



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ТОПОЛОГИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИЛЛИАРДОВ

ВЕДЮШКИНА В.В.  
КИБКАЛО В.А.

—  
МЕХМАТ МГУ

—  
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

## Содержание

<b>Лекция 1</b>	<b>2</b>
Основные определения, фазовое пространство . . . . .	2
Интегрируемые бильярды, изоэнергитическая поверхность. . . . .	4
Слоения изоэнергитической поверхности. . . . .	5
<b>Лекция 2</b>	<b>7</b>
Способы описания движения . . . . .	7
Бильярд в кольце. . . . .	8
Прямой угол . . . . .	9
Два бильярда с углами . . . . .	10
Бильярд в прямоугольнике . . . . .	10
Бильярд в половине круга . . . . .	12
<b>Лекция 3</b>	<b>14</b>
Решение домашнего задания . . . . .	14
Обобщение бильярда в прямоугольнике . . . . .	15
Угол на границе не $\frac{\pi}{2}$ и не $\frac{3\pi}{2}$ . . . . .	17
Изоэнергитическое многообразие $Q^3$ . . . . .	20
Расслоение Хопфа . . . . .	20
<b>Лекция 4</b>	<b>21</b>
Решение домашнего задания . . . . .	21
<b>Лекция 5</b>	<b>27</b>
Решение домашнего задания . . . . .	27
<b>Лекция 6</b>	<b>32</b>
Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе . . . . .	32
Топология особого слоя для бильярда в эллипсе . . . . .	34
<b>Лекция 7</b>	<b>40</b>
Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе . . . . .	40
<b>Лекция 8</b>	<b>46</b>
Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе . . . . .	46
<b>Лекция 9</b>	<b>53</b>
Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе . . . . .	53
<b>Лекция 10</b>	<b>57</b>
Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе . . . . .	57

# Лекция 1

## Вводная лекция: что такое бильярд

Рассмотрим область на плоскости, которая ограничена гладкой регулярной кривой.

**Замечание 1.** *Гладкой кривой называют бесконечно дифференцируемую относительно параметра кривую. Регулярной кривой называют кривую, вектор скорости которой определен для любого значения параметра и ни в одной точке не обращается в нулевой вектор.*

Пусть такая кривая ограничивает некоторую область на плоскости.

Рассмотрим в этой области следующую динамическую систему: во внутренности области без трения перемещается материальная точка. При ударах о стенки точка испытывает абсолютно упругий удар, то есть отражается от границы так, чтобы угол падения был равен углу отражения. После отражения точка продолжает движение без потери энергии до следующего соударения с границей области (см. рис. 1).

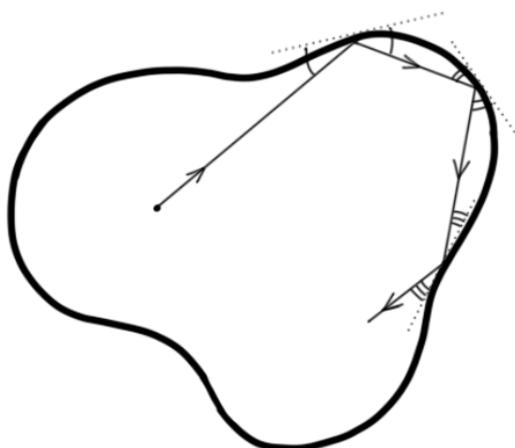


Рис. 1. Иллюстрирующий пример для динамической задачи.

Чтобы описать положение системы в  $\mathbb{R}^2$  нам нужны четыре числа: два числа нам зафиксируют положение материальной точки (например, координаты  $(x, y)$  в декартовой системе координат) и еще два числа определяют компоненты вектора скорости  $(v_1, v_2)$ . Поэтому можно сказать, что данная динамическая система определена на так называемом фазовом пространстве (пространстве положений данной системы)  $M_4$  с системой координат  $(x, y, v_1, v_2)$ . Положение системы в  $M_4$  фиксируется соответствующей четверкой чисел.

В силу бильярдного закона отражения на пространстве  $M_4$  некоторые точки, которые могут задаваться разной четверкой чисел, тем не менее, задают одинаковое положение системы. Запишем так называемый бильярдный закон (см. рис. 2).

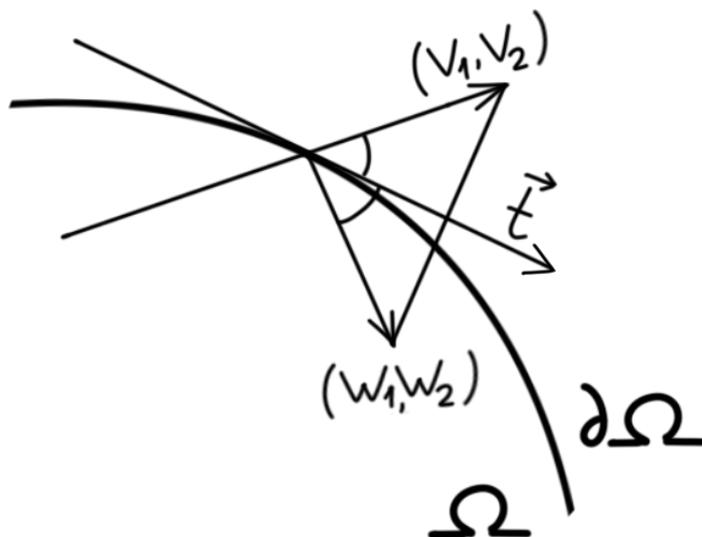


Рис. 2. Бильярдный закон на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ .

Пусть точка  $x_0 = (x, y)$  находится на границе области  $\Omega$ . В точке  $x_0$  определен (ненулевой) касательный вектор  $t$  к границе  $\partial\Omega$  в точке  $x_0$ , а именно  $t \in T_{x_0}\partial\Omega$ . В силу отражения нам необходимо отождествить две точки в фазовом пространстве  $M_4$ , соответствующие векторам  $(v_1, v_2)$  (падающий вектор скорости) и  $(w_1, w_2)$  (отраженный вектор скорости). Для отождествления падающего и отраженного векторов потребуем, чтобы разность векторов  $(v_1, v_2) - (w_1, w_2)$  была перпендикулярна вектору  $t$ . Также наложим условие равенства модулей этих векторов:  $v_1^2 + v_2^2 = w_1^2 + w_2^2$ .

Таким образом, мы отождествляем точки на фазовом пространстве динамической системы  $(x_1, y_1, v_1, v_2) \sim (x_2, y_2, w_1, w_2)$ , если

- $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = (x, y) = x_0 \in \partial\Omega$
- $v_1^2 + v_2^2 = w_1^2 + w_2^2$
- $(v_1 - w_1)t_1 + (v_2 - w_2)t_2 = 0$

Заметим, что траектория бильярда не изменится при пропорциональном изменении компонент вектора скорости  $(v_1, v_2)$ : материальная точка будет следовать по тому же пути, но в фазовом пространстве  $M^4$  ей будут соответствовать уже другие точки. Поэтому при естественном условии  $v_1^2 + v_2^2 > 0$  фазовое пространство  $M^4$  может быть расслоено на одинаковые поверхности, которые определяются только длиной вектора скорости. На каждой конкретной поверхности-слое длина вектора скорости будет одна и та же, каждой траектории материальной точки в бильярдной области соответствует по одной траектории на каждой поверхности-слое. Поэтому естественным будет рассматривать одну фиксированную длину вектора скорости  $(v_1, v_2)$ .

Определим изоэнергетическую поверхность  $Q_h^3 = \{(x, y, v_1, v_2) \in M^4 : v_1^2 + v_2^2 = h^2\}$ , без ограничения общности будем считать  $h = 1$ . Поверхность  $Q_1^3$  является трехмерной поверхностью.

**Замечание 2.** Топологическое многообразие размерности  $n$  — это хаусдорфово топологическое пространство со отсчетной базой, в котором для каждой точки существует окрестность, гомеоморфная открытому  $n$ -мерному шару  $D_n$ .

Нас будут интересовать именно трехмерные многообразия. Представить их довольно сложно, но переходя к меньшим размерностям можем рассмотреть два ключевых примера двумерных многообразий. Первым примером служит двумерная сфера  $S^2$ , которая получается как двумерный диск  $D^2$ , граница которого стягивается в одну точку. Вторым примером служит двумерный тор  $T^2 = S^1 \times S^1$ .

Трехмерную сферу  $S^3$  и трехмерный тор  $T^3$  можно интерпретировать аналогичным образом.

Обратимся к рис. 1 и определению многообразия  $Q_h^3$ . Напомним, что одним из наших условий было, чтобы вдоль траектории бильярда длина вектора скорости сохранялась.

Если для бильярда существует функционально независимая с  $H = v_1^2 + v_2^2$  функция  $F$  такая, которая также будет сохраняться вдоль траекторий бильярда, то бильярд будем называть интегрируемым.

**Замечание 3.** Функции  $H$  и  $F$  называют функционально независимыми, если их дифференциалы  $dH$ ,  $dF$  линейно независимы почти всюду.

**Пример 1.** Пусть область  $\Omega$  является двумерным диском единичного радиуса,  $\partial\Omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$ . Возьмем точку во внутренности диска и проведем некоторую траекторию, которая отражается внутрь от границы  $\partial\Omega$  (см. рис. 3). Точка между точками отражения будет двигаться вдоль хорд окружности.

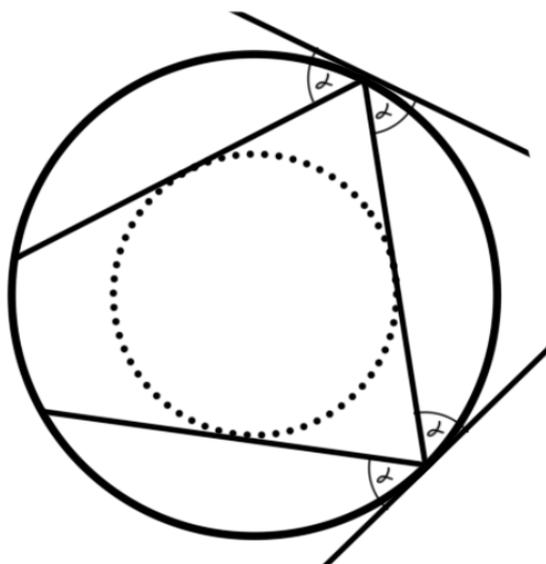


Рис. 3. Интегрируемый бильярд в круге и пример траектории. Пунктиром изображена каустика.

Отмеченные на рис. 3 углы падения и отражения везде совпадают. Действительно, если звенья касательных продолжить до некоторой точки их пересечения, получим треугольник: два его ребра являются касательными к окружности, и одно ребро соответствует звену бильярдной траектории. Поскольку проведенные из одной точки касательные равны по длине, то треугольник будет равнобедренным. Следовательно, у основания треугольника (которое совпадает с звеном траектории) углы также совпадают.

Таким образом, углы  $\alpha$  падения и отражения являются интегралом.

**Замечание 4.** Также в качестве интеграла можно взять длины хорд, вдоль которых перемещается материальная точка. Интегралом также может служить расстояние от центра диска до середины хорды. Последнее является радиусом окружности, которой касается каждое звено траектории. Кривые с таким называют каустиками. Но между собой эти величины уже будут функционально зависимы.

Опишем подробнее, как будем откладывать угол  $\alpha$ . Зафиксируем направление обхода на границе: без ограничения общности можем сказать, что на граничной окружности задано направление по часовой стрелке. В каждой точке граничной окружности есть касательная прямая к границе. На этой прямой зафиксируем направление, согласованное с направлением на границе области. Угол  $\alpha$  определяется как угол между вектором скорости  $(v_1, v_2)$  и вектором вдоль выбранного нами направления на касательной прямой. Определенный таким образом  $\alpha$  принимает значения из отрезка  $[0, \pi]$ .

Фазовое пространство  $M^4$  расслаивается на поверхности уровня  $H = v_1^2 + v_2^2$ . Тогда исключая нулевое сечение  $H = 0$  получим гомеоморфизм

$$M^4 \setminus \{H = 0\} \simeq Q_1^3 \times [0, \text{inf}).$$

Напомним, что  $Q_h^3$  — это изоэнергитическая поверхность. Рассмотрим на какие слои значения  $\alpha$  расслаивают нашу изоэнергитическую поверхность  $Q_1^3$ . Эквивалентная задача — рассмотрение линий уровня  $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$  в  $Q^3$ . Здесь и далее для краткости пишем  $Q^3$ , подразумевая  $Q_1^3$ .

Условно можно выделить пять случаев:

- $\alpha = \pi$
- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
- $\alpha = \frac{\pi}{2}$
- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
- $\alpha = 0$

При  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$  траектория бильярда движется вдоль граничной окружности по часовой стрелке или против нее, соответственно. В этом случае точки траектории замечают одномерную окружность  $S^1$ .

Рассмотрим  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Звенья любой траектории на конкретном уровне  $\alpha = \alpha_0$  образуют угол  $\alpha_0$  с направленным касательным вектором. Более того, каждое звено траектории будет касаться каустики по часовой стрелке. Получается, что на уровне  $\alpha = \alpha_0$  точки бильярдной траектории замечают область в виде кольца, ограниченную каустической и граничной окружностями (см. рис. 3).

Для произвольной точки  $(x, y)$  во внутренности этого кольца можно определить два вектора скорости  $(v_1, v_2)$  таких, что точка  $(x, y, v_1, v_2) \in Q^3$  принадлежит уровню  $\alpha = \alpha_0$ . Эти два вектора скорости обозначим как  $a$  и  $b$  как изображено на рис. 4.

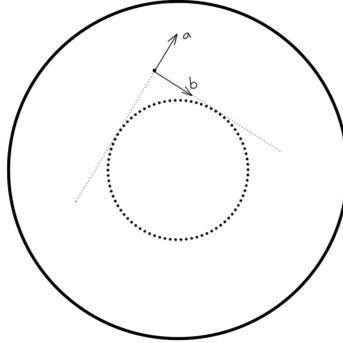


Рис. 4. Вектор  $a$  направлен по часовой стрелке от каустики к границе, а вектор  $b$  – от границы к каустике.

**Замечание 5.** векторы  $-a$  и  $-b$  также задают касательные к этой же каустике, но соответствуют уровню  $\alpha = -\alpha_0$ , поэтому в соображениях они не участвуют.

Каждая точка с поверхности  $Q^3 \cap \{\alpha = \alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})\}$  проецируется в точку кольца, и из этой точки «торчит» либо вектор  $a$ , либо вектор  $b$ . Поэтому наш слой можно себе представлять как два кольца, одно из которых обозначим  $a$ , а другое обозначим  $b$ .

Между кольцами  $a$  и  $b$  есть отождествление на соответствующих границах. На внешней границе отождествление следует из бильярдного закона: падающий на границу вектор и отраженный от нее отождествляются, поскольку имеют один и тот же угол  $\alpha$  с касательной. На внутренней границе колец векторы  $a$  и  $b$  отождествляются, поскольку к окружности можно провести только одну касательную, вследствие чего совпадают векторы  $a$  и  $b$ . Таким образом, слой может быть получен (см. рис. 5) из двух колец, которые склеиваются вдоль граничных окружностей, результатом склейки будет двумерный тор.

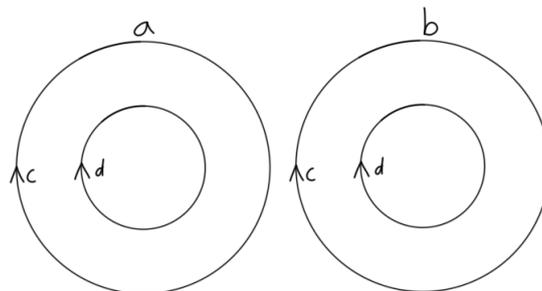


Рис. 5. Кольца  $a$  и  $b$  с отмеченными на границах склейками  $c$  и  $d$ .

Аналогичные соображения справедливы для случая  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

Остается рассмотреть случай  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , при котором векторы скорости направлены к центру диска или от него. Повторим вышеизложенные соображения и каждой внутренней точке диска сопоставим по два вектора: вектор  $a$  направлен из центра диска, а вектор  $b$  — к центру. При этом в центре диска можно определить сколько угодно векторов, направленных к центру или от него. Векторы можно изобразить как на рис. 6.

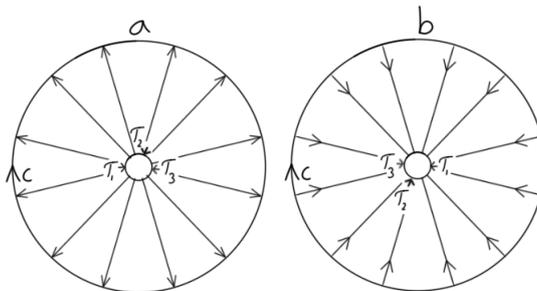


Рис. 6. Кольца  $a$  и  $b$  с отмеченными на границах склейками  $c$  и  $d$  для  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**Замечание 6.** На рис. 6 выглядит, будто мы выкололи центральную точку диска, но это не так: внутренняя окружность соответствует центру диска, но чтобы различать различные направления векторов, мы нарисовали окружность.

Полученные два кольца  $a$  и  $b$  мы снова должны склеить. Отождествление на внешней границе происходит так же как на рис. 5. Чтобы описать отождествление на внутренней границе, рассмотрим произвольную траекторию, проходящую через центр диска, пусть она двигается влево к центру. Тогда после прохождения через центр диска точка должна продолжить движение также влево, но теперь уже от центра. Получается, что траектория идет по кольцу  $b$ , приходит в точку  $\tau_1$  и должна перейти на кольцо  $a$  в точке, соответствующей  $\tau_1$ . Таким образом, отождествление на внутренней границе колец происходит с «проворачиванием» окружностей: точка  $\tau_1$  на диске  $a$  склеивается с точкой  $\tau_1$  на диске  $b$ , аналогично для точек  $\tau_2$  и  $\tau_3$  (см. рис. 6).

**Замечание 7.** Важно не путать проворачивание с центральной симметрией: если тор разрезать и склеить с проворачиванием, результат все еще будет тором. Если аналогично полученный цилиндр склеивать с отождествлением центрально симметричных точек, то результатом является бутылка Клейна.

Результатом склейки также является двумерный тор.

## Лекция 2

### Способы описания движения

Продолжим рассматривать бильярд в круге, который был определен в прошлой лекции. Напомним, что фазовое пространство  $M^4$  состоит из точек  $(x, y, v_1, v_2)$ ,

и пропорциональное изменение координат вектора скорости  $(v_1, v_2)$  не влияет на траекторию бильярда, поэтому можно положить  $v_1^2 + v_2^2 = 1$  и изучать тем самым изоэнергетическую поверхность  $Q_1^3$ .

На прошлой лекции была предложена следующая конструкция:

Пусть область  $\Omega$  — диск (без ограничения общности радиус диска равен 1). На граничной окружности  $x^2 + y^2 = 1$  зафиксируем ориентацию по часовой стрелке и пусть  $\alpha$  — ориентированный угол между вектором скорости  $(v_1, v_2)$  и направленной касательной к границе  $\partial\Omega$  в точке отражения. Тогда  $\alpha$  как функция отображает изоэнергетическое многообразие  $Q_3$  на отрезок  $[0, \pi]$ .

Обозначим эту функцию через  $A$ , чтобы не было путаницы:  $A : Q_3 \mapsto [0, \pi]$ . Под прообразом  $A^{-1}(\alpha_0)$  произвольного  $\alpha_0$  понимаем набор таких  $(x, y, v_1, v_2) \in Q^3$ , что  $\{A(x, y, v_1, v_2) = \alpha_0, v_1^2 + v_2^2 = 1\}$ . Наглядно прообраз  $A^{-1}(\alpha_0)$  можно представить как множество точек в кольце  $\{x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{x^2 + y^2 \leq \cos^2 \alpha_0\}$ , ограниченном каустикой и границей диска  $\Omega$ , у которых единичный вектор скорости  $(v_1, v_2)$  направлен либо к каустике либо от каустики (см. рис. 4).

Нами было доказано следующее утверждение:

**Утверждение 1.** Пусть  $\alpha_0 \in (0, \pi)$ . Тогда прообраз  $A^{-1}(\alpha_0) \subset Q^3$  гомеоморфен двумерному тору  $T^2$ . Прообразы граничных значений отрезка  $A^{-1}(0)$  и  $A^{-1}(\pi)$  оба гомеоморфны окружности  $S^1$ .

Траектории бильярда на этих торах выглядят как какая-то обмотка тора. Обмотка может быть рациональной (если она замыкается) или иррациональной (если обмотка незамкнута).

**Замечание 8.** Рациональных обмоток тора бесконечное, но счетное количество. Поэтому случайно взятая бильярдная траектория скорее всего даст иррациональную обмотку тора (то есть кроме счетного количества случаев).

## Бильярд в кольце.

Рассмотрим бильярд в неодносвязной области, ограниченной двумя концентрическими окружностями:  $x^2 + y^2 = 1$  и  $x^2 + y^2 = 0.25$ . Такой бильярд будет интегрируемым, в нем будет сохраняться тот же угол  $\alpha$  с внешней окружностью. Примеры траекторий изображены на рис. 7.

Изобразим отображение  $A : Q^3 \mapsto [0, \pi]$  следующим образом (см. рис. 8).

В интервалах  $\alpha_0 \in (0, \beta_0)$  и  $\alpha_0 \in (\pi - \beta_0, \pi)$ . Справедливы те же соображения, что приводились для бильярда в круге, поскольку внутренняя окружность никак не сказывается на траектории, так как радиус каустики больше радиуса внутренней окружности.

Интерес представляют дополнения этих интервалов, то есть когда радиус каустики меньше радиуса внутренней окружности. Единственное отличие от предыдущей задачи заключается в том, что склейка на внутренней границе кольца теперь имеет другое объяснение. Для бильярда в круге склейка следовала из того, что из точки на каустике можно единственным образом определить касательный вектор, поэтому векторы к каустике и от каустики тождественно совпадали. Теперь же склейка

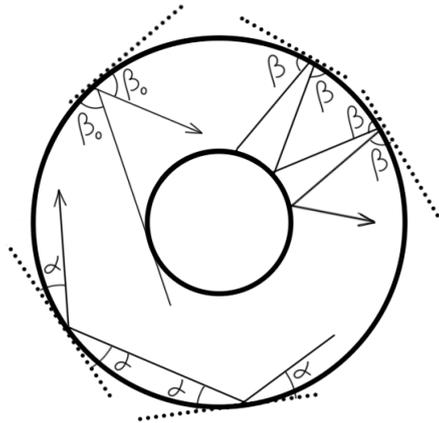


Рис. 7. Примеры траекторий для бильярда в кольце.

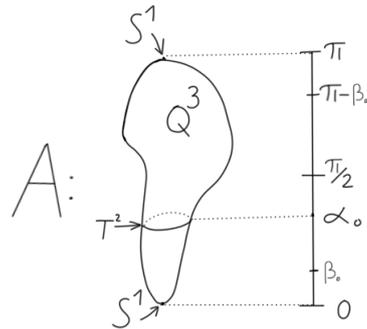


Рис. 8. Отображение A.

следует из того, что на граничной окружности векторы будут отождествляться из-за бильярдного закона: вектор к каустике и от каустики отождествляются по той же причине, почему мы их отождествляем на внешней граничной окружности.

Случай  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$  разбирается еще проще: центр не содержится в области нашего возможного движения, тогда направленные к центру и направленные от центра векторы склеиваются на граничных окружностях естественным образом.

**Замечание 9.** Картина в прообразах  $A^{-1}(\alpha_0)$  получается та же самая. Однако, для бильярда в кольце и для бильярда в диске многообразия  $Q^3$  разные. Можно показать, что полуинтервал  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  в  $Q^3$  соответствует полноторию, аналогично для  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ . Для обеих задач многообразие  $Q^3$  получается склейкой двух полноторий по границе, что можно сделать не единственным образом.

## Прямой угол

Ранее мы требовали, чтобы граница бильярда была регулярной кривой, то есть кривой без изломов. Теперь попробуем ослабить это условие и попробуем определить непрерывный бильярдный закон для прямого угла (стенки считаем прямыми для простоты).

Рассмотрим траекторию, которая падает под углом  $\alpha$  к вертикальной стенке, потом отражается и падает под углом  $\beta$  к горизонтальной стенке угла (см. рис. 9). Вектор скорости после двух отражений сонаправлен первоначальному. Параллельно сдвигая начальную точку (см. рис. 10) мы получим аналогичную картину для траектории, «почти падающей на угол». Чтобы бильярдное отображение в угле было корректно определено, предельные случаи для изображенных на рис. 9 и рис. 10 должны совпадать. А именно, при попадании точно в вершину угла точка должна отражаться по тому же отрезку траектории, как изображено на рис. 11.

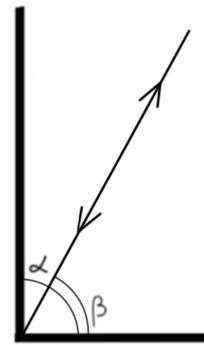
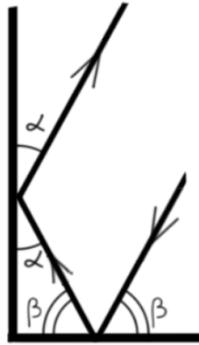


Рис. 9. Примеры траекторий для бильярда в кольце.

Рис. 10. Отображение A.

Рис. 11. Отображение A.

### Два бильярда с углами

Можем рассмотреть два примера: классический бильярд в прямоугольнике и в половине круга (см. рис. 12 и 13). Оба бильярда интегрируемы, то есть вдоль траектории сохраняется какая-то функция (в предыдущих задачах в качестве такой функции рассматривался угол  $\alpha$ ).

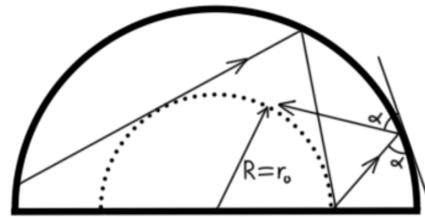
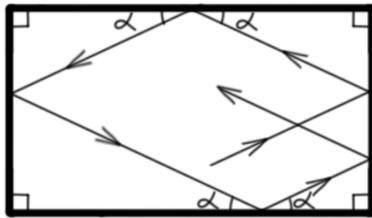


Рис. 12. Бильярд в прямоугольнике.

Рис. 13. Бильярд в половине круга.

Нас снова будет интересовать вопрос как в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  будет выглядеть слой (поверхность), соответствующий некоторому значению интеграла. Сначала зададим сами интегралы для обеих задач.

В случае бильярда в половине круга траектория теперь не сохраняет направление по или против часовой стрелки, но тем не менее сохраняется угол  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Также в качестве интеграла служит радиус каустики  $r \in [0, R]$ , поскольку на нем не сказывается смена направления траектории на прямолинейной части границы. При этом нулевой радиус каустики соответствует траекториям, проходящим через центр диска. Обозначим соответствующее отображение изоэнергетической поверхности как  $R : Q^3 \mapsto [0, R]$ .

Для бильярда в прямоугольнике каустики не будет. Однако, звенья любой траектории лежат на прямых, принадлежащих одному из двух семейств параллельных прямых. Здесь будет сохраняться угол  $\alpha$  между прямой, содержащей звено траектории и фиксированной прямой (например, на которой лежит сторона бильярда). На рис. 12 в качестве такой прямой мы выбрали горизонтальную прямую.

Тогда  $\alpha$  может принимать значения из отрезка  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Граничные значения отрезка  $0$  и  $\frac{\pi}{2}$  соответствуют движению точки параллельно горизонтальным или вертикальным границам прямоугольника, соответственно. Это отображение обозначим через  $A : Q^3 \mapsto [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Для бильярда в прямоугольнике рассмотрим прообраз граничных значений отрезка  $A^{-1}(0)$  и  $A^{-1}(\frac{\pi}{2})$  в  $Q^3$ . Прообразом  $A^{-1}(0)$  являются два прямоугольника (см. рис. 14): в одном вектора направлены вправо, в другом влево. Эти четырехугольники отождествляются по левой и правой границам, при этом на верхней и нижней никаких отождествлений нет. Результатом склейки является цилиндр, на котором векторы скоростей образуют «обмотки». Прообраз  $A^{-1}(\frac{\pi}{2})$  рассматривается анало-

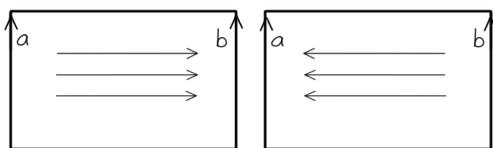


Рис. 14. Прямоугольники, соответствующие прообразу  $A^{-1}(0)$ .

гично. Два соответствующих случая прямоугольника, соответствующие направленным вверх и вниз векторам скорости, склеиваются по верхней и нижней границе, результатом склейки снова является цилиндр.

Рассмотрим прообраз  $A^{-1}(\alpha_0)$ , где  $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Для произвольной точки  $(x, y)$  существует четыре вектора скорости, чтобы попасть на слой  $\alpha_0$ . Действительно, чтобы попасть на слой  $\alpha_0$  звено траектории должно образовывать угол  $\alpha_0$  с фиксированной прямой, содержащей границу бильярда (например, с нижней границей прямоугольника). Таких прямых всего две, и вектор скорости может идти вдоль любой из них в одном из двух направлений. Занумеруем векторы  $v_1, \dots, v_4$  как на рис. 15. Разобьем слой  $A^{-1}(\alpha_0)$  на четыре прямоугольника, каждому поставим в соответствие по вектору скорости  $v_i$ .

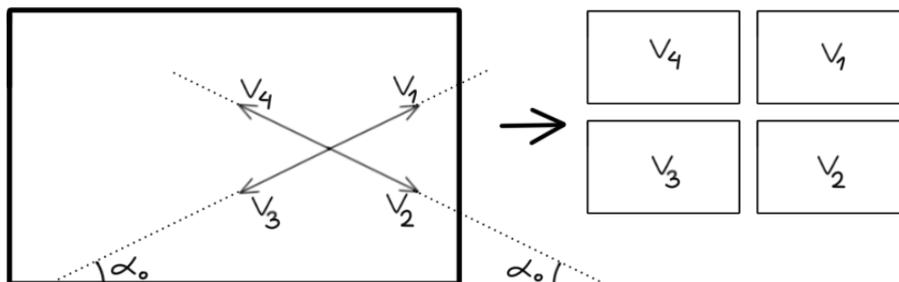


Рис. 15. Векторы скорости  $A^{-1}(\alpha_0)$ .

Полученные прямоугольники склеиваются в соответствии с бильярдным отображением. А именно, если на границе отождествляются векторы скорости  $v_i$  и  $v_j$ , то по этой границе склеиваются и соответствующие им прямоугольники.

На верхней границе отождествляются векторы  $v_1 \sim v_2$ , а также  $v_3 \sim v_4$ . Аналогичное верно для нижней границы прямоугольника. На обеих вертикальных границах отождествления также совпадут:  $v_1 \sim v_4$ ,  $v_2 \sim v_3$ . Изобразим склейки на рис. 16.

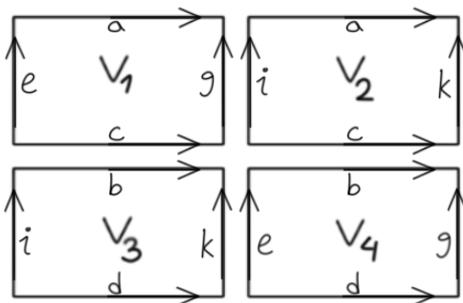


Рис. 16. Склейки листов, соответствующих векторам  $v_1, \dots, v_4$ .

Методами из курса наглядной геометрии и топологии склейку, изображенную на рис. 17, можно привести к склейке (см. рис. 18), соответствующей двумерному тору.

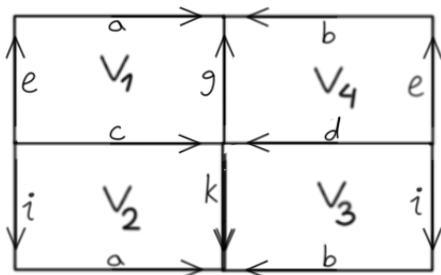


Рис. 17. Склейка прямоугольников.

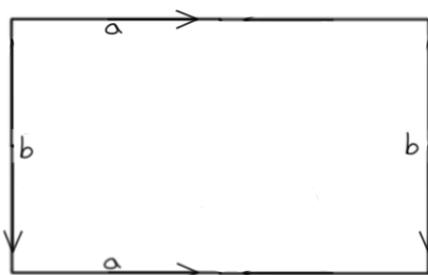


Рис. 18. Эквивалентная склейка.

Вернемся к бильярду в половине круга радиуса  $R_0$  (см. рис. 13). Напомним, что интеграл  $R$  принимает значения из отрезка  $[0, R_0]$ . Прообраз граничной точки  $R^{-1}(R_0)$  соответствует движению материальной точки вдоль граничной окружности. Двигаясь по часовой стрелке точка ударяется о прямую часть границы, разворачивается и продолжает двигаться в другую сторону. После второго удара траектория замыкается. Таким образом, прообраз  $R^{-1}(R_0)$  в  $Q^3$  является окружностью.

Рассмотрим  $R^{-1}(r_0)$  для  $0 < r_0 < R_0$ . Материальная точка может находиться в изображенной на рис. 19 области, которая получается вырезанием внутренней части каустики (окружности радиуса  $r_0$ ) из половины круга. Для внутренней точки полученной области можно провести четыре вектора из соображений, аналогичных предыдущей задаче (из произвольной точки вне каустики можно провести две касательные к ней). Обозначим их как показано на рис. 19.

Слой разбивается в четыре «прямоугольника», образованных прямолинейными отрезками и дугами полуокружностей. По аналогии с задачей в круге, на каустике отождествляются векторы  $v_1 \sim v_2, v_3 \sim v_4$ , аналогичное отождествление возникает

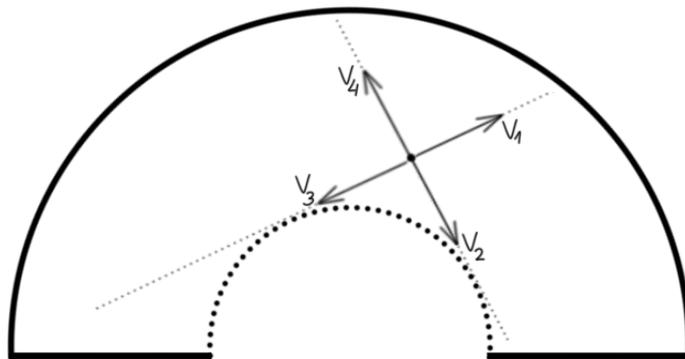


Рис. 19. Векторы скорости  $R^{-1}(r_0)$ .

на дуге внешней окружности в силу бильярдного закона. Из того же бильярдного закона на прямолинейных отрезках границы возникают склейки  $v_1 \sim v_4, v_2 \sim v_3$ . Склейки повторяют те, что были приведены на рис. 16 для задачи в прямоугольнике с точностью до деформации прямоугольников. Результат склейки от этого не изменится и снова является двумерным тором.

Рассмотрим  $R = 0$ , то есть траектории проходят ровно через центр. Почти все траектории состоят из четырех звеньев: два звена направлены от центра и два — к центру. То же верно для траектории, которая движется вдоль горизонтального граничного отрезка, его тоже можно представить в виде четырех звеньев. Также будет одна траектория, состоящая из двух звеньев: ее вектор скорости направлен вдоль вертикальной прямой. Примеры траектории изображены на рис. 20.

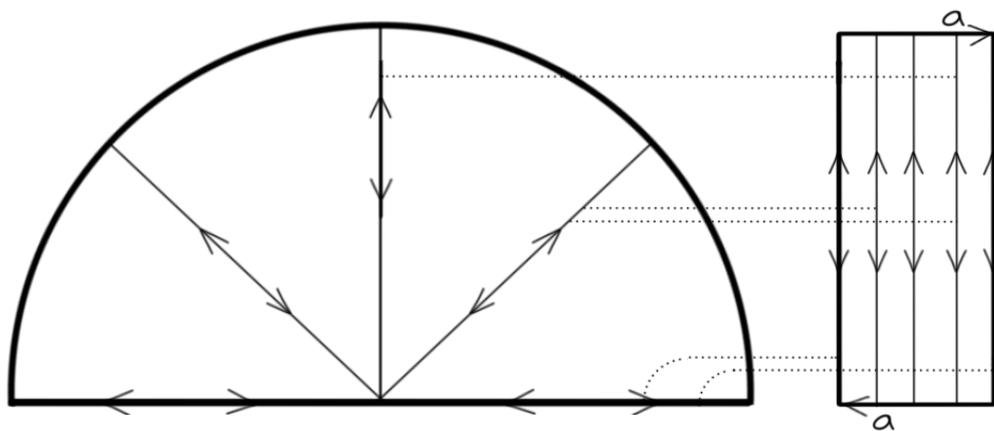


Рис. 20. Векторы скорости  $R^{-1}(0)$ .

Слушателю предлагается самостоятельно доказать, что слой будет гомеоморфен ленте Мёбиуса. Для простоты на рис. 20 изобразим эти траектории на ленте и укажем пунктиром соответствующие им траектории в половине круга. Типичные траектории, которые состоят из четырех звеньев, направлены вдоль ленты вне срединной прямой. Срединная прямая на ленте соответствует траектории, которая

состоит из двух звеньев.

## Лекция 3

### Бильярдные столы с углами на границе

Сегодня продолжим обсуждать углы, которые может иметь граница области.

В конце прошлой лекции были рассмотрены два случая: бильярд в половине круга и в прямоугольнике.

Покажем, что для бильярда в половине круга слой  $R^{-1}(0)$  будет гомеоморфен ленте Мёбиуса. Немного отступим от центра круга и повторим соображения из рис. 5: определим один лист склейки как содержащий направленные от центра векторы, а векторы на втором листе изобразим направленными к центру. Листы изображены на рис. 21.

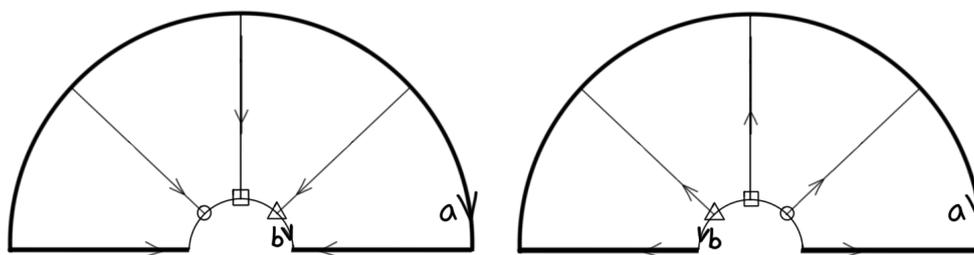


Рис. 21. Векторы скорости  $R^{-1}(0)$ .

**Замечание 10.** *Здесь также внутренняя граничная окружность — это условность. Мы не выкалывали точку, но хотим различать между собой разные векторы в одной точке. Такое же соображение использовалось в первой лекции.*

На рис. 21 склейка листов  $a$  на внешней граничной дуге окружности следует из бильярдного закона. На внутренней дуге для наглядности выделим кружком, квадратом и треугольником три точки. Траектории (примеры траекторий см. на рис. 20), двигаясь к центру, входят в отмеченную кружком точку на первом листе и выходят из отмеченной кружком точки на втором листе. Значит, на внутренней окружности листов склейка  $b$  направлена в разные стороны на двух листах, как изображено на 21.

Таким образом, каждый из листов склейки является четырехугольником, на двух противоположных ребрах которого заданы склейки  $a$  и  $b$ , сонаправленные на одном листе и противоположенные на втором. Нетрудно заметить, что склейка действительно задает ленту Мёбиуса. При этом ось ленты Мёбиуса соответствует двузвенной вертикальной траектории в бильярде.

## Обобщение бильярда в прямоугольнике

Рассмотрим бильярд в прямоугольнике с прямоугольным вырезом, параллельным его сторонам. Область и пример траектории изображены на рис. 22. При этом одна из граничных вершин имеет угол  $\frac{3\pi}{2}$ .

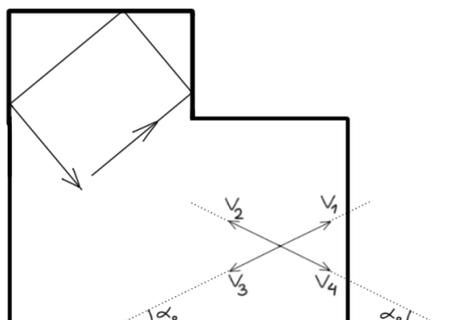


Рис. 22. Бильярд в прямоугольнике с прямоугольным вырезом.

Если траектория в этот «плохой» угол не попадает, тогда все отражения происходят относительно двух взаимно перпендикулярных прямых, содержащих стороны бильярда. Следовательно, сохраняется угол  $\alpha$  между звеном траектории и прямой, содержащей одну из сторон бильярда на выбор. В целях наглядности, зафиксируем горизонтальную сторону бильярда.

**Замечание 11.** Для простоты пока закроем глаза на эту вершину и попытаемся склеить поверхность так же, как для бильярда в прямоугольнике.

Для произвольной внутренней точки можно определить четыре вектора скорости таких, чтобы попасть в слой  $\alpha = \alpha_0$ . Занумеруем их в соответствии с рис. 22. Тогда слой склеивается из четырех кусочков, изображенных на рис. 23.

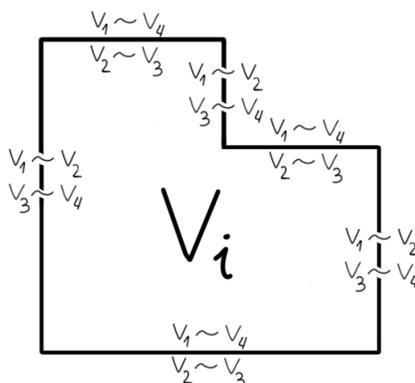


Рис. 23. Лист склейки  $v_i, i = 1, \dots, 4$ .

Отождествления на этих кусочках получаются из тех же соображений, что и для бильярда в прямоугольнике. На горизонтальных сторонах отождествляются  $v_1 \sim v_4, v_2 \sim v_3$ , а вдоль вертикальных —  $v_1 \sim v_2, v_3 \sim v_4$ .

**Замечание 12.** Ребер получилось много, поэтому лектором принято решение сразу начинать что-то склеивать. Соображения аналогичны тем, что были рис. на 16 и рис. 17,

Результат склейки листов  $v_i, i = 1, \dots, 4$  изображен на рис. 24.

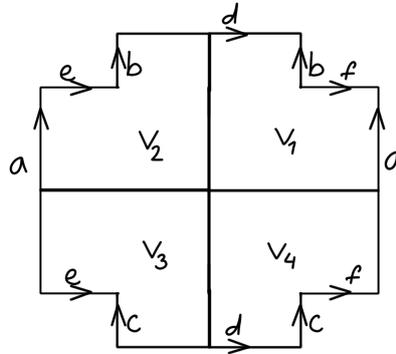


Рис. 24. Результат склейки листов  $v_i, i = 1, \dots, 4$ .

Запишем код многообразия (см. курс наглядной геометрии и топологии). В нашем случае получилось  $db^{-1}fa^{-1}f^{-1}c^{-1}d^{-1}ce^{-1}aeb$ . Код многообразия квадратов не содержит. Следовательно, поверхность ориентируемая, то есть является сферой с некоторым количеством ручек.

Посчитаем эйлерову характеристику. На склейке можно найти три вершины, шесть ребер и одна грань, следовательно  $\chi = B - P + \Gamma = 3 - 6 + 1 = -2$ . Для сфер с  $g$  ручками  $\chi = 2 - 2g$ , следовательно  $g = 2$ , то есть слой гомеоморфен сфере с двумя ручками.

Напомним, что для угла  $\frac{\pi}{2}$  для попадающих в угол траекторий можно было корректно определить поведение материальной точки. А именно, мы рассматривали своего рода предел (см. рис. 9–11), что позволило определить траекторию после попадания в вершину угла.

В нашем случае угол составляет  $\frac{3\pi}{2}$  и возникает проблема с определением траекторий (см. рис. 24). Как бы мы ни определили, предел «слева» и «справа» не совпадут.

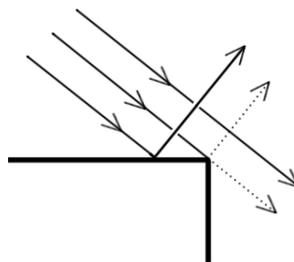


Рис. 25. Пунктиром изображены два возможных продолжения траекторий, если определять пределом с одной из сторон.

**Замечание 13.** Эту точку приходится выкалывать, и из-за чего этого возникает ситуация, которая в интегрируемых системах называется неполный поток.

Поэтому формально по непрерывности доопределить бильярдный закон в вершине угла  $\frac{3\pi}{2}$  невозможно.

### Угол на границе не $\frac{\pi}{2}$ и не $\frac{3\pi}{2}$

К текущему моменту мы рассмотрели случаи, когда на границе области угол  $\frac{\pi}{2}$  или  $\frac{3\pi}{2}$ , причем последний из-за неопределенного отражения в вершине мы назвали «плохим». Приступим к поиску «хороших» углов. На текущий момент в списке «хороших» углов всего две величины:  $\frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ .

Чтобы определить отражение в углу нам нужно рассмотреть близкие траектории. Рассмотрим некоторый острый угол  $\alpha$ , и пусть траектория приходит в его стенку под углом  $\beta$ . Изобразим ситуацию на рис. 26.

Траектория приходит в угол и должна отразиться внутрь него под углом  $\beta$  к той же стенке угла. Но мы также можем зеркально отразить сам угол, как изображено на рис. 27. Траектория в отраженной копии угла при этом будет выглядеть как прямая. Пунктиром изобразим ее продолжение. В некоторой точке пунктирное про-



Рис. 26. Траектория приходит в угол  $\alpha$  под углом  $\beta$ . Рис. 27. Отражим угол  $\alpha$  относительно стенки.

должение траектории снова ударяется о стенку угла. В этом случае снова зеркально отразим область относительно той грани угла, на которую падает траектория.

После нескольких итераций получим ситуацию, как изображено на рис. 28.

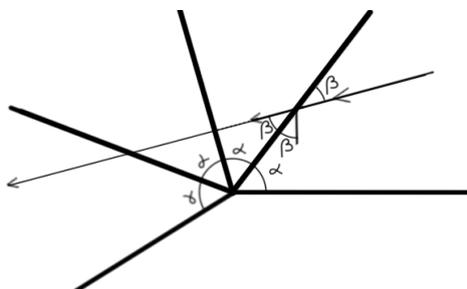


Рис. 28. После нескольких отражений.

А именно, содержащая траекторию прямая не имеет точек пересечения со стенкой угла  $\alpha$ , полученного последовательными зеркальными отражениями. Или, что

эквивалентно, содержащая бильярдную траекторию прямая и прямая, содержащая непересеченную стенку угла  $\alpha$ , пересекаются вне этого угла.

**Замечание 14.** Фактически мы конструируем накрытие угла. Можно представлять себе, что накрытие «гармошкой» складывается на первоначальный угол  $\alpha$

Нас интересуют такие  $\alpha$ , чтобы при любом  $\beta$  в вершине угла можно было корректно определить отражение. То есть, чтобы отражение в вершине получалось как предел близких параллельных траекторий. Их величины можем получить из следующего утверждения:

**Утверждение 2.** Для того, чтобы отражение было определено при любом  $\beta$  в вершине необходимо и достаточно, чтобы  $\alpha = \frac{\pi}{k}, k \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Если угол  $\alpha$  измерим с  $\pi$ , то можем замостить развернутый угол углом  $\alpha$ . Ударяемся под каким-то углом  $\beta$  в точке  $B$  как изображено на рис. 29. Посчитаем величину угла  $\gamma$  в точке  $A$ . Получается, что  $\gamma + \beta = \frac{\pi}{k}$ . Тогда  $\gamma =$

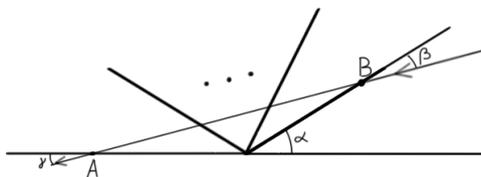


Рис. 29. Замощение развернутого угла измеримым с  $\pi$  углом  $\alpha$ .

$\frac{\pi}{k} - \beta$ . Получается, что точка  $A$  — последняя точка отражения, поскольку  $\gamma < \frac{\pi}{k}$ . То есть, мы выходим из угла из точки  $A$  под углом  $\frac{\pi}{k} - \beta$ , но относительно какой стороны угла происходит это последнее отражение? Это зависит от четности  $k$ , поскольку каждое отражение угла  $\alpha$  относительно стенки меняет сторону, от которой отразилась траектория.

Если  $k$  четное, тогда в замощении, изображенном на рис. 29 четное количество секторов  $\alpha$ . Аналогично, если  $k$  нечетное, тогда таких секторов будет нечетное количество. Изобразим замощения из рис. 29 для четного и нечетного случаев, изображая стороны угла по-разному. Горизонтальную стенку изобразим пунктиром, а наклонную — сплошным. Для наглядности рассмотрим малые  $k$ : При этом стенки

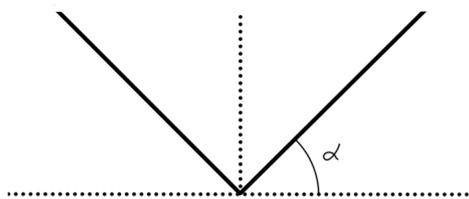


Рис. 30. Замощение угла  $\pi$  углом  $\alpha = \frac{\pi}{k}$  для четного  $k$ .

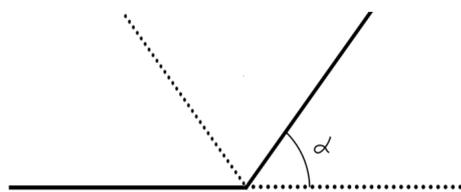


Рис. 31. Замощение угла  $\pi$  углом  $\alpha = \frac{\pi}{k}$  для нечетного  $k$ .

будут чередоваться. Мы установили, что последнее отражение траектории в углу

происходит относительно второй горизонтальной стенки (расположенной в левой половине картинки). Из рис. 30 видно, что в силу четности эта стенка будет пунктирной, то есть траектория выходит из угла под углом  $\gamma$  относительно другой стороны (то есть не содержащей точку  $B$ ), как изображено на рис. 32. Также из рис. 31 ясно, что траектория выходит под углом  $\gamma$  относительно той же стороны, на которую изначально падала траектория (содержащую точку  $B$ ), как изображено на рис. 33.

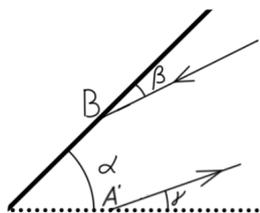


Рис. 32. Траектория после отражения для четного  $k$ .

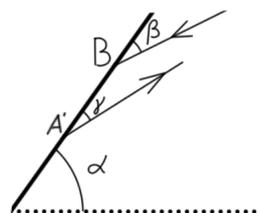


Рис. 33. Траектория после отражения для нечетного  $k$ .

Теперь устремим вершины  $B$  в обоих случаях к вершине угла  $\alpha$  (при этом точки  $A'$  также устремятся к углу) и рассмотрим, какое отражение получается в пределе. В обоих случаях  $\beta + \gamma = \frac{\pi}{k} = \alpha$ .

Случай четного  $k$  изображен на рис. 32, откуда видно, что прямые после отражения получатся параллельными. То есть отражение в вершине получается таким же, каким мы его определяли для прямого угла: после отражения в вершине точка идет по тому же отрезку, но в противоположном направлении (см. рис. 34).

Случай нечетного  $k$  изображен на рис. 33. Если  $B$  поставить в вершину угла, в нее же попадет точка  $A'$ , и тогда, как видно из рис. 35, после отражения в вершине точка продолжает движение по отрезку, отраженному относительно биссектрисы угла  $\alpha$ .

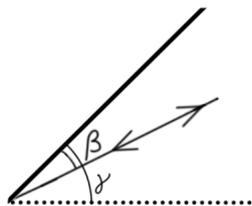


Рис. 34. Отражение в вершине угла для четного  $k$ .

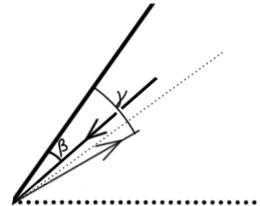


Рис. 35. Отражение в вершине угла для нечетного  $k$ .

□

**Замечание 15.** Доказательство необходимости предлагается слушателю как упражнение. А именно: показать, что если замоцнение вылезает за угол  $\pi$ , то можно предъявить пример траектории, у которой будут разные пределы слева и справа.

В силу этого утверждения можем быть уверены, что корректно будет определен бильярд в многоугольнике, у которого все углы имеют вид  $\frac{\pi}{k}$ .

## Изоэнергетическое многообразие $Q^3$

Приведем два утверждения:

**Утверждение 3.** Пусть область бильярда гомеоморфна диску и ограничена связной регулярной кривой. Тогда изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  гомеоморфна трехмерной сфере  $S^3$ .

При рассмотрении трехмерной сферы  $S^3$  нам для интерпретации будет полезна одна известная конструкция.

**Утверждение 4** (Расслоение Хопфа). Трехмерная сфера  $S^3$  является склейкой двух полноторий.

*Доказательство.*  $S^3 = \{x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = 1\}$ . Положим  $x + iy = z \in \mathbb{C}$  и  $a + ib = w \in \mathbb{C}$ . Тогда уравнение для сферы  $S^3$  в  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  можно записать как  $|z|^2 + |w|^2 = 1$ . При этом  $|z| \in [0, 1]$  и  $|w| \in [0, 1]$ . Если зафиксируем  $|z| = z_0$ , тогда удовлетворяющий уравнению сферы  $|w|$  автоматически определяется как  $|w| = \sqrt{1 - z_0^2} = w_0$ .

Покажем, что зафиксированному модулю  $z$  на сфере соответствует некоторая поверхность. По формуле Эйлера комплексные  $z$  и  $w$  представим в виде  $z = z_0 e^{i\phi}$ ,  $w = w_0 e^{i\psi}$

Положим  $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Определим множества  $A = \{|z| \leq z_0\}$  и  $B = \{|z| \geq z_0\}$ . При этом  $|w| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} = z_0$  для множества  $A$  и  $|w| \leq z_0$  для множества  $B$ . Они определяются симметрично и оба являются трехмерными поверхностями с краем. То есть, у нас есть шанс их представить.

Рассмотрим, чему гомеоморфно  $A$ .  $\{|z| \leq z_0\}$  — это двумерный диск радиуса  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Если выберем какую-то точку  $z$  внутри диска, мы зафиксируем  $|z|$  и этой точке будет соответствовать целая окружность точек вида  $w$ . Действительно, мы сможем однозначно определить модуль точек  $w$  из модуля произвольной точки  $z = \tilde{z}$  по формуле  $|w| = \sqrt{1 - |\tilde{z}|^2}$ , тогда точки  $w$  определяются как  $w = \sqrt{1 - |\tilde{z}|^2} e^{i\psi}$ ,  $\psi \in [0, 2\pi]$ , но мы не знаем угол  $\psi$  этих точек  $w$ . То есть, угол может быть произвольным.

Получается, что множество  $A$  является декартовым произведением двумерного диска  $D^2$  на окружность  $S^1$ , что является полноторием. Аналогично можно показать, что множество  $B$  также является полноторием. Только в этом случае теперь  $w$  определяют точки с двумерного диска. Следовательно, трехмерная сфера  $S^3$  является результатом склейки двух полноторий по общему граничному тору, который соответствует точкам  $|z| = |w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Замечание 16.** В общем случае есть несколько способов склеить два полнотория по общей границе, и не все из этих склеек эквивалентны трехмерной сфере  $S^3$ . Поэтому важно рассмотреть, как именно склеиваются полнотория в нашей задаче и будет ли их склейка гомеоморфна  $S^3$ .

На полнотории  $A$  рассмотрим кривую  $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $w = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Такая кривая стягивается в точку внутри полнотория  $A$ , если уменьшать  $|z|$  к нулю, то есть к центру диска.  $w$  при этом будет расти к единице. Внутри полнотория  $B$  в качестве аналогичной стягивающейся в точку кривой — можно взять  $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Эти две кривые пересекаются в точке  $z = w = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Более того, они обе лежат на общей для полноторий  $A$  и  $B$  границе. Поэтому можно обе эти кривые изобразить на

одном полнотории, например, на  $A$ . Обозначим цикл, который стягивается в точку в полнотории  $A$  через  $\lambda$ , а цикл, который стягивается в полнотории  $B$  обозначим через  $\mu$  (см. рис. 36).

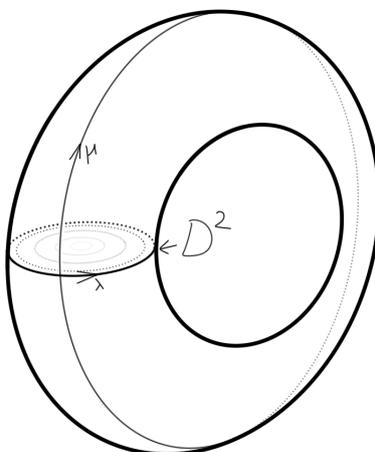


Рис. 36. Циклы  $\lambda$  и  $\mu$  на полнотории  $A$ .

То есть два полнотория  $A$  и  $B$  склеиваются по общему граничному тору со «сменной ролей» циклов: «меридианы» одного тора становятся «параллелями» на другом торе и наоборот. Результатом такой склейки двух полноторий является трехмерная сфера  $S^3$ .  $\square$

## Лекция 4

### Бильярдные столы с углами на границе

Напомним утверждение, на котором мы остановились.

**Утверждение 5.** *Если область бильярда гомеоморфна диску (то есть, ограничена связной регулярной кривой), тогда изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  этого бильярда гомеоморфна трехмерной сфере  $S^3$ .*

На прошлой лекции нами было доказано, что сфера  $S^3$  эквивалентна склейке двух полноторий, при которой параллели одного полнотория склеиваются с меридианами другого полнотория и наоборот. Для доказательства сегодняшнего утверждения мы будем искать два полнотория в  $Q^3$  и будем изучать их склейку.

*Доказательство.* Поставим какую-то точку в бильярде и рассмотрим гомотетию  $\gamma'$  граничной кривой  $\gamma$  с коэффициентом, близким к единице. То есть, немного отступим от границы внутрь области  $\Omega$ , чтобы она осталась без самопересечений и прочих особенностей (изображена пунктиром на рис. 37).

Хотим понять, как устроено множество точек вида  $(x, v)$ , где  $x$  — точка области, а  $v$  — это вектор, который в этой точке приписан. При этом считаем, вектор  $v$

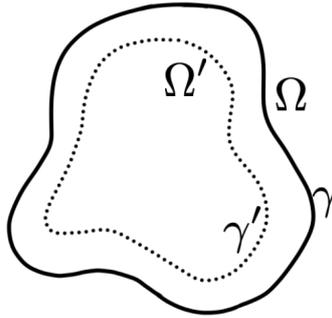


Рис. 37. Граница бильярда и небольшая ее гомотетия.

единичной длины. Также на границе определено некое правило отождествления, поскольку у нас выполняется бильярдный закон. Следовательно, какие-то пары вида  $(x, v)$  должны отождествляться на границе.

Разобьем всю  $Q^3$  на два кусочка. Определим их следующим образом:  $A = \{(x, v), x \in \Omega'\}$  и  $B = \{(x, v), x \in \Omega \setminus \Omega'\}$ .

Что мы можем сказать об этих кусках? В каждой точке куска  $A$  мы можем нарисовать целую окружность векторов. То же справедливо в точках кривой  $\gamma'$ , поскольку эти точки не находятся на границе области  $\Omega$ . Отсюда можем заключить, что кусок  $A$  гомеоморфен области произведению  $\Omega' \times S^1$ , то есть

$$A \simeq \Omega' \times S^1 \simeq D^2 \times S^1,$$

что является полноторием.

Рассмотрим кусок  $B$ . В нем для точек, заключенных между кривыми  $\gamma$  и  $\gamma'$  также можно определить окружность векторов скорости. Если же взять точку, принадлежащую кривой  $\gamma$ , то можно определить меньшее количество векторов. А именно, определим проекцию  $f : Q^3 \mapsto \Omega, f(x, v) = x$ . Тогда при  $x_0 \in \gamma$  прообразом  $f^{-1}(x_0)$  этой точки в  $Q^3$  является отрезок, концы которого соответствуют касательным к  $\gamma$  векторам в точке  $x_0$ .

Расслоим область, заключенную между кривыми  $\gamma$  и  $\gamma'$  на кривые, как изображено на рис. 38. Уточним, что каждая из этих кривых получается естественным

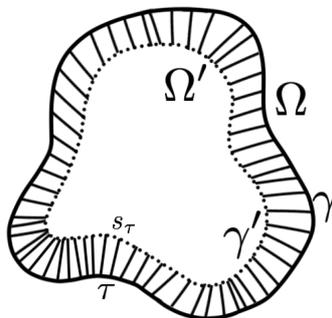


Рис. 38. Расслоение области на кривые.

образом как образ точки на  $\gamma$  при введенной ранее гомотетии, сжимающей  $\gamma$  на  $\gamma'$ .

Все эти кривые расслаивают область между  $\gamma$  и  $\gamma'$ . Введем на кривой  $\gamma$  параметр  $\tau \in [0, 1]$ , тогда эти кривые можно обозначить как  $s_\tau$ .

Посмотрим как устроен прообраз кривой  $s_\tau$  в  $Q^3$ , см. рис. 39. Прообразом любой

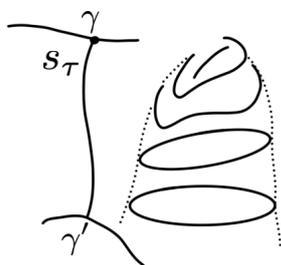


Рис. 39. Прообраз различных точек кривой  $s_\tau$  в  $Q^3$ .

точки на кривой  $s_\tau$ , если эта точка не принадлежит  $\gamma$ , является окружность. Прообраз точки, принадлежащей кривой  $\gamma$  является отрезком. Полный прообраз кривой  $s_\tau$  (см. рис. 39) можно себе представлять как непрерывное множество окружностей, стягивающихся к одному отрезку. Объединение таких окружностей является двумерным диском, то есть  $f^{-1}(s_\tau) \simeq D^2$ .

Получается, в прообразе каждой кривой  $s_\tau$  у нас лежит двумерный диск. Множество точек  $x \in \Omega \setminus \Omega'$  гомеоморфно произведению кривой  $s_\tau$  на окружность, потому что сама граница бильярда гомеоморфна окружности. Получается, что в  $Q^3$  нам нужно взять прообраз кривой  $s_\tau$  (он представляет собой диск) и прямо умножить на окружность. Получается,  $B \simeq D^2 \times S^1$ .

**Замечание 17.** Заметим, что для  $B$  двумерный диск — это то, что лежит в  $s_\tau$ , а окружность — это то, что бежит по границе бильярда. Для кусочка  $A$  соответствие было с точностью до наоборот: диску соответствовала область.

Остается понять, как склеиваются кусочки  $A$  и  $B$ . Точнее, как полнотория  $A$  и  $B$  склеиваются по граничному тору. Граничный тор образован точками кривой  $\gamma'$ , в каждой из которых нарисована окружность.

На этом торе рассмотрим следующую кривую: в каждой точке  $\gamma'$  нарисуем вектор, направленный горизонтально вправо (см. рис. 40). Полученную кривую с ассоциированным в каждой точке вектором назовем  $\lambda$ .  $\lambda = \{x \in \gamma', v = (1, 0)\}$  — это некоторая кривая на этом торе. Причем гомеоморфная окружности. Рассмотрим эту кривую в части  $A$ , то есть в куске  $Q^3$ , который соответствует внутренности этой кривой. Можем взять эту кривую и стянуть ее по внутренности  $A$  в точку. В силу того, что вектор в каждой точке  $\gamma'$  один и тот же, после стягивания получим одну точку, при которой задан направленный вправо вектор. Тогда  $\lambda$  стягивается в точку внутри  $A$ .

Внутри  $B$  кривая  $\lambda$  не стягивается. Манипуляциями внутри  $B$  она может быть стянута к границе  $\gamma'$ , что является осью полнотория.

Приведем другую кривую, чтобы она стягивалась в  $B$ , но не в  $A$ . Возьмем одну произвольную точку на кривой  $\gamma'$  и в ней рисуем окружность векторов скорости —

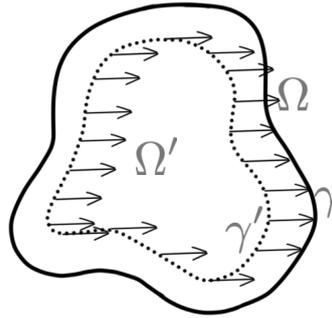


Рис. 40. Кривая  $\lambda$ : горизонтально направленные векторы на граничном торе между  $A$  и  $B$ .

это наша кривая на торе (см. рис. 41). Если ее «протащить» внутри  $B$  к граничной



Рис. 41. Кривая  $\mu$ : векторы направлены во все стороны из фиксированной точки.

дуге  $\gamma$ , то окружность векторов станет отрезком, который можно стянуть в точку. Поэтому новая кривая  $\mu = \{x_0 \in \gamma', v = (\cos \phi, \sin \phi)\}$  стягивается в точку внутри  $B$ . В  $A$  она не стягивается, поскольку с окружностью векторов скорости ничего не произойдет во внутренности  $A$ .

Кривые  $\lambda$  и  $\mu$  пересекаются в точке  $x_0$ , из которой торчит вектор  $(1, 0)$ . Сам же наш тор делит  $Q^3$  на два полнотория: в одном полнотории  $\lambda$  стягивается в точку а  $\mu$  на ось тора. Во втором наоборот. Получается, что  $Q^3$  является результатом склейки двух полноторий, где стягиваемый в точку цикл в одном торе переходит в ось в другом торе. Пользуясь леммой с предыдущей лекции получаем, что  $Q^3$  является  $S^3$ .  $\square$

Теорему можно модифицировать для более широкого класса граничных кривых. Ниже приведем схему доказательства для случая, когда граница бильярда содержит прямой угол.

Граничную кривую сгладить и устранить прямой угол, как изображено на рис. 42. Отрежем модифицированную часть области и рассмотрим прообразы точек на кривой разреза. Прообразом каждой точки кроме граничных точек кривой являются окружности, а в двух граничных точках прообразами служат по одному отрезку. Тогда прообразом всей кривой служит двумерная сфера. Получается, мы в  $Q_3 \simeq S^3$

изобразили маленькую двумерную сферу  $S^2$  и по ней вырезали часть поверхности  $Q^3$ , гомеоморфную трехмерному диску  $D^3$ . Теперь по двумерной сфере вклеим



Рис. 42. Сглаженная кривая и разрез (изображен пунктиром). Рис. 43. Содержащая угол часть области расслаивается кривыми.

прообраз прямого угла в  $Q^3$ . Расслоим область бильярда на кривые, соединяющие стенки угла (см. рис. 43). Аналогично кривой, на которой мы строили разрез, прообразами расслаивающих кривых также являются двумерные сферы. Вершина угла имеет прообраз в  $Q^3$ , гомеоморфный отрезку. Тогда прообразом всего этого сегмента области является трехмерный диск  $D^3$ . Склейка  $D^3$  с  $D^3$  по граничной сфере  $S^2$  является трехмерной сферой  $S^3$ .

**Следствие 1.** Если бильярдная область односвязна, то поверхность  $Q^3$  является трехмерной сферой  $Q^3$ .

Рассмотрим случай, когда область не односвязна, то есть гомеоморфна кольцу.

**Утверждение 6.** Если область бильярда ограничена двумя (вложенными) регулярными кривыми, тогда  $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$ .

*Доказательство.* Схема доказательства Расслоим область на кривые, которые соединяют внутреннюю и внешнюю граничные кривые области, как изображено на рис. 38 (Возьмем в качестве не односвязной области  $\Omega \setminus \Omega'$ ). Тогда  $Q^3$  будет гомеоморфно произведению прообраза любой такой кривой  $s_\tau$  на  $S^1$ . Остается только понять, что является прообразом произвольной кривой  $s_\tau$ , соединяющей замкнутые кривые. Из уже разобранных утверждений мы знаем, что их прообразом является  $S^2$ . Действительно, каждая внутренняя точка  $s_\tau$  имеет своим прообразом в  $Q^3$  окружность, а на граничных кривых (в силу бильярдного закона) прообразы представляют собой по отрезку. Получается  $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$ .  $\square$

Докажем оптическое свойство эллипса: луч, исходящий из левого фокуса, после отражения проходит через правый фокус.

Рассмотрим в эллипсе

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, a > b > 0$$

бильярдную траекторию, проходящую через правый фокус (см. рис. 44). Хотим

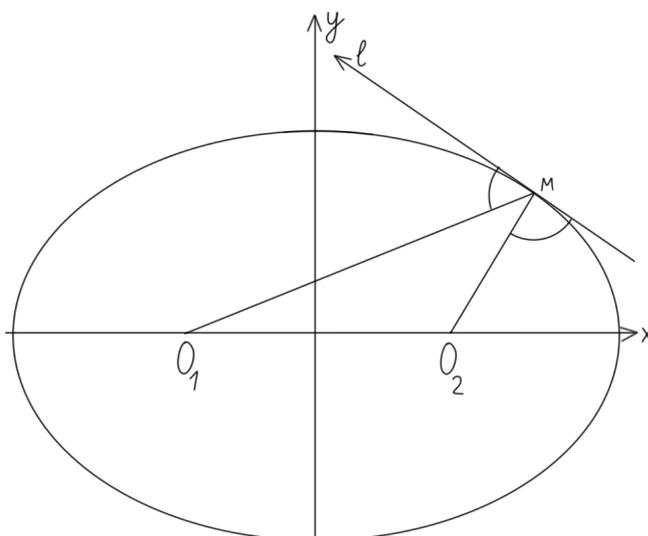


Рис. 44. Бильярдная траектория в точке  $M$  отражается от касательной  $\ell$ .

показать, что угол  $\alpha$  между  $MO_1$  и  $\ell$  такой же, как угол  $\beta$  при  $O_2M$  и  $\ell$  (считаем, что траектория исходит из правого фокуса  $O_2$ ).

Введем на граничном эллипсе параметр:

$$x = \sqrt{a} \cos t, \quad y = \sqrt{b} \sin t.$$

Тогда координаты вектора  $\vec{\ell}$  выражаются как  $\vec{\ell} = (-\sqrt{a} \cos t, \sqrt{b} \sin t)$ . Координаты фокусов  $O_1$  и  $O_2$  выражаются как  $O_1 = (-\sqrt{a-b}, 0)$ ,  $O_2 = (\sqrt{a-b}, 0)$ . Тогда  $O_2M = (\sqrt{a} \cos t - \sqrt{a-b}, \sqrt{b} \sin t)$ . Аналогично,  $MO_1 = (-\sqrt{a-b} - \sqrt{a} \cos t, -\sqrt{b} \sin t)$ . Тогда

$$\cos \alpha = \frac{-(\sqrt{a} \cos t - \sqrt{a-b})(\sqrt{a} \sin t) + b \sin t \cos t}{\|\ell\| \sqrt{(\sqrt{a} \cos t - \sqrt{a-b})^2 + b \sin^2 t}} = \frac{(b-a) \sin t \cos t + \sqrt{a} \sqrt{a-b} \sin t}{\|\ell\| (\sqrt{a} - \sqrt{a-b} \cos t)}.$$

Аналогично получаем

$$\cos \beta = \frac{(a-b) \sin t \cos t + \sqrt{a} \sqrt{a-b} \sin t}{\|\ell\| (\sqrt{a} + \sqrt{a-b} \cos t)}.$$

Приведем оба выражения к общему знаменателю, тогда

$$\cos \alpha = \cos \beta = \frac{(b-a)\sqrt{a} \cos t + a\sqrt{a-b} + (b-a)\sqrt{a-b} \cos^2 t + \sqrt{a}(a-b) \cos t}{\|\ell\| (a - (a-b) \cos^2 t)}.$$

Предположим, что бильярдная траектория исходит не из правого фокуса, а чуть правее него. Тогда оказывается, что можно подобрать софокусный эллипс (или гиперболу, если траектория проходит между фокусов), которого будет касаться каждое звено бильярдной траектории. На следующей лекции эту задачу разберем подробнее.

## Лекция 5

### Бильярдные столы с углами на границе

В конце прошлой лекции было разобрано так называемое оптическое свойство эллипса. После чего мы упомянули случай, когда траектория проходила не строго через фокус, а рядом с ним. Сегодняшнюю лекцию начнем с подробного описания этого случая.

Пусть граничный эллипс задается уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Тогда можно рассмотреть семейство софокусных кривых  $\left\{ \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1 \right\}$ . При величине параметра  $\lambda < b$  кривая будет эллипсом, а при  $b < \lambda < a$  — гиперболой.

**Утверждение 7.** *Предположим, что бильярдная траектория не проходит через фокус. Тогда можно найти такой параметр  $\lambda$ , что звенья траектории до и после отражения от граничного эллипса касаются кривой  $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$ , как изображено на рис. 45. При этом, если траектория не пересекает отрезок между фокусами, такая кривая является эллипсом. Если траектория пересекает упомянутый отрезок, то кривая будет гиперболой.*

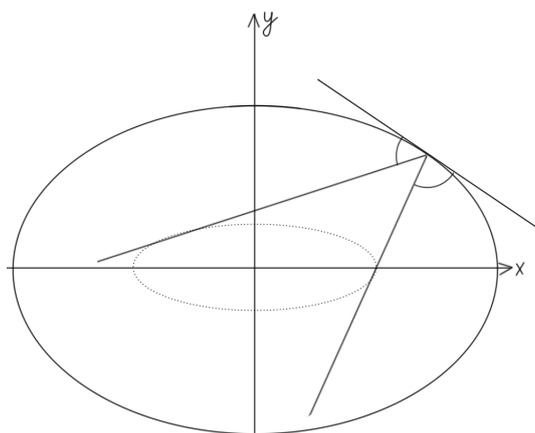


Рис. 45. Звенья траектории касаются одного и того же эллипса до и после отражения.

*Доказательство.* Зафиксируем какую-то начальную точку  $(x_0, y_0)$  и вектор скорости  $(v_1, v_2)$  в ней. Посчитаем параметр  $\lambda$  софокусной квадрики для такой траектории. А именно, требуется найти такой  $\lambda$ , чтобы определенная точкой и вектором прямая имела одну общую точку с кривой, заданной уравнением  $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$ .

Такую прямую можно параметрически определить уравнением  $x = x_0 + tv_1$ ,  $y = y_0 + tv_2$ . Подставляем эти  $x$  и  $y$  в уравнение софокусной квадрики:

$$\frac{(x_0 + tv_1)^2}{a - \lambda} + \frac{(y_0 + tv_2)^2}{b - \lambda} = 1.$$

Искомый параметр  $\lambda$  мы найдем из условия, что это уравнение имеет ровно одно решение относительно  $t$ . Обе части уравнения приведем к общему знаменателю и

приведем слагаемые при различных степенях  $t$ :

$$t^2(v_1^2(b-\lambda)+v_2^2(a-\lambda))+2t(x_0v_1(b-\lambda)+y_0v_2(a-\lambda))+x_0^2(b-\lambda)+y_0^2(a-\lambda)-(a-\lambda)(b-\lambda) = 0.$$

Полученное квадратное относительно  $t$  уравнение имеет одно решение тогда и только тогда, когда его дискриминант нулевой. То есть выполняется равенство

$$(x_0v_1(b-\lambda)+y_0v_2(a-\lambda))^2-(v_1^2(b-\lambda)+v_2^2(a-\lambda))(x_0^2(b-\lambda)+y_0^2(a-\lambda)-(a-\lambda)(b-\lambda)) = 0.$$

Равенство нулю дискриминанта является условием для нашего  $\lambda$ . Тогда раскроем полученное уравнение, сокращая слагаемые противоположных знаков. После всех сокращений равенство принимает вид

$$(a-\lambda)(b-\lambda)\left(\frac{v_1^2b+v_2^2a-(x_0v_2-y_0v_1)^2}{v_1^2+v_2^2}-\lambda\right) = 0.$$

Значение в последней скобке как раз является выражением для  $\lambda$  по координатам точки и вектора скорости.

**Замечание 18.** В первых двух скобках преобразованного уравнения решениям удовлетворяют особые значения  $\lambda$ , соответствующие прямым. А именно,  $\lambda = a$  соответствует прямой  $x = 0$ , то есть движению бильярдной траектории вдоль малой (вертикальной) оси эллипса. В свою очередь, параметр  $\lambda = b$  соответствует прямой  $y = 0$ , то есть бильярдным траекториям, проходящим через фокусы граничного эллипса. В том числе и путешествующим вдоль большой (горизонтальной) оси эллипса.

Зависящая от координаты точки  $(x, y)$  и вектора скорости  $(v_1, v_2)$  функция

$$\lambda(x, y, v_1, v_2) = \frac{v_1^2b+v_2^2a-(xv_2-yv_1)^2}{v_1^2+v_2^2}, \quad (1)$$

очевидно, не меняется до точки отражения от граничного эллипса. Пусть в точку  $(x_0, y_0)$  на граничном эллипсе траектория приходит с вектором скорости  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ , а после отражения двигается с новым вектором скорости  $\vec{w} = (w_1, w_2)$  (см. рис. 46). Для точки  $(x_0, y_0)$  на граничном эллипсе  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  справедливо выражение  $x_0 = \sqrt{a} \cos \tau$ ,  $y_0 = \sqrt{b} \sin \tau$  для некоторого  $\tau$ . Также, поскольку ударение происходит без потери энергии, считаем  $|\vec{v}| = |\vec{w}|$ . Тогда выражения  $\lambda(x, y, v_1, v_2)$  и  $\lambda(x, y, w_1, w_2)$  отличаются только в числителях.

Введем обозначения для касательного вектора  $\vec{\ell}$  к граничному эллипсу в точке  $(x_0, y_0)$ . Также определим вектор внешней нормали  $\vec{n}$  к граничному эллипсу в той же точке. Для координат векторов справедливы следующие выражения:

$$\vec{n} = (\sqrt{b} \cos \tau, \sqrt{a} \sin \tau), \quad \vec{\ell} = (-\sqrt{a} \sin \tau, \sqrt{b} \cos \tau).$$

В точке  $(x_0, y_0)$  вектор  $\vec{w}$  совпадает с вектором  $\vec{v}$ , отраженным относительно прямой, заданной вектором  $\vec{\ell}$ . Следовательно, справедливо равенство  $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = -\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle$ . Это равенство можно переписать в виде

$$v_1 \sqrt{b} \cos \tau + v_2 \sqrt{a} \sin \tau = -(w_1 \sqrt{b} \cos \tau + w_2 \sqrt{a} \sin \tau).$$

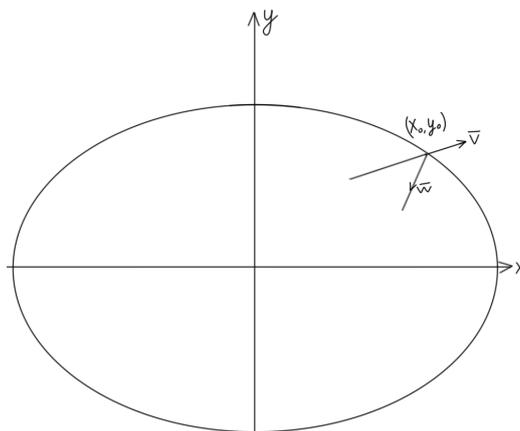


Рис. 46. Векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$ .

Рассмотрим числитель выражения  $\lambda(x_0, y_0, v_1, v_2)$ , подставляя в  $(x_0, y_0)$  указанную выше параметризацию по  $\tau$ . Результат преобразуем с использованием основного тригонометрического тождества, получим

$$\lambda(x_0, y_0, v_1, v_2) = v_1^2 b \cos^2 \tau + v_2 a \sin^2 \tau + 2\sqrt{ab} \sin \tau \cos \tau v_1 v_2 = \left( v_1 \sqrt{b} \cos \tau + v_2 \sqrt{a} \sin \tau \right)^2.$$

Как можно заметить, эта величина совпадает с  $\lambda(x_0, y_0, w_1, w_2)$  в силу равенства  $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = -\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle$ .  $\square$

Слушателю предлагается рассмотреть отражение не от граничного эллипса, а от софокусной с ним квадрики (см. рис. 47). Утверждается, что и в этом случае софокусная квадрика также сохранится.

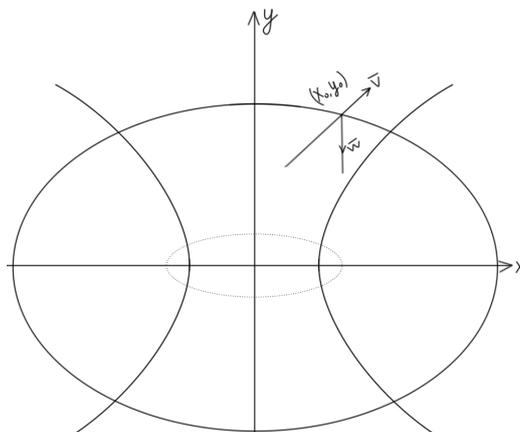


Рис. 47. Бильярд в области, ограниченной софокусными эллипсом и гиперболой.

**Следствие 2.** *Параметр такой софокусной квадрики  $\lambda$  сохраняется в том числе для бильярдов, чья граница ограничивается дугами нескольких софокусных квадрик.*

Вернемся к изучению задачи с точки зрения топологии. Сегодняшняя теорема доказывает, что бильярд в эллипсе является интегрируемым, то есть существует функция, которая сохраняется вдоль траектории. Мы также явно привели этот интеграл и описали его геометрический смысл.

Бильярдные траектории в эллипсе можно разделить на два класса: на траектории, касающиеся эллипсов и на траектории, касающиеся гипербол.

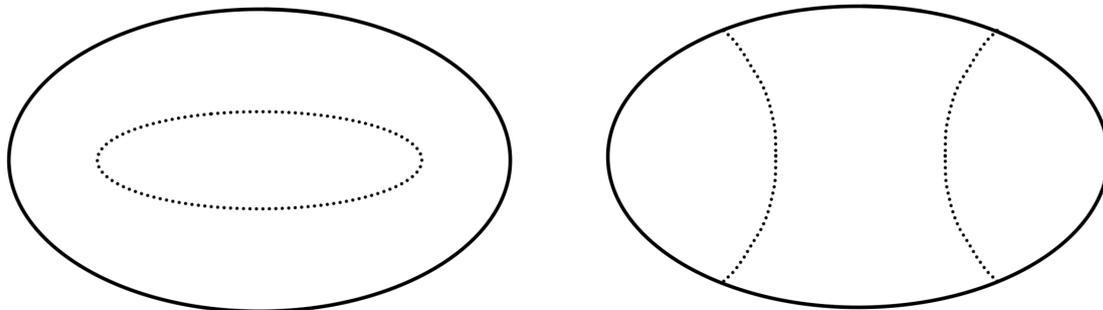


Рис. 48. Параметр  $\lambda < b$ : каустика является эллипсом.

Рис. 49. Параметр  $b < \lambda < a$ : каустика является гиперболой.

Общая изоэнергитическая поверхность  $Q^3$  в обоих случаях является трехмерной сферой  $S^3$ .

Изобразим на рис. 50 слоения изоэнергитической поверхности по значениям нашего интеграла  $\Lambda$ .

**Замечание 19.** Здесь  $\Lambda : Q^3 \mapsto \mathbb{R}$  — это отображение, которое устроено как  $\Lambda(x, y, v_1, v_2) = \lambda(x, y, v_1, v_2)$ , явная формула см. (1). Под сечением  $\Lambda = \mu$  понимаем полный прообраз значения  $\mu$  в  $Q^3$  при отображении  $\Lambda$ .

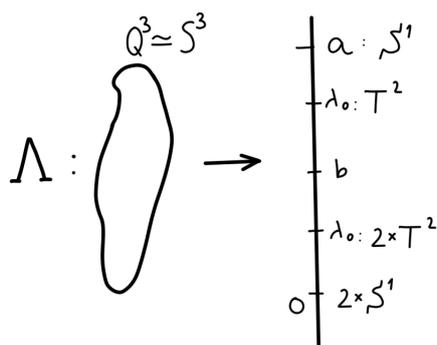


Рис. 50. Слоения изоэнергитической поверхности  $Q^3 \simeq S^3$ .

Значение  $\Lambda = 0$  соответствует движению вдоль граничного эллипса по или против часовой окружности, чему в  $Q^3$  соответствуют две окружности. Значение  $\Lambda = a$  соответствует движению вдоль вертикальной оси эллипса, чему соответствует одна окружность.

**Замечание 20.** Поясним: при  $\Lambda = a$  траектория пробегает по двум отрезкам, которые проецируются в малую ось эллипса: вдоль одного мы движемся вверх, а вдоль другого — вниз. В точках на граничном эллипсе материальная точка отражается. Для траектории это значит, что два отрезка (направленный вверх и направленный вниз) отождествляются по своим концам. Два отрезка с отождествленными концами действительно являются окружностью.

Рассмотрим случай  $\Lambda < b$ . Зафиксируем какой-то  $\lambda_0 < b$ , тогда параметр софокусной квадрики  $\lambda_0$  соответствует эллипсу (см. рис. 48). Тогда все траектории можно разделить на те, которые движутся по или против часовой стрелки. Те траектории, что закручиваются по часовой стрелке, лежат на двумерном торе (из тех же соображений, что были для окружности). Аналогично для траекторий, которые закручиваются против часовой стрелки. Следовательно, произвольному  $\Lambda = \lambda_0 < b$  на поверхности  $Q^3$  соответствует два тора  $T^2$ .

Рассмотрим случай  $b < \Lambda < a$ . Для произвольного  $b < \lambda_0 < a$  параметр софокусной квадрики  $\lambda_0$  соответствует гиперболы (см. рис. 49). В каждой внутренней точке определены 4 вектора скорости, а сама область является прямоугольником. Здесь, повторяя соображения для прямоугольника из прошлых лекций, мы получим один тор. Следовательно, произвольному  $b < \Lambda = \lambda_0 < a$  соответствует один тор  $T^2$  на поверхности  $Q^3$ .

Как тогда устроен уровень  $\Lambda = b$ ? Какая поверхность ему соответствует?

Мы знаем, что траектории проходят через фокусы. А именно, траектории проходят через левый и правый фокус, испытывая между этими переходами отражение на граничном эллипсе. Траектории можно разбить на два симметричных класса:

- В левом фокусе траектория переходит из нижней половины эллипса в верхнюю.
- В левом фокусе траектория переходит из верхней половины эллипса в нижнюю.

Причем эти классы траекторий имеют только одну общую траекторию. А именно, траекторию, которая двигается вдоль большой оси эллипса.

Оба класса можно рассматривать как предел, траекторий огибающих очень маленький софокусный эллипс. Рассмотрим пока траектории из первого класса (то есть в левом фокусе траектория направлена вверх). Этот класс траекторий получился из закручивающихся по часовой стрелке траекторий, а второй — из огибающих против часовой стрелки. Все такие траектории находятся на одном торе:

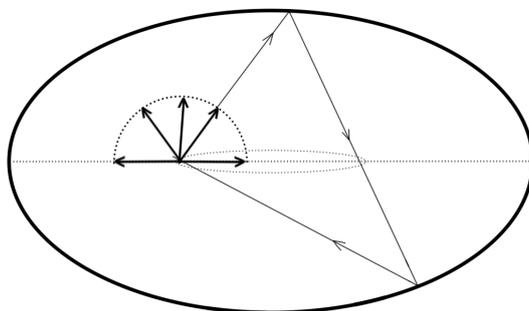


Рис. 51. Траектории, принадлежащие первому классу.

каждая из траекторий задается начальным вектором скорости в левом фокусе (см.

рис. 51). Эти векторы скорости задаются полуокружностью с отождествленными концами. То есть, поверхность для первого класса является тором.

Из тех же соображений траектории из второго класса также лежат на торе. Наша задача — отождествить эти торы по общей кривой, соответствующей движению вдоль большой оси эллипса. Правильный результат склейки двух торов здесь — это два склеенных вдоль тора или, что то же самое, тор с восьмеркой в сечении (см. рис. 52).

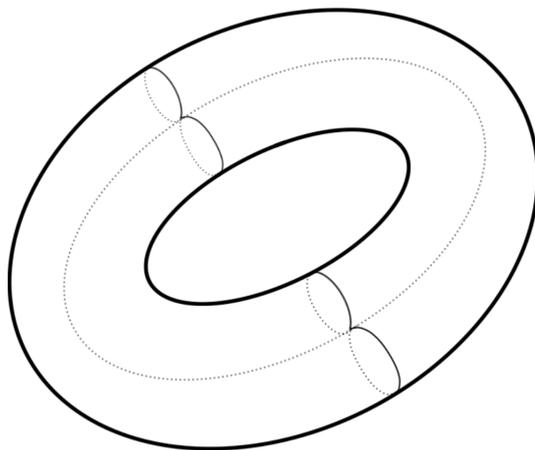


Рис. 52. Прообраз  $\Lambda = b$  в  $Q^3$ : произведение восьмерки на окружность.

## Лекция 6

### Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе

Рассмотрим прямолинейное равномерное движение бильярдного шара внутри эллипса  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ . Мы установили на прошлой лекции, что существует функция координат и скорости  $\Lambda(x, y, v_x, v_y)$  такая, что ее значение сохраняется вдоль траектории и не изменяется при отражении от границы.

В частности, это свойство для функции  $\Lambda$  сохраняется, если мы вместо граничного эллипса рассмотрим произвольную квадрику из софокусного семейства  $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$ , где если параметр  $0 < \lambda < b$ , то софокусная квадрика является эллипсом и гиперболой при  $b < \lambda < a$ . В частности, при  $\lambda = 0$  квадрика совпадает с граничным эллипсом, при  $\lambda = b$  совпадает с горизонтальной осью координат, а при  $\lambda = a$  — с вертикальной.

Напомним основные соображения прошлой лекции. Мы хотим описать слой Ливилля, или, более точно, совместный уровень энергии  $H = v_1^2 + v_2^2$  и интеграла  $\Lambda$  при  $0 < \lambda < b$ . То есть описать такое множество точек фазового пространства  $(x, y, v_1, v_2) \in Q^3 \subset M^4$ , которые будут соответствовать одновременному выполнению условий  $H = h$ ,  $\Lambda = \lambda$  для некоторых фиксированных постоянных  $h, \lambda$ .

При параметре софокусного эллипса  $0 < \lambda < b$  через точку с координатами  $x, y$  должна проходить касательная к этому эллипсу, следовательно точка  $(x, y)$  не может находиться в его внутренности. То есть, точка находится в кольце, ограниченном эллипсом с параметром  $\lambda$  и граничным (то есть эллипсом с параметром 0).

Для произвольной такой точки можно определить две касательные к эллипсу прямые, на которых можно задать четыре вектора скорости. Считаем  $H = 1$ , то есть векторы единичной длины. Для точки на эллипсе с параметром  $\lambda$  касательная прямая единственная, поэтому определить возможно только два вектора скорости. Для точки на граничном эллипсе можно определить две касательные к эллипсу с параметром  $\lambda$ , но в силу бильярдного закона из четырех векторов мы обязаны их отождествить попарно.

Как тогда устроен совместный уровень функций  $\Lambda(x, y, v_1, v_2) = \lambda, H = 1$ ? Проекцией  $\pi : M^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $\pi(x, y, v_1, v_2) = (x, y)$  получим четыре экземпляра кольца, каждому из которых соответствует свой вектор скорости (см рис. 53). Эти экземпляры

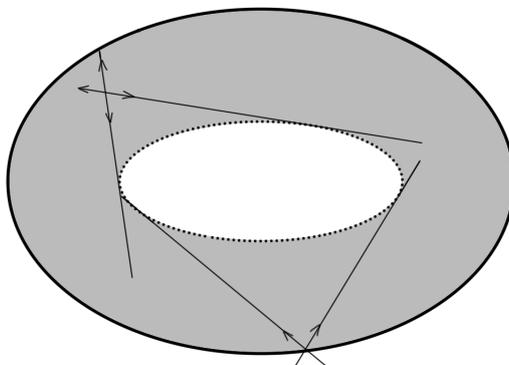


Рис. 53. Векторы скорости в образе  $\pi(Q^3)$  (серое кольцо) при  $0 < \lambda < b$ .

склеиваются по границам в соответствии с отождествлениями векторов скоростей на каждой граничной склейке.

Например, обходящие по часовой стрелке векторы склеиваются по внутреннему и по внешним эллипсам (в силу тождественного совпадения и закона отражения, соответственно), следовательно эти два листа склеиваются в один тор. Аналогично для векторов скорости,двигающихся против часовой стрелки.

Эквивалентно можно рассмотреть, изучая прообраз отрезка, соединяющего эти два эллипса. В прообразе внутренних точек такого отрезка будет пара векторов скорости, а в прообразе граничных точек — по одному вектору (если рассматривать только закрученные по часовой стрелке векторы скорости. Вообще полный прообраз содержит четыре вектора скорости). Тогда над каждым отрезком в прообразе висит по окружности. Расслаивая бильярдную область на такие отрезки, получим двумерный тор. Те же соображения справедливы для векторов, направленных против часовой стрелки.

Тогда при  $0 < \lambda < b$  совместный уровень функций  $\Lambda = \lambda$  и  $H = 1$  представляет собой два тора, из которых один соответствует движению по часовой стрелке, а второй — против часовой стрелки.

Теперь, освежив в памяти соображения для неособого слоя, перейдем к описанию более сложного случая: особого слоя.

## Топология особого слоя

Пусть  $H = h = 1$ ,  $\lambda = b$ . Рассмотрим, что будет происходить в этом случае.

Обратимся к фокальному свойству эллипса: луч, проходящий через один фокус, после отражения продолжается через второй фокус. (см. рис. 54). Рассмотрим,

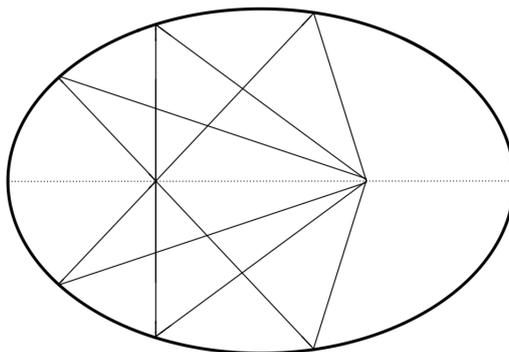


Рис. 54. Фокальное свойство эллипса.

сколько векторов скорости находятся над каждой точкой бильярдного стола. Начнем с самого простого случая: точка  $(x, y)$  находится на горизонтальной прямой между фокусами. В этом случае возможны только два вектора скорости, удовлетворяющие равенству  $\Lambda(x, y, v_x, v_y) = \lambda = b$ . А именно, подходящие векторы скорости направлены горизонтально вправо и влево. Вне соединяющего фокусы отрезка кроме точек на граничном эллипсе также можно задать два вектора скорости. Для точек на левой и правой вершине эллипса можно задать только один вектор скорости в силу бильярдного закона.

Для произвольной точки вне большей оси эллипса таких векторов можно определить четыре (по направлению к/от правого/левого фокуса).

В каждом фокусе вектор скорости может быть произвольным, чтобы выполнялось условие  $\Lambda = b$ , то есть из каждого фокуса можно отложить целую окружность векторов. Подходящие векторы изображены на рис. 55.

Особый слой можно получить как предел при  $\lambda \rightarrow b$  снизу. Мы увидим, как два тора, соответствующие движению по и против часовой стрелки, склеиваются в одну поверхность, соответствующую особому слою.

Рассмотрим следующую задачу: в эллипсе рассмотрим софокусный эллипс и оснастим его касательными векторами, как изображено на рис. 56. Внутренний эллипс будем сжимать по вертикали. Тогда возле фокусов векторы скорости «быстро разворачиваются». Результат — замкнутая кривая на  $Q^3$  для  $\lambda < b$ .

В пределе векторы скорости идут по фокальному отрезку (например, влево) и проворачиваются на угол  $\pi$  в фокусе (до предела проворачивались вдоль дуги эллипса). Соединяющий фокусы отрезок с векторами скорости, изображенными на рис. 57 является замкнутой кривой на многообразии  $Q^3$  на уровне  $\lambda = b$ .

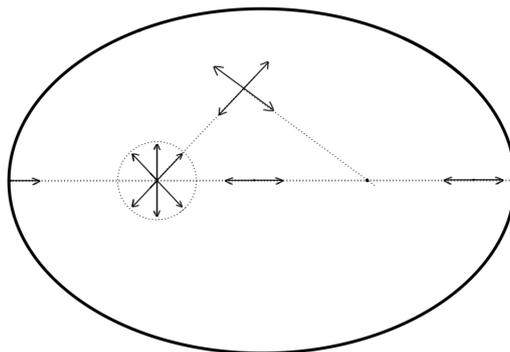


Рис. 55. Векторы скорости для  $\Lambda = b$ .

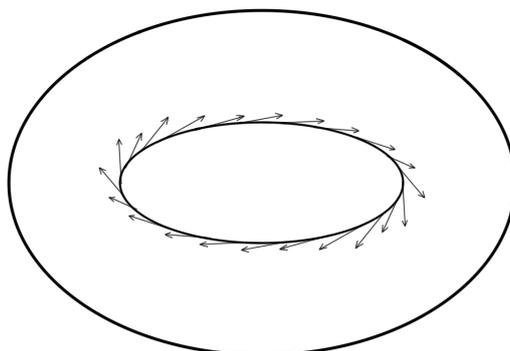


Рис. 56. Сжимается эллипс, оснащенный векторами скорости.

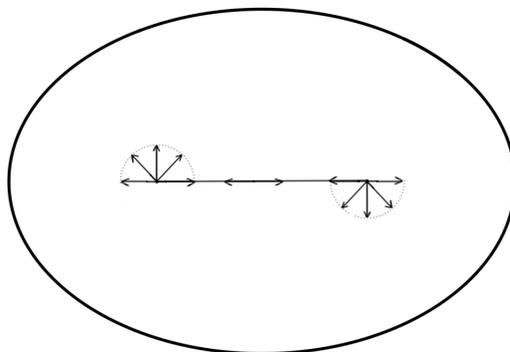


Рис. 57. Предельный случай сжатия эллипса к софокусному отрезку.

Приступим к описанию особой поверхности, соответствующей  $\lambda = b$ . Изобразим два эллипса без соединяющего фокусы отрезок. Оснастим каждое из полученных колец векторами скорости. А именно, на одном кольце зададим векторы скорости, направленные по часовой стрелке к каустике  $\lambda = b - \varepsilon$  и по часовой стрелке от каустики (каустикой выступает софокусный эллипс, как на рис. 56). На втором кольце зададим оставшиеся два вектора скорости: направленный против часовой стрелки к каустике  $\lambda = b - \varepsilon$  и против часовой стрелки от нее. В особом слое  $\lambda = b$  каустика приближается к соединяющему фокусы отрезку, и описанные векторы

превращаются в векторы, обходящие выколотый отрезок по часовой стрелке на одном кольце и против нее на втором.

**Замечание 21.** В отличие от случая  $\lambda < b$ , где векторы образовывали несвязное объединение торов, в особом слое будет получаться единое и связное множество, состоящее из двух частей. Две части будут соединяться по соединяющим фокусы отрезку. При этом окрестностями точек на общей для двух множеств кривой являются четыре половинки диска  $D^2$ , соединенные вдоль общего диаметра.

Рассмотрим множество векторов скорости для случая  $\lambda = b$ . Разделим внутренность эллипса вдоль фокальной оси на две половины:  $u$  (верхнюю) и  $d$  (нижнюю). В каждой из них можно определить по 4 вектора скорости (см. рис. 58). Векторы скорости  $v_1, \dots, v_4$  занумеруем следующим образом:

- $$\begin{aligned} v_1 &: \text{ вектор направлен в правый фокус,} \\ v_2 &: \text{ вектор направлен в левый фокус,} \\ v_3 &: \text{ вектор направлен от правого фокуса,} \\ v_4 &: \text{ вектор направлен от левого фокуса.} \end{aligned} \tag{2}$$

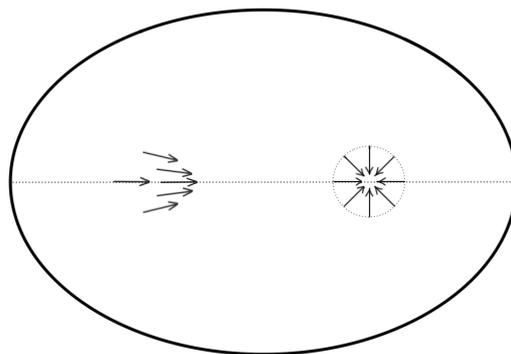
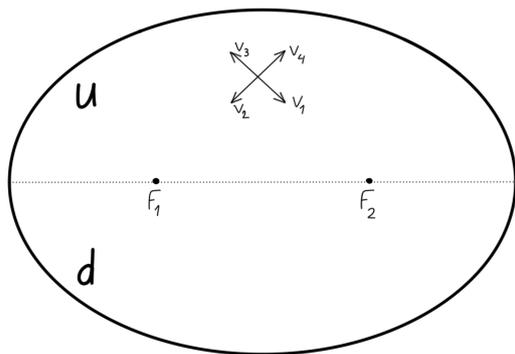


Рис. 58. Определение векторов скорости для  $\lambda = b$ . Рис. 59. Векторы  $v_1$  в окрестности обоих фокусов.

Получается 8 областей, которые определяются направлением вектором скорости и положением бильярдной точки (выше или ниже фокальной оси). Во внутренности каждой из этих областей проекция будет однозначной.

Заметим, что для точки в окрестности левого фокуса (см. рис. 59) компоненты вектора  $v_1$  меняются незначительно, в то время как в окрестности правого фокуса они устроены несколько сложнее. Аналогичные соображения справедливы для противоположно направленного  $v_3$ . Для пары векторов  $v_2, v_4$  аналогичная картина возникает с точностью до расположения фокусов.

Чтобы учесть эту особенность, из участвующих в склейке областей  $1u$  и  $1d$  вырежем окрестность правого фокуса, как изображено на рис. 60. Аналогично поступим для областей  $3u$  и  $3d$ . Для областей  $2u, 2d, 4u, 4d$  вырежем окрестность левого фокуса по тем же соображениям.

Для получения особой поверхности остается склеить восемь областей по их общим границам. При этом сегменты горизонтальной прямой между фокусов и вне

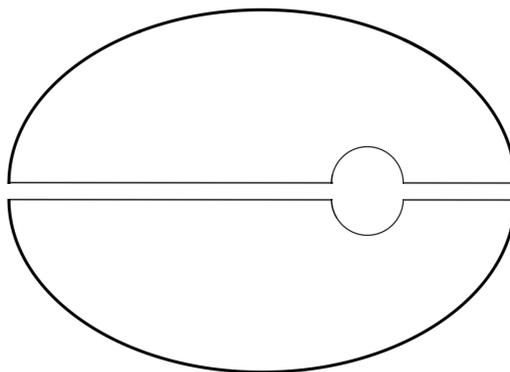


Рис. 60. Области  $1u$  и  $1d$ .

фокусов считаем разными частями границы, поскольку на них отождествляются разные пары «точка-вектор». Как можно заметить, для точки между фокусами тождественно совпадают вектор, направленный к правому фокусу и вектор, направленный от левого фокуса. Для сегмента горизонтальной прямой вне фокусов тождественно совпадают векторы, направленные к обоим фокусам.

Опишем склейки на восьми полученных четырехугольниках. Естественным будет склеить области  $1u$  и  $1d$  по горизонтальной прямой (вектор  $v_1$  на ней направлен вправо, если точка находится строго левее правого фокуса  $F_2$  и влево, если точка находится строго правее  $F_2$ ). Склейки обозначим через  $\phi$ ,  $\alpha$  и  $\gamma$  (см. рис. 61).

При этом для точки строго левее  $F_1$  (левого фокуса) совпадают векторы  $v_1$  и  $v_2$ , следовательно склейка  $\phi$  должна присутствовать на областях  $2u$  и  $2d$  (см. рис. 62). Из аналогичных соображений для точки строго правее правого фокуса  $F_2$  склейку  $\gamma$  дублируем для областей  $2u$  и  $2d$ . Склейка  $\delta$  на сегменте между фокусов является общей границей для  $2u$  и  $2d$ , а также для  $3u$  и  $3d$ , поскольку векторы  $v_2$  и  $v_3$  на этом сегменте тождественно совпадают.

Повторяя эти соображения, добавим склейки  $\varepsilon$  и  $\beta$  на сегментах горизонтальной прямой вне фокусов, как изображено на рис. 61–64.

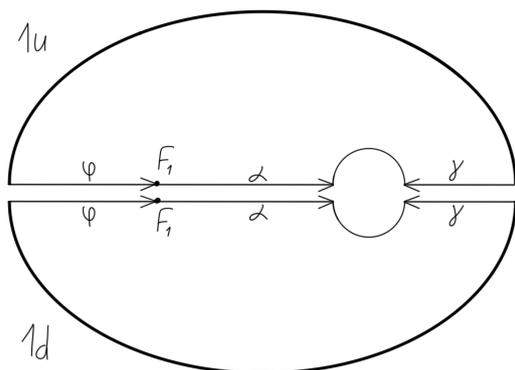


Рис. 61. Области  $1u$  и  $1d$ .

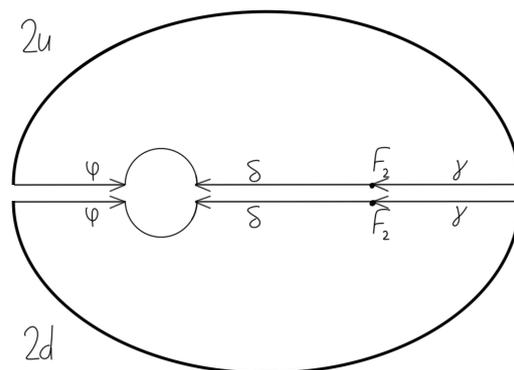


Рис. 62. Области  $2u$  и  $2d$ .

Рассмотрим склейки на дугах, окружающих фокусы. В фокусе нет никаких отражений, следовательно бильярдная траектория, двигающаяся с вектором скорости  $w$  проходит сквозь фокус без изменений компонент вектора  $w$ . В частности, если

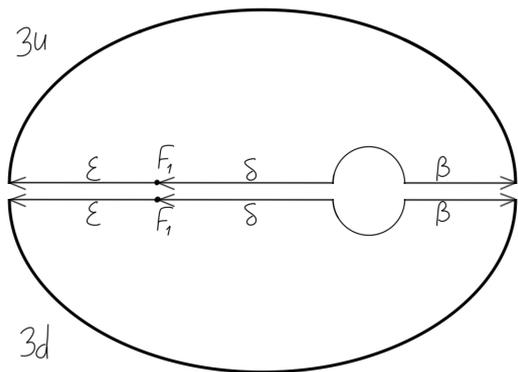


Рис. 63. Области  $3u$  и  $3d$ .

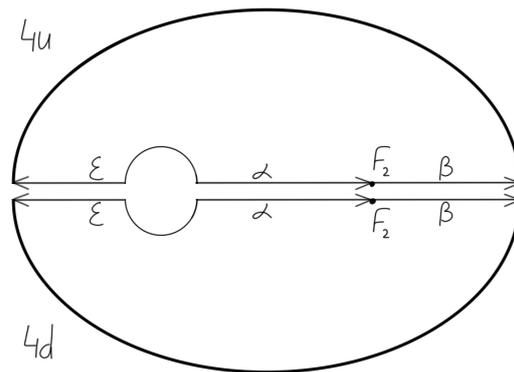


Рис. 64. Области  $4u$  и  $4d$ .

траектория, например, приходит в левый фокус из области  $2d$ , то продолжается траектория уже в верхней области  $4u$ , поскольку вектор  $w$  будет направлен от левого фокуса. При этом важно направление склейки.

Правило склейки (обозначим его  $k$ ) на дуге в  $2d$  склеивается с дугой  $k$  на области  $4u$ , как указано на рис. 66 и 68. Из аналогичных соображений добавим склейки  $f$ ,  $g$  и  $e$ . Склейки на дугах граничного эллипса следуют из бильярдного закона. Их обозначим через  $a$ ,  $c$ ,  $b$  и  $d$ .

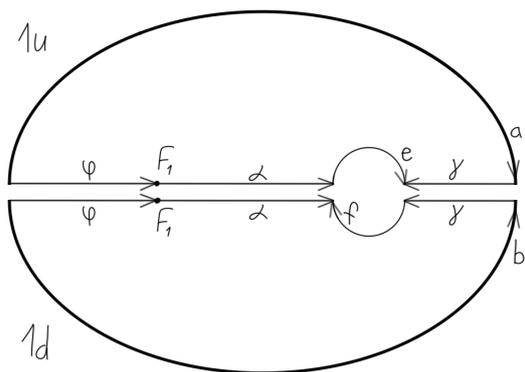


Рис. 65. Области  $1u$  и  $1d$ .

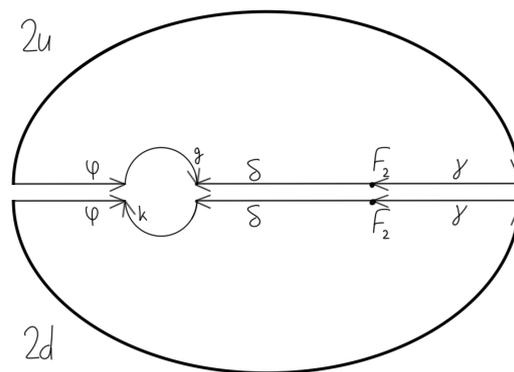


Рис. 66. Области  $2u$  и  $2d$ .

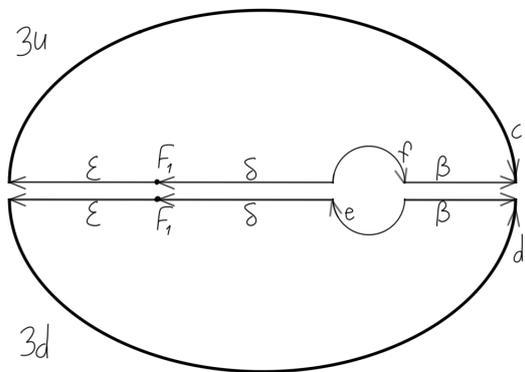


Рис. 67. Области  $3u$  и  $3d$ .

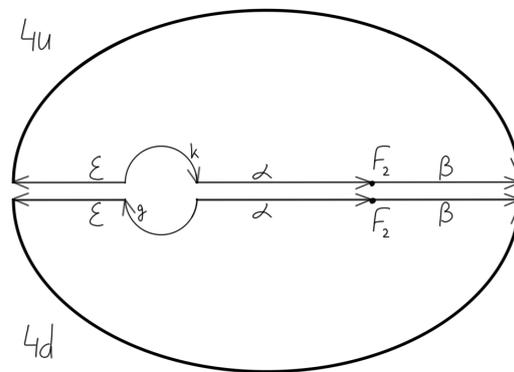


Рис. 68. Области  $4u$  и  $4d$ .

Явная склейка приведенных на рис. 65–68 областей  $1u$ ,  $4u$ ,  $2d$ ,  $3d$  приводит к многоугольнику с ориентированными отрезками на границе, изображенному на рис. 69.

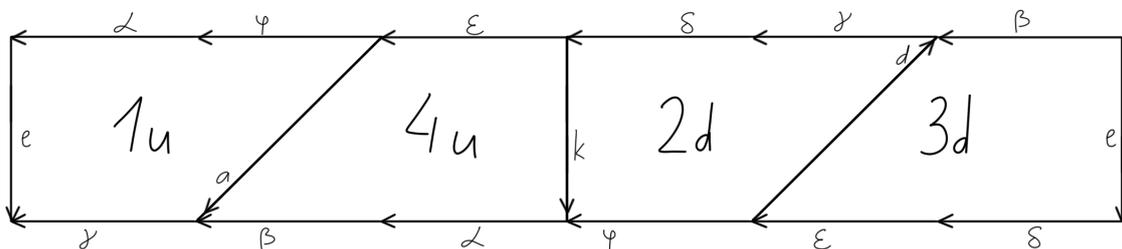


Рис. 69. Склейка областей  $1u$ ,  $4u$ ,  $2d$  и  $3d$ .

Как можно заметить, на рис. 69 изображена развертка цилиндра, к которого склеены основания. Следовательно, склейка указанных четырех областей является тором. Склейка оставшихся областей также является тором (см. рис. 70).

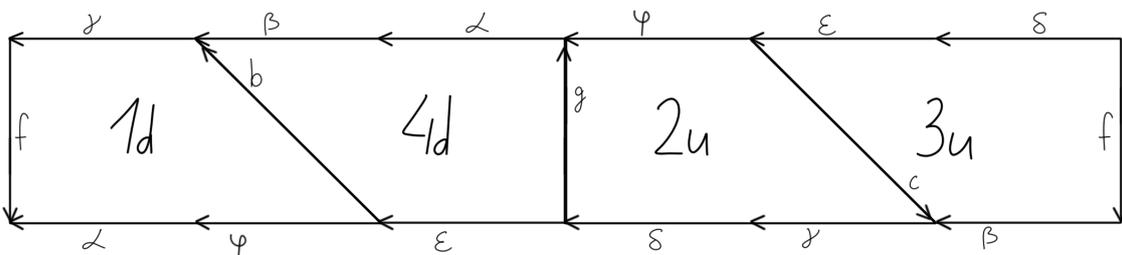


Рис. 70. Склейка областей  $1d$ ,  $4d$ ,  $2u$  и  $3u$ .

На обоих торах будет зафиксирована образующая, которой в развертке соответствуют ребра  $\alpha\phi\epsilon\delta\gamma\beta$ , причем по этой образующей два тора должны будут склеиваться.

**Замечание 22.** До особого уровня  $\lambda = b$  особым уровням соответствовало несвязное объединение двух торов. А именно, соответствующий обходу каустики (являющейся эллипсом при  $\lambda < b$ ) по часовой стрелке тор получался склейкой областей  $3u$ ,  $4u$ ,  $3d$  и  $4d$ .

Рассмотрим движение бильярдной траектории вдоль большой оси эллипса и попробуем понять, что соответствует такому движению в особом слое. В особом слое такому движению соответствует некоторая кривая. Рассмотрим эту кривую на близком неособом торе (то есть при близком  $\lambda < b$ ) и снабдим векторами скорости, как изображено на рис. 71.

Этой кривой на близком неособом торе соответствует кривая, которая дважды обходит вокруг «тела бублика» и один раз обходит вокруг «дырки бублика», как можно увидеть на рис. 72.

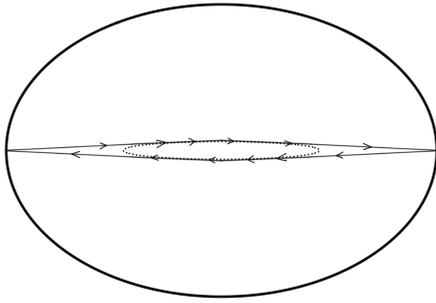


Рис. 71. Проекция кривой на близкий неособый случай  $\lambda < b$ .

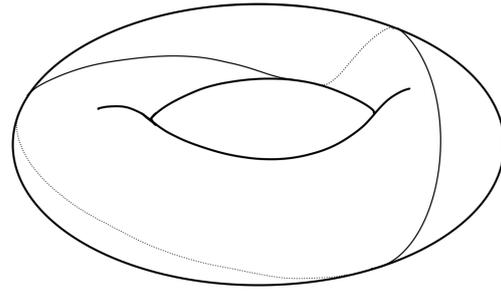


Рис. 72. Кривая на близком неособом торе.

## Лекция 7

### Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе

Прошлая лекция была посвящена изучению особой поверхности для бильярда в эллипсе  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ . А именно, для интеграла  $\lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (xv_2 - yv_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}$  и функции  $H = v_1^2 + v_2^2$  на фазовом пространстве  $M^4$  была рассмотрена поверхность совместного уровня  $H = 1$  и  $\lambda = b$ . В частности:

- при  $b < \lambda < a$  такой поверхностью выступает тор;
- при  $\lambda = b$  такой поверхностью выступает особая поверхность с прошлой лекции;
- при  $0 < \lambda < b$  такой поверхностью выступает несвязное объединение двух торов.

В последнем случае один тор соответствует векторам скорости, направленным по часовой стрелке, а второй тор — векторам скорости, направленным против часовой стрелки.

Особый слой можно представить себе как тор с восьмеркой в сечении (см. рис. 52), он получается как склейка 69 и 70 по схеме, изображенной на рис. 73.

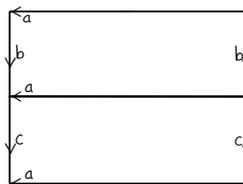


Рис. 73. Склейка особой поверхности.

Покажем, почему случаю  $\lambda \in (b, a)$  соответствует один тор. Иными словами, когда каустика является гиперболой, а заметаемая траекторией область заключена между ее ветвями и граничным эллипсом. Для любой внутренней точки в заметаемой траекторией области существует четыре вектора скорости, задающие касательные к гиперболе лучи.

Рассмотрим нюанс, связанный с определением касательных векторов. Из точки  $A_1$  на 74 можно провести две касательные к правой ветви гипебролы, аналогично

к левой ветви из точки  $A_2$ . Для точек  $A_3$  и  $A_4$  также можно провести две касательные при этом одна касательная направлена к левой ветви гиперболы, а вторая — к правой ветви гиперболы. При этом касание гиперболической дуги происходит до точки пересечения с асимптотой. Из точки, лежащей на одной из асимптот, можно провести две касательные: одна совпадает с асимптотой, вторая направлена к "ближайшей" дуге гиперболы. Наконец, для точки на пересечения асимптот касательные совпадают с асимптотами.

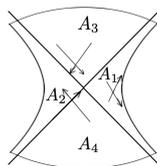


Рис. 74. Касательные векторы к гиперболе.

Приведём склейку четырех таких областей с фиксированными на них векторами скорости. При этом векторы скорости определим зависимости от их направления в произвольной точке  $P \in A_1$ :

- $v_1$  направлен к правой вниз;
- $v_2$  направлен к правой вверх;
- $v_3$  направлен от правой вверх;
- $v_4$  направлен от правой вниз.

Листы склейки, соответствующие определенным таким образом векторам  $v_1, \dots, v_4$ , изобразим на рис. 75–78.

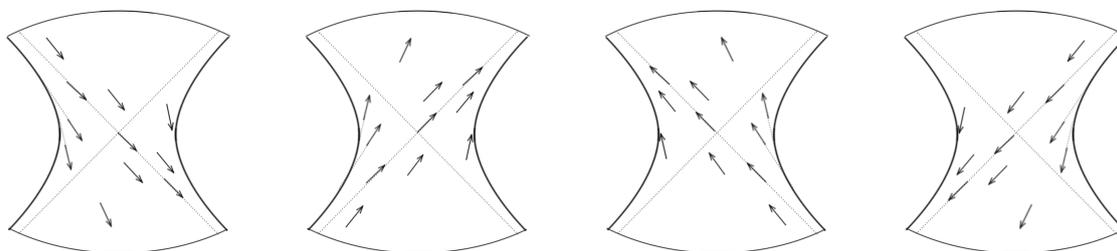


Рис. 75. Область  $v_1$ . Рис. 76. Область  $v_2$ . Рис. 77. Область  $v_3$ . Рис. 78. Область  $v_4$ .

На левой гиперболической дуге тождественно совпадают  $v_1 \sim v_4$ , а также  $v_2 \sim v_3$ . Аналогично для правой гиперболической дуги. В силу отражения на эллиптических дугах требуется отождествить  $v_1 \sim v_2$  и  $v_3 \sim v_4$ . На граничных дугах областей отметим ребра, соответствующие склейкам (см. рис. 79–82). Результатом склейки областей на рис. 79–82 по одноименным ребрам является двумерный тор.

Нами был доказан недостающий пункт для следующей теоремы:

**Утверждение 8.** Энергетической поверхность  $Q^3 \in M^4$  разбивается на поверхности уровня  $\lambda$  следующим образом (см. рис. 83) :

- При  $\lambda = 0$  поверхность соответствует двум окружностям бильярда;

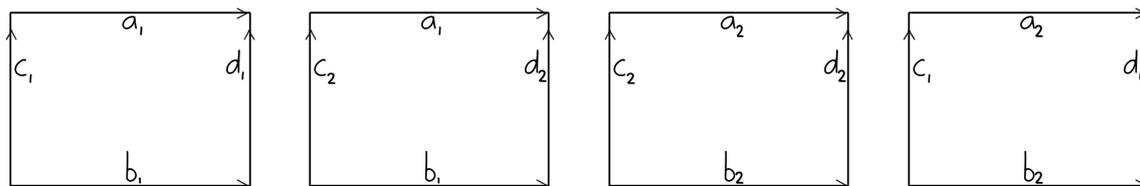


Рис. 79. Область  $v_1$ . Рис. 80. Область  $v_2$ . Рис. 81. Область  $v_3$ . Рис. 82. Область  $v_4$ .

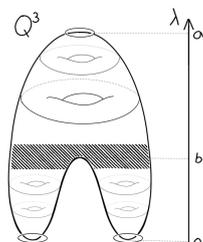


Рис. 83. Слоение  $Q^3$  на поверхности уровня  $\lambda$ .

- При  $\lambda \in (0, b)$  поверхность является дизъюнктивным объединением двух торов;
- При  $\lambda = b$  поверхность гомеоморфна произведению восьмерки на окружность;
- При  $\lambda \in (b, a)$  поверхность является тором;
- При  $\lambda = a$  поверхность является одномерной окружностью.

При этом любопытно будет изучить окрестность особой точки  $\lambda = b$ , а именно рассмотреть прообраз  $\lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  для малого  $\varepsilon > 0$ . Прообраз интервала выглядит как перестройка двух торов в один тор. В сечении (см. рис. 84) прообраз окрестности можно представить себе как перестройку двух окружностей в одну.

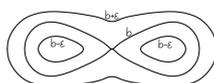


Рис. 84. Поперечное сечение окрестности  $\lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  особого значения  $b$ .

Полученное слоение можно характеризовать не просто в терминах прообраза (какая поверхность лежит в прообразе точки), а учитывать устройство слоения в прообразе окрестности значения. Для этого уйдем от отображения  $Q^3$  в множество значений функции  $\lambda$  к графу. Концы графа соответствуют окружностям, ребра соответствуют неособым поверхностям (торам), а средний слой соответствует особой поверхности (произведению окружности на восьмерку).

$B$  обозначает слоение, сечение которого изображено на 84. Само сечение получается из «толстой восьмерки» на 84 умножением на окружность  $S^1$ .

А соответствует слоению тора, которое в поперечном сечении выглядит как слоение диска на concentric окружности. Вложенные торы стягиваются на окружность, и этой окружности в сечении соответствует точка в центре диска.

**Определение 1.** Значение  $c$  гладкой функции  $f : M^n \mapsto \mathbb{R}$  называется бифуркационным, если  $f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  не гомеоморфно прямому произведению интервала

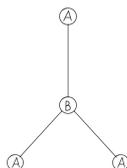


Рис. 85. Граф, соответствующий описанному слоению.

$(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  на  $f^{-1}(c)$ .

Заметим, что бифуркационная точка не обязательно является критической точкой. Примером служит сечение плоскостью некоторого конуса. Пусть некоторая плоскость пересекает конус перпендикулярно оси конуса вне вершины последнего. Такое плоское сечение конуса является окружностью. Далее плоскость поворачивается, вместе с чем угол между осью конуса и вектором нормали к плоскости начнет увеличиваться. Плоские сечения конуса являются эллипсами до тех пор, пока плоскость не станет параллельна одной из направляющих конуса. В этом случае плоское сечение является параболой. Дальнейшее увеличение угла приводит к тому, что последующие плоские сечения конуса являются гиперболами.

Слоение устроено как серия расширяющихся вложенных эллипсов, которые в некоторый момент разрываются (а именно, когда плоское сечение конуса становится параболой), а последующие кривые в сечении будут незамкнутыми (соответствуют случаям, когда плоское сечение становится гиперболой). Из этого примера видно (для некомпактного многообразия), что тип слоя может меняться, то есть есть точка бифуркации. Вместе с тем критических точек нет, поскольку плоскость мы взяли такую, что она всегда пересекает конус.

Рассмотрим бильярд внутри правой (левой) половины эллипса.

**Замечание 23.** *Малая ось эллипса является частным случаем софокусной гиперболы. Поэтому область, ограниченная малой осью эллипса и дугой эллипса, является частным случаем области, ограниченной одной дугой гиперболы  $\lambda \in (b, a)$  и дугой эллипса. Поэтому следующие соображения справедливы также и для более широкого класса областей.*

Область  $\Omega$  определена как  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq 1, x \geq 0$ . Рассмотрим области, заметаемые бильярдной траекторией для различных значений каустики  $\lambda$ , соответствующей софокусной кватрике  $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$ .

Для  $\lambda \in (0, b)$  заметаемая траекторией область изображена на рис. 86 вне пунктирной дуги эллипса, соответствующей параметру  $\lambda$  и ограничена дугами двух эллипсов и двух сегментов малой оси граничного эллипса. Векторы  $v_1, \dots, v_4$  определим как ранее для случая, когда каустика является эллипсом:

- вектор  $v_1$  направлен по часовой стрелке к каустике;
- вектор  $v_2$  направлен против часовой стрелки к каустике;
- вектор  $v_3$  направлен против часовой стрелки от каустики;
- вектор  $v_4$  направлен по часовой стрелке от каустики.

При этом в силу бильярдного закона на эллиптических дугах склеиваются векторы  $v_1 \sim v_4, v_2 \sim v_3$ , а на прямолинейных отрезках —  $v_1 \sim v_2, v_3 \sim v_4$ . Четыре

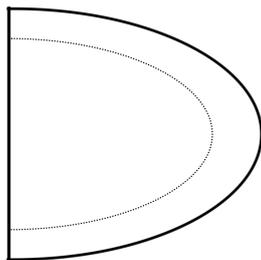


Рис. 86. Область  $\Omega$  и дуга эллипса с параметром  $\lambda$ .

экземпляра области, изображенной на рис. 86 вне пунктира, склеиваются на эллиптических дугах в два цилиндра, которые затем в силу склейки на границах цилиндра склеиваются в регулярную поверхность для случая  $\lambda \in (0, b)$  — один двумерный тор.

Аналогичная картина получится для  $\lambda \in (b, a)$  — там также будет один тор. Уровням  $\lambda = 0$  и  $\lambda = a$  соответствуют окружностям. Схему расслоения изобразим на рис. 87.

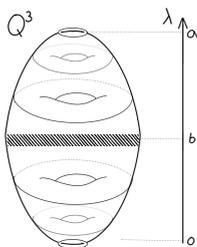


Рис. 87. Расслоение  $Q^3$  на поверхности уровня  $\lambda$  кроме уровня  $\lambda = b$ .

Отдельно рассмотрим случай  $\lambda = b$ . Область  $\Omega$  разбивается на верхние и нижние треугольники по горизонтальной оси. При этом повторим соображения в окрестности фокусов, вследствие чего на треугольниках появляются полукруглые вырезы. Векторы скоростей в произвольной точке направлены в сторону одного из фокусов или в противоположную одному из фокусов сторону. Нумерацию будем использовать следующую:

- вектор  $v_1$  направлен к правому фокусу;
- вектор  $v_2$  направлен к левому фокусу;
- вектор  $v_3$  направлен от правого фокуса;
- вектор  $v_4$  направлен от левого фокуса.

На рис. 88—91 изображены части  $\Omega_i^u$  и  $\Omega_i^d$ , где  $i = 1, \dots, 4$ , являющиеся левой и правой половиной области с ассоциированным при них вектором скорости  $v_i$ .

Склейка полученных восьми областей изображена на рис. 92. Результат можно переклеить и привести к следующему виду (см. рис. 93). Результирующая особая поверхность (см. рис. 94) выглядит похожей на ту, что можно было видеть для бильярда в эллипсе. Но только отдаленно. В частности, эта особая поверхность уже не является произведением восьмерки на окружность ввиду перекрутки. Приведен-

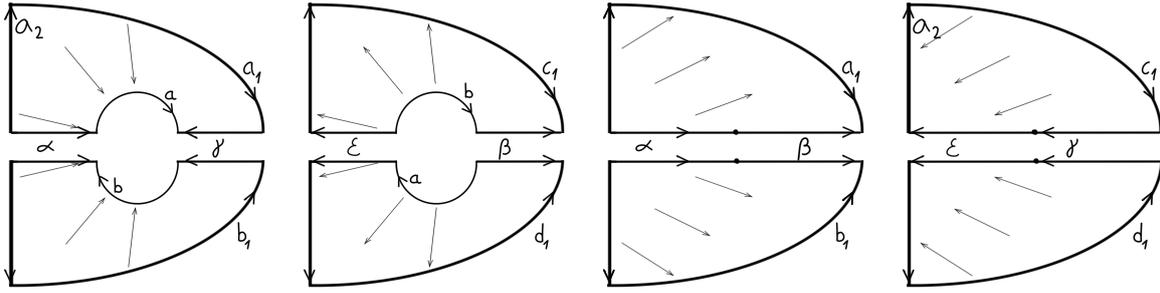


Рис. 88. Листы  $\Omega_1^d$  и  $\Omega_1^u$ . Рис. 89. Листы  $\Omega_2^d$  и  $\Omega_2^u$ . Рис. 90. Листы  $\Omega_3^d$  и  $\Omega_3^u$ . Рис. 91. Листы  $\Omega_4^d$  и  $\Omega_4^u$ .

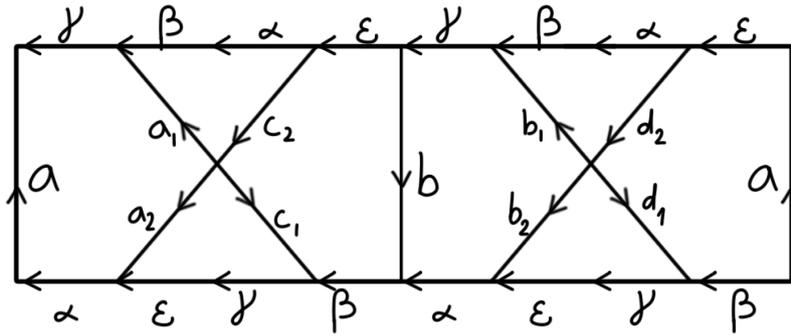


Рис. 92. Склейка областей  $\Omega_1^d, \dots, \Omega_4^d, \Omega_1^u, \dots, \Omega_4^u$ .

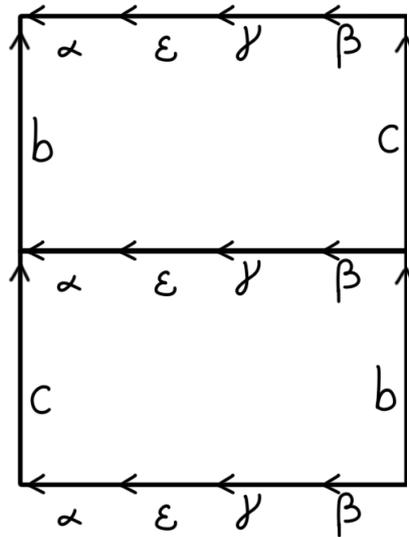


Рис. 93. Эквивалентная рис. 92 склейка.

ный особый слой обозначается как  $A^*$ , молекула для бильярда в половине эллипса выглядит следующим образом:

$$A - A^* - A.$$

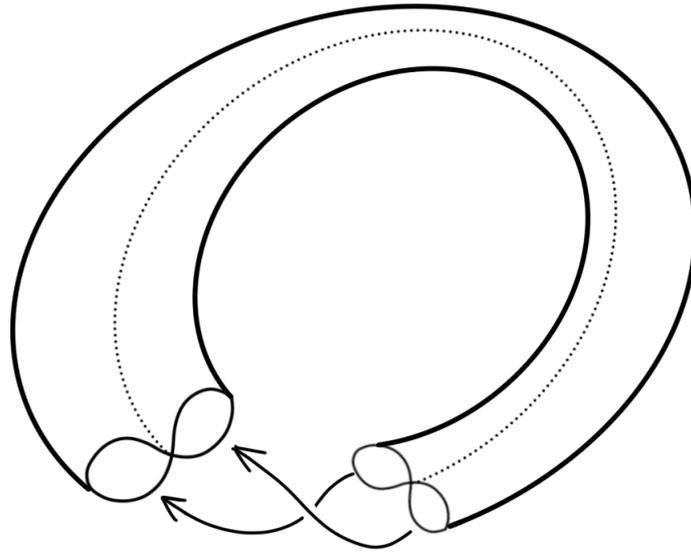


Рис. 94. Особая поверхность.

## Лекция 8

### Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе

Напомним основные результаты прошлых лекций. Для бильярда в эллипсе  $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$  граничный эллипс соответствует значению  $\lambda = 0$ . Уровень  $\lambda = b$  особый и соответствует траекториям, в которых линейно зависимы  $d\lambda$  и  $dH$ , где  $H = v_1^2 + v_2^2$ .

Было рассмотрено слоение в окрестности особого значения  $\lambda = b$ . Слоение выглядит следующим образом (см. рис. 84): восьмерка (она соответствует  $\lambda = b$ ) снаружи обрамляется замкнутой дугой (она соответствует  $\lambda > b$ ), а внутри содержит две замкнутые дуги (они соответствуют  $\lambda < b$ ) в каждой из своих половин. Сама окрестность  $\lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  выглядит как эта расслоенная восьмерка (рис. 84), умноженная на окружность  $S^1$ . Движению вдоль фокальной оси на уровне  $\lambda = b$  соответствует точка в центре восьмерки, умноженная на окружность.

Также была рассмотрена система в меньшей области, а именно в половине эллипса  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, x \geq 0$  (в частности, могли взять вместо вертикальной прямой любую дугу софокусной гиперболы и в качестве области рассмотреть любую из полученных половин эллипса). Сечение особого слоя получается аналогичным. Однако, устройство слоения отличается: при умножении на окружность  $S^1$  необходимо проследить, чтобы восьмерка «перекрутилась», как изображено на рис. 94. Умножение на окружность с указанной перекруткой можно обозначить как  $\times S^1 / \mathbb{Z}_2$

Особенности перекручивания здесь следуют из наличия фокуса в бильярдной области  $\Omega$ .

Рассмотрим бильярд в эллиптическом кольце, то есть ограниченный эллипсами

$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$ , соответствующими параметрам  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \lambda_e \in (0, b)$ . Рассмотрим устройство изоэнергитического многообразия  $Q^3$  при его расслаивании по значениям интеграла  $\lambda$ .

Случай  $\lambda = 0$  соответствует случаю, когда каустика совпадает с внешним граничным эллипсом, то есть бильярдная траектория движется вдоль границы. Движениям по часовой стрелке и против часовой стрелки в этом случае соответствует по одной окружности  $S^1$ .

Для  $0 < \lambda < \lambda_e$ , когда каустика является эллипсом между граничных эллипсов, каждая из этих окружностей превращается в тор. Действительно, расслоим эллиптическое кольцо на ветви софокусных гипербол и рассмотрим прообраз отрезка гиперболы, содержащийся в кольце (см. рис. 95).

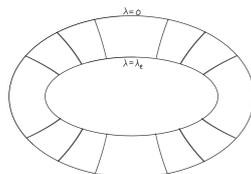


Рис. 95. Эллиптическое кольцо расслаивается на дуги гипербол.

Рассмотрим произвольную такую дугу гиперболы и точку на ней. Через эту точку проходит некоторый эллипс из того же семейства софокусных квадрик что и остальные квадрики. Тогда к этому и любому эллипсу внутри него из точки можно провести касательную. Обозначим  $\tilde{\lambda}_e$  — параметр эллипса, проходящего через эту произвольную точку. Тогда можем сказать, что из этой точки можно провести касательные, соответствующие каждому  $\lambda > \tilde{\lambda}_e$ .

Множество касательных векторов из этой точки к эллипсам с параметрами  $\lambda > \tilde{\lambda}_e$  изображено на рис. 96 и может быть описано двумя дугами (дуги очерчиваются концами векторов скорости). Причем для малых  $\tilde{\lambda}_e$  такие дуги длиннее, поскольку из точек на большом эллипсе можно провести касательные к большему количеству эллипсов. Для  $\tilde{\lambda}_e = \lambda_e$  таких векторов всего два. Этим дугам, соответствующим касательным векторам к эллипсам, сопоставим треугольники как на рис. 96.

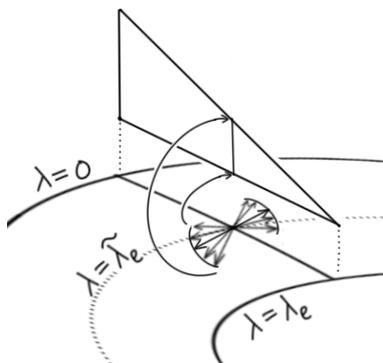


Рис. 96. Касательные векторы из точки и соответствующий им треугольник.

При этом касательным векторам, направленным к каустическому эллипсу  $\tilde{\lambda}_e$  по и против часовой стрелки сопоставляются по два различных треугольника. Изобразим на любом таком треугольнике линии уровня интеграла  $\lambda$  (см. рис. 97).

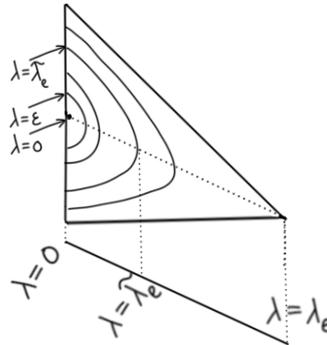


Рис. 97. Линии уровня интеграла  $\lambda$  на одном из треугольников.

Левая сторона треугольника, на которой лежат точки каждой линии уровня, соответствует внешнему граничному эллипсу. На нем векторы отражаются, следовательно на диаграмме тоже требуется отождествить точки, которые принадлежат одному уровню  $\lambda$  (см. рис. 98). Аналогично поступим для второго треугольника. Результат склейки эквивалентен расслоению двумерного диска на концентрические

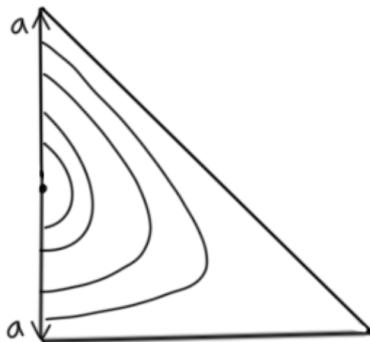


Рис. 98. Склейка в силу отражения на внешнем эллипсе.

окружности с центром, соответствующим  $\lambda = 0$ .

При умножении на окружность  $S^1$  мы получим слоение окрестности особого слоя: две окружности соответствуют  $\lambda = 0$ , при увеличении  $\lambda \in (0, \lambda_e)$  поверхности превращаются в два тора.

При  $\lambda = \lambda_e$  граничный эллипс в то же время является касательной квадрикой для всех звеньев бильярдной траектории.

Расслаиваем область на ветвь гиперболы и смотрим, как устроен прообраз

Рассмотрим случай  $\lambda > \lambda_e$ . Повторим соображения рис. 96: возьмем произвольную точку в эллиптическом кольце и рассмотрим к каким эллипсам с параметром

$\lambda$  можно провести касательные (при этом  $\lambda > \lambda_e$ ). При этом из точек на  $\lambda = \lambda_e$  теперь можно будет провести несколько векторов, но их придется отождествить. То есть вместо двух треугольников будут два четырехугольника (см. рис. 99).

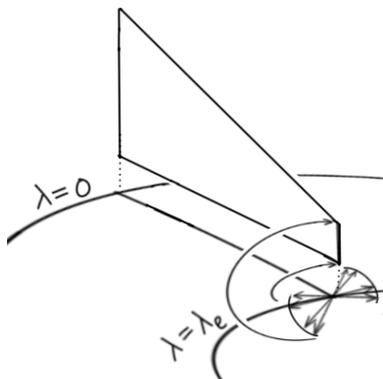


Рис. 99. Касательные векторы из точки и соответствующий им четырехугольник.

Две из сторон четырехугольника соответствуют граничным эллипсам кольца, на которых заданы отражения. Следовательно, на двух противоположных ребрах четырехугольников заданы склейки. Пример одного из прямоугольников с линиями уровня  $\lambda$  изображен на рис. 100.

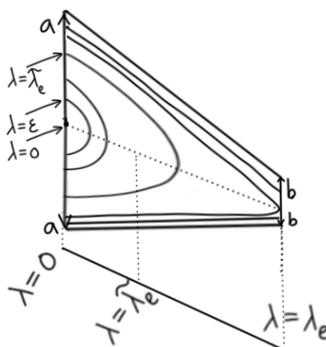


Рис. 100. Линии уровня интеграла  $\lambda$  и склейки на одном из четырехугольников.

Результат склейки также эквивалентен расслоению двумерного диска на концентрические окружности с центром, соответствующим  $\lambda = 0$ .

По соображениям  $\lambda \in (0, \lambda_e)$  аналогично заключаем, что при  $\lambda \in (\lambda_e, b)$  поверхность также является двумерным тором.

Рассмотрим особый слой: пусть  $\lambda = b$ . Оба фокуса не попадают в эллиптическое кольцо, поэтому через один из фокусов проходят не сами звенья бильярдной траектории, а только их продолжения.

Эллиптическое кольцо предлагается расслоить на софокусные эллипсы. Рассмотрим сколько векторов скорости можно провести из произвольной точки эллипса между  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \lambda_e$  таких, чтобы соответствующий вектору луч проходил хотя бы через один из фокусов. Таких векторов будет по 4 в каждой внутренней точке эллипса кроме тех, что лежат на горизонтальной прямой: по одному вектору

направлено в каждый из фокусов, еще два вектора направлены от каждого из фокусов. При этом для точки на соединяющей фокусы прямой совпадают оба вектора, направленные к фокусам и оба вектора, направленные от фокусов (см. рис. 101). Следовательно, соответствующие векторы должны быть отождествлены.

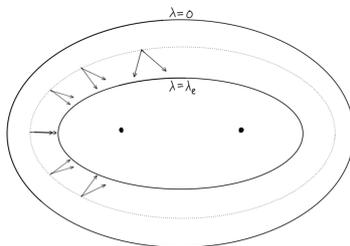


Рис. 101. Векторы скорости, направленные к фокусам.

Следовательно, каждая точка произвольного эллипса между граничными эллипсами бильярдной области имеет по четыре точки-прообраза за исключением двух вершин эллипса. Тогда прообразом всего эллипса являются четыре эллипса, соответствующие векторам  $v_1, \dots, v_4$ , где

- вектор  $v_1$  направлен к правому фокусу;
- вектор  $v_2$  направлен к левому фокусу;
- вектор  $v_3$  направлен от правого фокуса;
- вектор  $v_4$  направлен от левого фокуса.

При этом эллипсы для  $v_1$  и  $v_2$  склеиваются в двух точках эллипса, пересекающих горизонтальную ось. Аналогично для  $v_3$  и  $v_4$  (см. рис. 102).

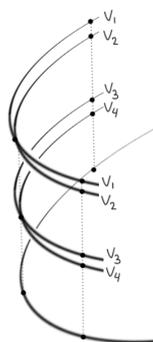


Рис. 102. Прообраз произвольного эллипса в эллиптическом кольце.

Тогда прообраз каждого эллипса выглядит как четыре окружности, соответствующие векторам  $v_1, \dots, v_4$ , причем окружности  $v_1$  и  $v_2$  пересекаются по двум точкам, как изображено на рис. 103. Аналогично для окружностей  $v_3$  и  $v_4$ .

Причем множество таких эллипсов, на которые мы расслаиваем бильярдную область, соответствует отрезку  $[0, \lambda_e]$ . Следовательно, полный прообраз бильярдной области получается умножением двух изображенных на рис. 103 плоских фигур на отрезок. Граница полученных таким образом двух цилиндров соответствует параметрам граничных эллипсов  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \lambda_e$ . В силу отражения на граничных

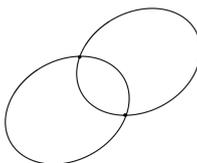


Рис. 103. Половина прообраза произвольного эллипса.

эллипсах, цилиндры надлежит склеить на соответствующих границах. А именно, соответствующая вектору  $v_1$  часть цилиндра должна склеиться с соответствующей вектору  $v_4$  частью другого цилиндра. Аналогично для  $v_2$  и  $v_3$ .

Таким образом, особому слою  $\lambda = b$  соответствует тор, сечение которого выглядит как изображено на рис. 103.

Рассмотрим близкие к особым уровни  $\lambda$ . При  $\lambda = b + \varepsilon$  каустика является гиперболой с асимптотами, близко прижимающимися к горизонтальной прямой. При  $\lambda = b - \varepsilon$  — эллипсом, прижимающимся к соединяющему фокусы отрезком.

Рассмотрим дугу произвольного эллипса в бильярдной области и рассмотрим прообраз его дуги при  $\lambda \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ . При этом наша дуга не произвольная: мы потребуем, чтобы она пересекала горизонтальную ось эллипса (например, в правой части кольца).

Прообразом такой дуги на уровне  $\lambda = b$  будут две пары пересекающихся кривых (два «креста»): одна пара соответствует векторам, направленным от фокусов, вторая — направленным к фокусам (см. рис. 103). Рассмотрим для начала пару векторов  $v_1, v_2$ , направленных к правому и левому фокусам, соответственно. Точке на дуге и векторам  $v_1, v_2$  в прообразе соответствует «крест», четыре луча которого определяются фокусом, к которому направлен вектор скорости (левый или правый фокус) и расположением точки выше или ниже горизонтальной прямой (см. рис. 104).

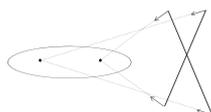


Рис. 104. Прообраз дуги на уровне  $\lambda = b$ .

Из любой точки дуги можно провести касательные к близкому к фокальному отрезку эллипсу с параметром  $\lambda = b - \varepsilon$ . При этом для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  направляющие векторы этих касательных отличаются от  $v_1$  и  $v_2$  на небольшой угол. Этим векторам соответствуют линии уровня  $\lambda = b - \varepsilon$  в прообразе  $\lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ , при этом кривые в окрестности луча, направленного к правому фокусу в полуплоскости  $y > 0$ , соответствуют касательным к эллипсу векторам, направленным по часовой стрелке.

На рис. 105 дополним крест, изображенный на рис. 104 для особого значения  $\lambda = b$ . Верхняя и нижняя половины креста соответствуют значениям  $\lambda < b$ , правая и левая — значениям  $\lambda > b$ . Линии уровня интеграла  $\lambda$  должны быть замкнутыми.

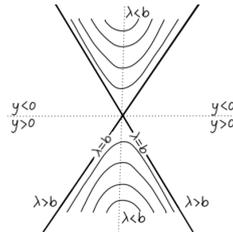


Рис. 105. Прообраз дуги на уровнях  $\lambda \leq b$ .

Для уровней  $\lambda = b + \varepsilon$  каустика является гиперболой, прижимающейся к горизонтальной оси. При этом наша дуга пересекается с правой ветвью каустики. Линии уровня получаются аналогичным способом. При этом, поскольку траектория не сможет пересечь каустическую и переходить между плоскостями  $y < 0$  и  $y > 0$ , линии уровня на рис. 105 левее креста соответствуют траектории, замкнутой между дуг гиперболы в верхней полуплоскости, а правее креста — в нижней полуплоскости.

На кресте и линиях уровня в его окрестности можно задать направления. А именно, по двум противоположным лучам зафиксируем направление к центру, а на двух других — от центра креста.

Напомним, что этот крест соответствует небольшому отрезку произвольного эллипса в окрестности его правой вершины. Полный прообраз такого эллипса включает в себя два таких креста, которые надо склеить между собой. Утверждается, что эти два листа склеиваются с согласованием направлений, заданных на образующих их лучах (см. рис. 106).

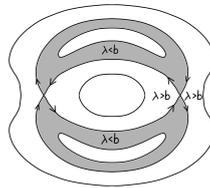


Рис. 106. Прообраз произвольного эллипса в  $\lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  — плоский атом  $C_2$

Вся окрестность особого слоя получается умножением изображенного на рис. 106 плоского атома  $C_2$ , взятого в двух экземплярах, на два отрезка (каждый  $C_2$  умножается на один отрезок). Склейка полученных цилиндров по их границе эквивалентна умножению  $C_2$  на окружность  $S^1$ . Этот неочевидный факт следует из того, что серые области на рис. 106 переходят сами в себя, а не друг в друга. То, что они переходят сами в себя, следует из того, что они соответствуют движениям по или против часовой стрелки вокруг каустического эллипса; никакое отражение внутри эллиптического кольца не может обратить направление обхода касательного эллипса.

## Лекция 9

### Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе

На предыдущей лекции мы исследовали интегрируемые бильярдные системы в ограниченных софокусными квадриками областях: были рассмотрены области, ограниченные эллипсом, парой эллипсов и «половина» эллипса с разрезом вдоль вертикальной линии или вдоль одной ветви гиперболы с теми же фокусами. В частности, для них были рассмотрены перестройки  $B$ ,  $C_2$  и  $A^*$  торов Лиувилля для таких систем. Еще одна особенность, которая возникала в прошлых лекциях, — это локальные минимумы/максимумы функции  $\lambda$ . Эта особенность обозначается как  $A$ . Подробное описание особых поверхностей и бифуркаций см. в прошлых лекциях

Сегодня предлагается рассмотреть, какие вообще могут возникать перестройки на двумерных поверхностях. Начнем с самой простой двумерной поверхности: плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Пусть задана функция

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R},$$

на поверхности при этом можно рассматривать кривые постоянного уровня функции  $f$ .

Нас будут интересовать точки, в которых  $df = 0$ .

**Определение 2.** *Критической точкой функции  $f$  на  $\mathbb{R}^2$  называется такая точка, в которой  $df = 0$  или, что эквивалентно,  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0, 0)$ , где  $x, y$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^2$ .*

Аналогично можно определить критическую точку для регулярной замены координат, когда для декартовых координат  $(x, y)$  определяются новые координаты  $(x', y') = (x'(x, y), y'(x, y))$ . Считаем, что  $x'(x, y), y'(x, y) \in C^\infty$ . Рассмотрим произвольную точку  $(x_0, y_0)$ . Для этой точки ее координаты в новой системе координат  $(x', y')$  имеют смысл в том случае, если замена координат в точке является регулярной, то есть

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$$

Тогда справедливо будет предположить, что функция  $f \in C^\infty(x, y)$  будет гладкой также в координатах  $(x', y')$ :  $f \in C^\infty(x', y')$  в точках, где якобиан замены переменных не обращается в нуль.

Более того, если точка была критической, то свойство  $df = 0$  не зависит от конкретного выбора системы координат  $(x, y)$ . А именно,

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} = 0 \frac{\partial x}{\partial x'} + 0 \frac{\partial y}{\partial x'} = 0,$$

аналогично для  $\frac{\partial f}{\partial y'}$ . Оформим это соображение в виде утверждения:

**Утверждение 9.** Если  $P = (x_0, y_0)$  — критическая точка для  $f(x, y)$ , тогда  $P' = (x'_0, y'_0)$  — критическая для  $f(x(x'), y(y'))$ .

**Определение 3.** Значение  $c$  такое, что  $f = c$  называется критическим значением функции  $f$ , если в прообразе этого значения  $f^{-1}(c)$  имеются критические точки. Если таких точек нет, тогда такое значение называется регулярным значением функции  $f$ .

Рассмотрим, как может устроена функция в прообразе окрестности некоторого своего критического значения для произвольной функции  $f$ .

Приведем пример функции одного переменного:  $f(x) = x^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . В силу  $\frac{\partial f}{\partial x} = nx^{n-1}$  заключаем, что единственной критической точкой функции  $f$  при  $n \geq 2$  является точка  $x = 0$ . В частности, она является точкой минимума для  $n = 2$ , а для  $n = 3$  не является точкой минимума или максимума. Рассмотрим вторую производную. В зависимости от знака  $f''(x_0)$  можем утверждать, что точка  $x_0$  является точкой минимума (если  $f''(x_0) > 0$ ) или максимума. Если  $f''(x_0) = 0$ , то задача становится сильно сложнее.

При этом, как можно увидеть из разложения  $f(x)$  в степенной ряд, сохранится и не будет зависеть от параметризации  $x = x(x')$  поведение функции в окрестности критической точки. Аналогичное утверждение верно и для функции нескольких переменных: пусть  $(x_0, y_0)$  — критическая точка для функции  $f(x, y)$ , а также пусть точка является невырожденной.

**Определение 4.** Точка  $(x_0, y_0)$  называется невырожденной для функции  $f$ , если

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Тогда для некоторой регулярной замены координат  $x(x'), y(y')$  функция  $f(x, y)$  запишется как

$$\tilde{f}(x', y') = \pm x'^2 \pm y'^2.$$

Три варианта соответствуют трем матрицам:

$$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix},$$

отличающимся знаком на диагоналях.

Случай с плюсами на диагонали соответствует локальному минимуму (пример: функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ). Случай с разными знаками локально устроен как гиперболический параболоид (седло). Случай с минусами на диагонали соответствует локальному максимуму.

Первый и последний случаи мы ранее обозначали как атом  $A$ : диск расслоен на окружности с общим центром, который является особой точкой (минимума или максимума). В седловом случае множество особых точек образует две пересекающиеся прямые. Поэтому нужно изучать также продолжения этих пересекающихся прямых после удаления от точки пересечения.

**Определение 5.** Топологическое многообразие размерности  $n$  — это такое топологическое пространство  $(X, T)$ , которое является хаусдорфовым и для которого выполняется вторая аксиома счетности, то есть множество всех открытых подмножеств в  $X$  порождается счетным количеством каких-то базисных множеств (существует счетная база). Самое главное условие: для любых двух точек  $x \in X$  существует окрестность  $U \in T$  такая, что  $U$  гомеоморфна  $\mathbb{R}^n$  со стандартной топологией. Причем  $n$  одинаково для всех  $x \in X$ .

Для определения гладкого многообразия определение требуется дополнить. Пусть  $M^n$  — топологическое многообразие, на котором задан набор  $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ , где  $U_\alpha \in T$  и функции  $\phi_\alpha : U_\alpha \mapsto \mathbb{R}^n$ . Потребуем выполнения следующих условий:

- Множества  $U_\alpha$  образуют покрытие  $M^n$ :  $\cup U_\alpha = M^n$ ;
- для  $\phi_\alpha : U_\alpha \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $\phi_\beta : U_\beta \mapsto \mathbb{R}^n$  композиция  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  является гладким в обе стороны гомеоморфизмом (диффеоморфизмом)  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . При этом если  $\phi_\alpha : U_\alpha \mapsto \mathbb{R}^n$  с координатами  $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n$ ,  $\phi_\beta : U_\beta \mapsto \mathbb{R}^n$  с координатами  $x_\beta^1, \dots, x_\beta^n$ , то  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) \rightarrow (x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ .

**Определение 6.** Пару  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  называют картой. Множество всех карт называется атласом.

Тогда при выполнении обоих условий топологическое многообразие  $M^n$  является гладким многообразием.

Так определяется соответствие между точками карты и точками на многообразии. Если в  $\mathbb{R}^n$ , соответствующем каждой карте, задана гладкая функция  $f$ , то эта функция будет задана на многообразии  $M^n$ . Гладкость функции не потеряется при гладких функциях  $\phi_\alpha$ , тогда методы дифференцирования из матанализа можно перенести на поверхности, которые «сотканы» из областей  $U_\alpha$ , локально являющихся  $n$ -мерными дисками.

Так можно рассматривать устройство критических точек функций на компактных двумерных поверхностях. Попробуем описать все возможные особенности таких точек.

**Замечание 24.** Под особенностями критической точки будем понимать слоение функции в прообразе окрестности критического значения. То есть будем рассматривать линии уровня (прообразы) функции  $f$  в окрестности  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  критического значения  $c$ .

Потребуем, чтобы для критического значения  $c$  прообраз  $f^{-1}(c)$  был связным. Тогда утверждается, что невырожденные особые точки разных типов (локальный минимум/максимум или седловая точка) одновременно не могут встретиться на одном уровне. Следовательно, одному критическому значению соответствует либо одна точка минимума либо одна точка максимума либо седловая точка с сепаратрисами.

**Замечание 25.** Первое условие накладывается для удобства. Для несвязного прообраза можно описывать отдельно каждую связную компоненту. При этом, в силу хаусдорфовости многообразия, их можно разделить непересекающимися окрестностями.

Второе условие накладывается из того, что нас интересуют не слоения произвольных функций на многообразии, а устройство динамических систем, которые можно определить по этой функции. Связь динамической системы с функцией следующая: под функцией  $f$  понимаем энергию системы  $H$  (в случае с бильярдами мы брали кинетическую энергию:  $H = v_x^2 + v_y^2$ ). Тогда  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial v_x}$ ,  $\dot{v}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}$ .

Потребуем, чтобы на сепаратрисах можно было задать направления: вдоль двух частицы удаляются от особой точки, вдоль двух приближаются. При этом направления (приближение или удаление) чередуются на соседних сепаратрисах.

**Замечание 26.** Это связано с устройством седловых точек в теории дифференциальных уравнений.

Тогда, поскольку седловые точки на нашей поверхности устроены так же, как в теории дифференциальных уравнений, то мы можем сказать, что у нас есть некоторая система дифференциальных уравнений, и изменение состояния системы с течением времени соответствует движению точки по поверхности.

Примером служит бильярд: шарик движется по столу, для него заданы координаты  $(x, y)$  и компоненты вектора скорости  $(v_x, v_y)$ . Зная координаты и скорость, мы знаем состояние системы в конкретный момент времени и можем описать дальнейшее движение бильярдного шара.

А именно, с учетом замечания 25, определим  $H : M^4(x, y, v_x, v_y) \mapsto \mathbb{R}$ , где  $H = v_x^2 + v_y^2$  — кинетическая энергия шара. Уравнения движения запишутся в виде

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial v_x}, \dot{v}_x = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

изменения компонент скорости по времени выражаются как

$$\dot{v}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \dot{v}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Поскольку  $H$  не зависит от  $x, y$ .

**Замечание 27.** Эти уравнения называют уравнениями Гамильтона. Функцию  $H$  называют гамильтонианом динамической системы.

Также можно сопоставить каждой точке  $(x, y, v_x, v_y)$  вектор

$$\text{sgrad} f = \left( \frac{\partial H}{\partial v_x}, \frac{\partial H}{\partial v_y}, -\frac{\partial H}{\partial x}, -\frac{\partial H}{\partial y} \right),$$

который задает систему дифференциальных уравнений. Решение дифференциального уравнения задает кривую в четырехмерном фазовом пространстве.

Пример: рассмотрим  $H = q^2 - p^2$ . Тогда  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = -2p$ ,  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2q$ . Точка  $(0, 0)$  является седловой, сепаратрисы являются прямыми  $q = \pm p$ . Вдоль сепаратрисы  $p = q$  движение происходит к точке  $(0, 0)$ , вдоль прямой  $p = -q$  — от нее.

Существует следующая задача: Описать с точностью до послынного гомеоморфизма (то есть такого, который слой переводит в слой) слоение гладкой функции

$f$  на поверхности  $M^2$  в окрестности уровня  $f = c$  с невырожденными седловыми точками.

В случае компактной поверхности на множестве  $f = c$  можно ввести структуру направленного графа в плоскости. Вершина соответствует седловой точке и имеет степень 4. Каждое ребро соответствует одной из сепаратрис.

Можно попробовать описать множество всех способов вложить граф в двумерную поверхность. Причем такое описание будет эквивалентно описанию всех невырожденных особенностей гладкой функции  $f$  на произвольной двумерной поверхности.

## Лекция 10

### Топология неособого слоя для бильярда в эллипсе

Сегодняшняя лекция будет посвящена доказательству леммы Морса

**Теорема 1.** (Лемма Морса) В окрестности невырожденной критической точки  $0$  функции  $f \in C^\infty(M^n)$  на  $n$ -мерном многообразии  $M^n$  существует локальная замена координат  $y_1, \dots, y_n$ , при которой в окрестности  $B_\varepsilon(o)$  функция  $f$  имеет вид  $f = f(0) + \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_n^2$  в той же точке.

Для простоты считаем  $f(0) = 0$ .

*Доказательство.* Заметим, что функция  $f(x)$  и точка  $o$  удовлетворяют условию утверждения. Тогда, поскольку  $0$  — критическая точка функции  $f(x)$ , справедливы равенства  $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_0 = 0$ . тогда существуют такие функции  $g_1(x), \dots, g_n(x)$  такие, что

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_n g_n(x),$$

при этом  $g_i(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_0 = 0$ .

Представим  $f(x)$  в виде  $f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt$ . Продифференцируем подынтегральное выражение, получим

$$f(x) = \int_0^1 x f'(tx) dt = \int_0^1 f'(tx) dt x = f(1x) - f(0).$$

Проведем нелогичные соображения для случая, когда  $f(x)$  является функцией нескольких переменных. В этом случае

$$f(x) = \sum_j \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_j} x_j dt = \sum_j x_j \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_j} dt,$$

откуда получим явный вид функций  $g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_j} dt$ . При этом  $g_j(0) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|_0 = 0$ . Повторим те же соображения для функций  $g_j$ :

$$g_i(x) = \sum_j x_j h_{ij}(x), \quad h_{ij}(0) = \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_0.$$

Таким образом,  $f = \sum_i x_i g_i(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}(x)$ . Подставим это выражение в выражение для  $g_i(x)$ :

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt = \int_0^1 x_j \frac{\partial \sum_i x_i g_i(x)}{\partial x_i} dt = \sum_j x_j \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \int_0^1 \frac{f(t\tau x)}{\partial x_i} d\tau \right) dt.$$

Раскроем скобки, получим

$$g_i(x) = \sum_j x_j \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f(t\tau x)}{\partial x_i \partial x_j} d\tau dt = \sum_j x_j h_{ij}.$$

По индукции построим систему координат, в которых функция  $f$  будет квадратичной в окрестности критической точки.

*Шаг индукции.* Пусть функция  $f(y) = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{k-1}^2 + \sum_{i,j \geq k} P_{ij} y_i y_j$ , где  $P_{ij}$  — какие-то гладкие функции, причем  $P_{ij} = P_{ji}$ .

**Замечание 28.** База индукции. При  $k = 1$  имеем  $f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}$ , то есть все  $P_{ij} = h_{ij}$ .

Предположим, что  $P_{kk}(0) \neq 0$ . Определим функцию  $q(y) = \sqrt{P_{kk}(y)}$  и введем новую систему координат:

$$\begin{cases} z_i = y_i, & i \neq k, \\ z_k = q(y) \left( y_k + \sum_{i > k} y_i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right), & i = k. \end{cases}$$

Остается проверить, что это невырожденная замена переменных:

$$\sum_{i,j \geq k} P_{ij}(y) y_i y_j = P_{kk} y_k^2 + 2 \sum_{i > k} P_{ki} y_i y_k + \sum_{i,j \geq k+1} P_{ij}(y) y_i y_j.$$

Подставим в полученное выражение  $y_k = \frac{z_k}{q} - \frac{\sum_{i > k} y_i P_{ik}}{q P_{kk}}$ , тогда

$$\sum_{i,j \geq k} P_{ij}(y) y_i y_j = \dots = \text{sign}(P_{kk}) z_k^2 + \langle \text{выражение, зависящее от } y_m, m > k \rangle.$$

Таким образом получаем на одно слагаемое вида  $y_i^2$  больше, чем до шага индукции.  $\square$

Перейдем к двумерному случаю:  $n = 2$ . В прошлый раз мы установили: что особые точки могут быть вырожденными или невырожденными. В окрестности невырожденной критической точки  $d^2 f \neq 0$ , следовательно нам достаточно знать только знаки вторых производных функции  $f$ . По лемме Морса все возможные случаи соответствуют одному из трех случаев:

- $f = x^2 + y^2$
- $f = x^2 - y^2$
- $f = -x^2 - y^2$

Нам особенно интересен второй случай.

Пусть на компактной поверхности  $M^2$  конечное число критических точек  $P$  (то есть таких, для которых  $df = 0$ ) функции  $f$ . Рассмотрим некоторый уровень  $f(P) = c$  и рассмотрим слоение поверхности на линии уровня функции  $f$  в окрестности

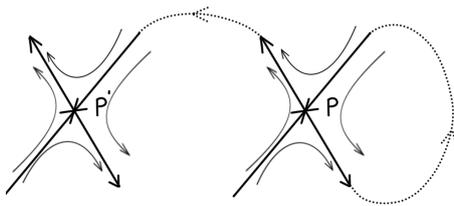


Рис. 107. Особые (идут вдоль сепаратрис) и близкие к особым траектории.

уровня  $f = c$  и пусть в окрестности седловой особой точки  $P$  функция по лемме Морса локально записывается как  $f = x^2 - y^2$ . Тогда траектории изображены как на рис. 107.

Особая кривая должна быть замкнутой. Поэтому сепаратрисы при одной особой точке могут переходить одна в другую (направленная от особой точки переходит в направленную к особой точке) или сепаратрисы при одной особой точке могут переходить в сепаратрисы при другой особой точке (являющейся также седловой точкой из прообраза  $f = c$ ).

Рассмотрим самый простой случай, когда на уровне  $f = c$  всего одна седловая точка. Изобразим две сепаратрисы и замкнем их как изображено на рис. 108. Цветом выделим область  $f < c$ .

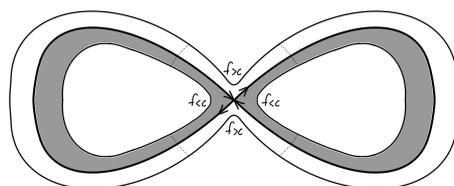


Рис. 108. Окрестность седловой точки выделена пунктиром.

Близкие к особой траектории образуют окружности внутри получившейся восьмерки, а также снаружи нее. При этом достаточно рассматривать склейки на границе «окрестности» расслоения близ особой точки, то есть на четырех выделенных пунктиром дугах.

Заметим, что изображенную на рис. 109 окрестность можно склеить и другим способом. А именно, если соединить сепаратрисы сверху и снизу (напомним: на 108 изображен результат их склеек слева и справа), получим восьмерку похожую на ту, что изображена на рис. 108. Соответствующая  $f < c$  область будет единственной, а внутри восьмерки разместятся две области, соответствующие  $f > c$ . Грубо говоря, области  $f < c$  и  $f > c$  поменяются местами. Из комбинаторных соображений для единственной седловой точки ничего иного быть не может.

Полученные случаи можно описать на изображенных пунктиром дугах «креста» (см. рис. 109), причем

- область  $f > 0$  склеивается с областью  $f > 0$ , аналогично для областей  $f < 0$ ;
- направленная от седловой точки сепаратриса склеивается с той, что направлена к седловой точке.

Пример см. на рис. 110.

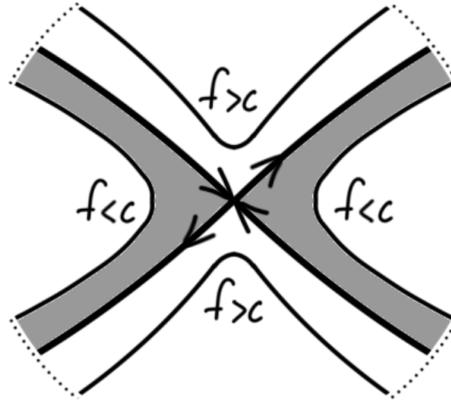


Рис. 109. Окрестность седловой точки. Часто называют «крестом».

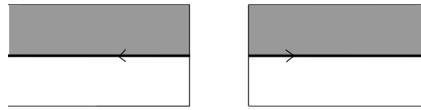


Рис. 110. Корректно определенная склейка.

Пусть у нас имеется две седловые точки. Рассмотрим сколько существует вариантов склеить два соответствующих им креста (см. рис. 111).

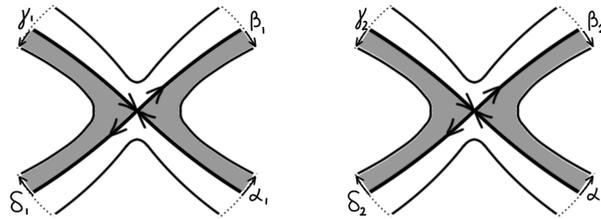


Рис. 111. Два креста, соответствующие двум седловым точкам.

$\alpha_1$  может склеиваться с одним из  $\beta_1, \delta_1, \beta_2, \delta_2$ . Пусть  $\alpha_1 \sim \beta_1$ . Если мы сейчас склеим  $\gamma_1 \sim \delta_1$ , то получим в особом слое два атома  $B$ , поскольку кресты при седловых точках не будут связаны между собой. Нам бы хотелось увидеть более нетривиальный пример.

Поэтому пусть  $\delta_1 \sim \alpha_2$ . Оставшиеся четыре свободных ребра  $\gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$  можно склеить лишь двумя способами:

- $\beta_2 \sim \gamma_1$ , тогда склеим  $\delta_2 = \gamma_2$ ;
- $\beta_2 \sim \gamma_2$ , тогда склеим  $\gamma_1 = \delta_2$ .

Получившиеся склейки изобразим на рис. 112 и 113.

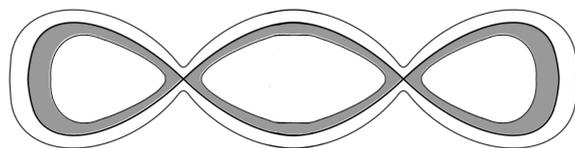


Рис. 112.  $\alpha_1 \sim \beta_1, \alpha_2 \sim \delta_1, \gamma_2 \sim \delta_2, \beta_2 \sim \gamma_1$ .

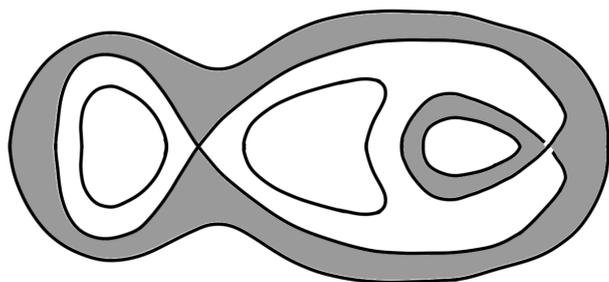


Рис. 113.  $\alpha_1 \sim \beta_1, \alpha_2 \sim \delta_1, \gamma_2 \sim \beta_2, \delta_2 \sim \gamma_1$ .



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ