ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. СЕМИНАРЫ

СЕРДОБОЛЬСКАЯ
МАРИЯ ЛЬВОВНУ\А

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ГЕОРГИЕВСКУЮ ЕКАТЕРИНУ ПАВЛОВНУ

Оглавление

Семинар 1. Случайный процесс.

Определение случайного процесса.

Определение. Случайный процесс – это семейство случайных величин

$$\xi(t): \quad \Omega \to \mathbb{R},\ t \in \mathbb{T} \tag{1.1}$$

где $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ – бесконечное множество, то есть речь идет о семействе

$$\{\xi(t) = \xi(\omega, t), \quad \omega \in \Omega,\ t \in \mathbb{T}\} \tag{1.2}$$

Отметим, что все величины считаются заданными на одном вероятностном пространстве, а аргумент случайных величин лежит в одном и том же Ω.

$$\omega = \omega_0; \quad \xi(t, \omega_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1.3}$$

– **траектория случайного процесса**. Здесь мы фиксируем элементарный исход и получаем обычную числовую функцию.

$$t = t_0; \quad \text{с.в. } \xi(t_0) : \Omega \to \mathbb{R} \tag{1.4}$$

– **сечение случайного процесса**. То есть здесь мы фиксируем аргумент, который по сути индексирует члены рассматриваемого семейства и получаем случайную величину – сечение.

Задача 1.

Пусть α – случайная величина, которая принимает различные значения с вероятностями

$$P(\alpha = 0) = \frac{1}{2} \tag{1.5}$$

$$P(\alpha = 1) = P(\alpha = -1) = \frac{1}{4} \tag{1.6}$$

Пусть

$$\xi(t) = t^{\alpha}, \quad t > 0 \tag{1.7}$$

Нарисовать все траектории.

Решение. Чтобы найти траекторию, нужно знать, как величина зависит от ω. Однако нам это неизвестно, так как эта зависимость спрятана в случайной величине как в функции элементарных исходов. Для случайной величины нет явной зависимости от элементарных исходов, есть только ее распределение.

Возьмем любой элементарный исход. Тогда случайная величина приминает три возможных значения, поэтому для случайного процесса получаем зависимость от t

$$\forall\omega\in\Omega \quad \alpha=\alpha(\omega)=\left[\begin{array}{c}0\\1\\-1\end{array}\right. \Rightarrow \forall\omega\in\Omega \;\; \xi(t)=\begin{cases} t^0=1 \\ t^1=t & \text{для } t>0 \\ t^{-1}=\frac{1}{t}\end{cases} \tag{1.8}$$

– аналитическое выражение для траекторий. То есть, какое бы ω мы не взяли, мы попадем в один из трех указанных классов траекторий. Изобразим график траекторий на рис. 1.1.

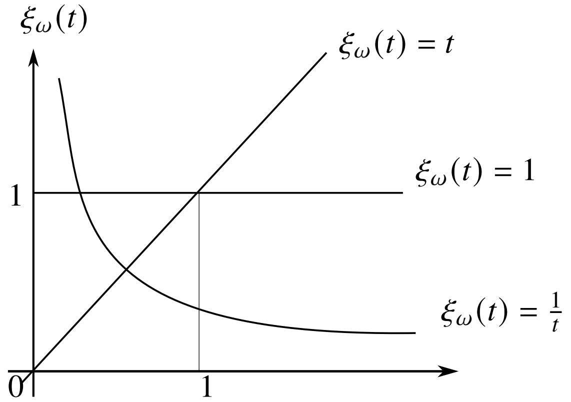

Рис. 1.1: Иллюстрация к задаче.

Отметим, что как только мы фиксируем элементарный исход, мы выбираем одну конкретную траекторию и дальше с нее не сходим. В самой траектории нет ничего случайного. Чтобы понять вероятностную модель данной задачи, перейдем к частотной интерпретации. Рассмотрим большое количество идентичных движущихся частиц. Тогда указанные траектории – реальные физические траектории этих частиц. Тогда вероятности (1.5)-(1.6) показываю, что среди всех частиц примерно половина начинает свое движение в единице и дальше с нее не уходит. Примерно четверть других частиц начинает движение от нуля и с постоянной скоростью движутся направо. Другая четверть частиц начинают движение из бесконечности к нулю. То есть вероятности (1.5)-(1.6) указывают доли частиц, которые движутся по каждой из траекторий. В этом и заключается случайность.

Смоделировать случайность можно следующим образом. Представим, что есть некоторый генератор, который выбрасывает частицы трех сортов. То есть, когда генератор выдает частицу, получается одна реализация. С другой стороны, можно считать, что случайность реализуется в результате выбора (из ящика с частица достаем одну частицу).

Задача 2.

Случайный процесс задан через некоторую случайную величину v. Пусть случайная величина v имеет равномерное на $[0,1]$ распределение, $v\in\mathbb{U}[0,1]$, то есть плотность вероятности имеет вид

$$p_v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 0 < x, x > 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

а функция распределения

$$F_v(x) \overset{def}{=} P\left(v < x\right) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

Функция непрерывна, ее части сшиваются непрерывным образом. Поэтому в данном случае можно иначе расставить строгие и нестрогие неравенства. Важно, плотность вероятности можно не задавать в некоторых точках, но функция распределения должна быть задана в каждой точке действительной прямой.

Зададим случайный процесс

$$\xi(t) = max(t, v),\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{1.11}$$

Найти одномерную функцию распределения, $F^{(1)}(x,t)$, математическое ожидание $M\xi(t)$, и ковариационную функцию $R(s,t)$.

Решение. По определению

$$F^{(1)}(x,t) \overset{def}{=} P\left(\xi(t) < x\right),\ \ x \in \mathbb{R},\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{1.12}$$

Опустим индекс для краткости и распишем

$$F^{(1)}(x,t) = F(x,t) = P\left(max(t,v) < x\right) = P\left(g(v) < x\right) \tag{1.13}$$

где

$$g(v) = max(t,v),\ \ t \in [0,1], t = fix \tag{1.14}$$

То есть мы получили простую вероятность, ассоциированную со случайной величиной v. Таким образом, получаем задачу с параметром, где параметр – t. Получили функцию распределения функции от v. Значит, далее можно воспользоваться стандартными алгоритмами расчета распределения случайных величин, которые заданы как функции от других случайных величин.

Отметим, что $0 \leqslant v \leqslant 1$ с вероятностью 1 (так как распределение равномерное). Нарисуем график $g(v)$ (рис. 1.2). Отсюда получаем, что $t \leqslant g(v) \leqslant 1$ с вероятностью 1.

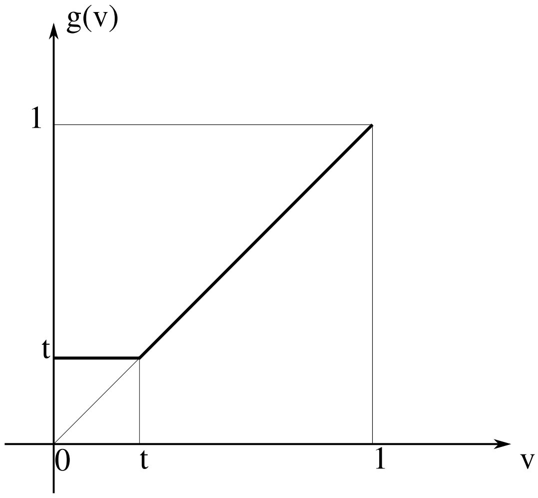

Рис. 1.2: Иллюстрация к задаче.

Значит, функция распределения $g(v)$ за пределами сегмента равна

$$F_{g(v)}(x) = P\left(g(v) < x\right) = \begin{cases} 0, & x \leqslant t \\ 1, & x > 1 \end{cases} \tag{1.15}$$

Здесь работает общее правило. Если случайная величина сосредоточена на некотором отрезке, то слева от этого отрезка функция распределения всегда равна нулю (и в левом конце тоже в силу непрерывности слева), а справа от отрезка функция всегда равна 1. При этом крайняя правая точка отрезка не включена, так как в ней может быть разрыв.

Пусть $t < x \leqslant 1$. Изобразим на графике функции необходимое неравенство. Поставим уровень x для $0 < x < t$ и рассмотрим прообраз множества, для которого $g(v) < x$. Часть графика, которая лежит ниже уровня x, выделена. Ей отвечает выведенный диапазон значений v.

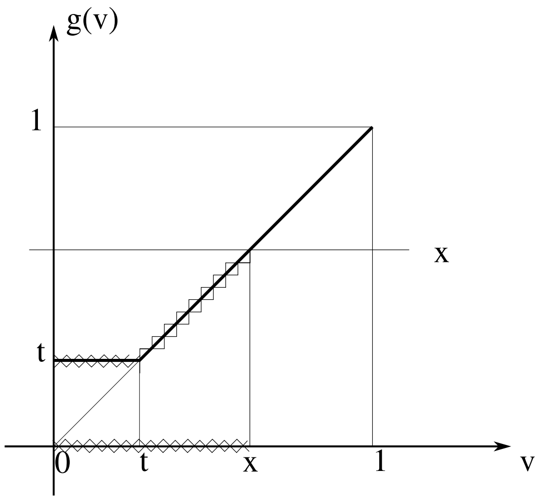

Рис. 1.3: Иллюстрация к решению.

Тогда получаем

$$P\left(g(v) < x\right) = P\left(v < x\right) = x \tag{1.16}$$

Тот же ответ можно было получить, отметим, что максимум величин меньше x в том случае, когда оба аргумента меньше x. t заведомо меньше x, поэтому условие остаются только на v.

Значит, получаем одномерную функцию определения

$$F\left(x,t\right) = \begin{cases} 0, & x \leqslant t \\ x, & t < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

Нарисуем график функции распределения как функции от x (рис. 1.4).

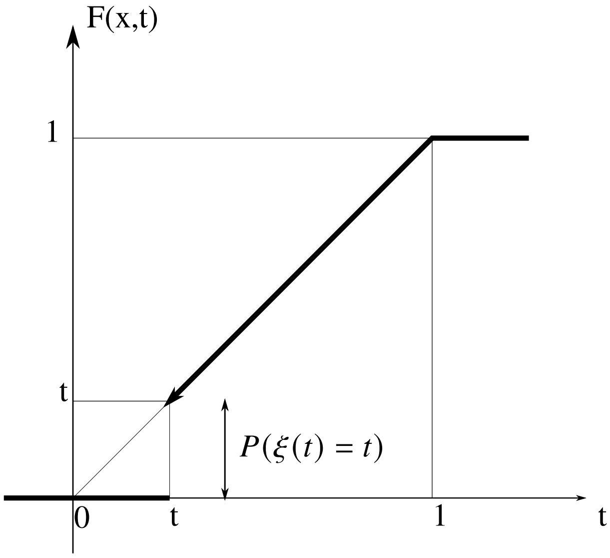

Рис. 1.4: Иллюстрация к задаче.

Отсюда можно получить, к какому типу распределения принадлежит рассматриваемая случайная величина. Это нужно для подсчета математического ожидания. Если функция распределения непрерывна, то мы будем считать математическое ожидание как интеграл от плотности вероятности. Если у функции есть скачки, то они будут вносить дискретные вклады в математическое ожидание. Если есть только скачки, то все математическое ожидание будет представлять собой сумму. В данном случае мы рассматриваем сечение случайного процесса, распределение которого имеет смешанный вид. Функцию распределения имеет скачок и участок с ненулевой производной. Соответственно математическое ожидание будет иметь две части – одна будет связана со скачком (дискретное слагаемое), а вторая – с наличием непрерывной производной. В данном случае случайная величина не имеет плотности вероятности, так как у функции распределения есть скачок. Введем функцию, которая играет роль плотности вероятности

$$\hat{p}(x,t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t), \quad t < x < 1 \tag{1.18}$$

Тогда математическое ожидание

$$M\xi(t) = t \cdot P\left(\xi(t) = t\right) + \int\limits_t^1 x \cdot \hat{p}\left(x,t\right) dx \tag{1.19}$$

Фактически

$$\hat{p}\left(x,t\right) dx = P\left(x \leqslant \xi(t) < x + dx\right), \quad t < x < 1 \tag{1.20}$$

Тогда

$$M\xi(t) = t \cdot t + \int\limits_t^1 x \cdot 1 dx = t^2 + \frac{1}{2}\left(1 - t^2\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{1.21}$$

Отметим, что случайный процесс $\xi(t)$ можно рассматривать как функцию t. Однако, эту конструкцию также можно рассматривать как функцию от v. Значит, можно было пойти другим путем – посчитать математическое ожидание случайной величины как функции от другой случайной величины без расчета одномерной функции распределения. Распишем математическое ожидание и подставим явный вид функции и плотности

$$\begin{aligned} M\xi(t) = Mg(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) p_v(x) dx = \int\limits_0^1 max(x,t) \cdot 1 dx = \left(\int\limits_0^t + \int\limits_t^1\right) = \\ = \int\limits_0^t t dx + \int\limits_t^1 x dx = t^2 + \frac{1}{2}\left(1 - t^2\right) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь мы разбили промежуток интегрирования на две части, чтобы точно знать, чему равен максимум на каждом промежутке.

Если случайная величина имела бы дискретное распределение, то структура формулы осталась бы такой же, но вместо интеграла появилась бы сумма. Найдем функцию ковариации случайного процесса

$$\begin{aligned} R\left(t,s\right) \overset{def}{=} cov\left(\xi(t), \xi(s)\right) \overset{def}{=} M\left(\xi(t) - M\xi(t)\right)\left(\xi(s) - M\xi(s)\right) = \\ = M\xi(t) \cdot \xi(s) - M\xi(t) \cdot M\xi(s) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Нам уже известны

$$M\xi(t) = \frac{1+t^2}{2}, \quad M\xi(s) = \frac{1+s}{2} \tag{1.24}$$

Нужно найти математическое ожидание произведения. Здесь есть два пути. Можно попытаться найти двумерное распределение

$$F^{(2)}(x,t;y,s) \overset{def}{=} P(\xi(t) < x, \xi(s) < y) \tag{1.25}$$

А далее найти математическое ожидание произведения как двойной интеграл

$$M\xi(t)\xi(s) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \; d^{(2)}_{xy} F(x,t;y,s) \tag{1.26}$$

Однако данный способ довольно сложен.

Возможен другой способ. Отметим, что произведение $\xi(t)\xi(s)$ – есть функция переменной v. Подставив явные выражения и получим одномерный интеграл по плотности распределения величины v

$$M\, max(t,v) \cdot max(s,v) = \int\limits_{-\infty}^{0} G(x) p_v(x) dx \tag{1.27}$$

где

$$G(v) = max(t,v) \cdot max(s,v) \tag{1.28}$$

Отметим, что ковариационная функция симметрична

$$R(t,s) = R(s,t) \tag{1.29}$$

Поэтому всегда можно считать, что s и t как-то упорядочены. Пусть $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$. То есть на оси времени они расположены как на рис. 1.5.

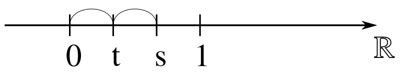

Рис. 1.5: Иллюстрация к решению.

Тогда получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = \left(\int\limits_0^t + \int\limits_t^s + \int\limits_s^1\right) \cdot max(x,t) \cdot max(x,s) dx = \int\limits_0^t t \cdot s dx + \int\limits_t^s x \cdot s dx + \int\limits_s^1 x \cdot x dx \tag{1.30}$$

Здесь мы для удобства разбили промежуток интегрирования на три части.

Тогда ковариационная функция

$$R(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - \frac{1+t^2}{2} \cdot \frac{1+s^2}{2} \tag{1.31}$$

Задача 3.

Случайный процесс задан следующим образом

$$\xi(t) = t^2 + 2\beta t + \alpha^2, \quad t \geqslant 0 \tag{1.32}$$

где α, β – независимые случайные величины, распределенные стандартно нормально $\alpha, \beta \in \mathbb{N}(0,1)$

Найти вероятность $P\left(\xi(t) = 0 \text{ хотя бы при одном } t \geqslant 0\right)$. Это значит, что из всех возможных траекторий некоторые пересекают ось или касаются ее, а некоторые – нет. Искомая вероятность показывает долю траекторий, которые либо пересекают ось, либо ее касаются.

Решение. Выражение

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}(0,1) \tag{1.33}$$

означает, что плотности случайных величин имеют вид стандартной гауссовой плотности

$$p_\alpha(z) = p_\beta(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty \tag{1.34}$$

По виду плотности всегда можно сказать, какие значения принимаю данные случайные величины. Там, где плотность тождественно равна нулю, те значения случайные величины не принимают. Здесь плотность отлична от нуля на всей числовой прямой, значит α и β могут принимать любые числовые значения. Рассмотрим многообразие всех траекторий. При t^2 в (1.32) коэффициент положительный, значит, траектория – парабола рогами вверх. Возможны разные ситуации – траектории пересекают или касаются оси абсцисс (рис. 1.6)

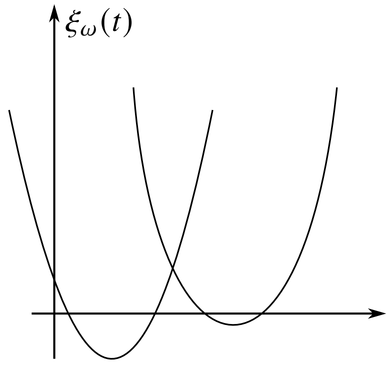

Рис. 1.6: Благоприятные траектории.

Возможны и неблагоприятные траектории – траектория не пересекает ось или ее корни отрицательные (рис. 1.7).

Представим себе все многообразие траекторий и выделим среди них те, которые удовлетворяют нужному условию. Тогда можно получить условие на α и β, которое

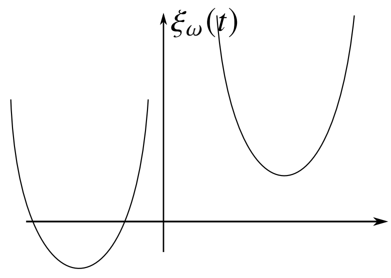

Рис. 1.7: Неблагоприятные траектории.

переводит траекторию в категорию благоприятных. Должны существовать корни, значит, дискриминант неотрицателен. При этом больший из корней должен быть неотрицательным. Итак, получаем систему условий

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = \beta^2 - \alpha^2 \geqslant 0 \\ t^* = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.35}$$

– благоприятные траектории. Соответственно, искомая вероятность есть вероятность события для двух случайных величин

$$P = P\left(\beta^2 - \alpha^2 \geqslant 0, -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \geqslant 0\right) = P\left(|\beta| \geqslant |\alpha|, \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \geqslant \beta\right) =$$
$$= P\left(\beta \leqslant 0, -\beta \geqslant |\alpha|\right) = \iint\limits_{b \leqslant 0, -b \geqslant |a|} p_{\alpha,\beta}(a,b)\,da\,db = \iint\limits_D \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{a^2+b^2}{2}}\,da\,db \tag{1.36}$$

Где область D имеет вид, представленный на рис. 1.8.

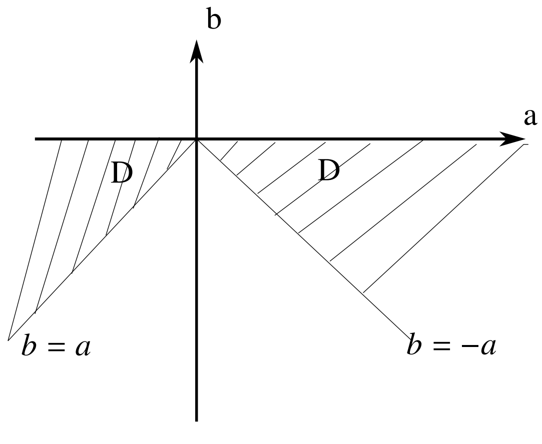

Рис. 1.8: Иллюстрация к решению.

Перейдем к полярным координатам

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi \tag{1.37}$$

Тогда получим

$$P = \iint\limits_D \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\varphi = \int\limits_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{2}} dr \int\limits_\Phi \frac{1}{2\pi} d\varphi \tag{1.38}$$

Здесь Φ – угловая область, характеризующаяся углами попадания в область D.

Тогда

$$\int\limits_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 1 \tag{1.39}$$

Второй интеграл равен доле заштрихованных облайте по сравнению со всем кругом, поэтому

$$\int\limits_\Phi \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4} \tag{1.40}$$

Таким образом, ответ $P = \frac{1}{4}$.

Семинар 2. Случайный процесс. Часть 2.

Задача 1.

Частица движется из $x = 0$ по числовой прямой вправо с $v = 1$. В случайный момент времени, который распределен экспоненциально с параметром 1 $\tau \in \mathbb{E}(1)$ частица разворачивается и движется обратно с $v = 1$. Дойдя до $x = 0$, она останавливается.

Обозначим $\xi(t)$ – координата частицы в момент $t > 0$. Таким образом, получаем некоторую случайную величину, которая зависит от времени – в разные моменты времени получаем разные координаты, причём в каждый конкретный момент времени координата случайна. Найти одномерную функцию распределения этого процесса и его математическое ожидание $F(x,t)$, $M\xi(t)$. Здесь математическое ожидание по сути есть среднее расстояние, на которое уйдет частица к моменту времени t.

Решение. Нарисуем траекторию движения частицы на рис. 2.1. Аналогично можно изобразить другие траектории. Например, пусть для другой частицы τ больше. Тогда форма траектории останется такой же, изменится ширина основания.

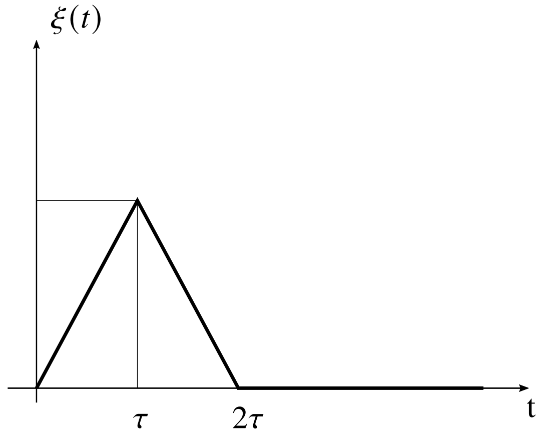

Рис. 2.1: Иллюстрация к задаче.

Запишем аналитическое выражение для $\xi(t)$

$$\xi(t) = \begin{cases} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 2\tau - t, \quad \tau \leqslant t \leqslant 2\tau \\ 0, \qquad t \geqslant 2\tau \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь нестрогие равенства, так как траектория непрерывна. Таким образом, мы получили зависимость траектории от t. Однако нам интересно вероятностное поведение этой конструкции. Поэтому нужно рассмотреть траекторию при фиксированном t как функцию от τ. Вообще говоря, ξ – функция двух аргументов t и τ. Поэтому (2.1) – сечение поверхности ξ плоскостью постоянного τ. Рассмотрим обратную ситуацию – сечение поверхности плоскостью постоянного t. Проще всего это получить, переписав данное выражение как функцию от τ

$$\xi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 2\tau - t, & \tau \leqslant t \leqslant 2\tau \\ 0, & t \geqslant 2\tau \end{cases} = \begin{cases} 0, & \tau \leqslant \frac{t}{2} \\ 2\tau - t, & \frac{t}{2} \leqslant \tau \leqslant t \\ t, & \tau \geqslant t \end{cases} \tag{2.2}$$

Изобразим эту зависимость рис. 2.2. Учтем, что так как $\tau \in \mathbb{E}(1)$, то $\tau \geqslant 0$ с вероятностью 1. Поэтому мы не будем рассматривать график в отрицательных значениях аргумента.

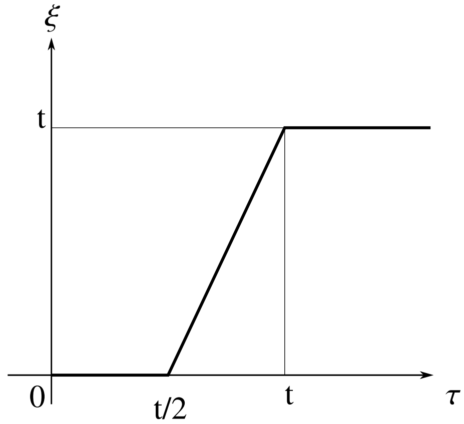

Рис. 2.2: Иллюстрация к задаче.

Полученная траектория непрерывна. Итак, получили функцию ξ от другой случайной величины τ. Нам известно распределение τ, поэтому мы можем рассчитать распределение ξ. Из графика $0 \leqslant \xi \leqslant t$ с вероятностью 1. Отсюда получаем, что функция распределения

$$F(x,t) = 0 \text{ при } x \leqslant 0 \tag{2.3}$$

и

$$F(x,t) = 1 \text{ при } x > t \tag{2.4}$$

Здесь t – просто числовой параметр.

Пусть $0 < x \leqslant t$, $t = fix$. Проведем уровень x (рис. 2.3). Тогда те τ, для которых выполняется указанное неравенство, обведены фигурной скобкой. Граница выделенного отрезка – точка

$$\tau = \frac{t+x}{2} \tag{2.5}$$

Тогда получаем

$$F(x,t) = P\left(\xi(t) < x\right) = P\left(\tau < \frac{t+x}{2}\right) = \int\limits_0^{\frac{t+x}{2}} e^{-z} dz = 1 - e^{-\frac{t+x}{2}} \tag{2.6}$$

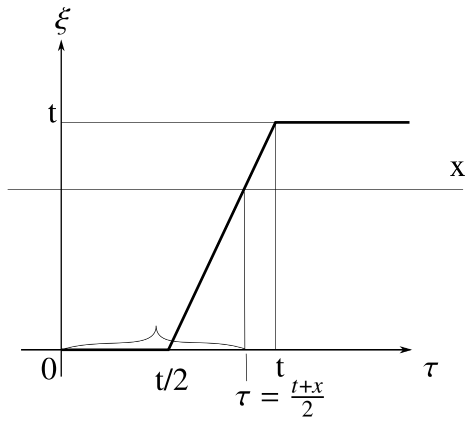

Рис. 2.3: Иллюстрация к решению.

Изобразим график функции распределения на рис. 2.4. Отметим, что ограничение (2.4) обуславливает второй скачок функции.

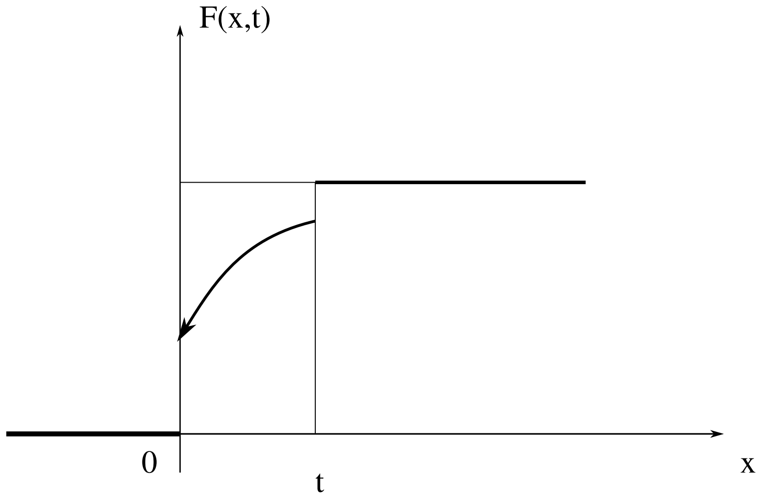

Рис. 2.4: Функция распределения.

Найдем эти скачки

$$F(x+0,t) - F(x,t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}} - 0 = P\left(\xi(t) = 0\right) \tag{2.7}$$

В сущности это вероятность того, что момент t оказался позже того момента, когда частица вернулась.

И, когда подходим к точке $x = t$ слева, нужно положить выражение для $x = t$:

$$F(t+0,t) - F(t,t) = 1 - \left(1 - e^{-t}\right) = e^{-t} = P\left(\xi(t) = t\right) \tag{2.8}$$

– вероятность того, что в каждый фиксированный момент времени координата частицы равна t, то есть частица движется детерминированным образом. Пока частица не развернулась, в ее движении нет ничего случайного.

Найдем производную на постоянном участке

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x+t}{2}}, \ \ 0 < x < t \tag{2.9}$$

У функции распределения есть скачки, соответственно, математическое ожидание будет складываться из скачков и из вклада по кривой с ненулевой производной

$$M\xi(t) = 0 \cdot P\left(\xi(t) = 0\right) + \int\limits_0^t x \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{x+t}{2}}dx + t \cdot P\left(\xi(t) = t\right) = 2e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) \tag{2.10}$$

– выражение для среднего значения координаты в момент времени t. При увеличении t среднее значение координаты стремится к нуля, так как частица скорее всего уже вернулась в исходную точку.

Задача 2.

Случайный процесс задан в виде

$$\xi(t) = t + \alpha \tag{2.11}$$

где α – случайная величина с плотностью вероятности $p_\alpha(x, \ \ x \in \mathbb{R}), t \geqslant 0$.

Найти все n-мерные плотности вероятности случайного процесса $\xi(t), \ t \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим вариант $n = 1$. Найдем одномерную функцию распределения. Запишем ее явный вид. после чего перейдем к аргументу α, считая t обычным числовым параметром

$$F\left(x,t\right) = P\left(\xi(t) < x\right) = P\left(t + \alpha < x\right) = P\left(\alpha < x - t\right) = F_\alpha(x - t) \tag{2.12}$$

Тогда плотность вероятности

$$p(x,t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = p_\alpha(x - t) \tag{2.13}$$

Рассмотрим $n = 2$. Найдем двумерную плотность распределения, воспользовавшись ее определением через дифференциал

$$p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = P\left(x_1 \leqslant \xi_1 < x_1 + dx_1, x_2 \leqslant \xi_2 < x_2 + dx_2\right) \tag{2.14}$$

Перепишем вероятность для данного случайного процесса и подставим явный вид процесса (здесь вместо дифференциала запишем приращения)

$$
\begin{aligned}
P\left(x_1 \leqslant \xi(t_1) < x_1 + \Delta x_1, x_2 \leqslant \xi(t_2) < x_2 + \Delta x_2\right) = \\
= P\left(x_1 - t_1 \leqslant \alpha < x_1 - t_1 + \Delta x_1, x_2 - t_2 \leqslant \alpha < x_2 - t_2 + \Delta x_2\right) = \\
= P\left(\widetilde{x_1} \leqslant \alpha < \widetilde{x_1} + \Delta x_1,\ \widetilde{x_2} \leqslant \alpha < \widetilde{x_2} + \Delta x_2\right) = \Delta P^{(2)}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Здесь мы обозначили

$$x_1 - t_1 = \widetilde{x_1}, \quad x_2 - t_2 = \widetilde{x_2} \tag{2.16}$$

При этом α под знаком вероятности – одна и та же случайная величина в обоих неравенствах. То есть, если мы фиксируем элементарный исход, то в обоих неравенствах будет одно и то же фиксированное значение.

Поэтому, если $\widetilde{x_1} \neq \widetilde{x_2}$ (пусть $\widetilde{x_1} < \widetilde{x_2}$), то существует (рис. 2.5)

$$\Delta x_1 > 0: \quad \widetilde{x_1} + \Delta x_1 < \widetilde{x_2} \tag{2.17}$$

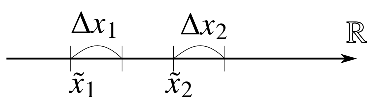

Рис. 2.5: Иллюстрация к задаче.

Тогда получаем, что неравенства под знаком вероятности в (2.15) несовместны, так как α должно попасть в оба интервала, которые не имеют общих точек (см. рис. 2.5). Поэтому получаем

$$\Delta P^{(2)} = 0 \tag{2.18}$$

Если $\widetilde{x_1} = \widetilde{x_2}$, то интервалы пересекаются (см. рис. 2.6).

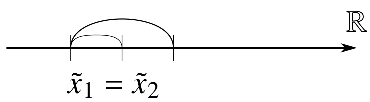

Рис. 2.6: Иллюстрация к решению.

Поэтому вероятность приобретает вид

$$\Delta P^{(2)} = P\left(\widetilde{x_1} \leqslant \alpha < \widetilde{x_1} + \Delta\widetilde{x_1}\right) \tag{2.19}$$

где

$$\Delta\widetilde{x_1} = min\left(\Delta x_1 \Delta x_2\right) \tag{2.20}$$

Тогда

$$\Delta P^{(2)} \approx p_\alpha(\widetilde{x_1})\Delta\widetilde{x} \tag{2.21}$$

Но в этом случае мы не получаем структуру вида (2.14). То есть в этом случае плотность так же не существует. Итак, получаем ответ: одномерная плотность распределения имеет вид

$$p^{(1)}(x,t) = p_\alpha(x-t) \tag{2.22}$$

а n- мерные плотности $p^{(n)}$ не существует.

Эту задачу можно решить другим способом: можно посчитать двумерную функцию распределения. В данном случае она будет зависеть от x_1, x_2 как от минимума из $x_1 - t_1$ и $x_2 - t_2$:

$$F^{(2)}(x,t) = \Phi\left(min(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\right) \tag{2.23}$$

Эта функция минимума как функция x_1 и x_2 имеет излом, поэтому ее нельзя дифференцировать, соответственно, плотность вероятности не существует.

Задача 3.

Рассмотрим $\nu(t),\ t \geqslant 0$. Случайная величина $\nu(t)$ принимает значения $1, 2\ \ \forall t \geqslant 0$. Заданы начальные вероятности

$$P\left(\nu(0) = k\right) = a_k, \quad k = 1, 2 \tag{2.24}$$

При этом $a_1 + a_2 = 1$.

Также заданы переходные вероятности

$$P\left(\nu(t) = k \middle| \nu(s) = j\right) = \pi_{jk}(t-s) \text{ для } t > s, \quad j, k = 1, 2 \tag{2.25}$$

Пусть $\beta_1, \beta_2, \nu(t)$ – независимые случайные величины, $t \geqslant 0$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}(0,1)$ – распределены стандартно нормально.

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t) = \begin{cases} \beta_1, \text{ если } \nu(t) = 1 \\ \beta_1\beta_2, \text{ если } \nu(t) = 2 \end{cases} \tag{2.26}$$

то есть это произведение стольких множителей, чему равно ν. Найти ковариационную функцию процесса $R_\xi(t,s)$.

Решение. По определению

$$R_\xi(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) = R_\xi(s,t) \tag{2.27}$$

Функция симметрична, поэтому можно считать, что t и s упорядочены. Пусть $0 \leqslant t < s$.

Посчитаем математическое ожидание

$$M\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF_{\xi(t)}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x d_x F_{\xi}^{(1)}(x,t) \tag{2.28}$$

Соответственно, нам нужно знать одномерную функцию распределения. Для расчета вероятности в определении функции распределения воспользуемся формулой полной вероятности . ξ есть функция многих случайных величин. Поэтому событие под знаком вероятности можно разложить по полной группе событий

$$\begin{aligned}F_{\xi}^{(1)}(x,t) = P\left(\xi(t) < x\right) = \sum_{k=1,2} P\left(\xi(t) < x \middle| \nu(t) = k\right) \cdot P\left(\nu(t) = k\right) = \\ = P\left(\beta_1 < x \middle| \nu(t) = 1\right) \cdot P_1(t) + P\left(\beta_1\beta_2 < x \middle| \nu(t) = 2\right) P_2(t) = \\ = P\left(\beta_1 < x\right) \cdot P_1(t) + P\left(\beta_1\beta_2 < x\right) P_2(t) = F_{\beta_1}(x) \cdot P_1(t) + F_{\beta_1,\beta_2}(x) \cdot P_2(t)\end{aligned} \tag{2.29}$$

По условию β_1 и ν независимы. Поэтому условная вероятность равна безусловной, что мы и использовали выше. Итак, мы получили выражение для функции распределения ξ через функции распределения случайных величин β.

Замечание. Отметим, что в выражении выше существенным оказалась независимость случайных величин. Запишем формулу полной вероятности

$$P(X) = \sum_k P\left(x \middle| A_k\right) P(A_k) \tag{2.30}$$

где $A_1 + A_2 + \ldots = \Omega$.

В нашем случае было дополнительное условие: когда мы находимся в рамках события A_k, то, что происходит с β, не зависит от условия. Именно в таких ситуациях формула полной вероятности хорошо работает. Однако, если мы не можем прийти к независимости величин, то лучше воспользоваться прообразом формулы полной вероятности

$$P(X) = \sum_k P\left(X \cap A_k\right) \tag{2.31}$$

Здесь, когда мы берем пересечение X с A_k, мы уменьшаем неопределенность ситуации, так как мы рассматриваем не все многообразие элементарных исходов, а только те из них, при которых происходит A_k.

Вернемся к задаче. Формально возьмем дифференциал от полученного выражения и подставим в выражение для математического ожидания. Тогда получим

$$M\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(dF_{\beta_1}(x) \cdot P_1(t) + dF_{\beta_1\beta_2}P_2(t)\right) =$$
$$= P_1(t)M\beta_1 + P_2(t)M\beta_1\beta_2 = P_1(t)M\beta_1 + M\beta_1 \cdot M\beta_2 = 0 + 0 = 0 \tag{2.32}$$

То есть математическое ожидание $\xi(t)$ есть взвешенное среднее между математическим ожиданием $\xi(t) = \beta_1$ и математическим ожиданием $\xi(t) = \beta_1 \cdot \beta_2$. Здесь мы учли, что в силу независимости

$$M\beta_1\beta_2 = M\beta_1 \cdot M\beta_2 \tag{2.33}$$

Найдем математическое ожидание произведения. Пусть $0 \leqslant t < s$. Воспользуемся разложением по полной группе событий. В данном случае событий будет уже четыре, так как сечений два, и каждое из них может принимать одно из двух значений

$$M\xi(t)\xi(s) = \sum_{k,j=1,2} M\left(\xi(t)\xi(s)\middle|\nu(t) = j, \nu(s) = k\right) \cdot P\left(\nu(t) = j\middle|\nu(s) = k\right) =$$
$$= M\beta_1\beta_1 \cdot P_{11}(t,s) + M\beta_1(\beta_1\beta_2)P_{12}(t,s) + M\left(\beta_1\beta_2\right)\beta_1 P_{21}(t,s) +$$
$$+ M\left(\beta_1\beta_2\right)\left(\beta_1\beta_2\right) \cdot P_{12}(t,s) = M\beta_1^2 P_{11}(t,s) + M\beta_1^2 \cdot M\beta_2 \cdot P_{12}(t,s) +$$
$$+ M\beta_1^2 \cdot M\beta_2 \cdot P_{21}(t,s) + M\beta_1^2 \cdot M\beta_2^2 P_{22}(t,s) \tag{2.34}$$

Здесь P_{ij} – переходные вероятности. Перекрестные слагаемые (второе и третье) равны нулю, при этом

$$M\beta_1^2 = 1, \quad M\beta_2 = 1 \tag{2.35}$$

так как по условию дисперсия равна единице, а математическое ожидание – нулю. Поэтому получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = P_{11}(t,s) + P_{22}(t,s) \tag{2.36}$$

Рассмотрим вероятности

$$P_{jj}(t,s) = P\left(\nu(t) = j, \nu(s) = j\right) = P\left(\nu(s) = j\middle|\nu(t) = j\right) \cdot P\left(\nu(t) = j\right) =$$
$$= \pi_{jj}(s-t)\sum_{k=1}^{2} P\left(\nu(t) = j\middle|\nu(0) = k\right) \cdot P\left(\nu(0) = k\right) = \pi_{jj}(s-t)\sum_{k=1}^{2}\pi_{kj}(t) \cdot a_k \tag{2.37}$$

Здесь мы учли условие (2.25), а вероятность $P\left(x(t) = j\right)$ была разложена по формуле полной вероятности.

Семинар 3. Процесс Пуассона.

Процесс Пуассона.

Определение. **Процесс Пуассона** – это случайный процесс $\xi(t),\ t \geqslant 0$, однородный с независимыми приращениями, начинается в 0 и его приращение имеет распределение Пуассона

$$\Delta\xi(t-s) \overset{def}{=} \xi(t) - \xi(s) \in \mathbb{P}\left(\lambda(t-s)\right) \tag{3.1}$$

где $\lambda = const$, $0 < \lambda < \infty$, $0 \leqslant s < t$.

Процесс Пуассона всегда можно интерпретировать как пуассонов поток требований. Тогда $\xi(t)$ – количество требований, которые поступили в интервал времени $[0, t)$, при этом t не включается, то есть мы считаем требования, которые поступили к моменту времени t. Тогда траектория случайного процесса представляет собой кусочно-постоянную функцию (рис. 3.1). Отметим, что траектории непрерывны слева. Так, в момент времени τ_1 траектория $\xi(t) = 0$. Высота ступенек постоянна, а ширина ступеньки является случайной величиной.

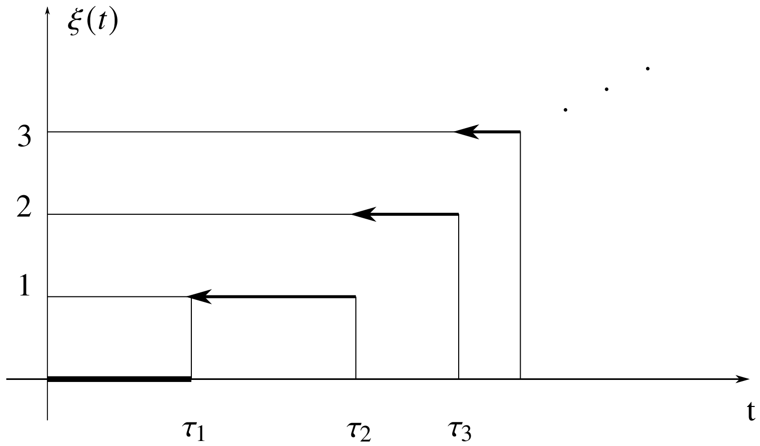

Рис. 3.1: Иллюстрация к задаче.

Таким образом, $t_1, t_2, \ldots$ – времена поступления требований (случайные величины). Далее мы будем рассматривать распределения этих случайных величин.

Отметим, что нахождение на траектории со значением k равносильно попаданию t в определённый промежуток

$$\xi(t) = k \Leftrightarrow \tau_k < t \leqslant \tau_{k+1} \tag{3.2}$$

Вообще говоря, τ_k распределены абсолютно непрерывно, поэтому каждое конкретное значение они принимают с вероятностью ноль, поэтому вероятность указанного события (попадание t в промежуток) эквивалентно тому же событию, записанному в строгих неравенствах.

Пусть $0 \leqslant s < t$. Тогда для события

$$\tau_{k-1} < s \leqslant \tau_k < t \leqslant \tau_{k+1} \tag{3.3}$$

можно изобразить часть траектории как на рис. 3.2.

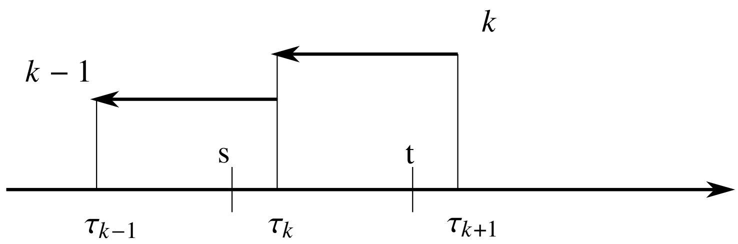

Рис. 3.2: Иллюстрация к задаче.

Отсюда получаем, что событие (3.3) влечет за собой событие

$$\begin{cases} \xi(s) = k - 1 \\ \xi(t) = k \end{cases} \tag{3.4}$$

Обратно, если $\xi(s) = k - 1$, то должно выполняться $\tau_{k-1} < s \leqslant \tau_k$, а в случае $\xi(t) = k$ получаем $\tau_k < t < \tau_{k+1}$. Таким образом, события (3.3) и (3.4) равносильны. Из события (3.4) следует событие

$$\Delta\xi(t - s) = 1 \tag{3.5}$$

Таким образом, если между моментами s и t происходит ровно один скачок, то приращение на этом интервале равно 1.

Возможен другой вариант (рис. 3.3).

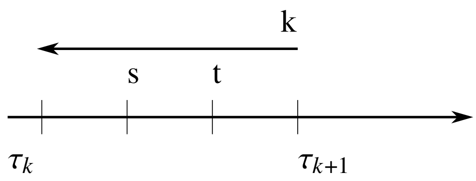

Рис. 3.3: Иллюстрация к объяснению.

Тогда получаем равносильность событий

$$\tau_k < s < t \leqslant \tau_k, \ \Leftrightarrow \xi(s) = k_1\xi(t) = k \tag{3.6}$$

Следовательно,

$$\Delta\xi(t - s) = 0 \tag{3.7}$$

так как в этом случае нет приращения.

Задача.

Найти совместную плотность вероятности случайных величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

Решение. Отметим, что так как времена отсчитываются последовательно, имеем

$$0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n \tag{3.8}$$

с вероятностью 1. Следовательно, плотность равна нулю там, где эти неравенства не выполнены, то есть

$$p^{(n)}(t) = p_{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0 \tag{3.9}$$

если $\tau_k > \tau_{k+1}$ хотя бы для одного k.

Пусть $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, то есть будем искать плотность в случае, когда времена удовлетворяют условию, аналогичному (3.8).

Замечание. Поясним нестрогость неравенств. Рассмотрим линию, где происходит изменение характера плотности. До этого плотность равна нулю, а при переходе плотность будет уже ненулевой, и в таких точках, где сшиваются области, где плотность имеет специфический вид, плотность зачастую не существует. Например, плотность равномерного распределения имеет вид, представленный на рис. 3.4.

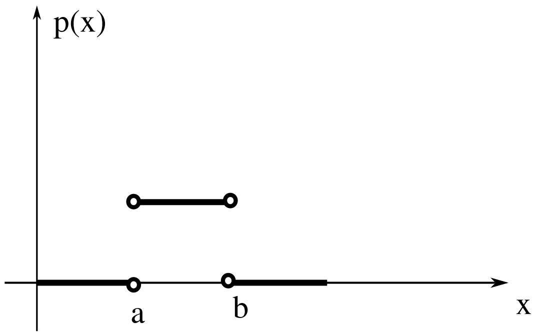

Рис. 3.4: Иллюстрация к замечанию.

При этом в граничных точках отрезков плотность не задается. Там, где меняется характер плотности плотность не существует.

Для расчета плотности воспользуемся ее дифференциальным определением:

$$p^{(n)}(t)\Delta t_1 \Delta t_2 \ldots \Delta t_n = P\left(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2, \ldots, t_n \leqslant \tau_n < t_n + \Delta t_n\right) + \\ + o(\Delta t) \tag{3.10}$$

где

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2 + \ldots + \Delta t_n^2} \tag{3.11}$$

Значит, мы должны рассчитать вероятность, указанную в (3.10) в первом порядке малости по Δt и должно получиться нечто, умноженное на все эти Δt_i. Разложим эту вероятность в ряд по Δt_k, оставляя только первый порядок малости. Для начала рассмотрим случай $n = 2$

$$P^{(2)} = P\left(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2\right) \tag{3.12}$$

Пусть $\Delta t_1 : t_1 + \Delta t_1 < t_2$ $(t_1 < t_2)$ (см. рис. 3.5).

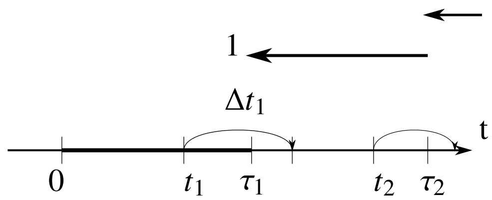

Рис. 3.5: Иллюстрация к задаче.

Тогда вероятность можно записать в терминах того, чему равно значение ξ

$$P^{(2)} = P\left(\xi(t_1) = 0,\ \xi(t_1 + \Delta t_1) = 1,\ \xi(t_2) = 1,\ \xi(t_2 + \Delta t_2) > 1\right) \tag{3.13}$$

Здесь мы можем воспользоваться формулой совместного распределения сечений процесса Пуассона, однако будет понятнее, если работать с приращениями. Перепишем событие под знаком вероятности в (3.13) в терминах приращений

$$P^{(2)} = P\left(\xi(t_1) = 0,\ \Delta\xi(\Delta t_1) = 1,\ \Delta\xi(t_2 - t_1 - \Delta t_1) = 0,\ \Delta\xi(\Delta t_2) \geqslant 1\right) \underset{\text{н.с.в.}}{=}$$
$$\underset{\text{н.с.в.}}{=} e^{-\lambda t_1} \cdot \lambda\Delta t_1 \cdot e^{-\lambda\Delta t_1} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1 - \Delta t_1)}\left(1 - e^{-\lambda\Delta t_2}\right) \tag{3.14}$$

Здесь мы воспользовались тем, что приращения независимы и распределены по Пуассону. Таким образом мы получили точный ответ. Теперь нам нужно разложить его в ряды по Δt_1. Сначала выделим все, что не зависит от Δt. После этого разложим полученное выражение в ряд по Δt_1 и Δt_2 до первого порядка малости

$$P^{(2)} = \lambda \cdot e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \Delta t_1 e^{-\lambda\Delta t_1} \cdot e^{+\lambda\Delta t_1}\left(1 - e^{-\lambda\Delta t_2}\right) \approx \lambda \cdot e^{-\lambda t_2} \lambda\Delta t_2 \cdot \Delta t_1 \tag{3.15}$$

Ответ имеет нужную нам структуру (3.10). Значит, двумерная плотность вероятности равна множителю перед приращениями в (3.15)

$$p^{(2)}(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t_2} \quad 0 < t_1 < t_2 \tag{3.16}$$

В остальных случаях плотность равна нулю. Отметим, что несмотря на то, что аналитически плотность является функцией одной переменной, на самом деле плотность не является функцией одной переменной, так как существует условие на t_1, t_2. Рассмотрим поверхность $p^{(2)}$ как функцию от двух аргументов – t_1 и t_2. Возьмем сечение этой функции (рис. 3.6).

Итак, сечения функции – горизонтальные кусочно-постоянные поверхности, которые становятся всё ниже с ростом t_2.

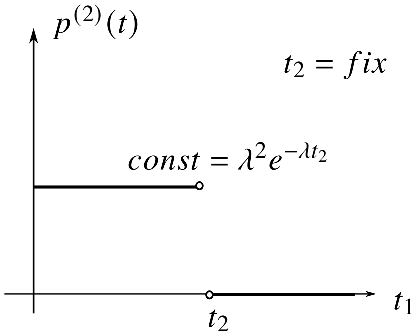

Рис. 3.6: Иллюстрация к задаче.

Теперь рассмотрим сечения этой функции при фиксированном t_1 (рис. 3.7). Тогда пока $t_2 < t_1$, плотность равна нулю, а при переходе через t_1 плотность начинает экспоненциально убывать.

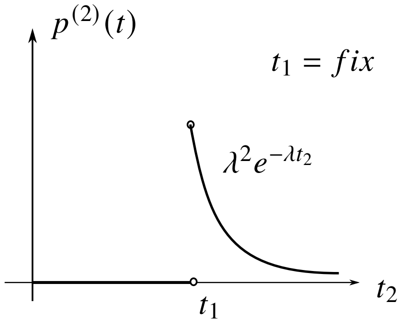

Рис. 3.7: Иллюстрация к задаче.

Итак, плотность вероятности на самом деле является функцией двух переменных, но по одной переменной она является кусочно-постоянной.

Для более общего случая n получим аналогичный результат (далее будем считать, что $t_k + \Delta t_k < t_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-1$)

$$
\begin{aligned}
P^{(n)} &= P\left(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1,\ t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2\,, \dots,\ t_n \leqslant \tau_n < t_n + \Delta t_n\right) \stackrel{1}{=} \\
&\stackrel{1}{=} P\Big(\xi(t_1) = 0, \xi(t_1 + \Delta t_1) = 1, \xi(t_2) = 1, \xi(t_2 + \Delta t_2) = 2, \dots, \\
&\qquad \dots, \xi(t_n) = n-1, \xi(t_n + \Delta t_n) > n-1\Big) \stackrel{2}{=} \\
&\stackrel{2}{=} P\Big(\xi(t_1) = 0, \Delta\xi(\Delta t_1) = 1, \Delta\xi\left(t_2 - t_1 - \Delta t_1\right) = 0, \Delta\xi(\Delta t_2) = 1, \dots, \\
&\qquad \dots, \Delta\xi\left(t_n - t_{n-1} - \Delta t_{n+1}\right) = 0, \Delta\xi(\Delta t_n) \geqslant 1\Big) \cong \\
&\cong e^{-\lambda t_1} \cdot \lambda\Delta t_1 \cdot e^{-\lambda\Delta t_1} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1 - \Delta t_1)} \cdot \lambda\Delta t_2 \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda(t_n - t_{n-1} - \Delta t_{n-1})}\left(1 - e^{-\lambda\Delta t_n}\right) = \\
&= e^{-\lambda t_n}\lambda^n \Delta t_1 \cdot \Delta t_2 \cdot \ldots \cdot \Delta t_n
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Пояснения:
$\stackrel{1}{=}$: Момент времени τ_1 находится правее t_1, поэтому в точке t_1 случайная величина все еще равна нулю, первое требование еще не поступило, значение траектории равно нулю. В момент времени $t_1 + \Delta t_1$ одно требование уже поступило, а второе – еще нет. В последнем случае мы ничего конкретного сказать не можем, кроме того, что произошел хотя бы один скачок.
$\stackrel{2}{=}$: переписываем полученное выражение через приращения.

Соответственно, получаем выражение для совместной плотности вероятности всех времен поступления требований

$$p^{(n)}(t) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda t_n}, & 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \\ 0, & \text{прочие } \ t \end{cases} \tag{3.18}$$

Задача.

Пусть $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n$ ($\tau_0 = 0$ с вероятностью 1). Здесь $\Delta\tau_k$ – промежуток времени между двумя соседними требованиями. Найти совместную плотность вероятности случайных величин $\Delta\tau_1, \ldots, \Delta\tau_n$.

Решение. Здесь для нахождение совместной плотности вероятности воспользуемся интегральным определением плотности вероятности. По определению совместной функции распределения

$$\begin{aligned} F^{(n)}(u) = F_{\Delta\tau_1,\ldots,\Delta\tau_n}(u_1, \ldots, u_n) \stackrel{def}{=} P(\Delta\tau_1 < u_1, \ldots, \Delta\tau_n < u_n) = \\ = P(\tau_1, \tau_2 - \tau_1 < u_2, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1} < u_n) = \\ = \int\limits_{x_1<u_1, x_2<u_2} \ldots \int\limits_{x_n - x_{n-1}<u_n} p_{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь от приращений τ мы перешли к самим τ. В итоге получили вероятность (после второго знака равенства). Событие под знаком вероятности задается случайными величинами. Поэтому вероятность может быть записана как $n-$кратный интеграл от совместной плотности случайных величин. Перепишем событие, подставляя вместо случайных величин соответствующие аргументы плотности. Тогда получим область для интегрирования.

Итак, мы получили формальный ответ. Совместная плотность вероятности нам известна из предыдущей задачи, область интегрирования известна. Значит, нужно только посчитать интеграл и привести ответ к компактному виду. При расчете многократных интегралов обычно переходят к повторным. Когда переходим к повторным интегралам, всегда лучше, когда область простая, чем когда подынтегральная функция простая. Так, если область интегрирования будет сложной, то границы повторного интегрирования могут оказаться весьма сложными. Упростим область. Введем замену переменных.

Пусть замена переменных и обратное преобразование имеют вид

$$\begin{matrix} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 - x_1 \\ \vdots \\ z_n = x_n - x_{n-1} \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_1 + z_2 \\ \vdots \\ x_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n \end{matrix} \tag{3.20}$$

Это соответствие можно записать в виде

$$x = Qz \tag{3.21}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

А матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Итак, получили линейное преобразование с постоянной матрицей. Якобиан перехода задается через определитель матрицы:

$$det\ Q = 1 \tag{3.24}$$

Поэтому элемент объема равен

$$dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n = dz_1 \cdot \ldots dz_n \tag{3.25}$$

В двумерном случае это бы соответствовало ситуации равенства площадей параллелограмма и прямоугольника (рис. 3.8).

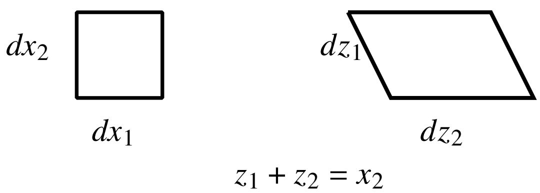

Рис. 3.8: Иллюстрация к задаче.

Теперь подставим полученный результат в $F^{(n)}$

$$F^{(n)}(u) = \int\limits_{0\leqslant z_1<u_1} \dots \int\limits_{0\leqslant z_n<u_n} \lambda^n e^{-\lambda(z_1+z_2+\ldots+z_n)} dz_1 \dots dz_n =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \int\limits_0^{u_k} \lambda e^{-\lambda z_k} dz_k = \prod_{k=1}^{n} F_k(u_k) \tag{3.26}$$

где

$$F_k(u_k) = 1 - e^{-\lambda u_k}, \quad u_k > 0 \tag{3.27}$$

Итак, здесь n-мерный интеграл превратился в произведение интегралов. Совместная функция распределения совместных случайных величин оказалась равна произведению маргинальных функций распределения. Это означает, что промежутки между поступлениями требований $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_n$ – независимые случайные величины. Более того, $\Delta t_k \in \mathbb{E}(\lambda)$.

Отметим, что независимость приращений показывает некоторую симметрию между процессом Пуассона, который подсчитывает количество требований и случайными величинами $\Delta\tau_k$. Имеем $\xi(t), \quad t \geqslant 0$ – процесс Пуассона с непрерывным временем $t \geqslant 0$ и дискретным множеством значений $0, 1, 2, \dots$. С другой стороны, $\tau_k, \quad k = 1, 2, \dots$ – случайный процесс с дискретным "временем"$k = 0, 1, 2 \dots$ и непрерывными значениями $(\tau_k \geqslant 0)$. При этом оба процесса $\xi(t),\ t \geqslant 0$ и $\tau_k,\ k = 0, 1, 2 \dots$ однородные с независимыми приращениями и начинаются в нуле. При этом приращения

$$\Delta\xi(\Delta t) \in \mathbb{P}(\lambda\Delta t), \quad \Delta\tau_k \in \mathbb{E}(\lambda\Delta k), \quad \Delta k = (k+1) - k = 1 \tag{3.28}$$

Задача.

Рассмотрим в некотором смысле обратную задачу. Ранее мы показали, как ведут себя времена для процесса Пуассона. Теперь покажем, что если на времена наложить определённые требования, то получим процесс Пуассона.

Пусть имеется поток случайных требований, $\tau_1, \tau_2, \dots$ – времена поступления требования. Пусть

$$\Delta\tau = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n \tag{3.29}$$

– независимые случайные величины. И каждая случайная величина распределена экспоненциально

$$\Delta\tau_k \in \mathbb{E}(\lambda) \tag{3.30}$$

Пусть $\xi(t)$ – количество требований на $[0, t)$. Найти распределение $\xi(t)$ $(t > 0, t = fix)$.

Решение. Нарисуем траекторию рассматриваемого процесса (рис. 3.9).

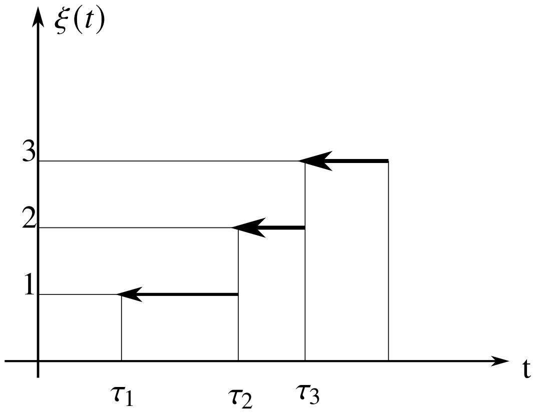

Рис. 3.9: Иллюстрация к задаче.

Аналогично прошлому случаю имеем

$$\xi(t) = k \Leftrightarrow \tau_k < t \leqslant \tau_{k+1}, k = 0, 1, 2 \ldots \tag{3.31}$$

Соответственно, нам нужно найти вероятность

$$P\left(\xi(t) = k\right) = P\left(\tau_k < t \leqslant \tau_{k+1}\right) \tag{3.32}$$

Нам неизвестно, как распределены времена, но известно, как распределены приращения. Запишем

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta\tau_{k+1} \tag{3.33}$$

и

$$\tau_k = \Delta\tau_1 + \ldots + \Delta\tau_k \tag{3.34}$$

Случайные величины τ_k и $\Delta\tau_k$ независимы. Распишем вероятность через двойной интеграл

$$P\left(\xi(t) = k\right) = P\left(\tau_k < t, \tau_k + \Delta\tau_{k+1} \geqslant t\right) = \iint\limits_{x<t,\ x+z\geqslant t} p_{\tau_k}(x) p_{\Delta\tau_{k+1}}(z) dx dz \tag{3.35}$$

При этом плотность нам известна

$$p_{\Delta\tau_{k+1}}(z) = \lambda \cdot e^{-\lambda z}, \quad z > 0 \tag{3.36}$$

Обозначим на графике область интегрирования (рис. 3.10). Поэтому мы можем перейти от двойного интеграла к повторному

$$P\left(\xi(t) = k\right) = \int\limits_0^t dx p_{\tau_k}(x) \cdot \int\limits_{t-x}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dz = \int\limits_0^t dx p_{\tau_k}(x) e^{-\lambda(t-x)} \tag{3.37}$$

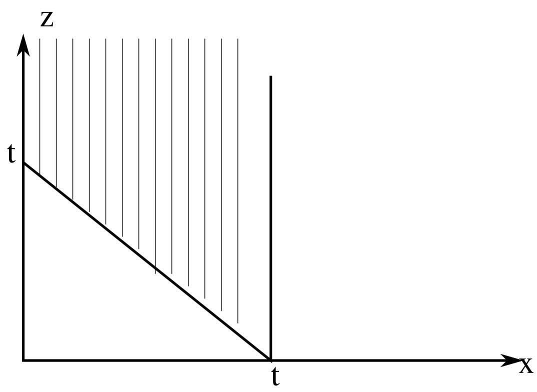

Рис. 3.10: Иллюстрация к задаче.

Остался неизвестным только один множитель – p_{τ_k}.

Семинар 4. Процесс Пуассона. Часть 2.

Задача 1.

Вернёмся к задачам предыдущего семинара. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ – времена поступления требований в пуассоновом потоке требований. Найти совместную плотность вероятности $p_{\tau_1,\ldots,\tau_n}(t_1,\ldots t_n)$.

Ответ нам известен:

$$p_{\tau_1,\ldots,\tau_n}(t_1,\ldots,t_n) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda t_n}, \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \tag{4.1}$$

Ранее мы доказали, что если

$$\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad \tau_0 = 0, \;\; k = 1,\ldots,n \tag{4.2}$$

то $\Delta\tau_1,\ldots,\Delta\tau_n$ – независимые случайные величины, причем каждая из них распределена экспоненциально $\Delta\tau_k \in \mathbb{E}(\lambda)$. На прошлом семинаре мы начали решать обратную задачу: налагаем требование (4.2) и доказываем, что плотность распределения – пуассонова.

Пусть $\Delta\tau_k,\; k = 1,\ldots,n$ удовлетворяет условиям (4.2). Задаем случайный процесс: $\xi(t)$ = количество требований в $[0,t)$. Мы показали, что

$$\begin{aligned} P\left(\xi(t) = k\right) = P\left(\tau_k < t \leqslant \tau_{k+1}\right) = P\left(\tau_k < t \leqslant \tau_k + \Delta\tau_{k+1}\right) = \\ = \iint\limits_{x,z>0,\; x<t\leqslant x+z} p_{\tau_k}(x) p_{\Delta\tau_k}(z)\,dx\,dz \end{aligned} \tag{4.3}$$

Плотность временных интервалов нам известна, а плотность каждого отдельного момента времени нужно найти.

Теорема. Если $\Delta\tau_1,\ldots,\Delta\tau_n$ – независимые случайные величины, распределенные экспоненциально $\Delta\tau_k \in \mathbb{E}(\lambda)$, $k = 1,\ldots,n$, то случайная величин

$$\tau_n = \Delta\tau_1 + \ldots + \Delta\tau_n \tag{4.4}$$

имеет плотность вероятности

$$p_{\tau_n(x)} = \lambda \cdot \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, \;\; x > 0, \;\; n = 1,2,\ldots \tag{4.5}$$

В случае $n = 1$ получаем обычную экспоненциальную плотности. Для случая $n > 1$ получаем пуассонову вероятность с индексом $n-1$ (если не учитывать первый множитель).С другой стороны, это экспоненциальная плотность, умноженная на степенной множитель.

Эту формулу можно доказать методом математической индукции или с помощью характеристической функции. Рассмотрим второй способ.

Доказательство.

Характеристическая функция случайной величины $\Delta\tau_k$, $n = 1, 2, \ldots$ – это функция

$$f_{\Delta\tau_k}(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \tag{4.6}$$

которая задается формулой

$$f_{\Delta\tau_k}(a) \overset{def}{=} Me^{ia\Delta\tau_k} = \int\limits_0^\infty e^{iay}\lambda e^{-\lambda y}dy = \frac{\lambda}{\lambda - ia}, \quad a \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

Дальше пользуемся тем, что характеристическая функция τ_n есть характеристическая функция суммы независимых случайных величин. Значит, характеристическая функция равна произведению характеристических функций

$$f_{\tau_n}(a) \overset{\text{н.с.в.}}{=} \prod_{k=1}^n f_{\Delta\tau_k}(a) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - ia}\right)^n \tag{4.8}$$

Видно, что характеристическая функция по сути является преобразованием Фурье от плотности с точностью до нормировочного множителя. Тогда, чтобы найти плотность по характеристической функции, нужно взять обратное преобразование Фурье

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-iax}f_{\tau_n}(a)da = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-iax}\left(\frac{\lambda}{\lambda - ia}\right)^n da \quad =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda^n}{(-i)^n}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-iax}\frac{1}{\left(a - \frac{\lambda}{i}\right)^n}da \tag{4.9}$$

Этот интеграл мы будем считать при $x > 0$. обозначим

$$z_0 = \frac{\lambda}{i} \tag{4.10}$$

Полученный интеграл можно взять с помощью теоремы о вычетах. Рассмотрим функцию (в сущности это подынтегральная функция)

$$G(z) = \frac{e^{-ixz}}{(z - z_0)^n}, \quad z = a + ib \in \mathbb{C} \tag{4.11}$$

Эта функция имеет одну особенность (полюс первого порядка). Мы можем к этой функции применить теорему о вычетах: интеграл по любому замкнутому контуру равен

$$\int\limits_{C_R} G(z)dz = 2\pi i \sum_{K} \underset{z=z_k}{Res} G(z) \tag{4.12}$$

где z_k – особые точки, лежащие внутри контура. Контур проходится в положительном направлении. В качестве контура выберем полуокружность (рис. 4.1).

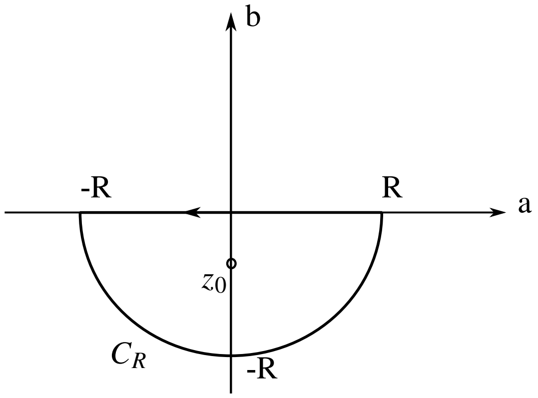

Рис. 4.1: Иллюстрация к теореме.

Тогда получаем, что если $|z| = R$, то на дуге этого контура функция стремится к нулю при увеличении радиуса дуги

$$G(z) = e^{-ixa} \cdot e^{-ixbi} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n} \underset{R\to\infty,\ b<0}{\longrightarrow} 0 \tag{4.13}$$

Тогда интеграл по такому контуру будем стремится к интегралу по отрезку

$$\int\limits_{C_R} G(z)dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{+\infty}^{-\infty} G(a)da = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(a)da \tag{4.14}$$

С другой стороны, у функции есть особенность. Поэтому

$$\int\limits_{C_R} G(z)dz = 2\pi i \cdot \underset{z=z_0}{Res}\, G(z) \text{ при } R > \lambda \tag{4.15}$$

Посчитаем вычет в полюсе

$$\underset{z=z_0}{Res}\, G(z) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n G(z) \bigg|_{z=z_0} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{-ixz} \bigg|_{z=z_0} =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!} (-ix)^{n-1} \cdot e^{-ixz_0} \tag{4.16}$$

Учтем, что $z_0 = \frac{\lambda}{i}$. Тогда получаем

$$Res\ G(z) = \frac{1}{(n-1)!}\,(-ix)^{n-1} \cdot e^{-x\lambda} \tag{4.17}$$

Отсюда получаем плотность вероятности

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda^n}{(-i)^n}(-1) \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{(n-1)!}(-ix)^{n-1} \cdot e^{-\lambda x} = \lambda \cdot \frac{(\Lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \tag{4.18}$$

Вернемся к задаче. Мы ищем вероятность $P\left(\xi(t) = k\right)$. Изобразим область интегрирования (рис. 4.2).

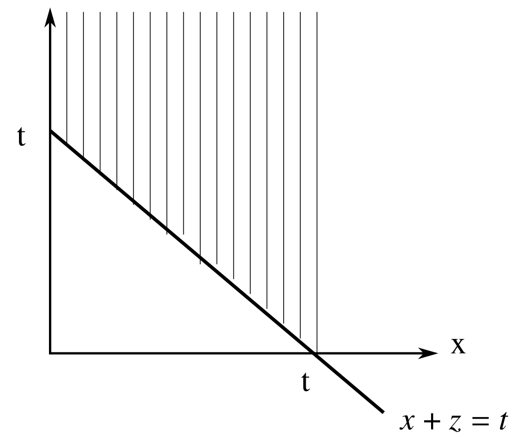

Рис. 4.2: Иллюстрация к задаче.

Тогда можно взять интеграл

$$P\left(\xi(t) = k\right) = \iint\limits_{x,z>0,\ x<t\leqslant x+z} p_{\tau_k}(x)p_{\Delta\tau_k}(z)dzdx = \int\limits_0^t dx p_{\tau_k}(x)\int\limits_{t\cdot x}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda z}dz =$$

$$= \int\limits_0^t dx \cdot \lambda\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda(t-x)} = e^{-\lambda t}\int\limits_0^t \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda dx = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{4.19}$$

– искомая вероятность для $k = 1, 2, \ldots$.

В случае $k = 0$

$$P\left(\xi(t) = 0\right) = P\left(\tau_1 \geqslant t\right) = P\left(\Delta\tau_1 \geqslant t\right) = \int\limits_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda z}dz = e^{-\lambda t} \tag{4.20}$$

Итак, мы показали, что в случае, когда требования утроены таким образом, что их времена поступления имеют независимые приращения, которые распределены одинаково (экспоненциально), то количество требований распределено по Пуассону. То есть поведение времен в поступлении требований в пуассоновом потоке необходимое и достаточное условие того, что поток является пуассоновым. Отметим, что доказательство пока не полное. Чтобы завершить доказательно, нужно показать независимость приращений и однородность во времени.

Таким образом, получаем, что можно характеризовать пуассонов процесс с трех сторон. Во-первых, можно рассматривать процесс Пуассона как математическую конструкцию. Во-вторых, можно рассматривать процесс Пуассона как пуассонов поток требований. В-третьих, можно рассматривать процесс Пуассона через времена поступления требований.

Задача 2.

Пусть $\xi(t), t \geqslant 0$ – пуассонов поток требований. Зафиксируем $0 < t = fix$. Рассмотрим случайный процесс $\beta(t)$ – время, прошедшее до момента t от последнего перед t требования.

Проиллюстрируем сказанное (рис. 4.3). Траектория случайного процесса в данном случае имеет ступенчатый вид. Тогда β – это время, которое прошло от последнего перед t требованием до фиксированного момента времени t.

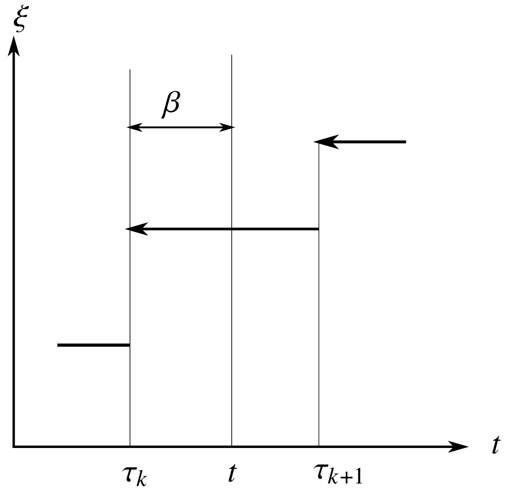

Рис. 4.3: Иллюстрация к задаче.

Если к моменту t еще не поступило требования, то

$$\beta(t) \stackrel{def}{=} t \tag{4.21}$$

Найти функцию распределения процесса

$$F_\beta(u;t) = P\left(\beta(t) < u\right) \tag{4.22}$$

Решение. Если $u \leqslant 0$, то

$$F_\beta(u;t) = 0 \tag{4.23}$$

Соответственно, если $u > t$, то

$$F_\beta(u;t) = 1 \tag{4.24}$$

Пусть $0 < u < t$. Найдем функцию распределения в этом случае. Разложим событие по полной группе, тем самым упростив выражение под знаком вероятности

$$P\left(\beta(t) < u\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\beta(t) < u, \tau_{k-1} < t \leqslant \tau_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\beta(t) < u, \xi(t) = k-1\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(t - \tau_{k-1} < u, \tau_{k-1} < t, \tau_{k-1} + \Delta\tau_k \geqslant t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(u;t) \tag{4.25}$$

Тогда, для случая $k \geqslant 2$

$$P_k(u,t) = \iint\limits_{t-u<x<t,\ x+z>t} p_{\tau_{k-1}}(x) p_{\Delta\tau_k}(z) dx dz = e^{-\lambda t} \cdot \left. \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \right|_{u-t}^{t} \tag{4.26}$$

Область интегрирования данного интеграла изображена на рис. 4.4.

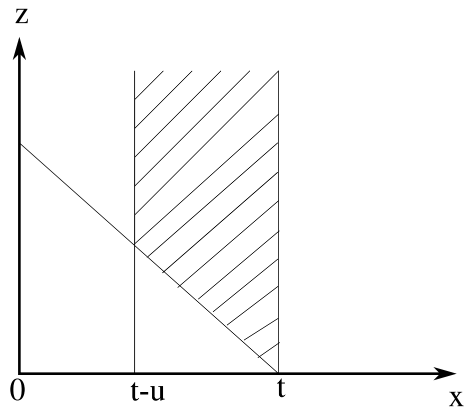

Рис. 4.4: Иллюстрация к решению.

Для случая $k = 1$ выполняется $t < \tau_1$. Тогда

$$\beta(t) = t \tag{4.27}$$

Отсюда получаем

$$P\left(\beta(t) < u\right) = P\left(t < u\right) = 0 \tag{4.28}$$

Итак, для функции распределения получаем

$$F_\beta(u,t) = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda t} \left. \frac{(\lambda x)^k}{(k-1)!} \right|_{t-u}^{t} = e^{-\lambda t} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda(t-u))^k}{k!} \right] =$$
$$= e^{-\lambda t} \left[e^{\lambda t} - 1 - \left(e^{\lambda(t-u)} - 1 \right) \right] = 1 - e^{-\lambda u}, \quad 0 < u < t \tag{4.29}$$

Здесь мы учли, что в (4.29) ряды очень близки к рядам для экспонент.

Итак, получили функцию распределения, которая имеет график, представленный на рис. 4.5.

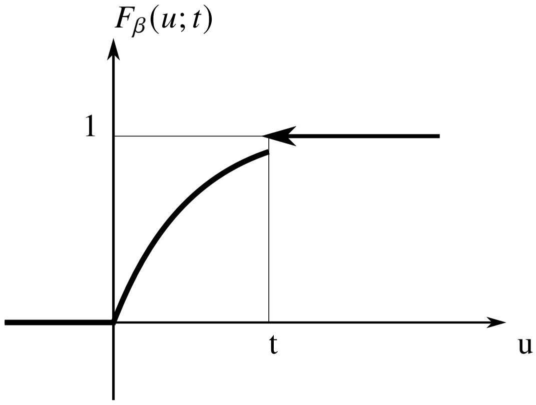

Рис. 4.5: Иллюстрация к решению.

При этом

$$P\left(\beta(t)=t\right)=P\left(\xi(t)=0\right)=e^{-\lambda t} \tag{4.30}$$

Семинар 5. Процесс Пуассона. Часть 3.

Задача 1.

Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ – времена поступления требований. Найти совместную плотность вероятности случайных величин τ_1 и τ_4.

Вспомним, что нам известная плотность вероятности

$$p_{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \lambda^4 \cdot e^{-\lambda t_4} \tag{5.1}$$

если между временами имеет место подчинение $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Решение. Чтобы получить из четырёхмерной плотности вероятности двумерную, нужно ее проинтегрировать. Нам нужна плотность

$$p_{\tau_1,\tau_4}(t_1, t_4) \neq 0, \quad \text{если } t_1 < t_4 \tag{5.2}$$

Найдём ее интегрированием

$$p_{\tau_1,\tau_4}(t_1, t_4) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_2 dt_3 = \iint\limits_{0<t_1<t_2<t_3<t_4} \lambda^4 e^{-\lambda t_4} dt_2 dt_3 =$$
$$= \lambda^4 e^{-\lambda t_4} \iint\limits_S dt_2 dt_3 = \lambda^4 e^{-\lambda t_4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_4 - t_1)^2 \tag{5.3}$$

при $0 < t_1 < t_4$. Область интегрирования S изображена на рис. 5.1.

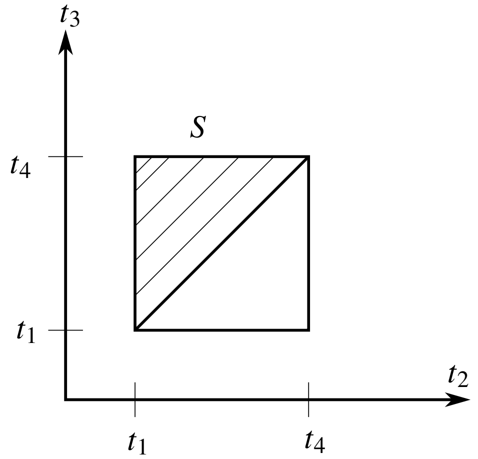

Рис. 5.1: Иллюстрация к задаче.

Полезные формулы.

Вспомним формулы, которые связывают вероятности для самого процесса Пуассона и вероятности для времен поступления требований. Изобразим траекторию (рис. 5.2).

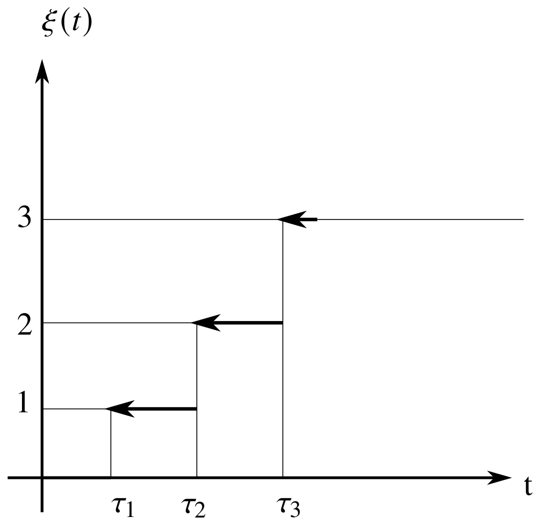

Рис. 5.2: Траектория процесса Пуассона.

Отсюда видно, что

$$P\left(\xi(t) = m\right) = P\left(\tau_m < t \leqslant \tau_{m+1}\right) \tag{5.4}$$

Также справедливо

$$P\left(\xi(t) < m\right) = P\left(t \leqslant \tau_m\right) = P\left(\tau_m \geqslant t\right) = 1 - F_{\tau_m}(t) \tag{5.5}$$

Также

$$P\left(\xi(t) \leqslant m\right) = P\left(\xi(t) < m + 1\right) = P\left(t \leqslant \tau_{m+1}\right) \tag{5.6}$$

Задача 2.

Найти вероятность того, что в пуассоновом потоке $\xi(t), t \geqslant 0$ на $[0, t)$ поступит более двух требований, если известно, что

$$\tau_4 \leqslant 3t \tag{5.7}$$

(Здесь $t = fix, t > 0$).

Решение. Отметим, что в данном случае нам нужно посчитать условную вероятность. Если переводить на язык частот, то происходит следующее. Есть много траекторий типа рис. 5.2. Мы рассматриваем среди них только те, для которых выполняется (5.7). Среди всех отобранных траекторий находим те, при которых к моменту времени t поступило не больше двух требований.

Соответственно, искомая вероятность

$$P = P\left(\xi(t) > 2 \middle| \tau_4 \leqslant 3t\right) = \frac{P\left(\xi(t) > 2, \tau_4 \leqslant 3t\right)}{P\left(\tau_4 \leqslant 3t\right)} \tag{5.8}$$

Посчитаем вероятность в знаменателе. Нам известно, как считать события, в которых фигурируют строгие неравенства

$$P\left(\xi(t) < m\right) = P\left(\tau_m \geqslant t\right) \tag{5.9}$$

Однако такая вероятность эквивалентна вероятности

$$P\left(\xi(t) \geqslant m\right) = P\left(\tau_m < t\right) \tag{5.10}$$

Отметим, что τ распределено абсолютно непрерывно. Значит, каждое конкретное значение τ принимает с вероятностью 0. Значит,

$$P\left(\tau_4 \leqslant 3t\right) = P\left(\tau_4 < 3t\right) = P\left(\xi(3t) \geqslant 4\right) \tag{5.11}$$

Таким образом, искомую вероятность можно посчитать различными способами. Например,

$$P\left(\tau_4 < 3t\right) = \int\limits_0^{3t} p_{\tau_4}(u)du \tag{5.12}$$

Или же

$$P\left(\xi(3t) \geqslant 4\right) = 1 - P\left(\xi(3t) \leqslant 3\right) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{(\lambda \cdot 3t)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot 3t} \tag{5.13}$$

Теперь нужно посчитать вероятность в числителе. Перепишем событие так, чтобы не было необходимости пользоваться совместным распределением случайных величин

$$\begin{aligned} P\left(\xi(t) > 2, \tau_4 \leqslant 3t\right) = P\left(\xi(t) > 2, \tau_4 < 3t\right) = P\left(\xi(t) > 2, \xi(3t) \geqslant 4\right) = \\ = P\left(\xi(t) > 2\right) - P\left(\xi(3t) \leqslant 3, \xi(t) > 2\right) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$P\left(A \cap B\right) = P(A) - P\left(A \cap \overline{B}\right) \tag{5.15}$$

Продолжим формулу

$$P\left(\xi(t) > 2, \tau_4 \leqslant 3t\right) = \left(1 - \sum_{k=0}^{2} P\left(\xi(t) = k\right)\right) - P\big(\xi(t) = 3, 4, 5, \ldots \ ; \xi(3t) = 0, 1, 2, 3\big) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda \cdot 2t)^0}{0!} e^{-\lambda 2t} \quad (5.16)$$

Итак, задача решена. Из решения этой задачи можно сделать следующие выводы. Любые события, ассоциированные с процессом Пуассона, можно попробовать переформулировать в терминах времен поступления требований. Это можно сделать на любом этапе решения задачи.

Задача 3.

Имеется некий поток клиентов – пуассонов поток с интенсивностью λ. Один клиент обслуживается в течение времени $\widetilde{\tau}$ – случайная величина, распределённая экспоненциально $\widetilde{\tau} \in \mathbb{E}(\mu)$. $\widetilde{\tau}$ не зависит от потока. Система в данный момент обслуживает не более одного клиента. Клиенты встают в очередь.

Отметим, что предположение о распределении времени обслуживания довольно естественно. Оно не противоречит здравому смыслу. То, насколько быстро обслуживается клиент, регулируется параметром μ. Понятно, что если

$$\widetilde{\tau} \in \mathbb{E}(\mu) \quad (5.17)$$

то его математическое ожидание

$$M\widetilde{\tau} = \frac{1}{\mu} \quad (5.18)$$

Соответственно, чем больше μ, тем меньше время обслуживания.

Найти среднее время ожидания вторым клиентом своей очереди.

Решение. В сущности мы имеем задачу на процесс Пуассона, однако ее удобнее решать в терминах времен поступления требований. Попробуем изобразить то, что происходит в системе. На рис. 5.3 изображена временная ось.

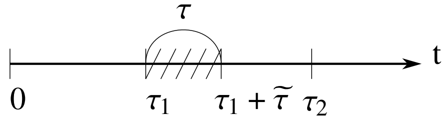

Рис. 5.3: Иллюстрация к решению.

В какой-то момент приходит первый клиент. Он обслуживается в течении некоторого времени (заштриховано). Далее на этой оси где-то стоит время появления второго клиента.

Если это время отстоит от момента завершения обслуживания первого клиента, то время ожидания δ равно нулю. Однако, возможен другой случай (рис. 5.4).

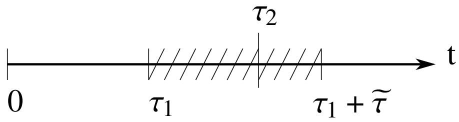

Рис. 5.4: Иллюстрация к решению.

Второй клиент пришел раньше, чем закончилось обслуживание первого клиента. Тогда время ожидания

$$\delta = \tau_1 + \widetilde{\tau} - \tau_2 \tag{5.19}$$

Тогда получаем

$$\delta = \begin{cases} 0, \ \text{если} \ \tau_1 + \widetilde{\tau} < \tau_2 \\ \tau_1 + \widetilde{\tau} - \tau_2, \ \text{если} \ \tau_1 + \widetilde{\tau} > \tau_2 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ \text{если} \ \widetilde{\tau} < \Delta\tau \\ \widetilde{\tau} - \Delta\tau, \ \text{если} \ \widetilde{\tau} > \Delta\tau \end{cases} = g(\widetilde{\tau}, \Delta\tau) \tag{5.20}$$

Здесь мы учли, что на самом деле мы рассматриваем функцию не от трех, а от двух случайных величин.

При этом мы знаем, что

$$\widetilde{\tau} \in \mathbb{E}(\mu), \quad \Delta\tau \in \mathbb{E}(\lambda) \tag{5.21}$$

Таким образом, нам нужно найти математическое ожидание

$$Mg(\widetilde{\tau}, \Delta\tau) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dF_{\widetilde{\tau}, \Delta\tau}(x, y) = 0 \cdot P(\widetilde{\tau} < \Delta\tau) + \iint\limits_{x>y} g(x, y) p_{\widetilde{\tau}, \Delta\tau}(x, y) dx dy =$$

$$= 0 + \iint\limits_{x>y>o} (x - y)\mu e^{-\mu x} \cdot \lambda e^{-\lambda y} dx dy = \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \int\limits_y^{\infty} (x - y)\mu e^{-\mu x} dx = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\lambda + \mu} \tag{5.22}$$

Отметим, что при $\lambda \to 0$ получаем $M\delta \to 0$.

Семинар 6. Дискретные одномерные случайные блуждания.

Дискретные одномерные случайные блуждания.

Дискретные одномерные случайные блуждания – математическая модель, описывающая движение точечной частицы по прямой. Рассмотрим случайный процесс с дискретным временем $\xi(t), t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Для краткости обозначим

$$\xi_k = \xi(t_k), k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

Введем приращение

$$\Delta\xi_k = \xi(t_k) - \xi(t_{k-1}), k = 1, 2, \ldots \tag{6.2}$$

Наложим на эти приращения некоторые вероятностные условия. Будем считать, что $\Delta\xi_1, \ldots, \Delta\xi_n$ – независимые случайные величины $\forall n = 2, 3, \ldots$ и будем считать, что $\Delta\xi_k$ принимают значения ± 1, причем

$$P\left(\Delta\xi_k = 1\right) = p \tag{6.3}$$

$$P\left(\Delta\xi_k = -1\right) = q \tag{6.4}$$

Начальное распределение

$$P\left(\xi(0) = m\right) = 1, \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{6.5}$$

Отметим, что время и скачки дискретны. Получаем случайный процесс с независимыми приращениями и однородный во времени. Данный процесс можно описать графически (рис. 6.1). Частица, находящаяся в некоторой точке на координатной оси, прыгает вправо с вероятностью p и влево с вероятностью q.

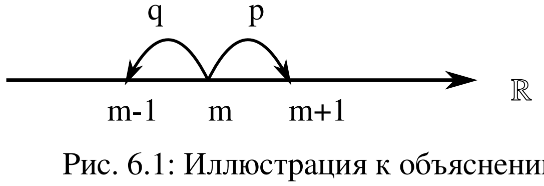

Рис. 6.1: Иллюстрация к объяснению.

Обозначим вероятность того, что за n шагов частица перейдет из координаты m в точку $m + d$

$$P_n\left(m, m + d\right) \stackrel{def}{=} P\left(\xi_n = m + d \middle| \xi_0 = m\right) = P\left(\xi_n = m + d, \xi_0 = m\right) \tag{6.6}$$

Она равна

$$P_n\left(m, m + d\right) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{6.7}$$

где

$$k = \frac{n+d}{2}, \quad n-k = \frac{n-d}{2} \tag{6.8}$$

Также рассмотрим вероятность того, что частица, стартовав из точки m, перейдет за n шагов в точку $m+d$, ни разу не посетив точку 0

$$P_n^+(m, m+d) \stackrel{def}{=} P\left(\xi_n = m+d, \xi_{n-1} > 0, \ldots, \xi_1 > 0 \middle| \xi_0 = m\right) \tag{6.9}$$

для $m > 0$, $m + d > 0$.

Эта вероятность вычисляется по формуле

$$P_n^+(m, m+d) = \left(C_n^k - C_n^{\overline{k}}\right) p^k q^{n-k} \tag{6.10}$$

где

$$k = \frac{n+d}{2}, \quad \overline{k} = m + \frac{n+d}{2} \tag{6.11}$$

Здесь вероятность зависит от начальной точки блуждания.

Примем следующее соглашение. На этом семинаре будем считать, что

$$C_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{если } k \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0, & \text{если } k \notin \{0, 1, \ldots, n\} \end{cases} \tag{6.12}$$

В частности отсюда получаем, что n и d должны быть одной четности.

Изобразим траекторию процесса с дискретным временем как непрерывную по t ломаную (рис. 6.2). Частица стартует из позиции с координатой m. Далее координата частицы увеличивается или уменьшается на единицу. Пусть координата увеличивается. В следующий момент времени пусть координата уменьшается. Далее аналогично строим произвольную траекторию частицы.

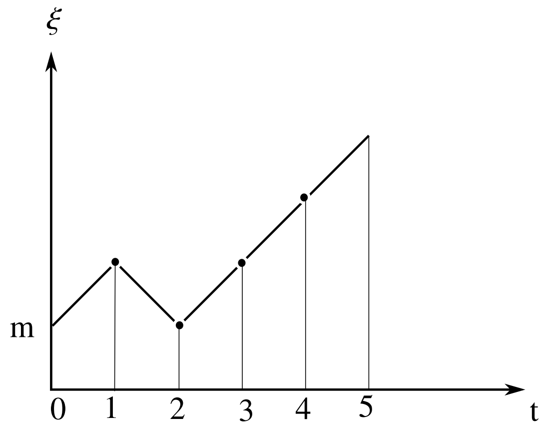

Рис. 6.2: Иллюстрация к объяснению.

Угол наклона ломаных во всех случаях равен 45^o. В каждом узле частица с вероятностью

p уходит наверх, с вероятностью q – вниз. В силу независимости прыжков вероятность того, что частица за n шагов пройдет по конкретной траектории равна $p^k q^{n-k}$, где k – количество звеньев вверх, $n-k$ – количество звеньев вниз.

Если заданы начальная m ($\xi_0 = m$) и конечная $m+d$ ($\xi_n = m+d$) точки, то количество прыжков вправо взаимно-однозначно связано с параметром d. Смещение частицы равно

$$d = k \cdot 1 + (n-k)(-1) \tag{6.13}$$

где $k, n-k$ те, что заданы выше.

Поэтому получаем

$$d = 2k - n \tag{6.14}$$

$$k = \frac{n+d}{2} \tag{6.15}$$

для траектории из $(0, m)$ в $(n, m+d)$. Значит, если задано количество прыжков и d, то количество прыжков вправо находится однозначным образом. Отсюда получаем, что вероятность прохода

$$P_n(m, n+d) = \mathcal{N}(m, m+d)\, p^k q^{n-k} \tag{6.16}$$

где

$$\mathcal{N}(m, m+d) = \text{количество траекторий из } (0,m) \text{ в } (n, m+d)$$

Понятно, что это число равно

$$\mathcal{N}_n(m, m+d) = C_n^k = C_n^{n-k} \tag{6.17}$$

В нашем случае (рис. 6.2) $m = 1$, $d = 3$, $n = 5$. Поэтому

$$k = \frac{n+d}{2} = 4 \tag{6.18}$$

и

$$C_n^k = C_5^4 = 5 \tag{6.19}$$

то есть существует пять траекторий, соединяющие начальную и конечную точки, указанные на рис. 6.2.

Наложим дополнительное условие – траектория не должна заходить в ноль. Нам задано количество шагов и смещение, значит, формула для вероятности должна иметь такой же вид, как и (6.16), однако в данном случае мы подсчитываем только те траектории, которые на заходят в ноль

$$P_n^+(m, m+d) = \mathcal{N}_n^+(m, m+d) p^k q^{n-k} \tag{6.20}$$

где

$$N_n^+(m, m+d) = N_n(m, m+d) - N_m^-(m, m+d) \tag{6.21}$$

Здесь N_n^- – количество траекторий, проходящих через ноль. Оказывается, что

$$N_n^-(m, m+d) = C_n^{\overline{k}} = N_n(-m, m+d) \tag{6.22}$$

где

$$\overline{k} = m + \frac{n+d}{2} \tag{6.23}$$

В сущности здесь смещение

$$\overline{d} = m + d - (-m) = 2m + d \tag{6.24}$$

Тогда

$$\overline{k} = \frac{n+\overline{d}}{2} \tag{6.25}$$

Отметим, что равенство (6.22) доказывается с помощью того, что мы устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между множеством траекторий $N_n^-(m, m+d)$ и некоторым другим множеством траекторий $N_n(-m, m+d)$. Эти множества конечные, поэтому в них одинаковое количество элементов.

Задача 1.

Частица стартовала из точки $m = 0$. Найти вероятность того, что частица в первый раз вернется в ноль на $2n$-м шаге ($n = fix$).

Решение. Понятно, что для возврата в исходную точку нужно четное число шагов. Обозначим искомую вероятность $P(R_{2n})$. Запишем искомое событие в виде

$$R_{2n} \Longleftrightarrow \xi_0 = 0,\ \xi_1 \neq 0, \ldots, \xi_{2n-1} \neq 0, \xi_{2n} = 0 \tag{6.26}$$

Это событие можно разложить на два

$$R_{2n} = R_{2n}^{(+1)} + R_{2n}^{(-1)} \tag{6.27}$$

где соответственно

$$R_{2n}^{(\pm1)} \Longleftrightarrow \xi_0 = 0, \xi_1 = \pm1, \xi_2 \neq 0, \ldots, \xi_{2n-2} \neq 0, \xi_{2n-1} \neq \pm1, \xi_{2n} = 0 \tag{6.28}$$

Запишем отдельно событие

$$R_{2n}^{(+1)} \Leftrightarrow \xi_0 = 0, \xi_1 = 1,\ \ldots \neq 0\ \ , \xi_{2n-1} = 1, \xi_{2n} = 0 \tag{6.29}$$

Отметим, что переход $\xi_0 = 0 \to \xi_1 = 1$ совершается с вероятностью p, а переход

$\xi_{2n-1} \to \xi_2 n$ совершается с вероятностью q. Между этими переходами имеем блуждание из 1 в 1 без захода в ноль, вероятность этого события обозначим $P^+_{2n-2}(1,1)$. Найдем

$$P\left(R^{(+1)}_{2n}\right) = p \cdot P^+_{2n-1}(1,1) \cdot q = \left(C^k_{2n-1} - C^{\overline{k}}_{2n-2}\right) p^k q^{2n-k-2} \cdot pq \tag{6.30}$$

Посчитаем

$$k = \frac{2n-2+0}{2} = n-1 \tag{6.31}$$

Тогда

$$2n-2-k = n-1 \tag{6.32}$$

Количество блужданий

$$\overline{k} = \frac{2n-2+2}{2} = n \tag{6.33}$$

Соответственно, получаем

$$P\left(R^{(+1)}_{2n}\right) = \left(C^{n-1}_{2n-2} - C^n_{2n-2}\right) p^n q^n \tag{6.34}$$

Отметим, что

$$P\left(R^{(+1)}_{2n}\right) = P\left(R^{(-1)}_{2n}\right) \tag{6.35}$$

Соответственно,

$$P\left(R_{2n}\right) = 2\left(C^{n-1}_{2n-2} - C^n_{2n-2}\right) p^n q^n = \frac{C^n_{2n}}{2n-1} p^n q^n \tag{6.36}$$

Итак, получили вероятность первого возврата в исходную точку. Обсудим вероятность возврата вообще. Пусть V_{2n} = частица за $2n$ шагов вернулась в исходную точку. Тогда вероятность возврата равна

$$P\left(V_{2n}\right) = C^n_{2n} p^n q^n \tag{6.37}$$

Задача 2.

$2n$ избирателей голосуют за кандидатов А,В. Каждый избиратель отдает голос за А с вероятностью a, за В – с вероятностью b, $(a+b=1)$ независимо от остальных избирателей. Найти вероятность того, что при последовательном голосовании А все время лидировал и в итоге выиграл $2m$ голосов.

Решение. В данном случае мы имеем задачу о случайном блуждании, так как в качестве блуждающей частицы мы можем выбрать разность между количеством голосов за А и за В. То есть ξ_k = количество голосов за А - количество голосов за B после k-го голосования. При этом считаем, что в начале

$$P\left(\xi_0 = 0\right) = 1 \tag{6.38}$$

Каждый голосующий голосует за одного кандидата, то есть разница или увеличивается (если голосует за A) или уменьшается на единицу (если голосует за B). Тогда в наших терминах

$$P = P\left(\xi_0 = 0, \xi_1 > 0, \ldots, \xi_{2n-1} > 0, \xi_{2n} = 2m\right) =$$
$$= P\left(\xi_0 = 0, \xi_1 > 1, \xi_2 > 0, \ldots, \xi_{2n-1} > 0, \xi_{2n} = 2m\right) = a \cdot P^{+}_{2n-1}(1, 2m) =$$
$$= \left(C^{m+n-1}_{2n-1} - C^{m+n}_{2n-1}\right) a^{m+n} b^{n-m} \qquad (6.39)$$

Задача 3.

Продавец продал $2n$ газет. Газета стоит 5 рублей. Каждый покупатель имеет монету в 5 рублей с вероятностью p, в 10 рублей – с вероятностью q. Найти вероятность того, что к концу продажи у продавца будет n 10-ти рублевых монет, и он всегда мог дать сдачу.

Решение. Переформулируем эту задачу так, чтобы можно было ее решить как задачу на случайные блуждания. Нас интересует вопрос, есть ли у продавца 5-ти рублевые монеты. Поэтому обозначим ξ_k = количество 5-ти рублевых монет у продавца сразу после $k-$го покупателя. При этом в начале у продавца ничего не было

$$P\left(\xi_0 = 0\right) = 1 \qquad (6.40)$$

Соответственно, каждый покупатель или добавляет пятирублевую моменту в копилку продавца, либо отбирает. Получаем типичные случайные блуждания. Если покупатель пришел с пятирублевой монетой, то количество пятирублевых монет у продавца увеличивается. Если покупатель пришел с десятирублёвой монетой, то количество пятирублевых монет у продавца уменьшается.

Изобразим траекторию данного процесса (рис. 6.3). Она начинается и заканчивается в нуле. Между этим она может касаться нуля. Может оказаться, что у продавца нет пятирублевых монет на сдачу, но ему повезло и следующий покупатель пришел с пятирублевой монетой.

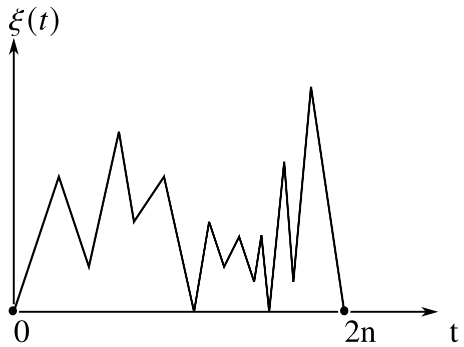

Рис. 6.3: Иллюстрация к решению.

Поэтому искомая вероятность

$$P = P\left(\xi_0 = 0, \xi_1 \geqslant 0, \ldots, \xi_{2n-1} \geqslant 0, \xi_{2n} = 0\right) =$$
$$= P\left(\widetilde{\xi}_0 = 1, \widetilde{\xi}_1 > 0, \ldots, \widetilde{\xi}_{2n-1} > 0, \widetilde{\xi}_{2n} = 1\right) = P^+_{2n}(1, 1) \quad (6.41)$$

где $\widetilde{\xi}_k = \xi_k + 1$. Здесь мы учли, что траектория не может становится меньше нуля, то есть продавец не может занимать у кого-то пятирублевые монеты. Также мы учли, что так как траектория не может уходить в отрицательные значения, но может касаться нуля, мы можем рассмотреть эквивалентное преобразование случайных процессов (можно поднять траекторию).

Семинар 7. Марковское свойство случайных блужданий.

Марковское свойство случайных блужданий.

Рассмотрим последовательность $\xi_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots$, которая представляет собой координаты блуждающей частицы. При этом мы считаем $\Delta\xi_k = \pm 1$ с вероятностями p и q соответственно. Здесь

$$\Delta\xi_k = \xi_k - \xi_{k-1} \tag{7.1}$$

Вероятность начального шага

$$P(\xi_0 = m_0) = 1 \tag{7.2}$$

или, более общо, можно считать, что ξ_0 – случайная величина. Тогда $\xi_0, \Delta\xi_1, \ldots, \Delta\xi_n$ – независимые случайные величины, $\forall n = 1, 2, \ldots$, то есть положение рассматриваемой частицы в начальный момент времени никак не связано с ее последующими блужданиями. Из этого предположения вытекает так называемое марковское свойство

$$P\left(\xi_n = m_n, \ldots, \xi_{k+1} = m_{k+1} \middle| \xi_k = m_k, \ldots, \xi_0 = m_0\right) = P\left(\xi_n = m_n, \ldots, \xi_{k+1} = m_{k+1} \middle| \xi_k = m_k\right) \tag{7.3}$$

то есть мы фиксируем историю блужданий частицы вплоть до шага k и рассматриваем, как устроены блуждания на последующих шагах при данном условии. Оказывается, что эта вероятность равна вероятности того же события при условии, что мы фиксируем только один предыдущий шаг.

Указанное свойство (7.3) говорит о том, что последовательность $\xi_k, \ k = 0, 1, \ldots$, образует **цепь Маркова.** Данная цепь Маркова имет счетное число состояний. При этом выполнено определяющее свойство цепи Маркова. Покажем это, учитывая независимость приращений

$$\begin{aligned} P(\xi_0 = m_0, \ldots, \xi_n = m_n) = P(\xi_0 = m_0, \Delta\xi_1 = \Delta m_1, \ldots, \Delta\xi_n = \Delta m_n) \underset{\text{н.с.в.}}{=} \\ \underset{\text{н.с.в.}}{=} P(\xi_0 = m_0) \cdot \prod_{i=1}^{n} P(\Delta\xi_i = \Delta m_i) \end{aligned} \tag{7.4}$$

где

$$\Delta m_i = m_i - m_{i-1} = \pm 1 \tag{7.5}$$

Соответственно, если подставить полученную совместную вероятность в условную (7.3). Воспользуемся определением условной вероятности. Запишем в частное совместную вероятность (7.4), а вероятность условия по структуре совпадает с (7.4) (с учетом того, что n нужно заменить на k). Тогда получим

$$P\left(\xi_n = m_n, \ldots, \xi_{k+1} = m_{k+1} \middle| \xi_k = m_k, \ldots, \xi_0 = m_0\right) = \frac{P\left(\xi_0 = m_0\right) \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} P\left(\Delta\xi_i = \Delta m_i\right)}{P\left(\xi_0 = m_0\right) \cdot \prod\limits_{i=1}^{k} P\left(\Delta\xi_i = \Delta m_i\right)} = \\ = \prod_{i=k+1}^{n} P\left(\Delta\xi_i = \Delta m_i\right) \quad (7.6)$$

Полученное выражение не зависит от $m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}$.

Аналогично распишем

$$P\left(\xi_n = m_n, \ldots, \xi_{k+1} = m_{k+1} \middle| \xi_k = m_k\right) = \frac{P\left(\xi_k = m_k\right) \cdot \prod\limits_{i=k+1}^{n} P\left(\Delta\xi_i = \Delta m_i\right)}{P\left(\xi_k = m_k\right)} = \\ = \prod_{i=k+1}^{n} P\left(\Delta\xi_i = \Delta m_i\right) \quad (7.7)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\xi_k = \xi_0 + \Delta\xi_1 + \ldots + \Delta\xi_k \quad (7.8)$$

не зависит от $\Delta\xi_{k+1}, \ldots, \Delta\xi_n$.

Итак, мы показали, что для случайных блужданий выполнено марковское свойство.

Задача 1.

Игрок выигрывает 1 рубль с вероятностью p и проигрывает 1 рубль с вероятностью q, $p + q = 1$. Начальный капитал игрока равен 5 рублям. Игрок может взять в долг. Найти вероятность того, что на 13-м шаге игрок все проиграл, но на 21-м шаге его капитал $\leqslant 5$ рублей, но на 13-м и 21-м шагах у игрока не было долга.

Решение. Обозначим ξ_k = капитал игрока после $k-$го шага ($k-$го тура игры). Тогда имеем типичные случайные блуждания. После каждого блуждания капитал игрока увеличивается или уменьшается на 1 рубль. Соответственно, искомая вероятность

$$P = P\left(\xi_0 = 5,\ \xi_{13} = 0,\ \ 0 \leqslant \xi_{21} \leqslant 5\right) = \\ = P\left(0 \leqslant \xi_{21} \leqslant 5 \middle| \xi_{13} = 0, \xi_0 = 5\right) \cdot P\left(\xi_{13} = 0 | \xi_0 = 5\right) \cdot P\left(\xi_0 = 5\right) = \\ = P_8\left(0, [0, 5]\right) \cdot P_{13}\left(5, 0\right) \cdot 1 \quad (7.9)$$

Здесь мы расписали вероятность как вероятность пересечения трех событий и учли марковское свойство.

Известно, что

$$P_{13}\left(0,5\right) = C_{13}^{4} p^{4} \cdot q^{9} \tag{7.10}$$

Также мы можем посчитать вероятность

$$P\left(0,[0,5]\right) = \sum_{n=0}^{5} P_8(0,n) \tag{7.11}$$

здесь мы учли формулу полной вероятности. При этом

$$P_8(0,n) = 0 \;\text{ при нечетном } n \tag{7.12}$$

Рассчитаем

$$P_8\left(0,[0,5]\right) = P_8(0,0) + P_8(0,2) + P_8(0,4) = C_8^4 p^4 q^4 + C_8^5 p^5 q^3 + C_8^6 p^6 q^2 \tag{7.13}$$

Итак, при решении задачи мы воспользовались марковским свойством случайных блужданий, то есть мы разбили блуждания капитала игрока на два участка (на блуждания от 0 до 13 игры и блуждания от 13 до 21 игры). В силу независимости приращений мы получили искомую вероятность как произведение вероятностей. Вместе с тем мы воспользовались формулой полной вероятности.

Задача 2.

Частица блуждает по точкам $0, 1, \ldots, M$ ($M = fix, \quad M \geqslant 2$). В $x = 0, \quad x = M$ стоят поглощающие экраны, то есть

$$P\left(\xi_{k+1} = x \middle| \xi_k = x\right) = 1 \quad \text{при} \quad x = 0, \;\; x = M \tag{7.14}$$

Пусть начальное состояние

$$P\left(\xi_0 = m\right) = 1, \quad 0 < m < M \tag{7.15}$$

Обозначим события A_m = частица когда-то пришла в $x = 0$ и B_m = частица пришла в $x = M$. Найти вероятности $P(A_m)$, $P(B_m)$.

Решение. Итак, частица блуждает по отрезку и не может выйти за его пределы. На концах отрезка стоят липкие стенки, дойдя до которых, частица прилипает и прекращает движение. Если частица вышла из какой-то промежуточной точки отрезка, то ее дальнейшие блуждания могут соответствовать дрожанию вокруг этой промежуточной точки. Существуют траектории, которые никогда не касаются границ отрезка.

Пусть прыжок на 1 вправо происходит с вероятностью p, влево – с вероятностью q, $p + q = 1$. Пусть $\hat{q}_m = P(A_m)$. Напомним, что

$$m: \quad P\left(\xi_0 = m\right) = 1 \tag{7.16}$$

Распишем событие A_m. Это событие соответствует ситуации, что частица, стартовав из точки m, на каком-то шаге пришла в точку $x = 0$. В сущности это событие можно разложить по полной группе по признаку того, на каком именно шаге частица пришла в $x = 0$

$$A_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,m} \tag{7.17}$$

где $A_{n,m} \Leftrightarrow$ частица пришла в $x = 0$ на $n-$м шаге. В явном виде

$$A_{n,m} = \{\xi_0 = m, 0 < \xi_1 < M, \ldots, 0 < \xi_{n-1} < M, \xi_n = 0\} \tag{7.18}$$

При этом эти события несовместные при разных номерах

$$\varnothing = A_{n,m} \cap A_{\widetilde{n},m} \quad \text{при} \quad \widetilde{n} < n \tag{7.19}$$

так как

$$A_{n,m} \Longrightarrow \xi_{\widetilde{n}} > 0, \quad A_{\widetilde{n},m} \Longrightarrow \xi_{\widetilde{n}} = 0 \tag{7.20}$$

Тогда получаем

$$P\left(A_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_{n,m}\right) \tag{7.21}$$

Пусть $1 < m < M - 1$. Рассмотрим переход $\xi_0 = m \to 0 < \xi_1 < M$. Тогда, очевидно $\xi_1 = m + 1$ или $\xi_1 = m - 1$. Поэтому событие A_m можно разложить по полной группе

$$\begin{aligned} P(A_m) = P\left(A_m\right) = P\left(A_m \middle| \xi_1 = m + 1\right) \cdot P\left(\xi_1 = m + 1 \middle| \xi_0 = m\right) + \\ + P\left(A_m \middle| \xi_1 = m - 1\right) \cdot P\left(\xi_1 = m - 1 \middle| \xi_0 = m\right) \end{aligned} \tag{7.22}$$

Определим, чему равны переходные вероятности. Понятно, что

$$P\left(\xi_1 = m + 1 | \xi_0 = m\right) = p \tag{7.23}$$

так как речь идет о смещении вправо. Также очевидно

$$P\left(\xi_1 = m - 1 | \xi_0 = m\right) = q \tag{7.24}$$

Рассмотрим оставшиеся вероятности. В сущности мы рассматриваем вероятность того, что частица стартует из точки $m \pm 1$ и доходит до нуля. В сущности это событие ничего не отличается от A_m, за исключением того, что начальная точка сместилась. Поэтому получаем

$$P\left(A_m \middle| \xi_1 = m \pm 1\right) = P\left(A_{m\pm1}\right) \tag{7.25}$$

Поэтому получаем

$$\hat{q}_m = p \cdot \hat{q}_{m+1} + q \cdot \hat{q}_{m-1}, \quad 1 < m < M - 1 \tag{7.26}$$

то есть получили трехчленное рекуррентное соотношение.

Рассмотрим края отрезка. Пусть $m = 1$. Пусть частица начинает движение из точки 1 (рис. 7.1).

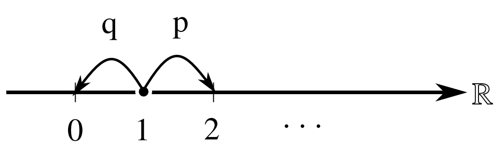

Рис. 7.1: Иллюстрация к решению.

Поэтому получаем

$$P(A_1) = p \cdot \hat{q}_2 + q \cdot 1, \quad \text{то есть } \hat{q}_0 = 1 \tag{7.27}$$

В случае $m = M - 1$ имеем обратную ситуацию (рис. 7.2).

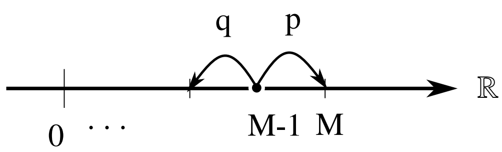

Рис. 7.2: Иллюстрация к задаче.

Тогда

$$P(A_{M-1}) = p \cdot 0 + q \cdot \hat{q}_{M-2}, \quad \text{то есть } \hat{q}_M = 0 \tag{7.28}$$

Итак, получаем рекуррентное соотношение с двумя краевыми условиями

$$\begin{cases} \hat{q}_m = p\hat{q}_{m+1} + q\hat{q}_{m-1} \\ \hat{q}_0 = 1, \quad \hat{q}_M = 0 \end{cases} \tag{7.29}$$

Пусть далее $p = q = \frac{1}{2}$ (случай симметричных блужданий). Тогда получаем

$$\hat{q}_m = \frac{\hat{q}_{m+1} + \hat{q}_{m-1}}{2} \tag{7.30}$$

Это соотношение можно записать в виде

$$\hat{q}_{m+1} - 2\hat{q}_m + \hat{q}_{m-1} = 0 \tag{7.31}$$

Это соотношение похоже на разностное соотношение для

$$\hat{q}''(m) = 0 \tag{7.32}$$

Решением этого уравнения является

$$\hat{q}(m) = a \cdot 1 + b \cdot m \tag{7.33}$$

Видно, что

$$\hat{q}_m = 1 \quad \forall m \tag{7.34}$$

и

$$\hat{q}_m = m \tag{7.35}$$

являются решениями разностного соотношения (7.31). Далее ищем решение в виде линейной комбинации

$$q_m = a \cdot 1 + b \cdot m \tag{7.36}$$

Учитываем краевые условия

$$\hat{q}_0 = a = 1 \tag{7.37}$$

$$\hat{q}_M = 1 + b \cdot M \tag{7.38}$$

Тогда

$$b = -\frac{1}{M} \tag{7.39}$$

Отсюда получаем решение системы

$$\hat{q}_m = 1 - \frac{m}{M}, \qquad m = 0, \ldots, M \tag{7.40}$$

Из уравнения

$$\hat{q}_1 = 1 \cdot q + \hat{q}_2 \cdot p \tag{7.41}$$

можно получить $\hat{q}_2$, зная $\hat{q}_1$. Предположим, что $\hat{q}_1$ нам неизвестно, оставляем его как параметр. Тогда $\hat{q}_2$ если линейная функция от $\hat{q}_1$

$$\hat{q}_2 = a_2 + b_2 \cdot \hat{q}_1 \tag{7.42}$$

Далее, подставляем $\hat{q}_2$ в $\hat{q}_3$ и получаем

$$\hat{q}_3 = a_3 + b_3\hat{q}_1 \tag{7.43}$$

и так далее. В результате получим

$$\hat{q}_M = a_M + b_M \cdot \hat{q}_1 = 0 \tag{7.44}$$

Приравниваем $\hat{q}_M$ к нулю и получаем $\hat{q}_1$, после чего возвращаемся к (7.41). Итак, решение рекуррентного соотношения определятся двумя числами.

Если $\widetilde{q}_m$ – какое-то решение, то выберем

$$\hat{q}_m = a + bm \tag{7.45}$$

и найдем a и b из соображений, что

$$\hat{q}_m = \widetilde{q}_m = 1, \quad m = 0 \tag{7.46}$$

и

$$\hat{q}_m = \widetilde{q}_m = 0, \ m = M \tag{7.47}$$

Пусть $\hat{p}_m = P(B_m)$ Очевидно,

$$\hat{p}_m = \hat{q}_m \Big|_{p \leftrightarrow q, m \leftrightarrow M-m} \tag{7.48}$$

Ранее мы получили решение

$$\hat{q}_m = 1 - \frac{m}{M} \tag{7.49}$$

Поэтому при $p = q = \frac{1}{2}$

$$\hat{p}_m = 1 - \frac{M-m}{M} = \frac{m}{M} \tag{7.50}$$

Отсюда видно, что

$$\hat{p}_m + \hat{q}_M = 1 \tag{7.51}$$

То есть вне зависимости от начального положения частица рано или поздно прилипнет к краям. Отметим также, что вероятность (7.50) пропорциональна тому, насколько далеко от нуля было начальное значение.

Отметим, что данная задача есть некоторое приближение к теории случайных процессов. Здесь мы практически не пользовались методами теории вероятностей. В основном здесь были чисто аналитические конструкции, связанные с зависимостью $\hat{q}$ от m как от параметра. Так же устроены аналитические конструкции в теории случайных процессов, только в качестве параметра распределения рассматривается время.

Задача 3.

В условиях предыдущей задачи найти среднее время достижения какого-либо из экранов.

Решение. Пусть ν_m – количество шагов, до достижения $x = 0$ или $x = M$. Где

$$m: \quad P(\xi_0 = m) = 1 \tag{7.52}$$

Математическое ожидание можно разложить в виде

$$\begin{aligned} M\nu_m = M\left(\nu_m \middle| \xi_1 = m+1\right) \cdot P\left(\xi_1 = m+1 \middle| \xi_0 = m\right) + \\ +M\left(\nu_m \middle| \xi_1 = m-1\right) \cdot P\left(\xi_1 = m-1 \middle| \xi_0 = m\right) = \\ = p \cdot M\left(\widetilde{\nu}_{m+1}\right) + q \cdot M\left(\widetilde{\nu}_{m-1}\right) \end{aligned} \tag{7.53}$$

где

$$\widetilde{\nu}_m = \nu_m + 1 \tag{7.54}$$

(здесь мы учли, что первый шаг уже сделан).

Соответственно, получаем уравнение

$$M\nu_m = p \cdot M\nu_{m+1} + q \cdot M\nu_{m-1} + p + q \tag{7.55}$$

Отметим, что $p + q = 1$.

Если $\mu_m = M\nu_m$, то

$$\mu_m = p \cdot \mu_{m+1} + q \cdot \mu_{m-1} + 1, \quad m = 1, \ldots, M-1 \tag{7.56}$$

Также учтем краевые условия. Если начальное состояние 0, то чтобы достичь нуля, нужно сделать 0 шагов:

$$\mu_0 = 0 \tag{7.57}$$

Аналогично, если начальное состояние M, так как мы уже на границе, дополнительные шаги не нужны

$$\mu_M = 0 \tag{7.58}$$

Получаем рекуррентную задачу

$$\begin{cases} \mu_m = p \cdot \mu_{m+1} + q \cdot \mu_{m-1} + 1, \quad m = 1, \ldots, M-1 \\ \mu_0 = 0, \quad \mu_M = 0 \end{cases} \tag{7.59}$$

здесь мы получили неоднородное уравнение с однородными условиями. Если $p = q = \frac{1}{2}$, то

$$\mu_m = \frac{\mu_{m+1} + \mu_{m-1}}{2} + 1 \tag{7.60}$$

В сущности это аналог уравнения

$$\mu_{m+1} - 2\mu_m\mu_{m-1} = -2 \tag{7.61}$$

то есть аналог задачи

$$\begin{cases} \mu''(m) = -2 \\ \mu(0) = 0, \mu(M) = 0 \end{cases} \tag{7.62}$$

Его решение

$$\mu(m) = m \cdot (M - m) \tag{7.63}$$

Поэтому

$$\mu_m = m \cdot (M - m) \tag{7.64}$$

Семинар 8. Процесс Винера.

Процесс Винера.

Процесс Винера $w(t)$, $t \geqslant 0$ – это однородный с независимыми приращениями процесс, который начинается в нуле. При этом для $t, s \geqslant 0$, $t \geqslant s$ его приращение имеет нормальное распределение

$$w(t) - w(s) \in \mathbb{N}\left(0, \sigma^2(t-s)\right), \quad 0 < \sigma^2 = const < \infty \tag{8.1}$$

Из этого определения вытекает, что конкретное сечение тоже распределено нормально с параметрами

$$w(t) = w(t) - w(0) \in \mathbb{N}\left(0, \sigma^2 t\right) \tag{8.2}$$

Отсюда следует, что

$$Mw(t) = 0, \quad Dw(t) = \sigma^2 t \tag{8.3}$$

а ковариационная функция (так как процесс начинается в нуле и имеет независимые приращения)

$$R_w(t,s) = min\left(Dw(t), Dw(s)\right) = \sigma^2 \cdot min\left(t,s\right), \quad t, s \geqslant 0 \tag{8.4}$$

Обозначения: для $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ приращения

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, k = 1, \ldots, n, \quad \Delta t_0 = t_0 = 0 \tag{8.5}$$

для приращения случайного процесса

$$\Delta w_k = w(t_k) - w(t_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, n, \quad \Delta w_0 = w_0 = 0 \tag{8.6}$$

Нормальная плотность распределения обозначена через

$$\mathcal{N}\left(x; \mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{8.7}$$

где $-\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu = const < \infty, \quad \sigma^2 > 0$ – параметры.

В случае нулевого среднего

$$\mathcal{N}_0(x, \sigma^2) = \mathcal{N}(x; 0, \sigma^2) \tag{8.8}$$

В этих обозначениях

$$p_{\Delta w_k}(x) = \mathcal{N}_0\left(x; \sigma^2 \Delta t_k\right) \tag{8.9}$$

Задача 1.

Найти многомерную плотность вероятности процесса $w(t), t \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим функцию распределения

$$F^{(n)}(x,t) = P\left(w(t_1) < x_1, \ldots, w(t_n) < x_n\right) \quad \text{для } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \tag{8.10}$$

Понятно, что это совместная вероятность для нескольких случайных величин. Ее можно посчитать, если известно, что величины независимы. Поэтому перейдём к приращениям процесса

$$w(t_1) = \Delta w_1,\ w(t_2) = \Delta w_1 + \Delta w_2,\ \ldots,\ \ w(t_n) = \Delta w_1 + \ldots + \Delta w_n \tag{8.11}$$

Поэтому получаем

$$\begin{gathered} F^{(n)}\,(x,t) = P\left(\Delta w_1 < x_1, \ldots, \Delta w_1 + \ldots + \Delta w_n < x_n\right) = \\ = \int\limits_{z_1<x_1,\ z_1+z_2<x_2} \ldots \int\limits_{\ldots z_1+\ldots z_n<x_n} p_{\Delta w_1}(\underline{z_1}) \cdot \ldots \cdot p_{\Delta w_n}(\underline{z_n}) d\underline{z_1} \ldots \underline{z_n} \end{gathered} \tag{8.12}$$

Чтобы получить явное выражение для интеграла, лучше упростить область интегрирования, чем само выражение под знаком интеграла. Сделаем замену переменной

$$\left[\begin{array}{c} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_1 + z_2 \\ \ldots \\ y_n = z_1 + \ldots z_n \end{array}\right. \tag{8.13}$$

Получается, что сперва мы написали вероятность для сечений. Потом от сечений перешли к приращениям, чтобы воспользоваться независимостью. Получили интеграл от произведения. Однако в интеграл берется по сложной области. Чтобы ее упростить, снова возвращаемся к сечениям. Обратная замена

$$\left[\begin{array}{c} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 - y_1 \\ \ldots \\ z_n = y_n - y_{n-1} \end{array}\right. \tag{8.14}$$

Физически это означает, что y_i отвечают сечениям, что z_i – приращениям. Мы воспользовались линейной заменой, поэтому якобиан перехода равен 1:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

Поэтому

$$d^n y = d^n z \tag{8.16}$$

Отсюда получаем интеграл

$$F^{(n)}(x,t) = \int\limits_{y_1<x_1, y_2<x_2, \dots,} \dots \int\limits_{y_n<x_n} p_{\Delta w_1}(y_1) \cdot p_{\Delta w_2} \cdot \dots \cdot p_{\Delta w_n}(y_n - y_{n-1}) dy_1 dy_2 \dots dy_n =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{x_k} p_{\Delta w_k}(y_k - y_{k-1}) dy_k$$

Значит совместная плотность

$$p_w^{(n)}(x,t) = \prod_{k=1}^{n} p_{\Delta w_k}(x_k - x_{k-1}) = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{N}_0 \left(\Delta x, \sigma^2 \Delta t_k \right) \tag{8.17}$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Рассмотрим описанное выше в двумерном случае

$$\iint\limits_{y_1<x_1,\ y_2<x_2} p_1(y_1) \cdot p(y_2 - y_1) dy_1 dy_2 = F^{(2)}(x,t) \tag{8.18}$$

– двумерная функция распределения. Тогда двумерная плотность

$$p^{(2)}(x,t) = F^{(2)}(x,t) = \iint\limits_{y_1<x_1,\ y_2<x_2} p^{(2)}(x,t) d^2 x \tag{8.19}$$

Задача 2.

Пусть есть упорядоченные времена $0 < s < t$. Найти

1. условную плотность сечения в более поздний момент времени при условии, что мы фиксировали значение в какой-то более ранний момент времени

$$p_{w(t)\big|w(s)}(x\big|z) \equiv p\left(x, t\big|z, s\right) \tag{8.20}$$

2. и наоборот, условную плотность

$$p_{w(t)\big|w(t)} \equiv p\left(z, s\middle|x, t\right) \tag{8.21}$$

Решение. По определению условная плотность есть совместная плотность, деленная на плотность условия. Поэтому

$$p\left(x, t\middle|z, s\right) = \frac{p_{w(t),w(s)}(x, z)}{p_{w(s)}(z)} = \frac{\mathcal{N}_0\left(z; \sigma^2 s\right) \cdot \mathcal{N}_0\left(x - z; \sigma^2(t - s)\right)}{\mathcal{N}_0\left(z; \sigma^2 s\right)} = \mathcal{N}_0\Big(x - z; \sigma^2(t - s)\Big) =$$
$$= \mathcal{N}_0\Big(x; z, \sigma^2(t - s)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t - s)}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2(t-s)}} \tag{8.22}$$

Проиллюстрируем полученный результат (рис. 8.1). Пусть есть процесс Винера. Фиксируем значение процесса в момент времени s (значение в этот момент равно z). Нас интересует, что будет происходить с процессом позже, в момент времени t. В сущности мы рассматриваем только те траектории, которые проходят через точку (z, s). Оказывается, что для этих траекторий в последующие моменты времени значение процесса будет колебаться вокруг среднего значения, равного z. В сущности эта ситуация эквивалентна сдвигу начала отсчета из точки $(0, 0)$ в точку (z, s). Теперь мы рассматриваем процесс в новых координатах.

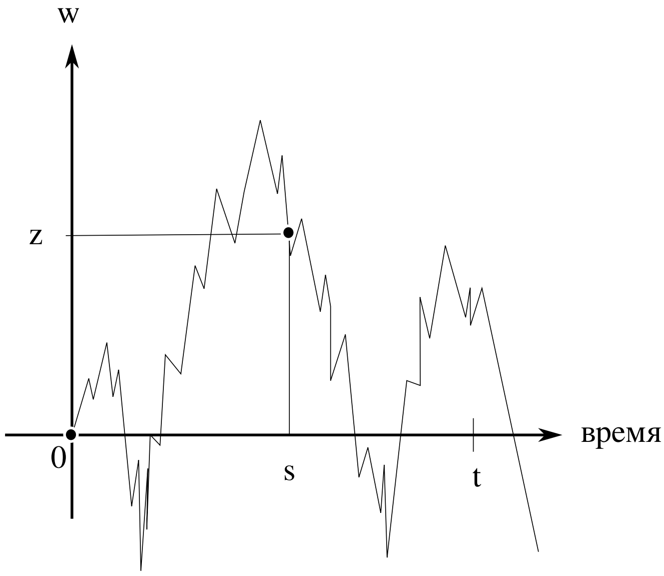

Рис. 8.1: Иллюстрация к задаче.

Рассмотрим вторую часть задачи. Тогда

$$p\left(z, s\middle|x, t\right) = \frac{p_{w(s),w(t)}(z,x)}{p_{w(t)}(x)} = \frac{\mathcal{N}_0\left(z;\sigma^2 s\right)\cdot\mathcal{N}_0\left(x-z;\sigma^2(t-s)\right)}{\mathcal{N}_0\left(x;\sigma^2 t\right)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}}\frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 s}}\cdot e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2(t-s)}}}{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta}}e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}} \tag{8.23}$$

где

$$\Delta = \frac{s(t-s)}{t} \tag{8.24}$$

и показатель экспоненты

$$X^2 = \frac{z^2}{s} + \frac{(x-z)^2}{t-s} - \frac{x^2}{t} = \frac{(zt-xs)^2}{st(t-s)} \tag{8.25}$$

Получим явную зависимость от z

$$X^2 = \frac{\left(z-\frac{s}{t}x\right)^2\cdot t^2}{st(t-s)} = \frac{\left(z-\frac{s}{t}x\right)^2}{\Delta} \tag{8.26}$$

Поэтому условная плотность

$$p\left(z, s\middle|x, t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta}}e^{-\frac{\left(z-\frac{s}{t}x\right)^2}{2\sigma^2\Delta}} = \mathcal{N}\left(z;\frac{s}{t}x, \sigma^2\cdot\frac{s(t-s)}{t}\right) \tag{8.27}$$

Здесь мы рассматриваем обратную ситуацию. Фиксируем точку x и рассматриваем все траектории, проходящие через эту точку в ранние моменты времени (рис. 8.2). Соединим точку $(0,0)$ с точкой (x,t). Отметим, что точка (μ_x, s) является средним значением

$$\mu_x = M\left(w(s)\middle|w(t)=x\right) = \frac{s}{t}x = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_1+\Delta t_2}\cdot x_1 \tag{8.28}$$

где приращения равны

$$\Delta t_1 = s-0 \tag{8.29}$$

и

$$\Delta t_2 = t-s \tag{8.30}$$

Таким образом, мы фиксируем значение процесса в момент времени t. Тогда в прошедшие моменты времени для данного процесса начинает смещаться среднее. Априорное среднее было равно нулю, но когда мы фиксируем точку x, среднее начинает сдвигаться, причем чем ближе мы подходим по времени s к t, тем больше это среднее похоже на x. Значит, среднее все ближе подходит к некоторой фиксированной величине. Обратно, при приближении s к 0 влияние точки (x,t) всё меньше, среднее приближается к своему априорному значению.

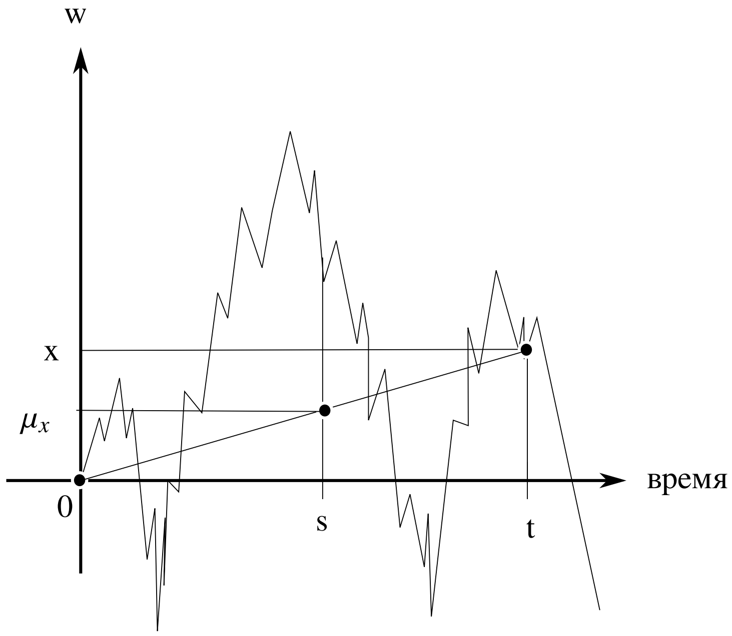

Рис. 8.2: Иллюстрация к задаче.

Найдем дисперсию

$$d_x^2 = D\left(w(s)\middle|w(t) = x\right) = \sigma^2 \cdot \frac{s(t-s)}{t} = \sigma^2 \frac{\Delta t_1 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \delta t_2} \tag{8.31}$$

Тогда

$$\frac{\sigma^2}{d_x^2} = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{\Delta t_1 \Delta t_2} = \frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2} = \frac{\sigma^2}{D\Delta w_1} + \frac{\sigma^2}{D\Delta w_2} \tag{8.32}$$

Отсюда

$$d_x^2 \leqslant D\Delta w_1 = Dw(s) \tag{8.33}$$

Когда мы фиксируем точку (x, t), мы получаем некоторую фиксированную информацию. Итак, получаем, что наличие некоторой априорной информации уменьшает неопределенность.

Аналогично для первой части задачи

$$\mu_z = M\left(w(t)\middle|w(s) = z\right) = z \tag{8.34}$$

при этом дисперсия

$$d_z^2 = D\left(w(t)\middle|w(s) = z\right) = \sigma^2(t-s) \leqslant \sigma^2 t \tag{8.35}$$

Здесь фиксирован более ранний момент времени. Это приводит к сдвигу среднего и уменьшению дисперсии. Чем ближе s к t, тем точнее становится наблюдение. Если времена близки, сечение начинает влиять на предыдущее, а значит, при уменьшении разности $t - s$

неопределенность уменьшается.

Отметим также, что условные распределения остаются нормальными. Это важный результат, так как нам было известно, что каждое отдельное сечение распределено нормально, но это не означает само по себе, что условное распределение тоже будет нормальным.

Задача 3.

Найти условное распределение сечения $w(t)$ при условии, что

$$2w(t) < w(2t) \tag{8.36}$$

Решение. Найдем условную функцию распределения

$$F_{w(t)}\left(x \middle| 2w(t) < w(2t)\right) = \frac{P\left(w(t) < x, 2w(t) < w(2t)\right)}{P\left(2w(t) < w(2t)\right)} \tag{8.37}$$

Здесь мы переходим к приращениям чтобы воспользоваться независимостью. Получаем

$$F_{w(t)}\left(x|2w(t) < w(2t)\right) = \frac{P\left(\Delta w_1 < x, 2\Delta w_1 < \Delta w_1 + \Delta w_2\right)}{P\left(2\Delta w_1 < \Delta w_1 + \Delta w_2\right)} \tag{8.38}$$

Посчитаем вероятность в знаменателе

$$P\left(2\Delta w_1 < \Delta w_1 + \Delta w_2\right) = P\left(\Delta w_1 < \Delta w_2\right) = \frac{1}{2} \tag{8.39}$$

Посчитаем вероятность в числителе

$$P\left(\Delta w_1 < x, \Delta w_1 < \Delta w_2\right) = \iint\limits_{x_1 < x,\ x_1 < x_2} p_{\Delta w_1}(x_1) \cdot p_{\Delta w_2}(x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} dx_1 \cdot p_{\Delta w_1}(x_1) \int\limits_{x_1}^{\infty} p_{\Delta w_2} dx_2 \tag{8.40}$$

Распишем интеграл

$$\int\limits_{x_1}^{\infty} p_{\Delta w_2}(x_2) dx_2 = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2 t}} dt = 1 - \Phi\left(\frac{x_1}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) \tag{8.41}$$

где

$$\Phi(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}} db \tag{8.42}$$

Тогда получаем выражение для функции распределения

$$F_{w(t)\big|2w(t)<w(2t)}(x) = 2\cdot\int\limits_{-\infty}^{x} p_{\Delta w_1}\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{x_1}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right)\right)dx_1 \tag{8.43}$$

Дифференцируем по x и получаем плотность

$$p_{w(t)\big|2w(t)<w(2t)}(x) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right)\right) \tag{8.44}$$

Семинар 9. Процесс Винера. Часть 2.

Задача 1.

Пусть $w(t)$ – процесс Винера с $\sigma^2 = 1$. Зададим процесс

$$\beta(t) = w(t) - t \cdot w(1), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{9.1}$$

Найти одномерную плотность вероятности и ковариационную функцию процесса $\beta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Решение. Заметим, что

$$\beta(0) = w(0) = 0 \tag{9.2}$$

аналогично

$$\beta(1) = w(1) - w(1) = 0 \tag{9.3}$$

с вероятностью 1. Это означает, что рассматриваемый процесс имеет жестко фиксированные концы.

Пусть $0 < t < 1$. Рассмотрим приращения процесса Винера на промежутках $[0, t]$ и $[t, 1]$. Обозначим приращение на первом промежутке

$$\Delta w_1 = w(t) - w(0) = w(t) \tag{9.4}$$

а приращение на втором промежутке

$$\Delta w_2 = w(1) - w(t) \tag{9.5}$$

Нам известно, что приращения распределены нормально

$$\Delta w_1 \in \mathbb{N}(0, t) \tag{9.6}$$

$$\Delta w_2 \in \mathbb{N}(0, 1 - t) \tag{9.7}$$

При этом случайные величины Δw_1 и Δw_2 независимы. Выразим данный случайный процесс через приращения

$$\beta(t) = \Delta w_1 - t\,(\Delta w_1 + \Delta w_2) = (1 - t)\,\Delta w_1 - t\Delta w_2 \tag{9.8}$$

Получили линейную комбинацию двух независимых нормальных случайных величин.

Вспомним следующее утверждение из теории вероятностей. Если v_1, v_2 – независимые случайные величины, распределенные нормально, то $av_1 + bx_2$ распределена нормально $(a, b = const)$.

Тогда

$$M\left(av_1 + bv_2\right) = a \cdot Mv_1 + b \cdot Mv_2 \tag{9.9}$$

а дисперсия, в силу независимости случайных величин, будет суммой дисперсий

$$D\left(av_1 + bv_2\right) \overset{\text{н.с.в.}}{=} a^2 Dv_1 + b^2 Dv_2 \tag{9.10}$$

Поэтому получаем

$$\beta(t) \in \mathbb{N}\left(0, (1-t)^2 \cdot t + t^2(1-t)\right) \tag{9.11}$$

Раскроем скобки в выражении для дисперсии

$$(1-t)^2 \cdot t + t^2(1-t) = t(1-t) \tag{9.12}$$

Вспомним некоторые результаты прошлого семинара. Если $0 < t < u$. Тогда условная плотность сечения в более ранний момент времени при фиксированном более позднем равна

$$p_{w(t)|w(u)}\left(x|z\right) = \mathcal{N}\left(\mu_z, \sigma_z^2\right) \tag{9.13}$$

где

$$\mu_z = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_1 + \Delta t_2} z \tag{9.14}$$

и дисперсия

$$\sigma_z^2 = \frac{\Delta t_1 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \tag{9.15}$$

Здесь

$$\Delta t_1 = t \tag{9.16}$$

$$\Delta t_2 = u - t \tag{9.17}$$

Теперь возьмем $u = 1$, $z = 0$. Тогда

$$\mu_z = 0 \tag{9.18}$$

и дисперсия

$$\sigma_z^2 = t(1-t) \tag{9.19}$$

То есть получаем, что плотность рассматриваемого процесса равна условной плотности процесса Винера вида

$$p_{\beta(t)}(x) = p_{w(t)|w(1)}\left(x|0\right), \quad x \in \mathbb{R}, 0 < t < 1 \tag{9.20}$$

Проиллюстрируем сказанное (рис. 9.1). Рассмотрим только те процессы Винера, которые в момент времени 1 имеют значение 0.

Такой процесс $\beta(t), 0 < t < 1$ называется **броуновским мост**. Можно показать, что все статистические свойства процесса $\beta(t)$ совпадают со свойствами процесса Винера при

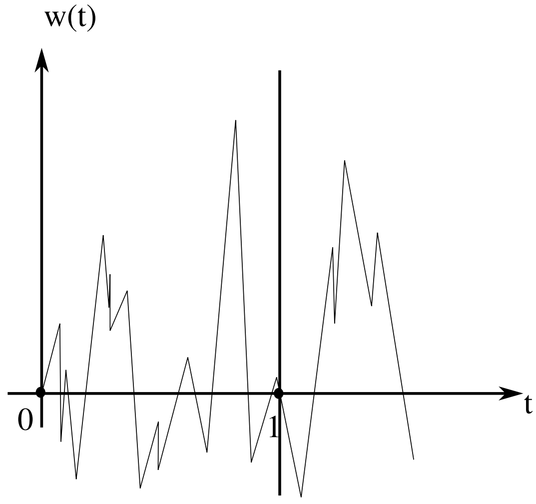

Рис. 9.1: Иллюстрация к задаче.

условии, что мы фиксируем значение в точке (0,1).

Найдем ковариационную функцию

$$R_\beta(s,t) = M\beta(s)\beta(t) - M\beta(s)\cdot M\beta(t) = M\beta(s)\beta(t) \tag{9.21}$$

Пусть $0 < s < t$. Тогда получаем три сегмента разбиения на рассматриваемом промежутке (рис. 9.2). На каждом сегменте введём приращения.

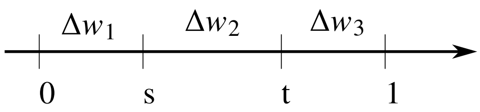

Рис. 9.2: Иллюстрация к задаче.

Тогда все конструкции можно выразить через эти приращения

$$\beta(s) = w(s) - sw(1) = \Delta w_1 - s\left(\Delta w_1 + \Delta w_2 + \Delta w_3\right) \tag{9.22}$$

распишем

$$\beta(t) = w(t) - tw(1) = \Delta w_1 + \Delta w_2 - t\left(\Delta w_1 + \Delta w_2 + \Delta w_3\right) \tag{9.23}$$

Нам известно, что все приращения независимы между собой и имеют нулевые средние. Поэтому имеет смысл собрать коэффициенты при всех Δw_k. Перегруппируем слагаемые для (9.22)

$$\beta(s) = (1-s)\Delta w_1 - s\Delta w_2 - s\Delta w_3 \tag{9.24}$$

аналогично

$$\beta(t) = (1-t)\,\Delta w_1 + (1-t)\,\Delta w_2 - t\Delta w_3 \tag{9.25}$$

Отметим

$$M\Delta w_i \Delta w_k = 0 = M\Delta w_i M\Delta w_k, \quad i \neq j \tag{9.26}$$

Поэтому получаем выражение для математического ожидания

$$\begin{aligned} M\beta(s)\beta(t) = (1-s)(1-t)M\Delta w_1^2 - s(1-t)M\Delta w_2^2 + stM\Delta w_3^2 = \\ = (1-s)(1-t)\cdot s - s(1-t)(t-s) + st(1-t) \end{aligned} \tag{9.27}$$

После приведения подобных слагаемых получаем

$$R_\beta(s;t) = s(1-t) \text{ при } s < t \tag{9.28}$$

В общем случае

$$R_\beta(s,t) = t_*\,(1-t^*) \tag{9.29}$$

где

$$t_* = min\,(s,t) \tag{9.30}$$

$$t^* = max\,(s,t) \tag{9.31}$$

При $s = t$ получаем дисперсию процесса

$$R_\beta(t,t) = t(1-t) = D\beta(t) \tag{9.32}$$

Отметим, что в подобных задачах очень удобно использовать все свойства, связанные с независимостью приращений. Например, если мы рассматриваем плотность

$$p_{\Delta w_1|\Delta w_2}(x|y) = p_{\Delta w_1}(x) \tag{9.33}$$

Задача 2.

Пусть $w(t)$, $t \geqslant 0$ – процесс Винера, $\sigma^2 = 1$. Пусть есть некоторое фиксированное время $T = 1 = fix$. Разобьём сегмент на точки

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

где

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = \frac{1}{n}, \quad k = 1,\ldots,n \tag{9.34}$$

то есть сегменты разбиения имеют одинаковую длину.

Составим случайную величину

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left|w(t_k) - w(t_{k-1})\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|\Delta w_k\right| \tag{9.35}$$

Доказать утверждение

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; P\left(V_n > \varepsilon\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1 \tag{9.36}$$

Отметим, что (9.35) есть сумма модулей отклонений в два соседних момента времени. Поэтому утверждение (9.36) говорит о том, что сумма всех отклонений есть сколь угодно большое число.

Решение. Для доказательства этого утверждения воспользуемся неравенством Чебышева. Для это нужно посчитать математическое ожидание

$$MV_n = \sum_{k=1}^{n} M\left|\Delta w_k\right| \tag{9.37}$$

Известно, что

$$\Delta w_k \in \mathbb{N}\left(0, \Delta t_k\right) \tag{9.38}$$

Поэтому

$$MV_n = n \cdot M\left|\Delta w_k\right| \tag{9.39}$$

Посчитаем

$$M|\Delta w_k| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta t_k}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta t_k}} dx \tag{9.40}$$

Сделаем замену переменной

$$z = \frac{x}{\sqrt{\Delta t_k}} \tag{9.41}$$

Тогда

$$M|\Delta w_k| = 2\int_{0}^{\infty} \sqrt{\Delta t_k} \cdot z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n \cdot 2\pi}} \left(-e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{2}{\sqrt{n \cdot 2\pi}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{9.42}$$

Тогда полное математическое ожидание

$$MV_n = n \cdot M\Delta w_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{n} \tag{9.43}$$

Для дисперсии получим

$$DV_n = \sum_{k=1}^{n} D|\Delta w_k| \tag{9.44}$$

Значит нужно посчитать дисперсию модуля

$$D|\Delta w_k| = M\Delta w_k^2 - \left(M\Delta w_k\right)^2 = \Delta t_k - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{1}{n} \tag{9.45}$$

Поэтому получаем

$$DV_n = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = const \tag{9.46}$$

Запишем неравенство Чебышева

$$P\left(|V_n - MV_n| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{DV_n}{\varepsilon^2} \tag{9.47}$$

Проиллюстрируем сказанное (рис. 9.3).

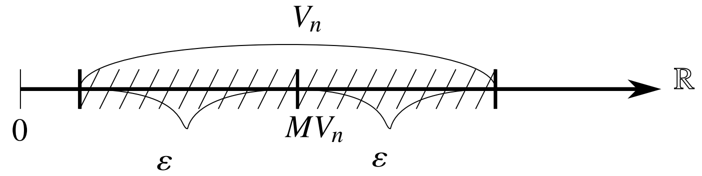

Рис. 9.3: Иллюстрация к задаче.

Нам нужно найти $P\left(V_n > \varepsilon\right)$. То есть мы ищем вероятность того, что V_n попадет в закрашенную область (рис. 9.4).

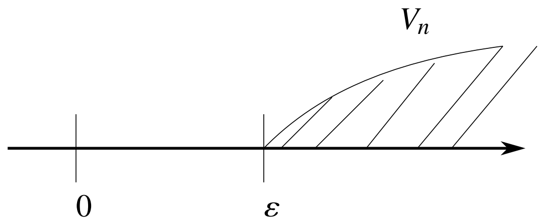

Рис. 9.4: Иллюстрация к решению.

Также введем ε_1 (рис. 9.5).

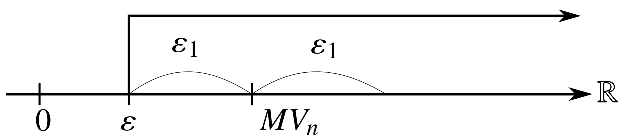

Рис. 9.5: Иллюстрация к решению.

Отметим, что

$$MV_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{9.48}$$

Поэтому вероятность

$$P\left(V_n \geqslant \varepsilon\right) \geqslant P\left(|V_n - MV_n| < \varepsilon_1\right) \geqslant 1 - \frac{const}{\left(MV_n - \varepsilon\right)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{9.49}$$

Отметим необычность данного рассуждения. Мы привыкли использовать оценки с помощью неравенства Чебышева, связанные с тем, что дисперсия DV_n стремится к нулю. Однако в данном случае малость добавки в (9.47) обеспечивается бесконечно большим ε. Вместе с тем получаем, что вариация процесса Винера есть очень большое число, то есть при измельчении рассматриваемого промежутка получаем всё большие дрожания.

Семинар 10. Марковские процессы.

Марковские процессы.

Рассмотрим марковские процессы с непрерывным временем, конечным числом состояний, однородной матрицей перехода. Рассматриваем $\xi(t),\quad t \geqslant 0$. Считаем, что каждое сечение принимает значение из множества

$$\xi(t) = x_1, \ldots, x_r (2 \leqslant r < \infty) \tag{10.1}$$

(это и есть конечное число состояний).

Так как процесс марковский, должно выполняться так называемое условие марковости

$$P\left(\xi(t_n) = x_{i_n}\middle|\xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi(t_0) = x_{i_0}\right) = P\left(\xi(t_n) = x_{i_n}\middle|\xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}\right) \tag{10.2}$$

Это верно $\forall n = 2, 3, \ldots, \quad \forall x_{i_0}, \ldots, x_{i_n} \in \{x_1, \ldots, x_r\}, \quad \forall 0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

В сущности свойство марковости процесса означает, что последовательные сечения этого процесса образуют цепь Маркова.

Однородность матрицы перехода обосновывается выражением

$$P\left(\xi(t) = x_j\middle|\xi(s) = x_i\right) = \pi_{ij}(t - s) \quad \forall 0 \leqslant s < t \tag{10.3}$$

то есть вероятность зависит не от t и s по отдельности, а от их разности.

Рассмотрим семейство матриц перехода как матричнозначные функции $\pi(t),\ t \geqslant 0$. Эти функции удовлетворяют уравнению Чепмена-Колмогорова

$$\pi(t + s) = \pi(t) \cdot \pi(s) \tag{10.4}$$

Также выполняются дифференциальные уравнения Колмогорова

$$\dot{\pi}(t) = \Lambda\pi(t) = \pi(t) \cdot \Lambda \tag{10.5}$$

где

$$\Lambda = \dot{\pi}(0) = \lim_{\to +0} \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h} \tag{10.6}$$

Элементы матрицы перехода есть условная вероятность. Мы можем записать безусловную вероятность

$$p_j(t) = P\left(\xi(t) = x_j\right) \tag{10.7}$$

составим вектор-строку

$$p(t) = (p_1(t), \ldots, p_t(t)) \tag{10.8}$$

тогда для безусловных вероятностей получим

$$\dot{p}(t) = p(t) \cdot \Lambda \tag{10.9}$$

Начальные условия:

$$\pi(0) = I \tag{10.10}$$

это означает, что вероятность перехода из одного состояния в другое за время 0 единичная, так как за нулевое время мы никуда не перейдем.

Для вероятности также можно задать начальные условия

$$p_j(0) = a_j \geqslant 0 \tag{10.11}$$

– начальные вероятности. При этом выполняется условие нормировки

$$\sum_{j=1}^{r} a_j = 1 \tag{10.12}$$

Отметим, что матрицы перехода обладают свойством

$$\sum_{j=1}^{r} \pi_{ij}(t) = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, r, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{10.13}$$

то есть сумма вдоль строки равна единице (условие нормировки условного распределения).

Отсюда получаем

$$\sum_{j=1}^{r} \Lambda_{ij} = 0 \tag{10.14}$$

А для вероятностей условие нормировки

$$p_1(t) + \ldots + p_r(t) = 1 \quad \forall t \geqslant 0 \tag{10.15}$$

Задача 1.

Найти общий вид матрицы $\pi(t)$ в случае $r = 2$.

Решение. Пусть

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{10.16}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{\pi}_{11} & \dot{\pi}_{12} \\ \dot{\pi}_{21} & \dot{\pi}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} \tag{10.17}$$

На самом деле здесь нам не нужно решать систему из четырех уравнений. Достаточно решить систему из двух уравнений, выбрав по одному элементу из каждой строки. Запишем первое уравнение

$$\dot{\pi}_{11} = -a\pi_{11} + a\pi_{21} \tag{10.18}$$

второе уравнение имеет вид

$$\dot{\pi}_{21} = b\pi_{11} - b\pi_{21} \tag{10.19}$$

Эта система из двух уравнений имеет ровно два неизвестных. добавим начальные условия

$$\pi_{11}(0) = 1 \tag{10.20}$$

и

$$\pi_{21}(0) = 0 \tag{10.21}$$

Умножим уравнение (10.18) на b, а второе на a и сложим их

$$b\dot{\pi}_{11} + a\dot{\pi}_{21} = 0 \tag{10.22}$$

Тогда получаем

$$b\pi_{11} + a\pi_{21} = const = b \tag{10.23}$$

Отсюда

$$a\pi_2 = b - b\pi_{11} \tag{10.24}$$

Подставим (10.24) в (10.18)

$$\dot{\pi}_{11} = -a\pi_{11} + b - b\pi_{11} = -(a+b)\pi_{11} + b \tag{10.25}$$

Учтем начальное условие

$$\pi_{11}(0) = 1 \tag{10.26}$$

Решим это уравнение методом вариации постоянной

$$\pi_{11}(t) = C(t) \cdot e^{-(a+b)t} \tag{10.27}$$

Тогда

$$\dot{\pi}_{11} = \dot{C}e^{-(a+b)t} - (a+b)Ce^{-(a+b)t} \tag{10.28}$$

Отсюда получаем уравнение для C

$$\dot{C}e^{-(a+b)t} = b \tag{10.29}$$

При этом

$$C(0) = 1 \tag{10.30}$$

Получаем

$$\dot{C} = be^{(a+b)t} \tag{10.31}$$

Отсюда

$$C = \frac{b}{a+b}e^{+(a+b)t} + C_0 \tag{10.32}$$

где константу находим из начального условия

$$C_0 = 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b} \tag{10.33}$$

После подстановки C в (10.27) получаем

$$\pi_{11}(t) = \left(\frac{b}{a+b}e^{(a+b)t} + \frac{a}{a+b}\right)e^{-(a+b)t} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t} \tag{10.34}$$

Получаем

$$\pi_{12}(t) = 1 - \pi_{11}(t) = \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t} \tag{10.35}$$

Тогда из (10.23)

$$\pi_{12}(t) = \frac{b}{a}\left(1 - \pi_{11}(t)\right) = \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}e^{-(a+b)t} \tag{10.36}$$

Аналогично

$$\pi_{22}(t) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}e^{-(a+b)t} \tag{10.37}$$

Получили общий вид матричных элементов. При этом из условия

$$0 \leqslant \pi_{ij}(t) \leqslant 1 \tag{10.38}$$

получаем, что матричные элементы должны быть положительными, значит, $a, b \geqslant 0$. Отметим также, что по определению

$$\Lambda_{ij} = \lim_{n\to+0}\frac{\pi_{ij} - \delta_{ij}}{h} \tag{10.39}$$

Тогда, если $i = j$, то

$$\pi_{ij} - 1 \leqslant 0 \tag{10.40}$$

диагональные элементы матрицы Λ должны быть неположительными. С другой стороны, при $i \neq j$

$$\pi_{ij} - 0 \geqslant 0 \tag{10.41}$$

Значит, недиагональные элементы должны быть неотрицательными.

Задача 2.

Поток клиентов (заявок). Есть некоторое время обслуживания τ. Рассмотрим следующую простейшую систему массового обслуживания. Поток клиентов – пуассонов поток $N(t), t \geqslant 0$ с интенсивностью λ (среднее количество клиентов в единицу времени). Во-вторых, считаем, что τ – случайная величина, которая распределена экспоненциально

$$\tau \in \mathbb{E}(\mu) \tag{10.42}$$

Физический смысл этой величины

$$\mu = \frac{1}{M\tau} \tag{10.43}$$

Также мы считаем, что τ и любые n сечений процесса $N(t), t \geqslant 0$ – независимые случайные величины, то есть время обслуживания не зависит от значений процесса Пуассона.

При $t = fix$ система обслуживает $\leqslant 1$ клиента. Клиенты не встают в очередь, то есть если пришел клиент (заявка), а система занята, то клиент (заявка) уходит из системы.

Теоретическое пояснение к задаче.

Если $N(t), t \geqslant 0$ – пуассонов поток, то условная вероятность

$$P\left(N(t_n) = m_n \middle| N(t_{n-1}) = m_{n-1},\ N(t_0) = m_0\right) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{(\lambda\Delta t_k)^{\Delta m_k}}{\Delta m_k!} e^{-\lambda\Delta t_k}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda\Delta t_k)^{\Delta m_k}}{\Delta m_k!} e^{-\lambda\Delta t_k}} =$$

$$= \frac{(\lambda\Delta t_n)^{\Delta m_n}}{\Delta m_n!} e^{-\lambda\Delta t_n} = P\left(N(t_n) = m_n \middle| N(t_{n-1}) = m_{n-1}\right) \tag{10.44}$$

где

$$\Delta m_k = m_{-} m_{k-1} \geqslant 0 \tag{10.45}$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} > 0 \tag{10.46}$$

Таким образом, мы получили, что процесс Пуассона есть марковский процесс со счетным числом состояний.

Рассмотрим отдельно время обслуживания. Если $\tau \in \mathbb{E}(\mu)$, то можно рассчитать условную вероятность

$$P\left(\tau < t + s \middle| \tau \geqslant s\right) = \frac{P\left(s \leqslant \tau < t + s\right)}{P\left(\tau \geqslant s\right)} = \frac{\int\limits_{s}^{t+s} \mu e^{-\mu x} dx}{\int\limits_{s}^{\infty} \mu e^{-\mu x} dx} = \frac{e^{-\mu s} - e^{-\mu(t+s)}}{e^{-\mu s}} = 1 - e^{-\mu t} =$$

$$= P\left(\tau < t\right) \tag{10.47}$$

Итак, марковость процесса и экспоненциальное распределение времени обслуживания гарантируют, что система обслуживания имеет марковский характер. Введем $\xi(t), t \geqslant 0$, причем $\xi(t) = 0$, если система свободна и $\xi(t) = 1$, если занята. Тогда $\xi(t), t \geqslant 0$ – марковский процесс.

Найти

$$p_j(t) = P\left(\xi(t) = j\right) \tag{10.48}$$

для $j = 0, 1$ $t > 0$.

Решение. Запишем

$$p(t) = (p_0(t), p_1(t)) \tag{10.49}$$

Запишем уравнение Колмогорова и зададим начальные условия

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = p(t) \cdot \Lambda \\ p_0(0) = a_0, \quad p_1(0) = a \\ a_0 + a_1 = 1 \end{cases} \tag{10.50}$$

Выразим матрицу через известные параметры случайных величин

$$\Lambda = \lim_{h \to +0} \frac{\pi(h) - I}{h} \tag{10.51}$$

Ищем $\pi_{ij}(h)$ в первом порядке по $h \to +0$ (мы ищем предел, поэтому точные значения нам не нужны).

По определению запишем

$$\pi_{ij}(h) = P\left(\xi(h) = j \middle| \xi(0) = i\right) \tag{10.52}$$

Очевидно, что вероятность любого события в данной ситуации

$$P(A) = \sum_{m=0}^{\infty} P\left(A \cap \{N(h) = m\}\right) \tag{10.53}$$

При этом

$$\sum_{m=2}^{\infty} P\left(A \cap \{N(h) = m\}\right) \leqslant \sum_{m=2}^{\infty} P\left(N(h) = m\right) = P\left(N(h) \geqslant 2\right) = o(h) \tag{10.54}$$

Здесь мы воспользовались общим свойством процесса Пуассона. Таким образом, мы можем разлагать событие по полной группе (10.53) и отбрасывать все случаи, когда $H(h) > 1$. На самом деле нас интересует только ситуации, когда к моменту времени h либо вообще никто не пришел, или пришел только один клиент. Проиллюстрируем описанное выше. Пусть τ_k – время появления k-го клиента. Заштрихуем тот отрезок временной прямой, в течение которого клиент обслуживается (рис. 10.1). Здесь τ = время обслуживания.

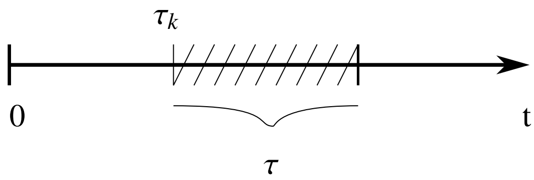

Рис. 10.1: Иллюстрация к решению.

Пусть $\xi(0) = 0$. Будем искать первую строку матрицы перехода. Тогда, так как ничего не происходит,

$$N(h) = 0 \tag{10.55}$$

отсюда

$$\xi(h) = 1 \tag{10.56}$$

Рассмотрим другую возможность (рис. 10.2). Тогда

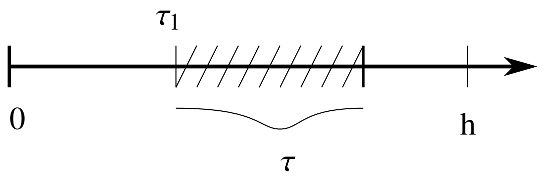

Рис. 10.2: Иллюстрация к решению.

$$N(h) = 1 \tag{10.57}$$

При этом время поступления первого требования

$$0 \leqslant \tau_1 \leqslant h \tag{10.58}$$

Вместе с тем

$$\tau_1 + \tau < h \tag{10.59}$$

Тогда

$$\xi(h) = 0 \tag{10.60}$$

Рассмотрим следующий вариант. Пусть клиент пришел и обслуживался вплоть до момента h (рис. 10.3). Тогда

$$\begin{cases} N(h) = 1 \\ 0 < \tau_1 < h \\ \tau_1 + \tau > h \end{cases} \tag{10.61}$$

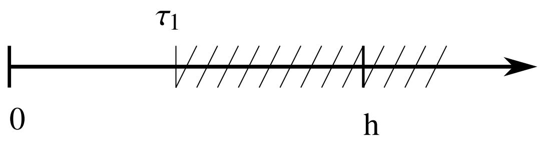

Рис. 10.3: Иллюстрация к решению.

Значит

$$\xi(h) = 1 \tag{10.62}$$

Итак, всего получаем три возможности. Понятно, что теоретически существует ещё множество возможностей. например, в случае рис. 10.2 после момента $\tau_1 + \tau$ но до момента h пришло еще несколько клиентов и все они были обслужены до момента h. Однако в этом случае также $\xi(h) = 0$. Или же пришло несколько клиентов, но один из них не был обслужен к моменту времени h. Однако мы не рассматриваем случаи, в которых на промежутке $(0, h)$ обслуживается более одного клиента, так как в рамках нашего приближения такие события маловероятны.

Таким образом получаем вероятности перехода из нуля

$$\pi_{00}(h) = P\left(\xi(h) = 0\middle|\xi(0) = 0\right) = P\left(N(h) = 0\right) + P\left(N(h) = 1, \tau_1 < h, \tau_1 + \tau < h\right) \cong \\ \cong P\left(N(h) = 0\right) + P\left(\tau_1 + \tau < h\right) \tag{10.63}$$

Здесь мы учли, что из условия

$$\tau_1 + \tau < h \tag{10.64}$$

следует

$$\tau_1 < h \tag{10.65}$$

В свою очередь событие (10.65) равносильно тому, что

$$N(h) \geqslant 1 \tag{10.66}$$

Однако с точки зрения расчетов нам все равно, $N(h) = 1$ или $N(h) > 1$, поэтому и получаем приближенное равенство (10.63).

Посчитаем

$$P\left(N(h) = 0\right) = e^{-\lambda h} \approx 1 - \lambda h \tag{10.67}$$

Теперь найдем вероятность вида (в предпоследнем, приближенном равенстве разлагаем в первом порядке по h)

$$P\left(\tau_1+\tau<h\right)=\iint\limits_{x,y>0,\ x+y<h} p_{\tau_1}(x)p_\tau(y)dxdy=\int\limits_0^h \lambda e^{-\lambda x}dx\int\limits_0^{h-x}\mu e^{-\mu y}dy=$$
$$=\int\limits_0^h \lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\mu(h-x)}\right)dx=1-e^{-\lambda x}-e^{-\mu h}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)h}\right)=$$
$$\approx \lambda h-(1-\mu h)\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\lambda+\mu)h\approx 0 \qquad (10.68)$$

Таким образом, вероятность ситуации, представленной на рис. 10.3, равна $o(h)$.

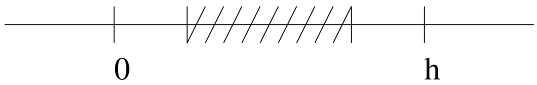

Рис. 10.4: Иллюстрация к задаче.

Семинар 11. Система массового обслуживания.

Задача.

Имеются две технологические линии, которые мы считаем статистически независимыми (все вероятностные события в одной линии не зависят от вероятностных событий в другой линии) и идентичными. В случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ любая линия встает на ремонт. Время ремонта – случайная величина $\tau \in \mathbb{E}(\mu)$, а случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ – времена в пуассоновом потоке. Найти матрицу Λ.

Отметим, что здесь в каждой линии свой поток заявок. При этом для каждой линии в некоторые случайные моменты времени может произойти поломка, вследствие чего линия встает на ремонт на некоторое случайное время τ.

Решение. Отметим, что для систем уравнений Колмогорова нас не интересуют события, в которых более одного требования на малом промежутке времени. Нам неважно, как ведет себя система при втором требовании, так как эти вторые требования мы не рассматриваем. Поэтому указанных данных достаточно для решения поставленной задачи. Зададим случайный процесс в момент времени t

- $\xi(t) = 0$, если обе линии работают
- $\xi(t) = 1$, если работает ровно одна (любая) линия
- $\xi(t) = 2$, если обе линии на ремонте

В сущности случайный процесс описывает количество неработающих линий. Отметим, что событие

$$\xi(t) = k \tag{11.1}$$

Равносильно тому, что

$$\xi_I(t) = k_1 \tag{11.2}$$

и

$$\xi_{II}(t) = k_2 \tag{11.3}$$

где $k_1, k_2 = 0, 1$, причем

$$k_1 + k_2 = k \tag{11.4}$$

здесь I, II – номера линии.

Чтобы найти матрицу Λ, нужно найти элементы матрицы перехода за малое время в первом порядке малости по времени. Рассмотрим переход системы

$$0 \to 0 \tag{11.5}$$

Этому случаю соответствует рис. 11.1. В нуле обе линии находились в рабочем состоянии, в конечной точке они тоже находились в рабочем состоянии. Для такого события нас интересуют только те случаи, когда на интервале $[0, h]$ ни в одной линии не было поломки, так как событие "поломка случилась на этом промежутке, но уже закончилась к моменту h"очень маловероятно. Здесь и далее под картинками будем писать вероятность перехода в первом порядке по h.

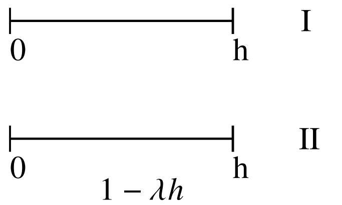

Рис. 11.1: Иллюстрация к решению.

Поэтому вероятность перехода равна

$$\pi_{00}(h) \cong (1 - \lambda h)(1 - \lambda h) \approx 1 - 2\lambda h \tag{11.6}$$

Теперь рассмотрим ситуацию

$$0 \to 1 \tag{11.7}$$

Этой ситуации соответствует рис. 11.2 а также обратная к ней.

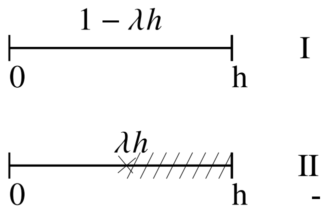

Рис. 11.2: Иллюстрация к задаче.

Соответственно

$$\pi_{01}(h) \approx (1 - \lambda h) \cdot \lambda h \cdot 2 \approx 2\lambda h \tag{11.8}$$

Здесь 2 связана с перестановкой первой и второй линии.

Для ситуации

$$0 \to 2 \tag{11.9}$$

можно не рисовать картинку, так как известно, что сумма по строке должна быть равна 1, поэтому

$$\pi_{02}(h) \approx 0 \tag{11.10}$$

С другой стороны, можно сказать, что ситуация (11.9) соответствует случаю, когда обе линии сломались и к моменту времени h ни одна из линий не вышла из ремонта. То есть для каждой линии имеем вероятность λh. Значит, для вероятности $\pi_{01} = \lambda h \cdot \lambda h$, что в первом порядке малости равно нулю.

Посчитаем переход

$$2 \to 0 \tag{11.11}$$

Значит, обе линии в начальный момент времени стояли на ремонте, а потом в каждой из линий ремонт заканчивается к моменту h (рис. 11.3).

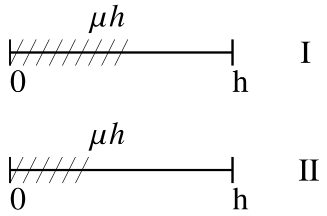

Рис. 11.3: Иллюстрация к задаче.

Поэтому получаем

$$\pi_{20} \approx \mu h \cdot \mu h \approx 0 \tag{11.12}$$

Рассмотрим переход

$$2 \to 1 \tag{11.13}$$

В этом случае обе линии находились на ремонте в начальный момент времени. При этом одна линия успела закончить ремонт к моменту h, а другая – нет (рис. 11.4).

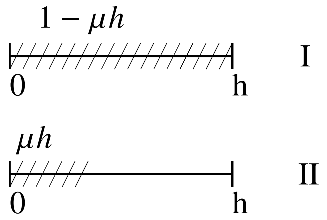

Рис. 11.4: Иллюстрация к задаче.

Поэтому получаем выражение для вероятности

$$\pi_{21}(h) = (1 - \mu h) \cdot \mu h \cdot 2 + 2\mu h \tag{11.14}$$

Здесь двойка связана с перестановками линий.

Тогда из стохастичности матрицы перехода получаем

$$\pi_{22}(h) \approx 1 - 2\mu h \tag{11.15}$$

Или, с другой стороны, имеем ситуацию, в которой обе линии были на ремонте и не успели его закончить. Поэтому вероятность $\pi_{22} = (1 - \mu h) \cdot (1 - \mu h)$, после разложения получаем (11.15).

Итак, мы получили первую и последнюю строки матрицы Λ. Рассчитаем вероятности для средней строки. Рассмотрим ситуацию

$$1 \to 0 \tag{11.16}$$

В этом случае одна из линий была на ремонте, который закончился к моменту времени h, а другой линии не требовался ремонт вообще (рис. 11.5).

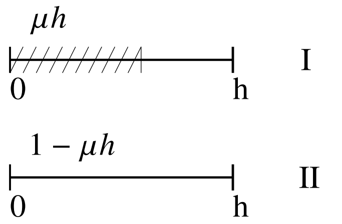

Рис. 11.5: Иллюстрация к решению.

Тогда, согласно аналогичным выше рассуждениям, получаем

$$\pi_{01} = \mu h\,(1 - \lambda h) \cdot 2 \tag{11.17}$$

Однако данная формула неверна. Отметим, что вероятность (11.17) – условная, поэтому по определению ее можно расписать в виде

$$\pi_{01}(h) = \frac{P\,(\xi(0) = 1,\ \xi(h) = 0)}{P\,(\xi(0) = 1)} \tag{11.18}$$

Найдем

$$P\,(\xi(0) = 1) = P\,(\xi_I(0) = 1, \xi_{II}(0) = 0) + (I \leftrightarrow II) + 2 \cdot P\,(\xi_I = 1) \cdot P\,(\xi_{II} = 0) \tag{11.19}$$

Для числителя

$$\begin{aligned} P\,(\xi(0) = 1, \xi(h) = 0) &= P\,(\xi_I(0) = 1, \xi_I(h) = 0; \xi_{II}(0) = 0, \xi_{II}(h) = 0) + (I \leftrightarrow II) = \\ &= 2P\,(\xi_I(0) = 1, \xi_I(h) = 0) \cdot P\,(\xi_{II}(0) = 0, \xi_{II}(h) = 0) \end{aligned} \tag{11.20}$$

При делении двойки сокращаются

$$\begin{aligned} \pi_{01}(h) &= \frac{P\,(\xi_I(0) = 1,\ \xi_I(h) = 0)}{P\,(\xi_I(0) = 1)} \cdot \frac{P\,(\xi_{II}(0) = 0,\ \xi_{II}(h) = 0)}{P\,(\xi_{II}(0) = 0)} = \\ &= \pi_{01}^{(I)}(h) \cdot \pi_{00}^{(II)}(h) \approx \mu h\,(1 - \lambda h) \approx \mu h \end{aligned} \tag{11.21}$$

Поэтому формула (11.17) на самом деле неверна. Формально это можно объяснить тем, что

$$\frac{a+b}{c+d} \neq \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \tag{11.22}$$

Отметим, что в предыдущих случаях подобной проблемы не возникало, так как ранее в знаменателе было одно слагаемое

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \tag{11.23}$$

так как ситуация типа $\xi(0) = 0$ или $\xi(0) = 2$ есть симметричная ситуация (ситуация, инвариантная относительно перестановки двух линий).

Аналогично можно рассмотреть переход

$$1 \to 1 \tag{11.24}$$

В этом случае возможно два случая. Возможно, одна из линий была на ремонте и она ремонтировалась весь рассматриваемый промежуток времени (рис. 11.6).

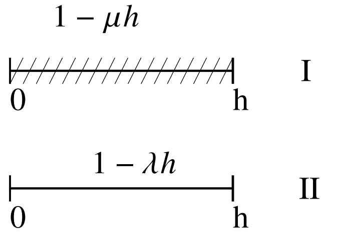

Рис. 11.6: Иллюстрация к решению.

Однако возможна и другая ситуация (рис. 11.7). Одна линия находилась на ремонте изначально, ее ремонт закончился до момента h. Другая же линия не была на ремонте, но сломалась в некоторый промежуточный момент времени и ее ремонт не закончился к моменту h.

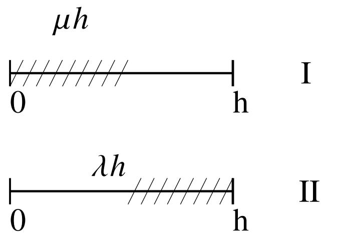

Рис. 11.7: Иллюстрация к задаче.

Однако данную ситуацию мы не рассматриваем, так как она имеет второй порядок малости по h. В ситуации же на рис. 11.6 также имеет место обратная ситуация (если переставить друг с другом линии). Однако в ответе нет 2 по причине, описанной ранее.

Поэтому получаем

$$\pi_{11}(h) \approx (1 - \mu h)(1 - \lambda h) \approx 1 - (\mu + \lambda) h \tag{11.25}$$

Рассмотрим переход

$$1 \to 2 \tag{11.26}$$

Он соответствует рис. 11.8.

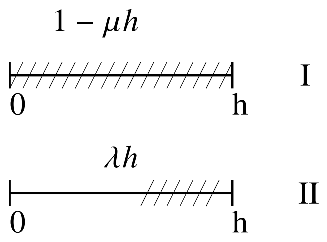

Рис. 11.8: Иллюстрация к задаче.

Поэтому

$$\pi_{12}(h) \approx \lambda h \tag{11.27}$$

Семинар 12. Среднеквадратичные свойства случайного процесса.

Некоторые полезные утверждения.

Если есть последовательность случайных величин, которая принадлежит пространству гильбертовых случайных величин $\{\alpha_n\} \subset \mathcal{H}$ и норма

$$\|\alpha_n - \alpha\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{12.1}$$

для некоторой $\alpha \in \mathcal{H}$, то имеет место ходимость по норме

$$\|\alpha_n\|^2 \to \|\alpha\|^2 \tag{12.2}$$

то есть

$$M|\alpha_n|^2 \to M|\alpha|^2 \tag{12.3}$$

и

$$M\alpha_n \to M\alpha \tag{12.4}$$

Таким образом, если есть сходимость по норме, то имеет место сходимость математических ожиданий квадратов модуля (12.3), а также сходимость математических ожиданий как таковых (12.4). Это значит, что взятие математического ожидания и знак предельного перехода можно менять местами

$$M\left(\lim \alpha_n\right) = \lim M\alpha_n \tag{12.5}$$

Если $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$, последовательности $\{\alpha_n\} \subset \mathcal{H}$, $\{\beta_n\} \subset \mathcal{H}$ и есть сходимость по двум разным последовательностям, то есть

$$\alpha_n \to \alpha \tag{12.6}$$

$$\beta_m \to \beta \tag{12.7}$$

то скалярное произведение сходится

$$(\alpha_n, \beta_m) \to (\alpha, \beta) \tag{12.8}$$

то есть ковариация сходится

$$cov\,(\alpha_n, \beta_m) \to cov\,(\alpha, \beta) \tag{12.9}$$

Задача 1.

Пусть $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ – среднеквадратично дифференцируемый случайный процесс. Найти коэффициент ковариации $cov\left(\dot{\xi}(t), \xi(s)\right)$ и $cov\left(\dot{\xi}(t), \int\limits_a^b \xi(s)ds\right)$, зная, что

$$R(t,s) = cov\left(\xi(t), \xi(s)\right) = M\xi(t)\overline{\xi(s)}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \tag{12.10}$$

Решение. По определению

$$\dot{\xi}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi(t++h_n) - \xi(t)}{h_n}, \quad h_n \to 0 \tag{12.11}$$

где предел понимается в смысле среднеквадратичной сходимости. Обозначим

$$\frac{\xi(t++h_n) - \xi(t)}{h_n} = \Delta_n \tag{12.12}$$

Тогда

$$\|\dot{\xi} - \Delta_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{12.13}$$

Здесь

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}(t) \tag{12.14}$$

По определению ковариация

$$cov\left(\dot{\xi}(t), \xi(s)\right) = \left(\dot{\xi}, \widetilde{\xi}\right) = \left(\lim \Delta_n, \widetilde{\xi}\right) = \lim\left(\Delta_n, \widetilde{\xi}\right) \tag{12.15}$$

с вероятностью 1. Здесь $\xi(s) = \widetilde{\xi}$.

Посчитаем скалярное произведение

$$\left(\Delta_n, \widetilde{\xi}\right) = M\frac{\xi(t+h_n) - \xi(t)}{h_n}\overline{\xi(s)} = \frac{M\xi(t+h_n)\cdot\overline{\xi(s)} - M\xi(t)\overline{\xi(s)}}{h_n} =$$
$$= \frac{R(t+h_n, s) - R(t,s)}{h_n} \underset{h_n\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial R}{\partial t}(t,s) \tag{12.16}$$

Тогда получаем

$$cov\left(\dot{\xi}(t), \xi(s)\right) = \frac{\partial R}{\partial t}(t,s) \tag{12.17}$$

Посчитаем вторую ковариацию, требуемую в задаче. Пусть

$$c = cov\left(\dot{\xi}(t), \int\limits_a^b \xi(s)ds\right) \tag{12.18}$$

Пусть

$$\int_a^b \xi(s)ds = \lim_{m\to\infty} Y_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi(s_k^*)\left(s_k - s_{k-1}\right) \tag{12.19}$$

где

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b \tag{12.20}$$

максимальная длина разбиения

$$\underset{1\leqslant k\leqslant n}{max}\ (s_k - s_{k-1}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{12.21}$$

а точки берутся на сегментах разбиения

$$s_k^* \in [s_{k-1}, s_k] \tag{12.22}$$

Тогда

$$c = cov\left(\dot{\xi}(t), \int_a^b \xi(s)ds\right) = \left(\lim_{m\to\infty} Y_m\right) = \lim_{n,m\to\infty} (\Delta_n, Y_m) \tag{12.23}$$

Здесь мы воспользовались тем, что знак предела можно вынести из скалярного произведения. Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned}(\Delta_n, Y_m) = M\frac{\xi(t+h_n)-\xi(t)}{h_n}\cdot\overline{\sum_{k=1}^{m}\xi(s_k^*)\left(s_k - s_{k-1}\right)} = \\ = \sum_{k=1}^{m}\frac{R(t+h_n, s_k^*) - R(t, s_k^*)}{h_n}(s_k - s_{k-1})\end{aligned} \tag{12.24}$$

Найдем предел вида

$$\lim_{n\to\infty,\ k=fix} \frac{R(t+h_n, s_k^*) - R(t, s_k^*)}{h_n} = \frac{\partial R}{\partial t}\left(t, s_k^*\right) \tag{12.25}$$

Поэтому

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\Delta_n, Y_m) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial R}{\partial t}\left(t, s_k^*\right)(s_k - s_{k-1}) = \int_a^b \frac{\partial R}{\partial t}(t,s)ds \tag{12.26}$$

Отметим один тонкий момент, на который следует обратить внимание. Ранее мы вывели предел скалярного произведения как последовательный (сначала предел по n при фиксированном разбиении, а потом – по разбиению). Возникает вопрос, действительно ли справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cdot) \stackrel{?}{=} \lim_{n,m\to\infty}(\cdot) \tag{12.27}$$

При вычислении предела вида

$$\lim_{n\to\infty}(\cdot) \tag{12.28}$$

получаем утверждение вида

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon, m): \quad |\ldots| < \varepsilon \;\text{ если }\; n > N(\varepsilon, m) \tag{12.29}$$

Однако в общем случае номер $N(\varepsilon, m)$ зависит от индекса m и если мы стремим $m \to \infty$, то мы не можем гарантировать, что и N не уйдут к ∞. В сущности правый предельный переход в (12.27) утверждает, что всякий раз, когда m и n достаточно большие, член последовательности мало отличается от предела. Однако в случае предела (12.28), который присутствует в левой части (12.27), мы получаем, что член последовательности стремится к пределу, если n больше некоторого достаточно большого числа, которое зависит от m. То есть может быть так, что $m \to \infty$ так, что и $N \to \infty$, а тогда конструкция (12.29) не имеет смысла.

Вообще говоря, данный момент нужно проверять дополнительно. Мы не будем это проверять, просто отметим, что в данном случае равенство (12.27) действительно обосновано.

Задача 2.

Пусть $\xi(t), t \geqslant 0$ – среднеквадратично непрерывный процесс. Доказать

$$\xi(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \xi(s)ds, \quad t > 0 \tag{12.30}$$

Решение. Введем случайный процесс $\eta(t), t \geqslant 0$

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds \tag{12.31}$$

Положим

$$H_n = \frac{\eta(t+h_n) - \eta(t)}{h_n} = \left(\int_0^{t+h_n} - \int_0^t\right)\xi(s)ds\frac{1}{h_n} = \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n}\xi(s)ds \tag{12.32}$$

Пусть для краткости

$$\dot{\eta} = \eta(t) = \lim H_n \tag{12.33}$$

и

$$\xi = \xi(t) \tag{12.34}$$

Нам нужно сравнить эти две величины. Для этого вычислим квадрат нормы их разности

$$\|\xi - \dot{\eta}\|^2 = \|\xi - \lim H_n\|^2 = \lim \|\xi - H_n\|^2 \tag{12.35}$$

Теперь вычислим норму

$$\|\xi - H_n\|^2 = \|\xi\|^2 - (\xi, H_n) - (H_n, \xi) + \|H_n\|^2 \tag{12.36}$$

Первое слагаемое

$$\|\xi\|^2 = D\xi = R(t,t) \tag{12.37}$$

Рассмотрим последнее слагаемое

$$\|H_n\|^2 = MH_n\overline{H_n} = M\frac{1}{h_n}\int\limits_t^{t+h_n}\xi(s)ds \cdot \overline{\frac{1}{h_n}\int\limits_t^{t+h_n}\xi(u)du} = \frac{1}{h_n^2}\iint\limits_t^{t+h_n} M\xi(s)\overline{\xi(u)}dsdu = \\ = \frac{1}{h_n^2}\iint\limits_t^{t+h_n} R(s,u)dsdu = R\left(s_n^*, t_n^*\right) \tag{12.38}$$

где

$$s_n^*, t_n^* \in [t, t+h_n] \tag{12.39}$$

Здесь мы воспользовались теоремой о среднем.

Поэтому

$$\|H_n\|^2 \underset{h_n \to 0}{\longrightarrow} R(t,t) \tag{12.40}$$

Рассмотрим слагаемое

$$(H_n, \xi) = M\frac{1}{h_n}\int\limits_t^{t+h_n}\xi(s)ds \cdot \overline{\xi(t)} = \frac{1}{h_n}\int\limits_t^{t+h_n} R(s,t)ds = R\left(s_n^{**}, t\right) \tag{12.41}$$

где

$$s_n^{**} \in [t, t+h_n] \tag{12.42}$$

Здесь мы также воспользовались теоремой о среднем. Поэтому

$$(H_n, \xi) \underset{h_n \to 0}{\longrightarrow} R(t,t) \tag{12.43}$$

Посложнее слагаемое можно найти комплексным сопряжением предыдущего

$$(\xi, H_n) = \overline{(H_n, \xi)} \to \overline{R(t,t)} = R(t,t) \tag{12.44}$$

Тогда получаем

$$\|\xi - \dot{\eta}\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left[\|\xi\|^2 - (\xi, H_n) - (H_n, \xi) + \|H_n\|^2 \right] = 0 \tag{12.45}$$

Все выражение стремится к нулю, так как ранее бы доказали, что все слагаемые стремятся к $R(t,t)$. Поэтому получаем

$$M\left|\xi - \dot{\eta}\right|^2 = 0 \tag{12.46}$$

что равносильно тому, что $\xi = \dot{\eta}$ с вероятностью 1.

Таким образом, равенство (12.30) доказано. Отметим, что это равенство понимается как равенство случайных величин, то есть с вероятностью 1. Итак, получили формулу дифференцирования интеграла по верхнему пределу.

Аналогично можно получить некоторые другие формулы. Например,

$$\frac{d}{dt}\left(\xi(t) \cdot a(t)\right) = \dot{\xi}(t)a(t) + \xi(t)\dot{a}(t) \tag{12.47}$$

где $a(t)$ – неслучайная функция.

Задача 3.

Найти среднеквадратичный интеграл от процесса Винера $\int\limits_0^T w(t)dt$, где $w(t), t \geqslant 0$ – процесс Винера с $\sigma^2 = 1$. При этом

$$Mw(t) = 0, \quad Dw(t) = t \tag{12.48}$$

Решение. Отметим, что в ответе мы получим некоторую случайную величину, поэтому её аналитическое выражение на самом деле не играет никакой роли. Нам нужно только ее распределение. Обозначим интеграл

$$I = \int\limits_0^T w(t)dt = \lim S_n \tag{12.49}$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} w(t_k^*)\left(t_k - t_{k-1}\right) \tag{12.50}$$

Отметим, что процесс w является среднеквадратично непрерывным, следовательно, он среднеквадратично интегрируем. Поэтому неважно, как выбирать t_k^* и t_k, так как данная интегральная сумма будет сходиться к I в среднеквадратичном смысле. Поэтому возьмем выборочную точку на правом конце интервала $t_k^* = t_k$, а также положим

$$t_k - t_{k-1} = \frac{T}{n} \tag{12.51}$$

Обозначим приращение

$$\Delta w_k = w(t_k) - w(t_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, n \tag{12.52}$$

Тогда сам процесс складывается из приращений

$$w(t_k) = \sum_{j=1}^{k} \Delta w_j \tag{12.53}$$

Тогда получим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \leqslant k} \Delta w_j \cdot \frac{T}{n} = \sum_{j=1}^{n} \Delta w_j \sum_{k=j}^{n} 1 \cdot \frac{T}{n} = \sum_{j=1}^{n} \Delta w_j \, (n - j + 1) \cdot \frac{T}{n} \tag{12.54}$$

Итак, мы получили, что введенная интегральная сумма на самом деле есть сумма независимых нормальных случайных величин, так как по условию $\Delta w_j, \quad j = 1, \ldots, n$ – независимые случайные величины, причем

$$\Delta w_j \in \mathbb{N}\left(0, \frac{T}{n}\right) \tag{12.55}$$

Значит, мы знаем распределение суммы

$$S_n \in \mathbb{N}\left(0, d_n^2\right) \tag{12.56}$$

Посчитаем дисперсию интегральной суммы

$$d_n^2 = \frac{T^2}{n^2} \sum_{j=1}^{n} D\Delta w_j \, (n - j + 1)^2 = \frac{T^3}{n^3} \sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{T^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{T^3}{3} \tag{12.57}$$

где введено обозначение $m = n - j + 1$.

Характеристическая функция случайной величины S_n, которая распределена нормально по закону

$$S_n \in \mathbb{N}\left(0, d_n^2\right) \tag{12.58}$$

По определению эта характеристическая функция

$$\varphi_n(z) \overset{def}{=} Me^{izS_n} = e^{-\frac{z^2}{2}d_n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{T^3}{3}} = \varphi(z) \quad \forall z \in \mathbb{R} \tag{12.59}$$

где $\varphi(z)$ – характеристическая функция $\mathbb{N}\left(0, \frac{T^3}{3}\right)$.

Существует теорема, утверждающая, что их сходимости характеристических функций следует сходимость распределений. Поэтому получаем

$$S_n \xrightarrow{d} \widetilde{I} \in \mathbb{N}\left(0, \frac{T^3}{3}\right) \tag{12.60}$$

по распределению. При этом

$$S_n \xrightarrow{\text{с.к.}} I \tag{12.61}$$

отсюда следует

$$S_n \xrightarrow{d} I \tag{12.62}$$

а отсюда получаем

$$I = \widetilde{I} \tag{12.63}$$

с вероятностью 1.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ