

$$F_{\xi_1,\xi_k}(x_1, x_k) = F_{\xi 1}(x_1)F_{\xi k}(x_k), k \neq j$$

т.е. попарная независимость

$\Downarrow cov(\xi_k, \xi_j) = 0$

$\boxed{8}$ $\quad \text{cov}(\xi_k, \xi_j), k, j = 1, \ldots, n$

$\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{P}$ (неслучайные a_k)

$$\sum_{k,j=1}^{n} cov(\xi_k, \xi_j) a_k a_j \geq 0$$

(Ср. с $\sum\limits_{k,j}^{n} S_{k,j} X_k X_j \geq 0, S \geq 0$)

$$\sum_{k,j=1}^{n} cov(\xi_k, \xi_j) a_k a_j = \sum_{k,j=1}^{n} M\overline{\overline{\xi_k}\overline{\xi_j}} a_k a_j =$$

$$= M \sum_{k,j=1}^{n} a_k \overline{\xi_k} a_j \overline{\xi_j} = M \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{\xi_k} \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{\xi_j} \right) =$$

$$= M \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{\xi_k} \right)^2 = D \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k \right) \geq 0$$

Неравенства

$\boxed{1}$ Если $\xi \geq 0$ с вероятностью 1, (т.е. P$\{\omega : \xi(\omega) \geq 0\} = 1$), то $M\xi \geq 0 P(\xi \geq 0) = 1 \Rightarrow F_\xi(0) = P(\xi - 0) = 0 \Rightarrow F_\xi(x) = 0 \quad \forall x \leq 0 \Rightarrow M\xi \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) = \int\limits_{0}^{\infty} x dF_\xi(x) \geq 0(\quad dF_\xi(x) \geq 0($ т.к. F_ξ не убывает)

$\Rightarrow D\xi = M(\xi - M\xi)^2 \geq 0,$ т.к. $\eta = (\xi - M\xi)^2 \geq 0$ с вероятностью 1

$\Rightarrow (D\xi = M\xi^2 - (M\xi))^2 \Rightarrow M\xi^2 \geq (M\xi)^2$

$\Downarrow \boxed{2}$ Если $\xi \leq \eta$ с вероятностью 1, то $M\xi \leq M\eta \quad (\zeta = \xi - \eta \geq 0$с вероятностью 1)

$\Rightarrow \boxed{3}$ $\quad -|\xi| \leq \xi \leq |\xi| \Rightarrow -M|\xi| \leq M\xi \leq M|\xi|$, т.е. $|M\xi| \leq M|\xi|$

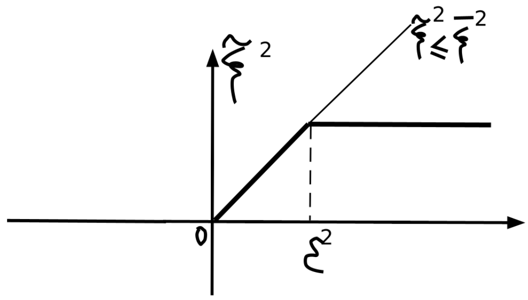


Рис. 7.1: Соотношения между $\widetilde{\xi}, \epsilon$ и $\overline{\xi}$

(Ср. с $|\sum(\cdot)| \leq \sum|(\cdot)|$)

$\boxed{4}$ **Неравенство Чебышева**

$$\forall\epsilon > 0 \qquad P(|\xi - M\xi| > \epsilon) \leq \frac{D\xi}{\epsilon^2}$$

$\xi = \xi - M\xi \qquad |\xi - M\xi| > \epsilon \Leftrightarrow \xi^2 > \epsilon^2$

Пусть $\widetilde{\xi}$: $\qquad \widetilde{\xi}^2 = \begin{cases} \widetilde{\xi}^2, \text{ если } \widetilde{\xi} \leq \epsilon \\ \epsilon^2, \text{ если } \widetilde{\xi} > \epsilon \end{cases}$

$\Rightarrow \ \overline{\xi}^2 \geq \widetilde{\xi}^2$ с вероятностью 1 $\Rightarrow \ M\overline{\xi}^2 \geq M\widetilde{\xi}^2$

$\Rightarrow \ D1xi = M\overline{\xi}^2 \geq M\widetilde{\xi}^2 = \int g(x)p_{\overline{\xi}}(x)dx$,где

$$g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x^2 \leq \epsilon^2 \\ \epsilon^2, \text{ если } x^2 > \epsilon^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ M\widetilde{\xi}^2 = \int\limits_{x: \quad x^2 > \epsilon^2} \epsilon^2 p_{\overline{\xi}}(x)dx + \int\limits_{x: \quad x^2 \leq \epsilon^2} x^2 p_{\overline{\xi}}(x)dx$$

$$\geq \epsilon^2 \int\limits_{x: \quad x^2 > \epsilon^2} p_{\overline{\xi}}(x)dx = \epsilon^2 \, \mathsf{P}(\overline{\xi}^2 > \epsilon^2) = \mathsf{P}(|p_{\overline{\xi}}| > \epsilon) = \mathsf{P}(|\xi - M\xi| > \epsilon)$$

$\Rightarrow \ D\xi \geq \epsilon^2\,\mathsf{P}(|\xi - M\xi| > \epsilon)$

$\Rightarrow \boxed{5}$ Если $D\xi = 0$, то $\mathsf{P}(\xi = M\xi) = 1$

$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \mathsf{P}(|\xi - M\xi| > \epsilon) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}(|\xi - M\xi| \leq \epsilon) = 1$

$\boxed{6}$ **Неравенство Коши-Буняковского**

$|\mathrm{cov}(\xi,\eta)| \leq \sqrt{D\xi D\eta}$

$|(\mathrm{a,b})| \leq \sqrt{\| a \|^2 \cdot \| b \|^2}$

Пусть $\overline{\xi} = \xi - M\xi, \quad \overline{\eta} = \eta - M\eta$

Пусть $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$

$\triangle(a) = M(a\overline{\xi} + \overline{\eta})^2 \geq 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

$$M(a\overline{\xi}+\overline{\eta})^2 = a^2 M\overline{\xi}^2 + 2aM\overline{\xi}\overline{\eta} + M\overline{\eta}^2 = a^2 D\xi + 2a\cdot cov(\xi,\eta) + D\eta \geq 0 \ \ \forall \ \ a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathbb{D}}{4} = cov^2(\xi,\eta) - D\xi D\eta \leq 0 \Leftrightarrow |cov(\xi,\eta)| \leq \sqrt{D\xi_D\eta}$$

$$|cov(\xi,\eta)| = \sqrt{D\xi_D\eta} \Leftrightarrow \frac{\mathbb{D}}{4} = 0 \Leftrightarrow \ \ \exists\, a_0 \in \mathbb{R} : \triangle(a_0) = 0$$

$\mathrm{M}(\mathrm{a}\overline{\xi} + \overline{\eta})^2 = D(a\xi + \eta) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}\left(a\xi + \eta = \underbrace{M(a\xi + \eta)}_{const}\right) = 1$, т.е.

между ξ, η есть линейная связь (с вероятностью 1)

$$\mathsf{P}(a_*\xi + b_*\eta + c_* = 0) = 1$$

Определение 7.3 *Коэффициент корреляции случайных величин* ξ, η *- число:*

$$cor(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

ξ, η - н.с.в. $\Rightarrow cor(\xi, \eta) = 0$

$\not\Leftarrow$

$\text{cor}(\xi, \eta) = \pm 1 \Leftrightarrow \mathsf{P}(a_* \xi + b_* \eta + c_* = 0) = 0$с вероятностью 1

Пусть $(\Omega_0, \mathbb{F}_0, P_0)$ — некоторое вероятностное пространство

$\Omega_0 = \{\omega_{0,1}, .., \omega_{0,s}\}, 2 \leq s \leq \infty$

$\text{F}_0 =$ все подмножества Ω_0

$\text{P}_0 : \mathsf{P}(\omega_{0,i}) = p_i \sum\limits_{i=1}^{s} p_i = 1 \ \mathsf{P}_0(A) = \mathsf{P}_0(\omega_{0,i})$

Пусть $\Omega = \Omega_0^n = \{\omega =< \omega_{0,i_1}, \omega_{0,i_2} ... \omega_{0,i_n} >, \omega_{0,i_i} \in \Omega_0\} \quad 1 \leq n < \infty$

n - кратное повторение Ω_0

В, Ω $\quad s^n$ элем. исходов

F$=$ все подмножества Ω

Независимость испытаний:

$\mathsf{P}(\omega) = \mathsf{P}(< \omega_{0,i_1}, \omega_{0,i_2} ... \omega_{0,i_n} >) = \mathsf{P}_0 \, \omega_{0,i_1}, \omega_{0,i_2} ... \, \mathsf{P}_0 \, \omega_{0,i_n} = p_{i_1} ... p_{i_n}$

s $=$ 2, $\Omega_0 = \{Y, H\}$

$\omega_{0,1} = Y =$ «успех»

$\omega_{0,2} = H =$ «неудача»

$\mathsf{P}_0(Y) = p, \mathsf{P}_0(H) = q, (p + q = 1)$

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P}) : \Omega = \Omega_0^n; \mathsf{P} \leftrightarrow$ независимость испытаний

называется **биномиальной** схемой независимых испытаний

(схема Бернулли)

$\forall \quad \omega \in \Omega \, \mathsf{P}(\omega) = p^k q^{n-k}$

k — количество $\omega_{0,i} = Y$

$n - k$ —количество $\omega_{0,i} = H, \qquad 0 \leq k \leq n$

8 Лекция №8. Биномиальное распределение

$\Omega_0 = \{Y, H\}, \quad \mathsf{P}_0(Y) \equiv p, \mathsf{P}_0(H) = q, \qquad p + q = 1$

$\Omega = \Omega_0^n = \{\omega =< \omega_{0,1}, .., \omega_{0,n} >, \omega_{0,i} = \begin{pmatrix} Y \\ H \end{pmatrix}\}$

$\mathsf{P}(\omega) = \mathsf{P}_0(\omega_{0,1}) ... \mathsf{P}(\omega_{0,n}) \qquad$ (НИ)$(n = fix)$

$\Omega_0^\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_0^n = \{\omega =< \omega_{0,1}, .., \omega_{0,n} > \omega_{0,i} = \begin{pmatrix} Y \\ H \end{pmatrix}, n = 1, 2..\} +$ (НИ)

$(\Omega_0^n, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ или $(\Omega_0^\infty, \mathbb{F}, \mathsf{P})$

Пусть n = fix, $\Omega = \Omega_0^n$

$\xi_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ с.в.

$\xi_n(\omega) = k,$ если в $\omega - < \omega_{0,1}, .., \omega_{0,n} > k$ раз

$\omega_{0,i} = Y (\Leftrightarrow n - k$ раз $\omega_{0,i} = H)$

$\xi_n = 0, 1, .., n P(\xi_n = k) = \sum\limits_{\omega : \xi_n(\omega) = k} \mathsf{P}(\omega)$Если $\quad \xi(\omega) = k$, то

$$\textbf{(НИ)} \Rightarrow \ \mathsf{P}(\omega) = \mathsf{P}_0(\omega_{0,1}) .. \mathsf{P}_0(\omega_{0,n}) = p^k q^{n-k}$$

$\Rightarrow \ \mathsf{P}(\xi_n = k) = p^k q^{n-k} \cdot$ (число слагаемых суммы) $= p^k q^{n-k} \cdot C_n^k$

n = 4, k = 2, $\xi_4 = 2$

$\omega =< Y, Y, H, H > \qquad C_n^k = C_n^{n-k}$

$\omega =< Y, H, Y, H >$

$\omega =< H, Y, Y, H >$

$\vdots$

Определение 8.1 *С.в. ξ_n имеет распределение Бернулли (биномиальное распределение), если:*

$$\mathsf{P}(\xi_n = k) = p^k q^{n-k} \cdot C_n^k, \quad k = 0, 1, .., n$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(\xi_n = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = \underbrace{(p+q)^n}_{=1}$$

n $\in \mathbb{N}, p \in (0,1), q = 1 - p$ — **параметры распределения**

$\mathsf{P}(A) \approx$ **частота A**

Свойства как с.в. A = «успех», n повторений

$\mathsf{P}($ частота $A = \frac{k}{n}) = \mathsf{P}(\xi_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, .., n$

Пусть $\quad \Omega = \Omega_0^\infty$

Пусть $\quad$ k = fix, $\eta_k = n,$ если для достижения К-го успеха

потребовалось n испытаний

$\eta_k = n, k+1, ...$

После К-го успеха испытания прекращаются

$\eta_k(\omega) = n \Leftrightarrow \omega =< \omega_{0,1}, \ldots, \omega_{0,n} >$

k раз $\omega_{0,i} = Y \Leftrightarrow n - k$ раз $\omega_{0,i} = H$

$\Leftrightarrow \mathsf{P}(\omega) = p^k q^{n-k}$

$\mathsf{P}(\eta_k = n) = p^k q^{n-k} \cdot$ число исходов $\omega : \eta_k(\omega) = n$

$\eta_k(\omega) = n \Rightarrow \omega_{0,n} = Y$

$$\underbrace{\omega_{0,1}, \ldots, \omega_{0,n-1}}_{\text{n-1 испытаний, k-1 успех}} \quad , Y$$

Определение 8.2 *Отрицательное биномиальное распределение:*

$$\mathsf{P}(\xi_n = k) = p^k q^{n-k} \cdot C_{n-1}^{k-1}, \quad n = k, k+1, \ldots$$

$\mathsf{P}(\xi_n = k) \quad \underbrace{\longrightarrow}_{n\to\infty} \quad ?$

$\mathsf{P}(\xi_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \mathsf{P}(n, k, p)$

1)n $\to \infty, k = fix, p = fix, \mathsf{P}(\xi_n = k) \to 0$

2)n $\to \infty, k = fix, p \to \infty, \mathsf{P}(\xi_n = k)$ — **асимптотика Пуассона**

3) n $\to \infty, k \to \infty, p = fix, \mathsf{P}(\xi_n = k)$ — **асимптотика Муавро-Лапласа**

Пусть $\quad n \to \infty, p = p(n) \to \infty : np \to \lambda$, где $0 < \lambda < \infty, \lambda = const$

Тогда $\quad \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \forall\ k = fix C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} \underbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}_{\text{k сомножителей}} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \frac{1}{k!} \underbrace{1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})}_{A(n,k)} \underbrace{(np)^k}_{L(np,k)} \underbrace{(1-p)^{-k}}_{B(p,k)} \underbrace{(1-p)^n}_{E(n,p)}$$

$$A(n,k) \underset{\substack{n\to\infty \\ k=fix}}{\longrightarrow} 1$$

$$L(np,k) \underset{\substack{np\to\lambda \\ k=fix}}{\longrightarrow} \lambda^k$$

$$B(p,k) \underset{\substack{p\to 0 \\ k=fix}}{\longrightarrow} 1$$

$$lnE(n,p) = nln(1-p) = n(-p + o(p)) \underset{np\to\lambda}{\longrightarrow} -\lambda$$

$$o(p) : \frac{o(p)}{p} \to 0 \text{ , т.е. } o(p) = p\epsilon(p), \text{ где } \epsilon(p) \underset{p\to 0}{\to} 0$$

$$n\ o(p) = n\ p\ \epsilon(p) \to 0$$

$$\Rightarrow\ E(n,p) \to e^{-\lambda}$$

$$C_n^k p^k q^{n-k} \longrightarrow \frac{1}{k!} * 1 * \lambda^k * 1 * e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

В теореме $p = p(n)$

n_1 испытаний с $p = p_1$

n_2 испытаний с $p = p_2$

$\vdots$

n $\to \infty_m; \quad p_m \to 0; \quad n_m p_m \to \lambda$

$$\Rightarrow\ \mathsf{P}(\xi_{n_m} = k) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \forall \quad k = fix$$

ξ **имеет распределение Пуассона**, если

$$\mathsf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\mathsf{P}(\xi_n = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$^{n>>1}_{p<<1} : 0.01 \le np = \lambda \le 100$

Теорема 7 (Муавра-Лапласа)

$$\textit{Пусть} \quad n \to \infty; \left| \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right| \le C \ \ \forall \ \ n(p = fix)$$

$$\textit{Тогда} \quad \frac{\mathsf{P}(\xi_n < k)}{I(n,k,p)} \longrightarrow 1, \ \textit{где} \quad I(n,k,p) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \mathsf{P}(\nu < x), \text{ где } \quad p_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, -\infty < t < \infty$$

ν имеет нормальное распределение (**распределение Гаусса**)

$$F_{\xi_n}(k) \approx F_\nu(x), x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\left| \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right| < C \quad \forall \quad n \text{ , т.е. } k - np \text{ по порядку величины } \leq \sqrt{n}$$

Теорема 8 (Локальная теорема Муавра-Лапласа)

$$\mathsf{P}(\xi_n < k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

$$npu \quad n \to \infty, \left| \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right| < C$$

$$\mathsf{P}(\xi_n = k) = \mathsf{P}(\xi_n < k + 1) - \mathsf{P}(\xi_n < k) \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$x_2 = \frac{k + n - np}{\sqrt{npq}}; x_1 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

В момент $t = 0$ точечная частица находилась в точке $x = x_0$

В моменты $t = 1, 2, ..$ частица оказывается в точках $x_1, x_2, ...$:

$$x_k - x_{k-1} = 1 \text{ с вероятностью p}$$

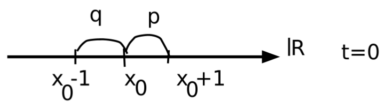


Рис. 8.1: Частица t = 0

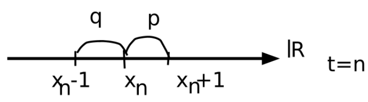


Рис. 8.2: Частица t = n

$$x_k - x_{k-1} = -1 \text{ с вероятностью q}$$
$$p + q = 1$$

$\triangle t = 1$ дискретное время

$|\triangle x| = 1$ дискретные скачки

x_0 — целое число, $x_0 = m \in \mathbb{Z}$

Пусть ξ_n — координаты частицы в $t = n, n = 0, 1, ..$

$\mathsf{P}(\xi_0 = m) = 1$

$\xi_{n+1} - \xi_n, n = 1, 2, ...$ — н.с.в.

$\mathsf{P}(\xi_{n+1} - \xi_n = 1) = p$

$\mathsf{P}(\xi_{n+1} - \xi_n = -1) = q$

Траектория движения частицы

$\{$ (n,ξ_n)$, n = 0, 1, 2..\}$

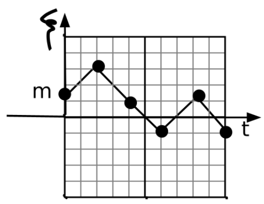


Рис. 8.3: Траектория движения частицы

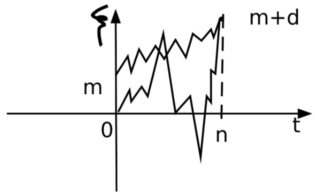


Рис. 8.4: Траектория движения частицы

$L_n(m, m+d) =$ Траектория перехода из $x = m$ в $x = m + d$ за n шагов

Вероятность того, что частица за n шагов перешла из $x = m$ в

$x = m + d$

$\mathsf{P}(m, m + d)$–? $\quad n = 1, 2..; \quad m, d \in \mathbb{Z}$

смещение $= d$

n прыжков = n испытаний. Успех = прыжок вправо

Пусть k прыжков право из n
$\Rightarrow$ смещение $= 1 \cdot k + (-1)(n - k) = 2k - n$

d = 2k-n $\Rightarrow$ $k = \frac{n+d}{2}$

k$= \dfrac{n+d}{2} \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$\Rightarrow$ $\mathsf{P}_n(m, m + d) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Если $\quad \dfrac{n+d}{2} \notin \{0, 1, .., n\},$, то $\quad \mathsf{P}_n(m, m + d) = 0$

$\dfrac{n+d}{2} > n \Leftrightarrow d > n$

$\dfrac{n+d}{2} < 0 \Leftrightarrow d < -n$

P(пройти по одной тракетории) $= p^k q^{n-k} (k = \frac{n+d}{2})$

C_n^k—количество траекторий $L_n(m, m + d)$

9 Лекция №9. Распределение координаты на n-м шаге

$\Omega^\infty = \{< \omega_{0,1}, \dots, \omega_{0,n} > n = 1, 2, \dots\}$

Это множество из прошлых лекций ошибочно! Его нельзя нормировать, оно бессмысленно $\mathsf{P}(\Omega^\infty) \neq 1$

$\mathsf{P}(\eta_k = n) = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} \quad n = k, k+1, \dots$

$\eta_k = \eta_k(\omega), \omega \in ?$

$\widetilde{\Omega^\infty} = \{< \omega_{0,1}, \dots, \omega_{0,n} > n = k, k+1, .. :$ всего k раз

$\omega_{0,i} = H, \omega_{0,n} = Y\}$

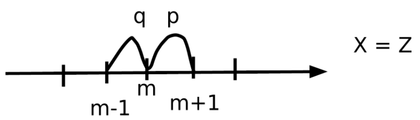


Рис. 9.1: Траектория движения частицы

В момент $t = n$ частица находилась в $x = m$

$\Rightarrow$ В момент $t = n + 1$ она в x=m+1 с p, в x=m-1 с q, $p + q = 1$

Скачки независимы

Дискретное время t=0,1,2,...

Дискретное пространство x=0,t1,t2,..

$\mathsf{P}_n(m, m+d) =$ вероятность того, что за n скачков частица m $\to m+d$

$\mathsf{P}_n(m, m+d) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \frac{n+d}{2} \in \{0, 1, ..., n\}$

Если k$\notin \{0, 1, ..., n\}$, то $\mathsf{P}_n(m, m+d) = 0$

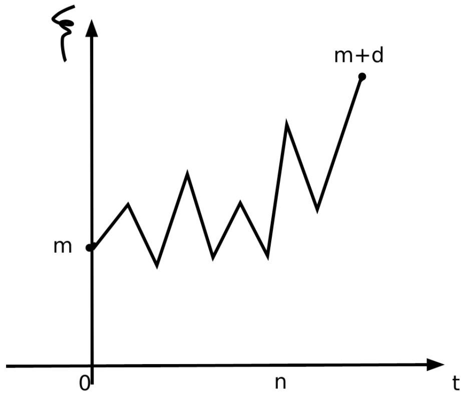


Рис. 9.2: Траектория движения частицы

Соглашение (на эту лекцию):

$$C_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, k \in \{0, 1, ..., n\} \\ 0, k \notin \{0, 1, ..., n\} \end{cases}$$

$m \mapsto m + d$ сопоставляем траекторию $L_n(m, m + d)$

$\mathsf{P}($ прохода по одной $L_n(m, m + d) = p^k q^{n-k}$

$\mathrm{C}_n^k = N_n(m, m{+}d) =$ количество траекторий из n в m+d с n звеньями

$\mathrm{P}_n(m, m + d) = \sum\limits_{L_n(m,m+d)} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = \frac{n+d}{2})$

$\xi_n = m$, если в $t = n$ частица находилась в $x = m$

$$\mathsf{P}_n(\underbrace{m}_{\xi_0=m}, \underbrace{m+d}_{\xi_n=m+d}) = \mathsf{P}(\xi_n = m{+}d|\xi_0 = m) \underbrace{=}_{P(\xi_0=m)=1} \mathsf{P}(\xi_0 = m, \xi_n = m{+}d)$$

$$L_n(m, m + d) =< \xi_0 = m, \xi_1 = m_1, \ldots, \xi_{n-1} = m_{n-1}, \xi_n = m + d >$$

$\xi_k - \xi_{k-1} = \pm 1$ н.с.в. при $k = 1, 2, ..$

$$d = 0\, \mathsf{P}_n(m, m) \neq 0, \text{ только если n четно}\, \mathsf{P}_{2n}(m, m) = C_{2n}^n p^n q^n$$

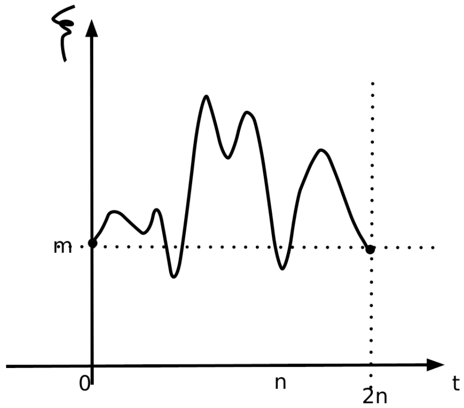


Рис. 9.3: Траектория движения частицы

Пусть m>0, m+d >0

Найти $\mathsf{P}_N^+(m, m+d)$ — вероятность того, что частица за n шагов перейдет $m \to m+d$, не заходя в $x = 0$

Переход из m в m+d за n шагов ⇔

$$k = \frac{n+d}{2} \text{ шагов вправо}$$

$$n - k = \frac{n-d}{2} \text{ шагов влево}$$

$\Rightarrow \ \mathsf{P}_n^+(m, m+d) = N_n^+(m, m+d)p^k q^{n-k}$

$\mathrm{N}_n^+(m, m+d) =$ количество траекторий $L_n^+(m, m+d)$, не заходящих в ноль

$$L_n^+(m, m+d) \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_0 = m, \quad \xi_n = m+d \\ \xi_k > 0 \ \forall \ k = 1, 2, .., n-1 \end{cases}$$

$$L_n^-(m, m+d) \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_0 = m, \quad \xi_n = m+d \\ \ \exists \ z \in \{1, .., n-1\}, \ \xi_z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ N_n(m, m+d) = N_n^+(m, m+d) + N_n^-(m, m+d)$

$N_n^+(m, m+d) = ? \leftarrow$ Цель

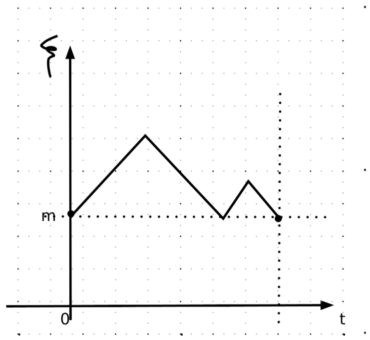


Рис. 9.4: $\mathrm{L}_n^+(m, m+d)$

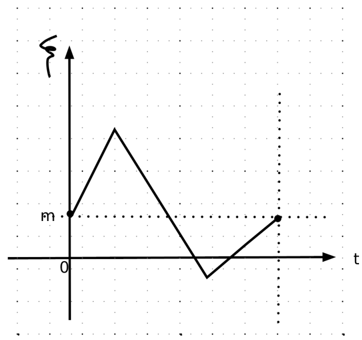


Рис. 9.5: $\mathrm{L}_n^-(m, m+d)$

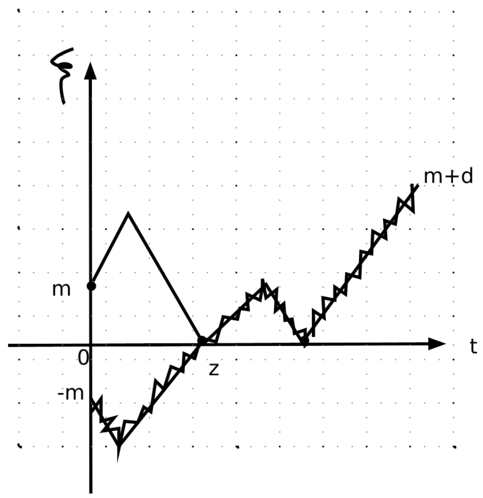


Рис. 9.6: Траектория движения частицы

$\mathrm{N}_n^+(m, m+d) = C_n^k - N_n^-(m, m+d)$

$L_n^-(m, m+d)$ Пусть z - минимальный

Номер. $\xi_z = 0$, т.е.

$\mathrm{L}_n(m, m+d) =< \xi_0 = m, \underbrace{\xi_1 = m_1, ..., \xi_{z-1} = m_{z-1}}_{>0}, \xi_z = 0, \xi_{z+1} = m_{z+1}, \ldots, \xi_n = m+d >$

$\mathrm{L}_n^-(m, m+d) \mapsto L_n(-m, m+d) =< \widetilde{\xi_0}, \ldots, \widetilde{\xi_n} >$

$\widetilde{\xi_0} = -m, \ \ \widetilde{\xi_1} = -\xi_1, \ \ldots \ , \widetilde{\xi_{z-1}} = \xi_{z-1}, \ \ \widetilde{\xi_z} = \xi_z = 0,$

$\widetilde{\xi_{z+1}} = \xi_{z+1} \ \ , \ldots, \widetilde{\xi_n} = \xi_n = m + d(*)$

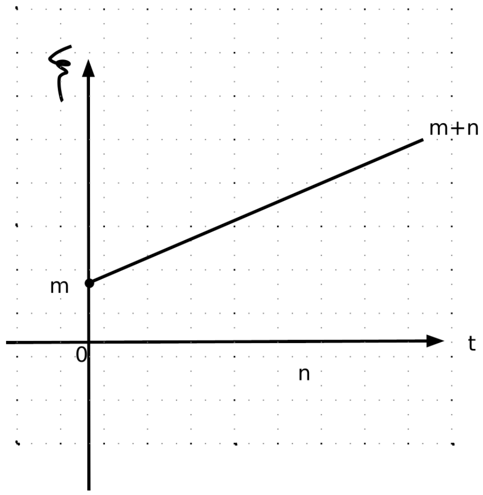


Рис. 9.7: Траектория движения частицы

$\forall L_n(-m, m+d) \;\; \exists\, z : \xi_z = 0$

$L_n(-m, m+d) \mapsto L_n^-(m, m+d)$ по (*) , т.е.

$\mathrm{L}_n^-(m, m+d) \underset{\text{вз-одн}}{\longrightarrow} \underbrace{L_n(-m, m+d)}_{\text{любая}}$

$$\Rightarrow \;\; N_n^-(m, m+d) = N_n(-m, m+d) = C_n^{\overline{k}},$$

$$\overline{k} = \frac{n+m+d-(-m)}{2} = \frac{n+d}{2} + m$$

$$P_n^+(m, m+d) = (C_n^k - C_n^{\overline{k}})p^k q^{n-k}, \text{ где}$$

$$k = \frac{n+d}{2}, \overline{k} = \frac{n+d}{2} + m \qquad (k, \overline{k} \in \{0, 1, ..., n\})$$

m $\to m+n$

Найти $P(B_{2n})$, где $B_{2n} =$ частица не вернется в исходную точку в t=2,3,...,2n

$\mathrm{P}(\mathrm{B}_{2n}) = P(\xi_{2n} \neq 0, \xi_{2n-1} \neq 0, \ldots, \xi_2 \neq 0, \xi_1 \neq 0, | \xi_0 \neq 0)$

$\mathrm{P}(\mathrm{B}_{2n}) = P(B_{2n}^+) + P(B_{2n}^-)$

$\mathrm{B}_{2n}^{\pm} = B_{2n} \cap \{\xi_1 = \pm 1\}$

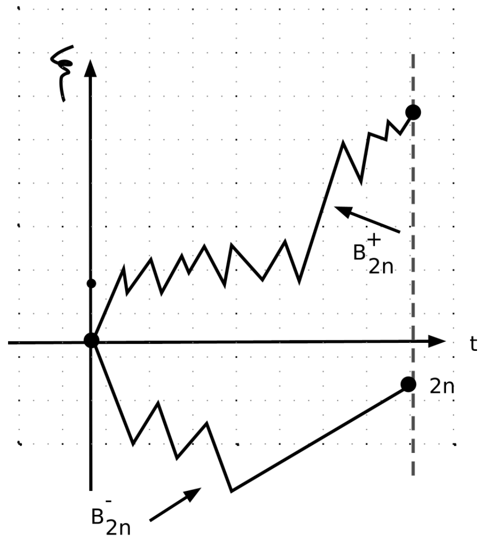


Рис. 9.8: Траектория движения частицы

$$P(B_{2n}^{+}) = \sum_{s=1}^{n} P(B_{2n}^{+} \cap \{\xi_{2n}\} = 2s) = \sum_{s=1}^{n} P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 > 0, \dots$$

$\dots, \xi_{2n-1} > 0, \xi_{2n} = 2s)$

$(\xi_k - \xi_{k-1} = \pm 1) = \sum\limits_{s=1}^{n} pP(\xi_{2n} = 2s, \xi_{2n-1} > 0, \dots, \xi_2 > 0 \Leftrightarrow \xi_2 = 2|\xi_1 = 0)$

$$= \sum_{s=1}^{n} pP_{2n-1}^{+}(1, 2s) = \sum_{s=1}^{n} p(C_{2n-1}^{k} C_{2n-1}^{\overline{k})p^k q^{2n-1-k}}, \text{ где}$$

$$k = \frac{2n-1+(2s-1)}{2} = n+s-1, \quad sn-1-k = n-s$$

$$\overline{k} = \frac{2n-1+(2s-(-1))}{2} = n+s$$

Если s = n , то $\overline{k} = 2n > 2n-1 \Rightarrow C_{2n-1}^{\overline{k}} = 0$

$\mathrm{P}(\mathrm{B}_{2n}^{+}) = \sum\limits_{s=1}^{n} C_{2n-1}^{n+s-1} p^{n+s} q^{n-s} - \sum\limits_{s=1}^{n-1} C_{2n-1}^{n-s} p^{n+s} q^{n-s} = S_1 - S_2$

В S_1 : $C_{2n-1}^{n+s-1} = C_{2n-1}^{n-s}$

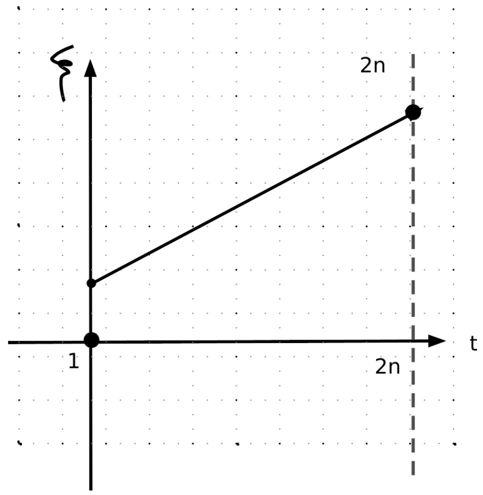


Рис. 9.9: Траектория движения частицы

В S_2 : $\quad 1) \to \widetilde{s} = s+1, s = \widetilde{s} - 1$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{n-1}(\cdot) = \sum_{\widetilde{s}=2}^{n}(\cdot) = \sum_{\widetilde{s}=1}^{n}(\cdot) - (\cdot)|_{\widetilde{s}=1}$$

$$C_{2n-1}^{n+s} = C_{2n-1}^{n+\widetilde{s}+1} = C_{2n-1}^{n-\widetilde{s}}$$

$$p^{n+s} = p^{n+\widetilde{s}-1}; \quad q^{n-s} = q^{n-\widetilde{s}+1}$$

2) $\quad \widetilde{s} = s$

$$P(B_{2n}^{+}) = \sum_{s=1}^{n} C_{2n-1}^{n-s} p^{n+s} q^{n-s} - \sum_{s=1}^{n} C_{2n-1}^{n-s} p^{n+s-1} q^{n-s+1} + C_{2n-1}^{n+1} p^n q^n =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} C_{2n-1}^{n-s} p^{n+s} q^{n-s} (1 - \frac{q}{p}) + C_{2n-1}^{n+1} p^n q^n$$

$$P(B_{2n}^{-}) = P(B_{2n}^{+})|_{p \leftrightarrow q}$$

Далее $p = q = \frac{1}{2}$ (симметричные блужд.) $\Rightarrow \; P(B_{2n}^{-}) = P(B_{2n}^{+})$

$\Rightarrow \; P(B_{2n}) = 2P(B_{2n}^{+}) = 2C_{2n-1}^{n-1} p^n q^n = \frac{2(2n-1)!n}{(n-1)!n!n} p^n q^n = C_{2n}^{n} p^n q^n$

10 Лекция №10. Финальные распределения и цепи Маркова

Вероятность возврата в начальную точку за 2n шагов

$$P(V_{2n}) = C_{2n}^n p^n q^n$$

Вероятность невозврата в начальную точку за 2,4,...,2n шагов ($p = 1 = \frac{1}{2}$)

$$P(B_{2n}) = C_{2n}^n p^n q^n$$

Пусть частица стартовала из x=0 и сделала 2n шагов ($p = 1 = \frac{1}{2}$)

С.в. $\alpha_{2n} = 2s$, если частица в последний раз вернулась в x=0 при t=2s

Найти P$(\alpha_{2n} = 2s), s = 0, 1, \ldots, n$

s $= 0$, P$(\alpha_{2n} = 0) = P(B_{2n}) = C_{2n}^n p^n q^n$

s=n p$(\alpha_{2n} = 2n) = P(\xi_0 = 0, \xi_{2n} = 0) = P(V_{2n}) = C_{2n}^n p^n q^n$

0<s<n

$$P(\alpha_{2n} = 2s) = P(\xi_0 = 0, \xi_{2s} = 0, \xi_{2s-1} \neq 0, \ldots, \xi_{2s} \neq 0) =$$
$$\left\{\substack{B_{2n-2s}: \xi_{2s}=0, \xi_{2s-1}\neq 0, \ldots, \xi_{2s} \\ V_{2s}: \xi_0=0, \xi_{2s}=0}\right\} =$$
$$= C_{2s}^s p^s q^s \cdot C_{2n-2s}^{n-s} p^{n-s} q^{n-s} \underset{p=q=\frac{1}{2}}{=} \frac{C_{2s}^s C_{2n-2s}^{n-s}}{4^n}$$

$$P(\alpha_{2n} = 2s) = \frac{C_{2s}^s C_{2n-2s}^{n-s}}{4^n}, s = 0, 1, \ldots, n$$
$$P(\alpha_{2n} = 2s) = P(\alpha_{2n} = 2n - 2s) =$$

n$\gg 1, s \gg 1, n - s \gg 1$

(m! $\approx \sqrt{w\pi m}(\frac{m}{e})^m) \Rightarrow P(\alpha_{2n} = 2s) = \frac{\pi}{n}\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}$, где $z = \frac{s}{n}$

P(2s$_1 \leq \alpha_{2n} \leq 2s_2) \approx \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)}} \cdot const = \arcsin(z - \frac{1}{z})|_{z_1}^{z_2} \cdot const$

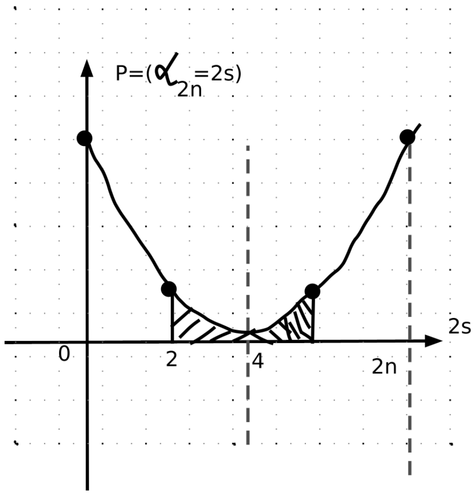


Рис. 10.1: Закон арксинуса

Определение 10.1 *Цепь Маркова :*

Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *— с.в., распределенные дискретно,*
каждая ξ_n *принимает значение из* $X = \{\ x_1, \ldots, x_s\}$

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — ***цепь Маркова****, если:* $\forall n = 1, 2, \ldots$ *условное распределение с.в.* ξ_{n+1} *при* $\xi_0 = fix, \xi_1 = fix, \xi_2 = fix, \ldots, \xi_n = fix$ *совпадает с условным распределением с.в.* ξ_{n+1} *при* $\xi_n = fix$ *, т.е.* $\forall x_{i_0}, x_{i_1} \ldots x_{i_m} \in \mathbb{X}$

$$P(\xi_{n+1} = x_{i_{n+1}} | \xi_n = x_{i_n}, \ldots, \xi_0 = x_{i_0}) = P(\xi_{n+1} = x_{i_{n+1}} | \xi_0 = x_{i_0})(\mathbf{M})$$

$\xi_n = x_i :$ цепь Маркова на n-м шаге находилась в состоянии x

$\xi_0, \xi_1, \ldots$ — шаги цепи Маркова

$x_1, \ldots, x_\xi$ — состояния цепи Маркова

Считаем $2 \le s < \infty$

Если $\mathrm{P}(\xi_{n+1} = x_j | \xi_n = x_i) = \Pi_{ij}$

не зависит от n, то цепь Маркова называется **однородной**

Π_{ij} называется **вероятностью перехода** из i-го состояния в j-е за 1 шаг

Π — (s * s) матрица с элементами $\pi_{ij} = P(\xi_{n+1} = x_j | \xi_n = x_i)\ \ i, j = 1 \ldots s :$

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_{s1} & \dots & \pi_{ss} \end{pmatrix}$$ **— матрица перехода за 1 шаг**

$\Pi_{ij}^{(m)} = P(\xi_{n+m} = x_j | \xi_n = n)$ — вероятность перехода из x_i в x_j за m шагов

$\Pi^{(m)} = \{\pi_{ij}^{(m)}\}_{i,j=\overline{1,s}}$ **— матрица перехода за m шагов**

m=1,2,... $\Pi^{(1)} = \pi$

$\xi_n = \xi(t_n), n = 0, 1, \dots$

$\xi_n = x_j \in \mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$

$P(\xi_n = x_j) \approx$ доля систем в ансамбле $\xi(t_n) = x_j$

Если $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n -$ н.с.в. , то

$\mathrm{P}(\xi_{n+1} = x_j | \xi_n = x_i) = P(\xi_{n+1} = x_j)$

$\mathrm{P}(\xi_{n+1} = x_j | \xi_n = x_i, \dots, \xi_0 = x_k) = P(\xi_{n+1} = x_j)$

$\Rightarrow \ (M)$

$\Pi_{ij}^{(m)} = P(\xi_{n+1} = x_j)$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \dots & \pi_s \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \dots & \pi_s \end{pmatrix}$$

Случайные блуждания - цепь Маркова со счетным числом состояний $\mathbb{X} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} p & j = i+1 \\ q & j = i-1 \\ 0 & \text{кроме } ij \end{cases}$$

Пусть заданы:

1) распределение на начальном шаге

$\mathrm{P}(\xi_0 = x_i) = a_i \geq 0, i = 1, \ldots, s$

$\sum\limits_{i=1}^{s} a_i = 1$

2) Матрица Π перехода за 1 шаг

Совместное распределение с.в. $\xi_0, \xi_1, \ldots, xn$

n=1 : $\mathrm{P}(\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_j) = \Pi_{ij} a_i = a_i \pi_{ij}$

n=2 : $\mathrm{P}(\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k) = P(\xi_2 = x_k | \xi_1 = x_j, \xi_0 = x_i) \cdot$

$\cdot P(\xi_1 = x_j, \xi_0 = x_i) = P(\xi_2 = x_n | \xi_1 = x_j) P(\xi_1 = x_j | \xi_0 = x_i) P(\xi_0 = x_i) = a_i \pi_{ij} \pi_{jk}$

$\mathrm{P}(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n}) = a_{i_0} \pi_{i_0 i_1} \ldots \pi_{i_{n-1} i_n}$

$\pi_{ij}^{(m)} = P(\xi_{n+m} = x_j | \xi_n = x_i) \quad {\scriptstyle n=1,2,\ldots \atop i,j=1,..,s}$

1. $0 \leq \pi_{ij}^{(m)} \leq 1$

2. $\sum\limits_{j=1}^{s} \pi_{ij}^{(m)} = 1$ — условие нормировки условного распределения

Матрица π со связями 1, 2 называется стохастической

3. Связь π и $\pi^{(m)}$

m=2:

$\pi_{ij}^{(2)} = P(\xi_2 = x_j | \xi_0 = x_i) = \frac{P(\xi_0 = x_i, \xi_2 = x_j)}{P(\xi_0 = x_i)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{s} P(\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_k, \xi_2 = x_j)}{P(\xi_0 = x_i)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{s} a_i \pi_{ik} \pi_{kj}}{a_i} = \sum\limits_{k=1}^{s} \pi_{ik} \pi_{kj} = (\pi^2)_{ij} \Rightarrow \pi^{(2)} = \pi\pi = \pi^2$

m = 3:

$$P(\xi_3 = x_j | \xi_0 = x_i) = \sum_{k=1}^{s} \frac{P(\xi_3 = x_j, \xi_2 = x_k, \xi_0 = x_i)}{P(\xi_0 = x_i)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \frac{P(\xi_3 = x_j, \xi_2 = x_k) P(\xi_2 = x_k, \xi_0 = x_i)}{P(\xi_0 = x_i)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}^{(2)} \pi_{kj} = (\pi^{(2)}\pi)_{ij} = (\pi^3)_{ij}$$

$3 \Rightarrow \ \pi^{(m)} = \underbrace{\pi \ldots \pi}_{m} = \pi^m, m = 2, 3, ..$

4. **Уравнение Чепмена-Колмагорова**

$$\pi^{(n+m)} = \pi^{(n)}\pi^{(m)}$$

$$\pi_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}^{(n)} \pi_{kj}^{(m)}$$

Поведение цепи Маркова при $\mathrm{n} \to \infty$

$\pi_{ij}^{(n)} = P(\xi_n = x_j | \xi_0 = x_i)$ при $n \to \infty$

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)} = p_j$ (не зависит от i), то у цепи Маркова $\exists$ финальные вероятности

$\Rightarrow \ P(\xi_n = x_j) = \sum\limits_{i=1}^{s} P(\xi_n = x_j | \xi_0 = x_i) P(\xi_0 = x_i) = \sum\limits_{i=1}^{s} \pi_{ij}^{(n)} a_i \underset{n\to\infty}{\to} \sum\limits_{i=1}^{s} p_j a_i = p_j \sum\limits_{i=1}^{s} a_i = p_j$

$\sum\limits_{i=1}^{s} P(\xi_0 = x_j) = 1 = \sum\limits_{i=1}^{s} \pi_{ij}^{(n)} = \{n \to \infty\} = \sum\limits_{i=1}^{s} p_j = 1$

$0 \leq \pi_{ij}^{(n)} \leq 1 \Rightarrow \ 0 \leq p_j \leq 1$

т.е. $p_1, \ldots, p_s$ - распределение

Если $\exists \ p_j = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)}$, то $p_j = \sum\limits_{i=1}^{s} \pi_{ij} p_i$

ср. с $P(\xi_{n+1} = x_j) = \sum\limits_{i=1}^{s} \pi_{ij} P(\xi_n = x_i)$ — стационарность финального распределения

$\mathrm{P}(\xi_n = x_j) = \sum\limits_{i=1}^{s} P(\xi_n = x_j|\xi_{n-1} = x_i)P(\xi_{n-1} = x_i) = \sum\limits_{i=1}^{s} \pi_{ij} P(\xi_{n-1} = x_i) \Rightarrow \{n \to \infty\} \Rightarrow p_j = \sum\limits_{i=1}^{s} \pi_{ij} p_i$

Введем с.в.

$$\chi_n^{(j)} = \begin{cases} 1, & \xi_n = x_j \\ 0, & \xi_n \neq x_j \end{cases} \quad n = 1, 2, ...; j = fix$$

$\Rightarrow M\chi_n^{(j)} = 1 \cdot P(\xi_n = x_j) + 0 \cdot P(\xi_n \neq x_j) = P(\xi_n = x_j)$

Пусть $\tau_n^{(j)} = \frac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{n} \chi_m^{(j)}$

$\Rightarrow M\tau_n^{(j)} = \frac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{n} M\chi_m^{(j)} = \frac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{n} P(\xi_m = x_j)$

Лемма 9 *Если* $\{b_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \subset \mathbb{R}$ *сходится к* b *, то*

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} b_m \underset{n\to\infty}{\to} b$$

$$\textit{Если} \quad P(\xi_n = x_j) \underset{n\to\infty}{\to} p_j, \textit{ то} \quad M\tau_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\to} p_j$$

Пусть n достаточно велико, чтобы $\mathrm{P}(\xi_n = x_j) \approx p_j$

$\mathrm{M}\tau_n^{(1)} \approx p_j$, то $\underbrace{P(\xi_n = x_j)}_{\textbf{доля систем в ансамбле: } \xi(t_n)=x_j} \approx M \cdot \tau_n^{(1)}$

, где $\tau_n^{(1)}$—(количество моментов времени среди $t_1, ..., t_n$, когда система находилась в состоянии x_j)$\cdot \frac{1}{n}$

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)} = p_j$, то цепь Маркова называется **эргодичной**

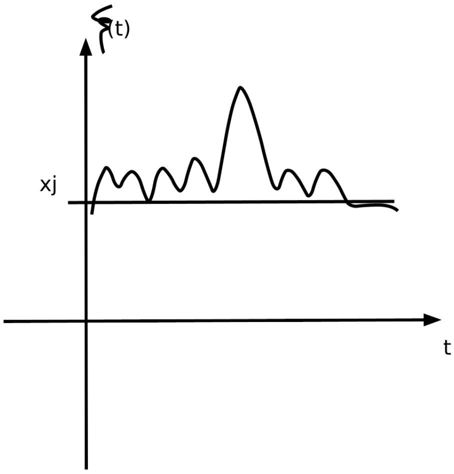


Рис. 10.2: Цепи Маркова

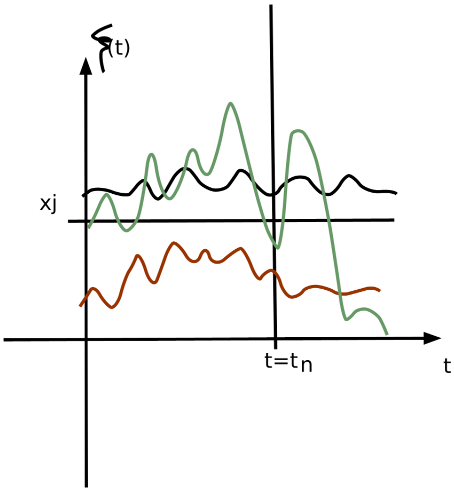


Рис. 10.3: Цепи Маркова

11 Лекция №11. Законы больших чисел

Теорема 10 (Маркова) *Если* $\exists\, n \in \mathbb{N}:$

в матрице $\Pi^{(n)}$ *имеется столбец без нулевых элементов,*

т.е. $\Pi_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, s$

при некотором $j \in \{1..s\}$, *то* $\quad \exists\, p_j = \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_{ij}^{(n)}$

Асимптотические теоремы в теории вероятности

Пусть с.в. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n...$ заданы на (Ω, F, P) , т.е. $\xi_n = \xi_n(\omega), \omega \in \Omega$

$\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \qquad (\xi$ - с.в. на $(\Omega, F, P))$

$\xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega', \mathsf{P}(\Omega') = 1(\omega = fix)$

(1) $\Rightarrow$ $\{\xi_n\}$ сходится ξ почти наверное (с вероятностью 1),

$$\xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi$$

(2) $\{\xi_n\}$ сходится к ξ по вероятности, если

$$\forall \epsilon > 0 P(|\xi_n - \xi| > \epsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad (\xi_n \overset{\mathsf{P}}{\underset{n\to\infty}{\to}} \xi)$$

(3) $\{\xi_n\}$ сходится к ξ по распределению $\xi_n \overset{d}{\underset{n\to\infty}{\to}} \xi$, если

$$F_{\xi_n}(x) \underset{n\to\infty}{\to} F_\xi(x) \forall x = fix : F_\xi()\text{ непрерывна в т. х}$$

(4) $\{\xi_n\}$ сходится к ξ в среднем порядка p, если $M|\xi_n - \xi|^p \underset{n\to\infty}{\to} 0$

p = 2: M$|\xi_n - \xi|^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ — сходимость в среднем квадратичном

$(\xi_n \overset{c.k.}{\underset{n\to\infty}{\to}} \xi)$

$\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi \Rightarrow \ \xi_n \overset{P}{\to} \xi \Rightarrow \ \xi_n \overset{d}{\to} \xi$(Неравенство Чебышева)

$\xi_n \overset{c.k.}{\to} \xi$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \underset{n\to\infty}{\to} \textbf{матем. ожидание с.в.}$$

Теорема 11 (Чебышева) *Пусть* $\xi_1, \xi_2...$ ***последовательность с.в.:***

1) $D\xi_k \le \sigma^2 \quad \forall k = 1, 2, ..2) \quad cov(\xi_k, \xi_j) = 0 \quad \forall k \ne j$

Тогда $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0$

(В частности, если $M\xi_k = \mu$*, то* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \mu$*)*

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)\right| \ge \epsilon\right) \le \frac{D(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k))}{\epsilon^2}$$

$(\mathsf{P}(|\alpha - M\alpha| \ge \epsilon)) \le \frac{D\alpha}{\epsilon^2}$

$$\mathrm{D}(\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2}$$

$$cov = 0 \Rightarrow\ P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k| \ge \epsilon) \le \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k| < \epsilon|) \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

Условие $cov(\xi_k, \xi_j) = 0$ можно заменить на более сильные:

$\xi_k, \xi_j -$ н.с.в. $\forall k \ne j$ (попарная независимость) или $\xi_1, \ldots, \xi_n -$ н.с.в. $\forall n$

Теорема 12 (Бернулли)

Если $\xi_n -$ *н.с.в. , распределенная по биномиал. закону, то*

$$\frac{\xi_n}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} p \quad (P(\xi_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k})$$

$\xi_n = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$, где ν_k- с.в., $=$ числу успехов в k-ом испытании

$\mathsf{P}(\nu_k = 1) = p; \mathsf{P}(\nu_k = 0) = q$

$\Rightarrow \; M\nu_k = p; D\nu_k = pq$

$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ - н.с.в. $\forall n$

$$\frac{\xi_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\nu_k \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} M\nu_k = p$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} \mu, \text{ где } \quad \mu = M\xi_k$$

Лемма 13 *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, *то* $P(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \le P(A_1) + P(A_2)$

$\Rightarrow \; P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \le P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \le \sum\limits_{k=1}^{3} P(A_k) \Rightarrow \; \dots \Rightarrow \; \forall n < \infty P(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k) \le \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$

Пусть $\mathrm{B}_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow \; B_{n+1} = A_{n+1} \cup B_n \supset B_n \Rightarrow \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ т.к. Если $\omega \in A_k$, то $\omega \in B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \quad \forall n \ge k$

$\Rightarrow \; \omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

Если $\omega \in B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, то $\quad \exists \, k : \omega \in A_k$

$$\Rightarrow \; P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Лемма 14 ***Лемма Бореля-Кантелли***

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, *то* *с вероятностью 1 происходит конечное количество событий из* $A_1, A_2, ...$

Т.е. $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty} supA_n}) = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} supA_n \overset{def}{=} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ — произошло бесконечно много событий из $A_1, A_2, ...$

$$P(\lim_{n\to\infty} supA_n) = 0$$

P$(\lim\limits_{n\to\infty} supA_n) = P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k) = P(\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k) \leq$

$\leq \lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$ т.к. $\exists \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \Rightarrow P(\lim\limits_{n\to\infty} supA_n) = 0$

$$\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} \xi \text{ , т.е. } P\{\omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi(\omega)\} = 1$$

$$\xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi(\omega) \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall n \geq N |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall m = 1, 2, \dots \;\; \exists\, N : \forall b \geq N |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{m}$$

$\Rightarrow \{\omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi(\omega)\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{m}\} =$

$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} inf\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{m}\}$

$\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} \xi$, если

$$P(\bigcap_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} inf\{|\xi_n - \xi| < \frac{1}{m}\}) = 1 \Leftrightarrow P(\bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} sup\{|\xi_n - \xi| \geq \frac{1}{m}\}}_{A_m^*}) = 0$$

Имеем $P(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m^*) = 0$

$\Rightarrow \quad \forall \quad mP(A_m^*) \leq P(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m^*) = 0$

Если $\mathrm{P}(\mathrm{A}_m^*) = 0 \quad \forall \quad m = 1, 2, \dots,$ то $P(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m^*) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m^*) = 0$

$\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} \xi \Leftrightarrow \quad \forall \quad m = 1, 2, ...$

$\mathrm{P}(\lim\limits_{n\to\infty} sup\{|\xi_n - \xi| \geq \frac{1}{m}\}) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 P(\lim\limits_{n\to\infty} sup\{|\xi_n - \xi| \geq \epsilon\} = 0$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - с.в.

1) $\quad \mathrm{M}\xi_k = \mu, D\xi_n = \sigma^2, k = 1, 2..$

2) $\quad \mathrm{cov}(\xi_k, \xi_j) = 0$ при $k \neq j$ Тогда $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} \mu$

$\xi_n \to \xi_k - \mu \Rightarrow \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} 0$

Лемма 15 *Если* $\quad \exists$ *с.в.* $\alpha_m = \alpha_m(\omega), \beta_m = \beta_m(\omega)$

1) $\quad \alpha_m(\omega), \beta_m(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$

2) $\quad P(\alpha_m \geq \epsilon) \leq a_m = O(\frac{1}{m^2})$

$P(\beta_m \geq \epsilon) \leq b_m = O(\frac{1}{m^2})$

$\forall \epsilon > 0, \epsilon = fix$

3) $\quad \left| \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \right| \leq \alpha_m(\omega) + \beta_m(\omega)$

$\forall \omega \in \Omega,$ *если* $m^2 < n \leq (m+1)^2,$ *то* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} 0$

$\alpha_m \geq 0$ с вероятностью 1

$\Rightarrow \ P(|\alpha_m| \geq \epsilon) = P(\alpha_m \geq \epsilon) \leq a_m = O(\frac{1}{m^2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(\alpha_m \geq \epsilon) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m < \infty$

$\Rightarrow$ Лемма Б-К $\quad P(\lim\limits_{m\to\infty} sup\{\alpha_m \geq \epsilon\}) = 0 \qquad \forall\epsilon > 0 \Rightarrow\ \alpha_m \underset{m\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} 0$

Аналогично $\beta_m \underset{m\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} 0$

т.е. $\quad \exists\ A \subset \Omega : \alpha_m(\omega) \underset{m\to\infty}{\to} 0 \quad \forall\omega \in A, P(A) = 1$

$\exists\ B \subset \Omega : \beta_m(\omega) \underset{m\to\infty}{\to} 0 \quad \forall\omega \in B, P(B) = 1$

$\Rightarrow\ (\forall n\ \ \exists\ m : m^2 < n \leq (m+1)^2) \Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\right| \leq \alpha_{m_n}(\omega) + \beta_{m_n}(\omega) \quad \forall\omega \in A\cap B$$

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 2 - P(A\cup B) \geq 1$$

$$\Rightarrow\ P(A\cap B) = 1 \Rightarrow\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$\forall\omega \in A\cap B, P(A\cap B) = 1$

Пусть n>1, n$_1 < n \leq n_2$

$$\left|\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right| = \left|\tfrac{1}{n_1}(\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k + \sum_{k=n_1+1}^{n}\xi_k)\right| \leq \underbrace{\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\right|}_{\alpha_{n_1}} + \left|\tfrac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{n}\xi_k\right|$$

$\alpha_m \geq 0 \quad c \quad P = 1 P(\alpha_{n_1} \geq \epsilon) = P(\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\right| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}D(\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n_1^2}n\sigma^2 =$

$$= \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}\frac{1}{n_1}|_{n_1=m^2} = \underbrace{\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 m^2}}_{a_m}$$

$$P(\alpha_{n_1} \geq \epsilon)|_{n_1=m^2} \leq O(\frac{1}{m^2})$$

$$\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{n}\xi_k\right| \leq \max_{n_1<r\leq n_2}\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\right| \overset{def}{=} \beta_{n_1,n_2}(\text{ по условию } n_1 < n \leq n_2)$$

12 Лекция №12. Характеристическая функция

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Если $\quad \mathrm{cov}(\xi_k, \xi_0) = 0 m k \neq j$

$\mathrm{D}\xi_k = \sigma^2, M\xi_k = 0$

$\mathrm{n}_1 < n \leq n_2$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right| \leq \left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\right| + \left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{n}\xi_k\right| \leq \left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\right| + \underset{n_1\leq r<n_2}{max}\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1+1}\xi_k\right| =$$

$$\alpha_{n_1} + \beta_{n_1,n_2}$$

$\alpha_{n_1} \underset{n_1=m_2\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} 0$

$\beta_{n_1,n_2} \geq 0 \quad c \quad P = 1, \quad P(\beta_{n_1,n_2} \geq \epsilon) - ?$

$\underset{n_1+1\leq r<n_2}{max} \; x_r \geq \epsilon \Leftrightarrow \quad \exists\, r : x_r \geq \epsilon (n_1 \leq r < n_2)$

$\Rightarrow \; \beta_{n_1,n_2} \geq \epsilon \Leftrightarrow \quad \exists\, r : n_1 + 1 \leq r < n_2 \qquad \left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\right| \geq \epsilon$

$$\Rightarrow \; \mathsf{P}(\beta_{n_1,n_2} \geq \epsilon) = \mathsf{P}(\bigcup_{r=n_1+1}^{n_2}\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\right| \geq \epsilon) \leq$$

$$\leq \sum_{r=n_1+1}^{n_2}\underbrace{\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\right| \geq \epsilon\right)}_{\text{Неравенство Чебышева}} \leq \sum_{r=n_1+1}^{n_2}\frac{1}{\epsilon^2}D\left(\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\right) =$$

$$= \sum_{r=n_1+1}^{n_2}\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n_1^2}(r-n_1)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n_1^2}\sum_{r=1}^{n_2-n_1} r = \frac{\sigma^2}{\epsilon n_1^2}\frac{(n_2-n_1)(n_2-n_1+1)}{2}$$

Пусть $\quad \mathrm{n}_1 = m^2, n_2 = (m-1)^2$

$$\Rightarrow P(\beta_{n_1,n_2} \geq \epsilon)|_{\substack{n_1=m^2,\\ n_2=(m+1)^2}} \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 m^2}\frac{(2m+1)(2m+2)}{2} = O(\frac{1}{m^2}) \Rightarrow \beta_{m^2,(m+1)^2} \underset{m\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} 0$

Если $\xi_n =$ число успехов в сх. Бернулли, т.е. $P(\xi_n = k) =$

$= \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, .., $ то $\frac{\xi_n}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} p$

$\xi_n = \nu_1 + ... + \nu_n, {}_{\substack{P(\nu_k=1)=p\\ P(\nu_k=0)=q}} \Rightarrow {}_{\substack{M\nu_k=p\\ D\nu_k=pq}}$

Можно заменить $D\xi_k = \sigma^2$ на $D\xi_k \leq \sigma^2; M\xi_k = 0$ на $M\xi_k = \mu_k$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu_k) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} 0$

$\approx \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ при $n \to \infty$ имеет в асимптотике распределение нормальное

Определение 12.1 *Характеристическая функция (х.ф.) с.в.* ξ :

$$f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$f(t) = Me^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$$
$$(Me^{it\xi} \overset{def}{=} M \cdot \cos t\xi + i \cdot \sin t\xi)$$

$$Me^{it\xi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_\xi(x) = \begin{cases} \sum\limits_k e^{itx}P(\xi = x_k) & \textbf{(D)} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}p_\xi(x)dx & \textbf{(AH)} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ $|f_\xi(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$|f_\xi(0)| = 1$

$$|f_\xi(t)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\xi(x)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left|e^{itx}\right|}_{=1} dF_\xi(x) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dF_\xi(x) = 1}_{f_\xi(0)}$$

$\boxed{2}$ $\quad$ $f_\xi(t) = M \cdot \cos t\xi + i \cdot \sin t\xi)$:

$Ref_\xi(t)$ - четная функция от t

$Imf_\xi(t)$ - нечетная функция от t

$\boxed{3}$ $\quad$ $f_{a\xi+b}(t) = e^{itx} f_\xi(at)$

(a,b = const)

$Me^{it(a\xi+b)} = e^{itb} Me^{i(at)\xi}$

$\boxed{4}$ $\quad$ Если $\xi_1, \ldots, \xi_n -$ н.с.в. , то

$f_{\xi_1+\cdots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^n f_{\xi_k}(t)$

$M\ e^{it(\xi_1+\cdots+\xi_n)} = M \prod_{k=1}^n e^{it\xi_k} \underset{\text{н.с.в.}}{=} \prod_{k=1}^n Me^{it\xi_k}$

$\boxed{5}$ $\quad$ Если $\exists\ M\xi^k$ для $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\frac{d^k f_\xi(t)}{dt^k}|_{t=0} = i^k M\xi^k$$

$$\frac{d^k}{dt^k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF_\xi(x) \overset{\oplus}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF_\xi(x)|_{t=0} = i^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k dF_\xi(x) = i^k M\xi^k$$

$\overset{\oplus}{=}$ верно, т.к. $\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF_\xi(x)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF_\xi(x) < \infty \Leftrightarrow \ \exists\ M\xi^k$

Если $\exists\ M\xi^k$, то $\frac{d^k f}{dt^k}$ непрепрывна на R

$\boxed{6}$ $\quad$ Если ξ распределена АН (т.е. $\exists\ p_\xi(\cdot)$), то

$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_\xi(t) dt$ при условии, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_\xi(t)|\, dt < \infty$

$\boxed{7}$ $\quad$ Формула обращения

$$\mathrm{F}_\xi(b) - F_\xi(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} f_\xi(t)dt (F_\xi(x) = P(\xi < x))$$

$\boxed{8}$!!! без доказательства, но важное

$\mathrm{f}_{\xi_n}(t) \underset{n\to\infty}{\to} f_\xi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}(t = fix)$

$\Downarrow$

$\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} \xi$, т.е. $F_{\xi_n}(t) \underset{n\to\infty}{\to} F_\xi(t) \quad \forall x \in \mathbb{R} : F_\xi(\cdot)$ непр. в x

(непрерывность отображения $F_\xi(\cdot) \leftrightarrow f_\xi(\cdot)$)

$\Rightarrow$ Если $\quad f_\xi(t) \equiv f_{\overline{\xi}(t)}$, то $\quad F_\xi(t) \equiv F_{\overline{\xi}(t)}$

Пусть $\quad \mathrm{p}_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty \quad (\xi \in \mathbb{N}(\mu\sigma^2))$

$$f_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + itx} dx - \frac{1}{2\sigma^2}((x-\mu)^2 - 2it\sigma^2 x) =$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-\widetilde{\mu})^2 - 2\sigma^2 it\mu + \sigma^4 t^2\right), \text{ где } \quad \widetilde{\mu} = \mu - it\sigma^2$$

$$\Rightarrow \ f_\xi(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\widetilde{\mu})^2}{2\sigma^2}} dx}_{=1} = e^{it\mu} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

N(0,1) , т.е. $\mu = 0, \sigma^2 = 1$

$\mathrm{p}_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Если $\quad \xi_1, ..., \xi_n \quad$ н.с.в. $\quad$ и $\xi_k \in \mathbb{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$, то

$\mathrm{a}_1\xi_1 + ... + a_n\xi_n + b \in \mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$, где $\quad \mu = a_1\mu_1 + ... + a_n\mu_n + b$

$\sigma^2 = a_1\sigma_1^2 + ... + a_n\sigma_n^2$

$$f_{a_1\xi_1+\ldots+a_n\xi_n+b}(t) = e^{itb} f_{a_1\xi_1+\ldots+a_n\xi_n}(t) = e^{itb}\prod_{k=1}^{n} f_{a_k\xi_k}(t) = e^{itb}\prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(a_k t) =$$

$$= e^{itb}\prod_{k=1}^{n} e^{it\mu_k a_k}\cdot e^{\frac{-i(a_k t^2)\sigma_k^2}{2}}\cdot e^{it\mu}\cdot e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Теорема 16 (ЦПТ) *Пусть* $\xi_1, ..., \xi_n$ *н.с.в.* , *случайно распределены,* $M_{\xi_k} = \mu, \quad D_{\xi_k} = \sigma^2$.

Тогда $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \nu^*$, *где* ν^* *имеет распределение* $\mathbb{N}(0,1)$

Неверно говорить, что $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}}$ сходится к $\mathbb{N}(0,1)$

Верно либо $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}}$ сходится к с.в. $\nu^*, y\nu^*$ распределение $\mathbb{N}(0,1)$

Либо распределение $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}}$ сходится к $\mathbb{N}(0,1)$Пусть $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$

$\Rightarrow \; MS_n = n\mu c, DS_n = n\sigma^2$

$\Rightarrow \; S_n^* = \dfrac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}$:

$\mathrm{MS}_n^* = 0 = M\nu^*, DS_n^* = 1 = D\nu^*$

$$\mathrm{S}_n^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

Найдем $f_n^*(t) = f_{S_n^*}(t)$ и покажем $f_n^*(t) \to e^{\frac{-t^2}{2}} = f_{\nu^*}(t)$

Пусть $\mathrm{f(t)} = \mathrm{f}_{\frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}}(t)$

$\mathrm{f}(0) = 1$

$\mathrm{M}\, \dfrac{\xi_k - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = 0 \Rightarrow \; f'(0) = 0$

D $\dfrac{\xi_k-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} = M(\dfrac{\xi_k-\mu}{\sqrt{\sigma^2}})^2 = 1 \Rightarrow \ f''(0) = i^2 = -1$

f(t) $= 1 + 0{\cdot}t + \frac{t^2}{2}(-1) + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

S$_n^* = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\xi_k-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}$

$\Rightarrow \ f_{S_n^*}(t) = \prod_{k=1}^n f(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \left(1-\dfrac{t^2}{2n}+o(\dfrac{t^2}{n})\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t = fix$

$\Rightarrow \ S_n^* \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} \nu^*$

Сходимость $F_{S_n^*}(x) \to F_{\nu^*}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

на любом интервале $(a,b); a, b < \infty$ равномерная по x

$\forall\epsilon > 0 \ \exists\, N = N(\epsilon) : \forall x \in (a,b) \qquad |\mathsf{P}(S_n^* < x) - F_{\nu^*}(x)| < \epsilon$, если $n > N(\epsilon)$

$\xi_n =$ количество успехов в сх. Бернулли

n $\to \infty, \quad p = fix, \quad k \to \infty, \quad \left|\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\right| \leq C$

$\Rightarrow \ \mathsf{P}(\xi_n \leq k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{k-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$\xi_n = \nu_1 + \cdots + \nu_n$, где $\nu_1, \ldots, \nu_n -$ н.с.в.

$$P(\nu_k = 0) = q, P(\nu_k = 1) = p, M\nu_k = p, D\nu_k = pq$$

$\Rightarrow \ \dfrac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\nu_k - p)}{\sqrt{npq}} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} \nu^* \in \mathbb{N}(0,1)$, т.е. $P(\frac{\xi_n-np}{\sqrt{npq}} < x) \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

13 Лекция №13. Основы теории возможностей

(ЦПТ) Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ н.с.в. , случайно распределены, $M_{\xi_k} = \mu$, $\mathrm{D}_{\xi_k} = \sigma^2$

Тогда $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \nu^*$, где ν^* **имеет распределение** $\mathbb{N}(0,1)$

$$F_n(x) \overset{def}{=} P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right) \underset{n\to\infty}{\to} P(\nu < x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \overset{def}{=} \Phi(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R};$ Если $|x| \le C$, то $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x)$ равномерно

$(\forall \epsilon \;\; \exists\, N(\epsilon, 0) : \forall x, |x| \le C \forall n > N \, |F_n(x) - \Phi(x)| < \epsilon)$

Пусть $\xi_n =$ число успехов в n испыт.

$\Rightarrow \; \xi_n = \nu_1 + \cdots + \nu_n$, где $\nu_1, \ldots, \nu_n -$ н.с.в.

$\Rightarrow \; P(\nu_k = 0) = q, P(\nu_k = 1) = p, M\nu_k = p, D\nu_k = pq$

$\Rightarrow \; F_n(x) = P\left(\dfrac{\xi_n - n\mu}{\sqrt{npq}} < x\right) \underset{n\to\infty}{\to} P(\nu < x)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{k}_1 \le \xi_n \le k_2) = P\left(\underbrace{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}}_{=x_1 = x_1(n)} \le \frac{\xi_n - n\mu}{\sqrt{npq}} \le \underbrace{\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}}_{=x_2 = x_2(n)}\right)$$

Если $\mathrm{k}_1 = k_1(n), k_2 = k_2(n) : |x_1(n)| \le C, \quad |x_2(n)| \le C \quad \forall n = 1, 2, ...$

$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N(\epsilon, c) : \quad \forall\, n > N, \quad \forall\, x_{1,2} |x_{1,2}| \le C$

$$\left| P(x_1 \le \tfrac{-np}{\sqrt{npq}} \le x_2) - \int\limits_{x_1}^{x_2} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| < \epsilon$$

В частности, для $x_1 = x_1(n), \quad x_2 = x_2(n)$

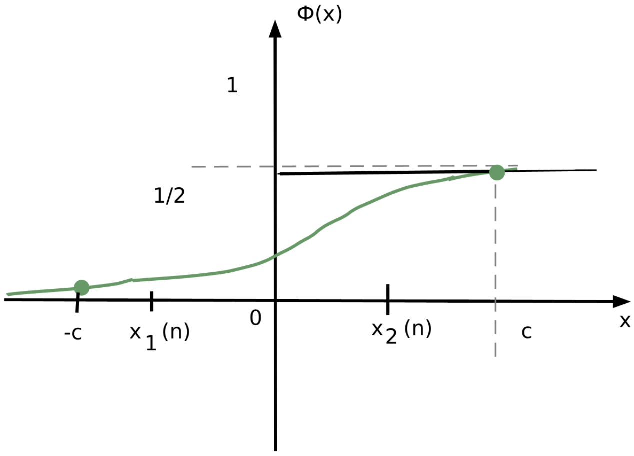


Рис. 13.1: $\Phi(x)$

$$\int\limits_{x_1(n)}^{x_2(n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x_2(n)) - \Phi(x_1(n)) \leq M$$

$$\Rightarrow \left| \frac{P(k_1 \leq \xi_n \leq k_2)}{\Phi(x_2) - \Phi(x_1)} - 1 \right| \underset{n\to\infty}{\to} P(k_1 \leq \xi_n \leq k_2) \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$P(\xi_n = k) = P(k-1 < \xi_n \leq k) \approx \int\limits_{\frac{k-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k-1-np}{\sqrt{npq}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_*^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{npq}}}_{\triangle z} |_{\substack{n\to\infty \\ z_n^*}} \longrightarrow \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Rightarrow P(\xi_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{k-np}{\sqrt{npq}})^2}, \quad np = M\xi_n$$

Определение 13.1 *Усиленный ЗБЧ (Бернулли)*

Если $\dfrac{\xi_n}{n}$ *— частота успеха, то в n испыт. Бернулли* $\dfrac{\xi_n}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} p$

В каждом испытании P(успех)=p

Если в k-ом испыт. $P() = p$, то для ν_k - чила успехов в k-ом испыт.:

$M\nu_k = p_k, D\nu_k = p_k q_k \leq \frac{1}{4} \quad \forall\ p_k \in (0,1), p_k q_k = p_k(1-p_k)$

$$\Rightarrow\ \xi_n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n,\ \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - p_k) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} 0$$

$\Rightarrow\ \frac{1}{n}\xi_n \approx \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$

А произойдет скорее, чем В, $P(A) \geq P(B)$

$\boxed{1}$ Событию $A \subset \Omega$ сопоставляется число $Ps(A) : 0 \leq Ps(A) \leq 1$ — возможность события А

$\boxed{2}$ Содержательный смысл имеют только $Ps(A) = 0$ и $Ps(A) = 1$

Если $\widetilde{Ps}(\cdot)$ — какая-то другая возможность:

Ps(A) $<$ Ps(B) $\Leftrightarrow \widetilde{Ps}(A) < \widetilde{Ps}(B)$

Ps(A) $=$ Ps(B) $\Leftrightarrow \widetilde{Ps}(A) = \widetilde{Ps}(B) \quad \forall\ A, B$, то $Ps()$ и $\widetilde{Ps}()$ эквивалентны

(т.е. все выводы не зависят от того, что взято: $Ps()$ или $\widetilde{Ps}()$)

Ps() эквивалентна $\widetilde{Ps}()$ если $\exists\ \gamma() : [0,1] \to [0,1]$ — строго возрастающая $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1$

$\widetilde{Ps}(A) = \gamma(Ps(A))$

$\boxed{3}$ Пусть на Ω задано вероятностное пространство (Ω, F, P)

Ps() будем согласовывать с P():

Если P(A)$\leq P(B)$, то $Ps(A) \leq Ps(B)$

Если P(A) $=$ P(B) , то Ps(A) $=$ Ps(B)

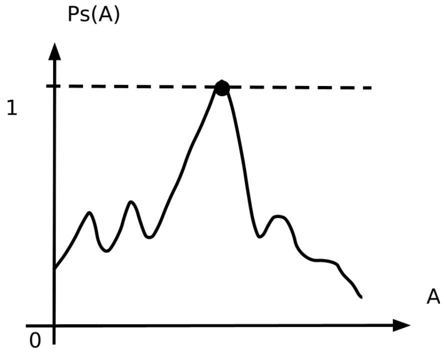


Рис. 13.2: Ps(A)

(возможно P(A) $<$ P(B), но Ps(A) $=$ Ps(B))

P() $\longleftrightarrow Ps()$

Пусть на F заданы $P()$ и $\widetilde{P}()$:

Если P(A)$\leq P(B)$, то $\widetilde{P}(A) = \widetilde{P}(B)$

{ P() } $\longleftrightarrow \{Ps()\}$

P и $\widetilde{P}$ разные, $Ps()$ и $\widetilde{Ps}()$ эквивалентны

Операции $\bigoplus$ и $\bigotimes$

сумма — $Ps(A) \bigoplus Ps(B)$

произведение — $Ps(A) \bigotimes Ps(B)$

$$\text{Если} \quad P(B) = 1, \text{ то} \quad P(A \cup B) \geq P(B) = 1,$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Если P(B) $=$ 0, то P(A$\cap B) \leq P(B) = 0$

P(A$\cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$

Потребуем: a$=$ b $\bigoplus a, a \bigotimes b = b \bigotimes a$

a $\bigoplus 1 = 1, \quad a \bigotimes 1 = a, \quad a \bigoplus 0 = a, \quad a \bigotimes 0 = 0 \quad \forall\, a, b \subset [0, 1]$

a$\bigoplus b = max(a, b)$

a$\bigotimes b = min(a, b)$

Если наложить доп. требования на $\bigoplus, \bigotimes$ то можно получить, что $\bigoplus = max, \bigotimes = min$

Пусть $\Omega = \{\omega_1, .., \omega_n\}$

$1 \geq P(\omega_1) \geq P(\omega_2) \geq ... \geq P(\omega_n) \geq 0 \qquad (Y)$

$(\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1)$

$\forall\ A \subset \Omega \quad P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\omega_i)$

Ps(A) $= \bigoplus_{i:\omega_i \in A} Ps(\omega_0) = Ps(\omega_i)_{i:\omega_i \in A}, \quad Ps(\Omega) \stackrel{def}{=} 1, \quad Ps(\oslash) \stackrel{def}{=} 0$

$1 \geq Ps(\omega_1) \geq Ps(\omega_2) \geq \cdots \geq Ps(\omega_n) \geq 0 \qquad (Y^*)$

$1 =$ Ps$(\Omega) = \max_{1 \leq i \leq n} Ps(\omega_i) = Ps(\omega_1)$

Ps(A$\cup B) = \max_{i:\omega_i \in A \cup B} Ps(\omega_i) = max\{\max_{i:\omega_i \in A} Ps(\omega_i), \max_{i:\omega_i \in B} Ps(\omega_i)\} =$

$=$ Ps(A) $\bigoplus Ps(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ если $A \cap B \neq 0$

Ps(A$\cap B) = \max_{\substack{i:\omega_i \in A \\ i:\omega_i \in B}} Ps(\omega_i) \leq \begin{cases} \max_{i:\omega_i \in A} Ps(\omega_i) = Ps(A) \\ \max_{i:\omega_i \in B} Ps(\omega_i) = Ps(B) \end{cases}$

$\Rightarrow \ Ps(A \cap B) \leq min(Ps(A), Ps(B)) = Ps(A) \bigotimes Ps(B)$

Ср.с $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, если A,B - независимы

14 Лекция №14. Согласование возможности

$(\Omega, F, P), \Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$

$$1 \geq Ps(\omega_1) \geq Ps(\omega_2) \geq \dots \geq Ps(\omega_n) \geq 0 \qquad (Y^*)$$

$\forall\ A \subset \Omega Ps(A)$ — возможность события

$0 \leq Ps(A) \leq 1, Ps(\Omega) \stackrel{def}{=} 1, Ps(\oslash) \stackrel{def}{=} 0 Ps(A) \bigoplus Ps(B) =$

$$= max(Ps(A), Ps(B))$$

$$Ps(A) \bigotimes Ps(B) = min(Ps(A), Ps(B))$$

Ps() согласована с P():

$$1 \geq Ps(\omega_1) \geq Ps(\omega_2) \geq \dots \geq Ps(\omega_n) \geq 0$$

$$Ps(A) = \bigoplus_{i:\omega_i \in A} Ps(\omega_i) = \max_{i:\omega_i \in A} Ps(\omega_i)$$

Ps(A$\cup B) = Ps(A)(B) \quad \forall\ A, B$

$$1 = Ps(\Omega) = Ps(A \cup \overline{A}) = Ps(A) \bigoplus Ps(\overline{A}) = max(Ps(A), Ps(\overline{A}))$$

$\Rightarrow$ Если $\quad Ps(A) \neq 1$, то $\quad Ps(\overline{A}) = 1$

$\Rightarrow$ Если $\quad Ps(A) = 1$, то $\quad Ps(\overline{A}) = \quad \forall$

Необходимость Ns($\cdot$)

Ns(A) $\overline{\bigoplus} Ns(B) = min(Ns(A), Ns(B))$

$0 \leq Ns(\overline{\omega_1}) \leq Ns(\overline{\omega_2}) \leq \dots \leq Ns(\overline{\omega_n}) \leq 1$, где $\quad \overline{\omega_1} = \Omega \backslash \{\omega_i\}$

Ns(A) $\overline{\bigoplus}_{i:\omega_i \notin A} Ns(\overline{\omega_i}) = \min_{i:\omega_i \in \overline{A}} Ns(\overline{\omega_i})$

Ns(A) = невозможность того, что A не произойдет

$\text{Ns}(\Omega) = 1, Ns(\oslash) = 0$

P() и Ps() согласованы, если:

$$1 \geq Ps(\omega_1) \geq Ps(\omega_2) \geq \dots \geq Ps(\omega_n) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$1 \geq P(\omega_1) \geq P(\omega_2) \geq \dots \geq P(\omega_n) \geq 0$$

P() и Ps() максимально согласованы, если:

$$\forall\ A, B \qquad P(A) \leq P(B) \Longleftrightarrow Ps(A) \leq Ps(B)$$

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

$\mathbb{F}_{max} = 2^{\Omega} =$ все подмножества Ω

$2^{\Omega} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{A}_j$, где

$\mathbb{A}_1 = \{A \subset \Omega : \omega_1 \in A\}$

$\mathbb{A}_j = \{A \subset \Omega : \omega_{j'} \in A, \omega_j \notin A, \text{Если} \quad j < j', j = 2, \dots, n\}$

$\mathbb{A}_n = \{\{\omega_n\}\}$

Если $\quad A_j \in \mathbb{A}_j$, то

$\text{A}_j = \{\omega_j,\ \underbrace{\omega_i, \omega_k, ...}_{i,k..>j}\}$

$$\Rightarrow\ Ps(A_j) = \max_{k:\ \omega_k \in A_j} Ps(\omega_k) = Ps(\omega_j)$$

$\mathbb{A}_j = \{A \subset \Omega : Ps(A_j) = Ps(\omega_j)\}$

$\text{Ps}(\omega_j) \geq Ps(\omega_{j+1})$

$\Rightarrow \quad \forall\ A_j \in \mathbb{A}_j, \quad \forall\ A_{j+1} \in \mathbb{A}_{j+1}$

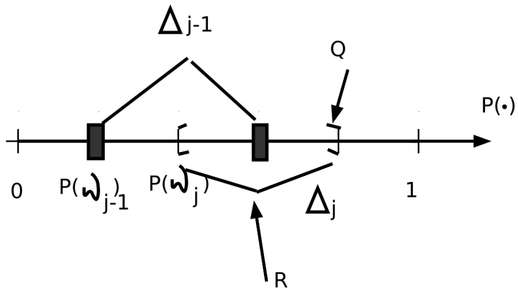


Рис. 14.1: P()

$\mathrm{Ps}(\mathrm{A}_j) \geq Ps(\mathbb{A}_{j+1})$

Верно ли, что $P(A_j) \geq P(A_{j+1})$ или м.б. $P(A_j) \leq P(A_{j+1})$

$\{P(A_j), A_j \in \mathbb{A}_j\}$

$\mathrm{A}_j = \{A \subset \Omega : \omega_j \in A; \omega_1, \ldots, \omega_{j-1} \notin A\}$

$\mathrm{P}(\omega_j) = P(A_j) \leq P(\{\omega_j, \omega_{j+1}, \omega_n\}) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{j-1} P(\omega_j)$

$\mathrm{A}_1 : P(\omega_1) \leq P(A_1) \leq P(\Omega)$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}_j)?P(A_{j+1})$

$\mathrm{P}(\omega_j) \geq P(\omega_{j+1})$

$$Q = \sum_{k=j}^{n} P(\omega_k) = 1 - \sum_{k=1}^{j-1} P(\omega_k)$$

$$R = \sum_{k=j+1}^{n} P(\omega_k) = 1 - \sum_{k=1}^{j} P(\omega_k)$$

Если $\quad \triangle_j \cap \triangle_{j+1} = \oslash$, то

$\forall\ A_{j+1} \in \mathbb{A}_{j+1} \quad P(A_{j+1}) < P(A_j) \quad \forall\ A_j \in \mathbb{A}_j$

$\exists\ A_{j+1} \in \mathbb{A}_{j+1}; \ \ \exists\ A_j \in \mathbb{A}_j$

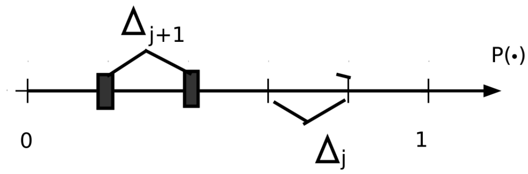


Рис. 14.2: P()

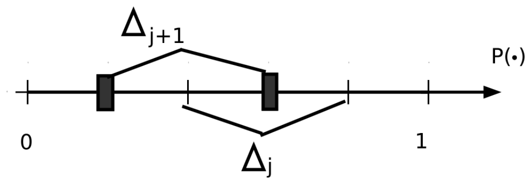


Рис. 14.3: P()

$$P(A_{j+1}) \geq P(A_j) \Rightarrow \; Ps(\omega_{j+1}) = Ps(A_{j+1}) \geq Ps(A_j) = Ps(\omega_j)$$

$\mathrm{Ps}(\mathrm{A}_j) = Ps(\omega_j)$

$\mathrm{Ps}(\ \mathrm{A}_{j+1}) = Ps(\omega_{j+1)}$

$\mathrm{Ps}(\omega_j) \geq Ps(\omega_{j+1})$

$\mathrm{P(A)}\geq P(B) \Leftrightarrow Ps(A) \geq Ps(B)$

$\Rightarrow \; Ps(\omega_{j+1}) = Ps(\omega_j)$

при этом, м.б., что $P(\omega_{j+1}) < P(\omega_j)$

Если $\quad \triangle_j \cap \triangle_{j+1} \neq \oslash$

$$\Leftrightarrow 1 - \sum_{k=j}^{n} P(\omega_k) \geq P(\omega_j) \Leftrightarrow 2P(\omega_j) + P(\omega_{j+1}) + \cdots + P(\omega_n) \leq 1$$

Если $\quad \triangle_j \cap \triangle_{j+1} = \oslash$, то

$\mathrm{Ps}(\omega_j) > Ps(\omega_{j+1}) \quad$ т.к. $\quad \forall\ A_j \in \mathbb{A}_j \quad \forall\ A_{j+1} \in A_j$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}_j) > P(A_{j+1})$

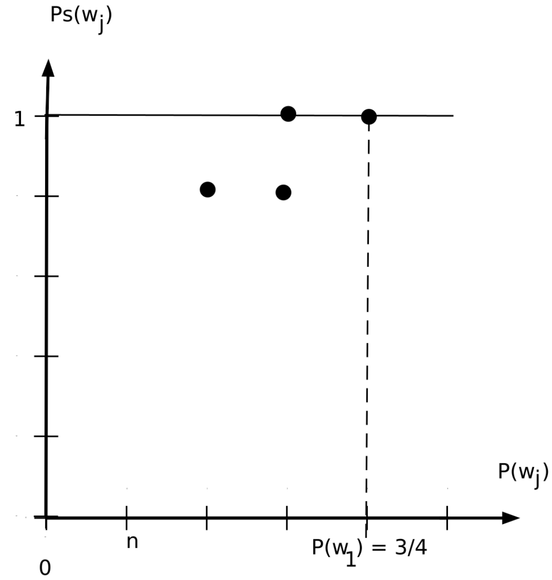


Рис. 14.4: P(ω_j)

j = 1, $\quad \triangle_j \cap \triangle_{j+1} = \oslash \Leftrightarrow p_j > 1 - p_j \Leftrightarrow p_j > \frac{1}{2}$

p$_1 > \frac{1}{2}, \quad p_2 > 1 - (p_1 + p_2)$

n =2 , т.е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$

A$_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$

A$_1 = \{\{\omega_2\}\}$

Если p$_1 > 1 - p_1 = p_2$, то $Ps(\omega_1) = 1, \quad Ps(\omega_2) < Ps(\omega_1)$

p$_2 > 1 - (p_1 + p_2) = 0($, т.е. $p_2 \neq 0)$

n=3, P$(\omega_i) = p_i, i = 1, 2, 3; \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_1 \geq p_2 \geq p_3$

$$\begin{cases} p_1 > 1 - p_1 \\ p_2 > 1 - (p_1 + p_2) \\ p_3 > 1 - (p_1 + p_2 + p_3) > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; 1 = Ps(\omega - 1) > Ps(\omega_2) > Ps(\omega_3)$$

$\boxed{p_1 \geq p_2 \geq p_3}$

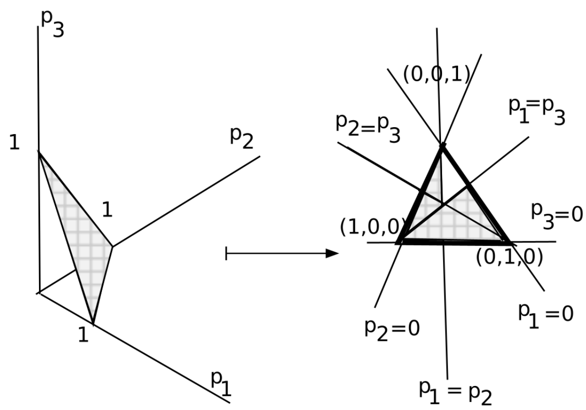


Рис. 14.5: p_1, p_2, p_3

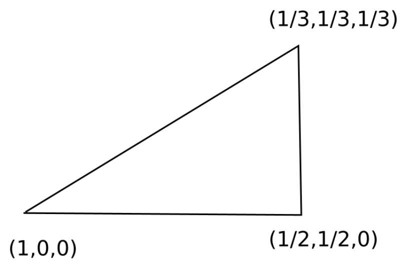


Рис. 14.6: p_1, p_2, p_3

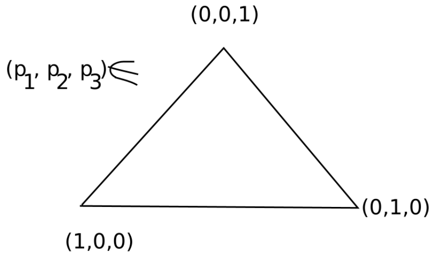


Рис. 14.7: p_1, p_2, p_3

$\text{p}_1 \geq p_2 \geq p_3; p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_{1,2,3} \geq 0$

$$\begin{cases} p_1 > 1 - p_1 \\ p_2 > 1 - (p_1 + p_2) = p_3 \\ p_3 > 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0 \end{cases}$$

$\text{n} = 3$

$\text{p}_1 = P(\omega_1), p_2 = P(\omega_2), p_3 = P(\omega_3)$

Повторяем эксперимент, считаем частоты $\nu_i^{(n)} = \frac{n(\omega_i)}{n}, i = 1, 2, 3; n = 1, 2, ...$

$0 \leq \nu_i^{(n)} \leq 1, \sum_{i=1}^{3} \nu_i^{(n)} = 1$

$\nu_i^{(n)} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} p_i$

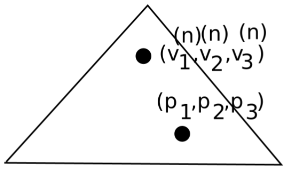
$\text{P}\{\omega : \left|\nu_i^{(n)} - p_i\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0\} = 1$

$\omega \in \{\left|\nu_i^{(n)} - p_i\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0\} \Leftrightarrow \quad \forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ N :$

$\forall\ n \geq N \left|\nu_i^{(n)} - p_i\right| < \epsilon$

$\Rightarrow\ \omega \in \{\bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n=N}^{\infty}\}\{\omega : \left|\nu_i^{(n)} - p_i\right| < \epsilon\} \Rightarrow\ P\{\} = 1$

$\Rightarrow \quad \forall\ \epsilon > 0 P\{\bigcup_{N} \bigcap_{n\geq N}^{\infty} \{\omega : \left|\nu_i^{(n)} - p_i\right| < \epsilon\}\} = 1$, т.е.



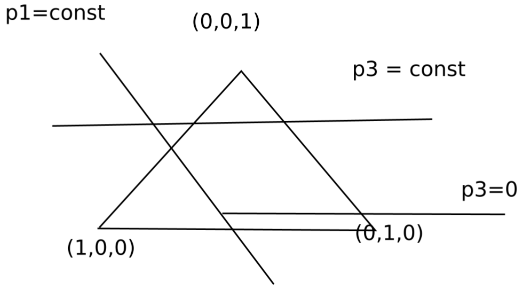


Рис. 14.8: p_1, p_2, p_3

$$\mathrm{P}\{\ \omega|\ \ \exists\ N: \quad \forall\ n > N \left|\nu_i^{(n)} - p_i\right| < \epsilon\} = 1$$

$p_i = P(\omega_i)$ зависят от номера испытания, т.е. $P(\omega_i) = p_i^{(k)}$ в k-ом испытании

$$\left|\nu_i^{(n)} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_i^{(k)}\right| \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\rightarrow}} 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ