МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ШКЛЯЕВ
АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФАКУЛЬТЕТА ФКИ МГУ
БАРМИНА МАКСИМА АЛЕКСАНДРОВИЧА

Содержание

Лекция 1. Случайные последовательности

Борелевские сигма–алгебры

Рассмотрим тройку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, где Ω — множество элементарных исходов, $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ — сигма–алгебра, $\mathrm{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ — вероятностная мера.

Случайным элементом X называется отображение из Ω в S, где S — пространство, на котором определена сигма–алгебра $\mathcal{S}$ и обладающее *свойством измеримости*: $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{S}$.

Для этого множества научимся считать вероятность $\mathrm{P}\big(\omega\colon X(\omega) \in B\big)$. Чтобы эта вероятность была определена на $\mathcal{F}$, нам и нужно свойство измеримости.

Рассмотрим $S = \mathbb{R}^{[0,1]} = \big\{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\big\}$ — множество функций, действующих из отрезка $[0, 1]$ на прямую. Нужно выделить на этом множестве сигма–алгебру, и на этой алгебре учиться изучать вероятности попадания в элементы этой сигма–алгебры.

Сначала вспомним, как строится мера на борелевской сигма–алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ на прямой $\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

Рассмотрим Ω, тогда $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ — *сигма–алгебра*, если она обладает следующими свойствами:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
2) если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
3) если $A_i \in \mathcal{F}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Если у нас есть любое количество сигма–алгебр A_α на 2^{Ω}, то их пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ — тоже сигма–алгебра. Нужно проверить каждое свойство непосредственно.

Значит, для любого семейства $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ можем посмотреть на пересечение всех сигма–алгебр, содержащих $\mathcal{A}$. По определению, это *минимальная сигма–алгебра*, содержащая систему множеств $\mathcal{A}$: $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap\limits_{\mathcal{A} \in B} B$, где B — сигма–алгебра с единицей Ω.

На отрезке $[0, 1]$ можем рассмотреть сигма–алгебру, содержащую все интервалы $(a, b),\ a, b \in [0, 1]$. Это *борелевская сигма–алгебра* на этом отрезке: $\mathcal{B}\big([0, 1]\big) = \sigma\big((a, b),\ a, b \in [0, 1]\big)$.

Чтобы доказать, что заданная система $\mathcal{C}$ является минимальной сигма–алгеброй $\sigma(\mathcal{A})$, содержащая все множества $\mathcal{A}$ какого-то вида, используется *метод подходящих множеств*. Нужно показать, что для всех элементов $A \in \sigma(\mathcal{A})$ выполнено условие $A \cap B \in D$, где B и D — заданные множества. Вместо этого можно ввести систему множеств $\mathcal{E} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) \colon A \cap B \in D\}$, которые удовлетворяют нашему свойству. Чтобы доказать, что $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$, нужно доказать, что это сигма–алгебра (проверить свойства 1)–3)) и доказать, что она содержит $\mathcal{A}$.

Лемма 1.1. Пусть $\mathcal{E}$ — система подмножеств Ω, а $B \subseteq \Omega$ — подмножество Ω. Рассмотрим $\sigma(\mathcal{E}) \cap B = \{A \cap B,\ A \in \sigma(\mathcal{E})\}$ — поэлементное пересечение сигма–алгебры с множеством. Тогда $\sigma(\mathcal{E} \cap B) = \sigma(\mathcal{E}) \cap B$.

Под $\sigma(\mathcal{E} \cap B)$ подразумевается сигма–алгебра с единицей B.

Доказательство. Докажем, что для любого множества $A \in \sigma(\mathcal{E})$ выполнено свойство $A \cap B \in \sigma(\mathcal{E} \cap B)$. Для этого введём систему подходящих множеств $\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{E}) \colon A \cap B \in \sigma(\mathcal{E})\}$. Нужно показать, что $\mathcal{A}$ совпадает с $\sigma(\mathcal{E})$.

1) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, поскольку если мы возьмём элемент из $\mathcal{E}$ и пересечём его с B, то это будет лежать в $\mathcal{E} \cap B$, а, значит, и в $\sigma(\mathcal{E} \cap B)$, и любой элемент из $\mathcal{E}$ содержится в $\mathcal{A}$.

2) $\mathcal{A}$ — сигма–алгебра, поскольку

   a) $\Omega \in \mathcal{A}$, потому что при пересечении Ω с B, получим B — это тоже самое, что взять $\Omega \in \mathcal{E}$ и пересечь его с B;

   b) если $A \cap B \in \sigma(\mathcal{E} \cap B)$, то $\overline{A} \cap B \in \sigma(\mathcal{E} \cap B)$,

Упражнение 1.1. Аналогичным образом проверить свойство сигма–аддитивности.

Получаем, что $\mathcal{A}$ является сигма–алгеброй, содержащей $\mathcal{E}$, а, значит, $\mathcal{A}$ содержит минимальную сигма–алгебру, содержащую $\mathcal{E}$. А поскольку $\mathcal{A}$ сам содержится в $\sigma(\mathcal{E})$, то $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, и для любого элемента из $\sigma(\mathcal{E})$ выполнено это свойство.

Упражнение 1.2. Провести доказательство в обратную сторону.

■

Итак, чтобы построить сигма–алгебру, нужно начать с простой систему, построить на ней алгебру, а на ней минимальную сигма–алгебру её содержащую.

$\mathrm{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ — *вероятностная мера*, если выполнены следующие свойства:

1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
2) $\mathrm{P}(A \sqcup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$, где $\sqcup$ — непересекающееся объединение;
3) $\mathrm{P}\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$.

Отметим, что определение избыточно, поскольку свойство 2) следует из свойства 3).

Утверждение 1.1 *(б/д)*. P — вероятностная мера $\Longleftrightarrow$ верны свойства 1), 2) и *непрерывность меры снизу* $\left(\mathrm{P}(A_i) \to \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right.$, если $\left.A_i \subseteq A_{i+1}\right)$ либо *непрерывность меры сверху* $\left(\mathrm{P}(A_i) \to \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right.$, если $\left.A_i \supseteq A_{i+1}\right)$, либо *непрерывность в нуле* (непрерывность сверху, когда $\mathrm{P}(A_i) \to 0$, $A_i \supseteq A_{i+1}$, $\bigcap A_i = \varnothing$)

Построение вероятностной меры

Вспомним, как мы строили такую меру, как площадь: сначала мы определяем площадь на прямоугольниках со сторонами, параллельными осям координат: $S = ab$. Будем считать, что верхняя и правая грань выколоты, а левая и нижняя — нет. Прямоугольники образуют полукольцо, то есть пересечение двух прямоугольников также будет прямоугольником (см. рис. 1.1), а разность двух прямоугольников, один из которых содержится в другом, будет разбиваться в объединение прямоугольников (см. рис. 1.2).

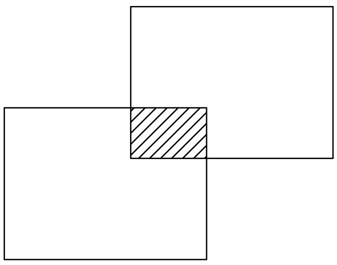


Рис. 1.1: Пересечение прямоугольников

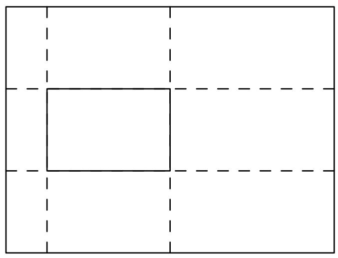


Рис. 1.2: Разность двух прямоугольников

Дальше мы распространяем эту меру на алгебру $\mathcal{A}$, которая будет состоять из *простых фигур* — всё, что получается из прямоугольников путём их склейки или дополнения. Отсюда мера распространяется на минимальную сигма–алгебру, содержащую все простые фигуры: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ — борелевская сигма–алгебра на плоскости.

Теорема 1.1 *(Каратеодори).* Если $P\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ — сигма–аддитивная вероятностная мера на алгебре $\mathcal{A}$, тогда существует единственная мера $Q\colon \sigma(\mathcal{A}) \to [0, 1]$ такая, что $P(A) = Q(A)\ \forall A \in \sigma(\mathcal{A})$.

Строго говоря, под сигма–аддитивностью меры мы понимаем то, что если у нас какое-то множество представимо в виде счётного объединения других множеств из $\mathcal{A}$, то тогда его мера равна сумме мер этих кусочков.

Распределение случайной величины и случайного вектора

Посмотрим, как работает эта система с простыми сигма–алгебрами. Начнём с $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — прямую и рассмотренную на ней сигма–алгебру. Зададим меру $\mathrm{P}\big((-\infty, x]\big) = F(x)$ на лучах — распределение случайной величины, затем можем перенести меру на полуинтервалы: $\mathrm{P}\big((a, b]\big) = F(b) - F(a)$, это полукольцо. Дальше сможем распространить меру на алгебру, а затем на сигма–алгберу. Получим $\mathrm{P}_X(B)$, где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathcal{B}$ минимальную сигма–алгебру, содержащей все интервалы $[a, b]$: $\mathcal{B} = \sigma\big([a, b],\ a, b \in \mathbb{R}\big)$. Она совпадает с сигма–алгеброй всех открытых множеств: $\mathcal{B} = \sigma(U,\ U$ — открытое$)$.

Случайной величиной будем называть отображение $X\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Это условие можно заменить на $X^{-1}\big((-\infty, x)\big) \in \mathcal{F}\ \forall x$, потому что лучи порождают борелевскую сигма–алгебру, а прообраз пересечение переводит в пересечение, объединение в объединение, дополнение в дополнение, и эти две сигма–алгебры будут совпадать.

Построим эту же конструкцию в случае $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Под $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ подразумеваем, с одной стороны, минимальную сигма–алгебру, содержащую все параллелепипеды, с другой стороны, минимальную сигма–алгебру, содержащую все декартовы произведения одномерных борелевских множеств:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\big((a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]\big) = \sigma\big(B_1 \times \ldots \times B_n,\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \ominus$$

Эти два объекта будут одинаковыми, поскольку можно показать, что

$$B_1 \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \in \sigma\big((a_1, b_1] \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}\big).$$

Предположим, что это не так, то есть какое-то множество вида $B_1 \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}$ не попало в нашу сигма–алгебру. Тогда можем рассмотреть первую координату множеств, которые попали в сигма–алгебру. Эти проекции образуют сигма–алгебру, содержащие все полуинтервалы, а, значит, и все борелевские множества. Получили противоречие, поэтому эти две сигма–алгебры совпадают.

Также можно показать, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с минимальной сигма–алгеброй, содержащей все открытые множества, поскольку все параллелепипеды открытые (у которых обе границы включены), а любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ является счётным объединением шаров:

$$= \sigma(U,\ U \text{ — открытые})$$

Меру можем задать на простых порождающих:

$$\mathrm{P}_X\big((-\infty,\, x_1] \times \ldots \times (-\infty,\, x_n]\big) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Это многомерная функция распределения. Она должна быть непрерывна с правой верхней стороны, стремиться к 1, если все $x_i \to +\infty$ и к 0, если хотя бы один из $x_i \to -\infty$, а также вероятность любого куба должна быть неотрицательна.

Эта функция распределения однозначно задаёт меру и мы получаем распределение *случайного вектора* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n\colon X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку достаточно взять только порождающие $B = B_1 \times \ldots \times B_n$, то $X^{-1}(B) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i^{-1}(B_i)$, где X_i^{-1} — координатное отображение. Если рассмотреть только частный случай, когда все B_j, кроме одной B_i равны $\mathbb{R}$, то получим, что $X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$ для любого i, то есть X_i — случайная величина. С другой стороны, если все X_i — случайные величины, то $X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$ для любого i, а, значит, и их пересечение лежит в $\mathcal{F}$. То есть случайные величины задают случайный вектор, а *случайный вектор* — набор случайных величин на одном пространстве.

Распределение случайной последовательности

Теперь введём пространство $\mathbb{R}^\infty = \big\{\{x_n\},\ x_i \in \mathbb{R}\big\}$ и сигма–алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. В качестве порождающих возьмём цилиндр

$$C_{I_1,\ldots,I_m} = \big\{\{x_n\}\colon x_1 \in I_1, \ldots, x_m \in I_m\big\}.$$

Отметим, что эта система довольно бедная — в неё не входит даже сходящиеся последовательности. Пусть $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma\big(C_{I_1,\ldots,I_m},\ I_j = [a_j,\, b_j]\big)$ со всеми возможными $m = 1, \ldots$. Можно показать, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma\big(C_{B_1,\ldots,B_m},\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) =$

$= \sigma\big(C_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\big) = \sigma(U,\ U$ — открытые), если открытые множества определяются метрикой

$$\rho\big(\{x_m\},\{y_n\}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_1(x_n, y_n)}{2^i},\ \text{где } \rho_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Это евклидова метрика на $[0, 1]$, за счёт этого ряд заведомо сходится.

Рассмотрим множество $A = \big\{\{x_n\}\colon x \text{ сходится к } 0\big\}$. Оно является элементом $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, так как $A = \big\{\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n| < \varepsilon\big\} = \bigcap\limits_{\varepsilon}\bigcup\limits_{N}\bigcap\limits_{n>N}\big\{|x_n| < \varepsilon\big\}$. Это множество лежит в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, а значит, и его объединение и счётное пересечение тоже. Чтобы пересечение по ε было счётным, будем рассматривать $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, поскольку определение предела от этого не сломается.

Зададим меру $\mathrm{P}_X\big((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_m]\big) = P_{x_1,\ldots,x_n}$, тогда мера должна определиться автоматически на минимальной сигма–алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Также зададим случайный элемент $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^\infty\colon X^{-1}(B) \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Для этого достаточно, чтобы $X^{-1}(I_1 \times \ldots \times I_m \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}) = X_1^{-1}(I_1) \cap \ldots \cap X_m^{-1}(I_m) \in \mathcal{F}$. Это выполнено тогда и только тогда, когда каждая $X_i^{-1}(I_i) \in \mathcal{F}$, то есть *случайная последовательность* — последовательность случайных величин.

Теорема 1.2 *(Колмогорова о согласованности мер).* Пусть есть семейство мер $p_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n)$, где $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $t_i \in \mathbb{N}$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Если выполнены

a) $p_{t_1,\ldots,t_n}(\cdot,\ldots,\cdot)$ — вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$ при фиксированных t_i;

b) (*условие согласованности*)

$$p_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_i,t_{i+1},\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_{i-1},\mathbb{R},B_{i+1},\ldots,B_n) = \\ = p_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_{i-1},B_{i+1},\ldots,B_n),$$

то существует единственная мера $\mathrm{P}_X\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) \to [0, 1]$ такая, что

$$\mathrm{P}_X(C_{B_1,\ldots,B_m)} = p_{1,\ldots,m}(B_1,\ldots,B_m).$$

Пример 1.1. Пусть X_t имеют распределение F_t и независимы, $t = 1,\ldots$ — последовательность независимых разнораспределённых случайных величин. Тогда мы должны задать $p_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n) = p_{t_1}(B_1)\ldots p_{t_n}(B_n)$, где p_t — мера, соответствующая F_t. Это вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$, потому что оно соответствует распределению вектора из n величин, а это вектор вероятностная мера для вектора. Если мы пропустим какое-то из t_i и поставим вместо него $\mathbb{R}$, в произведении справа получим $p_{t_i}(\mathbb{R}) = 1$, то есть условие согласованности также выполняется: $p_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_{i-1},\mathbb{R},B_{i+1},\ldots,B_n) = \prod\limits_{j\neq i} p_{t_j}(B_j)$. Наше семейство мер согласованно, значит, существует единственная последовательность такая, что у неё каждое конечномерное распределение задаётся такой формулой. По определению это и есть последовательность независимых величин с распределениями F_t.

Лекция 2. Случайные функции

Цепь Маркова

Пример 2.1 *(цепь Маркова).* Рассмотрим движение частицы без памяти, то есть направление движения частицы не зависит от того, откуда пришла частица. Зададим $\mathrm{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{n,i,j}$, $i, j \in S$ — *матрица вероятности перехода цепи* и $\mathrm{P}(X_0 = i) = p_i^0$, $i \in S$ — начальное распределение. Здесь S — конечное или счётное множество. Тогда конечномерное распределение для одноточечных множеств задаётся следующим образом:

$$\mathrm{P}(X_n = j_n, X_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, X_0 = j_0) = p_{j_0}^0 \cdot p_{0,j_0,j_1} \cdot p_{1,j_1,j_2} \cdot \ldots \cdot p_{n-1,j_{n-1},j_n}$$

Здесь мы воспользовались марковостью, то есть независимостью от истории. В других случая мы должны были бы смотреть не только на то, где мы находимся, но и как мы туда попали. Для произвольных множеств

$$\mathrm{P}_{0,\ldots,n}(B_1, \ldots, B_n) = \sum_{j_i \in B_i} p_{j_0}^0 \cdot \ldots \cdot p_{n-1,j_{n-1},j_n}.$$

Получили конечномерные распределения для последовательности, задаваемой цепью Маркова. В соответствии с определением согласованности,

$$\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n) = \mathrm{P}_{0,\ldots,t_n}(\mathbb{R}, \ldots, \mathbb{R}, B_1, \ldots, B_n).$$

Отметим, что если последнее $B_i = \mathbb{R}$, то противоречия не возникнет:

$$\mathrm{P}_{0,\ldots,n}(B_1, \ldots, B_{n-1}, \mathbb{R}) = \mathrm{P}_{0,\ldots,n-1}(B_1, \ldots, B_{n-1}).$$

Чтобы это было выполнено, нам нужно потребовать два условия от вероятностей:

1) (*стохастичность матрицы вероятности перехода*)

$$\sum_j p_{n,i,j} = 1, \ p_{n,i,j} \geqslant 0;$$

2) $\sum\limits_i p_i^0 = 1$, $p_i^0 \geqslant 0$.

Тогда

$$\mathrm{P}_{0,\ldots,n}(B_1, \ldots, B_{n-1}, \mathbb{R}) = \underbrace{\sum_{\substack{j_i \in B_i \\ i \leqslant n-1}} p_{j_0}^0 \cdot p_{0,j_0,j_1} \cdot \ldots \cdot p_{n-2,j_{n-2},j_{n-1}}}_{=\mathrm{P}_{0,\ldots,n-1}(B_1,\ldots,B_{n-1})} \cdot \underbrace{\sum_{j_n} p_{n-1,j_{n-1},j_n}}_{=1}.$$

Таким образом получается, что задав так конечномерные распределения, мы их задали согласованными во всех условиях, когда мы подставляем в t_i $\mathbb{R}$, кроме последнего, для которого мы проверили условия согласованности непосредственно. Она задаёт вероятностную меру, так как мера дискретная и если положить все $B_i = \mathbb{R}$, то получится 1. То есть существует процесс, у которого такие конечномерные распределения. Для него

$$\mathrm{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0) = \\ = \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_{n-1} = i, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathrm{P}(X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0)} = p_{n,i,j}$$

если условие не противоречиво, то есть его вероятность не нулевая.

То есть мы построили такую последовательность, что вероятность того, что $X_n = j$ (будущее) при условии какого-то настоящего и прошлого зависит только от $X_{n-1} = i$ (настоящего). Это и есть свойство *марковости*. Для такой последовательности можно рассматривать пространство $(\mathbb{R}^\infty,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty),\ \mathrm{P}_X)$, тогда последовательность $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$ будет *марковской последовательностью*, для которой выполнено это свойство по определению.

Напомним, что мы используем сигма–алгебру, содержащую все открытые множества относительно метрики

$$\rho\big(\{x_n\}, \{y_n\}\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \cdot \frac{1}{2^i}.$$

Упражнение 2.1. Показать, что

a) множество последовательностей, стремящихся к 0 при $n \to \infty$;

b) множество сходящихся последовательностей при $n \to \infty$

лежат в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Распределение случайных функций

Рассмотрим пространство функций $\mathbb{R}^T = \{f : T \to \mathbb{R}\}$, где $T \subseteq \mathbb{R}$. Для простоты, будем рассматривать два случая: либо $T = [0, 1]$, либо $T = \mathbb{R}^+$. Возьмём $\mathcal{I} = \sigma\Big(\big\{I_{t_1,\ldots,t_k}(B_1, \ldots, B_k)\big\},\ t_1, \ldots, t_k \in T,\ B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\Big)$ — *цилиндрическая сигма–алгебра* (минимальная сигма–алгебра, содержащая все цилиндры), где *цилиндр* $I_{t_1,\ldots,t_k}(B_1, \ldots, B_k) = \Big\{f : \big(f(t_1), \ldots, f(t_k)\big) \in B_1 \times \ldots \times B_k\Big\}$ — множество функций, в том числе, всюду разрывных, попадающих в заданные моменты $t_1, \ldots, t_k$ в заданные окна $B_1, \ldots, B_k$ (см. рис. 2.1).

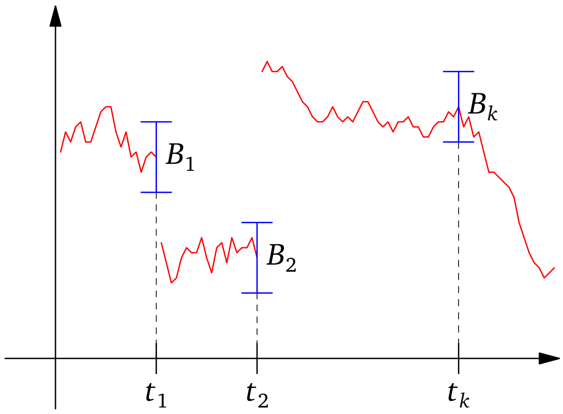


Рис. 2.1: Области, через которые должна пройти функция, лежащая в цилиндре (показаны синим цветом) и пример подходящей функции (показана красным цветом)

Можно показать, что

$$\sigma\Big(I_{t_1,\dots,t_k}\big([a_1,b_1],\dots,[a_k,b_k]\big)\Big)=\sigma\Big(I_{t_1,\dots,t_k}(B_1,\dots,B_k),\ B_1,\dots,B_k\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\Big)=$$
$$=\sigma\Big(I_{t_1,\dots,t_k}(B),\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\Big)=\sigma\Big(I_{\{t_n\}}(B),\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)\Big),$$

где $U_{\{t_n\}}(B)=\Big\{f:\big(f(t_1),\dots,f(t_n),\dots\big)\in B\Big\}$ для $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Упражнение 2.2. Доказать любое из этих равенств из определения борелевских сигма–алгебр.

Хотим, чтобы эта сигма–алгебра совпадала с $\sigma(U,\ U$ — открытые), где множества открыты в смысле равномерной нормы $\|f\|=\sup\limits_{t\in T}\big|f(t)\big|$, однако это не так. Более того, можно показать, что

$$\sigma\Big(I_{\{t_n\}}(B),\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)\Big)=\Big\{I_{\{t_n\}}(B),\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)\Big\},$$

поскольку это множество уже является сигма–алгеброй:

Теорема 2.1. Множество $\mathcal{C}=\Big\{I_{\{t_n\}}(B)\Big\}$, где $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, $t_i\in T$ образует сигма–алгебру.

Доказательство.

1) $\Omega=\mathbb{R}^\infty\in\mathcal{C}$, потому что можем взять любое t_i и $B=\mathbb{R}^\infty$, тогда получим функции, которые в точках $t_1,\dots,t_n,\dots$ любые, то есть все функции.
2) если $A\in\mathcal{C}$, тогда $\overline{A}\in\mathcal{C}$, потому что нужно поменять B на $\overline{B}$, тогда $\overline{I_{\{t_n\}}(B)}=I_{\{t_n\}}(\overline{B})$

3) если $A_i \in \mathcal{C}$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$, так как можем рассмотреть

$$A_i = \Big\{ f : \big(f(t_{ij}),\ j = 1, 2, \dots\big) \in B_i,\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) \Big\};$$

$r_i = \bigcup \{t_{ij}\}$ — объединение всех t_{ij} в каком-то порядке так, чтобы все последовательности встречались; $B = \Big\{ \{x_n\} : (x_{j_{1,i}}, \dots, x_{j_{k,i}}) \in B_i\ \forall i \Big\}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, где $j_{1,i}, \dots, j_{k,i}$ — номера $t_{i,1}, \dots, t_{1,k}$ в r_i, то есть мы вклеили последовательности друг в друга. В пересечении множеств функций будут лежать функции, у которых в объединённой системе точек проходят в объединённую систему окон. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Big\{ f : \big(f(r_i), \dots\big) \in B \Big\}$ — борелевское множество последовательностей по определению. Таким образом получаем, что B — пересечение счётного числа множества последовательностей из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, значит, оно из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. ■

Получили, что для любого множества $B \in \mathcal{I}$ существуют набор $\{t_n\}$ и множество $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ такое, что $B = \Big\{ f : \big(f(t_1), \dots, f(t_n), \dots\big) \in C \Big\}$, то есть ничего хорошего в такой сигма–алгебре не лежит.

Пример 2.2. Рассмотрим единичный шар $\Big\{ f : \sup\limits_{[0,1]} \big|f(t)\big| \leqslant 1 \Big\} = B$.

Если $B \in \mathcal{I}$, то существуют такой набор $\{t_n\}$ и такое множество $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, что $B = \Big\{ \big(f(t_1), \dots, f(t_n)\big) \in C \Big\}$. Пусть это так. Возьмём функцию 1, которая отображает отрезок $[0, 1]$ в 1. Она лежит в множестве B, потому что её супремум не превосходит 1, значит, соответствующая ей последовательность $(1, \dots, 1)$ лежит в C. Рассмотрим функцию $g = \begin{cases} 1, & x \in \{t_i\} \\ 2, & x \notin \{t_i\} \end{cases}$, ей также соответствует последовательность $\big(g(t_i), \dots\big) = (1, \dots, 1) \in C$, поэтому $g \in B$. С другой стороны, B было задано так, что супремум функции g должен быть не больше 1, что противоречит тому, что её супремум равен 2, значит, $B \notin \mathcal{I}$.

Упражнение 2.3. Доказать, что множество непрерывных функций $C[0, 1]$ не лежит в цилиндрической сигма–алгебре $\mathcal{I}$.

Случайный процесс

Определение 2.1. X — **случайный процесс**, если $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$ измеримое, то есть для любого $B \in \mathcal{I}$ выполнено $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Возьмём в качестве B порождающие, то есть цилиндры:

$$X^{-1}\Big(I_{t_1,\dots,t_n}(B_1,\dots,B_n) = \big\{\omega : X(\omega,\cdot) \in I_{t_1,\dots,t_n}(B_1,\dots,B_n)\big\} = ,$$

где X — отображение, которое ω сопоставляет функцию, то есть оно паре переменных (ω, t) сопоставляет число для $t \in T$.

$$= \big\{\omega : X(\omega, t_1) \in B_1,\ X(\omega, t_2) \in B_2, \dots\big\} = \bigcap_i \big\{\omega : X(\omega, t_i) \in B_i\big\}.$$

Если возьмём все B_i, кроме одного, равными $\mathbb{R}$, то получится, что каждое из $X(\omega, t_i)$ — случайная величина как функция ω при заданном t_i. И наоборот, если это случайные величины при каждом t_i, то все эти множества из $\mathcal{F}$, и их пересечение тоже из $\mathcal{F}$. Значит, $X(\omega, t)$ будет случайным процессом, а *случайный процесс* — это набор случайных величин на одном пространстве.

Отметим, что на случайный процесс можно смотреть двояко: $X(\cdot, t)$ — случайная величина, а $X(\omega, \cdot)$ — функция, которую называют **траекторией случайного процесса**.

Пример 2.3. Пусть ω может принимать два различных значения: $\omega = \omega_1 = 1$, $\omega = \omega_2 = 2$; случайный процесс имеет вид $X(\omega, t) = t\omega$. Тогда траектория при $\omega = 1$ будет иметь вид $X(\omega, t) = t$, а при $\omega = 2$ — $X(\omega, t) = 2t$ (см. рис. 2.2). С другой стороны, при фиксированном t, например, $t = 1$, получим случайную величину, принимающую 1 и 2 при различных исходах. Можно смотреть на это как на случайно разыгранную функцию, мы выбираем из двух функций одну, а можно — как на набор зависимых случайных величин, живущих на одном пространстве.

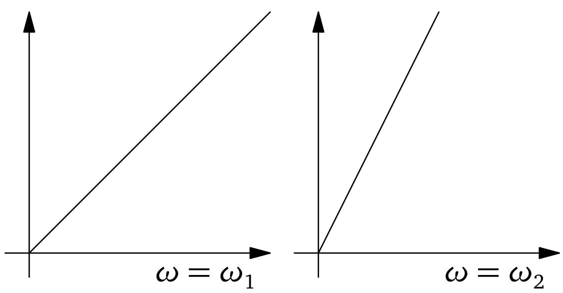


Рис. 2.2: Траектория случайного процесса из примера 2.3 при различных ω

На практике мы практически не будем рассматривать случайный процесс как отображение от ω и t, почти всегда случайный процесс будет заданным на некотором пространстве отображением, для которого нам интересно только его распределение, задаваемое с помощью конечномерных распределений.

Теорема 2.2 *(о согласованности)*. Если $\left\{p_{t_1,\ldots,t_k}(B_1,\ldots,B_k)\right\}$ — набор, задающий вероятностные меры на $\mathbb{R}^k$ для любых $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ и

$$p_{t_1,\ldots,t_k}(B_1,\ldots,B_{i-1},\mathbb{R},B_{i+1},\ldots,B_k) = p_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_k}(B_1,\ldots,B_{i-1},B_{i+1},\ldots,B_k),$$

то существует мера P_X, действующая из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ в $[0, 1]$ такая, что

$$\mathrm{P}_X\Big(\big\{x_n : (x_{t_1},\ldots,x_{t_k}) \in B_1 \times \ldots \times B_k\big\}\Big) = p_{t_1,\ldots,t_k}(B_1,\ldots,B_k).$$

Доказательство. Зададим меру P_X на всех цилиндрах следующим образом: $\mathrm{P}_X\big(I_{t_1,\ldots,t_k}(B_1,\ldots,B_k)\big) = p_{t_1,\ldots,t_k}(B_1,\ldots,B_k)$. Цилиндры образуют алгебру, поэтому P_X действует из алгебры всех цилиндров $\mathcal{I}$ в $[0, 1]$. При этом условия согласованности гарантирует нам, что

1) мера, заданная на всех возможных цилиндрах, является вероятностной мерой;

2) эта мера задана правильным образом: представление в виде цилиндра не единственно, так как если мы к цилиндру с основаниями $B_1,\ldots,B_k$ и индексами $t_1,\ldots,t_k$ добавим индексы с основанием $\mathbb{R}$, то цилиндр не изменится, при этом по условию согласованности мы получим ту же самую меру.

Нужно проверить, что мера на алгебре задана правильным образом, а именно

i) P_X — аддитивна, так как если мы рассмотрим меру объединения двух непересекающихся цилиндров с конечным набором индексов $A = I_{t_1,\ldots,t_k}(B_1,\ldots,B_k)$ и $B = I_{s_1,\ldots,s_{k'}}(C_1,\ldots,C_{k'})$, то получится сумма мер $\mathrm{P}_X(A \sqcup B) = \mathrm{P}_X(A) + \mathrm{P}_X(B)$ из того, что исходные меры были именно мерами;

ii) P_X непрерывна в нуле.

Если доказать пункт ii), то теорема о согласованности доказана. ■

Доказательство ii). Пусть множество $B_k = B'_k \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \ldots$, где $\mathcal{B}'_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_k})$, а $B_k \supset B_{k+1}$ — такие вложенные цилиндры, что $\bigcap\limits_i B_i = \varnothing$. Нужно показать, что $\mathrm{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i\Big) \to 0$ при $n \to \infty$.

К чему-то последовательность точно стремится, потому что последовательность монотонно уменьшается и ограничена снизу нулём. Предположим, что $\mathrm{P}_X\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon > 0$. Любая подпоследовательность будет также сходиться к ε, поэтому выберем подпоследовательность n_k, которая монотонно стремится к $+\infty$. Возьмём $\widetilde{C}'_k$ — компакт в B'_k такой, что $\mathrm{P}_X\big(B'_k \big\backslash \widetilde{C}'_k\big) < \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Здесь мы пользуемся свойством регулярности меры, так как борелевские меры в $\mathbb{R}^n$ регулярны. Рассмотрим $\widetilde{C}_k = C'_k \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ и введём $C_k = \bigcap\limits_{i\leqslant k} C_i$. Заметим, что $\mathrm{P}_X(C_k) \geqslant \mathrm{P}(B_k) - \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{P}\big(B_k \big\backslash \widetilde{C}_i\big) > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Представим C_k в виде $C_k = C'_k \times \mathbb{R} \ldots \mathbb{R}$, где C'_k — пересечение каких-то компактов в $\mathbb{R}^{n_k}$. Докажем, что не может быть такого, что $\mathrm{P}_X(C_k) > \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмём $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1} \in C'_1$, $x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2} \in C'_2, \ldots$ и последовательность координат $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots$, которая лежит в компакте C'_1. Это ограниченная последовательность, из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{j_1,1}, x_{j_2,1}, \ldots$ Пусть она сошлась к $x_{1,0}$. Далее рассматриваем последовательность $x_{j_1,2}, x_{j_2,2}, \ldots$ и выбираем из неё сходящуюся подпоследовательность, тогда первая координата останется сходиться к $x_{1,0}$, а вторая будет сходиться к $x_{2,0}$. Продолжим так делать, получим некоторую последовательность пределов $(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots)$. Эта последовательность лежит в каждом из C'_k, если рассмотреть её первые n_k элементов, то есть $(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{n_k,0}) \in C'_k$, потому что это предел точек, лежащих в C'_k, а, значит, $(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots) \in C_k$, следовательно, пересечение C_k не пусто и пересечение B_i не пусто. Получили противоречие, и $\mathrm{P}_X\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i\Big)$ не могло стремиться к положительному числу, и мера непрерывна в нуле. ■

Лекция 3. Случайные процессы

Теорема Колмогорова о согласованности

На прошлой лекции мы рассмотрели

$$\mathbb{R}^T = \{f(t),\ f : T \to \mathbb{R}\},$$

где $T = [0, 1]$ или $T = \mathbb{R}^+$. На нём мы построили *цилиндрическую сигма–алгебру* (минимальную сигма–алгебру, содержащую все цилиндры):

$$\mathcal{I} = \sigma\big(I_{t_1,\dots,t_k}(B_1, \dots, B_k)\big),$$

где под цилиндром мы понимаем множество

$$I_{t_1,\dots,t_k}(B_1, \dots, B_k) = \{f : f(t_1) \in B_1, \dots, f(t_k) \in B_k\}.$$

Мы также показали, что

$$\mathcal{I} = \sigma\big(I_{t_1,\dots,t_k,\dots}(B)\big),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty),$$

где

$$I_{t_1,\dots,t_k,\dots}(B) = \Big\{f : \big(f(t_1), \dots, f(t_k), \dots\big) \in B\Big\},$$

а также, что $\{I_{t_1,\dots,t_k,\dots}(B)\}$ уже является сигма–алгеброй, то есть

$$\mathcal{I} = \{I_{t_1,\dots,t_k,\dots}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)\}.$$

Получившаяся сигма–алгебра не является борелевской, поскольку ни множество непрерывных, ни множество ограниченных функций не являются измеримыми. Мера на цилиндрической сигма–алгебре задаётся конечномерными распределениями

$$\mathrm{P}_X\big(I_{t_1,\dots,t_k}(B_1, \dots, B_k)\big) = p_{t_1,\dots,t_k}(B_1, \dots, B_k). \tag{3.1}$$

и условиями согласованности

i) $p_{t_1,\dots,t_k}(\cdot, \dots, \cdot)$ задаёт меру на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$;

ii) $p_{t_1,\dots,t_{i-1},\dots,t_k}(B_1, \dots, B_{i-1}, \mathbb{R}, B_{i+1}, \dots, B_k) =$
$$= p_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_k}(B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_k)$$

Теорема 3.1 *(Колмогорова о согласованности).* Если $\left\{p_{t_1,\ldots,t_k}(\cdot,\ldots,\cdot)\right\}$ удовлетворяет i), ii), то существует единственная мера $P_X : \mathcal{I} \to [0, 1]$ такая, что выполнено свойство (3.1).

Доказательство. Пусть множество $A \in \mathcal{I}$, тогда существуют такие t_i и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, что $A = \Big\{f : \big(f(t_1),\ldots\big) \in B\Big\}$. Тогда зададим $\mathrm{P}_X(A) := \mathrm{P}_{\vec{t}}(B)$. Покажем, что это определение не противоречиво.

Пусть $A = \Big\{f : \big(f(t_1),\ldots,f(t_k),\ldots\big) \in B\Big\} = \Big\{f : \big(f(s_1),\ldots,f(s_k),\ldots\big) \in C\Big\}$ — два представления одного цилиндра. Тогда можем представить A в виде $A = \Big\{f : \big(f(r_1),\ldots,f(r_k),\ldots\big) \in D\Big\}$, где $\{r_i\} = \{s_i\} \cup \{t_i\}$. В качестве D мы взяли какое-то множества, так чтобы множество A было одним и тем же. Перейдём в пространство функций, которые заданы только в точках $\{r_i\}$. Тогда мы будем рассматривать множество $D = \Big\{x_n : (x_1,\ldots) \in D\Big\}$, и на этом множестве единственным возможным образом задастся мера $\mathrm{P}_{\vec{r}}(D)$, которая будет совпадать с мерой на пространстве $\mathbb{R}^\infty$, которая должна совпадать и с $\mathrm{P}_{\vec{t}}(B)$, и с $\mathrm{P}_{\vec{s}}(C)$. То есть разные представления одного цилиндра действительно имеют одну и ту же меру, и мера определена корректно.

Осталось показать, что эта мера сигма–аддитивна. Это несложно сделать, так как индексов счётное количество. Возьмём последовательность цилиндров $A_i = \Big\{f : \big(f(t_{i,1}),\ldots\big) \in B_i\Big\}$, где $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Нужно проверить, что $\mathrm{P}_X(\sqcup A_i) = \sum \mathrm{P}_X(A_i)$. Для этого введём последовательность $(r_1,\ldots) = \bigcup\limits_i \{t_i\}$, и представим A_i в виде $A_i = \Big\{f : \big(f(r_1),\ldots\big) \in B_i'\Big\}$, причём множества B_i' не пересекаются: $B_i' \cap B_j' = \varnothing$, $i \neq j$. Поскольку мера сигма–аддитивна, то $\mathrm{P}_X(\sqcup A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}_{\vec{r}}(B_i') = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}_X(A_i)$. ■

Условия согласованности в терминах различных функций

На пространстве $\mathbb{R}^T$ мы рассмотрели цилиндрическую сигма–алгебру $\mathcal{I}$ и ввели на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ случайный процесс $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$, обладающие свойством измеримости $X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$, $I \in \mathcal{I}$. Отметим, что X — случайный процесс тогда и только тогда, когда X_t — случайные величины. Здесь $(X : \Omega \to \mathbb{R}^T) = (X_t : \Omega \to \mathbb{R})_{t \in T}$. Согласованное семейство конечномерных распределения $\left\{p_{t_1,\ldots,t_k}(B_1,\ldots,B_k)\right\}$ задаёт меру $\mathrm{P}_X : \mathcal{I} \to [0, 1]$.

Поскольку $p_{t_1,\ldots,t_k}(B_1,\ldots,B_k)$ — меры на $\mathbb{R}^k$, можем считать, что они заданы функциями распределения $F_{t_1,\ldots,t_k}(x_1,\ldots,x_k)$. Тогда условия согласованности превращаются в следующие:

i) $F_{t_1,\ldots,t_k}$ — функция распределения для любых $t_1, \ldots, t_k$;

ii) $$\lim_{x_i\to+\infty} F_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \\ = F_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k).$$

Условия i) и ii) влекут за собой согласованность мер $p_{t_1,\ldots,t_k}$.

Пусть $f_{t_1,\ldots,t_k}$ —

i) семейство многомерных плотностей для любых $t_1, \ldots, t_k$;

ii) $\int\limits_{\mathbb{R}} f_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k)\,dx_i = f_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)$.

Условия i) и ii) влекут согласованность мер $p_{t_1,\ldots,t_k}$.

Пусть $\psi_{t_1,\ldots,t_k}$ — характеристические функции. Тогда условия согласованности будут иметь следующий вид:

i) $\psi_{t_1,\ldots,t_k}(s_1, \ldots, s_k)$ — характеристические функции для любых $t_1, \ldots, t_k$;

ii) $\psi_{t_1,\ldots,t_k}(s_1, \ldots, s_{i-1}, 0, s_{i+1}, \ldots, s_k) = \psi_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_k}(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_k)$.

Условия i) и ii) влекут согласованность мер $p_{t_1,\ldots,t_k}$.

Получается, что для задания процесса достаточно задать любой удобную систему функций, определяющую распределение, и проверить для них свои условия согласованности.

Пример 3.1. Построим процесс W_t, описывающий *броуновское движение*:

1) $W_t \sim \mathcal{N}(0, t),\ t > 0;\ W_0 = 0;$

2) $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ независимы.

Покажем, что действительно существует распределение, обладающее этим свойством. Если он существуют, то его характеристические функции будут распределены следующим образом:

$$\psi_{t_1,\ldots,t_k}(s_1, \ldots, s_k) = \mathrm{E}\exp\big(i\,(s_1 W_{t_1} + \ldots + s_k W_{t_k})\big) \ominus$$

Значит, мы будем искать процесс с такими конечномерными распределениями, докажем, что они согласованы, и построим нужный нам процесс. Воспользуемся свойством независимости приращений, получим

$$\ominus\, \mathrm{E}\exp\Bigg(i\Big(s_1 W_{t_1} + s_2\,(W_{t_2} + W_{t_2} - W_{t_1}) + \ldots + s_k\Big(\sum_{j=1}^{k}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\Big)\Big)\Bigg) \ominus$$

где $t_0 = 0$. После перегруппировки получим

$$= \mathrm{E}\exp\Big(i\cdot W_{t_1}(s_1+\ldots+s_k)+i\,(W_{t_2}-W_{t_1})\cdot(s_2+\ldots+s_k)+\ldots+i\cdot(W_{t_k}-W_{t_{k-1}})\cdot s_k\Big) =$$

Воспользуемся тем, что характеристическая функция суммы независимых величин — это произведение характеристических функций. После подстановки характеристических функций получим

$$= e^{-\frac{(s_1+\ldots+s_k)^2\cdot t_1}{2}}\cdot\ldots\cdot e^{-\frac{s_k^2\cdot(t_k-t_{k-1})}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=i}^{k}s_j\right)^2\cdot(t_i-t_{i-1})}. \qquad (**)$$

Получили искомые конечномерные произведения в терминах характеристических функций. Проверим, что при рассмотрении таких характеристических функций будут выполнены условия согласованности:

i) это точно характеристические функции по построению;

ii) здесь нужно проверить два случая: $s_i = 0$ для $i = k$ и для $i \neq k$.

Если $i = k$, то при подстановке $s_k = 0$ характеристическая функция примет вид $e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{k-1}\left(\sum\limits_{j=i}^{k-1}s_j\right)^2\cdot(t_i-t_{i-1})}$. Это в точности та характеристическая функция, которая была бы, если бы мы не писали ни t_k, ни s_k, это и есть условие согласованности.

Если $i < k$, то пропадёт промежуточный индекс, а характеристическая функция станет

$$e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{\ell=1}^{k}\Big(\sum\limits_{\substack{j=\ell\\ j\neq i}}^{k}s_j\Big)^2\cdot(t_\ell-t_{\ell-1})} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{\ell=1}^{i-1}\Big(\sum\limits_{\substack{j=\ell\\ j\neq i}}^{k}s_j\Big)^2\cdot(t_\ell-t_{\ell-1})}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{\ell=i+2}^{k}\left(\sum\limits_{j=\ell}^{k}s_j\right)^2\cdot(t_\ell-t_{\ell-1})}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\sum\limits_{j=i+1}^{k}s_j\right)^2\cdot(t_{i+1}-t_{i-1})}$$

Это в точности та сумма, которая получится, если убрать t_i и s_i. Значит, наша характеристическая функция согласованна, поэтому существует такой процесс W_t, что $\psi_{W_{t_1},\ldots,W_{t_k}}(s_1,\ldots,s_k)$ совпадает с функцией, заданной соотношением (**). Покажем, что это именно тот процесс, который мы искали, то есть что

1) $\psi_{W_{t_i}-W_{t_{i-1}}}(s) = e^{-\frac{(t_i-t_{i-1})s^2}{2}}$ при $t_{i-1} < t_i$;

2) $\psi_{W_{t_1},W_{t_2}-W_{t_1},\ldots,W_{t_k}-W_{t_{k-1}}}(s_1,\ldots,s_k) = \psi_{W_{t_1}}(s_1)\psi_{W_{t_2}-W_{t_1}}(s_2)\cdot\ldots\cdot\psi_{W_{t_k}-W_{t_{k-1}}}(s_k)$ при $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$. Это в точности процедура из уравнения (**),

проведённая в обратном порядке. Если обозначить $s_1 + \ldots + s_k = r_1$, $s_2 + \ldots + s_k = r_2, \ldots, r_k = s_k$, то получим характеристическую функцию вектора из приращений в точке $(r_1, \ldots, r_k)$, и она оказалась в точности такая же, как у произведения нормальных с соответствующими дисперсиями. А если у двух векторов одинаковые характеристические функции, то и распределения у них совпадают.

То есть мы получили процесс W_t, обладающий нужными нам свойствами:

1) $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim \mathbb{N}(0, t_i - t_{i-1})$, $t_0 = 0$, $t_{i-1} < t_i$;
2) $W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ — независимы, $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$.

Процесс с независимыми приращениями — процесс, у которого приращения процесса независимы при возрастающей последовательности индексов: $t_1 < t_2 < \ldots < t_k \Longrightarrow W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ — независимы.

Упражнение 3.1. Доказать, что существует X_t с независимыми приращениями такими, что $X_t - X_{t'} \sim F_{t,t'}$ тогда и только тогда, когда функция распределения $F_{t,t'}$ удовлетворяет свойству $F_{t,t'} * F_{t',t''} = F_{t,t''}$ для $t < t' < t''$, где $*$ — операция свёртки.

Модификация процесса

Определение 3.1. Процесс X_t называется *модификацией* Y_t, если для любого t $\mathrm{P}(X_t = Y_t) = 1$.

Ясно, что у модификаций конечномерные распределения совпадают:

$$\mathrm{P}(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_k} \in B_k) = \mathrm{P}(Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_k} \in B_k)$$

и процессы задают одинаковые распределения, однако из-за того, что точек не счётное, а континуальное число, могут возникнуть различные модификации.

Пример 3.2. Возьмём пространство $X_t = 0$, $Y_t = I_{t=\omega}$, $T = [0, 1]$, $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}\big([0, 1]\big)$ и P — мера Лебега. Эти две функции (см. рис. 3.1) довольно сильно отличаются по свойствам, например, одна непрерывна, а вторая разрывна; у них разные супремумы и разные моменты достижения максимума. При этом, Y_t является модификацией X_t и наоборот, потому что при фиксированном t $\mathrm{P}(\omega\colon t\colon X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = \mathrm{P}\{t\} = 0$. При фиксированном t величины X_t и Y_t совпадают почти наверное — во всех точках, кроме $\omega = t$; при этом траектории этих процессов никогда не совпадают.

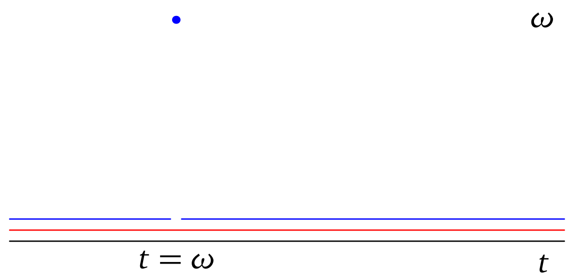


Рис. 3.1: Случайные процессы–модификации X_t и Y_t из примера 3.2. Для наглядности траектории процессов разнесены

Пример 3.3. $Y'_t = I_{t-\omega\in\mathbb{Q}}$ — также модификация процесса $X_t = 0$, потому что $\mathrm{P}\big(\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\big)$ — это мера счётного множества сдвигов t на рациональные числа, она всё ещё 0. В отличие от X_t и Y_t из примера 3.2, функция Y'_t всюду разрывна и не является интегрируемой по Риману.

Получается, что конечномерные распределения слишком слабо задают распределения процесса и допускают слишком разные модификации. Помним, что супремум — не множество из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, поэтому супремум процесса — не случайная величина. Наша сигма–алгебра не задаёт поведение процесса.

Лекция 4. Теорема о непрерывной модификации процесса

Борелевская сигма–алгебра на пространстве непрерывных функций

Напомним, что Y_t — модификация X_t, если $\mathrm{P}(Y_t = X_t) = 1$ при каждом t. Это не потраекторное совпадение, а совпадение в отдельной точке с вероятностью 1. Мы показали это при $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}\big([0, 1]\big)$, P — мера Лебега для процессов $X_t = 0$, $Y_t = I_{t=\omega}$ и $Y'_t = I_{t-\omega\in\mathbb{Q}}$, где $T = [0, 1]$.

Хотим как-то сократить пространство значений до некоторого сепарабельного, чтобы избежать работы с модификациями. Предположим, что X_t действует из Ω в $C[0, 1]$ $\big($в общем случае из $C(T)\big)$. Тогда $\mathcal{B}\big(C[0, 1]\big) = \mathcal{I} \cap C[0, 1]$.

Лемма 4.1. Пусть $\mathcal{X}$ — сепарабельное метрическое пространство, тогда для любого открытого U выполнено равенство $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, где B_i — шары в этом пространстве.

Доказательство. Заметим, что открытое множество $U = \bigcup\limits_{x\in U} U_{\delta(x)}(x)$, где $U_{\delta(x)}(x)$ — некоторые шары. Это следует из определения открытого множества, ведь можно выбрать $\delta(x)$ такие, что $U_{\delta(x)}$ не превосходит x. Это происходит потому, что каждая точка $x \in U$ лежит в своей собственной окрестности, поэтому каждая точка заведомо накрыта своей окрестностью.

Хотим уменьшить количество окрестностей до счётного числа так, чтобы любая точка $x \in U$ осталась открытой. Воспользуемся тем, что существует $s = s(x) \in S$ — счётного всюду плотного множества такая, что $s \in U_{\frac{\delta(x)}{2}}$. Тогда можем рассмотреть новую окрестность $V_x = U_{q(x)}\big(s(x)\big)$, где $q(x)$: $\rho(x, s) < q(x) < \frac{\delta}{2}$, где $q(x) \in \mathbb{Q}$. Тогда $U = \bigcup\limits_{x\in U} V_x$, так как каждая точка $x \in U$ содержится в V_x, с другой стороны, никакая точка вне множества U не может принадлежать никакому из V_x, так как $V_x \subset U_{\delta(x)}(x)$, которые не содержали точки вне U.

Остаётся заметить, что V_x не более, чем счётное число, так как всех возможных V_x столько, сколько пар $\big(s(x), q(x)\big)$, но и q, и s по счётному числу, значит, если убрать повторы из этой системы, получим не более, чем счётное объединение: $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. ■

То есть в нашем пространстве для любого открытого $U \in C[0,1]$, в силу сепарабельности, получаем, что $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Если показать, что шар $B_i \in \mathcal{I}$, то и счётное объединение шаров тоже будет лежать в цилиндрической сигма–алгебре $\mathcal{I}$. Возьмём шар $U_{\delta(g)}$ для $g \in C[0,1]$, по определению шара получим

$$U_{\delta(g)} = \Big\{f : \big|f(x) - g(x)\big| < \delta \ \forall x\Big\} = \bigcup_{\substack{n \\ \frac{1}{n} < \delta}} \Big\{f : \big|f(x) - g(x)\big| \leqslant \delta - \frac{1}{n} \ \forall x\Big\}.$$

Отметим, что

$$\Big\{f : \big|f(x) - g(x)\big| \leqslant \delta - \frac{1}{n} \ \forall x\Big\} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \Big\{f : \big|f(q) - g(q)\big| \leqslant \delta - \frac{1}{n}\Big\} \in \mathcal{I}.$$

Так как счётные пересечения и объединения элементов сигма–алгебры лежат в сигма–алгебре, то наш шар, а значит, и U, также лежат в цилиндрической сигма–алгебре. То есть открытые множества в $C[0,1]$ являются цилиндрическими, а $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T) = \mathcal{I}$.

Теорема Колмогорова о непрерывной модификации

Отметим, что не для каждого процесса X_t существует его модификация Y_t такая, что Y_t непрерывна. Например, её нет у процесса, который с вероятностью 1 равен функции Дирихле, потому что его модификация всегда будет функцией Дирихле.

Теорема 4.1 *(Колмогорова о непрерывной модификации)*. Пусть процесс X_t, где $t \in T = [0, L]$, такой, что неравенство $\mathrm{E}\,|X_t - X_s|^a \leqslant C\,|t-s|^{1+b}$ для некоторых $a, b, C > 0$ выполнено для всех $t, s \in [0, L]$. Тогда существует Y_t — такая модификация X_t, что $Y_t : \Omega \to C[0,1]$.

Доказательство. Будем доказывать теорему для отрезка $[0,1]$, для отрезка $[0, L]$ теорема получается растяжением. Введём множества

$$A_n = \left\{t \in [0,1] \colon t = \frac{k}{2^n},\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

для $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Также введём $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. Тогда по неравенству Маркова

$$\mathrm{P}\left(\left|X_{\frac{i}{2^n}} - X_{\frac{i-1}{2^n}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{E}\left|X_{\frac{i}{2^n}} - X_{\frac{i-1}{2^n}}\right|^a}{\varepsilon^a} \leqslant \frac{C\,\overbrace{|t-s|}^{\frac{1}{2^n}}{}^{1+b}}{\varepsilon^a} = \frac{C \cdot \varepsilon^{-a}}{2^{n+b\cdot n}}.$$

Тогда

$$\mathrm{P}\left(\exists i \in \{0, \dots, 2^n\}\colon \left|X_{\frac{i}{2^n}} - X_{\frac{i-1}{2^n}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{C\cdot\varepsilon^{-a}}{2^{bn}}.$$

Если взять $\varepsilon = 2^{-\gamma n}$, а $\gamma \in \left(0, \frac{b}{a}\right)$, тогда получим, что

$$\mathrm{P}\left(\exists i\colon \left|X_{\frac{i}{2^n}} - X_{\frac{i-1}{2^n}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant C\, 2^{-n(b-\gamma a)}.$$

По предположению, $b-\gamma a > 0$, поэтому мы получим какую-то геометрическую прогрессию, поскольку a, b, γ фиксированы. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}\left(\exists i\colon \left|X_{\frac{i}{2^n}} - X_{\frac{i-1}{2^n}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant C\cdot\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n(b-\gamma a)} < +\infty,$$

то есть ряд из вероятностей таких событий сходится, значит, по лемме Бореля–Кантелли

$$\mathrm{P}\left(\exists \text{ бесконечно много } n\colon \exists i\colon \left|X_{\frac{i}{2^n}} - X_{\frac{i-1}{2^n}}\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

поэтому мы можем убрать множество меры 0 и получим, что существует такое Ω' с $\mathrm{P}(\Omega') = 1$, что на нём при s, $t \in A$ выполнено $|X_t - X_s| \leqslant C'\,|t-s|^\gamma$, так как если s, $t \in A$, то найдётся такое n, что s, $t \in A_n$, и в этом A_n мы можем просуммировать неравенства $\left|X_{\frac{i}{2^n}} - X_{\frac{i-1}{2^n}}\right| > \varepsilon$, получим $|t-s|^\gamma$ с точностью до какой-то константы. Получили, что наш процесс гёльдеров при каждом $\omega \in \Omega'$.

Рассмотрим процесс $Y_t = \begin{cases} 0, & \omega \notin \Omega', \\ \lim\limits_{\substack{s\in A\\ s\to t}} X_s, & \omega \in \Omega'. \end{cases}$

Определение процесса Y_t не противоречивое, это следует из неравенства $|X_t - X_s| \leqslant C'\,|t-s|^\gamma$, потому что на точках из A функция равномерно непрерывна, и у неё не может быть проблем со сходимостью при подходе к точке t. Более того, в точках из A мы получим, что $Y_t = X_t$, а в точках не из A мы её как-то доопределим. Получили, что Y_t равномерно непрерывна, то есть Y_t также удовлетворяет соотношению $|Y_t - Y_s| \leqslant C'\,|t-s|^\gamma$ для любых $t, s \in T$, или же Y_t является гёльдеровой с некоторой константой. Тогда получаем, что Y_t непрерывна.

Покажем также, что для любого t выполнено равенство $\mathrm{P}(X_t = Y_t) = 1$, то есть Y_t является модификацией X_t. С одной стороны, $Y_t = \lim\limits_{\substack{s\to t\\ s\in A}} X_s$ почти наверное, с другой стороны, $X_t = \lim\limits_{\substack{s\to t\\ s\in A}} X_s$ по вероятности, поскольку это предел в L^a в силу условия $\mathrm{E}|X_t - X_s|^a \leqslant C\,|t-s|^{1+b}$. Это означает, что $X_t = Y_t$

почти наверное при фиксированном t. Значит, Y_t — искомая непрерывная модификация. ■

Непрерывный винеровский процесс

Пример 4.1. Ранее мы доказали, что существует такой процесс W_t, что

1) $W_0 = 0$ почти наверное,
2) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$,
3) W_t имеет независимые приращения.

Такой процесс называется *винеровским процессом* или броуновским движением. Его неудобство в том, что он определён на цилиндрической сигма–алгебре, а мы хотим, чтобы он действовал в $C[0, 1]$. Проверим, что существует непрерывная модификация этого процесса. Для этого посмотрим на $\mathrm{E}\,|W_t - W_s|^4 = \mathrm{E}\,U^4$, где $U \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Заметим, что $V = \frac{U}{\sqrt{t-s}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, это вытекает из того, что нормальное распределение принадлежит семейству сдвига и масштаба. Тогда $\mathrm{E}\,U^4 = (t-s)^2\,\mathrm{E}\,V^4 < +\infty$, так как у нормальной величины все моменты конечны. Положим $\mathrm{E}\,V^4 = C$, и взяв $a = 4$, $b = 1$, $C = \mathrm{E}\,V^4$, то получим, что $\mathrm{E}\,|W_s - W_t|^a \leqslant C\,|t-s|^{1+b}$. То есть существует процесс, для которого выполнены условия 1)–3) и условие

4) W_t имеет непрерывные траектории.

Такой процесс мы в дальнейшем и будем называть *броуновским движением* или *винеровским процессом*.

Обобщение вводной части

Мы выяснили, что $\mathcal{I}$, цилиндрическая сигма–алгебра, не похожа на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ — борелевскую сигма–алгебру на $\mathbb{R}^T$, однако $\mathcal{I} \cap C(T) = \mathcal{B}\big(C(T)\big)$, где $T = [0, 1]$ или $\mathbb{R}^+$, то есть рассматривая процессы на отрезке $[0, 1]$ с непрерывными траекториями, мы можем оперировать со всеми событиями, которые лежат в борелевской сигма–алгебре, это гораздо больше, чем в цилиндрической.

Также мы заметили, что случайный процесс $\{X_t\}$ имеет двоякий смысл: $\{X_t\}\colon \Omega \to \mathbb{R}^T$ — измеримое отображение относительно $\mathcal{I} \Longleftrightarrow X_t(\omega)$ — случайная величина для любого t.

Конечномерные распределения $\{X_t\}$ задают распределение $\Longleftrightarrow$ они согласованы, и чтобы задать случайный процесс достаточно задать конечномерные распределения и проверить их согласованность, а процесс найдётся.

Соответственно, в лучшем случае алгоритм работы с процессом следующий: берём процесс, задаём конечномерное распределение как мы хотим, проверяем их согласованность, показываем, что такой процесс существует, проверяем, удовлетворяет ли он теореме о непрерывной модификации, и если да, то берём непрерывную модификацию и рассматриваем процесс с непрерывными траекториями.

Иногда непрерывности нет, но может быть, например, непрерывность справа, для таких случаев есть свои теоремы для таких случаев. С такими процессами мы будем сталкиваться, но теорема нам не понадобится, поскольку мы явно конструктивно строить модификацию процесса, которая нам нужна.

Отдельно скажем про случайные последовательности, которые являются набором случайных величин на одном пространстве, при этом их сигма–алгебра совпадает с $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, то есть она совпадает с сигма–алгеброй, порождённой всеми открытыми множествами.

Лекция 5. Цепи Маркова

Определение и примеры

Под марковской цепью мы всегда будем подразумевать цепь с дискретным временем и множеством состояний S.

Определение 5.1. X_n — *марковская цепь (цепь Маркова)*, если

$$\mathrm{P}\big(X_n = i_n \,\big|\, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\big) = \mathrm{P}\big(X_n = i_n \,\big|\, X_{n-1} = i_{n-1}\big),$$

где $i_j \in S$ — *состояния* марковской цепи, S — *множество состояний*, то есть некоторое заданное конечное или счётное множество. Это соотношение должно быть выполнено для любых i_j таких, что

$$\mathrm{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) > 0.$$

Поскольку мы не будем работать с цепями как со случайными величинами, то мы можем рассматривать S с точностью до биекции, тогда можем считать $S = \{0, \ldots, N\}$ или $\{0, 1, \ldots\}$.

Пример 5.1. X_i — независимые величины со значением в не более чем счётном множестве S, тогда

$$\mathrm{P}\big(X_n = i_n \,\big|\, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\big) = \mathrm{P}(X_n = i_n),$$

$$\mathrm{P}\big(X_n = i_n \,\big|\, X_{n-1} = i_{n-1}\big) = \mathrm{P}(X_n = i_n),$$

поэтому цепь действительно будет являться цепью Маркова.

Случайное блуждание

Лемма 5.1. Пусть X_n — такая случайная последовательность, что для любых n и для любых i_j выполнено равенство

$$\mathrm{P}\big(X_n = i_n \,\big|\, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\big) = g(i_{n-1}, i_n; n) \tag{5.1}$$

при рассматриваемых $i_{n-1}, \ldots, i_0$ $\big($то есть $\mathrm{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) > 0\big)$. Тогда X_n — цепь Маркова.

Доказательство. Распишем определение условной вероятности используя формулу полной вероятности:

$$\mathrm{P}\big(X_n = i_n \,\big|\, X_{n-1} = i_{n-1}\big) = \frac{\mathrm{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}}{\mathrm{P}(X_{n+1} = i_{n+1})} = \\ = \frac{\sum\limits_{i_0,\ldots,i_{n-2}} \mathrm{P}(X_n = i_n X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0)}{\sum\limits_{i_0,\ldots,i_{n-2}} \mathrm{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)} =$$

В силу условия (5.1), вероятность в числителе равна вероятности в знаменателе, умноженной на $g(i_{n-1}, i_n; n)$. Так как $g(i_{n-1}, i_n; n)$ не зависит от индексов суммирования, мы можем вынести его, получим

$$= g(i_{n-1}, i_n; n) \frac{\cancel{\sum\limits_{i_0,\ldots,i_{n-2}} \mathrm{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}}{\cancel{\sum\limits_{i_0,\ldots,i_{n-2}} \mathrm{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}} = g(i_{n-1}, i_n; n).$$

Две условные вероятности совпадают с $g(i_{n-1}, i_n; n)$ и мы доказали марковское свойство. ■

Получается, что чтобы проверить марковость какой-то последовательности, достаточно показать, что условная вероятность из уравнения (5.1) зависит только от тройки i_n, i_{n-1} и n.

Пример 5.2 *(случайное блуждание).* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, где X_i — независимы, такие, чтобы S_n лежало в конечном или счётном множестве. Тогда

$$\mathrm{P}\big(S_{n+1} = i_{n+1} \,\big|\, S_n = i_n, \ldots, S_0 = i_0\big) = \mathrm{P}\big(S_n + X_{n+1} = i_{n+1} \,\big|\, S_n = i_n, \ldots, S_0 = i_0\big) = \\ = \mathrm{P}\big(X_{n+1} = i_{n+1} - i_n \,\big|\, S_n = i_n, \ldots, S_0 = i_0\big) = \mathrm{P}(X_n + 1 = i_{n+1} - i_n),$$

поскольку X_{n+1} не зависит от предыдущих X_i. Значит, эта функция действительно зависит только от n, i_n и i_{n+1}, и это цепь Маркова.

Можно слегка испортить случайное блуждание. Если сделать это так, чтобы не заглядывать в будущее и не использовать прошлое далеко, то всё равно получим марковскую цепь.

Пример 5.3 *(блуждание с отражением).* Процесс S_n стартует из какой-то точки, смещается на каждом шаге вверх или вниз на один. При этом если в какой-то момент времени точка окажется в точке 0, то на этом шаге она сможет пойти только вверх. Это также цепь Маркова, потому что распределение точки в следующий момент будет выписываться той же формулой для $i_n > 0$, а если $i_n = 0$, то S_{n+1} всегда будет равно 1.

Ветвящийся процесс

Пример 5.4 *(ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона).* В этом процессе частицы порождают другие частицы в случайном количестве (причём количество порождаемых частиц — независимые одинаково распределённые целочисленные неотрицательные величины). Породившая частица сразу же исчезает из процесса и больше не размножается:

$$\begin{array}{cccccc} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,j} & \cdots & \text{— н.о.р.} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,j} & \cdots & \text{целочисл.} \\ \vdots & & & & & \text{неотр.} \end{array}$$

Пусть изначально имеется одна частица, у которой $X_{1,1} = Z_1$ потомков, их потомков будет $X_{2,1}, \ldots, X_{2,k}$ штук, суммарно Z_2, и так далее. Этот процесс задаётся соотношением $Z_0 = 1$, $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i}$. Распишем условную вероятность:

$$\mathrm{P}\big(Z_n = i_n \,\big|\, Z_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Z_0 = i_0\big) = \\ = \mathrm{P}\Big(\sum_{j=1}^{i_n-1} X_{n,j} = i_n \,\Big|\, Z_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Z_0 = i_0\Big) = \mathrm{P}\Big(\sum_{j=1}^{i_n-1} X_{n,j} = i_n\Big),$$

так как величина в левой части условной вероятности не зависит от условия в правой части, то есть она по определению зависит только от n, i_{n-1} и i_n, даже если бы они не были независимыми и одинаково распределёнными. Значит, это цепь Маркова.

Однородная цепь Маркова

Определение 5.2. Если

$$\mathrm{P}\big(X_n = j \,\big|\, X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0\big) = \mathrm{P}\big(X_n = j \,\big|\, X_{n-1} = i\big) = p_{i,j}$$

не зависит от n, то X_n называется *однородной (по времени)* цепью Маркова, $p_{i,j}$ называется *вероятностью перехода* цепи Маркова из i в j, а матрица $(p_{i,j}) = P$ называется *матрицей вероятности переходов (МВП)*.

Пример 5.5. X_i — независимые однородные $\Longleftrightarrow$ X_i — одинаково распределённые. Это вытекает прямо из определения цепи Маркова.

Пример 5.6. Случайное блуждание $S_n = \sum X_i$, где X_i — независимы, однородно $\Longleftrightarrow$ X_i — одинаково распределённые.

Пример 5.7. Ветвящийся процесс $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i}$, $Z_0 = 1$, где $X_{n+1,i}$ — независимые одинаково распределённые при каждом n, однороден $\Longleftrightarrow X_{n+1,i}$ одинаково распределённые при i, $n \geqslant 1$.

Примеры немарковских процессов

Рассмотрим примеры, когда последовательность не является цепью Маркова.

Пример 5.8. Случайное блуждание, которое задерживает состояние в точке 0 на один ход — не цепь Маркова, потому что

$$\mathrm{P}\big(X_n = 1 \,\big|\, X_{n-1} = 0, X_{n-2} = 0, \dots\big) = \frac{1}{2};\ \mathrm{P}\big(X_n = 1 \,\big|\, X_{n-1} = 0, X_{n-2} = 1, \dots\big) = 0,$$

то есть вероятность попасть в 1 при условии, что мы побывали в 0 в предыдущий ход, будет меняться в зависимости от предыстории.

Пример 5.9. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$; X_i — независимые одинаково распределённые, причём X_i принимает значения 1 и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Тогда в этой модели $M_n = \max\limits_{i \leqslant n} S_i$ не является цепью Маркова. Физически это получатся из-за того, что максимум не знает где в данный момент находится конец X_n, а то, поменяется в следующий момент максимум или нет, зависит от того, совпадает ли X_n с M_n или нет. Например,

$$\mathrm{P}\big(M_4 = 2 \,\big|\, M_3 = 1,\, M_2 = 1,\, M_1 = 1,\, M_0 = 0\big) = \frac{1}{4};$$

$$\mathrm{P}\big(M_4 = 2 \,\big|\, M_3 = 1,\, M_2 = 0,\, M_1 = 0,\, M_0 = 0\big) = \frac{1}{2}.$$

В этом примере если $M_1 = M_2 = M_3 = 1$, то $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, а $X_3 = 1$ или $X_3 = -1$, а X_4 может быть 2 только при $X_3 = 1$; если $M_1 = M_2 = 0$, $M_3 = 1$, то $X_1 = -1, X_2 = 0, X_3 = 1$, поэтому вероятность увеличить максимум будет $\frac{1}{2}$. Таким образом прошлое последовательности максимумов уточняет что произойдёт в будущем даже когда настоящее известно, и это не цепь Маркова.

Упражнение 5.1. Показать из определения цепи Маркова, что пара $(M_n, S_n - M_n)$ и пара (M_n, S_n) являются цепями Маркова.

Получается, что часто добавив дополнительную информацию не цепь Маркова можно сделать цепью Маркова.

Лекция 6. Марковское свойство. Однородные цепи Маркова

Конечномерные распределения марковского процесса

Напомним, что *цепь Маркова* — последовательность, обладающая следующим свойством (*марковское свойство*):

$$\mathrm{P}\big(X_n = i_n \,\big|\, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\big) = \mathrm{P}\big(X_n = i_n \,\big|\, X_{n-1} = i_{n-1}\big)$$

для любых $i_j \in S$, таких, что вероятность условия ненулевая, где S — некоторое множество.

Такие последовательности называются *марковскими*, их конечномерные распределения задаются *начальным распределением* $\mathrm{P}(X_0 = i) = p_i^0$ и *матрицами вероятности перехода* на n-м шаге $P\big(X_{n+1} = j \,\big|\, X_n = i\big) = P_{ij}^{(n)}$.

Утверждение 6.1. (*уравнение Колмогорова–Чепмэна*):

$$\mathrm{P}\big(X_{n+k+\ell} = j \,\big|\, X_n = i\big) = \sum_m \mathrm{P}\big(X_{n+k+\ell} = j \,\big|\, X_{n+k} = m\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{n+k} = m \,\big|\, X_n = i\big).$$

Доказательство. Это следует из формулы полной вероятности, определения условной вероятности и марковского свойства:

$$\mathrm{P}\big(X_{n+k+\ell} = j \,\big|\, X_n = i\big) = \sum_m \mathrm{P}\big(X_{n+k+\ell} = j \,\big|\, \cancel{X_n = i}, X_{n+k} = m\big) \cdot \mathrm{P}\big(X_{n+k} = m \,\big|\, X_n = i\big).$$

∎

Выпишем матрицу вероятностей перехода $P(n, k)$ для общей марковской цепи:

$$P(n, k) = \Big(P_{ij}^{(n,k)} = \mathrm{P}\big(X_{n+k} = j \,\big|\, X_n = i\big)\Big)$$

Из уравнения Колмогорова–Чепмэна можем выразить

$$P(n, k+\ell) = P(n, k) \cdot P(n+k, \ell),$$

где под знаком $\cdot$ мы подразумеваем обычное матричное произведение (в том числе счётное, если S счётно).

Это уравнение поможет нам легко найти конечномерные распределения:

$$\mathrm{P}(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_k} = i_k) = \big\langle p^0 \cdot P(0, t_1)\big\rangle_{i_1} \cdot P(t_1, t_2 - t_1)_{i_1, i_2} \cdot \ldots \cdot P(t_{k-1}, t_k - t_{k-1})_{i_{k-1}, i_k}.$$

Содержательно это означает, что чтобы пройти по точкам $i_1, \ldots, i_k$, нужно сначала начать с чего-то (p^0), оттуда за время t_1 попасть в i_1, потом за время $t_2 - t_1$ попасть в i_2, и так далее, на последнем шаге попасть в i_k.

Лемма 6.1. Пусть $A \subseteq S^m$, $B \subseteq S^k$, $k, n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $i \in S$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Big((X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}) \in A \Big| X_n = i, (X_{n-1}, \ldots, X_{n-k}) \in B\Big) &= \\ &= \mathrm{P}\Big((X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}) \in A \Big| X_n = i\Big).\end{aligned}$$

Это соответствует тому, что всё будущее не зависит от всего прошлого, если известно настоящее.

Доказательство. Воспользуемся формулой полной вероятности, определением условной вероятности и марковским свойством, и считая $i = i_n$, получим

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\Big((X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}) \in A \Big| X_n = i, (X_{n-1}, \ldots, X_{n-k}) \in B\Big) = \\ &\qquad = \frac{\mathrm{P}\Big((X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}) \in A, X_n = i, (X_{n-1}, \ldots, X_{n-k}) \in B\Big)}{\mathrm{P}\Big((X_{n-1}, \ldots, X_{n-k}) \in B, X_n = i\Big)} = \\ &= \frac{\sum\limits_{I} \mathrm{P}(X_j = i_j, j \leqslant n+m)}{\sum\limits_{II} \mathrm{P}(X_j = i_j, j \leqslant n)} = \frac{\sum\limits_{I} p^0_{i_0} P^{(0)}_{i_0 i_1} P^{(1)}_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot P^{(n-1)}_{i_n i} P^{(n)}_{i\, i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot P^{(n+m-1)}_{i_{n+m-1} i_{n+m}}}{\sum\limits_{II} p^0_{i_0} P^{(0)}_{i_0 i_1} P^{(1)}_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot P^{(n-1)}_{i_n i}} \ominus\end{aligned}$$

где $I = \left\{\begin{matrix} i_1, \ldots, i_{n-1}, \ldots \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{n+m}) \in A \\ (i_{n-1}, \ldots, i_{n-k}) \in B \end{matrix}\right\}$, $II = \left\{\begin{matrix} i_1, \ldots, i_{n-1} \\ (i_{n-1}, \ldots, i_{n-k}) \in B \end{matrix}\right\}$.

Воспользуемся тем, что сумма в I отдельно ведётся по индексам больше i_n и отдельно по индексам меньше i_n, а слагаемые устроены так, что никогда два индекса в один множитель не входят, поэтому сумма в числителе распадётся в две суммы, одна из которых совпадёт с суммой в знаменателе и сократится, получим

$$\ominus \sum_{III} P^{(n)}_{i\, i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot P^{(n+m-1)}_{i_{n+m-1} i_{n+m}} = \mathrm{P}\Big((X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}) \in A \Big| X_n = i\Big),$$

где $III = \left\{\begin{matrix} i_{n+1}, \ldots, i_{n+m}, \ldots \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{n+m}) \in A \end{matrix}\right\}$. ■

То есть в цепи Маркова не обязательно фиксировать условие так жёстко, как это сделано в определении.

Можно это сформулировать немного по-другому: будущее не зависит от прошлого при условии настоящего, или

$$\begin{multline}\mathrm{P}\Big((X_{n+1},\ldots,X_{n+m})\in A,\,(X_{n-1},\ldots,X_0)\in B\,\Big|\,X_n=i\Big)=\\=\mathrm{P}\Big((X_{n+1},\ldots,X_{n+m})\in A\Big|X_n=i\Big)\mathrm{P}\Big((X_{n-1},\ldots,X_0)\in B\,\Big|\,X_n=i\Big)\quad(6.1)\end{multline}$$

Упражнение 6.1. Используя формулу условной вероятности, докажите формулу (6.1).

Обратите внимание, что во всех рассмотренных случаях настоящее X_n всегда точно формализовано. Если мы знаем X_n не точно, то прошлое будет влиять на будущее, уточняя где мы находимся в настоящем.

Пример 6.1. Пусть у цепи Маркова есть 3 состояния с начальным распределением $p^0(1)=p^0(2)=p^0(3)=\frac{1}{3}$, а $P_{ij}^{(n)}=\begin{cases}I_{j=i+1}, & i\neq 3,\\ I_{j=1}, & i=3\end{cases}$ (см. рис. 6.1).

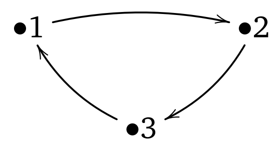


Рис. 6.1: Граф переходов для цепи Маркова из примера 6.1

Матрица перехода имеет вид $P^{(n)}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Для такой цепи

$$\mathrm{P}\Big(X_3=1\,\Big|\,X_2\in\{1,2,3\},X_1=1\Big)=0,$$
$$\mathrm{P}\Big(X_3=1\,\Big|\,X_2\in\{1,2,3\},X_1=2\Big)=1,$$

потому что из 1 мы переходим в 2, а из 2 перейти в 1 мы не можем, а из 2 мы всегда перейдём сначала в 3, а потом в 1.

Поэтому при нефиксированном настоящем марковское свойство не выполнено, и X_3 зависит от того, каким был X_1.

Отметим также, что если X_n — цепь Маркова, а $f: S \to S$ — какая-то функция, то, вообще говоря, $f(X_n)$ может быть не цепью Маркова.

Пример 6.2. Возьмём цепь Маркова из примера 6.1 и функцию $f = \begin{cases} 1, & 2; \\ 1, & 3; \\ 2, & 1. \end{cases}$

Эта функция склеивает 2 и 3, а 1 переводит в 2.

$f(X_n)$ не будет цепью Маркова, так как

$$\mathrm{P}\big(f(X_3) = 2 \,\big|\, f(X_2) = 1, f(X_1) = 1\big) = 1,$$

$$\mathrm{P}\big(f(X_3) = 2 \,\big|\, f(X_2) = 1, f(X_1) = 2\big) = 0.$$

Первый случай может получиться только при $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, тогда X_3 заведомо 1; во втором случае $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, а X_3 будет равно 3, а $f(X_3) = 1$.

Однородные цепи Маркова

Говорят, что X_n — однородная цепь Маркова, если матрица вероятностей перехода $\mathrm{P}\big(X_n = j \,\big|\, X_{n-1} = i\big) = p_{ij}$ не зависит от n. Будем обозначать эту матрицу через P. В этом случае конечномерные распределения выражаются через вектор p^0 и матрицу P:

$$\mathrm{P}(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_k} = i_k) = (p^0 \cdot P^{t_1})_{i_1} \cdot (P^{t_2 - t_1})_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot (P^{t_k - t_{k-1}})_{i_{k-1} i_k}.$$

Для любого начального распределения p^0 и любой матрицы P, обладающих свойствами $\sum p_i^0 = 1$ и $\sum\limits_{j \in S} P_{ij} = 1$, а также все $p_i^0 > 0$ и $P_{ij} > 0$, всегда найдётся цепь Маркова с такими конечномерными распределениями, это гарантирует теорема Колмогорова о согласованности.

Пример 6.3. Пусть X_i — независимые одинаково распределённые с $\mathrm{P}(X_i = 1) = \mathrm{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Рассмотрим последовательность $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, это однородная цепь Маркова с матрицей вероятности перехода

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = j+1, \\ \frac{1}{2}, & i = j-1, \end{cases}$$

это двудиагональная бесконечная во все стороны матрица:

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & 0 \\ & {}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 & & & \\ & & {}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 & & \\ & & & {}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 & \\ 0 & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Считаем, что мы стартуем из фиксированной точки 0, тогда начальное распределение $p^0 = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Часто мы будем задавать ориентированным графом матрицу вероятностей перехода, на котором рёбра соответствуют возможным переходам. В нашем случае удобно изобразить его на прямой (см. рис. 6.2).

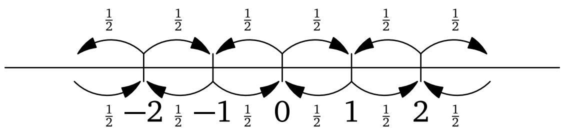


Рис. 6.2: Граф, соответствующий матрице вероятностей перехода их примера 6.3

Однородность этой цепи Маркова вытекает из того, что все X_i одинаково распределены.

Пример 6.4 *(ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона)*. Напомним, что он определяется формулой $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$, где $X_{i,j}$ — независимые одинаково распределённые целочисленные неотрицательные величины, а $Z_0 = 1$.

Предположим, что $X_{i,j}$ принимает два значения с вероятностями $\mathrm{P}(X_{i,j} = 2) = \frac{1}{2}$ и $\mathrm{P}(X_{i,j} = 0) = \frac{1}{2}$. Тогда матрица вероятностей перехода будет устроена следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Нетрудно представить себе, что строки матрицы представляют собой удвоенное биномиальное распределение с параметром $\frac{1}{2}$. Тогда граф будет иметь довольно сложную структуру (см. рис. 6.3).

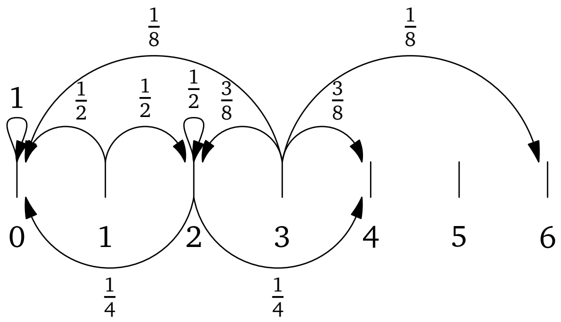


Рис. 6.3: Граф, соответствующий матрице вероятностей перехода их примера 6.4

Как видим, из нечётных вершин мы можем только уйти, и никогда не можем вернуться; а вершина 0 является замкнутым циклом. Чуть позже мы введём для них специальные названия.

Полезные наблюдения про цепи Маркова

1) Если X_n — цепь Маркова, то X_{kn} — тоже цепь Маркова для любого k, причём однородность первой цепи влечёт однородность второй. Если матрица вероятностей перехода исходной цепи была P, то у новой цепи она будет P^k. Имеется в виду, что мы рассматриваем последовательность $X_0, X_k, X_{2k}, \ldots$

Доказательство. Это цепь Маркова, так как

$$\mathrm{P}\Big(X_{nk} = i_n \Big| X_{k(n-1)} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\Big) = \mathrm{P}\Big(X_{nk} = i_n \Big| X_{k(n-1)} = i_{n+1}\Big) = P^k$$

■

Вообще, любая подпоследовательность цепи Маркова будет цепью Маркова, но однородность в таком случае может нарушиться.

2) Если X_n — цепь Маркова, Y_n — цепь Маркова, и они независимы, то пара (X_n, Y_n) (декартово произведение независимых цепей) — тоже цепь Маркова. Под независимостью последовательностей мы подразумеваем то, что

$$\mathrm{P}\Big(\{X_n\} \in A, \{Y_n\} \in B\Big) = \mathrm{P}\Big(\{X_n\} \in A\Big)\mathrm{P}\Big(\{Y_n\} \in B\Big) \;\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty).$$

Для этого достаточно, чтобы в произведение распадались конечномерные распределения, и это условие достаточно требовать для любого конечного множества.

Доказательство. Воспользуемся определением условной вероятностью и независимостью X_n и Y_n, получим

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\big((X_n, Y_n) = (i_n, j_n)\,\big|\,(X_{n-1}, Y_{n-1}) = (i_{n-1}, j_{n-1}), \dots\big) = \\ &= \frac{\mathrm{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)\,\mathrm{P}(Y_0 = j_0, \dots, Y_n = j_n)}{\mathrm{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})\,\mathrm{P}(Y_0 = j_0, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1})} = P_{X, i_{n-1}, i_n} P_{Y, j_{n-1}, j_n},\end{aligned}$$

где P_X — матрица вероятностей перехода цепи X. Поскольку получившееся выражение зависит только от i_n, i_{n-1}, j_n, j_{n-1}, то это действительно цепь Маркова. ■

3) Если X_n — цепь Маркова с множеством состояний S, то пара (X_n, X_{n+1}) — цепь Маркова с множеством состояний S^2.

Доказательство. Отметим, что прошлым свойством пользоваться нельзя, поскольку цепи зависимы, но в данном случае это нам не мешает, поскольку можем рассмотреть

$$\mathrm{P}\big((X_{n+1}, X_n) = (i_n, j_n)\,\big|\,(X_n, X_{n-1}) = (i_{n-1}, j_{n-1}), \dots, (X_1, X_0) = (i_0, j_0)\big) \circeq$$

Это выражение имеет смысл только в том случае, если $i_0 = j_1$, $i_1 = j_2, \dots$, $i_{n-2} = j_{n-1}$, иначе у нас в условии будут стоять величины, которые противоречат друг другу. Тогда вероятность будет равна

$$\circeq \begin{cases} 0, & j_n \neq i_{n-1} \\ P_{j_n, i_n}, & j_n = i_{n-1} \end{cases}$$

Получается, что наша формула зависит только от i_n, j_n и i_{n-1}, и эта последовательность является цепью Маркова. ■

Определение 6.1. X_n — k–марковская цепь, если

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\big(X_n = j_n \,|\, X_{n-1} = j_{n-1}, \dots, X_{n-k+1} = j_{n-k+1}, \dots\big) = \\ &\qquad\qquad = \mathrm{P}\big(X_n = j_n \,|\, X_{n-1} = j_{n-1}, \dots, X_{n-k} = j_{n-k}\big).\end{aligned}$$

Если $k = 1$, то это обычная марковская цепь, а иначе она смотрит на прошлое чуть побольше.

Отметим, что если X_n — k–марковская цепь, то $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k-1})$ — цепь Маркова.

Доказывается это прямо из определения k–марковской цепи:

$$\mathrm{P}\Big((X_n,\ldots,X_{n+k-1})=(i_{n,1},\ldots,i_{n,k})\,\Big|\,(X_{n-1},\ldots,X_{n+k-2})=(i_{n-1,1},\ldots,i_{n-1,k}),\ldots\Big)=$$
$$=\begin{cases}0, \ i_{n,1}\neq i_{n-1,2}, \text{ или } i_{n,2}\neq i_{n-1,3}, \text{ или } \ldots, \text{ или } i_{n,k-1}\neq i_{n-1,k}\\ \mathrm{P}\Big(X_{n+k-1}=i_{n,k}\,\Big|\,X_{n-1}=i_{n-1,1},\ldots\Big), \text{ иначе}\end{cases}$$

В силу k—марковского свойства, можем отбросить из последней вероятности всё, что идёт до момента k, а это будет легко представить в виде вероятности нужного вида.

Упражнение 6.2. Доделать выкладки и доказать это свойство k—марковских цепей.

Строго марковское свойство

Определение 6.2. Сигма–алгебры на Ω $\mathcal{F}_n$ образуют *поток (фильтрацию)*, если $\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{F}_{n+1}$ $\forall n\geqslant 0$.

Определение 6.3. *Естественная фильтрация (естественный поток)* для последовательности случайных величин $\{X_n\}$ — это сигма–алгебра, порождённая первыми i элементами, то есть

$$\mathcal{F}_i=\sigma(X_0,\ldots,X_i)=\Big\{(X_0,\ldots,X_i)\in B,\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\Big\}.$$

Пример 6.5. Рассмотрим пространство бросания монетки $N=2$ раза. Тогда у нас есть 4 исхода: (0, 0), (0, 1), (1, 0) и (1, 1). После первого броска получим сигма-алгебру $\mathcal{F}_0$, порождённую первой из этих величин. В ней будет 2 события: первая монетка выпала на 0, первая монетка выпала на 1. На втором ходу сигма–алгебра будет порождена уже всеми 4 исходами.

Если рассмотреть фильтрацию бесконечного количество испытаний Бернулли, мы бы могли сказать, что испытания Бернулли заданы на пространстве $\Omega=[0,1)$ с сигма–алгброй $\mathcal{F}=\mathcal{B}\big([0,1)\big)$ и мерой Лебега P. Каждое $\omega\in\Omega$ можно представить в виде двоичной записи: $\omega=0,\omega_1\omega_2\ldots$, тогда последовательность $X_i(\omega_i)=\omega_i$ — бесконечная бернуллиевская последовательность. Сигма–алгебра будет общей борелевской, а $\mathcal{F}_n$ будет сигма–алгеброй, соответствующей разбиению отрезка $[0,1)$ на 2^n равных отрезков или первыми n цифрами нашего случайного числа.

Определение 6.4. $\tau\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ — *марковский момент* относительно потока $\{\mathcal{F}_n\}$, если событие $\{\tau=n\}$ лежит в $\mathcal{F}_n$ при любом $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пример 6.6. Если фильтрация естественная, то есть $\mathcal{F}_n=\sigma(X_0,\ldots,X_n)$, то $\{\tau=n\}=\Big\{(X_0,\ldots,X_n)\in A_n,\ A_n\in\mathcal{B}(R^{n+1})\Big\}$. То есть марковский момент —

такой момент, который можно описать в терминах $X_0, \ldots, X_n$, не заглядывая в будущее.

Пример 6.7. Если τ — первый момент попадания последовательности X_n, которая не обязательно будет цепью Маркова, в множество A, то τ — марковский момент относительно естественной фильтрации, так как

$$\{\tau = n\} = \{X_0 \notin A, X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n \tag{6.2}$$

Если момент заглядывает в будущее, то он не будет марковским.

Пример 6.8. τ — первый момент, когда случайное блуждание достигнет максимума на отрезке $[0, 100]$ — не марковский момент. Пусть мы хотим, чтобы событие $\{\tau = 1\} = \{s_1 > 0, s_2 \leqslant s_1, \ldots, s_{100} \leqslant s_1\}$ лежало в сигма–алгебре $\mathcal{F}_1$, однако там лежат только события вида $\{X_1 \in A\}$

Теорема 6.1 *(строго марковское свойство)*. Пусть X_n — однородная цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода P; τ — марковский момент относительно естественной фильтрации. Тогда последовательность $\{X_{\tau+n}\}_{n\geqslant 0}$ при условии $X_\tau = i$ образует цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода P, не зависящую от $X_1, \ldots, X_\tau$. Считаем τ собственной случайной величиной, которая с вероятностью 1 конечна.

Доказательство. Используя формулу полной вероятности по событию $\tau < k$, распишем:

$$\mathrm{P}(X_{\tau+n} = i_n, \ldots, X_\tau = i_0) = \sum_k \mathrm{P}(\tau = k, X_{n+k} = i_n, \ldots, X_k = i_0) \ominus$$

Теперь можем воспользоваться теоремой о произведении, получим:

$$\ominus \sum_k \mathrm{P}\big(X_{n+k} = i_k \,\big|\, X_{n+k-1} = i_{n-1}, \ldots, \tau = k\big) \mathrm{P}\big(X_{n+k-1} = i_{n-1} \,\big|\, X_{n+k-2}, \ldots, \tau = k\big) \times$$
$$\times \ldots \cdot \mathrm{P}\big(X_{k+1} = i_1 \,\big|\, X_k = i_0, \tau = k\big) \cdot \mathrm{P}(X_k = i_0, \tau = k) \ominus$$

Из (6.2) можно сказать, что событие $\tau = k$ — событие, когда $(X_0, \ldots, X_k)$ попали в какое-то множество. Если событие $X_\tau = i$ не запрещено, то по лемме 6.1 можем отбросить большую часть условий в правой части и получить

$$\ominus \sum_k \mathrm{P}\big(X_{n+k} = i_k \,\big|\, X_{n+k-1} = i_{n-1}\big) \mathrm{P}\big(X_{n+k-1} = i_{n-1} \,\big|\, X_{n+k-2}\big) \cdot \ldots \times$$
$$\times \mathrm{P}\big(X_{k+1} = i_1 \,\big|\, X_k = i_0\big) \cdot \mathrm{P}(X_k = i_0, \tau = k) = \mathrm{P}(X_\tau = i_0) \cdot P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot P_{i_{n-1} i_n}$$

Если мы возьмём два таких тождества для n и $n-1$, и поделим их друг на друга, то получим

$$\frac{\mathrm{P}(X_{\tau+n} = i_n, \ldots, X_\tau = i)}{\mathrm{P}(X_{\tau+n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_\tau = i)} = P_{i_{n-1}\, i_n}.$$

Это и означает, что наша последовательность является цепью Маркова с матрицей вероятностей перехода P.

Отметим, что она не зависит от $X_1, \ldots, X_{\tau-1}$, поскольку мы можем дописать в наше тождество какое-то событие, содержащее эти величины, то они окажутся измеримыми относительно сигма–алгебры, порождённой первыми k величинами, и эта вероятность исчезнет из условных вероятностей и останется вовне, что и будет означать условную независимость. ■

Пример 6.9. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ — цепь Маркова; $S' \subset S$ — выделенный класс состояний. Рассмотрим цепь устроенную следующим образом: если $X_i \in S'$, то мы видим X_i, а если нет, то не видим. Полученная *частично наблюдаемая цепь* Y_i — однородная цепь Маркова с отличной матрицей перехода.

Можем представить $Y_i = X_{\tau_i}$, где τ_i — i-ый момент посещения S'; $i = 0, \ldots$

Это будет цепью Маркова, поскольку τ_0 — первый момент прихода в какое-то состояние цепи Маркова, то это марковский момент, и с момента τ_0 цепь запускается снова независимо от предыдущего. Событие $\{\tau_{n-1} = k\} \in \mathcal{F}_k$, тогда из строго марковского свойства

$$\mathrm{P}\left(X_{\tau_n} = j_n \,\middle|\, X_{\tau_{n-1}} = j_{n-1}, \ldots, X_{\tau_0} = j_0\right) = \mathrm{P}\left(X_{\tau_n = j_n} \,\middle|\, X_{\tau_{n-1}} = j_{n-1}\right) =$$

Поскольку τ_n — это τ_{n-1} плюс какая-то величина, не зависящая от прошлого. Введём новую цепь $Z_i = X_{\tau_{n-1}} + i$, тогда $X_{\tau_n} = Z_{\tau_n - \tau_{n-1}}$. Поскольку цепь Z_i — независящая от прошлого цепь с той же матрицей вероятностей перехода, то

$$= \mathrm{P}\left(Z_{\tau_n - \tau_{n-1}} = j_n \,\middle|\, Z_0 = j_{n-1}\right)$$

не зависит от прошлого в силу марковости. Поэтому Y_i — цепь Маркова.

Лекция 7. Классификация состояний цепей Маркова

Марковский момент

Напомним, что τ — *марковский момент* относительно фильтрации $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, если событие $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ при любом $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для него выполнено *строго марковское свойство*: если X_n — однородная цепь Маркова, то $X_\tau, X_{\tau+1}, \ldots$ образует однородную цепь Маркова с той же матрицей вероятностей перехода, что и у X_n, и $(X_\tau, \ldots)$ при условии $X_\tau = i$ не зависит от $(X_0, \ldots, X_\tau)$.

Пример 7.1. X_n — цепь Маркова, τ_i — i-ый приход в множество состояний $S' \subseteq S$; тогда $Y_n = X_{\tau_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ — марковская цепь, поскольку

$$\{\tau_i = k\} = \left\{\text{среди } X_0, \ldots, X_{k-1} \text{ ровно } i-1 \text{ было из } S',\ X_k \in S'\right\} \in \mathcal{F}_k$$

по определению сигма–алгебры $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, \ldots, X_k)$, порождённой вектором, и τ_i — марковский момент, поэтому из строго марковского свойства $(X_{\tau_{n-1}}, X_{\tau_{n-1}+1}, \ldots)$ не зависит от $(X_{\tau_{n-1}}, \ldots, X_0)$ при условии $X_{\tau_{n-1}} = i$, тогда

$$\mathrm{P}\left(X_{\tau_n} = j \,\middle|\, X_{\tau_{n-1}} = i, X_{\tau_{n-2}} = i_{n-2}, \ldots, X_{\tau_0} = i_0\right) = \mathrm{P}\left(X_{\tau_n} = j \,\middle|\, X_{\tau_{n-1}} = i\right),$$

то есть X_{τ_n} — цепь Маркова по определению

Упражнение 7.1. Проверить, что

$$P\left(X_{\tau_n} = j \,\middle|\, X_{\tau_{n-1}} = i\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_k = j, X_{k-1} \notin S', \ldots, X_1 \notin S' \,\middle|\, X_0 = i\right).$$

Пример 7.2 *(цепь скачков)*. Пусть X_i — однородная цепь Маркова. Рассмотрим её только в те моменты, когда $X_i \neq X_{i-1}$: $Y_n = X_{\tau_n}$, где $\tau_i = i$-ый момент j, когда $X_j \neq X_{j-1}$. Тогда $\mathrm{P}\left(X_{\tau_n} = j \,\middle|\, X_{\tau_{n-1}} = i, \ldots\right) = \mathrm{P}\left(X_{\tau_n} = j \,\middle|\, X_{\tau_{n-1}} = i\right)$, то есть Y_n является однородной цепью Маркова.

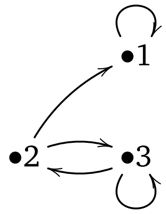
Упражнение 7.2. Убедившись, что τ — марковский момент, показать, что матрица вероятностей перехода этой цепи будет иметь вид

$$\mathrm{P}\left(X_{\tau_n} = j \,\middle|\, X_{\tau_{n-1}} = i\right) = \begin{cases} \frac{p_{ij}}{1-p_{ii}}, & i \neq j; \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Классификация состояний цепи Маркова

Пример 7.3. Представим обычную игральную колоду карт. Рассмотрим в качестве вероятностного пространства некоторую случайную перестановку чисел от 1 до 36: $\Omega = \big\{(i_1, \ldots, i_{36}),\ i_j \neq i_\ell,\ j \neq \ell,\ i_j \in \{1, \ldots, 36\}\big\} = S_{36}$. Хотим узнать, правда ли, что наша цепь в момент n равна какой-то фиксированной перестановке с определённой вероятностью $\mathrm{P}(X_n = \sigma) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_\sigma = \frac{1}{36!}$ вне зависимости от начального распределения X_0. Это возможно благодаря эргодической теореме, которую мы скоро рассмотрим. Отметим, что не все цепи удовлетворяют этой теореме, например, если мы будем перекладывать чётное количество карт, то не сможем получить некоторые перестановки.

Для наглядности, будем задавать однородную цепь Маркова с помощью графа. Пусть P — матрица вероятностей перехода с элементами p_{ij}. Множество вершин графа — множество состояний S; множество рёбер — множество ориентированных пар (i, j), таких, что $p_{ij} > 0$ (см. рис. 7.1).



$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Рис. 7.1: Пример графа и соответствующей ему матрицы перехода

Будем говорить, что из состояния i *следует* состояние j, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\mathrm{P}\big(X_n = j \,\big|\, X_0 = i\big) = P_{ij}(n) > 0$, то есть существует путь из вершины i в вершину j за несколько шагов. Обозначение: $i \to j$.

Состояние i *сообщается* с состоянием j, если из i следует j, а из j следует i. Обозначение: $i \longleftrightarrow j$. На рис. 7.1 сообщающимися будут состояния 2 и 3.

Состояние i — *поглощающее*, если $p_{ii} = 1$. На рис. 7.1 это состояние 1.

Состояние i — *существенное*, если для любого j, такого, что $i \to j$, верно $j \to i$. На рис. 7.1 таким состоянием будет только 1, потому что из 2 и 3 можно прийти в 1, а обратно вернуться уже нельзя.

Несущественными будут состояния, из которых мы рано или поздно уйдём и уже никогда не вернёмся.

Говорят, что $A \subseteq S$ — *неразложимый класс*, если для любых $i, j \in A$ выполнено $i \longleftrightarrow j$, а для любых $i \in A$ и $j \notin A$ выполнено $i \not\to j$. На рис. 7.2 неразложимыми классами будут $\{1, 2\}$ и $\{4, 5, 6\}$, состояние 3 будет несущественным и ни в какой неразложимый класс попасть не сможет.

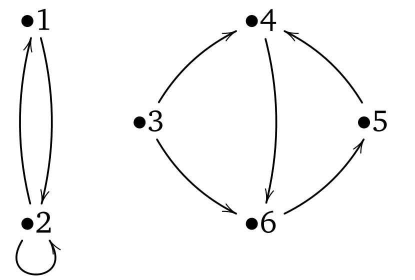


Рис. 7.2: Пример графа

Теорема 7.1 *(о разложении).* Существуют такие непересекающиеся E_i, $i = 0, 1, \ldots$, $E_i \subseteq S$, что E_0 — все несущественные состояния (может быть пустым), $E_1, E_2, \ldots$ — неразложимые классы, а $E_0 \sqcup \ldots \sqcup E_n \sqcup \ldots = S$.

С точки зрения матрицы вероятностей перехода это значит, что можно поменять порядок столбцов и организовать цепь следующим образом:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} E_0 & E_1 & E_2 & \dots \end{array} \\ \begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} \multicolumn{4}{c}{\boxed{\text{что-то}}} \\ 0 & \boxed{*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} \end{pmatrix} \end{array}$$

Доказательство. Построим эти классы конструктивно.

Положим в E_0 все несущественные.

Если осталась ещё вершина, то её и всех, с кем она сообщается, кроме тех, кто в E_0, кладём в E_1. Теперь нужно убедиться, что E_1 получился замкнутым (неразложимым) классом. Если 2 состояния лежат в неразложимом классе, то оба они сообщаются с исходной вершиной, а, значит, и друг с другом. С другой стороны, если взять вершину j не из класса, то если бы из i можно было попасть в j и вернуться назад, то тогда j должно лежать в нашем классе по построению. Поэтому если из i можно попасть в j, то назад вернуться уже нельзя, тогда i несущественная, чего быть не может. Значит, из i нельзя попасть ни в какую «чужую» j.

Если остались ещё вершины, то повторяем процедуру, кладём следующую любую вершину и всех, кто с ней сообщается, в класс E_2, и так далее. Классы будут не пересекаться по построению. ■

Цепь X_n *неразложима*, если $E_0 = \varnothing$, $E_1 = S$.

Для примера 7.3 очень важно, чтобы цепь была неразложимой. Если цепь будет разложимой, то в процессе перетасовки получится, что мы не сможем некоторые расклады перевести в другие.

Пример 7.4. Рассмотрим цепь «гуляй на право» $X_0 = 0$, $X_i = i$ (см. рис.7.3). В этой цепи Маркова все состояния будут несущественными, потому что из любого состояния мы можем перейти направо, а вернуться уже не сможем.

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \ldots$$

Рис. 7.3: Пример цепи Маркова, состоящей только из несущественных состояний

Периодичность состояния цепи Маркова

Говорят, что i *имеет период* d, если $d = \text{НОД}\big(\{j\colon P_{ii}(j) > 0\}\big) > 1$. Если $\text{НОД}\big(\{j\colon P_{ii}(j) > 0\}\big) = 1$, то говорят, что i *непериодично*.

Для рис. 7.4 при $i = 1$ набор вероятностей $P_{ii}(n)$ будет иметь вид

$$\big\{P_{11}(n)\big\} = \{0, > 0, > 0, > 0, \ldots\}$$

Появились два числа, 2 и 3, НОД которых равен 1, значит, $d = 1$, а 1 — непериодично.

При $i = 2$ и $i = 3$ получим $\big\{P_{22}(n)\big\} = \{0, 0, > 0, 0, > 0, \ldots\}$. Поскольку $\text{НОД}(3, 5) = 1$, то 2 и 3 — непериодичны.

При $i = 4$ получим $\big\{P_{44}(n)\big\} = \{0, > 0, 0, > 0, > 0, \ldots\}$, значит, 4 непериодично.

То есть все состояния цепи Маркова на рис. 7.4 непериодичны.

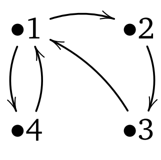


Рис. 7.4: Пример графа цепи Маркова с непериодичными состояниями

Примером периодичной цепи может стать случайное блуждание по прямой на один влево или вправо, поскольку в таком случае состояния будут делиться на два класса: нечётные и чётные. Если мы находимся в чётном состоянии, то вернуться в него мы можем только за чётное число ходов: $P_{ii}(n) = \{0, > 0, 0, > 0, \ldots\}$, то есть период $d = 2$.

Отметим, что при этом все состояния распались на два класса, то есть граф получился двудольным. Можно показать, что так будет всегда.

Теорема 7.2. Если в неразложимой цепи период всех состояний d, то существует такое разложение $S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_n = S$, что для любого $i \in S_k$, $j \notin S_{k+1}$ выполнено $p_{ij} = 0$ (если $k = d$, то $k + 1$ понимаем как 1).

С точки зрения матрицы вероятностей перехода это значит, что в периодичной цепи можно так отсортировать состояния, что получится следующая матрица:

$$\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & \ldots & S_d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} \\ \boxed{*} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Доказательство. Возьмём состояние $i \in S_1$. Всех j, которые следуют за шаг из i (то есть $p_{ij} > 0$) отправим в класс S_2. Всех k, таких, что $p_{jk} > 0$, $j \in S_2$, отправим в S_3, и так далее. Рано или поздно, мы попадём в каждое состояние, потому что в силу неразложимости из i следует каждое состояние.

Если нет конфликтов, то по построению можно попасть из состояния только в следующий класс: если $i \to j$, то j — из следующего класса. Нужно убедиться, что мы не положили одно состояние в 2 класса.

Если есть конфликты, то существуют такие $i_1 \in S_k$, $i_2 \in S_\ell$, $k \neq \ell$, что $i_1 \to j$ за шаг и $i_2 \to j$ за шаг. Это невозможно, так как из i в i_1 существует путь длины $ad + k - 1$, где $a \in \mathbb{Z}$, а из i в i_2 существует путь длины $bd + \ell - 1$, где $b \in \mathbb{Z}$. Поэтому из i в j существуют пути длины $ad + k$ и $bd + \ell$. Поскольку цепь неразложима, то существует путь из j в i длины c. Тогда $ad + k + c \mathrel{\vdots} d$ и $bd + \ell + c \mathrel{\vdots} d$, то есть k и ℓ дают одинаковый остаток при делении на d, а это невозможно, ведь k и ℓ — различные числа от 1 до d. Получили противоречие, значит, конфликта возникнуть не может. ■

Говорят, что неразложимая цепь X_n *имеет период* d, если все состояния имеют в ней период d. Скоро мы покажем, что достаточно того, чтобы любое состояние в ней имело период d. Говорят, что цепь *непериодина*, если все её состояния непериодичны.

Аналогично, неразложимый класс *имеет период* d, если все состояния в нём имеют период d.

Теорема 7.3 *(солидарности)*. Пусть $i \leftrightarrow j$, тогда если i — непериодично, то и j тоже; если i имеет период d, то и j тоже.

Доказательство. Пусть период i равен d_1, покажем, что длина всех путей из j в j будет делиться на d_1. Возьмём путь из j в j длины ℓ. Существует путь из i в j длины ℓ_1 и из j в i длины ℓ_2, тогда $\ell_1+\ell_2 \vdots d_1$, поскольку это путь из i в i. Рассмотрим путь $i \xrightarrow{\ell_1} j + j \xrightarrow{\ell} j + j \xrightarrow{\ell_2} i$. Его длина $\ell_1+\ell_2+\ell \vdots d_1$, поскольку это путь из i в i. Значит, $\ell \vdots d_1$. Поэтому длина любого пути из j в j должна быть кратна периоду состояния i, то есть период j кратен периоду i, и наоборот (если состояние непериодично, то считаем, что период равен 1). ■

Теорема положительности

Теорема 7.4 *(положительности)*. Пусть X_n — конечная цепь, то есть S — конечно. X_n неразложима и непериодична тогда и только тогда, когда существует такой n_0, что $p_{ij}(n_0) > 0\ \forall i, j$ (то есть P^{n_0} имеет только положительные элементы).

Доказательство.
$\Leftarrow$ Если существует такое n_0, то $i \to j\ \forall i, j$, а $p_{ii}(n_0) > 0$, то есть период заведомо является делителем n_0, и при этом $p_{ii}(n_0+1) \geqslant p_{ij}(n_0) \cdot p_{ji}\ \forall j$. В состояние i откуда-то можно прийти, поскольку есть путь из i в i за n_0 шагов: можем взять предпоследнюю вершину этого пути. Поэтому существует такое j, что $p_{ji} > 0$, тогда $p_{ii}(n_0+1) > 0$. Получили, что НОД$\{n\colon p_{ii(n)>0}\} = 0$, потому что есть два пути с взаимно простыми длинами n_0 и n_0+1. То есть цепь действительно является неразложимой и непериодичной.

$\Rightarrow$ Воспользуемся тем, что если числа $n_1, \dots, n_k$ имеют НОД$(n_1, \dots, n_k) = 1$, то существуют такие целые числа $a_1, \dots, a_k$, что $a_1 n_1 + \ldots + a_k n_k = 1$. Рассмотрим $a_1 n_1 + \ldots + a_k n_k + n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \cdot c_1 = c_1 \cdot n_1 \cdot \ldots \cdot n_k + 1$ выбрав c_1 так, что при перегруппировке множителей $b_1 n_1 + \ldots + b_k n_k$ окажется, что все $b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть i — какое-то состояние, его период равен 1, значит, существуют такие числа $n_1, \dots, n_k$ и пути из i в i длины $n_1, \dots, n_k$ так, что НОД$(n_1, \dots, n_k) = 1$ по определению непериодической цепи. Тогда сделав b_1 кругов из i в i длины n_1, и так далее, b_k кругов из i в i длины n_k, получим путь длины $c_1 \cdot n_1 \cdot \ldots \cdot n_k + 1$, а также любой путь, отличающийся от него, например, на n_1, просто добавляя ещё цикл длины n_1. Тогда для любого числа вида $c_1 n_1 \ldots n_k + 1 + m n_1$ существует путь из i в i такой длины.

Теперь домножим наше тождество на 2, получим $2(a_1 n_1 + \ldots + a_k n_k) = 2$.

Возьмём $c_2 \cdot n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ и добавим его так, чтобы удвоенные a_i стали положительными: $b_{1,2} n_1 + \ldots + b_{k,2}$, где $b_{i,2} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда для любого числа вида $c_2 n_1 \ldots n_k + 2 + m n_1$ существует путь такой длины.

Повторим эти рассуждения с 3 …, $n_1 - 1$, получим соответствующие им числа $c_3, \ldots, c_{n_1-1}$. Тогда для любого $n > c_j n_1 \ldots n_k + 1$, $j \leqslant n_1 - 1$ существует путь из i в i такой длины. Если мы рассмотрим все найденные пути, то они покроют все целые числа, начиная с $n_{0,i} = \max(c_1, \ldots, c_{n_1-1}) \cdot n_1 \ldots n_k + 1$.

Возьмём $\widetilde{n}_0 = \max(n_{0,i})$. Это такая длина, начиная с которой будут существовать путь такой длины из каждого состояния в себя.

Для любых $i \neq j$ рассмотрим такое n_{ij}, что $p_{ij}(n_{ij}) > 0$. В силу неразложимости все состояния сообщаются, значит, для каждой пары состояний можно предъявить такое количество ходов, за которое из одного состояния можно попасть в другое.

Возьмём $\max_{i \neq j} n_{ij} + \widetilde{n}_0 = n_0$. Убедимся, что из любого состояния в любое можно попасть за n_0 шагов. Для вершин i и j существует путь длины n_{ij}, ведущий из i в j. При этом $n_0 - n_{ij} \geqslant \widetilde{n}_0$, значит, существует путь из j в j такой длины. Получили искомый путь из состояния i в состояние j за n_0 шагов, то есть $p_{ij}(n_0) > 0$. ■

Отметим, что эта теорема интересна, среди прочего, тем, что позволяет понять, что такое неразложимая непериодическая цепь. По теореме о представлении, если возвести непериодичную цепь в степень d, то получим разложимую цепь. Разложимая цепь разложима сразу, периодичная цепь разложима в какой-то степени, а неразложимая непериодичная конечная цепь с какого-то момента становится матрицей из только положительных чисел. Таким образом матрица вероятностей перехода конечной цепи либо сразу будет блочной, либо станет блочной при возведении её в какую-то степень, либо с какого-то момента матрица станет одним блоком из положительных чисел и всегда такой останется.

Лекция 8. Эргодическая теорема

Эргодическая теорема для конечных цепей Маркова

Напомним, что мы хотели показать, что $\mathrm{P}(X_n = i \,\big|\, X_0 = j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_i > 0$, где π_i фиксированы и не зависят от j. Иными словами, каким бы не было начальное распределение у цепи, предельные вероятности с ростом n будут стремиться к некоторому числу. Такое свойство марковской цепи будем называть *эргодичностью*.

Пусть цепь конечна, то есть множество состояний цепи $|S| < +\infty$. Будем требовать от цепи следующие свойства:

i) цепь должна быть *неразложима*

Если есть класс несущественных состояний $E_0 \neq \varnothing$, то для любого $i \in E_0$ будет выполнено $\mathrm{P}\big(X_n = i \,\big|\, X_0 = j\big) \to 0$, то есть $\pi_i = 0$, так как мы можем рассмотреть состояние i и периоды возвращения из этого состояния в себя, то тогда цепь будет возвращаться конечное число раз.

Если E_0 пусто, но есть два класса $E_1 \neq \varnothing$ и $E_2 \neq \varnothing$, то $\mathrm{P}\big(X_n = i \,\big|\, X_0 = j\big) \to 0$, если $i \in E_1$, $j \in E_2$, потому что, по определению, из неразложимого класса мы можем попасть только в себя.

ii) цепь должна быть *непериодична*

Иначе $\mathrm{P}\big(X_n = i \,\big|\, X_0 = i\big) \neq 0$ только если $n \vdots d$, поэтому у такой последовательности не может быть ненулевого предела.

В теореме 7.4 мы показали, что в конечной цепи неразложимость и непериодичность $\iff$ положительность, то есть найдётся такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что P_0^n состоит только из положительных элементов ($p_{ij}^{n_0} > 0 \ \forall i, j$).

Теорема 8.1 *(эргодическая теорема для конечных цепей Маркова)*.
Если X_n положительна, то существует такой вероятностный вектор π_i, являющийся единственным решением уравнения $\pi P = \pi$, что $\pi_j > 0$, $\sum \pi_j = 1$, а $\mathrm{P}\big(X_n = j \,\big|\, X_0 = i\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_j$ для любого $i \in S$

Матричная формулировка этой теоремы состоит в том, что если у нас есть матрица, обладающая свойством, что в некоторой степени она состоит только из положительных элементов, то у этой матрицы есть единственный левый собственный вектор с собственными значениями, и что n-ая степень матрицы поэлементно сходится к матрице с постоянными строками — это теорема Перрона–Фробениуса.

Существует несколько доказательств эргодической теоремы: матричное; использующее сжимающие отображения; основанное на процессе восстановления и вероятностное Мы будем рассматривать только вероятностное доказательство.

Отметим, что если предел $\mathrm{P}\big(X_n = i \,\big|\, X_0 = j\big)$ существует, то он обязательно будет удовлетворять уравнению $\pi P = \pi$, так как

$$\underbrace{\mathrm{P}\big(X_n = i \,\big|\, X_n = j\big) = P_{ji}(n)}_{\to \pi_i} = \sum_{k\in S} \underbrace{P_{jk}(n-1)}_{\to \pi_k} P_{ki},$$

при этом $\sum \pi_j = 1$, так как π_i были какими-то вероятностями с суммой 1, а предел суммы равен сумме пределов.

Стационарное распределение

Говорят, что $\vec{p}$ — *стационарное распределение* цепи Маркова, если $\vec{p}P = \vec{p}$, где P — матрица вероятностей перехода цепи, причём все $p_i \geqslant 0$, $\sum p_i = 1$. В бесконечном случае не всегда есть стационарное распределение, а в конечном оно есть всегда.

Левый собственный вектор с собственным значением 1 существует, потому что правый собственный вектор с собственным значением 1 предъявляется — это вектор, состоящий из единиц. Если матрицу P умножить на вектор-столбец из единиц справа, то мы сложим её элементы, получив сумму по строкам, которая равна 1 у нашей матрицы. Осталось проверить, будет ли этот левый собственный вектор неотрицательным.

Лемма 8.1. Рассмотрим для некоторого выделенного состояния $i_0 \in S$ нашей цепи набор

$$\widetilde{p}_i = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\big(X_k = i, X_j \neq i_0, j \leqslant k \,\big|\, X_0 = i_0\big), & i \neq i_0; \\ 1, & i = i_0. \end{cases}$$

Такая последовательность существует, причём $\widetilde{p}P = \widetilde{p}$, где P — матрица вероятностей перехода цепи X_n.

Отметим, что это не распределение, поскольку одна из его компонент — единица, но мы можем его отнормировать так, что сумма компонент будет равна 1, то получим стационарное распределение.

Доказательство. Если $i \neq i_0$, то $\widetilde{p}_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\big(X_k = i, X_j \neq i_0, j \leqslant k \,\big|\, X_0 = i_0\big)$. С другой стороны, по марковскому свойству,

$$(\widetilde{p}P)_i = \sum_{j\neq i_0}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\big(X_k = j, X_\ell \neq i_0, j \leqslant k \,\big|\, X_0 = i_0\big)\, p_{ji} + p_{i_0 i} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\big(X_{k+1} = i, X_\ell \neq i_0, \ell \leqslant k+1 \,\big|\, X_0 = i_0\big) + p_{i_0 i} =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty}\mathrm{P}\big(X_k = i, X_\ell \neq i_0, \ell \leqslant k \,\big|\, X_0 = i_0\big) + p_{i_0 i}$$

Видим, что мы получили сумму, как в $\widetilde{p}_i$, но только со второго слагаемого и с дополнительным слагаемым $p_{i_0 i}$. При этом пропущенное слагаемое в сумме — это вероятность того, что $X_1 = i$ при условии того, что $X_0 = i_0$, то есть в точности $p_{i_0 i}$. Поэтому эти две суммы совпадают.

Если $i = i_0$, то $\widetilde{p}_{i_0} = 1$, а $(\widetilde{p}P)_{i_0} = \sum\limits_{j\neq i_0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\big(X_k = j, X_\ell \neq i_0, \ell \leqslant k \,\big|\, X_0 = i_0\big)\, p_{ji_0} + p_{i_0 i_0}$. В этой сумме перебраны все пути, которые в первый раз переводят i_0 в себя, то есть это вероятность того, что время прихода из i_0 в себя (T_{i_0}) конечно.

Покажем, что $\mathrm{P}_{i_0}(T_{i_0} < +\infty) = 1$. Это верно не для любой цепи, а только для неразложимых цепей, потому что в них любое состояние возвращается в себя. Чтобы доказать это, заметим, что $\mathrm{P}_{i_0}(T_{i_0} > m\cdot n_0) \leqslant (1-\widehat{p}_{i_0})^m$, где n_0 такое, что $P^{n_0} > 0$, то есть все элементы матрицы P^{n_0} — положительные числа, а $\widehat{p}_{i_0} = \min\limits_{i\in S}\big(p_{ii_0}(n)\big)$. Это верно, так как

$$\mathrm{P}_{i_0}(T_{i_0} > m\,n_0) \leqslant \sum_{j\neq i_0}\mathrm{P}\big(T_{i_0} > (m-1)\,n_0, X_{(m-1)\,n_0} = j\big)\,\underbrace{\mathrm{P}\big(X_{n_0} \neq i_0 \,\big|\, X_0 = j\big)}_{=1-p_{ji_0}(n_0)\leqslant 1-\widehat{p}_{i_0}} \leqslant$$
$$\leqslant (1-\widehat{p}_{i_0})\,\mathrm{P}\big(T_{i_0 > (m-1)\,n_0}\big) \leqslant \ldots \leqslant (1-\widehat{p}_{i_0})^m.$$

Здесь мы повторили процедуру m раз пока не получили требуемое неравенство. Значит, наша величина действительно собственная, и вероятность того, что она больше n стремится к 0, а вероятность того, что она меньше ∞ равна 1.

Заметим также, что для конечной неразложимой цепи

$$\mathrm{E}\,T_{i_0} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}(T_{i_0} > k) \leqslant n_0 + n_0\,\mathrm{P}(T_{i_0} > n_0) + \ldots + n_0\,\mathrm{P}(T_{i_0} > mn_0) + \ldots < +\infty.$$

Получили, что у нас выполнено уравнение $\widetilde{p}P = \widetilde{p}$, причём

$$\widetilde{p}_i \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathrm{P}\left(X_\ell \neq i_0,\, \ell \neq k \,\middle|\, X_0 = i_0\right)}_{=\mathrm{P}(T_{i_0} > k)} \leqslant \mathrm{E}\, T_{i_0},$$

поэтому вероятности $\widetilde{p}_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_k = i, X_\ell \neq i_0,\, \ell \leqslant k \,\middle|\, X_0 = i_0\right)$, $i \neq i_0$ существуют и конечны, и мы действительно могли определить их таким образом. ■

Следствие 8.1. Если $\mathrm{E}_{i_0} T_{i_0} < +\infty$, то то же верно для счётной цепи.

Если мы возьмём $p_i = \frac{\widetilde{p}_i}{\sum\limits_{i \in S} \widetilde{p}_i}$, то, поскольку $\widetilde{p}_i$ конечное число и сумма заведомо определена, то по построению мы получили левый собственный вероятностный вектор нашей матрицы с неотрицательными компонентами, а, значит, этот вектор и есть стационарное распределение нашей цепи.

Возьмём цепь Маркова X_n, про которую мы хотим доказать эргодическую теорему, а также независящую от неё цепь Y_n со стационарным распределением цепи X_n, поскольку мы уже знаем, что оно есть. У неё матрица вероятностей перехода та же, а начальное распределение другое. Позже мы покажем, что если цепь конечная, то спустя какое-то время наступит момент T, когда цепи сомкнутся в одно состояние. В этот момент поменяем цепи местами, то есть рассмотрим цепь Z_n, которая ведёт себя как X_n до момента встречи. а с момента встречи она будет вести себя как Y_n. Получили цепь с той же матрицей перехода из строго марковского свойства. С другой стороны, новая цепь имеет начальное распределение такое же, как у X_n, и имеют ту же матрицу вероятностей перехода, значит, это такая же цепь, как X_n, и $\mathrm{P}\big(Z_n \neq i,\, Y_n = i) = \underbrace{\mathrm{P}(Z_n \neq i,\, Y_n = i,\, T \geqslant n)}_{\leqslant \mathrm{P}(\tau \geqslant n) \to 0} + \underbrace{\mathrm{P}(Z_n \neq i,\, Y_n = i,\, T < n)}_{=0}$. То есть для Z_n вероятность того, что $Z_n = i$ стремится к p_i, а, значит, и для X_n эта вероятность стремится к p_i. При доказательстве мы обоснуем, что подмена, которую мы сделали, когда-нибудь возможна, и что эта подмена не ломает марковость цепи.

Переход к цепи Маркова со стационарным распределением

Лемма 8.2. Пусть $T = \min\{\ell : X_\ell = Y_\ell\}$, где Y_ℓ — цепь Маркова со стационарным начальным распределением p_i и той же матрицей вероятностей перехода, что и у X_n, не зависящая от X_n. Тогда $\mathrm{P}(T < +\infty) = 1$

Доказательство. Возьмём наши две цепи и рассмотрим

$$\mathrm{P}(T > mn_0) \leqslant \sum_{i,j} \mathrm{P}\big(T > (m-1)\,n_0,\, Y_{(n-1)\,m_0} = j,\, X_{(n-1)\,m_0} = i\big) \times$$
$$\times \underbrace{\Big(1 - \overbrace{\mathrm{P}\big(X_m = 1 \,\big|\, X_0 = i\big)}^{\geqslant \widehat{p}_1} \cdot \overbrace{\mathrm{P}\big(Y_{n_0} = 1 \,\big|\, Y_0 = j\big)}^{\geqslant \widehat{p}_1}\Big)}_{\leqslant 1 - \widehat{p}_1^2} \leqslant$$

Мы выбросили из рассмотрения один случай, когда обе цепи за следующие n_0 шагов пришли в состояние 1. Мы оценили вероятности одним числом, поскольку матрицы вероятностей перехода у них одинаковые, и $\widehat{p}_1$ — минимум по столбцу этой матрицы, поэтому

$$\leqslant (1-\widehat{p}_1^2)\,\mathrm{P}\big(T > (m-1)\,n_0\big) \leqslant \ldots \leqslant (1-\widehat{p}_1^2)^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0,$$

значит, событие заведомо настанет. ■

Лемма 8.3. $\mathrm{P}(Y_n = i) = p_i$.

Доказательство. $\mathrm{P}(Y_n = i) = \sum\limits_j \mathrm{P}(Y_{n-1} = j)\,p_{ji}$. По индукции можем предположить, что $\mathrm{P}(Y_{n-1} = j) = p_j$, тогда, поскольку наше распределение стационарное, сумма будет равна p_i. База индукции при $n = 1$ следует из определения цепи Y_n. ■

Осталось доказать, что T — марковский момент относительно некоторой сигма–алгебры, и если ввести новую цепь Z_n, то эта цепь будет совпадать с Y_n.

Лемма 8.4. Введём цепь $(U_n, V_n) = \begin{cases} (X_n, Y_n),\ n \leqslant T; \\ (Y_n, X_n),\ n > T. \end{cases}$

Тогда (U_n, V_n) — цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода, полученной $P_{ij}P_{k\ell} =: P^*_{(i,k),(j,\ell)}$, от есть (U_n, V_n) — независимые цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода P.

Доказательство. (X_n, Y_n) — однородная цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода P^*, T — марковский момент относительно нашей цепи. Значит, из строго марковского свойства, (X_{T+i}, Y_{T+i}) — цепь Маркова с той же матрицей вероятностей перехода, не зависящая от (X_j, Y_j), $j \leqslant T$ при условии $(X_T = i, Y_T = i)$. При этом

$$\mathrm{P}\big((X_{T+j}, Y_{T+j}) = (k_j, \ell_j),\, j \leqslant m \,\big|\, X_T = i,\, Y_T = i\big) =$$
$$= \mathrm{P}\big(X_{T+j} = \ell_j,\, Y_{T+j} = k_j,\, j \leqslant m \,\big|\, X_T = i,\, Y_T = i\big) =$$

Мы поменяли местами ℓ_j и k_j, поскольку матрицы вероятностей перехода у них одинаковые. Поэтому конечномерное распределение цепи, полученной вторым образом, совпадает с конечномерным распределением цепи, полученной первым образом:

$$\ominus \mathrm{P}\Big(Y_{T+i}=k_j,\, X_{T+i}=\ell_j,\, j\leqslant m\,\Big|\,X_T=i,\, Y_T=i\Big).$$

То есть обе цепи не будут зависеть от того, что было до момента T при таком условии. Поэтому, цепь (U_n, V_n) как последовательность будет совпадать по распределению с цепью (X_n, Y_n), значит, это действительно цепь Маркова с необходимой матрицей вероятностей перехода. ■

Следствие 8.2. Последовательность $\{X_n\}$ имеет то же распределение, что и последовательность $\{U_n\}$, в частности, совпадает распределение их первых координат, а $\mathrm{P}(X_n=k)=\mathrm{P}(U_n=k)$.

Лемма 8.5. $\Big|\mathrm{P}(X_n=k)-p_k\Big|\leqslant \mathrm{P}(T>n)$.

То есть сходимость к стационарному распределению экспоненциально высокая.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_n=k)=\mathrm{P}(U_n=k)=\mathrm{P}(U_n=k,\, T\leqslant n)+\mathrm{P}(U_n=k,\, T>n)=\\ =\mathrm{P}(Y_n=k,\, T\leqslant n)+\mathrm{P}(U_n=k,\, T>n)=\\ =\mathrm{P}(Y_n=k)-\mathrm{P}(Y_n=k,\, T\leqslant n)+\mathrm{P}(U_n=k,\, T>n)=p_k-\varepsilon_{k,1}+\varepsilon_{k,2},\end{aligned}$$

при этом $|\varepsilon_{k,i}|\leqslant \mathrm{P}(T>n)$, $\varepsilon_{k,i}\geqslant 0$, то есть $\Big|\mathrm{P}(X_n=k)-p_k\Big|\leqslant \mathrm{P}(T>n)$. ■

Завершение доказательства эргодической теоремы

Осталось показать, что стационарное распределение единственно и положительно.

Напомним, что $p_i=\frac{\widetilde{p}_i}{\sum \widetilde{p}_j}$, где $\widetilde{p}_j=\begin{cases}1, & j=i_0;\\ \sum\limits_k \mathrm{P}\Big(X_\ell\neq i_0,\, \ell\leqslant k,\, X_k=j\,\Big|\,X_0=i_0\Big), & j\neq i_0.\end{cases}$

Мы знаем, что существует путь из i_0 в любую j, поскольку они сообщаются. При этом если этот путь проходит через i_0, мы можем отбросить часть пути до последнего прохождения через i_0, получим путь из i_0 в j, не проходящий повторно через i_0. Вероятность этого пути будет положительна, поэтому $\widetilde{p}_j$ будет положительна, и, по построению, решение p_i будет положительным решением исходного уравнения.

Пусть существуют стационарные распределения $\pi^{(1)}$ и $\pi^{(2)}$. Рассмотрим цепь $Y_n^{(1)}$ со стационарным распределением $\pi^{(1)}$ и цепь $Y_n^{(2)}$ со стационарным распределением $\pi^{(2)}$. Тогда получим, что, с одной стороны, $\mathrm{P}(Y_n^{(2)} = i) = \pi_i^{(2)}$, а с другой, в силу нашей теоремы, $\mathrm{P}(Y_n^{(2)} = i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_i^{(1)}$, то есть $\pi_i^{(1)}$ совпадает с $\pi_i^{(2)}$ при каждом i.

Тем самым эргодическая теорема доказана.

Упражнение 8.1. Показать, что если P — дважды стохастическая, то есть p_{ij} таковы, что $\sum\limits_i p_{ij} = 1$ — сумма по всем столбцам равна 1, а цепь Маркова неразложима и непериодична, то $\pi_i = \dfrac{1}{|S|}$.

Лекция 9. Предельное поведение вероятности в случае когда цепь разложима. Бесконечные цепи Маркова

Нахождение стационарного распределения

Напомним эргодическую теорему в конечном случае.

Теорема 9.1. Пусть множество состояний S — конечно, X_n — неразложимая и непериодичная цепь Маркова. Тогда $\mathrm{P}(X_n = i) \to \pi_i$, где $\pi_i > 0$, $\sum \pi_i = 1$, $\sum \pi_i p_{ij} = \pi_j$, то есть π — стационарное распределение, и цепь к нему сходится, причём такое стационарное распределение единственно.

Есть несколько способов найти π:

1) Нужно решить матричное уравнение $P^T \pi = \pi$, где π — вектор–столбец, то есть нам нужно найти собственный вектор с собственным значением 1 матрицы P^T, решив систему линейных уравнений $(P^T - E)\pi = 0$ и отнормировав результат так, чтобы сумма получилась 1.

2) Пусть вектор x_i такой, что $x_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, обладает свойством *обратимости в равновесии*: $x_i p_{ij} = p_{ji} x_j$. Тогда $\vec{\pi} = \vec{x}$. Можно убедиться в этом, подставив это в уравнение $\sum \pi_i p_{ij} = \pi_j$, получим

$$\sum_i x_i p_{ij} = \sum_i x_j p_{ji} = x_j \sum_i p_{ji} = x_j,$$

то есть при применении матрицы P вектор x переходит в себя.

Пример 9.1. Рассмотрим случайное блуждание на отрезке $[0, m]$ с отражением в концах. Во всех точках, кроме крайних вероятности перейти налево и направо равны по $\frac{1}{2}$, в крайних состояниях можем перейти только в одну сторону, в которую можно ходить, с вероятностью 1 (см. рис. 9.1).

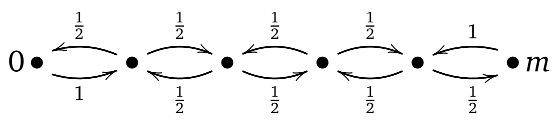


Рис. 9.1: Цепь Маркова из примера 9.1

У этой цепи $p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = i+1,\ j \neq 1; \\ \frac{1}{2}, & j = i-1,\ j \neq m-1; \\ 1, & i = m,\ j = m-1; \\ 1, & i = 0,\ j = 1. \end{cases}$

Попробуем найти решение, обратимое в равновесии. Для этого посмотрим на $\widetilde{x}_i p_{ij} = \widetilde{x}_j p_{ji}$. Если $i, j \notin \{0, 1, m-1, m\}$, то $p_{ij} = p_{ji} = \frac{1}{2}$, поэтому $\widetilde{x}_i = \widetilde{x}_j$. Если взять $\{i, j\} = \{1, 2\}$, то получим, что им также равны $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_{m-1}$. Если $\{i, j\} = \{0, 1\}$, то $\widetilde{x}_0 \cdot 1 = \widetilde{x}_1 \cdot \frac{1}{2}$, то есть $\widetilde{x}_0 = \frac{1}{2}\widetilde{x}_1$, аналогично, $\widetilde{x}_m = \frac{1}{2}\widetilde{x}_{m-1}$. Отсюда получаем, что $\widetilde{x}_i = I_{i\in\{1,\ldots,m-1\}} + \frac{1}{2} I_{i\in\{0,m\}}$ — решение системы. После нормировки получим $x_i = \begin{cases} \frac{1}{2m}, & i = 0 \text{ или } i = m; \\ \frac{1}{m}, & i \in \{1, \ldots, m-1\}. \end{cases}$

Это решение задаёт стационарное распределение нашей цепи Маркова, то есть $p_{ij}(n) \xrightarrow{n\to\infty} x_j$.

Отметим, что цепь со стационарным распределением может не быть обратимой в равновесии.

Пример 9.2. Рассмотрим «монополию»: $X_{n+1} = X_n + R_n \mod m$, где m — размер доски, а $R_n \sim R\{1, \ldots, 6\}$. То есть из каждой клетки мы кидаем кубик, добавляем соответствующее число, и сдвигаемся на нужную клетку. Если получилось число, большее $m-1$, то дополнительно вычитаем из него m. Эта цепь не обратима в равновесии при $m > 7$, так как $P_{0(m-1)} = 0$, а $P_{(m-1)0} = \frac{1}{6}$. Если мы находимся в клетке 0, то в клетку больше 6 попасть не сможем, а находясь в последней клетке доски, мы можем перейти в 0 за один шаг.

Рассмотрим цепь Маркова $X_0, \ldots, X_n$ и «перевёрнутую» цепь $X_n, \ldots, X_0$. Чтобы доказать марковость этой цепи, нужно проверить, что

$$\mathrm{P}\big(X_k = i \,\big|\, X_{k+1} = j, X_{k+2} = i_{k+2}, \ldots, X_n = i_n\big) \ominus$$

не зависит от $X_{k+2} = i_{k+2}, \ldots, X_n = i_n$. Для этого воспользуемся определением условной вероятности и свойством марковской цепи:

$$\ominus \frac{\mathrm{P}(X_k = i, X_{k+1} = j, \ldots, X_n = i_n)}{\mathrm{P}(X_{k+1} = j, \ldots, X_n = i_n)} = \frac{\mathrm{P}(X_k = i) \cdot p_{ij} \cancel{p_{ji_{k+2}} \cdots p_{i_{n-1}i_n}}}{\mathrm{P}(X_{k+1} = j) \cancel{p_{ji_{k+2}} \cdots p_{i_{n-1}i_n}}} = \frac{\mathrm{P}(X_k = i) \cdot p_{ij}}{\mathrm{P}(X_{k+1} = j)}$$

Видим, что полученная дробь зависит только от k, i и j, поэтому любая цель Маркова, перевёрнутая задом наперёд будет заведомо цепью Маркова.

Если $\mathrm{P}(X_k = i)$ одна и та же при всех $k \geqslant 0$ для каждого фиксированного i, то есть цепь Маркова имеет стационарное распределение, тогда обращенная цепь $X_n \ldots, X_0$ будет однородной цепью Маркова.

Если $p_i^0 p_{ij} = p_j^0 p_{ji}$, тогда для обращенной цепи $\mathrm{P}\left(X_k = i \,\middle|\, X_{k-1} = j\right) = p_{ji}$.

То есть цепи, обратимые в равновесии обладают стационарным распределением, а матрица перехода обратной цепи такая же, как у прямой. Обратимость в равновесии — достаточное условие для того, чтобы найти стационарное распределение.

Упражнение 9.1. Показать, что в примере 9.1 цепь неразложима и непериодична, то есть выполнены условия эргодической теоремы и переход $p_{ij}(n) \to x_j$ корректен при $n \to \infty$.

Упражнение 9.2. Решить задачу из примера 9.1 для цепи Маркова, изображённой на рис. 9.2.

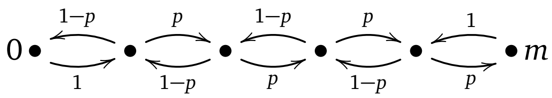


Рис. 9.2: Цепь Маркова для упражнения 9.2

Упражнение 9.3. Пусть G — заданный неориентированный граф. Хотим найти стационарное распределение у цепи, состояния которой соответствуют вершинам графа, а из каждой вершины i мы равновероятно переходим в случайного соседа этой точки. Показать, что $\pi_i = \frac{\nu_i}{2|E|}$, где ν_i — степень вершины, то есть число рёбер, примыкающих к ней, а $|E|$ — число рёбер в графе. Подумать над условиями, накладываемыми на граф, чтобы была выполнена эргодическая теорема.

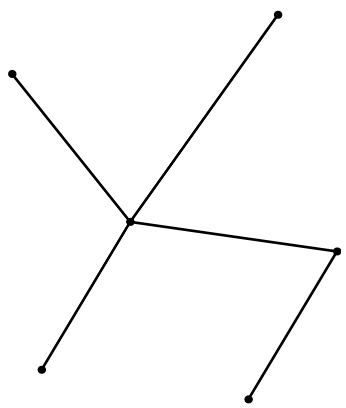


Рис. 9.3: Пример графа для упражнения 9.3

Теорема 9.2 *(закон больших чисел для цепей Маркова).* Пусть X_n — неразложимая непериодичная конечная цепь. Тогда для любой $g : S \to \mathbb{R}$ верно свойство $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} g(X_i)}{n} \to \sum\limits_{j\in S} \pi_j\, g(j) = \mathrm{E}_\pi g(u)$, то есть если мы усредним первые n значений аддитивного функционала g от цепи Маркова, то это сойдётся к математическому ожиданию.

Отметим, что эта теорема остаётся верной и в периодическом случае. Оставим её без доказательства и вернёмся к эргодической теореме.

Обобщение эргодической теоремы на произвольные цепи Маркова

Замечание 9.1. Если цепь неразложима и периодична с периодом d, то $p_{ij}(nd+k) \to \widetilde{\pi}_j$, где k — остаток длины какого-то пути из i в j (для всех путей из i в j это число будет одинаковым, так как цепь разбивается на d классов, следующих друг из друга), состояния $i_1, \ldots, i_\ell, j$ образуют класс периодичности, а вектор $(\widetilde{\pi}_k, \ldots, \widetilde{\pi}_m)$ получен так: $\widetilde{\pi}_j = \frac{\pi_j}{\pi_{i_1}+\ldots+\pi_{i_\ell}+\pi_j}$, где π — решение уравнения $\pi P = \pi,\ \sum \pi_i = 1,\ \pi_i > 0$.

Рассмотрим для цепи Маркова из примера 9.1 последовательность $p_{0j}(n)$ при фиксированном j и меняющемся n будет устроена следующим образом: $\left\{p_{01}(n)\right\} = \{0, 1, 0, (>0), 0, \ldots\}$. Так как $j = 1$ лежит не в том же классе, что и 0, то $k = 1$. Чтобы получить сходящуюся последовательность, необходимо рассмотреть $p_{01}(2n+1)$, она будет сходиться. Если $n = 2m$, то в одном классе с 1 будут лежать $3, \ldots, 2m-1$, и

$$p_{01}(2n+1) \to \frac{\frac{1}{2m}}{\frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m}} = \frac{1}{m}.$$

Аналогично можно построить вероятность

$$p_{00}(2n) \to \frac{\frac{1}{4m}}{\frac{1}{4m} + \frac{1}{4m} + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m}} = \frac{1}{2m}.$$

Замечание 9.2. Если цепь Маркова разложимая, то в каждом из классов E_i, $i > 0$ задача решается также, то есть для $i, j \notin E_0$

$$p_{ij}(n) \to \begin{cases} 0, & i \in E_\ell,\ j \notin E_\ell,\ \ell = 1, \ldots, m, \ldots; \\ \pi_j^{(\ell)}, & i, j \in E_\ell,\ \ell = 1, \ldots, \end{cases}$$

где $\pi_j^{(\ell)}$ — решение уравнения $\pi_j^{(\ell)} P^{(\ell)} = \pi_j^{(\ell)}$, а $P^{(\ell)}$ — блок матрицы вероятностей перехода, взятый на пересечении состояний из множества E_ℓ.

Если $i \in S$, $j \in E_0$, то $p_{ij}(n) \to 0$, $n \to \infty$.

Считаем, что каждый из подклассов непереодичный. Если это не так, для каждого периодичного класса будем рассматривать состояния как в замечании 1. Построим новую цепь, в которой оставим несущественные состояния, а каждый класс заменим на одно поглощающее состояние. Обозначим вероятности перехода в такой цепи из состояния i в состояние ℓ через $\widehat{p}_{i\ell}$. Тогда если $i \in E_0$, $j \notin E_0$, то $p_{ij}(n) \to \pi_j^{(\ell)} \cdot \widehat{p}_{i\ell}$, $n \to \infty$.

Рассмотрим *вероятность поглощения* $p_i^A = \mathrm{P}\left(\exists m \geqslant 0 \colon X_m \in A \,\middle|\, X_0 = i\right)$, это вероятность того, что выйдя из состояния i мы рано или поздно попадём в подмножество всех состояний $A \subseteq S$. В неразложимой цепи эта вероятность для любого состояния равна 1.

Лемма 9.1.

1) p_i^A — решение системы $p_i^A = \sum\limits_{j \in S} p_j^A p_{ij}$, удовлетворяющее свойству $p_j^A = 1$ если $j \in A$, а $i \notin A$;

2) p_i^A — наименьшее поэлементно неотрицательное решение этой системы: $\forall x_i \geqslant 0 \colon \begin{cases} x_i = 1, & i \in A \\ x_i = \sum\limits_{j \in S} x_j p_{ij}, & i \notin A \end{cases} \Longrightarrow x_i \geqslant p_i^A \ \forall i.$

Доказательство. 1) Применим формулу полной вероятности к известному числу p_i^A: для $i \in A$ $p_i^A = 1$ следует из определения; для $i \notin A$

$$p_i^A = \mathrm{P}\left(\exists m \geqslant 0 \colon X_m \in A \,\middle|\, X_0 = i\right) = \\ = \sum_j \mathrm{P}\left(\exists m \geqslant 1 \colon X_m \in A, X_1 = j \,\middle|\, X_0 = i\right) = \sum_j p_{ij} \cdot p_j^A.$$

2) Если x удовлетворяет уравнению, то $x_i = \sum\limits_{j \in S} x_j p_{ij} \circleddash$. Рассмотрев отдельно случаи $j \in A$ и $j \notin A$, и итерируя наше соотношение, получим

$$\circleddash \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} \sum_{j_2 \in A} p_{j_1 j_2} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \ldots$$

Заметим, что обрубив эту процедуру в какой-то момент, для неотрицательных x_i и p_ij получим

$$x_i \geqslant \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{\substack{j_1\notin A\\ j_2\in A}} p_{ij_1}p_{j_1j_2} + \sum_{\substack{j_1\notin A\\ j_2\notin A\\ j_3\in A}} p_{ij_1}p_{j_1j_2}p_{j_2j_3} + \ldots \text{ (n слагаемых).}$$

Это соотношение верно при любом n, можем перейти к пределу, и увеличить число слагаемых до бесконечности, и, воспользовавшись свойством непрерывности меры, получив требуемое неравенство

$$x_i \geqslant \mathrm{P}\big(\exists m \geqslant 0\colon X_m \in A \,\big|\, X_0 = i\big) = p_i^A. \qquad \blacksquare$$

Бесконечные цепи Маркова

Рассмотрим простое симметричное случайное блуждание по прямой, в котором вероятности перейти в соседние точки слева и справа из каждой точки равны по $\frac{1}{2}$. Понятно, что $\mathrm{P}(S_n = j) \to 0\ \forall j$ при $n \to \infty$. Это можно показать, например, с помощью локальной теоремы Муавра–Лапласа: если j и n одной чётности, то $\mathrm{P}(S_n = j) \sim \frac{C}{\sqrt{n}} \to 0$. Даже если бы мы равновероятно переходили влево, вправо или в себя, всё равно $\mathrm{P}(S_n = j) \to 0$.

Чтобы отделать такие цепи от цепей с ненулевой вероятностью оказаться в состоянии j при $n \to \infty$, введём свойство *возвратности* для марковской цепи.

Говорят, что состояние i — *возвратно*, если

$$\mathrm{P}\big(\text{бесконечно много раз } X_n = i \,\big|\, X_0 = i\big) = 1$$

и *невозвратно*, если

$$\mathrm{P}\big(\text{бесконечно много раз } X_n = i \,\big|\, X_0 = i\big) = 0.$$

Лемма 9.2. Каждое состояние в цепи Маркова либо возвратно либо невозвратно, то есть

$$\mathrm{P}\big(\exists \text{ бесконечно много } m\colon X_m = i \,\big|\, X_0 = i\big) \in \{0,\,1\}.$$

Доказательство. Введём вероятность $f_i = \mathrm{P}\big(\exists m \geqslant 1\colon X_m = i \,\big|\, X_0 = i\big)$, а также расширенную случайную величину $V_i\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — число посещений состояния i. Не будем останавливаться на том, что рассмотренные вероятности определены, можно показать, что описываемые события — элементы борелевской сигма–алгебры в пространстве $\mathbb{R}^\infty$.

Тогда $\mathrm{P}\big(V_i = 1 \,\big|\, X_0 = i\big) = \mathrm{P}\big(\nexists m : X_m = i \,\big|\, X_0 = i\big) = 1 - f_i$;

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\big(V_i = 2 \,\big|\, X_0 = i\big) = \\
&\quad = \mathrm{P}\big(\exists m_1 \geqslant 1 : X_{m_1} = i, X_j \neq i,\ 1 \leqslant j < m_1,\ \nexists m_2 > m_1 : X_{m_2} = i \,\big|\, X_0 = i\big) = \\
&\qquad = \sum_{m_1=1}^{\infty} \mathrm{P}\big(\nexists m_2 > m_1 : X_{m_2} = i, X_{m_1} = i, X_j \neq i,\ 1 \leqslant j < m_1 \,\big|\, X_0 = i\big) \ominus
\end{aligned}$$

Воспользуемся свойствами марковости и однородности:

$$\ominus \sum_{m_1=1}^{\infty} \underbrace{\mathrm{P}\big(\nexists m_2 > m_1 : X_{m_2} = i \,\big|\, X_{m_1} = i\big)}_{1-f_i} \mathrm{P}\big(X_{m_1} = i, X_j \neq i,\ 1 \leqslant j < m_1 \,\big|\, X_0 = i\big) = \\ = (1 - f_i)\, f_i.$$

Аналогично, $\mathrm{P}\big(V_i = k \,\big|\, X_0 = i\big) = (1 - f_i)\, f_i^{k-1}$.

Если $f_i = 1$, тогда $\mathrm{P}\left(V_i > k \,\middle|\, X_0 = i\right) = 1$. Если устремить k к бесконечности, получим $\mathrm{P}\big(V_i < +\infty \,\big|\, X_0 = i\big) = 0$.

Если $f_i < 1$, то V_i распределена как 1 плюс геометрическое распределение, а $\mathrm{P}\big(V_i > k \,\big|\, X_0 = i\big) = f_i^k \to 0$ при $k \to +\infty$, а это и означает, что вероятность попасть в точку бесконечное число раз нулевая.

Таким образом, если $f_i = 1$, то цепь с вероятностью 1 вернётся в состояние i бесконечное количество раз, а если $f_i < 1$, то цепь с вероятностью 1 вернётся в состояние i конечное число раз. ∎

Лемма 9.3. Состояние i возвратно $\Longleftrightarrow$ ряд $\sum \underbrace{\mathrm{P}\big(X_n = i \,\big|\, X_o = i\big)}_{p_{ii}(n)}$ расходится.

Доказательство. Возвратность равносильна тому, что $f_i = 1$, а это в свою очередь равносильно тому, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\big(V_i > k | X_0 = i\big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{ii}^k = +\infty$. Этот ряд также равен $\mathrm{E}\, V_i = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)$ по свойству линейности математического ожидания.

Пройдёмся по всем состояниям $V_i = \sum\limits_{n=0}^{\infty} I_{X_n = i}$. Воспользуемся линейностью и теоремой Лебега о монотонной сходимости, переставим математическое ожидание и ряд, получим $\mathrm{E}\, V_i = \mathrm{E} \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} I_{X_n = i} = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} \mathrm{E}\, I_{X_n = i} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X_n = i)$, таким образом, сумма ряда из таких вероятностей совпадает с суммой ряда, который расходится тогда и только тогда, когда цепь возвратна. ∎

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ