ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА ДЛЯ ФИЗИКОВ

СОКОЛОВ
ДМИТРИЙ ДМИТРИЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

ДМИТРИЯ САЛЬНИКОВА

Содержание

Лекция 1 **4**
Введение 4

Лекция 2 **9**
Построение меры Лебега 9

Лекция 3 **18**
Свойства меры Лебега 18

Лекция 4 **25**
Измеримые функции 25

Лекция 5 **30**
Свойства интеграла Лебега 30

Лекция 6 **36**
Предельный переход под знаком интеграла Лебега 36

Лекция 7 **43**
Пространство $\mathbb{L}_2$ 43
Решение уравнения теплопроводности для скалярного поля 45

Лекция 8 **47**
Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в движущейся среде 47

Лекция 9 **51**
Формула Каца-Фейнмана 51

Лекция 1

Введение

Для начала, чтобы понять, откуда возникает идея меры и интеграла Лебега, необходимо обсудить, чем физиков не устраивает интеграл Римана. Вспомним, как в стандартном курсе математического анализа трактуется это понятие, и где там возникает мера.

Начнём с понятия меры. Довольно очевидно, что в математике есть несколько идейно похожих величин, например, площадь плоской области и объём тела в трёхмерном пространстве или длина кривой и площадь поверхности тела. Так же в качестве примера можно привести распределение электрического заряда, вероятности и так далее. Возникает желание объединить все эти схожие величины в единую абстрактную математическую концепцию, которая их обобщает. Этот подход открывает широкие перспективы.

Вспомним теперь, как в курсе математического анализа понимается интеграл. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$. Разобьём отрезок $[a, b]$ на малые части $[x_i, x_{i+1}]$ длиной Δx_i, выберем промежуточные точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и вычислим значения функции в точках $f(\xi_i)$ (Рис. 1).

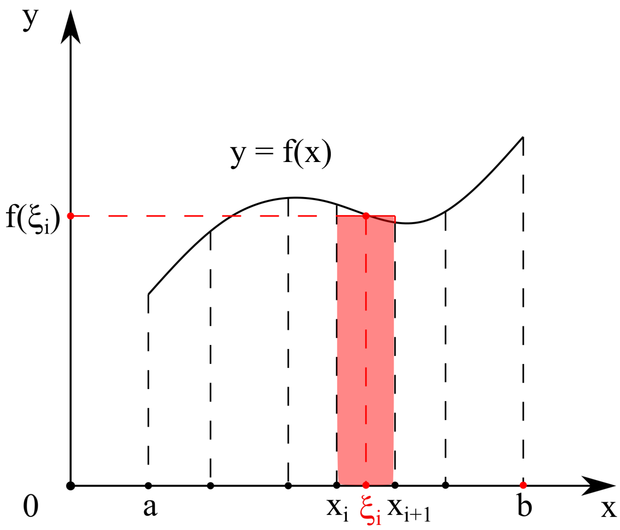

Рис. 1. Построение интеграла Римана

Рассмотрим интегральную сумму:

$$\sigma_n(T, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1}$$

Интегралом Римана называется предел (если он существует) интегральных сумм

(1) при стремлении диаметра разбиения $\Delta = \sup\limits_i \Delta x_i$ к нулю при произвольных разбиениях отрезка $[a, b]$ и произвольных выборах промежуточных точек ξ_i:

$$I \stackrel{\text{def}}{\equiv} \lim_{n\to\infty} \sigma_n(T, \Xi) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Оказывается, что не все функции интегрируемы в смысле (2). Известный пример неинтегрируемой функции - это функция Дирихле:

$$D(x) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}. \end{cases} \tag{3}$$

В любом сколь угодно малом отрезке есть точки и с рациональными координатами, и с иррациональными. Если выбирать в качестве ξ_i точки с рациональными координатами, интеграл будет равен $(b - a)$, а если брать точки с иррациональным координатами - 0.

В связи с этим возникает желание обобщить понятие интеграла. Однако, это не единственная причина. Как оказывается, заведомо невозможно ввести наиболее общее определение интеграла так, чтобы любая функция была интегрируема. При усложнении конструкции интеграла теряются основные свойства интеграла Римана. В этом смысле интеграл Лебега является наиболее удачным: он сильно расширяет класс интегрируемых функций, при этом сохраняет наиболее важные свойства.

Основная же причина, почему интеграл Римана неудобен для физиков, заключается в области интегрирования. В физике наиболее распространены интегралы по двумерным поверхностям и трёхмерным телам. Уже при построении двумерных интегралов возникают существенные проблемы при измельчении областей. Например, при определённой аппроксимации цилиндра возникает так называемый «сапог Шварца», случай, при котором интеграл по цилиндру может быть равен любой наперёд заданной величине.

Если построение интеграла Римана для областей в конечномерных пространствах ещё возможно, пусть и с определёнными трудностями, то для бесконечномерных пространств такой подход абсолютно неприменим. Например, объём n - мерного куба со стороной a задаётся формулой $V_n = a^n$, следовательно, если $a > 1$, эта величина стремится к бесконечности, если $a < 1$ - к нулю, если $a = 1$ к единице. Однако в физике бесконечномерные пространства играют существенную роль. Так, гильбертово пространство чистых состояний в квантой механике является бесконечномерным.

Вернёмся к понятию площади по Жордану из курса математического анализа. Рассмотрим множество A на плоскости. Рассмотрим все возможные описанные (P) и вписанные (Q) многоугольники (Рис. 2)

Считаем, что площади многоугольников нам известны. Очевидно, что

$$S(Q) \leqslant S(P). \tag{4}$$

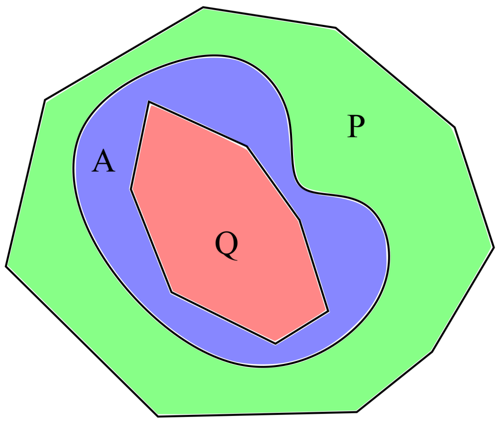

Рис. 2. Построение площади по Жордану

Введём нижнюю и верхнюю площади:

$$\underline{S} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \sup_{Q} S(Q), \tag{5}$$

$$\overline{S} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \inf_{P} S(P). \tag{6}$$

Для них, очевидно, справедливо:

$$\underline{S} \leqslant \overline{S}. \tag{7}$$

Если $\underline{S} = \overline{S} = S$, то говорят, что множество A квадрируемо по Жордану и имеет площадь S.

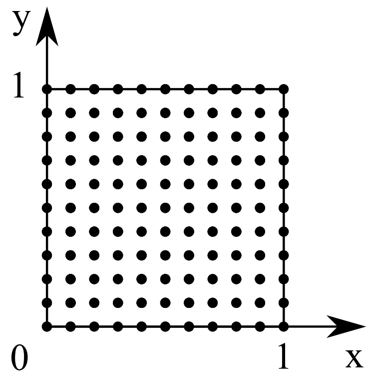

Рис. 3. Пример множества неквадрируемого по Жордану

Легко привести пример неквадрируемого множества. Рассмотрим точки единичного квадрата с координатами, являющимися рациональными числами (Рис. 3). Верхняя площадь Жордана равна $\overline{S} = 1$, а нижняя $\underline{S} = 0$, следовательно, данное множество неквадрирумо.

Хотя с другой стороны, следовало бы ожидать, что площадь данного множества равна нулю. В самом деле, площадь каждой точки равна нулю. Так как множество счётно, занумеруем каждую точку. Окружим n - ую точку кругом радиуса $r_n = \varepsilon/2^n$. Рассмотрим ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\varepsilon^2}{2^{2n}}. \tag{8}$$

Очевидно, что он сходится и при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю. Проблема подхода Жордана заключается в том, что мы хотим покрывать множество многоугольниками с конечным числом сторон. Если бы число сторон могло бы быть счётным, мы сразу же получили бы, что площадь данного множества равна нулю. Такой подход близок к понятию меры Лебега.

Обсудим, каким образом вводится понятие площади многоугольника. Для начала мы принимаем, что площадь квадрата со стороной a равна $S = a^2$, затем постулируем, что равносоставленные фигуры равновелики, и что площадь объединения непересекающихся множеств равна сумме их площадей (аддитивность площади):

$$S\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} S(A_k), \tag{9}$$
$$A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

Оказывается, что для введения объёма многогранника данный подход уже неприменим, и требуется понятие предельного перехода.

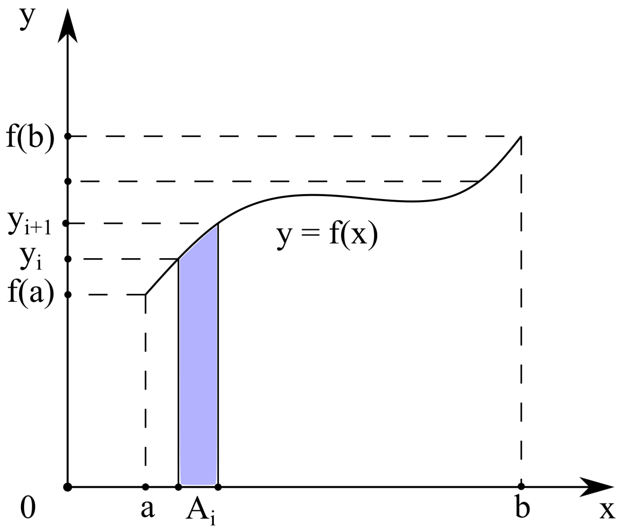

Рис. 4. Построение интеграла Лебега

Выясним, как можно ввести понятие интеграла так, чтобы избавится от трудностей с определением площади и объёма. Для этого поступим следующим образом:

разобьём на части не область определения функции, а область её значения (Рис. 4). Каждому интервалу $[y_i, y_{i+1}]$ будет соответствовать некоторое множество A_i. Интегральную сумму построим следующим образом:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i), \tag{10}$$

где $\mu(A_i)$ - мера прообраза A_i.

Такое построение удобно тем, что область определения функции уже не имеет значения. Главное, чтобы на нём была задана мера, аналогичная понятию площади.

Введём определение меры. Мера - это числовая функция, заданная на некотором наборе множеств $\mathfrak{A}$. Мы будем рассматривать в качестве наборов множеств борелевские алгебры. Борелевской алгеброй (или σ - алгеброй) называется система множеств, над которой все операции теории множеств можно выполнять в счётном числе операций. Мера должна обладать следующими свойствами:

$$\mathbf{1}. \quad \mu(A) \geqslant 0, \tag{11}$$

$$\mathbf{2}. \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j. \tag{12}$$

Второе свойство называется счётной аддитивностью меры.

Оказывается, что подход, основанный на интеграле Лебега, позволяет избавиться от большого числа недоработок в теории интеграла Римана. Интеграл Лебега позволяет ввести полное пространство $\mathbb{L}_2$ с нормой

$$||y|| = \sqrt{\int_a^b y^2(x)\mathrm{d}x}, \tag{13}$$

чего не удаётся сделать с помощью интеграла Римана.

Лекция 2

Построение меры Лебега

Для построении теории интеграла Лебега нам необходима борелевская алгебра и определённая на ней счётно-аддитивная мера. Для того, чтобы изложение не было слишком абстрактным, воспроизведём его в двумерном случае, но нигде в изложении свойства плоскости использоваться не будут, что позволяет обобщить формальную схему построения на размерности высших порядков. В дальнейшем мы обсудим расширение понятия меры Лебега в более абстрактных теориях.

Будем считать, что все рассматриваемые множества находятся внутри некоторого единичного множества, мера которого равна единице. То есть мы пока не будем рассматривать построение меры на всей плоскости. Также пока не будем касаться вопроса об инвариантности меры в различных системах отсчёта. Для иллюстрации мы будем всё время представлять, что самые простые множества - это прямоугольники, стороны которых параллельны координатным осям, мера которых равна произведению их сторон: $\mu(A) = S = ab$.

У таких прямоугольников будут следующие свойства:

1. Пересечение двух прямоугольников образует прямоугольник (Рис. 5).

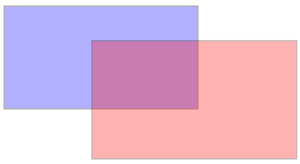

Рис. 5. Пересечение прямоугольников

2. Если в прямоугольнике A содержится прямоугольник A_1, то мы можем, используя конечный набор прямоугольников, $A_2, ...A_n$, достроить A_1 до A (Рис. 6):

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i. \tag{14}$$

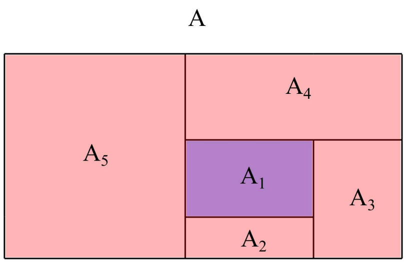

Рис. 6. Иллюстрация свойства 2

Такой набор множеств называется *полукольцом.* Построенный таким образом набор множеств обладает счётно - аддитивной мерой:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i), \tag{15}$$
$$A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

Обсудим свойства полученного полукольца. Аналогом многоугольников будет множество, которое представляет собой объединение конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников (Рис. 7). Такие множества мы будем называть *элементарными*:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k, \tag{16}$$
$$P_i \cap P_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

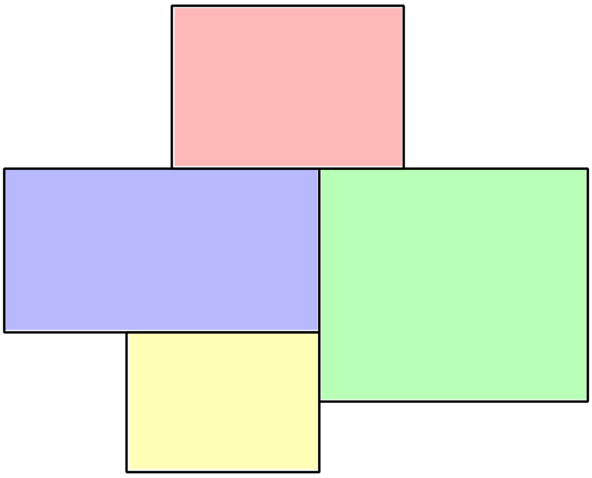

Рис. 7. Пример элементарного множества

Легко показать, что набор элементарных множеств образует алгебру (но не борелевскую): они все принадлежат единичному множеству, их дополнения так же элементарные множества, пересечение элементарных множеств также элементарное множество:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} P_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j, \tag{17}$$

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} (P_i \cap Q_j). \tag{18}$$

Естественно считать, что мера элементарного множества равна сумме мер составляющих его прямоугольников:

$$m'(A) = \bigcup_{i=1}^{n} m(P_i). \tag{19}$$

Причём стоит отметить, что мера в левой части равенства (18) задана на алгебре элементарных множеств, а мера в правой части - на полукольце прямоугольников (это обозначено штрихом).

Очевидно, что можно по-разному разбивать элементарное множество на прямоугольники:

$$A = \bigcup_i P_i = \bigcup_j Q_j. \tag{20}$$

Однако, мера элементарного множества от выбора разбиения не зависит. Действительно

$$A = \bigcup_{i,j} (P_i \cap Q_j) \quad \Rightarrow \quad m'(A) = \sum_{i,j} m(P_i \cap Q_j). \tag{21}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть элементарное множество A содержится в объединении конечного или счётного набора элементарных множеств A_n:

$$A \subset \bigcup_n A_n. \tag{22}$$

Тогда для меры множества A справедливо:

$$m'(A) \leqslant \sum_n m(A_n). \tag{23}$$

Доказательство.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Отступим от всех границ элементарного множества A на малую величину так, чтобы мера вложенного элементарного множества A' отличалось бы от меры исходного на $\varepsilon/2$ (Рис. 8):

$$m'(A) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant m'(A') \leqslant m(A). \tag{24}$$

С множествами A_n поступим наоборот. Введём множества $\tilde{A}_n$, которые содержат A_n и являются открытыми (Рис. 9), мера которых отличается от меры A_n на $\varepsilon/2^n$:

$$m'(A_n) \leqslant m'(\tilde{A}_n) \leqslant m(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{25}$$

Из (22) и построения множеств A' и $\tilde{A}_n$ следует, что

$$A' \subset \bigcup_n \tilde{A}_n. \tag{26}$$

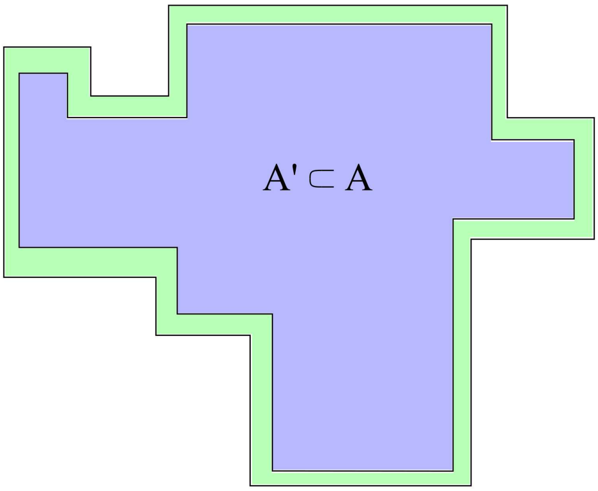

Рис. 8. Иллюстрация к теореме

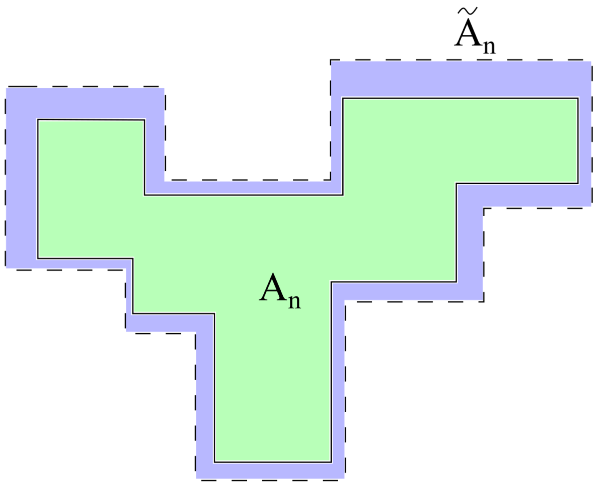

Рис. 9. Иллюстрация к теореме

Применим к системе множеств (26) *лемму Гейне - Бореля*, которая утверждает, что из счётного покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Тогда счётное объединение (26) можно заменить на конечное объединение:

$$A' \subset \bigcup_{n=1}^{N} \tilde{A}_n. \tag{27}$$

Для меры множеств будет справедливо:

$$m'(A') \leqslant \sum_{n=1}^{N} m'(\tilde{A}_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(\tilde{A}_n). \tag{28}$$

Из (24), (25) и (28) получим:

$$m'(A) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant m'(A') \leqslant \sum_{n=1}^{N} m'(\tilde{A}_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(\tilde{A}_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{29}$$

Из (29) следует

$$m'(A) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{30}$$

Так как $m'(A)$ и $m'(A_n)$ не зависят от ε, можем устремить ε к нулю. Тогда получим требуемое утверждение:

$$m'(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n). \tag{31}$$

Что и требовалось доказать.

Докажем, что построенная мера счётно - аддитивна.

Теорема 2. Пусть A является счётным объединением попарно непересекающихся множеств A_n:

$$A \bigcup_n A_n, \tag{32}$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

Тогда

$$m'(A) = \sum_n m'(A_n). \tag{33}$$

Доказательство.

Возьмём конечное число множеств A_n. Тогда, очевидно,

$$A \supset \bigcup_{n=1}^{N} A_n. \tag{34}$$

и следовательно

$$m'(A) \geqslant \sum_{n=1}^{N} m'(A_n). \tag{35}$$

Перейдём в (35) к пределу $N \to \infty$:

$$m'(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n). \tag{36}$$

Но с другой стороны, по теореме 1:

$$m'(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n). \tag{37}$$

Из (36) и (37) следует требуемое равенство:

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n). \tag{38}$$

Что и требовалось доказать.

Теперь мы можем перейти к конструкции меры Лебега. При построении меры Жордана использовалось понятие верхней и нижней меры. Такой же подход можно использовать для построения меры Лебега. Для сокращения мы приведём формулировку верхней меры Лебега, и обсудим как можно ввести нижнюю меру.

Рассмотрим произвольное множество A. Покроем его конечным или счётным множеством прямоугольников P_k (Рис. 10):

$$A \subset \bigcup_k P_k. \tag{39}$$

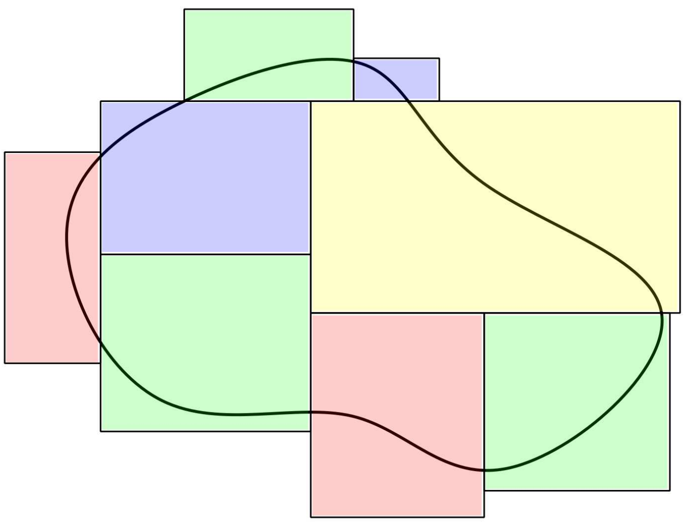

Рис. 10. Покрытие множества A

Введём *верхнюю меру Лебега*:

$$\mu^*(A) = \inf \sum_k m(P_k), \tag{40}$$

$$A \subset \bigcup_k P_k.$$

Отметим, что верхняя мера Лебега мерой не является, так как для неё не справедливо свойство аддитивности.

Очевидно, что для элементарного множества мера и верхняя мера совпадают:

$$\mu^*(A) = m'(A). \tag{41}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть множество A покрыто конечным или счётным набором множеств A_n:

$$A \subset \bigcup_n A_n. \tag{42}$$

Тогда

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n). \tag{43}$$

Доказательство.

Покроем множество A_n прямоугольниками P_{nk}. Можно выбрать такое ε, что

$$\mu^*(A_n) \leqslant \sum_k m(P_{nk}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{44}$$

Просуммируем последнее неравенство по n:

$$\sum_{n,k} m(P_{nk}) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon. \tag{45}$$

С другой стороны

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n,k} m(P_{nk}). \tag{46}$$

Из (44) и (45), переходя к пределу $\varepsilon \to 0$, получим:

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n). \tag{47}$$

Что и требовалось доказать.

В частности, получим

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B), \tag{48}$$

$$A \subset B.$$

Теперь мы можем ввести понятие множества, измеримого по Лебегу и само понятие меры Лебега.

Определение. Множество A называется *измеримым по Лебегу* тогда и только тогда. когда для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество B такое, что $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$ (где Δ - симметрическая разность). Верхняя мера такого множества называется *мерой Лебега*:

$$\mu(A) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \mu^*(A). \tag{49}$$

Нам осталось доказать, что система множеств A является борелевской алгеброй, а мера Лебега счётно-аддитивна. Для этого необходимо доказать следующие утверждения.

Теорема 4. Если множество A измеримо по Лебегу, то его дополнение $E \setminus A$ также измеримо по Лебегу.

Доказательство

По условию

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists B : \mu^*(A\Delta B) < \varepsilon. \tag{50}$$

Рассмотрим множество $E \setminus B$. Оно также является элементарным. В силу того, что

$$(E \setminus A)\Delta(E \setminus B) = A\Delta B, \tag{51}$$

получим:

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists B' = (E \setminus B) : \mu^*((E \setminus A)\Delta(E \setminus B)) < \varepsilon. \tag{52}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 5. Если множества A_1 и A_2 измеримы по Лебегу, то их объединение $A_1 \cup A_2$ также измеримо по Лебегу.

Доказательство

Зафиксируем произвольное ε. По определению меры, существуют элементарные множества B_1 и B_2, такие, что

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(A_2\Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{53}$$

В качестве аппроксимации для $A_1 \cup A_2$ возмём $B_1 \cup B_2$. Справедливо

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2). \tag{54}$$

В силу (54) и теоремы 3 получим:

$$\mu^*((A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2)) \leqslant \mu^*(A_1\Delta B_1) + \mu^*(A_2\Delta B_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{55}$$

Что и требовалось доказать.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма. Для любых множеств A и B справедливо:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| < \mu^*(A\Delta B). \tag{56}$$

Доказательство

Очевидно, что

$$A \subset B \cup (A\Delta B). \tag{57}$$

Тогда по теореме 3

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B). \tag{58}$$

С другой стороны,

$$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A\Delta B). \tag{59}$$

Из (58) и (59) следует

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| < \mu^*(A\Delta B). \tag{60}$$

Что и требовалось доказать.

Лекция 3

Свойства меры Лебега

Теорема 6. Мера Лебега аддитивна, то есть

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n), \tag{61}$$
$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Доказательство

Достаточно провести доказательство для двух множеств A_1 и A_2. Зафиксируем произвольное ε. По определению меры существуют элементарные множества B_1 и B_2 такие, что

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon. \tag{62}$$

При доказательстве теоремы 5 мы показали, что множество $B = B_1 \cup B_2$ хорошо аппроксимирует множество $A = A_1 \cup A_2$. Для начала необходимо оценить меру множества B. Справедливо

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2). \tag{63}$$

По теореме 3 получим:

$$\mu^*(B_1 \cap B_2) \leqslant \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) \leqslant 2\varepsilon. \tag{64}$$

Для меры элементарного множества B справедливо:

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \geqslant m'(B_1) + m'(B_2) - 2\varepsilon. \tag{65}$$

Оценим верхнюю меру для $A \Delta B$ по теореме 3:

$$\mu^*(A \Delta B) \leqslant \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) \leqslant 2\varepsilon. \tag{66}$$

Тогда для меры множества A справедливо:

$$\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \mu^*(A \Delta B) \geqslant m'(B) - 2\varepsilon. \tag{67}$$

Подставляя (65) в (67) получим:

$$\mu^*(A) \geqslant m'(B_1) + m'(B_2) - 4\varepsilon. \tag{68}$$

Учитывая (62), получим:

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon. \tag{69}$$

Так как множества A, A_1, A_2 не зависят от ε, в неравенстве (69) можем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \tag{70}$$

С другой стороны, по теореме 3

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \tag{71}$$

Из (70) и (71) следует, что

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2), \tag{72}$$

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2). \tag{73}$$

Что и требовалось доказать.

Обсудим определение *нижней меры Лебега.* Для любого измеримого по Лебегу множества A, очевидно, справедливо

$$\mu(A) + \mu(E \setminus A) = 1. \tag{74}$$

По аналогии с равенством (74) можно ввести нижнюю меру Лебега для любого множества как:

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(A). \tag{75}$$

Соответственно, определять измеримое множество можно как множество, верхняя и нижняя меры которого совпадают. Однако данный подход немного более затруднительный, чем изложенный, так как в таком случае придётся доказывать теорему о том, что если верхняя и нижняя меры совпадают, существует элементарное множество, аппроксимирующее исследуемое множество.

Далее необходимо доказать, что построенная нами система множеств, измеримых по Лебегу, - борелевская алгебра. Так как все операции над множествами сводятся к объединению, нам фактически нужно доказать следующую теорему.

Теорема 7. Пусть задана последовательность измеримых по Лебегу множеств $A_1, A_2, ..., A_n, ...$. Тогда множество

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \tag{76}$$

также измеримое по Лебегу множество.

Доказательство

Для начала сделаем так, чтобы множества A_i не пересекались. Введём множества

$$A'_n = A_n \setminus \bigcup_{n} \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right). \tag{77}$$

Так как в последней формуле конечное число операций, A'_n также измеримое по Лебегу множество. Следовательно, мы можем без ограничения общности считать множества A_i непересекающимися.

Рассмотрим меру конечного объединение множеств A_i

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i). \tag{78}$$

С другой стороны это множество покрывается множеством A, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) < \mu^*(A). \tag{79}$$

Перейдём в формуле (79) к пределу при $N \to \infty$ и получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \mu^*(A). \tag{80}$$

Следовательно, остаток ряда (80) мал, что можно записать как:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 : \sum_{i=N_0+1}^{\infty} \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{81}$$

При этом множество

$$C = \bigcup_{i=1}^{N_0} A_i \tag{82}$$

измеримо, следовательно, существует элементарное множество B, такое, что

$$\mu^*(C \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{83}$$

Для симметрической разности множеств B и A справедливо

$$(B\Delta A) \subset (C\Delta A) \cup \left(\bigcup_{i=N_0}^{\infty} A_i\right), \tag{84}$$

следовательно,

$$\mu^*(B\Delta A) \leqslant \mu^*(C\Delta A) + \mu^*\left(\bigcup_{i=N_0}^{\infty} A_i\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{85}$$

Таким образом, получаем, что множество A измеримо.

Что и требовалось доказать.

Осталось доказать счётную аддитивность меры.

Теорема 8 (*Каратеодори*).

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \tag{86}$$
$$A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

Доказательство

При доказательстве предыдущей теоремы мы убедились, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \mu(A), \tag{87}$$

$$\text{где } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

С другой стороны множества A_i покрывают A, следовательно

$$\mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{88}$$

Учитывая (87) и (88), получим

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{89}$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим свойства меры.

Теорема 9 (*о непрерывности меры*). Рассмотрим систему вложенных множеств

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots \tag{90}$$

Возьмём их пересечение:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i. \tag{91}$$

Тогда

$$\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i). \tag{92}$$

Доказательство

Построим множества

$$A'_n = A \setminus A_n. \tag{93}$$

Тогда множества A'_n также будут содержаться друг в друге, а множество A' будет равно пустому множеству:

$$A' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A'_i = \varnothing. \tag{94}$$

Представим множества в следующем виде:

$$A'_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (A'_k \setminus A'_{k+1}). \tag{95}$$

Тогда

$$\mu(A'_n) = \sum_{k=n}^{\infty} (A'_k \setminus A'_{k+1}) \tag{96}$$

Заметим, что ряд для $\mu(A'_n)$ является остатком от ряда для $\mu(A'_1)$. Так как второй ряд сходится, то первый стремится к нулю при стремлении n к бесконечности, следовательно, мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) = 0. \tag{97}$$

С другой стороны $A' = \varnothing$, следовательно $\mu(A') = 0$. Таким образом,

$$\mu(A') = \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) = 0. \tag{98}$$

Из (98) следует утверждение теоремы.

Что и требовалось доказать.

Следствие. Для системы множеств

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ... \tag{99}$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \tag{100}$$

также справедливо

$$\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i). \tag{101}$$

Доказательство проводится аналогично, необходимо лишь перейти к дополнению исходных множеств.

Отметим, что мера обладает свойством *полноты*. Это означает, что если множество A таково, что $\mu(A) = 0$, то для любого $\tilde{A} \subset A$ справедливо $\mu(\tilde{A}) = 0$. Это следует из того, что если A измеримо, то для него можно подобрать такое элементарное множество B, что $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$. Очевидно, что для множества $\tilde{A}$ также справедливо $\mu^*(\tilde{A}\Delta B) < \varepsilon$.

Итак, мы построили меру Бореля, опираясь на счётно - аддитивную меру на полукольце, и можем определять площадь по Лебегу. Рассмотрим другой пример. Возьмём неубывающую функцию, которая может иметь разрывы, но при этом у неё всегда есть левый предел, которая на минус - бесконечности стремится к нулю, а на плюс - бесконечности - к единице (Рис. 11). Она имеет смысл функции распределения вероятности:

$$F(x) = P(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x')\mathrm{d}x'. \tag{102}$$

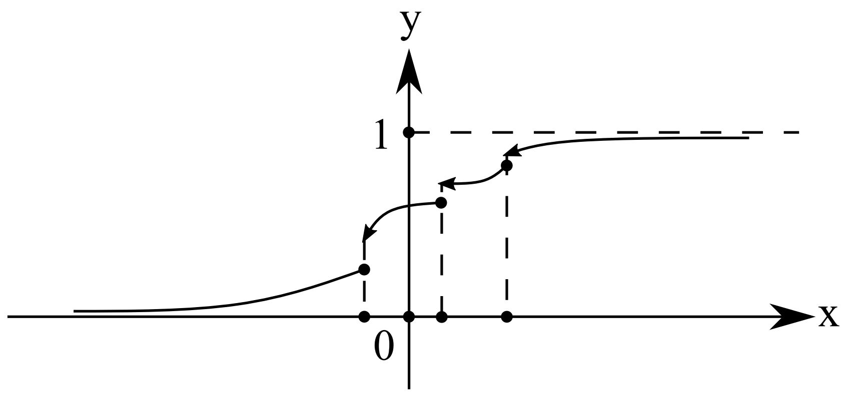

Рис. 11. Функция распределения вероятности

Введём следующую меру:

$$\begin{aligned}
m(a,b) &= F(b) - F(a+0), &(103)\\
m[a,b] &= F(b+0) - F(a), &(104)\\
m[a,b) &= F(b+0) - F(a+0), &(105)\\
m(a,b] &= F(b) - F(a). &(106)
\end{aligned}$$

Очевидно, что данный набор множеств - полукольцо, а мера счётно-аддитивна. У этой меры есть лебеговское продолжение - мера на прямой. Она почти полностью совпадает с обычной мерой, за исключением того, что точки разрыва функции $F(x)$ обладают ненулевой мерой, равной величине разрыва.

Рассмотрим вычисление математического ожидания некоторой случайной величины ξ. Для непрерывной случайной величины

$$\langle \xi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x, \tag{107}$$

для дискретной

$$\langle \xi \rangle = \sum_n x_n p_n. \tag{108}$$

Также существуют сингулярные случайные величины, для которых описание в терминах интеграла Римана или суммы невозможно.

С помощью же меры, порождённой функцей распределения вероятности $F(x)$, данную величину всегда можно записать с помощью интеграла Лебега - Стилтьеса:

$$\langle \xi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x \mathrm{d}F. \tag{109}$$

Рассмотрим вопрос о построении меры Лебега на бесконечной плоскости. Здесь возникает понятие σ - конечной меры. Для её построения необходимо разбить плоскость на ячейки E_{nm} (Рис. 12) с единичной мерой. Рассмотрим произвольное множество A. Обозначим через A_{mn} пересечение A с каждой ячейкой:

$$A_{mn} = A \cap E_{mn}. \tag{110}$$

Мы уже построили меру Лебега для A_{mn}. Тогда меру всего множества определим как

$$\mu(A) = \sum_{m,n} \mu(A_{mn}). \tag{111}$$

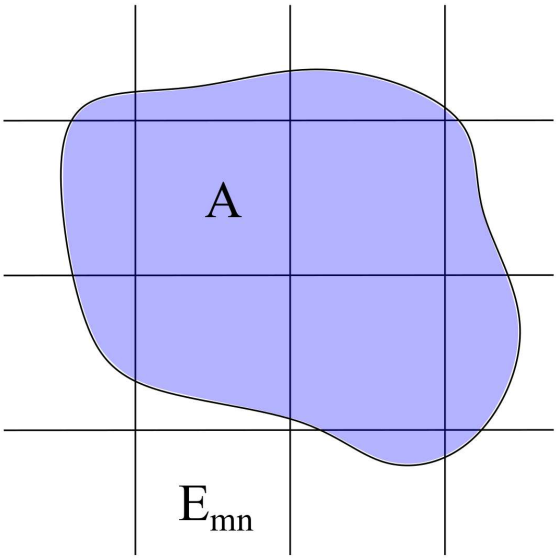

Рис. 12. Построение меры на плоскости

Лекция 4

Измеримые функции

Сейчас мы должны обсудить, что такое измеримые функции. Напомним, чем отличается построение интеграла Римана и интеграла Лебега. В первом случае мы разбиваем на малые части область определения функции, во втором - область значения (Рис. 13).

1) Построение интеграла Римана

2) Построение интеграла Лебега

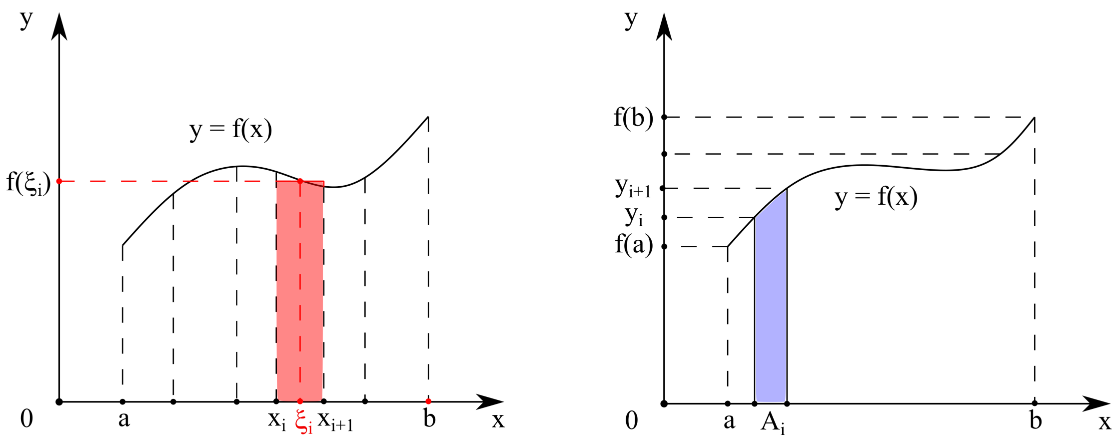

Рис. 13. Отличия построения интеграла Римана и интеграла Лебега

В случае интеграла Лебега интегральная сумма имеет вид:

$$\sigma = \sum_i y_i \mu(A_i). \tag{112}$$

Для того, чтобы можно было вычислять интегральные суммы (112), необходимо, чтобы множества A_i были измеримыми. Это и есть понятие *измеримой функции.*

По своей сути множества A_i - это прообразы отрезков на оси y:

$$\{x : \; a \leqslant f(x) \leqslant b\}. \tag{113}$$

Так как мера счётно-аддитивна, эти множества можно построить из множеств

$$\{x : \; f(x) < c\}. \tag{114}$$

Например,

$$\{x : \; f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x : \; f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}. \tag{115}$$

Также с помощью счётного числа операций можно из (114) построить множества (113). Поэтому вместо того, чтобы работать с множествами (113) мы будем работать с множествами (114), так как они содержат всего один параметр, а не два.

Итак, мы приходим к понятию измеримой функции. Функция $f(x)$, заданная на некотором множестве, называется измеримой, если для любого c множество вида (113) является измеримым.

Можно поступить более формально: рассмотреть борелевскую алгебру, определяемую отрезками на оси y, и потребовать, чтобы каждое множество было измеримо. Этот подход эквивалентен предыдущему. Однако, мы будем придерживаться первого определения, так как оно более практично.

Для того, чтобы изучить свойства измеримых функций, докажем важную теорему.

Теорема 10. Арифметические операции над измеримыми функциями не выводят их из класса измеримых функций.

Доказательство.

1. Докажем, что если $f(x)$ измерима, то $kf(x)$ и $f(x)+a$ также измеримы. Так как функция $f(x)$ измерима, то множества (114) измеримы для любого c. Следовательно и множества

$$\{x:\ kf(x) < c\}, \tag{116}$$

$$\{x:\ f(x) + a < c\}. \tag{117}$$

также измеримы.

2. Докажем, что сумма двух измеримых функций - измеримая функция: для любого c множества $\{x:\ f(x) + g(x) < c\}$ - измеримы. Для начала докажем, что множества вида

$$\{x:\ f(x) > g(x)\} \tag{118}$$

измеримы. Доказательство основано на том, что между любыми двумя действительными числами есть некоторый счётный набор рациональных чисел. Обозначим его r_k. Тогда справедливо

$$\{x:\ f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}[\{x:\ f(x) > r_k\} \cap \{x:\ g(x) < r_k\}]. \tag{119}$$

Так как в правой части счётное число операций, множество справо измеримо, следовательно, измеримо и множество слева.

3. Разность измеримых функций измерима:

$$\{x:\ f(x) - g(x) < c\} = \{x: f(x) < g(x) + c\}. \tag{120}$$

Так как функция $g(x) + c$ измерима (пункт 1), и функция $f(x)$ измерима, то множество справа измеримо (пункт 2). Следовательно, измеримо множество слева. Так как согласно пункту 1 функция $kg(x)$ измерима при $k = -1$ получим, что и сумма функций $f(x)$ и $g(x)$ также измерима.

4. Если функция $f(x)$ измерима, то и функция $f^2(x)$ измерима. Для доказательства необходимо лишь разрешить неравенство:

$$\{x:\ f^2(x)<c\}. \tag{121}$$

5. Произведение измеримых функция $f(x)\cdot g(x)$ измеримо. Для доказательства необходимо воспользоваться формулой:

$$f(x)g(x)=\frac{(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2}{4}. \tag{122}$$

6. Если $f(x)$ - измеримая функция и $f(x)\neq 0$, то $1/f(x)$ - измеримая функция. Для доказательства необходимо лишь разрешить неравенство:

$$\{x:\ 1/f(x)<c\}. \tag{123}$$

7. Из пунктов 5 и 6 следует, что отношение $f(x)/g(x)$, если $g(x)\neq 0$, - измеримая функция.

Что и требовалось доказать.

Ещё одним важным свойством является утверждение о предельном переходе.

Теорема 11. Рассмотрим последовательность измеримых функций $f_n(x)$, которая поточечно сходится к функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ - измеримая функция.

Доказательство.

Для доказательства необходимо выразить множество для $f(x)$ через счётное число множеств для $f_n(x)$:

$$\{x: f(x)<c\}=\bigcup_k\bigcup_n\bigcap_m\left\{x:\ f_m(x)<c-\frac{1}{k}\right\}. \tag{124}$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, понятие измеримой функции в теории интеграла Лебега аналогично понятию непрерывной функции в теории интеграла Римана. Однако для измеримых функций справедлив предельный переход, что неверно для непрерывных функций. Например, непрерывные функции $f_n(x)=x^n$ на отрезке $[0,1]$ сходятся к разрывной функции

$$\lim_{n\to\infty}x^n=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases} \tag{125}$$

Введём понятие *эквивалентных функций*.

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными*, если

$$\mu\{x:\ f(x) \neq g(x)\} = 0. \tag{126}$$

Пример эквивалентных функций: $f(x) = D(x)$ - функция Дирихле, $g(x) \equiv 0$. Отметим, что мы рассматриваем только полную меру, и построение меры Лебега обеспечивает её полноту. Всюду дальше мы будем пользоваться этим свойством. Например, оно необходимо при доказательстве того факта, что если $f(x)$ измерима, то эквивалентная ей функция $g(x)$ также измерима, так как множества $\{x : f(x) < c\}$ и $\{x : g(x) < c\}$ отличаются на подмножества меры нуль.

Дальше нам потребуется понятие «почти всюду». Говорят, что какое-либо свойство выполняется почти всюду на некотором множестве, если оно не выполнено на множестве меры нуль. Например, функция Дирихле почти всюду равна нулю, а эквивалентные функции почти всюду равны.

Определение. Последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду, если

$$\mu\{x:\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0. \tag{127}$$

Теорема 12 (*Егорова*). Пусть есть измеримое множество E. На нём определена последовательность измеримых функций $f_n(x)$, которая сходится почти всюду к функции $f(x)$. Тогда

$$\forall \delta > 0 \quad \exists E_\delta \subset E: \tag{128}$$

$$1.\quad \mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta, \tag{129}$$

$$2.\quad f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E_\delta. \tag{130}$$

Доказательство.

1. Функция $f(x)$ - измерима. В самом деле, в силу теоремы 11 функция измерима на множестве E минус множество меры нуль. Следовательно, в силу полноты меры, она измерима на E.

2. Опишем множество, на котором последовательность сходится равномерно. Рассмотрим измеримые множества:

$$E_n^m = \bigcap_{i \geqslant n} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\} \tag{131}$$

3. Для множеств E_n^m справедливо:

$$E_1^m \subset E_2^m \subset E_3^m \subset \ldots \tag{132}$$

Введём множество
$$E^m = \bigcup_n E_n^m. \tag{133}$$

4. В силу непрерывности меры множества E_n^m аппроксимируют по мере множество E^m:

$$\forall m \quad \forall \delta > 0 \quad \exists n_0(m): \quad \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \frac{\delta}{2^m}. \tag{134}$$

5. В качестве E_δ возьмём:

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}. \tag{135}$$

На этом множестве выполнено $|f_i(x) - f(x)| < \dfrac{1}{m}$, $i > n_0(m)$, что является определением равномерной сходимости.

6. Оценим меру множества E_δ. Справедливо:

$$\mu(E \setminus E^m) = 0. \tag{136}$$

Следовательно,
$$\mu(E \setminus E^m_{n_0(m)}) = \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \frac{\delta}{2^m}, \tag{137}$$

$$\mu(E \setminus E_\delta) = \mu\left(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^n_{n_0(m)}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E^n_{n_0(m)})\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E^n_{n_0(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta. \tag{138}$$

Что и требовалось доказать.

Определение. Последовательность измеримых функций $f_n(x)$ называется сходящейся по мере к функции $f(x)$, если

$$\forall \sigma > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\} = 0. \tag{139}$$

Отметим, что из сходимости почти всюду следует сходимость по мере, однако обратное неверно.

Лекция 5

Свойства интеграла Лебега

Определение. Функция $f(x)$, заданная на множестве A со счётно-аддитивной мерой, называется *простой*, если она измерима и принимает не более, чем счётный набор значений $y_1, y_2, ..., y_n, ...$

Для того, чтобы измеримая функция была простой, необходимо, чтобы множества

$$A_k = \{x:\ x \in A,\ f(x) = y_k\} \tag{140}$$

были измеримыми.

Очевидно, что арифметические операции не выводят простые функции из класса простых функций.

Теорема 13. Для того, чтобы функция $f(x)$ была измеримой, необходимо и достаточно, чтобы её можно было аппрокимировать равномерно сходящейся последовательностью простых функций:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x). \tag{141}$$

Доказательство.

1. Достаточность прямо следует из теоремы 11.

2. Докажем необходимость. Пусть есть измеримая функция $f(x)$. Необходимо построить последовательность простых функций $f_n(x)$. Ограничим функцию $f(x)$:

$$\frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}. \tag{142}$$

Тогда искомая последовательность:

$$f_n(x) = \frac{m}{n}. \tag{143}$$

Действительно,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}. \tag{144}$$

Что и требовалось доказать.

Определение. Пусть $f(x)$ - простая функция, заданная на измеримом множестве A. Её *интегралом Лебега* по множеству A называется ряд:

$$\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu \overset{\text{def}}{\equiv} \sum_k y_k \mu(A_k) \tag{145}$$

при условии, что ряд сходится абсолютно.

Абсолютная сходимость нужна для того, чтобы суммировать члены ряда в любом порядке.

Перечислим свойства интеграла Лебега:

А)

$$\int\limits_A [f(x)+g(x)]\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu + \int\limits_A g(x)\mathrm{d}\mu. \tag{146}$$

Доказательство.

Введём обозначение: $h(x)=f(x)+g(x)$. Функция $h(x)$ принимает значения h_i на множествах A_i, функция $f(x)$ - f_j на B_j, функция $g(x)$ - g_k на C_k. При этом

$$A_i = \bigcup_{h_i=f_j+g_k} (B_j \cap C_k). \tag{147}$$

Следовательно,

$$\sum_i h_i\mu(A_i) = \sum_i h_i \sum_{h_i=f_j+g_k} \mu(B_j\cap C_k) = \sum_{j,k} (f_j+g_k)\mu(B_j\cap C_k) =$$
$$= \sum_j f_j \sum_k \mu(B_j\cap C_k) + \sum_k g_k \sum_j \mu(B_j\cap C_k) = \sum_j f_j\mu(B_j) + \sum_k f_k\mu(C_k). \tag{148}$$

Что и требовалось доказать.

Б)

$$\int\limits_A kf(x)\mathrm{d}\mu = k\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu. \tag{149}$$

В) Если функция $f(x)$ ограничена: $|f(x)|<M$, то

$$\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu(A). \tag{150}$$

Теперь мы можем ввести понятие интеграла Лебега для произволной функции.

Определение. Измеримая на множестве A функция $f(x)$ называется интегрируемой или суммируемой, если её можно представить как предел равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых функций: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, а её интегралом Лебега называется предел:

$$\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\mathrm{d}\mu. \tag{151}$$

Для корректности данного определения, необходимо доказать, что этот предел существует и не зависит от аппроксимирующей последовательности $f_n(x)$, а также, что для простой функции полученная конструкция совпадает с раннее введённой.

Существование предела будем доказывать с помощью критерия Коши:

$$\left|\int\limits_A f_n(x)\mathrm{d}\mu - \int\limits_A f_m(x)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_A |f_n(x) - f_m(x)|\mathrm{d}\mu. \tag{152}$$

Так как последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists N: \quad \forall m, n > N \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(A)}. \tag{153}$$

Из (152) и (153) следует, что предел (151) существует.

Что и требовалось доказать.

Второе утверждение следует из того, что если существует две последовательности $f_1(x), f_2(x), ...$ и $\overline{f}_1(x), \overline{f}_2(x)..$, аппроксимирующие $f(x)$, то последовательность $f_1(x), \overline{f}_1(x), f_2(x), \overline{f}_2(x)...$ также аппроксимирует $f(x)$. Следовательно, пределы для двух этих последовательностей должны быть равны, иначе у построенной последовательности не было бы предела, что ведёт к противоречию.

Третье утверждение можно доказать, выбрав в качестве последовательности, аппроксимирующей простую функцию, последовательность, составленную из самой этой функции.

В дальнейшем мы покажем, что если существует интеграл Римана, то существует и интеграл Лебега, и они совпадают.

Перечислим свойства интеграла Лебега:

1. $$\int\limits_A 1\mathrm{d}\mu = \mu(A), \tag{154}$$

2. $$\int\limits_A kf(x)\mathrm{d}\mu = k\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu, \tag{155}$$

3. $$\int\limits_A [f(x) + g(x)]\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu + \int\limits_A g(x)\mathrm{d}\mu, \tag{156}$$

4. Если $|f(x)| < M,$ то функция интегрируема, $$\left|\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant M\mu(A), \tag{157}$$

5. Если $f(x) \geqslant 0,$ то $$\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu \geqslant 0, \tag{158}$$

6. Если $f(x) \geqslant g(x),$ то $$\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_A g(x)\mathrm{d}\mu, \tag{159}$$

7. Если $m \leqslant f(x) \leqslant M,$ то $$m\mu(A) \leqslant \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu(A), \tag{160}$$

8. Если $\mu(A) = 0,$ то любая функция измерима, и $\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu = 0,$ (161)

9. Если $f(x) \sim g(x)$, то $\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu = \int\limits_A g(x)\mathrm{d}\mu,$ (162)

10. Если $f(x) -$ измерима, а $\varphi(A)$ - интегрирума, и (163)

$|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ то $\exists \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_A \varphi(x)\mathrm{d}\mu,$ (164)

11. Функции $f(x)$ и $f^2(x)$ суммируемы одновременно. (165)

Теорема 14. Пусть есть измеримая функция $f(x)$, интегрируемая на множестве A и при этом

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{166}$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

Тогда $f(x)$ интегрируема на множествах A_i и

$$\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} f(x)\mathrm{d}\mu. \tag{167}$$

Доказательство.

1. Докажем утверждение теоремы для простой функции $f(x)$. Она принимает значения $y_1, y_2, y_3, ...y_n, ...$ на множествах $B_1, B_2, B_3, ...B_n, ...$ Рассмотрим множества $B_{nk} = A_k \cup B_n$. На них функция $f(x)$ так же принимает значения $y_1, y_2, y_3, ...y_n, ...$ Рассмотрим интеграл в левой части:

$$\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu = \sum_k y_k\mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{nk}) = \sum_n \sum_k y_k\mu(B_{nk}) = \sum_n \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu. \tag{168}$$

В первом равенстве формулы (168) использовалась счётная аддитивность меры, во втором и третьем - абсолютная сходимость рядов (возможность переставлять члены ряда).

2. Пусть $f(x)$ - произвольная измеримая функция, а $g(x)$ - простая функция, аппроксимирующая её с точностью ε:

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon. \tag{169}$$

Из (169) следует

$$|g(x)| < |f(x)| + \varepsilon. \tag{170}$$

Согласно свойству (164) функция $g(x)$ также интегрируема. Для $g(x)$ согласно пункту 1:

$$\int\limits_A g(x)\mathrm{d}\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} g(x)\mathrm{d}\mu. \tag{171}$$

Оценим разность интегралов от $f(x)$ и $g(x)$:

$$\left|\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu - \int\limits_A g(x)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \varepsilon\mu(A), \tag{172}$$

$$\left|\int\limits_{A_i} f(x)\mathrm{d}\mu - \int\limits_{A_i} g(x)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \varepsilon\mu(A_i). \tag{173}$$

Следовательно

$$\left|\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu - \sum_i \int\limits_{A_i} f(x)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant 2\varepsilon\mu(A). \tag{174}$$

Устремляя ε к нулю получим требуемое утверждение.

Что и требовалось доказать.

Следствие. Если функция интегрируема на A, то она интегрируема на $A' \subset A$.

Теорема 15. Пусть есть набор множеств A_i, $i = 1, 2, ...n, ...$ такие, что $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$. Пусть $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Пусть $f(x)$ интегрируема и измерима на A_i, и ряд

$$\sum_i \int\limits_{A_i} |f(x)|\mathrm{d}\mu \tag{175}$$

сходится. Тогда $f(x)$ интегрируема на A, и

$$\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} f(x)\mathrm{d}\mu. \tag{176}$$

Доказательство.

1. Докажем утверждение теоремы для простой функции $f(x)$. Она принимает значения $y_1, y_2, y_3, ...y_n, ...$ на множествах $B_1, B_2, B_3, ...B_n, ...$ Рассмотрим множества $A_i \cup B_n$. На них функция $f(x)$ так же принимает значения $y_1, y_2, y_3, ...y_n, ...$ Рассмотрим интеграл в правой части:

$$\sum_i \int\limits_{A_i} |f(x)|\mathrm{d}\mu = \sum_i \sum_n |y_n|\mu(A_i \cap B_n) = \sum_k |y_k| \sum_i \mu(A_i \cap B_n) =$$

$$= \sum_k |y_k|\mu(B_n) = \int\limits_A |f(x)|\mathrm{d}\mu. \tag{177}$$

Из интегрируемости модуля следует интегрируемость самой функции.

2. Пусть $f(x)$ - произвольная измеримая функция, а $g(x)$ - простая функция, аппроксимирующая её с точностью ε:

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon. \tag{178}$$

Из (178) следует

$$|g(x)| < |f(x)| + \varepsilon. \tag{179}$$

По условию теоремы $f(x)$ интегрируема на множествах A_i, и по свойству (164):

$$\int\limits_{A_i} |g(x)|\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{A_i} |f(x)|\mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(A_i), \tag{180}$$

$$\sum_i \int\limits_{A_i} |g(x)|\mathrm{d}\mu \leqslant \sum_i \int\limits_{A_i} |f(x)|\mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(A). \tag{181}$$

Следовательно, $g(x)$ интегрирума на A. С другой стороны

$$|f(x)| < |g(x)| + \varepsilon. \tag{182}$$

Следовательно, и $f(x)$ интегрирума на A.

Что и требовалось доказать.

Теорема 16 (*неравенство Чебышёва*). Пусть функция $\varphi(x)$ интегрируема на A и есть некоторое число $C > 0$. Тогда

$$\mu\{x: \ x \in A, \ \varphi(x) \geqslant C\} \leqslant \frac{1}{C}\int\limits_A \varphi(x)\mathrm{d}\mu. \tag{183}$$

Доказательство.

Введём множества

$$A' = \mu\{x: \ x \in A, \ \varphi(x) \geqslant C\}, \tag{184}$$

$$B = A \setminus A'. \tag{185}$$

Тогда

$$\int\limits_A \varphi(x)\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A'} \varphi(x)\mathrm{d}\mu + \int\limits_B \varphi(x)\mathrm{d}\mu \geqslant C\mu(A') \tag{186}$$

Что и требовалось доказать.

Лекция 6

Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Теорема 17. Пусть $f(x)$ такова, что

$$\int\limits_A f^2(x)\mathrm{d}\mu = 0. \tag{187}$$

Тогда

$$\mu\{x:\ x \in A,\ f(x) \neq 0\} = 0, \tag{188}$$

то есть функция $f(x)$ равна нулю почти всюду.

Доказательство.

Введём множества

$$A_n = \left\{x:\ x \in A,\ f(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}. \tag{189}$$

Согласно неравенству Чебышёва

$$\mu(A_n) \leqslant n^2 \int\limits_{A_n} f^2(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{190}$$

Справедливо

$$\{x:\ x \in A,\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{191}$$

следовательно

$$\mu\{x:\ x \in A,\ f(x) \neq 0\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0. \tag{192}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 18. Пусть есть интегрируемая на множестве A функция $f(x)$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\ :\ \forall A' \subset A:\quad \mu(A') < \delta\ \Rightarrow \left|\int\limits_{A'} f(x)\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon. \tag{193}$$

Доказательство.

Для ограниченной функции $|f(x)| \leqslant M$ достаточно выбрать $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Рассмотрим неограниченные функции. Без ограничения общности будем полагать $f(x) \geqslant 0$. Разобьём множество A на множества:

$$A_n \ \{x: \ x \in A, \ n \leqslant f(x) < n+1\}, \tag{194}$$

$$B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n. \tag{195}$$

На множестве B_N функция $f(x)$ не превосходит $N+1$.

$$\int\limits_A |f(x)| \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)| \mathrm{d}\mu. \tag{196}$$

С другой стороны

$$\int\limits_{B_N} |f(x)| \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{A_n} |f(x)| \mathrm{d}\mu. \tag{197}$$

(197) - это частичная сумма ряда (196). Так как ряд сходится, то частичная сумма ограничена и остаточный член ряда бесконечно мал.

Введём множество $C_N = A \setminus B_N$. В силу малости остатка ряда

$$\int\limits_{C_N} |f(x)| \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{198}$$

Выберем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(N+1)}$. Тогда

$$\int\limits_{A'} |f(x)| \mathrm{d}\mu = \int\limits_{A' \cap C_N} |f(x)| \mathrm{d}\mu + \int\limits_{A' \cap B_N} |f(x)| \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(N+1)\varepsilon}{2(N+1)} = \varepsilon. \tag{199}$$

Что и требовалось доказать.

Из этой теоремы получаем следующий результат. Пусть на единичном множестве E задана интегрируемая функция $f(x) \geqslant 0$. Тогда можно ввести функцию

$$F(A) = \int\limits_A f(x) \mathrm{d}\mu, \tag{200}$$

которая обладает всеми свойствами меры Лебега.

Если же функция знакопеременна, то можно разбить её на две части:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \tag{201}$$

$$F_+(A) = \int\limits_A f^+(x) \mathrm{d}\mu, \tag{202}$$

$$F_-(A) = \int\limits_A f^-(x)\mathrm{d}\mu, \tag{203}$$

Функции (202) и (203) называются *зарядами.*

Рассмотрим вопрос о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. Для интеграла Римана справедливо:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_A f(x)\mathrm{d}x, \tag{204}$$

$$\text{если } f_n(x) \rightrightarrows f(x). \tag{205}$$

Оказывается, для интеграла Лебега можно существенно снизить требования на последовательность $f_n(x)$.

Теорема 19 (*Лебега*). Пусть есть последовательность измеримых интегрируемых функций $f_n(x)$, которая сходится к $f(x)$ и для любого n справедливо $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - интегрируемая функция. Тогда функция $f(x)$ интегрируемая и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n(x)\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu. \tag{206}$$

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \forall B: \quad \mu(B) < \delta \quad \int\limits_B \varphi(x)\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{207}$$

По теореме Егорова

$$\forall\delta > 0 \quad \exists C_\delta \subset A: \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \mu(A \setminus C_\delta) < \delta. \tag{208}$$

Так как $|f_n| \leqslant \varphi(x)$ также справедливо $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, следовательно интеграл от $f(x)$ существует. Сделаем оценку разности интегралов:

$$\left|\int\limits_A f_n(x)\mathrm{d}\mu - \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_{A\setminus C_\delta} |f_n(x)|\mathrm{d}\mu - \int\limits_{A\setminus C_\delta} |f(x)|\mathrm{d}\mu - \int\limits_{C_\delta} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}\mu. \tag{209}$$

Первые два интеграла меньше, чем $\dfrac{\varepsilon}{4}$ в силу (208), в силу абсолютной сходимости можно положить $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\mu(A)}$, следовательно,

$$\left|\int\limits_A f_n(x)\mathrm{d}\mu - \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon. \tag{210}$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. То же самое справедливо, если $f_n(x)$ сходится на A почти всюду.

Следствие. Если функция $f(x)$ ограничена: $|f(x)| \leqslant M$, и последовательность функций $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на множестве A, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu. \tag{211}$$

Теорема 20 (*Леви*). Пусть на множестве A есть последовательность измеримых интегрируемых функций, образующих монотонную последовательность: $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant ... \leqslant f_n(x) \leqslant ...$ и

$$\int\limits_A f_n(x)\mathrm{d}\mu \leqslant K. \tag{212}$$

Тогда почти всюду существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu. \tag{213}$$

Доказательство.

Без ограничения общности будем считать $f_n(x) \geqslant 0$. Действительно, если это не так, можем ввести последовательность $\tilde{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$, для которой справедлива монотонность и $\tilde{f}(x) \geqslant 0$.

Введём множество

$$\Omega = \{x: \ x \in A, \ f_n(x) \ \to \infty\}. \tag{214}$$

Представим его в виде:

$$\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}, \tag{215}$$

$$\Omega_n^{(r)} = \{x: \ x \in A, \ f_n(x) > r\}. \tag{216}$$

Оценим меру множества (216) с помощью неравенства Чебышёва:

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \leqslant \frac{K}{r}. \tag{217}$$

Очевидно, что

$$\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \Omega_3^{(r)} \subset ... \subset \Omega_n^{(r)} \subset ... \tag{218}$$

Следовательно

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^r\right) \leqslant \frac{K}{r}, \tag{219}$$

$$\mu\left(\Omega\right) \leqslant \frac{K}{r}. \tag{220}$$

Перейдём к пределу $r \to \infty$ в (220) и получим, что $\mu(\Omega) = 0$. Чтобы пользоваться теоремой Лебега переопределим функции $f_n(x)$ на множестве Ω, чтобы на этом множестве существовал предел. Мы так можем сделать потому, что интеграл от этого не изменится.

Введём множества A_r

$$A_r = \{x :\ x \in A,\ r - 1 \leqslant f(x) < r\}. \tag{221}$$

Построим функцию $\varphi(x) = r,\ x \in A_r$. Справедливо

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x) + 1. \tag{222}$$

Осталось доказать, что $\varphi(x)$ интегрируема.

Введём множества

$$B_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r. \tag{223}$$

На множестве B_s функция $\varphi(x)$ ограничена, следовательно, и $f(x)$ также ограничена. По теореме Лебега

$$\int\limits_{B_s} f_n(x)\mathrm{d}\mu \to \int\limits_{B_s} f(x)\mathrm{d}\mu. \tag{224}$$

Сделаем оценку:

$$\int\limits_{A_n} \varphi(x)\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{A_n} f(x)\mathrm{d}\mu + \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f_n(x)\mathrm{d}\mu + \mu(A_n), \tag{225}$$

$$\int\limits_{B_s} \varphi(x)\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{B_s} f(x)\mathrm{d}\mu + \mu(B_s) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{B_s} f_n(x)\mathrm{d}\mu + \mu(B_s) \leqslant K + \mu(A). \tag{226}$$

С другой стороны

$$\int\limits_{A} \varphi(x)\mathrm{d}\mu = \sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r), \tag{227}$$

$$\int\limits_{A} \varphi(x)\mathrm{d}\mu = \sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r), \tag{228}$$

$$\int\limits_{B_s} \varphi(x)\mathrm{d}\mu = \sum_{r=1}^{s} r\mu(A_r) \leqslant K + \mu(A). \tag{229}$$

Из (229) следует, что функция $\varphi(x)$ интегрируема, поэтому из (222) следует, что и $f(x)$ интегрируема.

Что и требовалось доказать.

Заметим, что последовательность, аппроксимирующая δ - функцию немонотонна, следовательно, она не укладывается в рамки теоремы Леви.

Следствие. Пусть есть последовательность функций $\psi_n(x) \geqslant 0$, пусть они интегрируемы и ряд, составленный из интегралов от функций сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) \mathrm{d}\mu < \infty. \tag{230}$$

Отсюда следует, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \tag{231}$$

сходится почти всюду, и его можно интегрировать почленно

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) \mathrm{d}\mu. \tag{232}$$

Теорема 21 (*Фату*). Пусть есть последовательность измеримых интегрируемых функций $f_n(x) \geqslant 0$, которая сходится почти всюду к $f(x)$, для которой

$$\int_A f_n(x) \mathrm{d}\mu \leqslant K. \tag{233}$$

Тогда функция $f(x)$ тоже интегрируемая и

$$\int_A f_n(x) \mathrm{d}\mu \leqslant K. \tag{234}$$

Доказательство.

Введём последовательность $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k \geqslant n} f_k(x)$. Для неё справедливо $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$. Докажем измеримость $\varphi_n(x)$. Это означает измеримость множеств

$$\{x: \ \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x: \ f_k(x) < c\}. \tag{235}$$

Так как $f_n(x)$ измеримы, то из (235) следует, что $\varphi_n(x)$ измеримы. Очевидно, что

$$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x). \tag{236}$$

Следовательно $\varphi_n(x)$ интегрируема и

$$\int_A \varphi_n(x) \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A f_n(x) \mathrm{d}\mu \leqslant K. \tag{237}$$

Таким образом, для $\varphi_n(x)$ справедлива теорема Леви. Следовательно, существует предельная функция $\varphi(x)$ и

$$\int\limits_A \varphi(x)\mathrm{d}\mu \leqslant K. \tag{238}$$

Однако в силу определения $\varphi_n(x)$ функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ совпадают, следовательно, $f(x)$ интегрируема и

$$\int\limits_A f(x)\mathrm{d}\mu \leqslant K. \tag{239}$$

Что и требовалось доказать.

Лекция 7

Пространство $\mathbb{L}_2$

Пространство $\mathbb{L}_2$ лежит в основе математического аппарата квантовой механики. В этом пространстве расстояние между функциями вводится следующим образом:

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]^2 \mathrm{d}x}. \tag{240}$$

Для комплексных функций:

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x}. \tag{241}$$

Скалярное произведение понимается как

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g^*(x) \mathrm{d}x. \tag{242}$$

Конструкция (240) действительно является расстоянием, то есть, удовлетворяет основным свойствам: положительная определённость, неравенство треугольника, симметрия по аргументам. Однако, если $\rho = 0$, при понимании интеграла в смысле Римана, возникает проблема: в этом случае нельзя описать условия на функции $f(x)$ и $g(x)$. При понимании этого интеграла в смысле Лебега:

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int\limits_{[a,b]} [f(x) - g(x)]^2 \mathrm{d}\mu} = 0. \tag{243}$$

сразу следует, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны.

Таким образом, пространство Лебега $\mathbb{L}_2$ - это пространство измеримых функций, квадрат которых также измерим, которое состоит из классов эквивалентности (то есть все эквивалентные функции рассматриваются как один и тот же элемент пространства).

Пространство $\mathbb{L}_2$ полное. Для доказательства этого факта, нам необходимо рассмотреть ещё одно функциональное пространство $\mathbb{L}_1$, в котором расстояние вводится как

$$\rho(f, g) = \int\limits_{[a,b]} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}\mu. \tag{244}$$

Теорема 22 Пространство $\mathbb{L}_1$ полно.

Доказательство.

Пусть есть фундаментальная последовательность $f_n(x)$:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n, m > N \quad \int\limits_{[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \mathrm{d}\mu < \varepsilon. \tag{245}$$

Нам достаточно доказать, что существует хотя бы одна сходящаяся подпоследовательность. Тогда остальные подпоследовательности в силу фундаментальности будут сходится к этому же пределу.

Построим подпоследовательность $f_{h_k}(x)$ такую, что

$$\int\limits_{[a,b]} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \mathrm{d}\mu < \frac{1}{2^n}. \tag{246}$$

Ряд, составленный из членов справа сходится, следовательно, по теореме Леви почти всюду сходится ряд

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_3}(x)| + ... + |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| + ... \tag{247}$$

Следовательно, почти всюду сходится ряд

$$f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x) + f_{n_2}(x) - f_{n_3}(x) + ... + f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) + ... \tag{248}$$

Ряд (247) и есть f_{n_k}. Следовательно, $f_{n_k} \to f(x)$ почти всюду. Поэтому по теореме Фату можно перейти к пределу под знаком интеграла в (244):

$$\int\limits_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}\mu < \varepsilon. \tag{249}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 23 Пространство $\mathbb{L}_2$ полно.

Доказательство.

Запишем расстояние между двумя функциями в $\mathbb{L}_1$ и применим неравенство Коши - Буняковского:

$$\int\limits_{[a,b]} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}\mu = \int\limits_{[a,b]} 1 \cdot |f(x) - g(x)| \mathrm{d}\mu \leqslant \sqrt{\int\limits_{[a,b]} 1 \mathrm{d}\mu \cdot \int\limits_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}\mu}. \tag{250}$$

Следовательно, если последовательность фундаментальна в $\mathbb{L}_2$, то она фундаментальна в $\mathbb{L}_1$. То же самое для сходящихся последовательностей. Это отношение пространств называется *вложением*.

Рассмотрим фундаментальную последовательность в $\mathbb{L}_2$:

$$\int\limits_{[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \mathrm{d}\mu < \varepsilon. \tag{251}$$

Она фундаментальна в $\mathbb{L}_1$ и сходится почти всюду к $f(x)$. Следовательно, можно применить теорему Фату, и перейти к пределу по $m \to \infty$ под знаком интеграла (250):

$$\int\limits_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}\mu < \varepsilon. \tag{252}$$

А это и означает, что последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ в $\mathbb{L}_2$.

Что и требовалось доказать.

Замечание. Для всей прямой $\mathbb{R}^1$ такое доказательство не применимо, так как не выполнено неравенство (250) в силу того, что мера прямой бесконечна. Для доказательства необходимо разбить прямую на счётный набор отрезков, применить доказанную теорему для каждого из них по отдельности, а затем «сшить» полученные функции.

Решение уравнения теплопроводности для скалярного поля

Рассмотрим задачи, описываемые уравнением переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \Delta u. \tag{253}$$

Этим уравнением описываются процессы молекулярной диффузии и теплопередачи. Если есть источник примеси или тепловыделения, решение уравнения (253) имеет вид:

$$u(x,t) = e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}. \tag{254}$$

Из (254) следует, что возмущение от источника дойдёт до точки r за время $\sim \sqrt{\nu t}$. Оценки показывают, что это время достаточно велико. Однако из опыта известно, что истинное время, за которое, например, распространяется запах духов или нагревается чайник, гораздо меньше. Это обусловлено тем, что ключевую роль здесь играют конвективные потоки. Так как эти потоки достаточно сложные, их описывают с помощью случайных величин. Уравнение, учитывающее их, имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla) u = \varepsilon \Delta u. \tag{255}$$

Поле скоростей имеет среднеквадратичную скорость v и «время памяти» τ, за которое оно теряет информацию о своём состоянии. За время τ некоторая точка сместится на расстояние $\Delta x_i = v\tau\xi_i$, где ξ_i - случайная величина. Возникает вопрос, насколько точка сдвинется за время t:

$$\Delta r = \sum_i v\tau\xi_i = v\tau\sqrt{n}\xi = v\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{t} \cdot \xi, \tag{256}$$

где ξ - случайчайная величина с гауссовским распределением:

$$p(x) \sim e^{-x^2/2}. \tag{257}$$

Следовательно, расстояние пропорционально $\sqrt{t}$, а коэффициент пропорциональности (для каждой компоненты):

$$\nu_T = \frac{v^2\tau}{3} = \frac{vl}{3}. \tag{258}$$

Следовательно,

$$t = \frac{r^2}{\nu_T}. \tag{259}$$

Чтобы решить уравнение (255) необходимо его усреднить, что проблематично из-за наличия члена $(v\nabla)u$. Чтобы обойти эту проблему, можно решить это уравнение без усреднения, а затем усреднить решение. Оказывается, что решение можно представить через функциональный интеграл.

Для того, чтобы ввести интеграл по пространству функций, необходимо ввести понятие меры. Для этого строится понятие квазиинтервала Винера (Рис. 14)

$$Q(t_1, t_2, ..., a_1, a_2, ...b_1, b_2, ...)$$

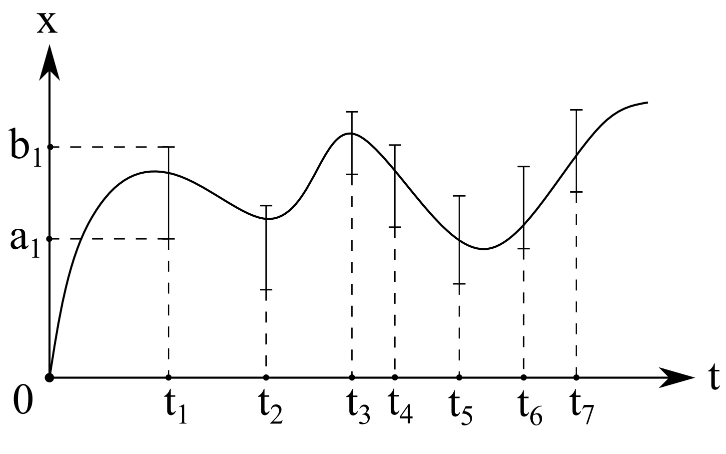

Рис. 14. Квазиинтервал

Нетрудно показать, что квазиинтервалы образуют полукольцо, и можно ввести меру:

$$\mu(Q) = P\{W_t \in Q\}, \tag{260}$$

где $P\{W_t \in Q\}$ - вероятность того, что броуновская частица (винеровский процесс) проходит через квазиинтервал Q.

Лекция 8

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в движущейся среде

Запишем задачу Коши для уравнения (255)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla) u = \varepsilon \Delta u, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{261}$$

Рассмотрим два предельных случая: $v = 0$ и $\varepsilon = 0$. В первом случае решение имеет вид:

$$u(x,t) = \int g(x,y,t) u_0(y) \mathrm{d}^3 y, \tag{262}$$

где $g(x,y,t)$ - функция Грина:

$$g(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{\alpha \varepsilon t}}}{\sqrt{\beta t}} = M[u_0(\sqrt{2\varepsilon} W_t)]. \tag{263}$$

В случае $\varepsilon = 0$ температура определяется исключительно потоками. Введём обозначение $\xi_{t,x}$ - координата точки, из которой частица приходит в точку x в момент времени t:

$$u(x,t) = u_0(\xi_{t,x}). \tag{264}$$

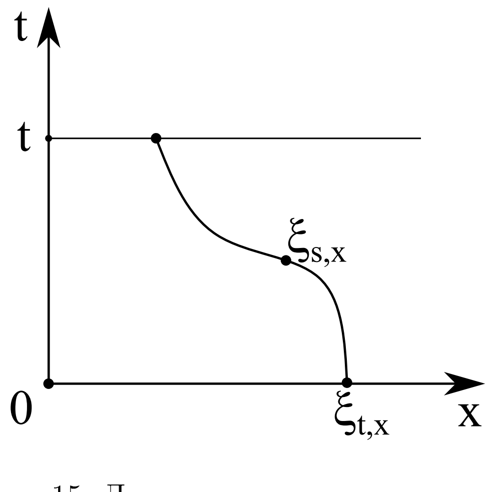

Рис. 15. Диаграмма для случая $\varepsilon = 0$

В общем случае будет сложение двух движений:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + v_B. \tag{265}$$

Однако, у траектории броуновского движения нет скорости, так как функция не дифференцируема (в силу того, что $\Delta x \sim \sqrt{\Delta t}$). Но можно проинтегрировать выражение (265) и получить уравнение Ито:

$$\xi(s,x) = -\int\limits_t^s \xi_{\sigma,x} \mathrm{d}\sigma + \sqrt{2\varepsilon} W_{t-s} + x. \tag{266}$$

Тогда

$$u(t,x) = M_x[u_0(\xi_{t,x})], \tag{267}$$

где M - математическое ожидание. (267) носит название *формула Каца - Фейнмана.*

Проверим, что (267) является решением исходной задачи. Вычислим производную по времени:

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{u(t+\Delta t, x) - u(t,x)}{\Delta t}, \tag{268}$$

$$u(t+\Delta t, x) = Mu(t, \xi_{\Delta t}). \tag{269}$$

Вычислим $\xi_{\Delta t,i}$:

$$\xi_{\Delta t,i} = x_i + \sqrt{2\varepsilon} W_{\Delta t,i} - v_i \Delta t + o(\Delta t). \tag{270}$$

Подставим в (269) и разложим в ряд:

$$u(t, x_i + \sqrt{2\varepsilon} W_{\Delta t,i} - v_i\Delta t + o(\Delta t)) = u(t,x_i) + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot (\sqrt{2\varepsilon} W_{\Delta t,i} - v_i \Delta t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot (\sqrt{2\varepsilon} W_{\Delta t,i} - v_i \Delta t) \sqrt{2\varepsilon} W_{\Delta t,j} - v_j \Delta t) + o(\Delta t). \tag{271}$$

Отбрасываем члены порядков выше линейных:

$$u(t,x_i) + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot (\sqrt{2\varepsilon} W_{\Delta t,i} - v_i \Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \sqrt{2\varepsilon} W_{\Delta t,i} W_{\Delta t,j}. \tag{272}$$

Возьмём среднее от (272):

$$u(t+\Delta t, x_i) = u(t,x_i) - v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot 2\varepsilon \delta_{ij} \Delta t = u(x,t) - v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \varepsilon \Delta u \cdot \Delta t. \tag{273}$$

В итоге получим, что и требуется:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla) u = \varepsilon \Delta u. \tag{274}$$

Таким образом, мы нашли решение задачи (261). Теперь необходимо найти уравнение для среднего поля $\langle u(x,t) \rangle$. Разобьём временную ось на малые отрезки времени продолжительности $\Delta \ll \Delta t$. Будем считать, что на каждом промежутке времени поле v постоянно, и значения на каждом отрезке случайны и независимы.

Так как мы получаем выделенные промежутки времени, трансляционная инвариантность теряется. Однако, можно сделать предельный переход при $\Delta \to 0$.

Рассмотрим два момента времени $n\Delta$ и $(n+1)\Delta$. Выразим величину $u((n+1)\Delta, x)$ через $u(n\Delta, x)$. Для этого необходимо решить уравнение Ито (266). В первом приближении

$$\xi_i = x_i + \sqrt{2\varepsilon} W_i - v\Delta t. \tag{275}$$

Подставим (275) в (266) и разложим в ряд:

$$\xi_i = x_i + \sqrt{2\varepsilon} W_i - v\Delta + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot (\sqrt{2\varepsilon} W_j - v_j \Delta)\Delta + o(\Delta). \tag{276}$$

Теперь разложим $u(n\Delta, \xi_\Delta)$:

$$\begin{aligned} u(n\Delta, \xi_\Delta) &= u(n\Delta, x) + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \xi_{\Delta,i} = \\ = u(n\Delta, x) &+ \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \left(x_i + \sqrt{2\varepsilon} W_i - v\Delta + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot (\sqrt{2\varepsilon} W_j - v_j \Delta)\Delta \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot (\sqrt{2\varepsilon} W_i - v_i \Delta)(\sqrt{2\varepsilon} W_j - v_j \Delta) + o(\Delta). \end{aligned} \tag{277}$$

Теперь необходимо взять среднее по винеровскому процессу:

$$u((n+1)\Delta, x) = u(n\Delta, x) - v_i \Delta - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \Delta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \left(2\varepsilon \delta_{ij} \Delta + v_i v_j \Delta^2 \right), \tag{278}$$

$$u((n+1)\Delta, x) = u(n\Delta, x) - v_i u \Delta - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j u \Delta^2 + \varepsilon \Delta u + \frac{v_i v_j \Delta^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{279}$$

Теперь усредним по тем интервалам времени, которые предшествовали $n\Delta$:

$$\overline{u((n+1)\Delta, x)} = T(n\Delta, x) - v_i T \Delta - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j T \Delta^2 + \varepsilon \Delta T + \frac{v_i v_j \Delta^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{280}$$

где $T(n\Delta, x) = \overline{u(n\Delta, x)}$.
Теперь усредним по последнему интервалу:

$$T((n+1)\Delta, x) = T(n\Delta, x) + \varepsilon \Delta T + \frac{a\delta_{ij}}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{281}$$

$$T((n+1)\Delta, x) = T(n\Delta, x) + \varepsilon \Delta T + \frac{a}{2} \Delta (T\Delta). \tag{282}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{T((n+1)\Delta, x) - T(n\Delta, x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta(\varepsilon \Delta T + (a/2)\Delta T)}{\Delta}, \tag{283}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\varepsilon + \frac{a}{2} \right) \Delta T, \tag{284}$$

где $a = \langle v_1 v_1 \rangle \Delta = 2v^2\tau/3$.

Здесь v - среднеквадратичная скорость, $\tau = \Delta/2$ - время памяти.

Таким образом, получаем выражение для коэффициента турбулентной диффузии:

$$\varepsilon_T = \varepsilon + \frac{v^2\tau}{3}, \tag{285}$$

что соответствует (258).

Лекция 9

Формула Каца-Фейнмана

Обобщим метод, который использовался в прошлой лекции на более сложные системы. Первая проблема - обобщение формулы Каца - Фейнмана на случай векторных полей.

Рассмотрим задачу о переносе магнитного поля жидкостью. Запишем уравнение для квазистационарного магнитного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \tag{286}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \tag{287}$$

Это уравнение схоже с уравнением (261). Отличие заключается лишь в члене $(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{v}$, из-за которого компоненты векторных полей перемешиваются, в силу этого принцип максимума может нарушаться. В результате могут появляться экспоненциально растущие решения, что соответствует самовозбуждению электромагнитного поля.

Для нахождения уравнения среднего поля необходимо выписать формулу Каца - Фейнмана. Для этого рассмотрим уравнение поля в движущейся системе отсчёта вдоль случайной траектории:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} = A \cdot \mathbf{H}, \tag{288}$$

$$\text{где } A = \left|\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\right|.$$

В случае линейной системы уравнений

$$y' = a(x)y, \tag{289}$$

$$y = y_0 \cdot \exp\left(\int a(x)\mathrm{d}x\right). \tag{290}$$

Следовательно, для скалярного поля φ, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\varphi = \varepsilon\varphi + \nu\Delta\varphi, \tag{291}$$

формула Каца - Фейнмана имеет вид:

$$\varphi = M_x \left[\varphi_0(\xi_{t,x}) \cdot \exp\left(\int_0^t \varepsilon(s, \xi_{s,x})\right) \mathrm{d}s\right]. \tag{292}$$

По аналогии можно было бы написать решение для уравнения (288):

$$\mathbf{H} = \exp\left(\int A\mathrm{d}x\right) \cdot \mathbf{H}_0, \tag{293}$$

где матричная экспонента - это

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ... \tag{294}$$

Однако, так сделать нельзя, потому что матрицы A некоммутативны для произвольных моментов времени. Чтобы обойти эту проблему, рассмотрим следующий подход. Представим вектор $\mathbf{H}$ не как столбец, а как строку. Тогда уравнение (288) примет вид:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{H} \cdot A. \tag{295}$$

Будем считать, что матрица A на интервалах Δt принимает постоянные значения $A_1, A_2, ...$ Тогда

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 \cdot [E + A_1 \Delta t], \tag{296}$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \cdot [E + A_2 \Delta t] = \mathbf{H}_0 \cdot [E + A_1 \Delta t] \cdot [E + A_2 \Delta t]. \tag{297}$$

На n - ом шаге мы получим:

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{H}_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} [E + A_i \Delta t]. \tag{298}$$

В пределе получим конструкцию, которая называется *мультипликативным интегралом Вольтерра*:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 \cdot \prod_{s=0}^{t} [E + A(s)\mathrm{d}s]. \tag{299}$$

Таким образом, формула Каца - Фейнмана для векторного поля примет вид:

$$\mathbf{H}(t,x) = M_x \left\{ \mathbf{H}_0(\xi_{t,x}) \cdot \prod_{s=0}^{t} (E + A\mathrm{d}s) \right\}. \tag{300}$$

Для средних полей: $\mathbf{B} = \langle \mathbf{H} \rangle$ справедливо:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot} \alpha \mathbf{B} + \beta \Delta \mathbf{B}, \tag{301}$$

$$\text{где} \quad \alpha = \frac{1}{3} \langle \mathbf{v} \cdot \mathrm{rot} \mathbf{B} \rangle \tau, \quad \beta = \frac{vl}{3}.$$

Величина α называется *спиральностью*, является псевдоскаляром (так как при смене системы координат с правой на левую она меняет знак) и топологическим инвариантом.

Вернёмся к рассмотрению уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla) u = \varepsilon \Delta t. \tag{302}$$

Рассмотрим случай, когда вместо бесконечных интервалов Δ мы рассматриваем конечные величины. Тогда (283) примет вид

$$\frac{T((n+1)\Delta, x) - T(n\Delta, x)}{\Delta} = \hat{L}T, \tag{303}$$

где $\hat{L}$ - некоторый интегральный оператор. Просто так взять интеграл в правой части (303) не получается, так как мы имеем дело с суперпозицией конвекции и случайного блуждания. Чтобы обойти эту проблему мы можем сделать некоторое преобразование, такое, что

$$u(t, x) = M_x\{Ju_0(x + \sqrt{2\varepsilon}W_t)\}, \tag{304}$$

где J - якобиан преобразования. Его можно подобрать из следующих соображений. Во - первых, должно выполняться свойство:

$$J_{[0,t]} = J_{[0,a]} \cdot J_{[a,t]}. \tag{305}$$

Этим свойством обладает экспонента. Так как якобиан - интегральная характеристика, в экспоненте должен стоять интеграл от безразмерной величины:

$$J \sim \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int v^2 \mathrm{d}t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\int v \mathrm{d}W_t\right]. \tag{306}$$

После прямой подстановки действительно получается уравнение для скорости.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ