



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

БОРИСОВ
АНАТОЛИЙ ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ШАРОФЕЕВА АНДРЕЯ КОНСТАНТИНОВИЧА



Содержание

1	Лекция №1. Принципы построения Стандартной модели	6
1.1	Принципы построения Стандартной модели электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий элементарных частиц	6
1.2	Как устроены взаимодействия в Стандартной модели?	6
1.3	Структура лагранжиана Вайнберга–Салама–Глэшоу	8
1.4	Структура токов	10
1.5	Слабые взаимодействия при низких энергиях	11
1.6	Проверка универсальности слабого взаимодействия	13
2	Лекция №2. Построение лептонного сектора Стандартной модели	14
2.1	Лептонный сектор Стандартной модели на примере одного поколения .	14
2.2	Спонтанного нарушения симметрии в Стандартной модели	18
3	Лекция №3. Генерация масс лептонов и калибровочных бозонов в Стандартной модели. Связь электромагнетизма и слабого взаимодействия	20
3.1	Генерация масс лептонов	20
3.2	Генерация масс калибровочных бозонов	21
3.3	Связь электромагнетизма и слабого взаимодействия. Структура взаимодействия калибровочных бозонов с фермионами	24
4	Лекция №4. Обобщение модели Вайнберга – Салама на три поколения лептонов. Матрица лептонного смешивания	27
4.1	Наивное обобщение лептонного сектора СМ на случай 3 поколений лептонов. Проблема нейтринных осцилляций	27
4.2	Обобщение лептонного сектора на случай 3 поколений лептонов, допускающее возможность нейтринных осцилляций	28
4.3	Структура взаимодействия лептонов с калибровочными бозонами. Матрица PMNS. Заряженный и нейтральный токи	30
4.4	Количество параметров PMNS–матрицы	31
4.5	Параметризация PMNS–матрицы	33
5	Лекция №5. Осцилляции нейтрино	34
5.1	Описание нейтринных осцилляций. Пример с двумя флейворами	34
5.2	Описание нейтринных осцилляций с тремя флейворами	36
5.3	Соотношения на PMNS–матрицу. Инвариант Ярлског	37
5.4	Осцилляции при доминировании одной массы	39
5.5	Энергия и импульс осциллирующих нейтрино	40

6	Лекция №6. Майорановские нейтрино. Механизм seesaw	42
6.1	В каком именно массовом состоянии рождаются нейтрино?	42
6.2	О волновом пакете нейтрино	42
6.3	Майорановские нейтрино	44
6.4	Майорановские нейтрино в Стандартной модели. Механизм seesaw . . .	47
6.5	Seesaw механизм как эффективная теория поля	49
7	Лекция №7. Эффективный лагранжиан для качельного механизма	50
7.1	О качельном механизме	50
7.2	Численные оценки масс нейтрино	50
7.3	Эффективный лагранжиан для качельного механизма	51
7.4	Обобщение качельного механизма на три лептонных поколения	53
7.5	Генерация масс нейтрино в Теории великого объединения с группой SO(10)	54
8	Лекция №8. Экспериментальная проверка модели Вайнберга – Са- лама	55
8.1	Безнейтринный двойной бета-распад	55
8.2	Экспериментальная проверка Стандартной модели	55
8.3	Экспериментальное измерение константы g	57
8.4	Экспериментальное измерение угла Вайнберга	57
8.5	Экспериментальное измерение масс калибровочных бозонов	58
8.6	Экспериментальные значения параметров модели Вайнберга – Салама	59
8.7	Распад $W \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$	61
8.8	Оценка полной ширины распада W -бозона	62
8.9	Каналы распада Z -бозона	62
8.10	Как экспериментально извлечь информацию о числе типов нейтрино? .	63
9	Лекция №9. Изучение W^- и Z-бозонов	65
9.1	Обнаружение W^- -бозона	65
9.2	Замечание: формула Брейта–Вигнера в квантовой механике	70
9.3	Обнаружение Z -бозона	72
9.4	Замечание: о поиске новых частиц через резонансные процессы	73
9.5	Замечание: исследование W^- и Z -бозонов	74
10	Лекция №10. Экспериментальное подтверждение открытия W^- и Z^-- бозонов. Бозон Хиггса	75
10.1	Открытие W^- и Z^- -бозонов	75
10.2	Бозон Хиггса	76

11 Лекция №11. Свойства бозона Хиггса	78
11.1 Анализ мод распада бозона Хиггса	78
11.2 Каналы рождения хиггсовского бозона на БАК	81
11.3 Теоретические ограничения на массу хиггсовского бозона	83
12 Лекция №12. CP–нарушение в Стандартной модели	90
12.1 CP–нарушение и смешивание частиц–античастиц	90
12.2 Феноменология CP–нарушения	90
12.3 Типы нарушения CP–чётности	92
12.4 CP–нарушение в Стандартной модели	93
12.5 Роль CP–нарушения в эволюции Вселенной	94
13 Лекция №13. Поиск хиггсовского бозона и основные каналы его распада	96
13.1 Основные каналы поиска хиггсовского бозона	97
13.2 Теоретические ограничения на массу хиггсовского бозона	97
14 Лекция №14. Стабильность и метастабильность вакуума Стандартной модели	107
14.1 Экспериментальная проверка свойств хиггсовского бозона	107
14.2 Вакуум в Стандартной модели	107
14.3 Стабильность вакуума и эффективный потенциал	110
14.4 Космологические аспекты метастабильности хиггсовского вакуума . . .	111

1 Лекция №1. Принципы построения Стандартной модели

1.1 Принципы построения Стандартной модели электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий элементарных частиц

Современная картина фундаментальных элементарных частиц сформировалась в последние десятилетия. Физическую роль сыграла теоретическая концепция локальной калибровочной симметрии и концепция калибровочных полей. Силы взаимодействия между элементарными частицами — результат обмена калибровочными бозонами спина 1. Постепенно выяснилось, что лептоны l и кварки q — элементарные составляющие всей материи (обычного вещества), причем они могут быть объединены в семейства (families). Особенно важным оказалось понятия «аромата» (flavor) и «цвет» (color).

Экспериментальное наблюдение слабых нейтральных токов (1973, CERN) подтвердило идею (Вайнберг, 1967 & Салам, 1968), что слабые и электромагнитные явления имеют общий источник. Дальнейшее исследование привели к обнаружению интерференции слабых и электромагнитных токов и затем к фундаментальному открытию (CERN, 1983) слабых калибровочных бозонов (промежуточных векторных бозонов) с массами, предсказанными ранее теоретически. Другое важное направление исследований — сильное взаимодействие. Оно привело в начале 70-х к установлению фундаментальной роли точной локальной цветовой калибровочной симметрии, характерной для взаимодействия кварков.

Стандартная модель характеризуется:

1. групповой структурой $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$;
2. левые компоненты фундаментальных фермионов преобразуются по фундаментальному представлению $SU(2)$, а правые — как синглеты (тривиальное представление) по $SU(2)$;
3. спонтанным нарушением симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$;
4. хиггсовское поле, являющееся дублетом, преобразуется по фундаментальному представлению $SU(2)$.

1.2 Как устроены взаимодействия в Стандартной модели?

Силы (взаимодействия) переносятся посредством калибровочных бозонов.

Standard Model of Elementary Particles

			three generations of matter (elementary fermions)			three generations of antimatter (elementary antifermions)			interactions / force carriers (elementary bosons)	
			I	II	III	I	II	III		
mass	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	0		0	$\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$
charge	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0		0	0
spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		0	0
	u up	c charm	t top	ū antiup	c̄ anticharm	t̄ antitop	g gluon		H higgs	
QUARKS	d down	s strange	b bottom	d̄ antidown	s̄ antistrange	b̄ antibottom	γ photon			
	$\approx 4.7 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 96 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 4.7 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 96 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$	0		0	
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0		0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		1	
	e electron	μ muon	τ tau	e⁺ positron	μ̄ antimuon	τ̄ antitau	Z Z ⁰ boson			
LEPTONS	$\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 105.66 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 105.66 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 91.19 \text{ GeV}/c^2$			
	-1	-1	-1	1	1	1	0		0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		1	
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	ν̄_e electron antineutrino	ν̄_μ muon antineutrino	ν̄_τ tau antineutrino	W⁺ W ⁺ boson		W⁻ W ⁻ boson	
	$< 2.2 \text{ eV}/c^2$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$	$< 18.2 \text{ MeV}/c^2$	$< 2.2 \text{ eV}/c^2$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$	$< 18.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 80.360 \text{ GeV}/c^2$		$\approx 80.360 \text{ GeV}/c^2$	
	0	0	0	0	0	0	1		-1	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		1	

Рис. 1.1: Элементарные частицы Стандартной модели.

Все взаимодействия можно описать на языке диаграмм Фейнмана (см. 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8).

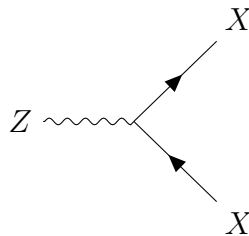


Рис. 1.2: X — произвольный фермион Стандартной модели.

Первый открытый фундаментальный фермион — электрон (Дж. Томсон, 1897). Для объяснения экспериментов по β -распаду ядер была введена (постулирована) нейтральная частица — нейтрино (В. Паули, 1929). В течение некоторого времени сформировалось представление о том, что нуклоны и мезоны — составные частицы (унитарная $SU(3)$ —симметрия адронов: вращения в 8-мерном вещественном пространстве; М. Гелл-Ман, Ю. Неэман, 1961; кварковая модель строения адронов: М. Гелл-Ман, Г. Цвейг, 1964: $|\text{meson}\rangle = qq'$, $|\text{baryon}\rangle = qq'q''$). При этом представления группы $SU(3)$ может быть использована для построения адронов. Для построения мезонов:

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8, \tag{1.1}$$

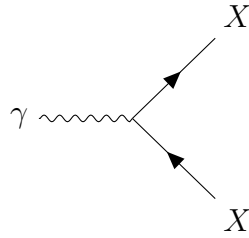


Рис. 1.3: X — электрически заряженный фермион.

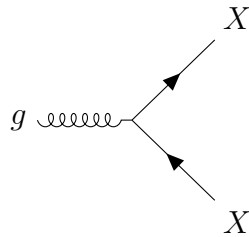


Рис. 1.4: X — любой кварк.

а для барионов:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10. \quad (1.2)$$

Только в 70-е годы стало очевидной периодичность свойств лептонов и кварков. Следствием её стало предсказание t -кварка в третьем поколении с известными (предсказанными) свойствами.

В отличие от $U(1)$ алгебры от $SU(2)$ и $SU(3)$ — неабелевы, т.е. некоммутативны. Следовательно, 3 бозона (W^+ , W^- , Z) и соответственно 8 глюонов g_i взаимодействуют друг с другом (в отличие от фотонов γ). Так как $m_\gamma = 0$, то радиус электромагнитного взаимодействия бесконечно велико. Слабое же взаимодействие короткодействующее, что обусловлено большой массой W^\pm и Z , связанной с нарушением симметрии. В случае же сильного взаимодействия имеем $m_g = 0$, но радиус действия, тем не менее, конечен (конфайнмент кварков и глюонов внутри адронов).

1.3 Структура лагранжиана Вайнберга–Салама–Глэшоу

Итак,

$$\mathcal{L}^{\text{GSW}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_H, \quad (1.3)$$

где

- \mathcal{L}_0 — лагранжиан свободных полей, квадратичный по полям;
- \mathcal{L}_{em} — электромагнитное взаимодействие;
- \mathcal{L}_C — лагранжиан заряженных слабых токов;

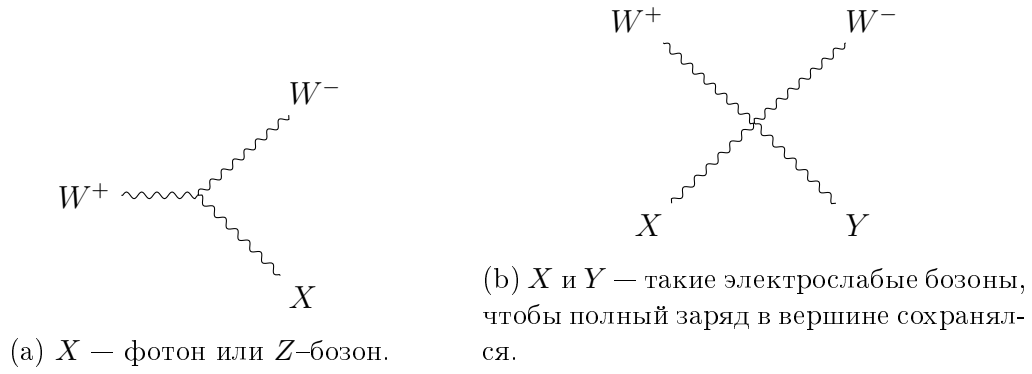


Рис. 1.8: Вершины самодействия электрослабых бозонов.

причём имеет место соотношение

$$e = g \sin \theta_W, \quad (1.8)$$

объединяющее слабые и электромагнитные взаимодействия.

Угол θ_W называется углом Вайнберга, который равен

$$\sin^2 \theta_W = 0.2259 \pm 0.0046. \quad (1.9)$$

Слагаемое \mathcal{L}_H обеспечивает массы W^\pm и Z и самодействие поля H .

1.4 Структура токов

Итак, выпишем структуру токов, входящих в \mathcal{L}^{GSW} :

$$J_\lambda^{\text{em}} = \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma_\lambda \psi_f, \quad (1.10)$$

$$J_\lambda^{\text{C}} = \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma_\lambda \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_l + \sum_{q, q'} \bar{\psi}_q \gamma_\lambda \frac{1 - \gamma_5}{2} V_{qq'} \psi_{q'} \quad (1.11)$$

$$J_\mu^{\text{N}} = \sum_f \bar{\psi}_f \gamma_\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) \psi_f, \quad (1.12)$$

где $l = (e, \mu, \tau)$ — заряженные лептоны, $q = (u, c, t)$ — верхние кварки, $q' = (d, s, b)$ — нижние кварки, $f = (l, q, q')$ — фундаментальные заряженные фермионы; Q_f — электрический заряд в единицах заряда позитрона; V — матрица Кабиббо–Кобаяши–Маскавы (СКМ–матрица), смешивающая кварковые флейворы, при этом V — унитарная матрица: $V^\dagger V = 1$.

Также $g_{V,A}^f$ — векторная и аксиально–векторная константы связи фермиона f с нейтральным векторным бозоном Z , которые зависят от $\sin^2 \theta_W$. Ток J_μ^{em} имеет

чисто векторную структуру, слабый заряженный ток — чисто $V - A$ -тип, т.е. с W^\pm взаимодействуют только левые компоненты фермионов ψ_{fL} ; слабый нейтральный ток имеет смешанную (V, A) -структуру, т.е. Z взаимодействует и с ψ_L , и с ψ_R .

1.5 Слабые взаимодействия при низких энергиях

При низких энергиях слабые взаимодействия описываются следующим эффективным лагранжианом:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} (J_\mu^{\dagger C} J^{C\mu} + 2\rho J_\mu^N J^{N\mu}), \quad (1.13)$$

где G_F — константа связи Ферми:

$$G_F \simeq \frac{10^{-5}}{m_p^2}. \quad (1.14)$$

Этот вид \mathcal{L}_{eff} был получен из анализа экспериментальных данных в области низких энергий, причём ρ описывает относительную силу нейтрального тока.

В рамках Стандартной модели \mathcal{L}_{eff} получается в пределе малых переданных импульсов: $|q|^2 \ll m_V^2$ ($V = W, Z$). Рассмотрим, например, процесс рассеяния (обратный распад мюона):

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e, \quad (1.15)$$

обусловленный заряженным током:

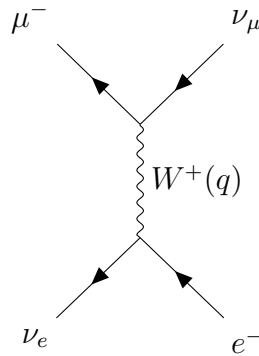


Рис. 1.9: Диаграмма Фейнмана процесса $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$.

Соответствующая диаграмма Фейнмана в древесном приближении представлена на 1.9. Амплитуда процесса есть

$$\mathcal{M}_{fi} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[\bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_{\nu_\mu} \right] D_{\alpha\beta}(q) \left[\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\beta \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_e \right], \quad (1.16)$$

где $D_{\alpha\beta}(q)$ — пропагатор W -бозона в импульсном представлении:

$$D_{\alpha\beta}(q) = -\frac{g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / m_W^2}{q^2 - m_W^2 + i0}. \quad (1.17)$$

Этот пропагатор получается из уравнения Прока:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 A_\nu = j_\nu, \quad (1.18)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.19)$$

откуда

$$[\square + m^2] A_\mu = \left(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2} \right) j^\nu, \quad (1.20)$$

тогда

$$A_\mu(x) = \int D_{\mu\nu}(x - x') j^\nu(x') d^4x' \quad (1.21)$$

и

$$D_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} D_{\mu\nu}(q). \quad (1.22)$$

При $|q|^2 \ll m_W^2$ получаем:

$$D_{\alpha\beta}(q) \simeq \frac{g_{\alpha\beta}}{m_W^2} \quad (1.23)$$

и

$$\mathcal{M}_{fi} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 [\bar{\psi}_\mu \gamma_L^\alpha \psi_{\nu_\mu}] D_{\alpha\beta}(q) [\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_{\alpha L} \psi_e], \quad (1.24)$$

откуда восстанавливается структура вида «ток на ток»:

$$\left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{m_W^2} J_\alpha^{\dagger C} J^{C\alpha}, \quad (1.25)$$

т.е.

$$\left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{m_W^2} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \quad (1.26)$$

или

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \quad (1.27)$$

Аналогично рассмотрим процесс $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$, обусловленный только нейтральным током J_α^N (см. диаграмму Фейнмана 1.10).

Тогда получим:

$$\mathcal{L}_N \rightarrow \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 \frac{1}{m_Z^2} J_\alpha^N J^{N\alpha}, \quad (1.28)$$

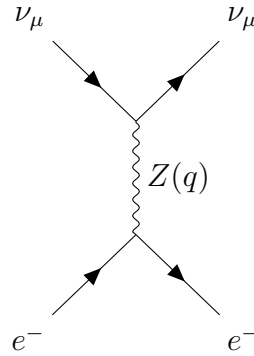


Рис. 1.10: Диаграмма Фейнмана процесса $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$.

откуда

$$\rho \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_Z^2 \cos^2 \theta_W}, \quad (1.29)$$

т.е.

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W}. \quad (1.30)$$

В Стандартной модели $\rho = 1$ (следует из дублетной структуры хиггсовского сектора).

1.6 Проверка универсальности слабого взаимодействия

Проверим универсальность слабого взаимодействия, т.е. его независимость от поколения. Для этого можно рассмотреть следующие процессы:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (1.31)$$

и

$$\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau. \quad (1.32)$$

Вычисляя ширины их распада в пренебрежении массой конечных продуктов:

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu) = c_\mu G_F^2 m_\mu^5, \quad (1.33)$$

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau) = c_\tau G_F^2 m_\tau^5. \quad (1.34)$$

При этом $c_\mu = c_\tau$ из-за одинаковой структуры лагранжиана (то, что проверяем). Тогда

$$\frac{\Gamma_\tau}{\Gamma_\mu} = \begin{cases} R_{\text{th}} = (m_\tau/m_\mu)^5 = 1.34 \times 10^5, \\ R_{\text{exp}} = 1.35 \times 10^6. \end{cases} \quad (1.35)$$

Видно, что гипотеза универсальности действительно справедлива.

2 Лекция №2. Построение лептонного сектора Стандартной модели

2.1 Лептонный сектор Стандартной модели на примере одного поколения

Определим калибровочную группу, которая станет симметрией теории. Такой группой стала $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Отметим, что индекс L у группы $SU(2)$ указывает на то, что именно левые фермионы нетривиально преобразуются под действием группы $SU(2)$; индекс Y у группы $U(1)$ будет отвечать за сохранение гиперзаряда.

Из спинорного представления группы Лоренца следует, что фермионное поле может быть представлено как сумма левой и правой проекций,

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (2.1)$$

где ψ_L и ψ_r — левый и правый спинор соответственно, причём

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad \psi_L = P_L \psi, \quad (2.2)$$

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad \psi_R = P_R \psi. \quad (2.3)$$

По определению

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (2.4)$$

Напомним, что γ_5 антикоммутирует со всеми гамма-матрицами,

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (2.5)$$

и

$$(\gamma_5)^2 = 1. \quad (2.6)$$

Можно убедиться, что

$$P_{L,R}^2 = P_{L,R}, \quad (2.7)$$

$$P_L P_R = 0. \quad (2.8)$$

Рассмотрим лагранжиан свободного массивного дираковского поля,

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (2.9)$$

который можно разложить по левым и правым компонентам,

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}_L i \hat{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \hat{\partial} \psi_R - m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L), \quad (2.10)$$

где $\hat{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. **Постулируем**, что левые компоненты преобразуются по фундаментальному представлению группы $SU(2)$ (поэтому записывают как $SU(2)_L$), а правые являются синглетами по этой группе, то есть никак не преобразуются. Видно, что массовый член в лагранжиане (2.10) калибровочно не инвариантен относительно $SU(2)_L$ ¹.

Пока ограничиваясь случаем только одного поколения лептонов, то есть пока одним левым дублетом, который запишем как

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

который под действием группы $U \in SU(2)_L$ преобразуется как $L' = UL \in SU(2)_L$, и правыми синглетом

$$e_R, \quad \nu_{eR} \quad (2.12)$$

не преобразуются, то есть $e'_R = e_R$ и $\nu'_{eR} = \nu_{eR}$. Напомним, что общий вид матрицы $U = \exp(i\omega^a \tau^a / 2)$ ², где τ^a — матрицы Паули, $a = 1, 2, 3$.

Полный оператор изоспина обозначается как I . Изоспин образует алгебру Ли, которая в группе $SU(2)$ выглядит как

$$[I_a, I_b] = i\varepsilon_{abc} I_c, \quad I^2 = \sum_a I_a^2, \quad (2.13)$$

причём собственные числа оператора I^2 есть $I(I+1)$; $I = 1/2$ для фундаментального представления. Различие компонент дублета (2.11) заключается в проекции изоспина I на выделенную ось, обычно обозначаемый как I_3 , а именно $I_3(\nu_{eL}) = +1/2$, $I_3(e_L) = -1/2$.

Введём дополнительное квантовое число — электрический заряд. Феноменологически было замечено³, что электрический заряд членов дублета можно представить как

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (2.14)$$

где Y есть гиперзаряд, то есть заряд, не связанный с группой изоспина. **Постулируем**, что Y есть заряд группы $U(1)$ (поэтому записывается как $U(1)_Y$). Чтобы выполнялась формула (2.14) необходимо задать гиперзаряд левых фермионов $Y_L = -1$,

¹Отсюда следует, что таким способом нельзя ввести массу в Стандартной модели. Масса в Стандартной модели вводится с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии. Также такой способ, как мы увидим в дальнейшем, генерирует не только массы фермионов, но и массы калибровочных бозонов.

²Здесь и далее сумма по повторяющимся индексам подразумевается, если не оговорено обратное.

³Впервые — при описании симметрии сильных взаимодействий.

⁴Введена независимо Гелл-Маном и Нисидзимой, поэтому имеет название — формула Гелл-Мана — Нисидзимы.

гиперзаряд правого электрона есть $Y(e_R) = -2$, гиперзаряд правого нейтрино есть $Y(\nu_{eR}) = 0^5$.

Как уже отмечалось выше, из требования калибровочной симметрии теории необходимо ввести массу, причём механизм получения фермионами массы происходит по механизму Хиггса (спонтанного нарушения симметрии (СНС)), который понижает симметрию до новой группы,

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\text{СНС}} U(1)_Q, \quad (2.15)$$

которая отличается от группы гиперзаряда $U(1)_Y$ (часто пишу $U(1)_{em}$ вместо $U(1)_Q$). Введём соответствующие калибровочные бозоны, преобразующиеся по присоединённому представлению группы: группе $SU(2)_L$ будут соответствовать бозоны W_μ^a , $a = 1, 2, 3$, а абелевой группы $U(1)_Y$ будет соответствовать поле B_μ .

Первоначально в формулировку теорию мы введём взаимодействие фермионных полей с комплексным скалярным полем, которое называется хиггсовским полем. **Постулируем**, что само хиггсовское поле φ тоже будет преобразовываться по фундаментальному представлению группы $SU(2)$. Традиционно дублет хиггсовского поля записывается как

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

преобразующийся по закону $\varphi' = U\varphi$, $U \in SU(2)$. Из четырёх компонент хиггсовского дублета (2.16) физической окажется только одна, соответствующая наблюдаемой на опыте полю хиггсовского бозона.

Графическое изображение тех мультиплетов, которые мы уже ввели, для группы $SU(2)$ выглядит как показано на графике ??.

Итак, полная теория электрослабого взаимодействия $SU(2)_L \times U(1)_Y$ со спонтанным нарушением симметрии.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{l\varphi}, \quad (2.17)$$

где \mathcal{L}_G отвечает за калибровочную часть теории, \mathcal{L}_l — за лептонную часть вместе со взаимодействием с калибровочными бозонами, \mathcal{L}_φ — часть, связанную с полем φ , $\mathcal{L}_{l\varphi}$ — за генерацию массы в результате СНС. Теперь подробнее,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\varepsilon_{abc}W_\mu^b W_\nu^c)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2, \quad (2.18)$$

где первое слагаемое отвечает за неабелеву группу $SU(2)_L$ ⁶, второе — за абелеву груп-

⁵Отметим, что групповая структура $SU(2)_L \times U(1)_Y$ не предполагает квантование электрического заряда. Группа $U(1)$ допускает произвольный электрический заряд. Квантование электрического заряда лежит за пределами Стандартной модели.

⁶Заметим, что теория автоматически с самодействием даже в отсутствие со взаимодействием

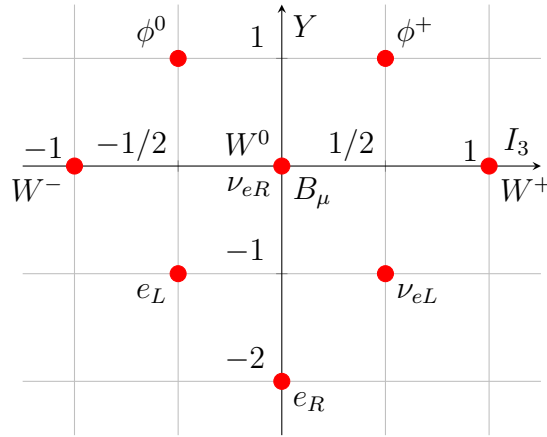


Рис. 2.1: Мультиплет теории. Физическими полями будут являться $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp W_\mu^2)$, что будет проверено после спонтанного нарушения симметрии теории $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$.

пу $U(1)_Y$; g — константа. Чтобы записать второе слагаемое теории электрослабого взаимодействия, необходимо ввести «длинную» производную. По определению она вводится как

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi, \quad (2.19)$$

где g' — ещё одна константа. Так как гиперзаряд левого дублета L равен $Y_L = -1$, гиперзаряд правого электрона есть $Y(e_R) = -2$, гиперзаряд правого нейтрино есть $Y(\nu_{eR}) = 0$, то модификация на случай калибровочных полей теории дираковского безмассового свободного (2.10) есть

$$\mathcal{L}_l = \bar{L} i \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} \cdot W_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) L + \bar{e}_R i \gamma^\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu) e_R + \bar{\nu}_{eR} i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eR}. \quad (2.20)$$

Далее

$$\mathcal{L}_\varphi = \left| \left(\partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a + \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \varphi \right|^2 - V(\varphi^\dagger \varphi), \quad (2.21)$$

где потенциал хиггсовского поля есть

$$V(\varphi^\dagger \varphi) = -\mu^2 \varphi^\dagger \varphi + \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2, \quad (2.22)$$

причём подразумевается, что $\mu^2 > 0$. Юкавское взаимодействие заложено в последнее слагаемое теории,

$$\mathcal{L}_{l\varphi} = -y_e [\bar{e}_R (\varphi^\dagger L) + (\bar{L} \varphi) e_R] - y_\nu [\bar{\nu}_{eR} (\tilde{\varphi}^\dagger L) + (\bar{L} \tilde{\varphi}) \nu_{eR}], \quad (2.23)$$

другими полями теории.

где y_e, y_ν — юкавские константы, а $\tilde{\varphi} = i\tau^2\varphi^*$, введённый для сохранения электрического заряда. Напомним, что

$$i\tau^2 = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

поэтому фактически $i\tau^2$ — антисимметричный тензор второго ранга.

Таким образом, в теории введены следующие константы: $g, g', y_e, y_\nu, \mu^2, \lambda$ — 6 параметров для одного поколения лептонов.

Упражнение. Показать, что если хиггсовское поле преобразуется как $\varphi' = U\varphi$, $U \in SU(2)$, то $\tilde{\varphi}' = U\tilde{\varphi}$.

Перейдём теперь к рассмотрению генерации массы в Стандартной модели.

2.2 Спонтанного нарушения симметрии в Стандартной модели

В результате спонтанного нарушения симметрии (механизм Браута — Энглера — Хиггса) хиггсовское поле получает массу, сваливаясь в вакуумное состояние с отличным от нуля значением поля. На языке классической теории поля это можно сформулировать как

$$|\varphi|^2 = \varphi^\dagger\varphi = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}, \quad (2.25)$$

где в квантовой теории

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (2.26)$$

В результате нарушения СНС вакуумное состояние поля есть

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

При действии оператора заряда на вакуумное состояние φ_0 получим, что

$$Q\varphi_0 = \left(I_3 + \frac{Y}{2} \right) \varphi_0 = 0. \quad (2.28)$$

Для удобства физической интерпретации удобно отсчитывать физическое поле хиггсовского бозона от v ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Подействуем на это поле матрицей $U \in \text{SU}(2)$,

$$\varphi'(x) = U\varphi(x) = \underbrace{\exp\left(i\frac{\tau^a}{2} \cdot \frac{\xi^a(x)}{v}\right)}_{=U} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Так как теория является калибровочно инвариантной, то сделаем следующее калибровочное преобразование (унитарная калибровка),

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = U^{-1}\varphi. \quad (2.31)$$

Такая калибровка позволяет доказать унитарность S -матрицу.

3 Лекция №3. Генерация масс лептонов и калибровочных бозонов в Стандартной модели.

Связь электромагнетизма и слабого взаимодействия

3.1 Генерация масс лептонов

Продолжим обсуждение механизма генерации массы в Стандартной модели (механизм Браута — Энглера — Хиггса) на примере одного поколения лептонов⁷. Масса вводится с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии за счёт взаимодействия фермионных полей с хиггсовским дублетом. Хиггсовское поле есть комплексный дублет по отношению к калибровочной группе $SU(2)$,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Удобная параметризация для физической интерпретации для поля φ следующая,

$$\varphi = \underbrace{\exp\left(\frac{i}{v}\xi^a(x)\frac{\tau^a}{2}\right)}_{=U \in SU(2)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Поскольку лагранжиан локально калибровочно инвариантен, то мы можем выбрать унитарную калибровку,

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = U^{-1}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Дублет фермионных полей преобразуется также: $L \longrightarrow L' = U^{-1}L$; правые компоненты фермионных полей являются синглетами по отношению к группе $SU(2)$, поэтому $R \longrightarrow R' = R$. Также

$$W_\mu = W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} \longrightarrow W'_\mu = U^{-1}W_\mu U - \frac{i}{g} (\partial_\mu U^{-1}) U \quad (3.4)$$

Калибровочное поле, отвечающее группе $U(1)$, является, очевидно, синглетом по отношению к $SU(2)$,

$$B'_\mu = B_\mu. \quad (3.5)$$

⁷Обобщение будет сделано в дальнейшем.

Масса фермионов возникает из части лагранжиана, описывающей юкавское взаимодействие,

$$\mathcal{L}_{l\varphi} = -y_e [\bar{e}_R (\varphi^\dagger L) + (\bar{L}\varphi) e_R] - y_\nu [\bar{\nu}_{eR} (\tilde{\varphi}^\dagger L) + (\bar{L}\tilde{\varphi}) \nu_{eR}]. \quad (3.6)$$

Сейчас для простоты описывается генерация массы для нейтрино, которое является дираковской частицей. В дальнейшем будет рассмотрена и дираковская, и майорановская массы. Массовое слагаемое возникнет, если в (3.6) заменить поле Хиггса на его вакуумное состояние поле Хиггса,

$$\varphi \longrightarrow \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi} \longrightarrow \tilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Вспоминая, что левый дублет лептонов выглядит как

$$L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

тогда часть лагранжиана юкавского взаимодействия лептонов с полем Хиггса (3.6) преобразуется как

$$\mathcal{L}_{l\varphi} = -\frac{y_e (v + H)}{\sqrt{2}} [\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R] - \frac{y_\nu (v + H)}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_{eR} \nu_{eL} + \bar{\nu}_{eL} \nu_{eR}] \quad (3.9)$$

$$= -\frac{y_e (v + H)}{\sqrt{2}} \bar{e}(x) e(x) - \frac{y_\nu (v + H)}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(x) \nu_e(x). \quad (3.10)$$

Отсюда видно, что слагаемое вида

$$m_e = \frac{y_e v}{\sqrt{2}} \quad (3.11)$$

следует интерпретировать как массу электрона. Аналогично масса нейтрино есть

$$m_\nu = \frac{y_\nu v}{\sqrt{2}}. \quad (3.12)$$

А члены вида $-y_e H \bar{e} e$ и $-y_\nu H \bar{\nu}_e \nu_e$ суть юкавское взаимодействие бозона Хиггса с соответствующими фермионами.

3.2 Генерация масс калибровочных бозонов

Напомним, что хиггсовский кинетический член выглядит как

$$\mathcal{L}_\varphi = (D_\mu \varphi)^\dagger D^\mu \varphi - V(\varphi^\dagger \varphi), \quad (3.13)$$

в котором содержится после спонтанного нарушения симметрия масса для калибровочных бозонов. Напомним вид «удлинённой» производной,

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\tau^a}{2}W_\mu^a + \frac{i}{2}g'B_\mu. \quad (3.14)$$

Сделаем унитарную калибровку поля φ , после чего поля W_μ и B_μ преобразуются как (3.4), (3.5). Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в «удлинённой» производной,

$$\partial_\mu\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

тогда часть

$$(\partial_\mu\varphi)^\dagger\partial^\mu\varphi = \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H \quad (3.16)$$

есть кинетическое слагаемое для поля H . Другой член есть

$$\varphi^\dagger \left(-ig\frac{\tau^a}{2}W_\mu^{a\dagger} \right) \left(ig\frac{\tau^b}{2}W^{\mu b} \right) \varphi, \quad (3.17)$$

и так как

$$\tau^a\tau^b = i\varepsilon^{abc}\tau^c + \delta^{ab}, \quad (3.18)$$

то получим, что

$$\frac{g^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu |\varphi|^2 = \frac{g^2(v+H)^2}{8}W_\mu^{a\dagger}W^{\mu a}. \quad (3.19)$$

Аналогично получим, что

$$\frac{g'^2(v+H)^2}{8}B_\mu^\dagger B^\mu. \quad (3.20)$$

Перекрёстные слагаемые будут иметь вид,

$$\frac{gg'}{8}(v+H)^2W_\mu^{a\dagger}B^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tau^a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{h.c.} = -\frac{gg'}{8}(v+H)^2W_\mu^{3\dagger}B^\mu + \text{h.c.} \quad (3.21)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varphi = & \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 - \mu^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 \\ & + \frac{1}{8}(v+H)^2 (g^2W_\mu^{a\dagger}W^{\mu a} + g'^2B_\mu^\dagger B^\mu - 2gg'B^\mu W_\mu^3). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Так как поле H является действительным (в квантовой теории поля — эрмитовым оператором), то канонически нормированный массовый член бозона Хиггса есть

$$m_H^2 = 2\mu^2 = 2\lambda v^2, \quad (3.23)$$

$$m_H = \sqrt{2\lambda}v, \quad (3.24)$$

то есть масса бозона Хиггса связана с самодействием бозона Хиггса. Проведём диагонализацию второй строчки выражения (3.22) (по существу — поворот в пространстве полей). Введём две линейно независимые комбинации полей W_μ^3 и B_μ ,

$$A_\mu = B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W, \quad (3.25)$$

$$Z_\mu = -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W, \quad (3.26)$$

θ_W — угол Вайнберга. Угол Вайнберга связан с константами g и g' следующим образом,

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g}. \quad (3.27)$$

В терминах полей A_μ , Z_μ квадратичная форма (вторая строка (3.22)) примет вид

$$\frac{1}{8}(v + H)^2 (2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + (g^2 + g'^2) Z_\mu^2), \quad (3.28)$$

где $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$, откуда следует, что масса W^\pm -бозон есть

$$m_W = \frac{1}{2}gv, \quad (3.29)$$

масса Z -бозона есть

$$m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v = \frac{m_W}{\cos \theta_W}, \quad (3.30)$$

а калибровочное поле A_μ в теории является безмассовым

$$m_A = 0. \quad (3.31)$$

Заметим, что мы сразу получили теоретическое предсказание, что

$$m_Z > m_W. \quad (3.32)$$

3.3 Связь электромагнетизма и слабого взаимодействия. Структура взаимодействия калибровочных бозонов с фермионами

В реальности $m_W \approx 80.4$ ГэВ, а $m_Z \approx 91$ ГэВ. Выразим весь лагранжиан в терминах физических полей,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W^{-\mu\nu} \\ & -ieF_{\mu\nu}W^{+\mu}W^{-\nu} - g^2 \cos^2 \theta_W [(W_\nu^+W^{-\mu})Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+Z^\mu(W^{-\nu}Z_\nu)] \\ & +ig \cos \theta_W Z_{\mu\nu}W^{+\mu}W^{-\nu} + \frac{i}{2}g \cos \theta_W [W_{\mu\nu}^+(W^{-\mu}Z^\nu - W^{-\nu}Z^\mu) - \text{h.c.}] \end{aligned} \quad (3.33)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.34)$$

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad (3.35)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (3.36)$$

$$W_{\mu\nu}^+ = D_\mu W_\nu^+ - D_\nu W_\mu^+, \quad (3.37)$$

$$W_{\mu\nu}^- = D^{\dagger\mu}W^{-\nu} - D^{\dagger\nu}W^{-\mu}, \quad (3.38)$$

$$e = g \sin \theta_W. \quad (3.39)$$

Итак, докажем последнее тождество, которое и даёт основание говорить об объединении электромагнитного и слабого взаимодействий и говорить просто об электрослабом взаимодействии. Запишем лептонную часть (для дираковских нейтрино) лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l = & (\bar{\nu}_{eL}, \bar{e}_L) i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu) e_R \\ & + \bar{\nu}_{eR} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eR} \end{aligned} \quad (3.40)$$

в терминах физических полей,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l = & \bar{\nu}_e i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_e + \bar{e} i\gamma^\mu \partial_\mu e - \frac{g}{2} \left[\bar{\nu}_{eL} \hat{W}^3 \nu_{eL} + \sqrt{2} \bar{\nu}_L \hat{W}^+ e_L + \sqrt{2} \bar{e}_L \hat{W} \nu_L - \bar{e}_L \hat{W}^3 e_L \right] \\ & + \frac{g'}{2} \left(\bar{\nu}_{eL} \hat{B} \nu_{eL} + \bar{e}_L \hat{B} e_L \right) + g' \bar{e}_R \hat{B} e_R, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $e = e_L + e_R$, и где было учтено, что

$$\tau^a W_\mu^a = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l &= \bar{\nu}_e i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_e + \bar{e} i \gamma^\mu \partial_\mu e \\ &- \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_{eL} \hat{W}^+ e_L + \bar{e}_L \hat{W}^- \nu_{eL} \right) + \frac{1}{2} \bar{\nu}_{eL} \left(-g \hat{W}^3 + g' \hat{B} \right) \nu_{eL} + \frac{1}{2} \bar{e}_L \left(g \hat{W}^3 + g' \hat{B} \right) e_L \\ &+ g' \bar{e}_R \hat{B} e_R. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Назовём временно $s = \sin \theta_W$, $c = \cos \theta_W$, $t = \tan \theta_W$, тогда вспомним, что

$$A = cB + sW^3, \quad (3.44)$$

$$Z = -sB + cW^3, \quad (3.45)$$

откуда обратное преобразование есть

$$B = cA - sZ, \quad (3.46)$$

$$W^3 = sA + cZ, \quad (3.47)$$

тогда при подстановке этих полей в \mathcal{L}_l имеем,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{e}_L \left(g \hat{W}^3 + g' \hat{B} \right) e_L + g' \bar{e}_R \hat{B} e_R &= \frac{1}{2} \bar{e}_L \left(g \hat{W}^3 + g' \frac{s}{c} \hat{B} \right) e_L + g' \frac{s}{c} \bar{e}_R \hat{B} e_R \\ &= \frac{g}{2c} \bar{e}_L \left[c \left(s \hat{A} + c \hat{Z} \right) + s \left(c \hat{A} - s \hat{Z} \right) \right] + \frac{g}{c} \bar{e}_R \left[sc \hat{A} - s^2 \hat{Z} \right] e_R. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Вспомним, как в явном виде записываются проекторы,

$$\begin{aligned} e_L &= \frac{1 - \gamma_5}{2} e, \\ e_R &= \frac{1 + \gamma_5}{2} e, \\ \bar{e}_L e_R &= \bar{e} \frac{1 + \gamma_5}{2} \cdot \frac{1 + \gamma_5}{2} e \end{aligned} \quad (3.49)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{g}{2c} \bar{e}_L \left[c \left(s \hat{A} + c \hat{Z} \right) + s \left(c \hat{A} - s \hat{Z} \right) \right] + \frac{g}{c} \bar{e}_R \left[sc \hat{A} - s^2 \hat{Z} \right] e_R \\ = \frac{g}{2c} \left[2cs \bar{e} \hat{A} \frac{1 + \gamma_5}{2} e + 2cs \bar{e} \hat{A} \frac{1 - \gamma_5}{2} e \right] \\ = g \bar{e} \hat{A} e. \end{aligned} \quad (3.50)$$

откуда видно, что электромагнетизм не нарушает P -чётность. Итак,

$$\bar{e} i \gamma^\mu \partial_\mu e + g \bar{e} \hat{A} e = \bar{e} i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i g_s A_\mu \right) e. \quad (3.51)$$

Для заряженных полей мы записываем, что «удлинённая» производная есть

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (3.52)$$

где q — заряд частицы. Отсюда видно, что заряд электрона выходит действительно отрицательным, а также существует связь между константой g и элементарным зарядом,

$$e = g \sin \theta_W. \quad (3.53)$$

Можно проверить, что поле e взаимодействует с полем Z следующим образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eZ} &= \frac{g}{2c} \left[\bar{e}_L (c^2 - s^2) \hat{Z} e_L - 2s^2 \bar{e}_R \hat{Z} e_R \right] \\ &= -\frac{g}{\cos \theta_W} \bar{e} \left[-\frac{1}{2} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} + \sin^2 \theta_W \gamma^\mu \right] e Z_\mu. \end{aligned} \quad (3.54)$$

А взаимодействие поля ν с Z имеем вид

$$\mathcal{L}_{\nu Z} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \left(\bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_e \right) Z_\mu. \quad (3.55)$$

Как видно по структуре \mathcal{L}_{eZ} и $\mathcal{L}_{\nu Z}$ можно написать общую структуру взаимодействия лагранжиана взаимодействия фермионов с Z -бозоном,

$$\mathcal{L}_{fZ} = \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{f}(x) \left[I_3^f \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} - Q_f \sin^2 \theta_W \gamma^\mu \right] Z_\mu, \quad (3.56)$$

где Q_f — заряд в единицах элементарного заряда. А лагранжиан взаимодействия поля A с фермионами можно записать как

$$\mathcal{L}_{fA} = -Q_f e [\bar{f} \gamma^\mu f] A_\mu. \quad (3.57)$$

4 Лекция №4. Обобщение модели Вайнберга – Салама на три поколения лептонов. Матрица лептонного смешивания

4.1 Наивное обобщение лептонного сектора СМ на случай 3 поколений лептонов. Проблема нейтринных осцилляций

Обобщим всю конструкцию на случай трёх поколений лептонов (часто говорят просто флейворы). В случае трёх поколений лептонов

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

Левый дублет теперь будет обладать индексом $\alpha = e, \mu, \tau$,

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ l_\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Наивно конструкция лагранжиана будет представлять собой

$$\mathcal{L} = \sum_\alpha \mathcal{L}^{(\alpha)}, \quad (4.3)$$

что приводит к тому, что можно будет менять фазы фермионных полей независимо, то есть можно подвергнуть преобразованию из группы $U(1)$, а именно

$$L_\alpha \longrightarrow L'_\alpha = e^{i\theta N_\alpha} L_\alpha, \quad (4.4)$$

где θ — параметр преобразования, N_α — лептонное число (lepton family number). Аналогично можно проделать с правым синглетом лептонов,

$$l'_{\alpha R} = e^{i\theta N_\alpha} l_{\alpha R}, \quad \nu'_{\alpha R} = e^{i\theta N_\alpha} \nu_{\alpha R}, \quad (4.5)$$

таким образом в процессах слабого взаимодействия будет сохраняться лептонное число N_α . По определению можно приписать частицам лептонное число $N_\alpha = +1$, а античастицам $N_\alpha = -1$. На примере процесса распада мюона, то есть $\mu^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$, можно убедиться, что лептонное число сохраняется, так как $N_\mu = +1$, $N_e = +1$, $N_{\bar{\nu}_e} = -1$, $N_{\nu_\mu} = +1$.

Однако такая наивная схема построения лагранжиана **не подтверждается экспериментально**, так как в природе **наблюдаются нейтринные осцилляции**, то есть переход нейтрино одного типа флейвора в другой тип флейвора (процессы меж-

ду поколениями). Например, в природе наблюдаются процесс вида $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, что явно нарушает сохранение лептонного числа; однако пока экспериментально не обнаружено нарушение суммы лептонных чисел, $N = \sum_\alpha N_\alpha$.

4.2 Обобщение лептонного сектора на случай 3 поколений лептонов, допускающее возможность нейтринных осцилляций

Введём возможность перехода между разными поколениями. Рассмотрим лагранжиан взаимодействия лептонов с хиггсовским бозоном,

$$\mathcal{L}_{l\varphi} = -y_e \bar{L} \varphi e_R - y_\nu \bar{L} \tilde{\varphi} \nu_{eR} + \text{h.c.}, \quad (4.6)$$

который обобщим от одной юкавской константы до матрицы юкавских констант,

$$\mathcal{L}_{l\varphi} = -y_{\alpha\beta}^l \bar{L}'_\alpha \varphi l'_{\beta R} - y_{\alpha\beta}^\nu \bar{L}'_\alpha \tilde{\varphi} \nu'_{\beta R} + \text{h.c.}, \quad (4.7)$$

где $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$, l — заряженные лептоны. Штрих показывает то, что мы работает пока со вспомогательными полями, пока не диагонализовали лагранжиан для получения масс. Видно, что увеличилось число параметров лагранжиана. Для физической интерпретации перейдём в унитарную калибровку поля φ ,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Обозначим поля левых и правых лептонов (пока нефизические) как

$$l'_L = \begin{pmatrix} e'_L \\ \mu'_L \\ \tau'_L \end{pmatrix}, \quad l'_R = \begin{pmatrix} e'_R \\ \mu'_R \\ \tau'_R \end{pmatrix}, \quad \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ \nu'_{\mu L} \\ \nu'_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu'_{eR} \\ \nu'_{\mu R} \\ \nu'_{\tau R} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Тогда

$$\mathcal{L}_{lH} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (v + H) [\bar{l}'_L Y^l l'_R + \bar{\nu}'_L Y^\nu \nu'_R] + \text{h.c.} \quad (4.10)$$

В общем виде элементы матриц Y^l и Y^ν являются комплексными числами (не ограничивая общности можно считать эти матрицы симметричными). Мы хотим получить диагональный вид лагранжиана для физической интерпретации, поэтому совершим биунитарное преобразование, смысл которого в том, что существуют такие унитарные матрицы, что они диагонализуют матрицу, собственные числа которой являются неотрицательными числами (по физическому смыслу будут массами лептонов). Для

заряженных лептонов это утверждение можно записать как

$$\frac{v}{\sqrt{2}} (V_L^l)^\dagger Y^l V_R^l = M^l = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau), \quad (4.11)$$

где V_L^l и V_R^l — две унитарные матрицы, а m_e, m_μ, m_τ — массы заряженных лептонов. Аналогичное биунитарное преобразование можно совершить и для незаряженных лептонов,

$$\frac{v}{\sqrt{2}} (V_L^\nu)^\dagger Y^\nu V_R^\nu = M^\nu = \text{diag}(m_1, m_2, m_3), \quad (4.12)$$

где m_1, m_2, m_3 — массы массовых состояний (не есть массы флейворных нейтрино). В результате получим, что физические поля заряженных лептонов есть

$$l_L = (V_L^l)^\dagger l'_L = \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad l_R = (V_R^l)^\dagger l'_R = \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Поля нейтрино будем обозначать как

$$n_L = (V_L^\nu)^\dagger \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}, \quad n_R = (V_R^\nu)^\dagger \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

В итоге лагранжиан взаимодействия лептонов с хиггсовскими полями будет записываться как

$$\uparrow \mathcal{H} = - \left(1 + \frac{H}{v} \right) [\bar{l}_R M^l l_R + \bar{n}_L M^\nu n_L] + \text{h.c.} \quad (4.15)$$

Подробно это можно расписать как

$$\mathcal{L}_{lH} = - \sum_\alpha m_\alpha \bar{l}_\alpha l_\alpha - \sum_k m_k \bar{\nu}_k \nu_k - \frac{1}{v} \sum_\alpha m_\alpha \bar{l}_\alpha l_\alpha H - \frac{1}{v} \sum_k m_k \bar{\nu}_k \nu_k H, \quad (4.16)$$

где

$$l_\alpha = l_{\alpha L} + l_{\alpha R}, \quad (4.17)$$

α — флейворный индекс,

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kR} \quad (4.18)$$

k — массовый индекс для нейтрино.

Таким образом, мы построили лагранжиан на случай трёх поколений лептонов.

4.3 Структура взаимодействия лептонов с калибровочными бозонами. Матрица PMNS. Заряженный и нейтральный токи

Заряженный ток будет иметь вид

$$j_\lambda^C = \bar{\nu}'_L \gamma_\lambda l'_L = \bar{\nu}' \gamma_\lambda \frac{1 - \gamma_5}{2} l'. \quad (4.19)$$

В терминах физических полей имеем следующее,

$$j_\lambda^C = \bar{n}_L (V_L^\nu)^\dagger \gamma_\lambda V_L^l l_L = \bar{n}_L U^\dagger \gamma_\lambda l_L, \quad (4.20)$$

где $U^\dagger = (V_L^\nu)^\dagger V_L^l$. Эрмитово сопряженный ток есть

$$(j_\lambda^C)^\dagger = \bar{l}_L \gamma_\lambda U n_L. \quad (4.21)$$

Матрица

$$U = (V_L^l)^\dagger V_L^\nu = U_{\text{PMNS}} \quad (4.22)$$

именуется матрицей Понтекорво – Маки – Накагавы – Сакаты, которая является одной из основных матриц СМ. Количество параметром U_{PMNS} будет обсуждаться ниже.

Левые флейворные поля нейтрино есть

$$\nu_L = U n_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

где в подробном виде, на примере электронного нейтрино, можно записать как

$$\nu_{eL} = \sum_i U_{ei} \nu_{iL}, \quad (4.24)$$

где первый индекс U_{PMNS} соответствует флейворному состоянию, а второй индекс соответствует массовому состоянию. Таким образом, константа связи взаимодействия заряженных токов включает в себя элементы PMNS–матрицы. В сокращённой записи заряженный ток есть

$$j_\lambda^C = \bar{\nu}_L \gamma_\lambda l_L = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_\lambda l_{\alpha L}. \quad (4.25)$$

Именно факт смешивания массовых состояний во флейворные приводит к возможности осцилляций нейтрино.

Взглянем на формулу (4.20). Эту формулу можно интерпретировать как взаи-

модействие флейворных состояний нейтрино с заряженными лептонами, однако эту формулу можно прочитать «наоборот»: происходит взаимодействие массовых состояний нейтрино со смесью заряженных лептонов. Другими словами, почему мы говорим о смешивании нейтрино, но не о смешивании заряженных лептонов? Например, при распаде W^+ рождается позитрон и электронное нейтрино, которое и есть когерентная суперпозиция массовых состояний (4.24), приводящая к интерференции. Ответ заключается в том, что флейворное состояние почти совпадает с его массовым состоянием (из-за малой массы нейтрино), что не так для заряженных лептонов: масса мюона почти в 207 раз больше массы электрона, а тау-лептон в 3477 раз больше массы электрона. Повысив точность эксперимента можно будет добиться того, что мы будем знать, в каком именно массовом состоянии рождается нейтрино, однако тогда пропадёт интерференция (см. опыт Юнга из квантовой механики). Явление декогеренции проявляется на астрофизических масштабах. Поэтому в литературе часто U_{PMNS} называют матрицей лептонного смешивания.

Теперь рассмотрим нейтральный ток, взаимодействующий с Z -бозоном. Итак,

$$j_\lambda^N = g_L^\nu \bar{\nu}_L \gamma_\lambda \nu_L + g_L^l \bar{l}_L \gamma_\lambda l'_L + g_R^l \bar{l}'_R \gamma_\lambda l'_R \quad (4.26)$$

$$= g_L^\nu \bar{n}_L (V_L^\nu)^\dagger \gamma_\lambda V_L^\nu n_L + g_L^l \bar{l}_L (V_L^l)^\dagger \gamma_\lambda V_L^l + g_R^l \bar{l}'_R (V_R^l)^\dagger \gamma_\lambda V_R^l. \quad (4.27)$$

С учётом унитарности U_{PMNS} получим, что

$$j_\lambda^N = g_L^\nu \bar{n}_L \gamma_\lambda n_L + g_L^l \bar{l}_L \gamma_\lambda + g_R^l \bar{l}'_R \gamma_\lambda. \quad (4.28)$$

Идея смешивания массовых состояний также есть в кварковом секторе⁸ Стандартной модели: в кварковом секторе 3 поколения кварков,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

также есть переход кварков из одного поколения в другое, которая параметризуется с помощью матрицы Кабиббо – Кобаяши – Маскавы, обозначаемой как $V_{\text{СКМ}}$.

4.4 Количество параметров PMNS–матрицы

Зададимся вопросом о количестве параметров U_{PMNS} . Рассмотрим сразу общий случай, когда PMNS–матрица смешивает n флейворов. Если $U_{\text{PMNS}} \in \text{Mat}(n \times n)$, причём $U_{\text{PMNS}} \in \mathbb{C}$, то в ней $n(n-1) + n = n^2$ вещественных параметров. Эти n^2 может быть разбито на $n(n-1)/2$ углов и $n(n+1)/2$ фаз.

⁸Эта идея возникла раньше именно в кварковом секторе первой для объяснения распада K^0 -мезона.

Рассмотрим вектор-состояние для электронного нейтрино

$$|\nu_e\rangle = U_{e1}^* |\nu_1\rangle + U_{e2}^* |\nu_2\rangle + U_{e3}^* |\nu_3\rangle, \quad (4.30)$$

вектор-состояние для мюонного нейтрино

$$|\nu_\mu\rangle = U_{\mu1}^* |\nu_1\rangle + U_{\mu2}^* |\nu_2\rangle + U_{\mu3}^* |\nu_3\rangle \quad (4.31)$$

и вектор-состояние для тау-нейтрино

$$|\nu_\tau\rangle = U_{\tau1}^* |\nu_1\rangle + U_{\tau2}^* |\nu_2\rangle + U_{\tau3}^* |\nu_3\rangle. \quad (4.32)$$

Вспомним, что если $U_{e1} \in \mathbb{C}$, то он может быть представлен как $U_{e1} = |U_{e1}|e^{i\varphi_{e1}}$, где φ_{e1} — фаза. Тогда можно избавиться от фазы, объявив новым вектором

$$|\nu_e\rangle \longrightarrow |\nu_e\rangle e^{i\varphi_{e1}}. \quad (4.33)$$

Таким образом можно добиться избавлением от фазы и двух других векторах-состояниях,

$$|\nu_\mu\rangle \longrightarrow |\nu_\mu\rangle e^{i\varphi_{\mu1}}, \quad (4.34)$$

$$|\nu_\tau\rangle \longrightarrow |\nu_\tau\rangle e^{i\varphi_{\tau1}}. \quad (4.35)$$

Тогда вся первая колонка станет вещественной путём переопределения фаз флейворных полей. Путём такой процедуры удалили три вещественных параметра (убрали три фазы). Если нейтрино являются дираковскими фермионами, то можно сделать всю строчку вещественной, таким образом, избавиться ещё от двух вещественных параметров. Суммарно мы такой процедурой убрали 5 фаз (в случае n флейворов — $(2n - 1)$).

Соответственно, число фаз PMNS-матрицы для дираковских нейтрино есть

$$N_{\text{physical phases}}^{\text{Dirac}} = \frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (4.36)$$

То есть в случае $n = 3$ остаётся одна фаза и ещё три угла, суммарно — 4 параметра.

В случае если нейтрино являются майорановскими фермионами, то можно лишь избавиться от n фаз, тогда

$$N_{\text{physical phases}}^{\text{Majorana}} = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (4.37)$$

следовательно, для майорановских нейтрино существует $n = 3$ фазы.

4.5 Параметризация PMNS–матрицы

Рассмотрим параметризацию PMNS–матрицы в случае дираковских нейтрино. Напомним, что для этого необходимо 3 угла и 1 фаза. Введём обозначения,

$$\sin \theta_{ij} = s_{ij}, \quad (4.38)$$

$$\cos \theta_{ij} = c_{ij}, \quad (4.39)$$

где θ_{ij} имеет смысл угла поворота в плоскости i и j . Тогда последовательно поворачивая вокруг плоскостей и добавляя фазу, получим

$$U_{textPMNS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

где $\delta = \delta_{CP}$ — CP–нарушающая фаза.

Актуальные данные для PMNS–матрицы могут быть взяты с официального сайта группы NuFIT⁹.

Best-fit данные (с точностью до двух знаков после запятой) для PMNS–матрицы есть

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.55 & -9.2 \times 10^{-2} + 0.12i \\ 0.36 + 6.60 \times 10^{-2}i & 0.65 + 4.4 \times 10^{-2}i & 0.67 \\ 0.43 + 7.27 \times 10^{-2}i & -0.52 + 4.8 \times 10^{-2}i & 0.73 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Так как PMNS–матрица является унитарной, следовательно, её $\det U_{PMNS} = 1$. Основываясь на экспериментальных данных (4.41), то получим

$$\det U_{PMNS} = 1.00 - 5.21 \times 10^{-5}i, \quad (4.42)$$

что близко к единичному определителю.

⁹На момент марта 2024 актуальным препринтом группы NuFIT является arXiv:2007.14792 (NuFIT 5.2 (2022)), где приведены соответствующие экспериментальные данные для PMNS–матрицы.

5 Лекция №5. Осцилляции нейтрино

На прошлой лекции было показано, что флейворное состояние ν_α , $\alpha = e, \mu, \tau$, представляется в виде суперпозиции массовых состояний (полей ν_i с определённой массой m_i , $i = 1, 2, 3$) нейтрино,

$$\nu_\alpha = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} \nu_i, \quad (5.1)$$

в случае $n = 3$ поколений лептонов. Вектор-состояния нейтринного поля будет записываться как

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle. \quad (5.2)$$

В реальных экспериментах нейтрино являются релятивистскими частицами ($|\mathbf{p}|, E \gg m_i$), поэтому для описания нейтринных осцилляций можно использовать упрощённую теорию по сути являющейся чисто квантовомеханической¹⁰.

5.1 Описание нейтринных осцилляций. Пример с двумя флейворами

Опишем временную эволюцию нейтринных осцилляций на примере двух флейворных состояний. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ рождается нейтрино определённого флейвора. При временной эволюции массовое состояние будет эволюционировать по следующему закону,

$$|\nu_i(0)\rangle \longrightarrow e^{-iE_i t} |\nu_i(0)\rangle. \quad (5.3)$$

Сделаем следующее допущение, справедливое для релятивистских нейтрино, а именно, что все массовые состояния нейтрино имеют одинаковый импульс. Энергия массового состояния записывается как

$$E_i = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}_i^2}, \quad (5.4)$$

тогда при $m_i \ll |\mathbf{p}|$ справедливо разложение

$$E_i \approx p_i + \frac{m_i^2}{2p_i}, \quad (5.5)$$

где $p_i \equiv |\mathbf{p}_i|$. Так как нейтрино являются релятивистскими частицами, то p_i можно заменить на E_i . Как было показано в предыдущей лекции, если число флейворов

¹⁰По сути можно пренебречь поправками, связанными с распространением волновых пакетов.

равняется $n = 2$, то PMNS-матрица содержит только один угол смешивания θ . Введём обозначения: $\cos \theta = c$, $\sin \theta = s$. PMNS-матрица в случае двух флейворов имеет вид

$$U_{\text{PMNS}}^{(n=2)} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Два флейворных состояния (для простоты они будут обозначаться как ν_e и ν_μ) будут записываться как

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Тогда изначально электронное нейтрино ко времени t проэволюционирует по закону

$$|\nu_e(t)\rangle = c \cdot e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + s \cdot e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle. \quad (5.8)$$

Какова вероятность перехода нейтрино одного флейвора в другой с течением времени? Пусть в начальный момент времени имелось электронное нейтрино ν_e . Принимая, что $E_1 \approx E_2 \approx E$, можно записать, что вероятность обнаружить через время t мюонное нейтрино ν_μ есть

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) = |\langle \nu_\mu | \nu_e(t) \rangle|^2 \quad (5.9)$$

$$= |(-s \langle \nu_1 | + c \langle \nu_2 |) (c \cdot e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + s \cdot e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle)|^2 \quad (5.10)$$

$$= c^2 s^2 |e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) (1 - \cos((E_2 - E_1)t)) \quad (5.11)$$

$$= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{E_2 - E_1}{2} t\right) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{4E} t\right) \quad (5.12)$$

$$= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} t\right), \quad (5.13)$$

где введено традиционное обозначение $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$.

Так как нейтрино релятивистские, то за время t нейтрино проходит расстояние $L = t$ (напомним, что $c = 1$). Итак, вероятность перехода есть

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} L\right). \quad (5.14)$$

Заметим, что в формуле (5.14) вероятность зависит лишь от разности квадратов масс нейтрино и имеет синусоидальную зависимость от расстояния.

Расстояние, на котором вероятность осцилляции из одного аромата в другой равна нулю, принято называть длиной осцилляции, $L = \lambda_{\text{osc}}$. Из формулы (5.14) следует (см. также 5.1), что

$$\lambda_{\text{osc}} = \frac{4\pi E}{|\Delta m^2|}. \quad (5.15)$$

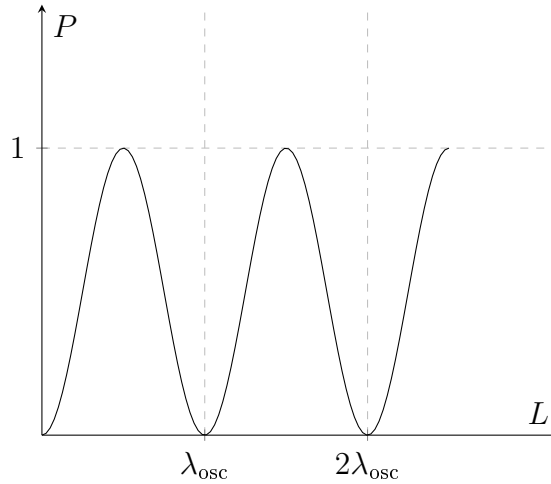


Рис. 5.1: Иллюстративный график к формуле вероятности осцилляций (5.14) и длине осцилляции λ_{osc} (5.15).

Как показывают нейтринные эксперименты, $|\Delta m^2| \sim 1$ эВ, поэтому удобно для численных оценок записать (5.14) как

$$\lambda_{\text{osc}} = 2.48_{\text{м}} \cdot \frac{E[\text{МэВ}]}{|\Delta m^2| [\text{эВ}^2]} = 2.48_{\text{км}} \cdot \frac{E[\text{ГэВ}]}{|\Delta m^2| [\text{эВ}^2]}. \quad (5.16)$$

Часто в экспериментах интересуются не вероятностью перехода одного флейвора в другой, а вероятностью выживания, то есть

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) = 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t). \quad (5.17)$$

Такая вероятность как раз была измерена, например, в эксперименте KamLAND.

5.2 Описание нейтринных осцилляций с тремя флейворами

Для описания нейтринных осцилляций с тремя флейворами ($\alpha = e, \mu, \tau$) необходимо теперь использовать «настоящую» PMNS-матрицу (4.40).

Итак, в общем виде

$$\begin{aligned}
 P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \left| \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \exp\left(-im_j^2 \frac{L}{2E}\right) \right|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^3 |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \\
 &\quad + 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re}[U_{\beta j} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\alpha k}] \cos\left(\frac{\Delta m_{jk}^2 L}{2E}\right) \\
 &\quad + 2 \sum_{j < k} \operatorname{Im}[U_{\beta j} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\alpha k}] \sin\left(\frac{\Delta m_{jk}^2 L}{2E}\right).
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Проанализируем (5.18) на следующие симметрии: CP , T и CPT .

- CP -преобразование в (5.18) эквивалентно замене нейтрино на антинейтрино. Тогда необходимо заменить $U_{\alpha i} \rightarrow U_{\alpha i}^*$. Второе слагаемое (косинусоидальное) останется прежним, а третье (синусоидальное) изменит знак. Действительно, в слабых взаимодействиях нарушается CP -симметрия. Стоит отметить, что в нарушении CP -симметрии существенен факт, что $PMNS$ -матрица комплексна, так как именно благодаря ненулевой CP -нарушающей фазе δ_{CP} и происходит нарушение CP -инвариантности.
- T -преобразование эквивалентно замене $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$. Второе слагаемое также останется прежним, а третье также изменит знак. Поэтому T -преобразование является симметрией, если $\delta_{CP} \neq 0, \pi$.
- При CPT -преобразовании формула (5.18) остаётся прежней: при CPT -преобразовании происходит замена $U_{\alpha i} \rightarrow U_{\alpha i}^*$ и замене $\alpha \leftrightarrow \beta$. Поэтому CPT -симметрия не нарушена.

5.3 Соотношения на $PMNS$ -матрицу. Инвариант Ярлског

Вспомним, что $PMNS$ -матрица является унитарной,

$$U^\dagger U = 1, \tag{5.19}$$

что можно переписать в матричном виде как

$$\sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta}. \tag{5.20}$$

Можно также переписать это соотношение как

$$\sum_{\alpha} U_{\alpha j} U_{\alpha k}^* = \delta_{jk}. \quad (5.21)$$

Введём следующие коэффициенты,

$$J_{jk}^{\alpha\beta} = -\text{Im}[U_{\alpha j} U_{\alpha k}^* U_{\beta j}^* U_{\beta k}], \quad (5.22)$$

который входит в формулу (5.18). Видно, что этот коэффициент удовлетворяет соотношениям

$$J_{jk}^{\alpha\beta} = -J_{bj}^{\alpha\beta} = -J_{jk}^{\beta\alpha}, \quad (5.23)$$

$$J_{jj}^{\alpha\beta} = 0, \quad J_{jk}^{\alpha\alpha} = 0. \quad (5.24)$$

Также из условия унитарности следует, что

$$J_{12}^{\alpha\beta} = J_{23}^{\alpha\beta} = J_{13}^{\alpha\beta}, \quad (5.25)$$

$$J_{jk}^{e\mu} = J_{jk}^{\mu\tau} = J_{jk}^{\tau e}. \quad (5.26)$$

Таким образом, существует только один инвариант, через который всё выражается. Итак, запишем его явно как

$$J = J_{12}^{e\mu} = -\text{Im}[U_{e1} U_{e2}^* U_{\mu 1}^* U_{\mu 2}]. \quad (5.27)$$

Если подставить явные значения элементов PMNS-матрицы (4.40), то получим, что

$$J = c_{13}^2 s_{13} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} \sin \delta, \quad (5.28)$$

где $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$. Введём следующую величину,

$$A_{\alpha\beta}^{jk} = -4 \text{Re}[U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k}], \quad (5.29)$$

а также величину,

$$\varphi_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}. \quad (5.30)$$

С помощью этого инварианта можно переписать формулу (5.18) и введённых величин можно переписать как

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) = A_{\alpha\beta}^{12} \sin^2 \varphi_{12} + A_{\alpha\beta}^{23} \sin^2 \varphi_{23} + A_{\alpha\beta}^{13} \sin^2 \varphi_{13} \pm 8J \sin \varphi_{12} \sin \varphi_{23} \sin \varphi_{13}. \quad (5.31)$$

Эта формула выведена с помощью следующего тригонометрического соотношения,

$$\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (5.32)$$

Знак « \pm » в улучшенной формуле для вероятности (5.31) определяется по существу как $\sum_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Нарушение CP -симметрии зависит от величины (5.28), причём CP нарушение есть, если $J \neq 0$, и CP -нарушение отсутствует, если $J = 0$, как это было показано выше.

Можно показать, что величина (5.28) не зависит от типа параметризации $PMNS$ -матрицы. Впервые существование этого инварианта (5.28) ввела шведский физик С. Ярлског¹¹.

Итак, нарушение CP -симметрии (и, следовательно, T -симметрии) возникает, если

- отлична от 0 или π фаза δ ,
- все углы смешивания отличны от нуля, т.е. $\theta_{12} \neq 0$, $\theta_{23} \neq 0$, $\theta_{13} \neq 0$,
- Параметр φ_{ij} также должен быть отличен от нуля, $\varphi_{ij} \neq 0$.

5.4 Осцилляции при доминировании одной массы

Предположим не исключенный экспериментом вариант параметром, при котором при нормальной иерархии¹² масс нейтрино

$$m_1 \ll m_2 \ll m_3. \quad (5.33)$$

В этом случае

$$|\Delta m_{12}^2| \ll |\Delta m_{23}^2| \simeq |\Delta m_{13}^2|. \quad (5.34)$$

Экспериментально известно, что $\Delta m_{21}^2 = (7.53 \pm 0.18) \times 10^{-5} \text{ эВ}^2$, $\Delta m_{32}^2 = 2.45 \times 10^{-3} \text{ эВ}^2$. В этом случае полученные формулы могут быть значительно упрощены. Например, при условии, что $|\Delta m_{12}^2|/4E \ll 1$,

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \varphi_{13}. \quad (5.35)$$

Вероятность выживания электронного нейтрино есть

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \varphi_{13}. \quad (5.36)$$

¹¹С. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. 55, 1039 (1985).

¹²Здесь и далее подразумевается прямая иерархия масс нейтрино.

Таким образом, мы получили фактически двухфлейворную аппроксимацию нейтринных осцилляций, если $\Delta m^2 = \Delta m_{13}^2$ и $\theta = \theta_{13}$.

Рассмотрим также случай, актуальный для эксперимента с очень длинной базой осцилляций (например, эксперимент KamLAND), при котором

$$\frac{\Delta m_{13}^2 L}{2E} \simeq \frac{\Delta m_{23}^2 L}{2E} \gg 1. \quad (5.37)$$

Тогда вероятность выживания электронного нейтрино есть

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \simeq c_{13}^4 P + s_{13}^4, \quad (5.38)$$

где

$$P = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right), \quad (5.39)$$

что также соответствует случаю двухфлейворных осцилляций, где $\Delta m^2 = \Delta m_{21}^2$ и угол смешивания $\theta = \theta_{12}$.

5.5 Энергия и импульс осциллирующих нейтрино

Рассмотрим процесс $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Если бы нейтрино было безмассовым, то по закону сохранения оно уносит следующую энергию,

$$E = p = \frac{m_\pi}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right). \quad (5.40)$$

Если мы теперь учтём, что масса нейтрино имеет массу, то энергия нейтрино в j -ом массовой состоянии имеет энергию

$$E_j = E + \frac{m_j^2}{2m_\pi} = E + \frac{m_j^2}{2E} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right) \quad (5.41)$$

и импульс

$$p_j = \sqrt{E_j^2 - m_j^2} \simeq E - \frac{m_j^2}{2E} \left(1 + \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right). \quad (5.42)$$

Из последнего уравнения видно, что импульс p_j теперь зависит от массы m_j . В общем случае видно, что в произвольном процессе распада на нейтрино, энергия этого нейтрино в j -ом массовом состоянии будет иметь вид

$$E_j = E + \frac{m_j^2}{2E} \xi, \quad (5.43)$$

а импульс

$$p_j = E - \frac{m_j^2}{2E}(1 - \xi), \quad (5.44)$$

где E есть энергия в случае, если считать нейтрино безмассовым, а ξ — безразмерный параметр. Можно показать, что и в таком случае¹³ эффективно это сводится к уже рассмотренному случаю.

¹³По сути это рассмотрение волнового пакета нейтрино.

6 Лекция №6. Майорановские нейтрино. Механизм seesaw

6.1 В каком именно массовом состоянии рождаются нейтрино?

В каком именно массовом состоянии рождаются нейтрино? Для этого мы должны иметь точность измерения импульса лучшую, чем

$$\Delta p \lesssim |p_k - p_j|, \quad (6.1)$$

где p_k, p_j — импульсы соседних массовых состояний. Напомним, что вектор состояния флейворного состояния α есть

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle. \quad (6.2)$$

Если мы хотим иметь соответствующую разрешающую способность, то по принципу неопределённости Гейзенберга,

$$\Delta p \Delta x \gtrsim 1, \quad (6.3)$$

тогда

$$\Delta x \gtrsim \frac{1}{\Delta p} \sim \frac{E}{|m_k^2 - m_j^2|} \sim \lambda_{\text{osc}}^{jk}, \quad (6.4)$$

где $\lambda_{\text{osc}}^{jk}$ — длина осцилляций. Таким образом, как только улучшается точность измерения импульса, тем больше мы теряем информации о локализации нейтрино, следовательно, разрушается когерентность нейтринного волнового пакета.

6.2 О волновом пакете нейтрино

Нейтрино с конечными массами, движущиеся когерентно в волновом пакете, имеют каждую свою скорость. Массовая j -компонента имеет скорость

$$v_j = \frac{p_j}{E_j}, \quad (6.5)$$

где $p_j = |\mathbf{p}_j|$. Так как нейтрино релятивистская частица, то

$$v_j \approx 1 - \frac{m_j^2}{2E}, \quad (6.6)$$

где E — энергия нейтрино в приближении безмассовых нейтрино (также это можно интерпретировать как среднюю энергию нейтрино в волновом пакете). В реальной

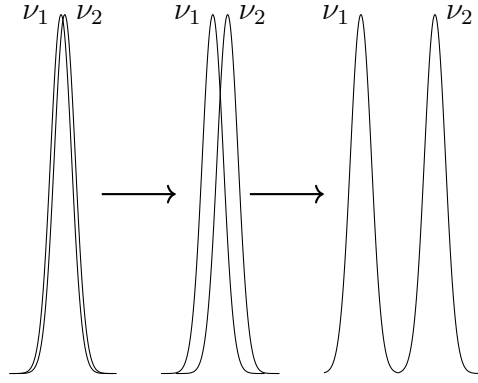


Рис. 6.1: Расползание волнового пакета

ситуации из-за разных скоростей массовых состояний происходит расползание волновых пакетов (см. иллюстрацию 6.1). Когда два состояния разойдутся на расстояние порядка ширины волнового пакета, осцилляции нейтрино прекратятся.

Посчитаем, на каком расстоянии прекратятся нейтринные осцилляции. Осцилляции есть, пока волновые пакеты не разошлись, поэтому посчитаем длину когерентности (расстояние, после которой пропадает когерентность). Эта длина когерентности есть

$$L \lesssim L_{\text{coh}}^{jk} \sim \frac{\sigma_x}{v_j - v_k} \sim \frac{E^2 \sigma_x}{|\Delta m_{jk}^2|}, \quad (6.7)$$

где σ_x — ширина волнового пакета.

В реальных земных экспериментах условие $L \lesssim L_{\text{coh}}^{jk}$ выполняется, однако на астрофизических масштабах $L \gg L_{\text{coh}}^{jk}$, поэтому нейтрино «отосциллируют» (волновые пакеты разойдутся). Одно из первых экспериментальных наблюдений такой ситуации было при детектировании нейтрино от SN 1987A. Из-за разного времени прилёта нейтрино было дано первое ограничение на массы нейтрино.

Таким образом, если учесть эффекты, связанные с конечностью ширины волнового пакета и эффектом декогеренции пучка, то формулы модифицируется следующим образом,

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) = & \sum_j |U_{\beta j}^2 U_{\alpha j}^2| \\ & + 2 \sum_{k>j} \text{Re} \left[U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\beta j}^* \exp\left(2\pi i \frac{L}{L_{\text{osc}}^{jk}}\right) \right] \\ & \times \exp\left(-\left(\frac{L}{L_{\text{osc}}^{jk}}\right)^2\right) \exp\left(-2\pi^2 \xi^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{\text{osc}}^{jk}}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где коэффициент ξ учитывает эффект различия импульса p_j и энергии E_j . Как видно, в реальных земных экспериментах экспоненциальные множители близки к единице.

6.3 Майорановские нейтрино

До сих пор рассматривались нейтрино как дираковские фермионы. Однако до сих пор неизвестно, являются ли нейтрино собственной античастицей. Такие частицы называются майорановскими. Сделаем небольшое напоминание. Левый и правый спиноры есть

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi, \quad (6.9)$$

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi. \quad (6.10)$$

Массовый член лагранжиана можно представить как

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R. \quad (6.11)$$

В Стандартной модели левые компонентны преобразуются по фундаментальному представлению группы $SU(2)$, а правые являются синглетами по этой группе, поэтому явно написать массовое слагаемое в лагранжиан не получится. Напомним, что

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (6.12)$$

и

$$\bar{\psi}_{L,R} = \overline{P_{L,R}\psi} = \bar{\psi} P_{R,L} \quad (6.13)$$

Можно показать, что

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R, \quad (6.14)$$

поэтому в безмассовом пределе лагранжиан факторизуется по левым и правым спинорам. Иначе говоря, разные киральные компоненты в безмассовом случае взаимодействуют независимо с калибровочными полями.

На самом деле, мы можем ввести другой тип массового слагаемого, которое вводит понятие майорановского нейтрино. Если нет правых нейтрино, то мы бы могли ввести массовое слагаемое, которое оперирует только с левыми полями,

$$\mathcal{L}_{ML} = -\frac{1}{2}m_L \left(\bar{\nu}_L\nu_L^C + \overline{\nu_L^C}\nu_L \right), \quad (6.15)$$

причем ν_L преобразуется по закону

$$\nu_L \longrightarrow e^{i\alpha}\nu_L. \quad (6.16)$$

Итак, рассмотрим теперь всё более детально. Векторы ψ_L и ψ_R суть собственные

векторы оператора γ_5 ,

$$\gamma_5 \psi_L = -\psi_L, \quad (6.17)$$

$$\gamma_5 \psi_R = +\psi_R. \quad (6.18)$$

Введём зарядово сопряжённый спинор,

$$\psi^C = C \bar{\psi}^\top, \quad (6.19)$$

где оператор зарядового сопряжения есть

$$C = i\gamma^2 \gamma^0. \quad (6.20)$$

Можно проверить, что

$$C^\dagger = C^{-1}, \quad (6.21)$$

$$C^\top = -C. \quad (6.22)$$

Вспомним также полезные свойства оператора зарядового сопряжения,

$$C \gamma^{\mu\top} C^{-1} = -\gamma^\mu, \quad (6.23)$$

$$C \gamma_5^\top C^{-1} = \gamma_5. \quad (6.24)$$

По определению

$$\psi_L^C \equiv (\psi_L)^C = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi^C = (\psi^C)_R, \quad (6.25)$$

откуда видно, что

$$\psi_R^C = (\psi^C)_L. \quad (6.26)$$

Рассмотрим тогда фермион, для которого справедливо, что

$$\psi = \psi^C. \quad (6.27)$$

Тогда массовые члены для левых и правых компонент есть

$$\mathcal{L}_{ML} = -\frac{1}{2} m_L \left(\bar{\nu}_L^C \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_L^C \right), \quad (6.28)$$

$$\mathcal{L}_{MR} = -\frac{1}{2} m_R \left(\bar{\nu}_R^C \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_R^C \right). \quad (6.29)$$

Раскладывая спинор на левые и правые компоненты,

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L^C + \psi_R^C = \psi_L + \psi_L^C = \psi^C, \quad (6.30)$$

рассмотрим объединение трёх типов массовых слагаемых на примере одного типа нейтрино¹⁴,

$$\mathcal{L}_{D+M} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{ML} + \mathcal{L}_{MR} = -\frac{1}{2} \overline{N_L^C} M N_L + \text{h.c.}, \quad (6.31)$$

где

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

и

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Проведём процедуру диагонализации матрицы M с помощью унитарной матрицы U ,

$$U^\top M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

причём

$$N_L = U \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

и

$$m_k \geq 0. \quad (6.36)$$

Это частный случай теоремы, что любую симметричную матрицу можно диагонализировать с помощью унитарной матрицы так, что полученная диагональная матрица будет иметь неотрицательные собственные числа. Матрица U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

где $\rho_k \in \mathbb{C}$, причём $|\rho_k| = 1$. Соответственно,

$$U^\top M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1^2 m'_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 m'_2 \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

причём выполнено тождество

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}, \quad (6.39)$$

¹⁴Обобщение на три типа нейтрино будет сделано дальше.

а массы суть

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R \mp \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right]. \quad (6.40)$$

Видно, что в общем случае одно из собственных значений может являться отрицательным, поэтому можно докурить так, что

$$\rho_2^2 = 1, \quad (6.41)$$

$$\rho_1^2 = 1 \text{ при } m'_1 > 0 \text{ или } \rho_1^2 = -1 \text{ при } m'_1 < 0. \quad (6.42)$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}_{D+M} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 m_k \left(\bar{\nu}_{kL}^C \nu_{kL} + \bar{\nu}_{kL} \nu_{kL}^C \right). \quad (6.43)$$

Введём следующее обозначение,

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C = \nu_k^C, \quad (6.44)$$

тогда массовое слагаемое лагранжиана можно переписать как

$$\mathcal{L}_{D+M} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 m_k \bar{\nu}_k \nu_k, \quad (6.45)$$

то есть мы получили майорановское массовое слагаемое. Таким образом, если в теории имеются как дираковские, так и майорановские фермионы, то физическими массивными состояниями являются майорановские поля.

6.4 Майорановские нейтрино в Стандартной модели. Механизм seesaw

Как получить майорановские нейтрино в Стандартной модели? Мы должны придумать механизм, лежащий за пределами Стандартной модели, который генерирует майорановские слагаемые. Если мы не хотим расширять хиггсовский сектор, то мы можем рассмотреть Seesaw-механизм.

Предположим, что существует физика за пределами Стандартной модели, которая лежит далеко по энергии, чем хиггсовское вакуумное среднее,

$$v = \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-1/2} \simeq 246 \text{ ГэВ}. \quad (6.46)$$

Постулируется¹⁵, что массовое слагаемое имеет следующий вид,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \quad (6.47)$$

т.е. $m_L = 0$. Это связано с тем, что построение теории с $m_L \neq 0$ будет связано с расширением хиггсовского сектора (придётся ввести триплет хиггсовского бозона). Считается, что в теории есть масштаб,

$$m_R \gg m_D, \quad (6.48)$$

а масштаб m_D соответствует масштабу масс кварков и заряжённых лептонов,

$$m_D \sim m_l \sim m_q. \quad (6.49)$$

Таким образом, в теории возникло массивное правое нейтрино. В моделях теорий Великого объединения возникают такого рода генерации, причём эта генерация соответствует масштабу теории Великого объединения,

$$m_R \sim \Lambda_{\text{GUT}} \sim (10^{15} - 10^{16}) \text{ ГэВ} \gg m_D \quad (6.50)$$

Считая, что $m_D/m_R \ll 1$, получим, что в первом приближении по малому параметру,

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (6.51)$$

где

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D. \quad (6.52)$$

Так как m_1 есть масса нейтрино, то возникает естественное объяснение, почему масса нейтрино много меньше массы заряженных лептонов. Более того, тогда существование малой массы нейтрино есть свидетельство наличия физики за рамками Стандартной модели. А другая масса нейтрино есть

$$m_2 \simeq m_R \gg m_D. \quad (6.53)$$

Соответственно поля теории суть

$$\nu_L = i\nu_{1L} \cos \theta + \nu_{2L} \sin \theta, \quad (6.54)$$

$$\nu_R^C = i\nu_{1L} \sin \theta + \nu_{2L} \cos \theta. \quad (6.55)$$

¹⁵ Не конкретизируя конкретный механизм.

В таком приближении

$$\tan 2\theta \simeq \frac{2m_D}{m_R} \ll 1. \quad (6.56)$$

Таким образом, одно нейтрино ν_L лёгкое, но с малой примесью тяжёлого нейтрино, а правое нейтрино есть тяжёлая частица с примесью лёгкой массивной частицей.

6.5 Seesaw механизм как эффективная теория поля

Механизм seesaw есть частный случай эффективной теории поля. Можно получить массу нейтрино в формализме эффективной теории поля,

$$\mathcal{L}_{EFT} = \mathcal{L}_{SM} + \sum_{n>4} \frac{\mathcal{O}_n}{\Lambda^{n-4}}, \quad (6.57)$$

где \mathcal{O}_n — операторы старшей размерности, Λ^{n-4} — константы. Можно показать, что можно сконструировать из полей Стандартной модели оператор, генерирующий массовое слагаемое типа \mathcal{L}_{ML} . Такой оператор есть

$$\mathcal{O}_5 = z_{\alpha\beta} (\bar{L}_{\alpha L} \tilde{\varphi}) (\tilde{\varphi}^\dagger L_{\beta L}^C) + \text{h.c.} \quad (6.58)$$

Видно, что оператор \mathcal{O}_5 нарушает лептонное число. Тогда

$$\mathcal{L}_{ML} = -\frac{1}{2} (M_L)_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{\alpha L}^C + \text{h.c.}, \quad (6.59)$$

где матрица M_L есть

$$(M_L)_{\alpha\beta} = \frac{v^2}{\Lambda} z_{\alpha\beta}. \quad (6.60)$$

Таким образом, масса нейтрино по порядку величины есть $m_\nu \sim v^2/\Lambda^{16}$. Таким образом,

$$m_\nu \sim \frac{v^2}{\Lambda} = 6 \times 10^{-3} \left(\frac{10^{16} \text{ ГэВ}}{\Lambda} \right) \text{ эВ}. \quad (6.61)$$

¹⁶Юкавские константы выбраны $z_{\alpha\beta} \sim 1$.

7 Лекция №7. Эффективный лагранжиан для качельного механизма

7.1 О качельном механизме

Малость массы нейтрино по сравнению с массами заряженных лептонов и кварков объясняется с помощью качельного механизма. В результате спонтанного нарушения симметрии на большом масштабе генерируется большая масса тяжёлых майорановских нейтрино. За счёт их взаимодействия с лёгкими нейтрино: массовыми состояниями оказываются лёгкие и тяжелые нейтрино. То есть качельный механизм предсказывает существование двух типов нейтрино, оба этих типа — майорановские.

Рассмотрим флейворные нейтрино, наблюдаемые в экспериментах, электронные, мюонные и таонные, они представляют собой суперпозицию массовых состояний. Лёгкие флейворные нейтрино в основном состоят из лёгких массовых состояний с малой примесью тяжёлых, а тяжёлые — состоят в основном из тяжёлых массовых состояний с малой примесью лёгких.

7.2 Численные оценки масс нейтрино

Приведём численные оценки массы нейтрино. Качельный механизм — частный случай эффективной теории поля, массу лёгкого нейтрино на масштабе теории Великого объединения можно оценить:

$$m_L \sim \frac{v^2}{\Lambda} = 6 \cdot 10^{-3} \left(\frac{10^{16} \text{ ГэВ}}{\Lambda} \right) \text{ эВ}, \quad (7.1)$$

где v — вакуумное среднее хиггсовского поля, Λ — энергетический масштаб новой физики.

Из экспериментальных данных самый большой относительный характерный масштаб для атмосферных нейтрино:

$$m_3 > \sqrt{\Delta m_{\text{атм}}^2} = m_a \simeq 5 * 10^{-2} \text{ эВ}, \quad (7.2)$$

где m_3 — самое тяжёлое массовое состояние из лёгких флейворных нейтрино, $\Delta m_{\text{атм}}^2 = \Delta m_{32}^2 = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ — разность квадратов масс атмосферных нейтрино, m_a — более краткое обозначение массы атмосферных нейтрино.

По формуле качельного механизма:

$$m_a \sim \frac{m_D^2}{m_R}, \quad (7.3)$$

где m_D — дираковская масса, m_R — масса тяжёлого нейтрино. Для грубой оценки возьмём за m_D массу t-кварка $m_t = 174$ ГэВ, тогда $m_R \simeq 6 \cdot 10^{14}$ ГэВ. Если за m_D взять массу электрона $m_e = 0.511$ МэВ, то $m_R \simeq 5$ ТэВ.

Из предыдущей лекции: массовое слагаемое для нейтрино представляет собой в общем случае суперпозицию дираковского массового члена и двух майорановских членов. Рассмотрим модель для тяжёлых нейтрино:

$$\mathcal{L}_{\nu N} = \bar{N}_R i \gamma^\mu \partial_\mu N_R - \frac{1}{2} m_R (\bar{N}_R^c N_R + \bar{N}_R N_R^c) - y_\nu (\bar{L}_L \tilde{\varphi} N_R + \bar{N}_R \tilde{\varphi}^+ L_L), \quad (7.4)$$

где N_R — правая компонента поля, y_ν — юкавская константа, $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ — левый дублет.

7.3 Эффективный лагранжиан для качельного механизма

Если произойдёт спонтанное нарушение симметрии, то генерируется дираковское массовое слагаемое $\tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, так как после спонтанного нарушения хиггсовского поле флуктуирует около вакуума. После подстановки вакуумного вектора, получим дираковскую массу:

$$m_D = y_\nu \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (7.5)$$

После диагонализации матрицы, лагранжиан дираковского типа D, майорановского типа M:

$$\mathcal{L}_{DM} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 m_k \bar{\nu}_k \nu_k. \quad (7.6)$$

Из выражения:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

где U — матрица смешивания, выразим левую компоненту поля:

$$\nu_L = -i \nu_{1L} \cos \theta + \nu_{2L} \sin \theta, \quad (7.8)$$

Из этого же выражения левая компонента, получаемая из правой компоненты с зарядовым сопряжением:

$$N_R^c = i \nu_{1L} \sin \theta + \nu_{2L} \cos \theta. \quad (7.9)$$

Так как мы считаем, что $m_D/m_R \ll 1$ очень малый параметр, в этом приближении угол $\theta \approx m_D/m_R \ll 1$ тоже мал, поэтому в главном приближении по этому

малому параметру первое и второе массовые состояния:

$$m_1 \approx \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D, \quad (7.10)$$

$$m_2 \approx m_R.$$

Более общая точка зрения основана на эффективной теории поля: вернёмся к лагранжиану (7.4), который включает тяжёлые и лёгкие поля и проинтегрируем его по тяжёлым степеням свободы:

$$\exp(iS_{eff}) = \int [dN][d\bar{N}] \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\nu N}\right). \quad (7.11)$$

Тогда возникает эффективный лагранжиан, в котором фигурируют только лёгкие поля. Удобно сделать замену переменной, выразив всё через поле $N = N_R + N_R^c = N^c$. Перепишем лагранжиан в терминах этих полей:

$$\mathcal{L}_{\nu N} = \bar{N} \hat{k} N - \bar{N} J - \bar{J} N, \quad (7.12)$$

где $\hat{k} = \frac{1}{2}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_R)$ — оператор из уравнения Дирака для свободного поля N , токи $J = \frac{1}{2}y_\nu(\tilde{\varphi}^+ L_L + \tilde{\varphi}^T L_L^c)$, $\bar{J} = \frac{1}{2}y_\nu(\bar{L}_L \tilde{\varphi} + L_L^c \tilde{\varphi}^*)$. Напишем уравнение движения для поля N , пренебрегая производными:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\nu N}}{\partial N} = \bar{N} \hat{k} - \bar{J} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\nu N}}{\partial \bar{N}} = \hat{k} N - J = 0, \quad (7.13)$$

отсюда

$$\bar{N} = \bar{J} \hat{k}^{-1}, \quad N = \hat{k}^{-1} J. \quad (7.14)$$

И тогда подстановка (7.14) в (7.12) — один из способов получения эффективного Лагранжиана.

Гауссов интеграл по тяжёлым полям — это фактически функциональное обобщение гауссового интеграла для обычных переменных. Если мы проинтегрируем гауссов интеграл по N , то мы получим эффективное действие. Результат гауссового интегрирования:

$$\exp^{iS_{eff}} = \det \hat{k} \exp\left(-i \int d^4x \bar{J} \hat{k}^{-1} J\right). \quad (7.15)$$

Таким образом, получили выражение для эффективного Лагранжиана:

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{J} \hat{k}^{-1} J. \quad (7.16)$$

После подстановки явных выражений для токов эффективный Лагранжиана будет

иметь вид:

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{y_\nu^2}{2m_R} (\bar{L}_L \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} L_L^c + \bar{L}_L^c \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi}^T L_L). \quad (7.17)$$

Это частный случай оператора O_5 , который ввёл Вайнберг в эффективной теории поля. После подстановки дираковской массы, получим майорановское массовое слагаемое:

$$\mathcal{L}_M = \frac{y_\nu^2 v^2}{4m_R} (\bar{\nu}_L \nu_L^c + \bar{\nu}_L^c \nu_L). \quad (7.18)$$

Перепишем майорановское массовое слагаемое через поля $\chi = \nu_L + \nu_L^c = \chi^c$ и $\chi' = i\chi = -\chi'^c$:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} m \bar{\chi} \chi = -\frac{1}{2} m \bar{\chi}' \chi', \quad (7.19)$$

где $m = m_D^2/m_R$.

7.4 Обобщение качельного механизма на три лептонных поколения

Рассмотрим 3 поколения нейтрино. Введём трёхмерные векторы в пространстве состояний: 3 тяжёлых правых поля $N_R = (N_{jR})$, матрица юкавских констант $Y^\nu = (y_{\alpha j}^\nu)$, где α — флейворный индекс, j — индекс, нумерующий тяжёлые поля. В матричных обозначениях получаем лагранжиан:

$$\mathcal{L}_{IN} = \bar{N}_R i \gamma \partial N_R - \frac{1}{2} (\bar{N}_R^c M_R N_R + \bar{N}_R M_R^* N_R^c) - \bar{L}_L \tilde{\varphi} Y^\nu N_R - \bar{N}_R Y^{\nu+} \tilde{\varphi}^+ L_L, \quad (7.20)$$

где $M_R = (M_{Rjk} = M_{Rkj})$ — симметричная комплексная матрица, с помощью диагонализации Такаги приводим эту матрицу к диагональному виду $U^T M_R U = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$, $U^+ U = I$, $M_R = U^* M U^+$, на диагоналях будут стоять неотрицательные числа — массы тяжёлых майорановских нейтрино.

Замечание: упрощённое доказательство того, что дираковское фермионное поле — это совокупность двух маарановских полей (E. Majorana, Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone, Nuovo Cim. 14 (1937)).

Уравнение Дирака:

$$(i\gamma\partial - m)\psi = 0 \quad (7.21)$$

Введём зарядовое сопряжённое:

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T \quad (7.22)$$

По свойству матрицы зарядового сопряжения $C = i\gamma^2 \gamma^\nu$, $C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^\mu$, $C^T = -C$, тогда:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1 + i\chi_2), \quad (7.23)$$

где $\chi_1 = (\psi + \psi^c)/\sqrt{2}$, $\chi_2 = (\psi - \psi^c)/i\sqrt{2}$ — майорановские поля, удовлетворяющие уравнению Дирака:

$$(i\gamma\partial - m)\chi_k = 0, k = 1, 2, \quad (7.24)$$

и условиям $\chi_k^c = \chi_k$. Проверим взаимодействие с электромагнитным полем $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$:

$$\gamma_k^\mu = \bar{\chi}_k\gamma^\mu\chi_k = -\chi_k^T(\gamma^\mu)^T\bar{\chi}_k^T = -\bar{\chi}_k\gamma^\mu\chi_k. \quad (7.25)$$

Таким образом, поле ψ представлено в виде комбинации двух майорановских полей χ_1, χ_2 с одинаковой массой.

7.5 Генерация масс нейтрино в Теории великого объединения с группой SO(10)

В реальных теориях, обобщающих стандартную модель, можно предложить конкретный механизм генерации m_R за счёт идеи о спонтанном нарушении симметрии. Разновидность теории Великого объединения — группа SO(10), которая объединяет все типы взаимодействия. Первоначальная симметрия этой теории на большом масштабе Λ может быть нарушена путём нескольких фазовых переходов.

При введении дополнительных степеней свободы, то в общем случае:

$$-\mathcal{L}_{D+MR} = \bar{\nu}_L M_D \nu_R + \frac{1}{2} \bar{\nu}_L^c M_D \nu_R + \text{h.c.}, \quad (7.26)$$

где размерности матриц $M_D : 3 \times n_S, M_R : n_S \times n_S$. В результате спонтанного нарушения симметрии возникает унитарная матрица размерности: $(3 + n_S) \times (3 + n_S)$, после диагонализации получается комбинация:

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^3 V_{\alpha k} \nu_{kL}^{\text{light}} + \sum_{k=4}^{n_S+3} V_{\alpha k} \nu_{kL}^{\text{heavy}}. \quad (7.27)$$

В реальных современных экспериментах различие между дираковскими и майорановскими частицами практически не проявляется. Причина заключается в том, что число степеней свободы у дираковских нейтрино в 2 раза больше, чем у майорановских, но они подавлены, но при проведении эксперимента, связанного с распадом тяжёлых ядер, возникает безнейтринный бета-распад 7.1:

В обычной теории в этой реакции должно присутствовать дираковское нейтрино, это не согласуется с количеством электронов и сохранением лептонного числа. Значит, нейтрино проявляет свою майорановскую природу.

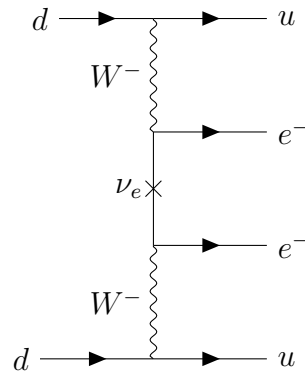


Рис. 7.1: Диаграмма Фейнмана безнейтринного бета-распада.

8 Лекция №8. Экспериментальная проверка модели Вайнберга – Салама

8.1 Безнейтринный двойной бета-распад

До сих пор экспериментально неизвестна природа массы нейтрино: майорановская или дираковская. Главное экспериментальное направление в этом вопросе — распад тяжёлых ядер — безнейтринный двойной бета-распад.

Процесс безнейтринного двойного бета-распада выглядит как

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^-. \quad (8.1)$$

На фундаментальном уровне этому процессу соответствует диаграмма Фейнмана, в которой d -кварки, входящие в состав нуклонов, преобразуются в u -кварки за счёт обмена W -бозоном (см. иллюстрацию 8.1).

8.2 Экспериментальная проверка Стандартной модели

Стандартная модель, основанная на калибровочных группах $SU(2)_L \times U(1) \xrightarrow{\text{СНС}} U(1)_Q$, предсказывает, например, распады через заряженные токи (смотри иллюстрацию 8.2а и 8.2b),

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad (8.2)$$

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (8.3)$$

откуда феноменологически следует константа Ферми G_F , а также и процессы, протекающие через нейтральные токи. Открытые в начале 1970-х годов нейтральные токи позволило перейти от первоначальной теории слабых взаимодействий только с

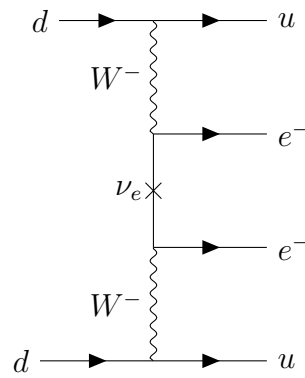
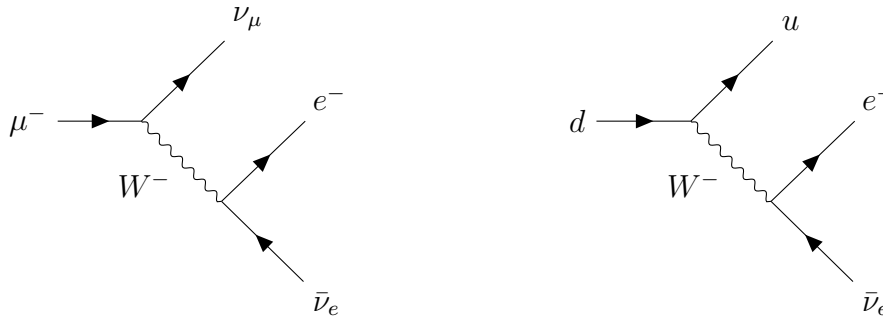


Рис. 8.1: Диаграмма, отвечающая безнейтринному двойному бета-распаду. Крестик на фермионной линии электронного нейтрино показывает, что нейтрино является майорановском, поэтому в процессе не сохраняется лептонное число. Спектаторные кварки, расположенные в нуклонах, не указаны.



(а) Диаграмма Фейнмана распада для мюона. (б) Диаграмма Фейнмана распада для бета-распада на кварковом уровне.

заряженными токами к современной теории, предсказывающей Z -бозон,

$$\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_{eZ} + \mathcal{L}_{\nu Z} = \frac{g}{2 \cos \theta_W} j_\mu^N Z^\mu, \quad (8.4)$$

где введено обозначение

$$\gamma_\alpha^L = \gamma_\alpha \frac{1 - \gamma_5}{2}. \quad (8.5)$$

Нейтральный ток выглядит следующим образом,

$$j_\mu^N = \bar{\nu}_e \gamma_\mu^L \nu_e - \bar{e} \gamma_\mu^L e + 2 \sin^2 \theta_W (\bar{e} \gamma_\mu e). \quad (8.6)$$

Выясним, как в принципе можно экспериментально определить параметры g , $\sin^2 \theta_W$, m_W , m_Z .

8.3 Экспериментальное измерение константы g

Рассмотрим процесс распада мюона (смотри иллюстрацию 8.2а). Запишем матричный элемент этого процесса,

$$M_{fi} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 (\bar{u}_e \gamma_\alpha^L v_{\nu_e}) \times D^{\alpha\beta}(q) \times (\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\beta^L u_\mu), \quad (8.7)$$

где $D^{\alpha\beta}(q)$ — пропагатор векторного бозона с 4-импульсом q . В унитарной калибровке для векторной частицы пропагатор в импульсном представлении имеет вид

$$D^{\alpha\beta}(q) = \frac{-g^{\alpha\beta} + q^\alpha q^\beta / m_W^2}{q^2 - m_W^2 + i0}. \quad (8.8)$$

Если же мы рассматривает процесс распада мюона в области малых передач импульса, т.е. $|q|^2 \ll m_W^2$, то можно использовать четырёхфермионное приближении,

$$D^{\alpha\beta}(q) = \frac{g^{\alpha\beta}}{m_W^2}, \quad (8.9)$$

тогда матричный элемент переходит в

$$M_{fi} \simeq \frac{4G_F}{\sqrt{2}} (\bar{u}_e \gamma_\alpha^L v_{\nu_e}) \times (\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^{\alpha L} u_\mu), \quad (8.10)$$

где возникла константа Ферми,

$$\frac{4G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{2m_W^2}. \quad (8.11)$$

Время жизни мюона хорошо экспериментально измерено. Из теории следует, что время жизни мюона¹⁷ есть

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}, \quad (8.12)$$

откуда можно извлечь константу Ферми. Для точного сравнения теории с экспериментом необходимо учитывать также радиационные поправки.

8.4 Экспериментальное измерение угла Вайнберга

Угол Вайнберга θ_W входит в структуру лагранжиана слабого тока. Поэтому рассмотрим процесс, вызванный нейтральным током, например, процесс рассеяния мюонного нейтрино на электроны, изображённый на иллюстрации (8.3).

¹⁷В приближении малых передач импульса и в приближении, что $m_e/m_\mu \ll 1$.

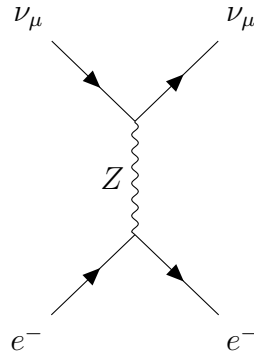


Рис. 8.3: Диаграмма рассеяния мюонного нейтрино на электроне на древесном уровне.

Матричный элемент этого процесса в приближении $|q|^2 \ll m_Z^2$ есть

$$\mathcal{M}_{fi} = \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 (\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha^L u_{\nu_\mu}) \times \frac{1}{m_Z^2} \times (\bar{u}_e \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma_5) u_e), \quad (8.13)$$

где

$$g_V = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad g_A = +\frac{1}{2}. \quad (8.14)$$

Тогда

$$\frac{g^2}{8m_Z^2 \cos^2 \theta_W} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}. \quad (8.15)$$

Так как $m_Z \cos \theta_W = m_W$, то воспроизводится предыдущий результат.

Измерение сечения рассеяния $\sigma(\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e)$ позволяет поэтому независимо определить $\sin^2 \theta_W$ (входит в g_V).

8.5 Экспериментальное измерение масс калибровочных бозонов

Исследуя чисто электромагнитные процессы (например, комптоновское рассеяние), находим постоянную тонкой структуры,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = (137.036)^{-1}. \quad (8.16)$$

Электрослабая теория предсказывает связь между константой слабого взаимодействия и постоянной тонкой структуры,

$$g \sin \theta_W = e, \quad (8.17)$$

откуда

$$4\pi\alpha = g^2 \sin^2 \theta_W \implies g = \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{\sin \theta_W}. \quad (8.18)$$

Теперь масса W -бозона есть

$$m_W = \frac{1}{2}gv = \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_W}. \quad (8.19)$$

Последняя формула примечательна тем, что находясь в области низких энергий при экспериментальном измерении констант теории, мы можем предсказать массу W -бозона, хоть он в процессе проявляется только виртуально. Это стало важным моментом при планировании экспериментов по обнаружению W -бозона, открытого в 1983 году.

Также теория предсказывает массу Z -бозона,

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (8.20)$$

Заметим, что также в теории предсказывается хиггсовское вакуумное среднее,

$$v = \left(\sqrt{2}G_F \right)^{-1/2}. \quad (8.21)$$

Итак, теория Вайнберга – Салама приводит к экспериментально проверяемым следствиям:

- предсказывается существование нейтрального тока, константой связи в котором определяется единственным параметром $\sin^2 \theta_W$;
- предсказывается существование тяжёлых промежуточных векторных бозонов W^\pm , Z , массы которых определяются экспериментальными данными при низких энергиях;
- предсказывается константа связи W -, Z -бозонов с другими частицами;
- теория Вайнберга – Салама основана на предположении о существовании фундаментальных скалярных частиц (хиггсов), предсказывает их свойства и взаимодействия.

8.6 Экспериментальные значения параметров модели Вайнберга – Салама

Упомянем, что масса хиггсовского бозона теоретически не предсказывается, так как она связана формулой

$$m_H = \sqrt{2\lambda}v \quad (8.22)$$

с константой λ . Бозон Хиггса был открыт в 2012 году коллаборациями ATLAS и CMS на протон–протонном коллайдере LHC. По данным PDG (2022),

$$m_H = 125.25 \pm 0.17 \text{ ГэВ.} \quad (8.23)$$

Тогда

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{m_H}{v} \right)^2 = \frac{G_F}{\sqrt{2}} m_H^2 \simeq 0.13, \quad (8.24)$$

то есть константа связи является константой режима слабой связи.

Массу калибровочных бозонов можно посчитать¹⁸ и получить

$$m_W^{\text{th}} = \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin\theta_W} = 77.57 \text{ ГэВ.} \quad (8.25)$$

Экспериментальное значение W -бозона есть

$$m_W^{\text{exp}} = 80.377(12) \text{ ГэВ.} \quad (8.26)$$

Мера расхождения составляет

$$\frac{m_W^{\text{exp}} - m_W^{\text{th}}}{m_W^{\text{exp}}} \simeq 3\%. \quad (8.27)$$

Учитывая радиационные поправки через параметр r , можно записать, что

$$m_W^2 \sin^2 \theta_W = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \frac{1}{1-r}, \quad (8.28)$$

где $r = r(e, m_W, m_Z, m_f)$.

Поскольку частицы W - и Z -бозоны нестабильны, то их массы определены с точностью до ширины распада. Что нужно знать, чтобы экспериментально обнаружить W -бозон. Для этого необходимо дойти до энергий, порядка массы W -бозона, а также в силу его нестабильности необходимо наблюдать его характерные каналы распада.

Лептонные каналы распада W -бозона:

- $W \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e$;
- $W \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$;
- $W \longrightarrow \tau^- + \bar{\nu}_\tau$;
- $W \longrightarrow \bar{q}_1 + q_1$ ¹⁹.

¹⁸Отметим, что мы считали на древесном уровне и в режиме малых переданных импульсов.

¹⁹При обобщении модели на кварковый сектор, кроме того существуют адронные каналы распада W -бозона. Например, $W^+ \longrightarrow u + d$, причём знание о первоначально рождённых кварках можно

Как видно, существуют каналы лептонных распадов и адронных, но нет «полу-лептонных» распада.

8.7 Распад $W \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$

Решим следующую задачу. Посчитаем вероятность распада $W \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$, который в древесном приближении можно представить как на иллюстрации ??.

Для решения этой задачи необходимо расписать матричный элемент процесса,

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g}{\sqrt{2}} \varepsilon_\mu \bar{u}_e(p) \gamma_L^\mu v_\nu(k). \quad (8.29)$$

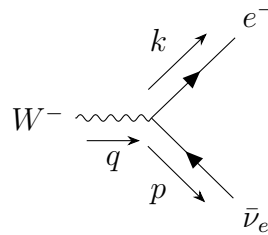


Рис. 8.4: Диаграмма канала распада $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$.

Вероятность распада есть

$$\Gamma = \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - q) \frac{|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2}{2m_W} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}, \quad (8.30)$$

где квадрат модуля матричного элемента процесса был усреднён. Для этого необходимо воспользоваться следующим соотношением,

$$\overline{\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu} = -\frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right). \quad (8.31)$$

Удобно также воспользоваться следующим соотношением,

$$\frac{d^3p}{2p_0} \rightarrow d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2). \quad (8.32)$$

Ответ задачи в приближении безмассовости конечных фермионов:

$$\Gamma_e \equiv \Gamma(W \rightarrow e^- \nu_e)^{\text{th}} = \frac{g^2 m_W}{48\pi} = \frac{G_F m_W^3}{\sqrt{2} 6\pi} = 0.227 \text{ ГэВ}. \quad (8.33)$$

восстановить на эксперименте по вторичным адронным струям.

Сравним полученный ответ с полной шириной распада Γ^{exp} ,

$$\Gamma^{\text{exp}}(W \rightarrow \text{all}) = \Gamma_{\text{tot}}^{\text{exp}} = 2.085 \pm 0.042 \text{ ГэВ}. \quad (8.34)$$

8.8 Оценка полной ширины распада W -бозона

Оценим полную ширину распада W -бозона, пренебрегая массами лептонов с массой W -бозона. Итак, умножим Γ_e на число каналов распада,

$$\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_e N, \quad (8.35)$$

где $N = N_l + N_q$, $N_l = 3$ — число лептонных каналов, N_q — число кварковых каналов. Однако кварки обладают дополнительным квантовым числом, которые не несут лептоны, а именно цвет. Кварки обладают 3 цветовыми состояниями, поэтому сделаем следующую модификацию,

$$N = N_l + N_q N_c. \quad (8.36)$$

Рассмотрим иерархию масс кварков. Самый тяжёлый кварк — t -кварк с массой $m_t \simeq 174 \text{ ГэВ}$, что больше m_W , поэтому, пренебрегая эффектами смешивания кварков, останется лишь два кварковых канала, $N_q = 2$. Таким образом, $N = 9$ и

$$\Gamma_{\text{tot}} = 9\Gamma_e = 2.045 \text{ ГэВ}. \quad (8.37)$$

Разница между теорией и экспериментов составляет

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_{\text{exp}}} \simeq 2\%. \quad (8.38)$$

Мы отбросили канал с t -кварком. Если бы t -кварк был лёгким, то его канал выглядел бы как

$$W^+ \rightarrow t + \bar{b}, \quad (8.39)$$

что запрещено законом сохранения энергии, поэтому такого канала распада не существует.

8.9 Каналы распада Z -бозона

Рассмотрим каналы распада Z -бозона:

- $Z \rightarrow l^+ l^-$,
- $Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l$,
- $Z \rightarrow q \bar{q}$,

В эксперименте регистрировали первый канал распада, распад на заряженные лептоны. Если посчитать полную ширину, состоящую из каналов распадов на все заряженные и незаряженные лептоны и на кварки, не включая t -кварка, так как его масса больше массы Z -бозона, то

$$\Gamma_{\text{tot}}(Z) = \frac{G_F m_Z^3}{\sqrt{2} 12\pi} \left(21 - 40 \sin^2 \theta_W + \frac{160}{3} \sin^4 \theta_W \right), \quad (8.40)$$

что справедливо в приближении безмассовости конечных фермионов. Итак,

$$\Gamma_{\text{tot}}^{\text{th}} = 2.423 \text{ ГэВ}. \quad (8.41)$$

Экспериментально известно, что

$$\Gamma_{\text{tot}}^{\text{exp}} = 2.4952(23) \text{ ГэВ}, \quad (8.42)$$

а разница составляет

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_{\text{tot}}^{\text{exp}}} \simeq 3\%. \quad (8.43)$$

8.10 Как экспериментально извлечь информацию о числе типов нейтрино?

Зададимся следующим вопросом: как экспериментально извлечь информацию о числе типов нейтрино? Посчитанная ширина распада $\Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l)$ (смотри иллюстрацию ??) есть

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l) = \frac{G_F m_Z^3}{\sqrt{2} 12\pi}. \quad (8.44)$$

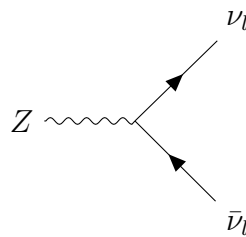


Рис. 8.5: Диаграмма канала распада $Z \rightarrow \nu_l + \bar{\nu}_l$.

Если взять полную ширину распада Γ_{tot} и рассмотреть ширину Γ_{vis} только тех каналов, которые детектор может увидеть, разница между ними, делённую на ширину распада по нейтринному каналу, который посчитан выше, даёт полное число нейтрино,

$$\frac{\Gamma_{\text{tot}} - \Gamma_{\text{vis}}}{\Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l)} = N_\nu \quad (8.45)$$

Экспериментально выходит, что

$$N_\nu = 2.92 \pm 0.05. \quad (8.46)$$

Если учесть всю совокупность экспериментальных данных, которые набирали электрон-позитронные коллайдеры (установки LEP и SLAC), то и точность оценки N_ν улучшится,

$$N_\nu = 2.996 \pm 0.007. \quad (8.47)$$

9 Лекция №9. Изучение W^- и Z -бозонов

9.1 Обнаружение W^- -бозона

Изучим как экспериментально проверялась Стандартная модель, а именно экспериментальное подтверждение существования массивных векторных W^- и Z -бозонов. Из структуры Стандартной модели мы получили оценку на константы, которые входят в формулы для масс калибровочных бозонов и которые были получены в экспериментах при низких энергиях.

Z -бозон рождается, как это было рассмотрено, при столкновениях электрон-позитронных пучков, однако на момент экспериментального подтверждения энергий на таких коллайдерах было недостаточно (лёгкие заряженные частицы, как электроны, движущиеся по круговым орбитам синхротронно излучают, что приводит к существенной потере энергии). Для этого были рассмотрены процессы рождения калибровочных бозонов на адронных коллайдерах. Однако процессы рождения калибровочных бозонов, связанные с адронными столкновениями, осложнены тем, что не вся энергия пучков идёт на энергию рождения, так как на фундаментальном уровне адроны состоят из кварков, которые несут лишь долю импульса. на момент обнаружения была достигнута энергия в системе центра масса

$$\frac{\sqrt{s}}{2} \approx 270 \text{ ГэВ.} \quad (9.1)$$

Процесс рождения W^- -бозона через протон-протонные столкновения выглядит как на диаграмме 9.1, который затем распадается на лептонную пару²⁰.

Характерным сигналом рождения W^- -бозона в процессе 9.1 является то, что W^- -

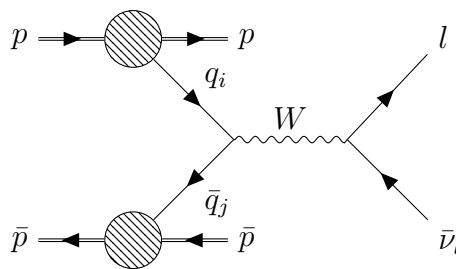


Рис. 9.1: Диаграмма рождения W^- -бозона в протон-протонных столкновениях с последующим распадом в лептонную пару. В области энергий, допускающей рождение W^- -бозона, основной вклад дают только валентные кварки. Протоны обозначены двумя линиями, так как являются составными частицами. Отметим, что пара кварк-антикварк разного типа (например, $\bar{u}d \rightarrow W^-$).

²⁰Рассмотрение адронной моды экспериментально сложнее, чем рассмотрение лептонной моды распада.

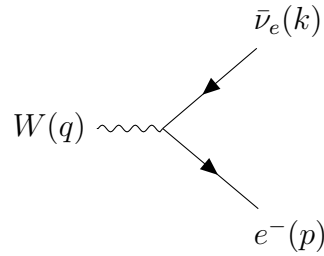


Рис. 9.2: Процесс распада W -бозона на лептонную пару. В скобках указаны импульсы частиц.

бозон рождается почти в покое, тогда из квантовой теории известно, что двухчастичное рождение будет с распределением по углам вида $1 + \cos^2 \theta$, где θ — угол рассеяния. Поэтому в таком процессе будет существенная доля событий с большими поперечными импульсами по отношению к осям пучков.

W - и Z -бозоны открыли группы UA1 и UA2 (CERN) в моде распада $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ со следующими значениями:

$$m_W = 80.9 \pm 1.5 \text{ ГэВ} \quad (\text{UA1}), \quad (9.2)$$

$$m_W = 81.0 \pm 2.5 \text{ ГэВ} \quad (\text{UA2}). \quad (9.3)$$

Также группы UA1 и UA2 наблюдали моду распада $W^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$, однако число мюонных события к числу электронных событий было следующим:

$$\frac{N_\mu}{N_e} = 1.24_{-0.7}^{+0.6} \quad (\text{UA1}). \quad (9.4)$$

Из мюонной моды распада масса W -бозона была измерена как

$$m_W = 81_{-7}^{+6} \text{ ГэВ} \quad (\text{UA1}). \quad (9.5)$$

Рассмотрим поперечный импульс 9.2 в процессе распада W -бозона. По закону сохранения энергии-импульса для рождённого на массовой поверхности W -бозона, пренебрегая массой нейтрино и электрона,

$$q^2 = m_W^2 = (k + p)^2 \simeq 2k \cdot p. \quad (9.6)$$

Поперечная составляющая импульса электрона в этом процессе (смотри ??) есть

$$|\mathbf{p}| = \frac{p_T}{\sin \theta}, \quad (9.7)$$

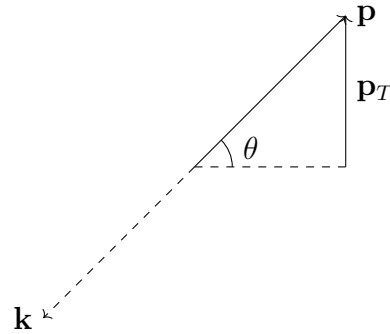


Рис. 9.3: Кинематика процесса распада W -бозона. На рисунке указан поперечный импульс, обозначенный как p_T .

где θ — угол между направлением протонного пучка и электрона. Тогда

$$m_W^2 \sin^2 \theta \simeq 4p^2. \quad (9.8)$$

Дифференциальное сечение по поперечному импульсу есть

$$\frac{d\sigma}{dp_T} = \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \cdot \frac{d \cos \theta}{dp_T}, \quad (9.9)$$

где

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2p_T}{m_W}\right)^2}. \quad (9.10)$$

Преобразовывая, получим, что

$$\frac{d\sigma}{dp_T} = \frac{d\sigma}{d \cos \theta}. \quad (9.11)$$

Отсюда видна «корневая особенность» дифференциального сечения, а именно,

$$\frac{d \cos \theta}{dp_T} = \frac{2p_T}{m_W} \left[\left(\frac{m_W}{2}\right)^2 - p_T^2 \right]^{-1/2}. \quad (9.12)$$

На эксперименте наблюдает размазанный пик (смотри иллюстрацию 9.4).

Как примерно посчитать, сколько событий будет зарегистрировано? Для этого надо оценить сечение в так называемой партонной модели, которая, на самом деле, была скрыта в диграмме 9.1. Для этого необходимо узнать, какую долю импульса уносят кварки из протонов. Для этого теоретически можно вычислить функцию распределения кварков разных типов по импульсам. Можно показать, что при высоких энергиях можно считать, что кварки летят вдоль оси пучков. Это можно записать

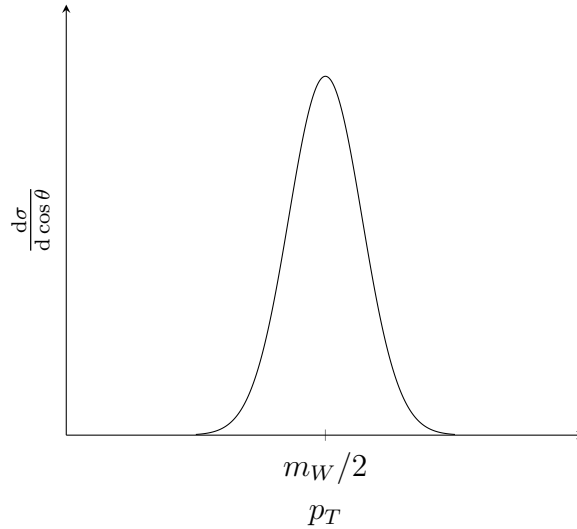


Рис. 9.4: Схематичный график зависимости $\frac{d\sigma}{d \cos \theta}$ в районе «корневой особенности». На эксперименте наблюдается размазанный пик, так как $\mathbf{p}_W \neq 0$, и W -бозон имеет конечную ширину распада $\Gamma_W \neq 0$.

так: доля импульса кварка q_i есть

$$p_i = x_i P, \quad (9.13)$$

где P — полный импульс, $0 \leq x_i \leq 1$. Структурную функцию $u(x)$, например, для u -кварка можно записать как $u(x) dx$, равной числу u -кварков, несущих долю импульса в диапазоне $(x, x + dx)$. Кажется, что выполняется очевидное соотношение

$$\sum_i \int_0^1 x_i q_i(x_i) dx_i = 1, \quad (9.14)$$

однако в реальности это выражение равно примерно 0.5, так как ещё примерно половину полного импульса несут глюоны, переносчики сильного взаимодействия. Основной вклад в рождение W -бозона имеют u - и d -кварки, которые записываются в качестве «подпроцесса»,

$$u + \bar{d} \longrightarrow W^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e, \quad (9.15)$$

$$\bar{u} + d \longrightarrow W^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e. \quad (9.16)$$

Рассмотрим для определённости сечение «подпроцесса» с рождением W^+ ,

$$\int dx_1 dx_2 u_p(x_1) \bar{d}_{\bar{p}}(x_2) \hat{\sigma}(u\bar{d} \longrightarrow W^+) = \sigma, \quad (9.17)$$

где $u_p(x)$ — структурная функция u -кварка в протоне, $\bar{d}_{\bar{p}}(x)$ — структурная \bar{d} -кварка в антипротоне.

Так как W -бозон нестабильная частица, то фактически мы имеем процесс вида $A + B \rightarrow R \rightarrow C + D + \dots$ как на диаграмме 9.5.

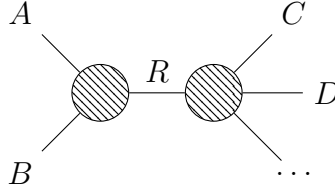


Рис. 9.5: Иллюстрация к резонансному рождению. За R обозначен «резонанс», в данном случае W -бозон.

Квантовая теория предсказывает точную формулу (формула Брейта–Вигнера²¹) для резонансного рождения,

$$\sigma(A + B \rightarrow R \rightarrow C + D + \dots) \simeq \frac{\pi}{\kappa^2} \frac{(2s_R + 1)C_R}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \times \frac{\Gamma(R \rightarrow A + B)\Gamma(R \rightarrow C + D + \dots)}{(E_R - E)^2 + \Gamma_R^2/4}, \quad (9.18)$$

годящаяся в приближении, что $(p_A + p_B)^2 \simeq m_R^2$. Причём в формуле (9.18) коэффициент $(2s_R + 1)$ — сумма по спиновым состояниям, C_R — число цветовых состояний, которое может нести резонанс (в интересующем нас распаде W -бозона $C_R = 1$), знаменатель $(2s_A + 1)(2s_B + 1)$ есть коэффициент, берущийся из суммирования по конечным состояниям, $\Gamma(R \rightarrow A + B)$ и $\Gamma(R \rightarrow C + D + \dots)$ суть соответствующие вероятности распада, Γ_R — полная ширина распада.

Формулу Брейта–Вигнера (9.18) можно переписать как

$$\sigma(A + B \rightarrow R \rightarrow C + D + \dots) \simeq \frac{4\pi s}{\kappa^2} \frac{(2s_R + 1)C_R}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \times \frac{\Gamma(R \rightarrow A + B)\Gamma(R \rightarrow C + D + \dots)}{(s - m_R^2)^2 + m_R^2\Gamma_R^2}, \quad (9.19)$$

где s — мандельштамовская переменная, m_R — масса резонанса. В формулах (9.18), (9.19) переменная κ есть

$$\kappa = \frac{[s - (m_A + m_B)^2][s - (m_A - m_B)^2]}{4s}. \quad (9.20)$$

²¹ Детали вывода смотри С. Вайнберг «Квантовая теория поля», т. 1.

9.2 Замечание: формула Брейта–Вигнера в квантовой механике

Поясним, почему формулы (9.18), (9.19) имеют такой вид, апеллируя к чисто квантовомеханическим рассуждениям. Рассмотрим частицу в одномерном потенциале следующего вида,

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < a, \\ \text{const} \neq 0, & a < x < b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad (9.21)$$

изображённого на рисунке 9.6.

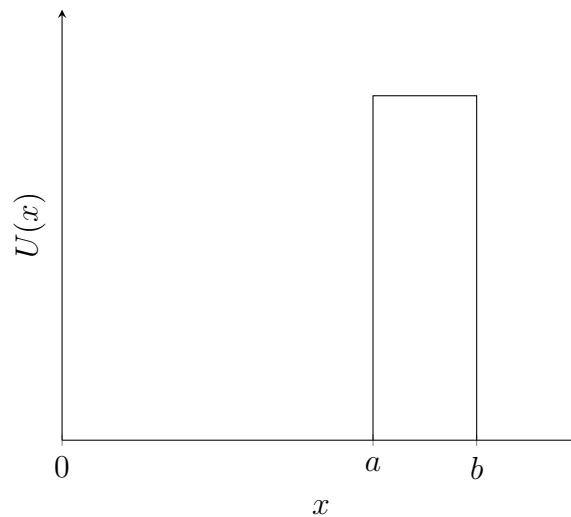


Рис. 9.6: Вид потенциала $U(x)$ «непроницаемая стенка и барьер» к квантовомеханической задаче о выводе формулы Брейта–Вигнера.

Если бы потенциальный барьер был бесконечно высоким, то мы бы получили дискретный спектр, но в случае конечного барьера мы имеем туннельный эффект. Волновая функция эволюционирует во времени в бесконечно высоком барьере как

$$\psi(t) = \psi(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (9.22)$$

однако в случае конечного барьера мы имеем соотношение на вероятность обнаружить частицу в $0 < x < a$,

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-t/\tau}. \quad (9.23)$$

Формула (9.22) находится в очевидном противоречии с (9.23), при этом противоречие

снимается, если считать E комплексной величиной. Поэтому предположим, что

$$E = E_0 - \frac{i}{2}\Gamma, \quad (9.24)$$

где $E_0 \in \mathbb{R}$, $\Gamma \in \mathbb{R}$, то есть фактически мы отказываемся от эрмитовости гамильтониана ($H^\dagger \neq H$). Тогда получим, что период полураспада τ связан с Γ как

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}. \quad (9.25)$$

Осуществляя Фурье–преобразование волновой функции, получим, что

$$\tilde{\psi}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\varepsilon t} \psi(t) = \frac{i\hbar\psi(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon - E_0 + i\Gamma/2}. \quad (9.26)$$

Отсюда видно, что

$$\left| \tilde{\psi}(\varepsilon) \right|^2 \sim \frac{1}{(\varepsilon - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad (9.27)$$

что по сути является аналогом формулы Брейта–Вигнера (9.18) в квантовой механике.

Итак, вернёмся к случаю процесса с рождением W –бозона. Формула (9.19) есть

$$\hat{\sigma}(u + \bar{d} \rightarrow W^+ \rightarrow f) = \frac{4\pi\hat{s}}{\hat{\kappa}^2} \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \times \frac{\Gamma(W \rightarrow u + \bar{d})\Gamma(W \rightarrow f)}{(\hat{s} - m_W^2)^2 + m_W^2\Gamma_W^2}, \quad (9.28)$$

где $s = (P_p + P_{\bar{p}})^2$. При этом было учтено, что $s_W = 1$, а кварки являются фермионами со спином $s_q = 1/2$, несущие цветовой заряд (три цвета). В области интересующих нас энергий

$$\hat{\kappa}^2 = \frac{\hat{s}}{4}. \quad (9.29)$$

При этом

$$\hat{s} = (p_u + p_{\bar{d}})^2 = (x_1 P_p + x_2 P_{\bar{p}})^2. \quad (9.30)$$

В приближении безмассовости протона,

$$P_p^2 = P_{\bar{p}}^2 = m_p^2 = 0, \quad (9.31)$$

получим, что

$$s \simeq 2P_p \cdot P_{\bar{p}}, \quad (9.32)$$

тогда

$$\hat{s} = x_1 x_2 s = m_W^2, \quad (9.33)$$

что свидетельствует о том, что не вся энергия протона и антипротона идёт на рож-

дение W -бозона.

Вспомним полученные нами оценки,

$$m_W \simeq 81 \text{ ГэВ}, \quad \Gamma_W \simeq 2.05 \text{ ГэВ}, \quad (9.34)$$

следовательно, $\Gamma_W/m_W \ll 1$. Тогда мы можем перейти от колоколообразной картины 9.4 к дельта-функциональной аппроксимации,

$$\hat{\sigma} = \frac{4\pi^2}{3} \frac{\Gamma(W \rightarrow u + \bar{d}) \Gamma(W \rightarrow f)}{m_W \Gamma_W} \delta(\hat{s} - m_W^2). \quad (9.35)$$

Дельта-функцию можно раскрыть следующим образом,

$$\delta(\hat{s} - m_W^2) = \delta(x_1 x_2 s - m_W^2) = \frac{1}{s} \delta\left(x_1 x_2 - \frac{m_W^2}{s}\right). \quad (9.36)$$

Отсюда можно грубо оценить долю импульсов $x_1 x_2$,

$$\sqrt{x_1 x_2} = \frac{m_W}{\sqrt{s}} \simeq \frac{80 \text{ ГэВ}}{540 \text{ ГэВ}} \simeq 0.15. \quad (9.37)$$

Введём полезную величину, брэнчинг процесса, являющейся относительной шириной распада,

$$B_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}, \quad (9.38)$$

тогда

$$\sigma = \frac{4\pi^2}{3s} \frac{\Gamma_W B_i B_f}{m_W} \int dx_1 dx_2 u(x_1) d(x_2) \delta\left(x_1 x_2 - \frac{m_W^2}{s}\right), \quad (9.39)$$

откуда при численной оценке можно получить, что необходима энергия $\sqrt{s} \sim 500 \text{ ГэВ}$.

9.3 Обнаружение Z -бозона

В случае же Z -бозона диаграмма рождения выглядит как 9.7. Процесс рождения Z -бозона вкратце можно описать как $p + \bar{p} \rightarrow Z + X$, где X — нерегистрируемые частицы, например, адроны. Ошибка измерения тут меньше, так как Z -бозон распадается на две заряженные частицы, которые регистрируются детектором.

На эксперименте наблюдается распад Z -бозона по следующим каналам: $Z \rightarrow e^+ e^-$, $Z \rightarrow e^+ e^- \gamma$, $Z \rightarrow \mu^+ \mu^-$. На момент открытия были получены следующие значения:

$$m_Z = 93.9 \pm 2.9 \text{ ГэВ} \quad (\text{UA1}), \quad (9.40)$$

$$m_Z = 92.7 \pm 3.1 \text{ ГэВ} \quad (\text{UA2}). \quad (9.41)$$

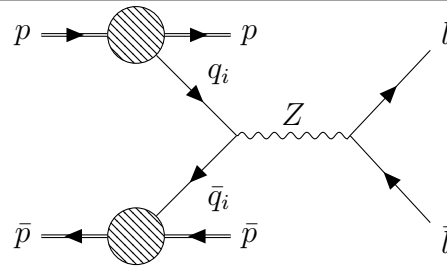


Рис. 9.7: Диаграмма рождения Z -бозона в протон–протонных столкновениях с последующим распадом в лептонную пару. В области энергий, допускающей рождение Z -бозона, основной вклад дают только валентные кварки. Протоны обозначены двумя линиями, так как являются составными частицами. Отметим, что пара кварк и антикварк одного типа (например, $u\bar{u} \rightarrow Z$ или $d\bar{d} \rightarrow Z$) в отличие от 9.1.

Современное значение составляет $m_Z = 91.1876 \pm 0.0021$ ГэВ. Такой прогресс был достигнут благодаря созданию электрон–позитронных ускорителей, энергии которых были уже достаточно для рождения Z -бозона (смотри диаграмму 9.8).

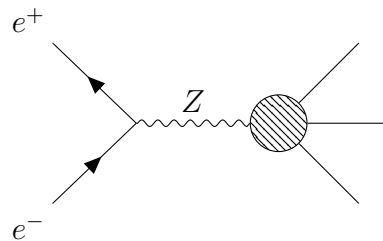


Рис. 9.8: Процесс распада Z -бозона.

Сечение процесса 9.8 есть

$$\sigma \simeq \frac{12\pi}{4m_Z^2} \frac{\Gamma_e \Gamma_f}{(E - m_Z)^2 + \Gamma_{\text{tot}}^2/4}. \quad (9.42)$$

Степень монохроматичности («размазки» пучка) не должна превышать $\Delta E \lesssim 100$ МэВ, что было достигнуто. Как было оценено, $\Gamma_Z \sim 2$ ГэВ. Тогда выполняется, что $\Delta E/\Gamma_Z \ll 1$.

9.4 Замечание: о поиске новых частиц через резонансные процессы

С помощью резонансных процессов можно искать «новые» частицы. Например, так был найден четвертый c -кварк при рождении J/ψ -мезона (связанное состояние пары кварк–антикварк $c\bar{c}$).

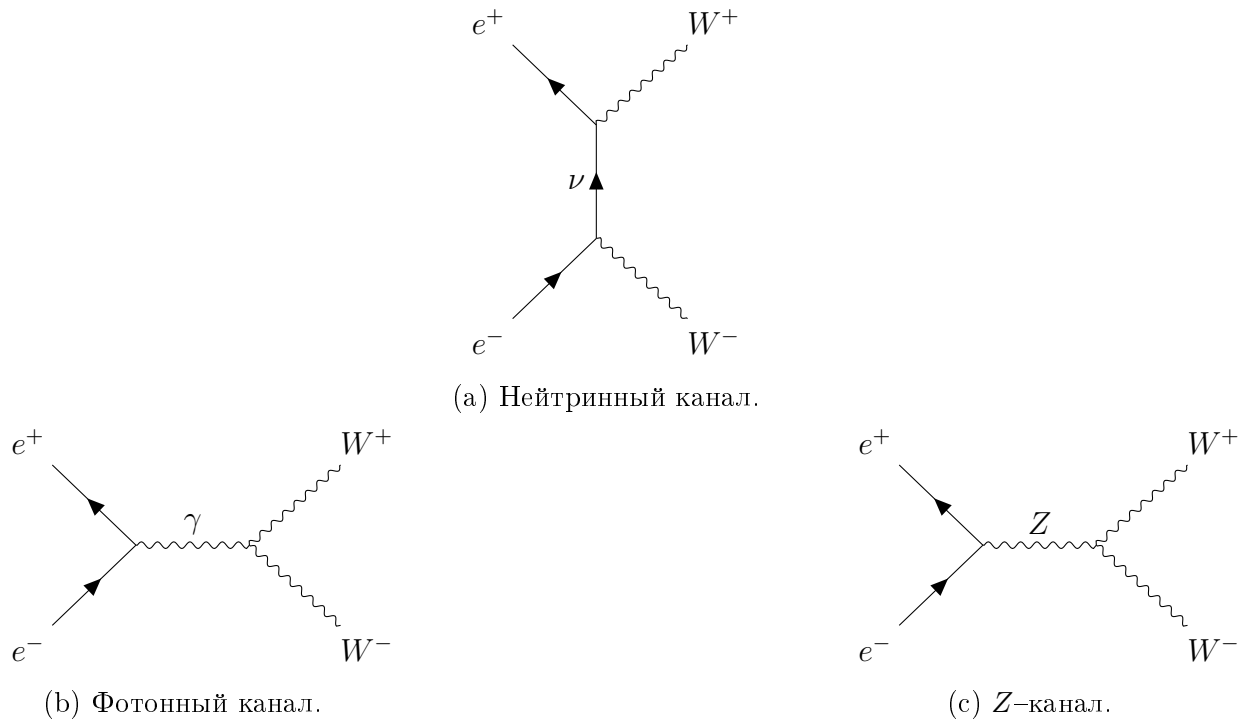


Рис. 9.9: Все три диаграммы описывают процесс $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$. Диаграммы 9.9b, 9.9c указывают на неабелеву природу слабого взаимодействия.

9.5 Замечание: исследование W^- и Z -бозонов

Электрон–позитронные коллайдеры в дальнейшем стали использовать для детального изучения W -бозонов. Когда энергии коллайдеров стало хватать для рождения пар W -бозонов (9 июля 1996 года, LEP2), то стало доступно изучение следующих процессов (смотри диаграммы на рисунке 9.9). Именно учёт всех диаграмм 9.9a, 9.9b, 9.9c даёт согласие с экспериментом.

10 Лекция №10. Экспериментальное подтверждение открытия W^- и Z -бозонов. Бозон Хиггса

10.1 Открытие W^- и Z -бозонов

Как говорилось в предыдущей лекции, для измерения масс W -бозонов и Z -бозонов могли бы использоваться электрон-позитронные коллайдеры, но во время их открытия таких мощных коллайдеров ещё не было,

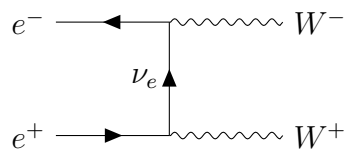


Рис. 10.1: Процесс рождения пары W -бозонов на электрон-позитронных коллайдерах.

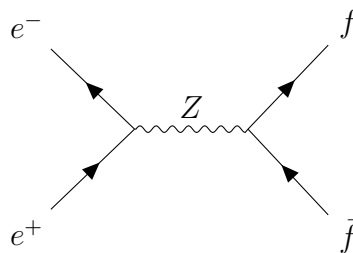


Рис. 10.2: Процесс рождения пары $f\bar{f}$ через Z -бозон на электрон-позитронных коллайдерах.

поэтому был выбран другой способ рождения W -бозонов — столкновение протонов и антипротонов за счёт аннигиляции соответствующих пар кварков. При этом регистрируется пара заряженных лептонов — электрон и мюон с большим поперечным импульсом. Это результат того, что W -бозон рождается при тех энергиях, которые были доступны на коллайдерах практически в покое, поэтому распределение по углам широкое, довольно много событий с большим поперечным импульсом.

Для рождения Z -бозона используется похожий процесс, который также реализуется в протон-антипротонных столкновениях.

При этом нужно отметить, что регистрация W^- и Z -бозонов на экспериментах с неподвижной мишенью возможно лишь при значительном увеличении энергии в СЦМ:

$$\sqrt{s} = \sqrt{2Em} = 25 \text{ ГэВ} \ll m(Z/W). \quad (10.1)$$

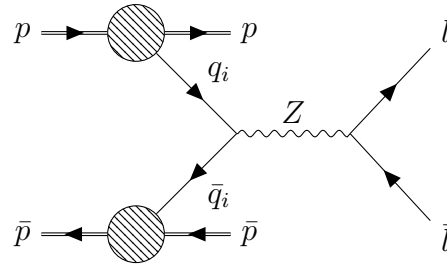


Рис. 10.3: Диаграмма рождения Z -бозона в протон-протонных столкновениях с последующим распадом в лептонную пару. В области энергий, допускающей рождение Z -бозона, основной вклад дают только валентные кварки. Протоны обозначены двумя линиями, так как являются составными частицами.

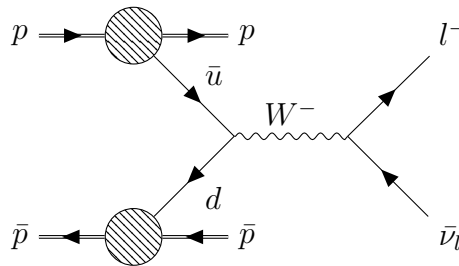


Рис. 10.4: Диаграмма рождения W -бозона в протон-протонных столкновениях с последующим распадом в лептонную пару. В области энергий, допускающей рождение Z -бозона, основной вклад дают только валентные кварки. Протоны обозначены двумя линиями, так как являются составными частицами.

10.2 Бозон Хиггса

Что известно о бозоне Хиггса? Его масса (по данным на 2023 г.) составляет

$$m_H = 125.25 \pm 0.17 \text{ ГэВ.} \quad (10.2)$$

Его полная ширина есть

$$\Gamma_H = 3.2_{-1.7}^{+2.4} \text{ МэВ.} \quad (10.3)$$

Существует также обобщённый параметр, называемый силой канала:

$$\mu = \frac{\sigma_{\text{exp}} Br_{\text{exp}}}{\sigma_{\text{SM}} Br_{\text{SM}}}. \quad (10.4)$$

При совпадении теории с экспериментом $\mu = 1$. Итак, рассмотрим каналы распада H и соответствующие силы сигнала.

- $\mu(WW^*) = 1.00 \pm 0.08$;
- $\mu(ZZ^*) = 1.02 \pm 0.08$;
- $\mu(\gamma\gamma) = 1.10 \pm 0.07$.

По данным CMS (2023 г.) согласие теории с экспериментом составляет

$$\mu = 1.002 \pm 0.057. \quad (10.5)$$

Итак, хиггсовский сектор Стандартной модели есть

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{m_H^2}{2v} H^3 - \frac{m_H^2}{8v^2} H^4 \\ & + \left(m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right)^2 \\ & - \sum_f m_f \bar{f} f \left(1 + \frac{H}{v} \right), \end{aligned} \quad (10.6)$$

где

$$m_W = \frac{1}{2} g v, \quad (10.7)$$

$$m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = \frac{m_W}{\cos \theta_W}, \quad (10.8)$$

а фермионная масса генерируется следующим способом:

$$m_f = \frac{y_f}{\sqrt{2}} v. \quad (10.9)$$

Масса хиггсовского бозона есть

$$m_H = \sqrt{2\lambda} v. \quad (10.10)$$

11 Лекция №11. Свойства бозона Хиггса

11.1 Анализ мод распада бозона Хиггса

Напомним основные моды распада бозона Хиггса. Бозон Хиггса взаимодействует с фермионами взаимодействием типа Юкавы, поэтому рассмотрим процесс распада хиггсовского бозона на тяжёлую фермионную пару 11.1. Такой распад может идти

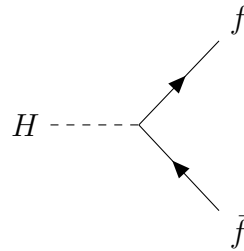


Рис. 11.1: Мода распада хиггсовского бозона на фермионную пару.

только на $f = b, c, \tau, \mu$. Вспомним, что юкавская константа взаимодействия в этом процессе есть

$$y_f = \frac{m_f}{v}. \quad (11.1)$$

Кроме того хиггсовский бозон мог распасться на пару калибровочных бозонов W и Z 11.2. Однако такой процесс невозможен, так как $m_H < 2m_V$, поэтому такой процесс

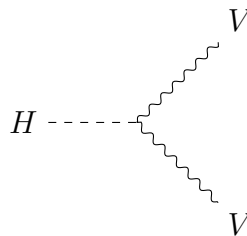


Рис. 11.2: Невозможная мода распада хиггсовского бозона на калибровочные векторные бозоны $V = W, Z$.

невозможен.

Если масса хиггсовского бозона лежит в интервале

$$m_V < m_H < 2m_V, \quad (11.2)$$

то возможен процесс, когда один из калибровочных бозонов является виртуальным, который дальше распадается на лептонную пару 11.3. Этот процесс соответствует реальности.

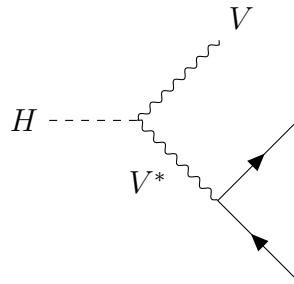


Рис. 11.3: Мода распада хиггсовского бозона на калибровочные векторные бозоны V при условии, что один из векторных бозонов является виртуальным. Дальнейший распад виртуального векторного бозона V^* происходит на лептонную пару.

Если бы масса хиггсовского бозона была бы в диапазоне

$$m_H < m_V, \quad (11.3)$$

то был бы возможен процесс с рождением двух виртуальных калибровочных векторных бозонов, которые были бы распадались бы на лептонную пару 11.4.

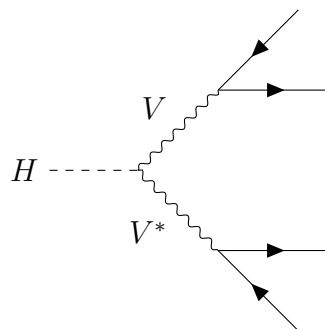


Рис. 11.4: Мода распада хиггсовского бозона на калибровочные векторные бозоны V при условии, что два векторных бозона являются виртуальными. Дальнейшие распады виртуальных векторных бозонов V^* происходят на лептонные пары.

Другой существенный процесс для распада хиггсовского бозона — распад на пару глюонов, которые в дальнейшем превращаются в адронные струи.

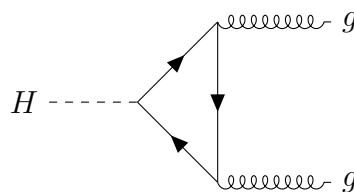


Рис. 11.5: Распад хиггсовского бозона на фотонную пару.

Мода распада, которая была использована для регистрации бозона Хиггса на эксперименте, — мода распада на фотоны 11.6. Менее вероятной, но также важной,

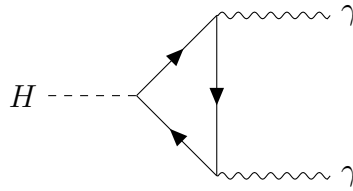


Рис. 11.6: Распад хиггсовского бозона на глюоны через петлю из t -кварка.

является мода распада через виртуальные W бозонов 11.7.

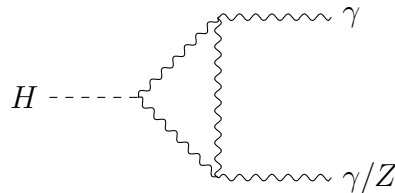


Рис. 11.7: Распад хиггсовского бозона на глюоны через петлю из t -кварка.

Построенные диаграммы несут наибольший вклад в распад хиггсовского бозона. Такие диаграммы в литературе называются LO диаграммами (leading-order). Дальнейшие поправки, например, с глюонными поправками в диаграмме 11.6 называются NLO диаграммами (next-to-leading-order). Если учесть следующий порядок по теории возмущений, то такая диаграмма (диаграммы) будет уже NNLO и т.д. На сегодняшний момент исследованы N^3LO поправки.

Какие наиболее предпочтительнее моды распада хиггсовского бозона на эксперименте? Если хиггсовский бозон имеет массу $m_H < 130$ ГэВ, то основной вклад в полную вероятность распада даёт диаграмма 11.1 с рождением пары $\bar{b}b$. На уровне $m_H = 125$ ГэВ полная ширина распада была оценена как

$$\Gamma_H = 4 \text{ МэВ}. \quad (11.4)$$

Что было бы, если бы хиггсовский бозон был тяжёлым? В таком случае доминирует распад на пару W -бозонов. Оценки показывают, что ширина растёт как $\Gamma_H \sim m_H^3$. Если бы масса хиггсовского бозона была $m_H \sim 1$ ТэВ, то это даёт ширину $\Gamma_H \sim 0.5$ ТэВ (такую частицу бы было трудно наблюдать). В таком случае константа самодействия была бы очень большой, и теория была бы непертурбативной.

С другой стороны парциальная ширина распад на пару фотонов 11.6 фотонов по отношению к полной ширине Γ_H крайне мала (порядка $1/1000$), однако именно такую моду распада выбрали для регистрации хиггсовского бозона. Всё дело в том, что в эксперименте при высоких энергиях возникают фоновые события, имитирующие изучаемый сигнал; в случае распада бозона Хиггса на пару $\bar{b}b$ ($m_b \simeq 5$ ГэВ) фоновые события существенны. Распад хиггсовского бозона на пару фотонов 11.6 даёт удобное

для экспериментального изучения отношение фоновых сигналов к изучаемому.

11.2 Каналы рождения хиггсовского бозона на БАК

Рассмотрим каналы распада хиггсовского бозона, которые были использованы на ЛНС. Главные каналы рождения хиггсовского бозона представлены на диаграммах 11.8 и 11.9.

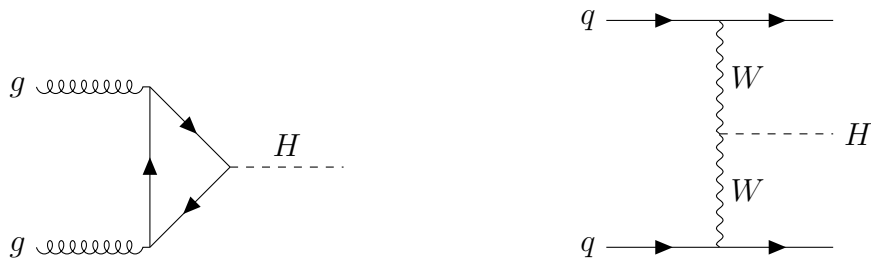


Рис. 11.8: Каналы рождения хиггсовского бозона, изучаемого на БАК.

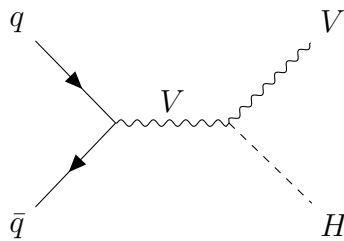


Рис. 11.9: Канал рождения хиггсовского бозона, изучаемого на БАК.

Существует также *ассоциативное рождение* хиггсовского бозона, представленного на диаграмме 11.10.

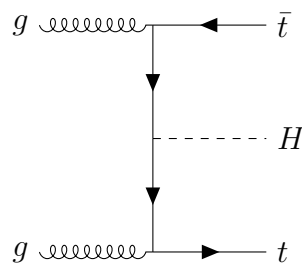


Рис. 11.10: Ассоциативное рождение хиггсовского бозона.

Более полная схема рождения и распада хиггсовского бозона, но только лишь одна из многочисленных, может быть представлена на следующей диаграмме 11.11. Наряду с этой модой распада можно изобразить также следующую моду с распадом на коррелированную пару заряженных лептонов, которая изучалась на БАК 11.12.

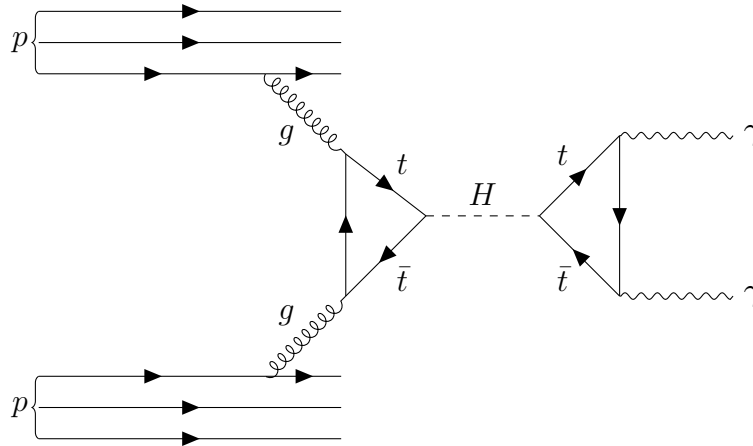


Рис. 11.11: Один из процессов рождения и распада хиггсовского бозона.

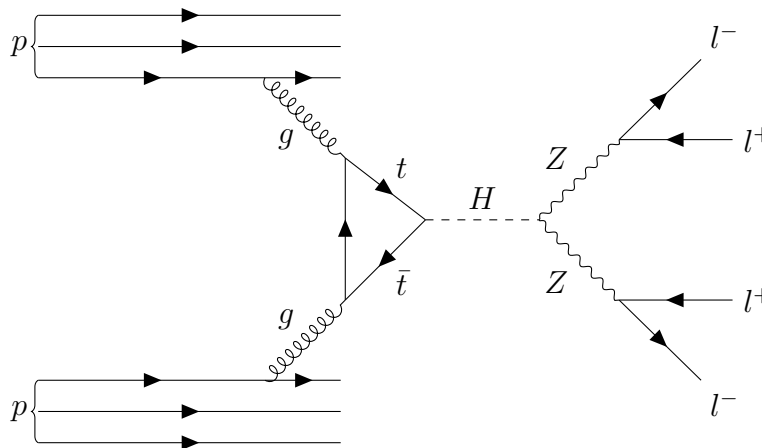


Рис. 11.12: Один из процессов рождения и распада хиггсовского бозона на коррелированную пару заряженных лептонов.

На графике 11.13 представлен результат поиска хиггсовского бозона в распаде $H \rightarrow \gamma\gamma$, где $m_{\gamma\gamma}^2 \equiv (k_1 + k_2)^2$, k_1 и k_2 — 4-импульсы фотонов. Сечение рождения бозона Хиггса на энергии $m_{\gamma\gamma}$ составляет

$$\sigma(125.5 \text{ ГэВ}) = 15.2 \text{ пб}, \quad (11.5)$$

откуда число событий $N_{\text{events}}^{\text{th}}$ в таком распаде вычисляется как

$$\begin{aligned} N_{\text{events}}^{\text{th}}(pp \rightarrow H \rightarrow \gamma\gamma) &= \sigma(gg \rightarrow H) Br(H \rightarrow \gamma\gamma) \int L dt \\ &= (15.13 \times 10^3) \times (2.28 \times 10^{-3}) \times 4.8 = 165.6, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где L — светимость, $\int L dt = 4.8 \text{ фб}^{-1}$, что соответствует графику 11.13, в котором

$N_{\text{events}}^{\text{exp}}$, следовательно,

$$\frac{|N_{\text{events}}^{\text{th}} - N_{\text{events}}^{\text{exp}}|}{N_{\text{events}}^{\text{exp}}} \simeq 10\%. \quad (11.7)$$

В пределах ошибок измерения согласие теории с экспериментом на момент открытия бозона Хиггса было неплохим.

11.3 Теоретические ограничения на массу хиггсовского бозона

Выясним, почему массу хиггсовского бозона искали именно в таком диапазоне? На самом деле, существуют теоретические ограничения на массу хиггсовского бозона.

Мы знаем, что все физические процессы описываются S -матрицей, который по построению является унитарным,

$$S^\dagger S = I. \quad (11.8)$$

Из условия унитарности S -матрицы в квантовой теории поля следует оптическая теорема, связывающая полное сечение процесса с амплитудой рассеяния вперёд:

$$\sigma = \frac{1}{s} \text{Im} A(\theta = 0) = \frac{16\pi}{s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2, \quad (11.9)$$

где a_l — амплитуда парциальной волны. Тогда

$$\text{Im} a_l = |a_l|^2. \quad (11.10)$$

Существует также ограничение на действительную часть амплитуды парциальной волны:

$$|\text{Re} a_l| < \frac{1}{2}, \quad (11.11)$$

которое следует из следующего соотношения:

$$|\text{Re} a_l|^2 + \left(\text{Im} a_l - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (11.12)$$

Из оптической теоремы наиболее существенное ограничение на массу хиггсовского бозона можно получить при рассмотрении процессов с участием массивных векторных W - и Z -бозонов.

Рассмотрим W -бозон с четырёхимпульсом q^μ и вектором поляризации ϵ_μ , то

$$q^\mu \epsilon_\mu = 0, \quad \epsilon^2 \equiv \epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1. \quad (11.13)$$

Таким образом, у калибровочного векторного бозона три степени свободы. Пусть для определённости $\mathbf{q} \parallel Oz$, тогда

$$q^\mu = (q_0, 0, 0, q_z). \quad (11.14)$$

Запишем три независимые поляризации:

$$\varepsilon_{t_1}^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (\text{первая поперечная мода}), \quad (11.15)$$

$$\varepsilon_{t_2}^\mu = (0, 0, 1, 0) \quad (\text{вторая поперечная мода}), \quad (11.16)$$

$$\varepsilon_l^\mu = \left(\frac{q_z}{m_W}, 0, 0, \frac{q_0}{m_W^2} \right) \quad (\text{продольная мода}). \quad (11.17)$$

Видно, что в области высоких энергий продольная мода ведёт себя как

$$\varepsilon_l^\mu \simeq \frac{q^\mu}{m_W} + \mathcal{O}\left(\frac{m_W^2}{\mathbf{q}^2}\right). \quad (11.18)$$

Тогда асимптотика амплитуды $W^+W \rightarrow W^+W$ (смотри диаграммы 13.7) записывается как

$$a_0(s \gg m_H^2) \longrightarrow -\frac{m_H^2}{8\pi v^2}. \quad (11.19)$$

Отсюда видно, что из требований оптической теоремы, мы имеем следующее ограничение на массу хиггсовского бозона:

$$m_H < 870 \text{ ГэВ}. \quad (11.20)$$

В области малых \sqrt{s} асимптотика амплитуды есть

$$a_0(s \ll m_H^2) \longrightarrow -\frac{s}{32\pi v^2}, \quad (11.21)$$

откуда получаем следующее следствие:

$$\sqrt{s} < 1.7 \text{ ТэВ}. \quad (11.22)$$

Тогда из требования унитарности S -матрицы следует, что масса хиггсовского бозона должна быть $m_H < 870 \text{ ГэВ}$ (870 ГэВ с учётом всех каналов $V_L V_L$ -рассеяния). Если учитывать лишь диаграммы 13.7, то при достаточно высоких энергиях будет выход за пределы унитарности, однако в СМ существует бозон Хиггса, который также даёт вклад в амплитуду (смотри диаграммы 13.8), который восстанавливает унитарность S -матрицы.

Детальный анализ показывает, что при рождении фермионной пары роль бозона Хиггса очень важна. Рассмотрим процесс $t\bar{t} \rightarrow ZZ$. При $\sqrt{s} \gg m_t$, то дифференци-

альное сечение без учёта Хиггса (диаграмма 13.9) ведёт себя как

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \frac{m_t^2}{m_Z^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right), \quad (11.23)$$

что противоречит условию унитарности.

Однако если учесть вклад хиггсовского бозона (диаграмма 13.10), то восстанавливается унитарность.

Рассмотрим ещё один пример. Рассмотрим процесс $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ (диаграммы 13.11). В области энергий, которые были доступны в 1990-х — начале 2000-х годов, существенны лишь две диаграммы 13.11a и 13.11b, однако при росте энергии также даёт вклад диаграмма 13.11c, которая восстанавливает унитарность.

Без существования бозона Хиггса процесс рассеяния $WZ \rightarrow WZ$ также был бы патологичен, а именно, что без хиггсовского бозона сечение процесса бы росло как $\sigma \sim s$ (вклад только ?? и ??), а при учёте недостающей диаграммы ?? и при не сильно тяжёлом хиггсовском бозоне, условие унитарности восстанавливается.

Рассмотрим безмассовую частицу, то её пропагатор ведёт себя как $\frac{1}{q^2}$. Хиггсовский конденсат вносит вклад как на диаграммах 13.13. Тогда

$$\frac{1}{q^2} + \sum_n \frac{1}{q^2} \left[\left(\frac{gv}{2} \right)^2 \frac{1}{q^2} \right]^n = \frac{1}{q^2 - m_V^2}, \quad (11.24)$$

следовательно,

$$m_V = \frac{1}{2}gv. \quad (11.25)$$

Аналогично можно показать, как меняется фермионный пропагатор.

Существует также ограничение из рассмотрения ренормгруппы для эволюции константы самодействия бозона Хиггса:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{3}{8\pi^2} [\lambda^2 + \lambda y_t - y_t^4], \quad (11.26)$$

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{9}{2}y_t^3 - 8y_t g_s^2 \right]. \quad (11.27)$$

где

$$t = \ln \frac{\mu^2}{v^2}. \quad (11.28)$$

В качестве начальных условий возьмём $y_t(v^2) = \frac{\sqrt{2}m_t}{v}$ и $\lambda(v^2) = \frac{m_H^2}{v^2}$. Видно, что в пренебрежении массой t -кварка,

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim \lambda^2, \quad (11.29)$$

тогда

$$\lambda(\mu^2) = \frac{\lambda(v^2)}{1 - \frac{3\lambda(v^2)}{8\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{v^2}} \quad (11.30)$$

Как видно, на достаточно больших энергиях возникает «нуль» Ландау (достигается полюс Ландау). Это даёт ограничение на массу хиггсовского бозона:

$$m_H^2 < \frac{8\pi^2 v^2}{3 \ln \frac{\Lambda^2}{v^2}}, \quad (11.31)$$

где Λ — масштаб энергии, на котором решается проблема «нуля» Ландау. Рассмотрим два характерных масштаба, а именно $\Lambda = 1$ ТэВ и $\Lambda = M_{\text{Pl}} = 10^{19}$ ГэВ. Так можно получить ограничение сверху на массу хиггсовского бозона.

Ограничение массы бозона Хиггса снизу следует из условия, что константа λ всегда положительна. Отсюда следует ограничение снизу на массу хиггсовского бозона.

Итак,

$$60 \text{ ГэВ} \lesssim m_H \lesssim 700 \text{ ГэВ} \quad (\Lambda = 1 \text{ ТэВ}), \quad (11.32)$$

а для второго масштаба как

$$130 \text{ ГэВ} \lesssim m_H \lesssim 190 \text{ ГэВ} \quad (\Lambda = 10^{19} \text{ ГэВ}). \quad (11.33)$$

Также масса хиггсовского бозона следуют из радиационных поправок к хорошо измеряемым величинам.

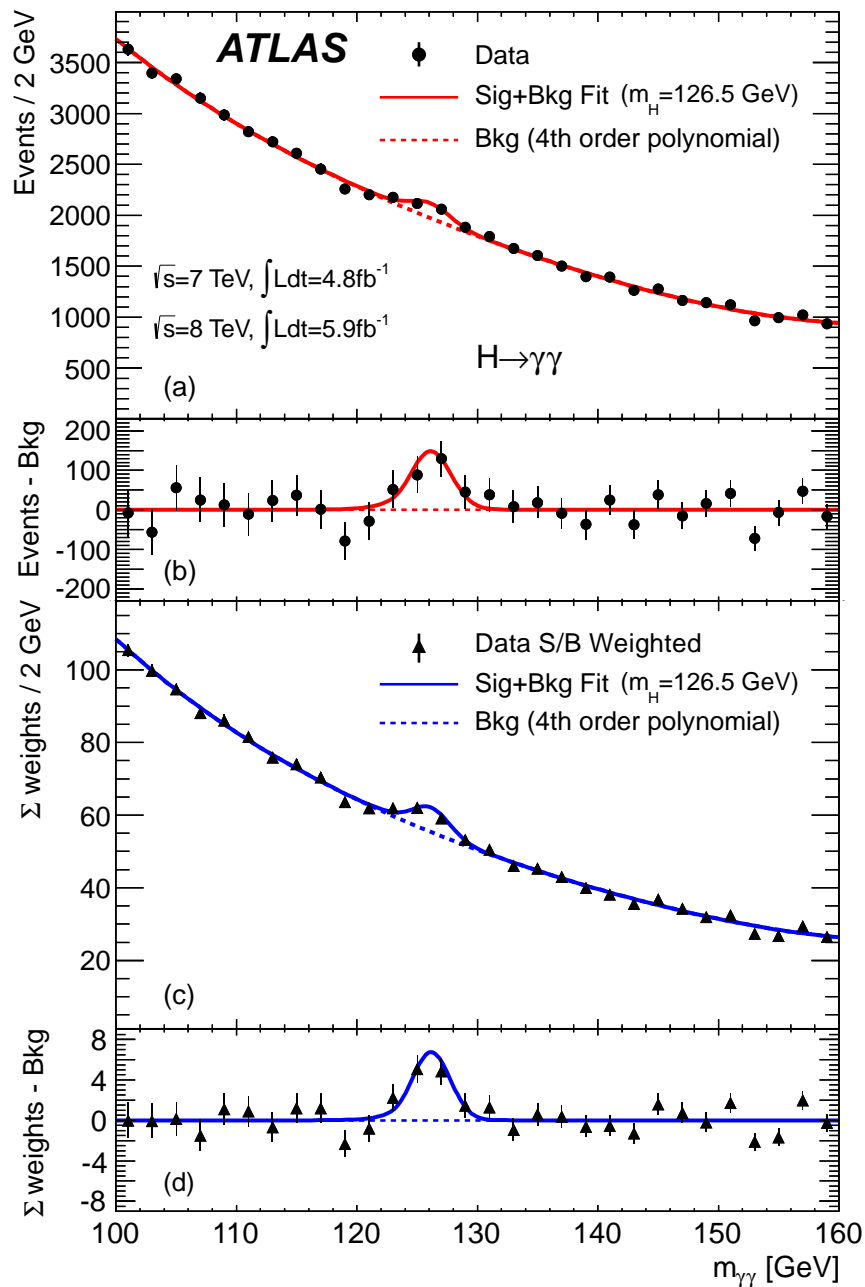


Рис. 11.13: График числа событий в зависимости от массы фотонной пары $m_{\gamma\gamma}$. Хиггсовский бозон наблюдается в районе 125 ГэВ. Источник: <https://inspirehep.net/literature/1124337>.

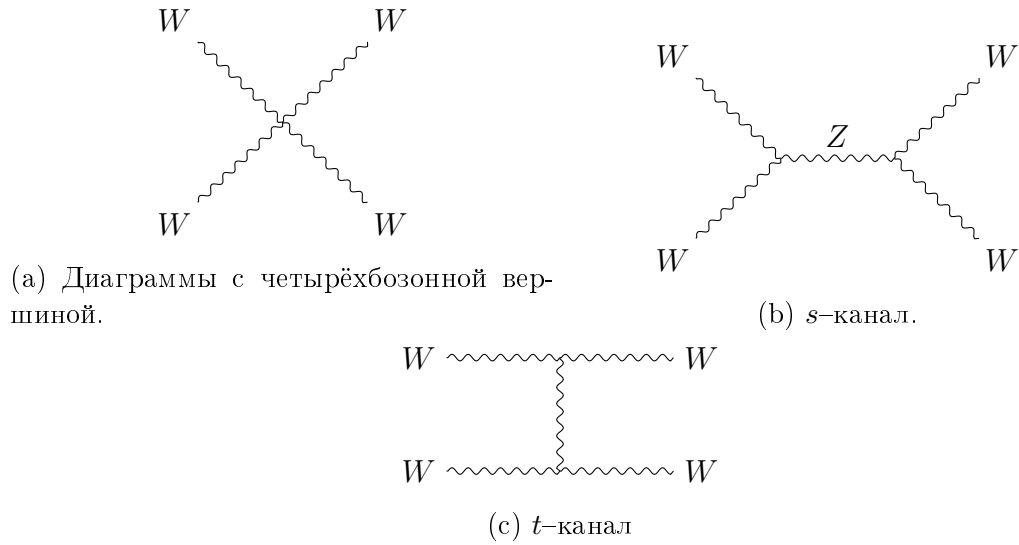


Рис. 11.14: Диаграммы рассеяния двух W -бозонов без бозона Хиггса.

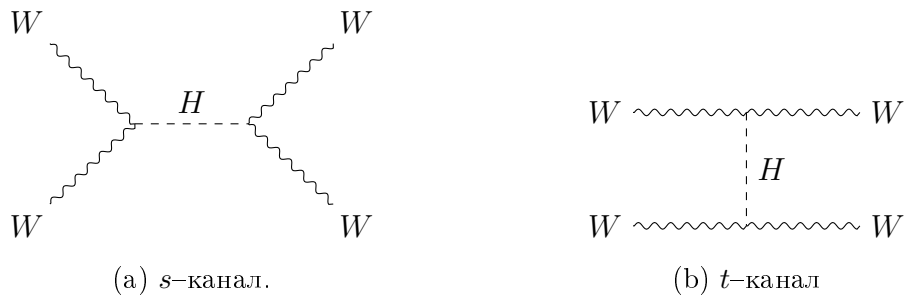


Рис. 11.15: Дополнительные диаграммы к 13.7 рассеяния двух W -бозонов с бозоном Хиггса.

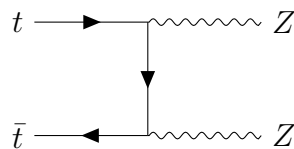


Рис. 11.16: Процесс $t\bar{t} \rightarrow ZZ$ через виртуальный t -кварк.

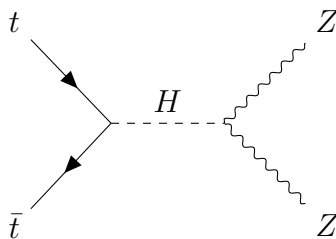


Рис. 11.17: Процесс $t\bar{t} \rightarrow ZZ$ через хиггсовский бозон.

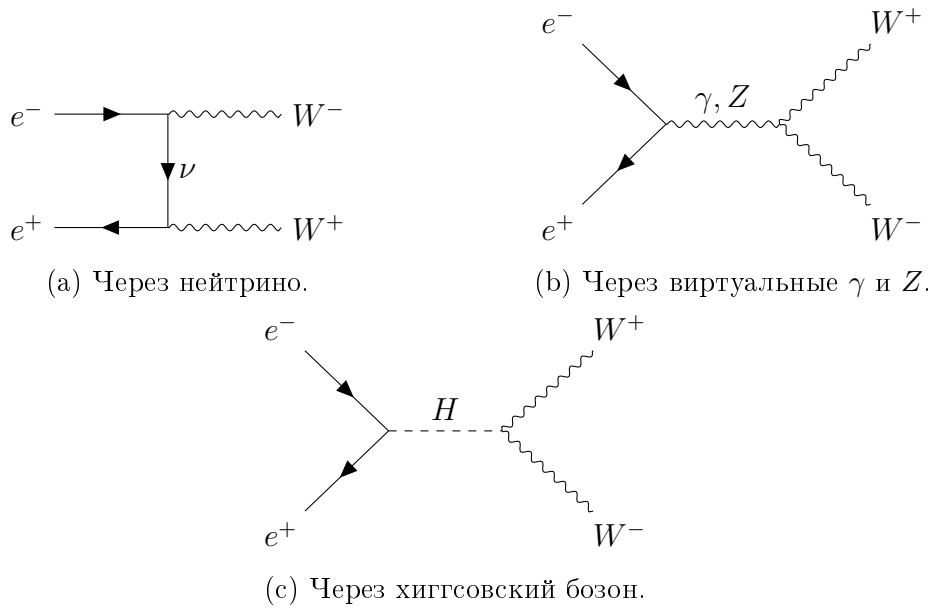


Рис. 11.18: Диаграммы процесса $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$.

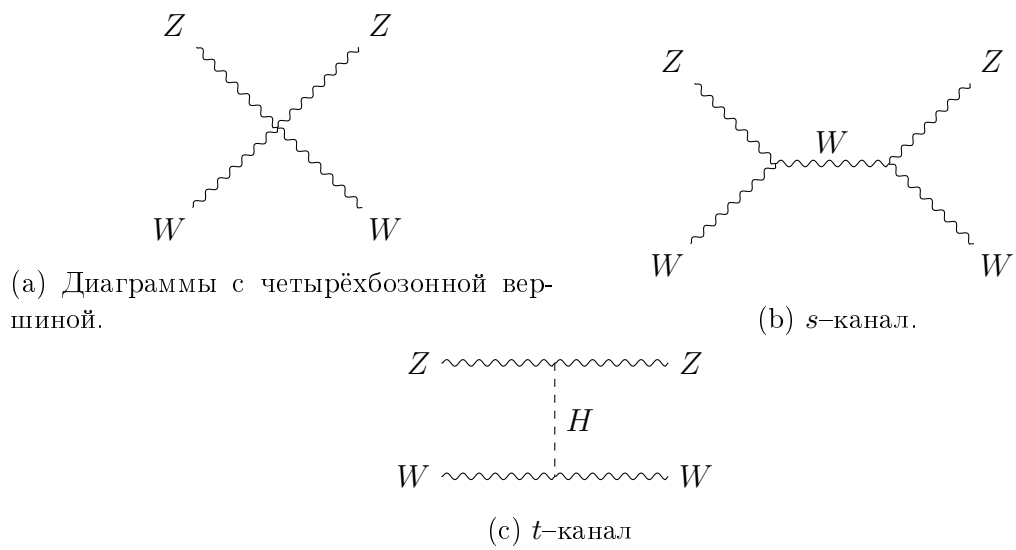


Рис. 11.19: Диаграммы рассеяния $WZ \rightarrow WZ$.

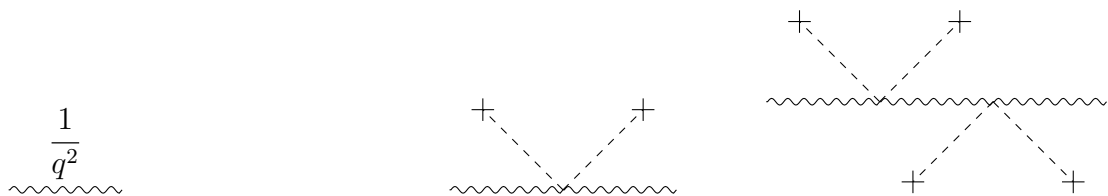


Рис. 11.20: Первые три вклада в пропагатор безмассовой скалярной частицы от хиггсовского конденсата.

12 Лекция №12. CP–нарушение в Стандартной модели

12.1 CP–нарушение и смешивание частиц–античастиц

Обсудим CP–нарушение в Стандартной модели. Напомним, что C–чётность — инвариантность относительно зарядового сопряжения, P–чётность — чётность относительно пространственных отражений ($\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$).

В 1957 г. нарушение пространственной чётности в экспериментах Ву было открыто в слабых взаимодействиях, что было использовано для построения Стандартной модели слабых взаимодействий. Таким образом, Стандартная модель асимметрична по отношению к левым и правым компонентам фермионных полей (левые компоненты образуют дублеты по SU(2), а правые компоненты — синглеты по SU(2)). Как только было открыто нарушение P–чётности в слабых взаимодействиях, был поставлен вопрос: сохраняется ли CP–чётность (комбинированная чётность) в слабых взаимодействиях? В 1964 г. в эксперименте Кронины и Фитча²² был обнаружен процесс распада K –мезона, который явно нарушает CP–чётность. Мы увидим, что нарушение CP–чётности заложено в Стандартную модель, а именно: матрица смешивания кварков Кабиббо–Кобаяши–Маскавы (СКМ–матрица) комплексна. При стандартной параметризации СКМ–матрицы она зависит от трёх углов смешивания и одной комплексной фазы δ ,

$$V_{\text{СКМ}} = V_{\text{СКМ}}(\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta). \quad (12.1)$$

Отметим, что только в случае трёх поколений СКМ–матрица комплексна, в противном случае можно было бы избавиться от фазы процедурой репараметризации.

12.2 Феноменология CP–нарушения

Для начала рассмотрим феноменологические аспекты CP–нарушения. Как было отмечено выше, нарушение CP–чётности было обнаружено в распаде K –мезонов, а точнее в осцилляциях системы $K^0 \bar{K}^0$ –мезонов (см. 12.1). Эти мезоны включают в себя s –кварк: $K^0 = d\bar{s}$, $\bar{K}^0 = s\bar{d}$.

Итак, чем выделены осцилляции $K^0 \bar{K}^0$ –мезонов по отношению к CP–нарушению? Эти мезоны несут квантовое число «странность» (которое в этом процессе не сохраняется), так как включают в себя $s(\bar{s})$ –кварк. Как видно, процесс осцилляций $K^0 \bar{K}^0$ может быть реализован через диаграмму типа «box» 12.1. Эффект смешивания K –мезонов может быть описан следующим образом.

Сначала предположим, что CP–чётность в точности сохраняется и нейтральные каоны — собственные состояния CP–оператора. Чтобы найти проявления этого опе-

²²The Fitch–Cronin experiment.

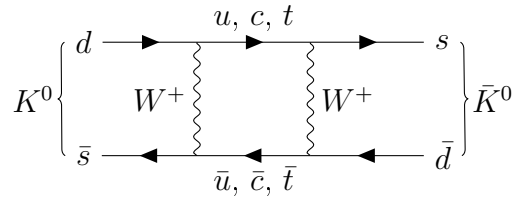


Рис. 12.1: Осцилляции системы $K^0 \bar{K}^0$ -мезонов.

ратора, заметим, что C -оператор меняет кварк на соответствующий антикварк:

$$C |K^0, \mathbf{p}\rangle = - |\bar{K}^0, \mathbf{p}\rangle, \quad (12.2)$$

$$C |\bar{K}^0, \mathbf{p}\rangle = - |K^0, \mathbf{p}\rangle, \quad (12.3)$$

где \mathbf{p} — импульс каона.

Так как каоны имеют отрицательную чётность, то при действии оператором P -чётности получим:

$$P |K^0, \mathbf{p} = 0\rangle = - |K^0, \mathbf{p} = 0\rangle, \quad (12.4)$$

$$P |\bar{K}^0, \mathbf{p} = 0\rangle = - |\bar{K}^0, \mathbf{p} = 0\rangle. \quad (12.5)$$

Таким образом, при действии оператором комбинированной чётности получим, что

$$CP |K^0, \mathbf{p} = 0\rangle = |\bar{K}^0, \mathbf{p} = 0\rangle, \quad (12.6)$$

$$CP |\bar{K}^0, \mathbf{p} = 0\rangle = |K^0, \mathbf{p} = 0\rangle. \quad (12.7)$$

Тогда в отсутствии CP -нарушения собственными состояниями оператора CP -чётности является комбинация K^0 и \bar{K}^0 , а именно

$$|K_1^0, \mathbf{p} = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|K^0, \mathbf{p} = 0\rangle + |\bar{K}^0, \mathbf{p} = 0\rangle], \quad (12.8)$$

$$|K_2^0, \mathbf{p} = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|K^0, \mathbf{p} = 0\rangle - |\bar{K}^0, \mathbf{p} = 0\rangle]. \quad (12.9)$$

По построению тогда

$$CP |K_1^0, \mathbf{p} = 0\rangle = |K_1^0, \mathbf{p} = 0\rangle, \quad (12.10)$$

$$CP |K_2^0, \mathbf{p} = 0\rangle = - |K_2^0, \mathbf{p} = 0\rangle. \quad (12.11)$$

Если сохраняется комбинированная чётность, то возможны следующие процессы:

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0, \quad (12.12)$$

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\pi^0\pi^0, \quad (12.13)$$

однако процессы вида

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\pi^0\pi^0, \quad (12.14)$$

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0, \quad (12.15)$$

запрещены.

Экспериментально наблюдаются коротко живущее состояние (K_S^0) и долго живущее (K_L^0), которые можно отождествить их следующим образом: $K_S^0 = K_1^0$ и $K_L^0 = K_2^0$. Однако в 1964 году в экспериментах Кронина, Фитча и Тёрлэя был обнаружен процесс распада $K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ с относительной вероятностью к полному каналу распада порядка 10^{-3} , что показывает явно наличие нарушения CP-чётности.

Таким образом, чтобы объяснить на феноменологическом уровне этот эффект, необходимо предположить, что K_S^0 и K_L^0 не являются состояниями с определённой CP-чётностью, что можно формализовать следующим образом:

$$|K_S^0, \mathbf{p} = 0\rangle = \frac{1}{(1 + |\varepsilon|^2)^{1/2}} [|K_1^0, \mathbf{p} = 0\rangle + \varepsilon |K_2^0, \mathbf{p} = 0\rangle], \quad (12.16)$$

$$|K_L^0, \mathbf{p} = 0\rangle = \frac{1}{(1 + |\varepsilon|^2)^{1/2}} [\varepsilon |K_1^0, \mathbf{p} = 0\rangle + |K_2^0, \mathbf{p} = 0\rangle] \quad (12.17)$$

т.е. как K_S^0 , так и K_L^0 содержат «примеси» состояний K_1^0 и K_2^0 , при этом эта «примесь» мала, что означает малость параметра $|\varepsilon| \ll 1$.

12.3 Типы нарушения CP-чётности

Различают два типа нарушения CP-чётности.

- При прямом нарушении CP-чётности компонента K_2^0 в K_L^0 распадается на пионные пары через реакции вида $K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$;
- при нарушении CP-чётности путём «смешивания» компонента K_1^0 в K_L^0 распадается через $K_1^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$.

Определим следующие коэффициенты:

$$\eta_{00} = \frac{\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{\mathcal{M}(K_S^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0)}, \quad (12.18)$$

$$\eta_{+-} = \frac{\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\mathcal{M}(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}. \quad (12.19)$$

Анализ данных по CP–нарушению производится через тип нарушения путём «смешивания», так как он доминирует, поэтому пренебрегая эффектом прямого CP–нарушения, можно ввести следующий коэффициент:

$$\eta_{+-} = \eta_{00} = \varepsilon. \quad (12.20)$$

Экспериментально данные показывают, что

$$|\eta_{00}| = (2.220 \pm 0.007) \times 10^{-3}, \quad (12.21)$$

$$|\eta_{+-}| = (2.232 \pm 0.007) \times 10^{-3}. \quad (12.22)$$

Таким образом, в главном порядке по эффекту, имеем, что

$$|\varepsilon| = (2.228 \pm 0.011) \times 10^{-3}. \quad (12.23)$$

Из общих принципов построения квантовой теории поля следует, что имеет место CPT–теорема. Так как нарушается CP–чётность в слабых взаимодействиях, то имеет место и нарушение T–инвариантности в таких процессах.

12.4 CP–нарушение в Стандартной модели

В Стандартной модели CP–нарушение объясняется посредством смешивания кварков, которое описывается с помощью СКМ–матрицы,

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (12.24)$$

В отличие от PMNS–матрицы, СКМ–матрица близка к единичной, поэтому существует удобная параметризация СКМ–матрицы, соблюдающей иерархию углов сме-

шивания: $s_{12} \gg s_{23} \gg s_{13}$, называемой параметризацией Вольфенштейна:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda + \frac{1}{2}A^2\lambda^5[1 - 2(\rho + i\eta)] & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4(1 + 4A^2) & A\lambda^2 \\ A\lambda^3[1 - (1 - \frac{1}{2}\lambda^2)(\rho + i\eta)] & -A\lambda^2 + A\lambda^4[1 - 2(\rho + i\eta)] & 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^4 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^6), \quad (12.25)$$

которая зависит от трёх параметров: A , λ , ρ , η . Величина $\lambda = |V_{us}| \approx 0.225$ играет роль малого параметра разложения. Остальные параметры экспериментально известны:

$$A \approx 0.81, \quad (12.26)$$

$$\rho \approx 0.12, \quad (12.27)$$

$$\eta \approx 0.37. \quad (12.28)$$

12.5 Роль CP–нарушения в эволюции Вселенной

Наш мир асимметричен относительно частиц и античастиц. Эта асимметрия возникла на ранних стадиях эволюции Вселенной. В космологии так называемая барионная асимметрия, т.е. эффективная разница между барионами и антибарионами, известна достаточно хорошо. Если считать, что эта асимметрия происходит из-за CP–нарушающей фазы, то расчёты показывают, что её значения на несколько порядков меньше, чем то, что следует из космологических данных. Это можно трактовать следующим образом: необходимы дополнительные источники CP–нарушения, отсутствующие в Стандартной модели, что является важным косвенным свидетельством неполноты Стандартной модели.

Проблема барионной асимметрии можно схематически описать следующим образом.

1. Предполагается, что на ранних стадиях эволюции Вселенной было одинаковое число барионов и антибарионов. Высоко энергичные фотоны постоянно порождали протон–антипротонные пары, которые в дальнейшем аннигилировали:

$$\gamma\gamma \rightleftharpoons p\bar{p}. \quad (12.29)$$

2. Потом настало время, при котором температура среды (следовательно, и фотонов, которые находились со средой в термодинамическом равновесии) упала, поэтому этой энергии уже не хватало на рождение пар частиц–античастиц.
3. Так как плотность барионов и антибарионов при расширении Вселенной уменьшалась, то процесс аннигиляции становился всё более редким.

4. Число барионов и антибарионов связано с числом фотонов:

$$n_B = n_{\bar{B}} \sim 10^{-18} n_\gamma. \quad (12.30)$$

5. Однако эксперимент показывает, что во Вселенной доминирует материя над антиматерией:

$$n_B - n_{\bar{B}} \sim 10^{-9} n_\gamma. \quad (12.31)$$

Это означает, что чтобы создать эту асимметрию, необходимо, чтобы при аннигиляции $10^9 + 1$ с 10^9 антибарионами «выживал» 1 барион.

Как возникает барионная асимметрия во Вселенной?

- Предположим, что имеется одинаковое количество материи X и антиматерии \bar{X} . Пусть X распадается на

- A (барионное число N_A) с вероятностью p ,
- B (барионное число N_B) с вероятностью $(1 - p)$;

а \bar{X} распадается на

- \bar{A} (барионное число $-N_A$) с вероятностью \bar{p} ,
- \bar{B} (барионное число $-N_B$) с вероятностью $(1 - \bar{p})$.

- Вычислим барионное число после этих распадов:

$$N_{\text{tot}} = N_A p + N_B(1 - p) + [-N_A \bar{p} - N_B(1 - \bar{p})] = (p - \bar{p})(N_A - N_B). \quad (12.32)$$

Если X имеет $B = 0$, то любой распад в конечное состояние с ненулевым барионным числом будет генерировать барионную асимметрию. Таким образом, если $N_{\text{tot}} \neq 0$, то $p \neq \bar{p}$ и $N_A \neq N_B$.

Таким образом, требуется процессы барионов в антибарионы, что не наблюдается в лабораторных экспериментах. Андрей Сахаров в 1967 г. сформулировал необходимые условия для наличия барионной асимметрии во Вселенной.

- Должен существовать процесс, нарушающий сохранение барионного числа.
- С- и CP-чётности должны нарушаться.
- На ранних стадиях Вселенной должно нарушаться термодинамическое равновесие.

13 Лекция №13. Поиск хиггсовского бозона и основные каналы его распада

Обсудим, какие свойства бозона Хиггса были известны до его открытия, а также детали его открытия.

На рисунке 13.1 показан график, полученный в эксперименте ATLAS, на котором изображено распределение инвариантной массы в дифотонном процессе ($H \rightarrow \gamma\gamma$) во время его открытия. Дифотонный процесс распада хиггсовского бозона изображён на рисунке 13.2. Если источником рождения двух фотонов является одна и та же частица (в данном случае — бозон Хиггса), то будет наблюдаться пик на энергиях, соответствующий массе этой частицы (см. 13.1). Как видно из процесса, измеряя величину $m_{\gamma\gamma}^2 \equiv (k_1 + k_2)^2$ — квадрат инвариантной массы, где k_1, k_2 — 4-импульсы фотонов, можно получить значение массы хиггсовского бозона.

На самом деле, существует ещё ряд процессов, которые связаны с калибровочными бозонами в рождении хиггсовского бозона. Однако именно диаграмма через t -кварк (см. рис. 13.2) даёт наибольший вклад.

Сечение рождения бозона Хиггса на энергии $m_{\gamma\gamma}$ составляет

$$\sigma(125.5 \text{ ГэВ}) = 15.2 \text{ пб}, \quad (13.1)$$

откуда число событий $N_{\text{events}}^{\text{th}}$ в таком распаде вычисляется как

$$\begin{aligned} N_{\text{events}}^{\text{th}}(pp \rightarrow H \rightarrow \gamma\gamma) &= \sigma(gg \rightarrow H) Br(H \rightarrow \gamma\gamma) \int L dt \\ &= (15.13 \times 10^3) \times (2.28 \times 10^{-3}) \times 4.8 = 165.6, \end{aligned} \quad (13.2)$$

где L — светимость, $\int L dt = 4.8 \text{ фб}^{-1}$, что соответствует графику 13.1, в котором $N_{\text{events}}^{\text{exp}}$, следовательно,

$$\frac{|N_{\text{events}}^{\text{th}} - N_{\text{events}}^{\text{exp}}|}{N_{\text{events}}^{\text{exp}}} \simeq 10\%. \quad (13.3)$$

В пределах ошибок измерения согласие теории с экспериментом на момент открытия бозона Хиггса было неплохим.

К сегодняшнему моменту (лето 2022 г.) известно²³, что в дифотонном процессе поиска хиггсовского бозона при энергии центра масс $\sqrt{s} = 13 \text{ ГэВ}$ и соответствующей полной светимостью в 137 фб^{-1} , полное сечение есть $\sigma_{\text{fid}} = 73.4_{-5.3}^{+5.4}(\text{stat})_{-2.2}^{+2.4}(\text{syst}) \text{ фб}$, что находится в согласии с предсказаниями Стандартной модели в $75.4 \pm 4.1 \text{ фб}$ (см. 13.3).

²³См. arXiv:2208.12279 для деталей.

13.1 Основные каналы поиска хиггсовского бозона

Масса хиггсовского бозона не предсказывается Стандартной моделью в отличие от W - и Z -бозонов. Вакуумное среднее хиггсовского поля v тоже не предсказывается, однако эта величина связана с константой Ферми G_F .

Парциальные вероятности бозона Хиггса по разным каналам распада существенно зависят от его массы: например, при массе хиггсовского бозона ~ 100 ГэВ доминирует мода $H \rightarrow b\bar{b}$, а дифотонный распад подавлен по сравнению с $H \rightarrow b\bar{b}$ на $\sim 10^3$, однако он более удобен с точки зрения обработки экспериментальных данных (хорошее соотношение сигнала и фона).

Основные каналы рождения бозона в случае ЛНС:

- глюон-глюонное слияние $gg \rightarrow H$ 13.4a,
- слияние векторных бозонов $qq \rightarrow qqH$ 13.4b,
- ассоциативное рождение $qq \rightarrow VH$ 13.5,
- ассоциативное рождение $gg \rightarrow t\bar{t}H$ 13.6.

Основной вклад в сечение рождения даёт глюон-глюонное слияние 13.4a.

13.2 Теоретические ограничения на массу хиггсовского бозона

На момент открытия было известно, в каком диапазоне энергий надо было искать бозон Хиггса. Обсудим детали.

Мы знаем, что все физические процессы описываются S -матрицей, который по построению является унитарным,

$$S^\dagger S = I. \quad (13.4)$$

Из условия унитарности S -матрицы в квантовой теории поля следует оптическая теорема, связывающая полное сечение процесса с амплитудой рассеяния вперёд:

$$\sigma = \frac{1}{s} \text{Im} A(\theta = 0) = \frac{16\pi}{s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) |a_l|^2, \quad (13.5)$$

где a_l — амплитуда парциальной волны. Тогда

$$\text{Im} a_l = |a_l|^2. \quad (13.6)$$

Существует также ограничение на действительную часть амплитуды парциальной волны:

$$|\operatorname{Re} a_l| < \frac{1}{2}, \quad (13.7)$$

которое следует из следующего соотношения:

$$|\operatorname{Re} a_l|^2 + \left(\operatorname{Im} a_l - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (13.8)$$

Из оптической теоремы наиболее существенное ограничение на массу хиггсовского бозона можно получить при рассмотрении процессов с участием массивных векторных W - и Z -бозонов.

Рассмотрим W -бозон с четырёхимпульсом q^μ и вектором поляризации ϵ_μ , то

$$q^\mu \epsilon_\mu = 0, \quad \epsilon^2 \equiv \epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1. \quad (13.9)$$

Таким образом, у калибровочного векторного бозона три степени свободы. Пусть для определённости $\mathbf{q} \parallel Oz$, тогда

$$q^\mu = (q_0, 0, 0, q_z). \quad (13.10)$$

Запишем три независимые поляризации:

$$\epsilon_{t_1}^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (\text{первая поперечная мода}), \quad (13.11)$$

$$\epsilon_{t_2}^\mu = (0, 0, 1, 0) \quad (\text{вторая поперечная мода}), \quad (13.12)$$

$$\epsilon_l^\mu = \left(\frac{q_z}{m_W}, 0, 0, \frac{q_0}{m_W^2} \right) \quad (\text{продольная мода}). \quad (13.13)$$

Видно, что в области высоких энергий продольная мода ведёт себя как

$$\epsilon_l^\mu \simeq \frac{q^\mu}{m_W} + \mathcal{O}\left(\frac{m_W^2}{\mathbf{q}^2}\right). \quad (13.14)$$

Тогда асимптотика амплитуды $W^+W \rightarrow W^+W$ (смотри диаграммы 13.7) записывается как

$$a_0(s \gg m_H^2) \longrightarrow -\frac{m_H^2}{8\pi v^2}. \quad (13.15)$$

Отсюда видно, что из требований оптической теоремы, мы имеем следующее ограничение на массу хиггсовского бозона:

$$m_H < 870 \text{ ГэВ}. \quad (13.16)$$

В области малых \sqrt{s} асимптотика амплитуды есть

$$a_0(s \ll m_H^2) \longrightarrow -\frac{s}{32\pi v^2}, \quad (13.17)$$

откуда получаем следующее следствие:

$$\sqrt{s} < 1.7 \text{ ТэВ}. \quad (13.18)$$

Тогда из требования унитарности S -матрицы следует, что масса хиггсовского бозона должна быть $m_H < 870 \text{ ГэВ}$ (870 ГэВ с учётом всех каналов $V_L V_L$ -рассеяния). Если учитывать лишь диаграммы 13.7, то при достаточно высоких энергиях будет выход за пределы унитарности, однако в СМ существует бозон Хиггса, который также даёт вклад в амплитуду (смотри диаграммы 13.8), который восстанавливает унитарность S -матрицы.

Детальный анализ показывает, что при рождении фермионной пары роль бозона Хиггса очень важна. Рассмотрим процесс $t\bar{t} \rightarrow ZZ$. При $\sqrt{s} \gg m_t$, то дифференциальное сечение без учёта Хиггса (диаграмма 13.9) ведёт себя как

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \frac{m_t^2}{m_Z^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right), \quad (13.19)$$

что противоречит условию унитарности.

Однако если учесть вклад хиггсовского бозона (диаграмма 13.10), то восстанавливается унитарность.

Рассмотрим ещё один пример. Рассмотрим процесс $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ (диаграммы 13.11). В области энергий, которые были доступны в 1990-х — начале 2000-х годов, существенны лишь диаграммы две диаграммы 13.11a и 13.11b, однако при росте энергии также даёт вклад диаграмма 13.11c, которая восстанавливает унитарность.

Без существования бозона Хиггса процесс рассеяния $WZ \rightarrow WZ$ также был бы патологичен, а именно, что без хиггсовского бозона сечение процесса бы росло как $\sigma \sim s$ (вклад только ?? и ??), а при учёте недостающей диаграммы ?? и при не сильно тяжёлом хиггсовском бозоне, условие унитарности восстанавливается.

Рассмотрим безмассовую частицу, то её пропагатор ведёт себя как $\frac{1}{q^2}$. Хиггсовский конденсат вносит вклад как на диаграммах 13.13. Тогда

$$\frac{1}{q^2} + \sum_n \frac{1}{q^2} \left[\left(\frac{gv}{2} \right)^2 \frac{1}{q^2} \right]^n = \frac{1}{q^2 - m_V^2}, \quad (13.20)$$

следовательно,

$$m_V = \frac{1}{2}gv. \quad (13.21)$$

Аналогично можно показать, как меняется фермионный пропагатор.

Существует также ограничение из рассмотрения ренормгруппы для эволюции

константы самодействия бозона Хиггса:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{3}{8\pi^2} [\lambda^2 + \lambda y_t - y_t^4], \quad (13.22)$$

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{9}{2} y_t^3 - 8 y_t g_s^2 \right]. \quad (13.23)$$

где

$$t = \ln \frac{\mu^2}{v^2}. \quad (13.24)$$

В качестве начальных условий возьмём $y_t(v^2) = \frac{\sqrt{2}m_t}{v}$ и $\lambda(v^2) = \frac{m_H^2}{v^2}$. Видно, что в пренебрежении массой t -кварка,

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim \lambda^2, \quad (13.25)$$

тогда

$$\lambda(\mu^2) = \frac{\lambda(v^2)}{1 - \frac{3\lambda(v^2)}{8\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{v^2}} \quad (13.26)$$

Как видно, на достаточно больших энергиях возникает «нуль» Ландау (достигается полюс Ландау). Это даёт ограничение на массу хиггсовского бозона:

$$m_H^2 < \frac{8\pi^2 v^2}{3 \ln \frac{\Lambda^2}{v^2}}, \quad (13.27)$$

где Λ — масштаб энергии, на котором решается проблема «нуля» Ландау. Рассмотрим два характерных масштаба, а именно $\Lambda = 1$ ТэВ и $\Lambda = M_{Pl} = 10^{19}$ ГэВ. Так можно получить ограничение сверху на массу хиггсовского бозона.

Ограничение массы бозона Хиггса снизу следует из условия, что константа λ всегда положительна. Отсюда следует ограничение снизу на массу хиггсовского бозона.

Итак,

$$60 \text{ ГэВ} \lesssim m_H \lesssim 700 \text{ ГэВ} \quad (\Lambda = 1 \text{ ТэВ}), \quad (13.28)$$

а для второго масштаба как

$$130 \text{ ГэВ} \lesssim m_H \lesssim 190 \text{ ГэВ} \quad (\Lambda = 10^{19} \text{ ГэВ}). \quad (13.29)$$

Также масса хиггсовского бозона следуют из радиационных поправок к хорошо измеряемым величинам: массы W -бозона и массы t -кварка.

Простейший механизм Хиггса Стандартной модели обладает одной существенной проблемой: он нестабилен по отношению к квантовым петлевым поправкам к массе самого бозона (проблема иерархий, или «натуральности» Стандартной модели). Поправки к массам всех остальных частиц СМ, кроме скалярного бозона Хиггса, зависят от Λ логарифмически, т.е. слабо, что гарантируется симметриями теории, киральной для фермионной и калибровочной для бозонов. Такой симметрии, которая

Теория

фундаментальных взаимодействий

Борисов Анатолий Викторович

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu)

запрещала бы столь сильную зависимость массы от масштаба, в случае скалярного бозона Хиггса нет.



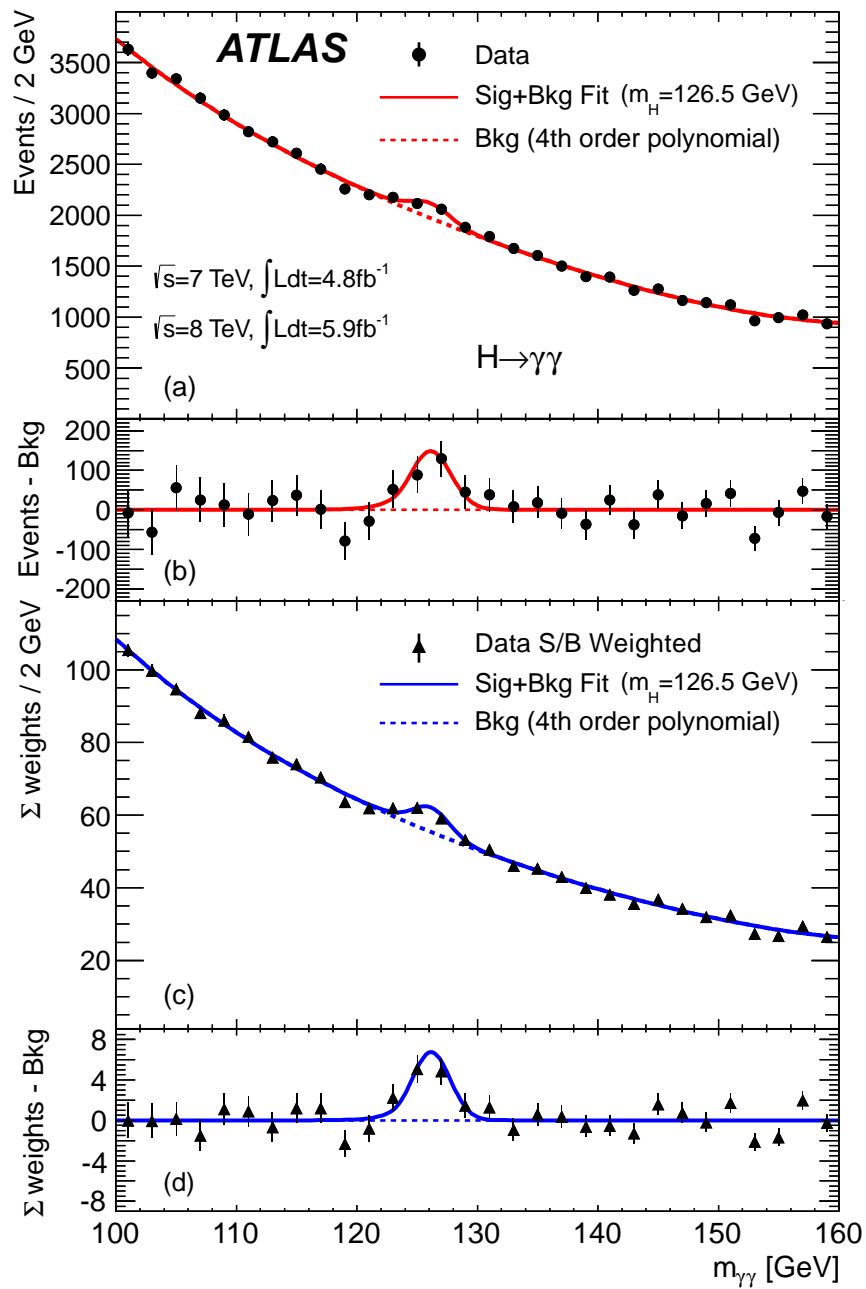


Рис. 13.1: График числа событий в зависимости от массы фотонной пары $m_{\gamma\gamma}$. Хиггсовский бозон наблюдается в районе 125 ГэВ. Источник: <https://inspirehep.net/literature/1124337>.

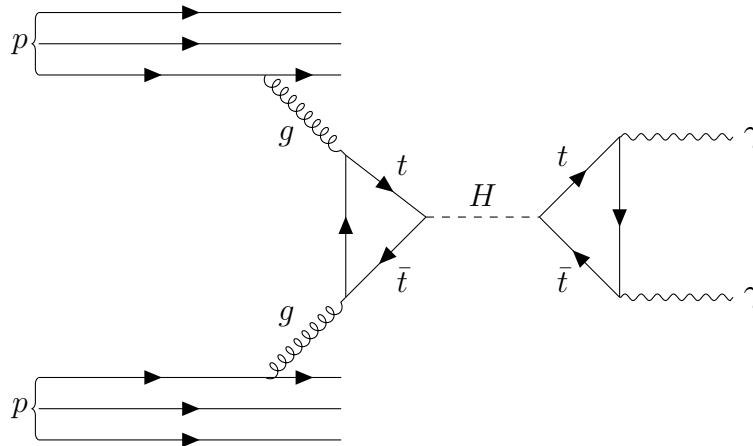


Рис. 13.2: Один из процессов рождения и распада хиггсовского бозона.

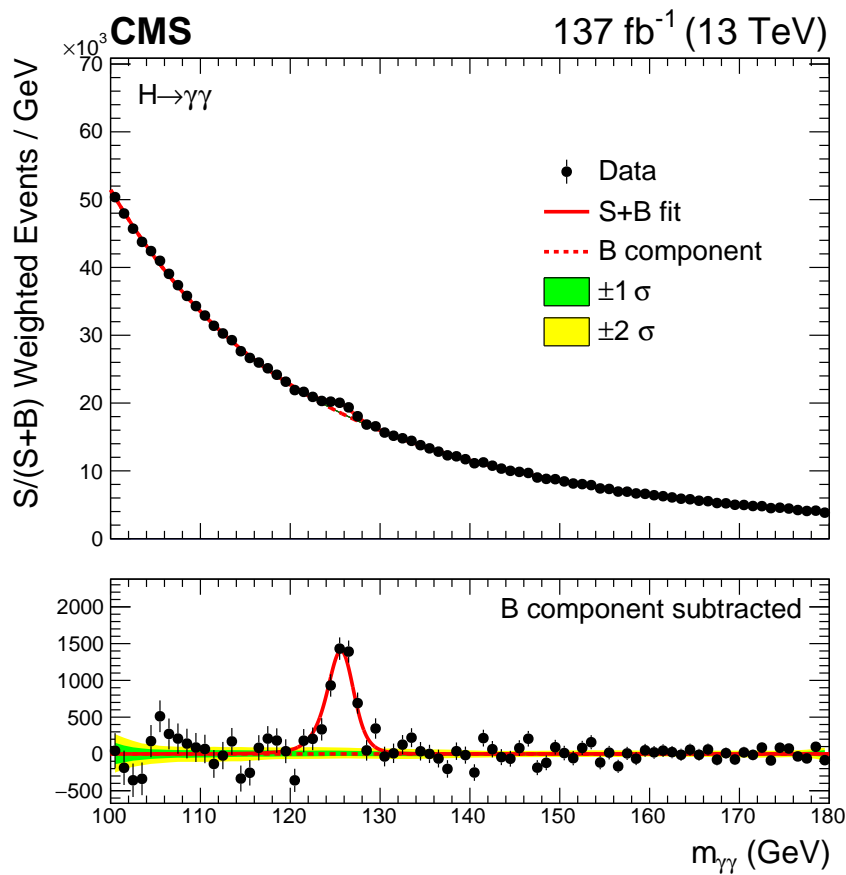


Рис. 13.3: График числа событий в зависимости от массы фотонной пары $m_{\gamma\gamma}$. Хиггсовский бозон наблюдается в районе 125 ГэВ. Источник: <https://arxiv.org/abs/2208.12279>.

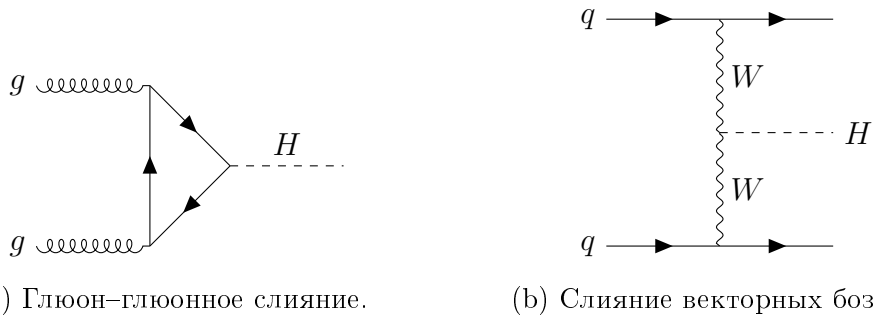


Рис. 13.4: Каналы рождения хиггсовского бозона, изучаемого на БАК.

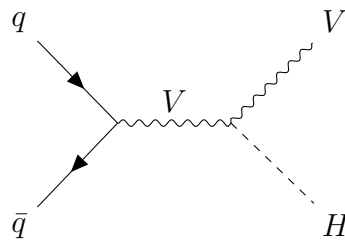


Рис. 13.5: Канал рождения хиггсовского бозона, изучаемого на БАК.

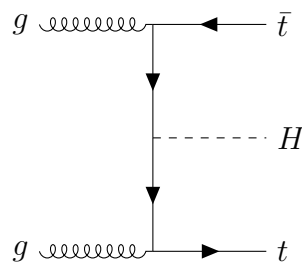


Рис. 13.6: Ассоциативное рождение хиггсовского бозона.

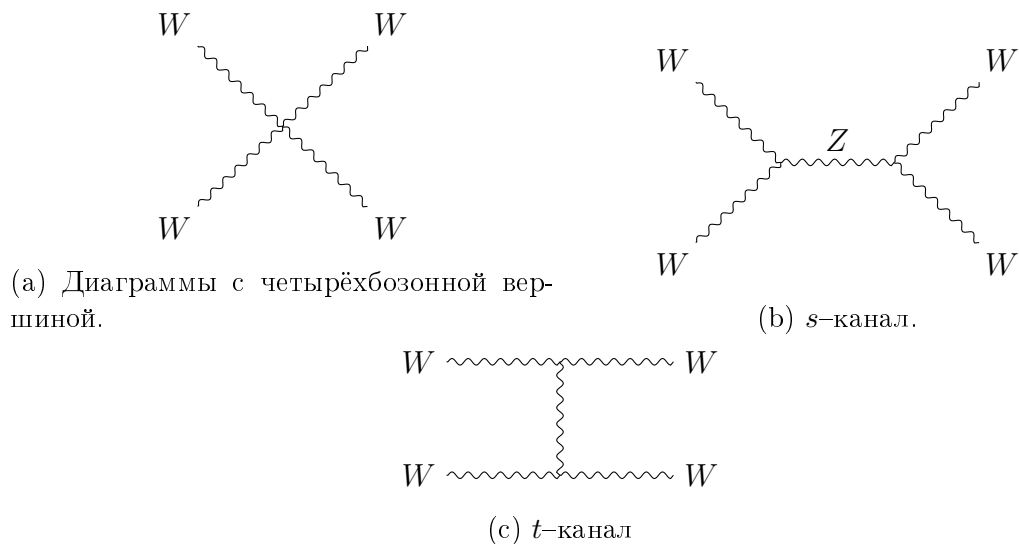


Рис. 13.7: Диаграммы рассеяния двух W -бозонов без бозона Хиггса.

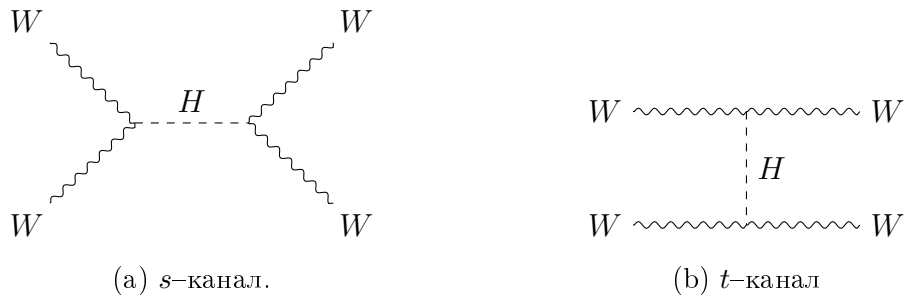


Рис. 13.8: Дополнительные диаграммы к 13.7 рассеяния двух W -бозонов с бозоном Хиггса.

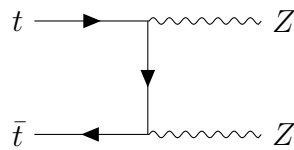


Рис. 13.9: Процесс $t\bar{t} \rightarrow ZZ$ через виртуальный t -кварк.

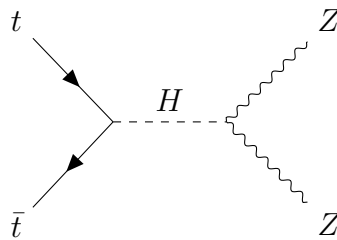


Рис. 13.10: Процесс $t\bar{t} \rightarrow ZZ$ через хиггсовский бозон.

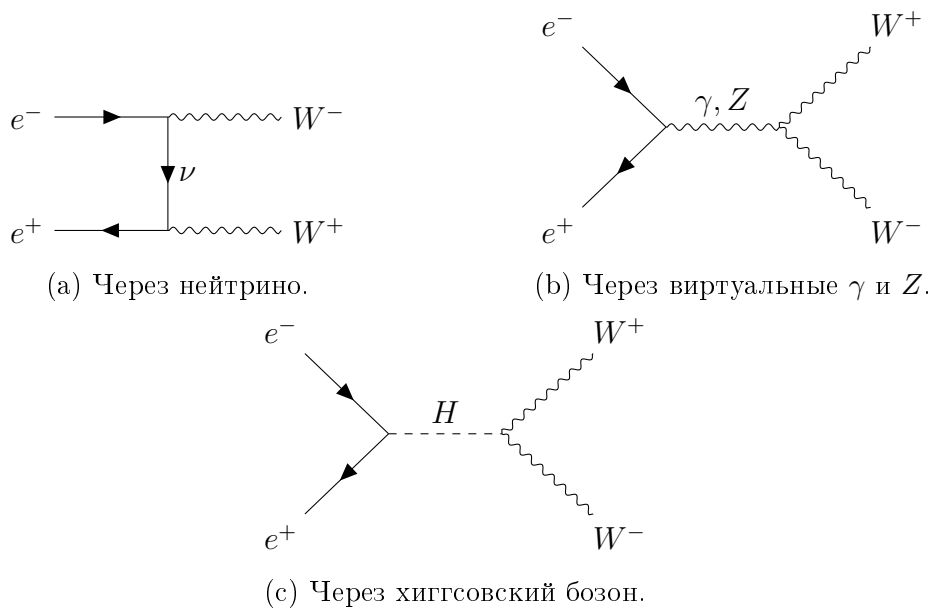


Рис. 13.11: Диаграммы процесса $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$.

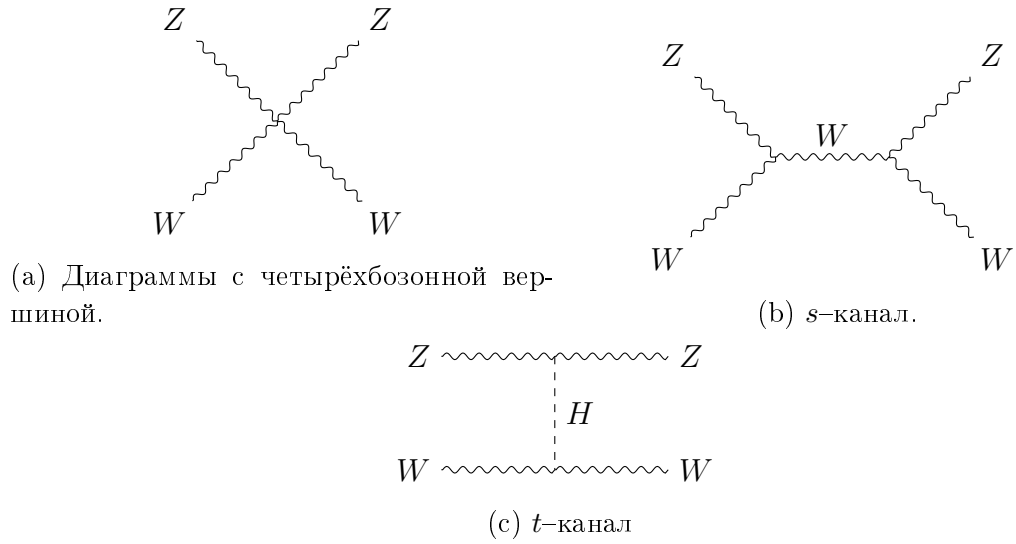


Рис. 13.12: Диаграммы рассеяния $WZ \rightarrow WZ$.

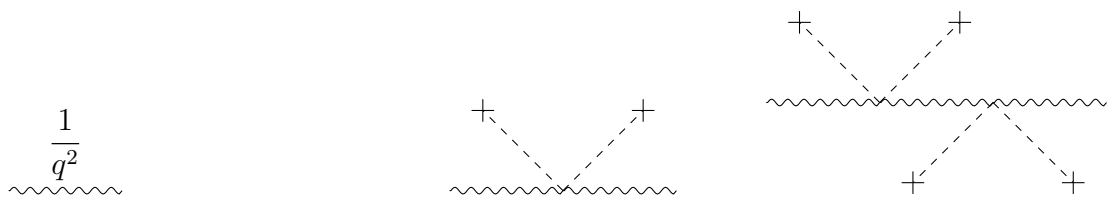


Рис. 13.13: Первые три вклада в пропагатор безмассовой скалярной частицы от хиггсовского конденсата.

14 Лекция №14. Стабильность и метастабильность вакуума Стандартной модели

14.1 Экспериментальная проверка свойств хиггсовского бозона

Обсудим важные экспериментальные данные по проверке свойств хиггсовского бозона. Как известно, масса заряженных лептонов и кварков генерируется за счёт юкавского взаимодействия фермионов с конденсатом хиггсовского поля. Если же мы исследуем отдельные каналы хиггсовского бозона, то мы можем измерить величину этих юкавских связей, которая численно равна отношению массы фермиона к вакуумному среднему хиггсовского поля $v \approx 246$ ГэВ. Массы фермионов были известны до открытия хиггсовского бозона; константа v также была известна до открытия хиггсовского бозона, так как связана с константой Ферми G_F следующим образом:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_F}}. \quad (14.1)$$

Для проверки Стандартной модели эти юкавские константы y_i можно переопределить как $y_i \rightarrow k_i y_i$, где $k_i = 1$ в Стандартной модели. Такое рассмотрение позволяет увидеть потенциальное отклонение измерений от Стандартной модели (см. 14.1). Как видно из 14.1, отклонений от Стандартной модели не обнаружено.

14.2 Вакуум в Стандартной модели

Обсудим детали проблемы стабильности вакуума в Стандартной модели²⁴.

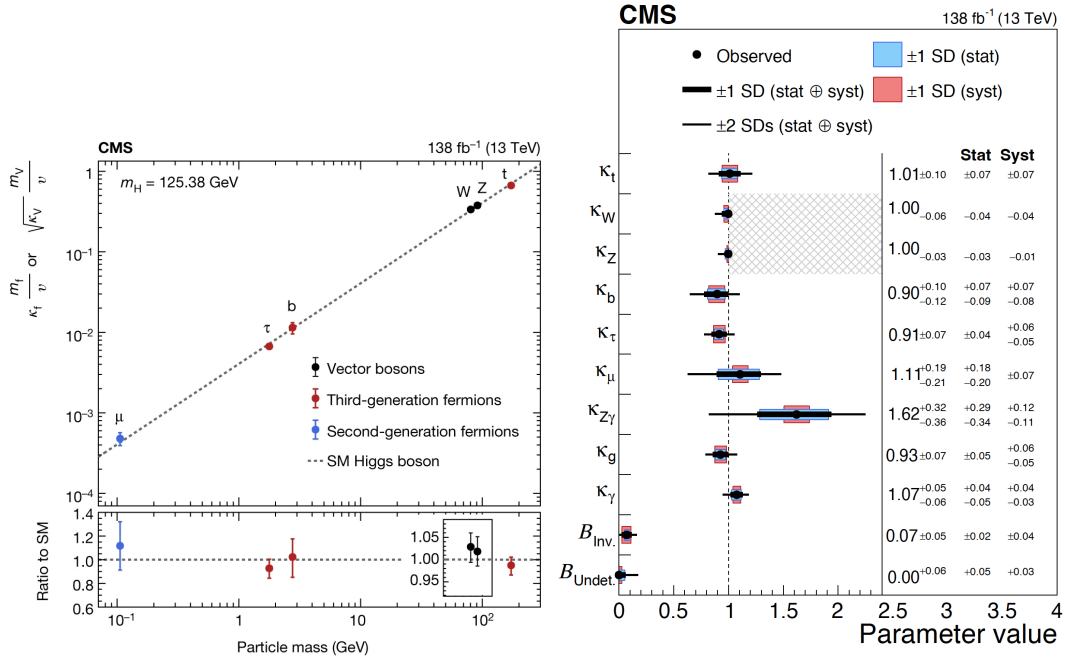
Хиггсовский бозон с массой $m_H \simeq 125$ ГэВ обнаружен на Большом адронном коллайдере. Интерпретируя эту частицу как хиггсовский бозон Стандартной модели и предполагая, что нет никакой новой физики между электрослабым и планковским масштабами, мы имеем, что такой вакуум становится метастабильным, что является проблемой.

Хиггсовский дублет после спонтанного нарушения симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ можно записать как

$$\Phi = \left(\begin{array}{c} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H + iG^0) \end{array} \right), \quad (14.2)$$

где H — физическое хиггсовское поле, G^+ и G^0 — голдстоуновские моды, которые «поедаются» W^\pm - и Z -бозонами, соответственно. После спонтанного нарушения сим-

²⁴См. детали в <https://arxiv.org/abs/1301.5812>.



(a) Измеренные модификаторы связи бозон-фермиона k_i с векторными бозонами и включая петлевые поправки от бозона Хиггса как функция массы частиц. (b) Измерение модификаторов связи k_i , зона Хиггса k_i с векторными бозонами и включая петлевые поправки от бозона фермионами как функция массы частиц, Хиггса.

Рис. 14.1: Иллюстрация к проверке модифицированных юкавских констант $y_i \rightarrow y_i k_i$.
 Источник: <https://arxiv.org/abs/2401.07650>.

фермионы и калибровочные бозоны получают массу,

$$m_f = \frac{y_f}{\sqrt{2}} v, \quad (14.3)$$

$$m_W = \frac{1}{2} g v, \quad (14.4)$$

$$m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v, \quad (14.5)$$

где $g = 0.6519$ and $g' = 0.3575$ — $SU(2)_L$ и $U(1)_Y$ константы, соответственно, определенные на масштабе m_Z .

В унитарной калибровке, до спонтанного нарушения симметрии, скалярный хиггсовский дублет можно записать так:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (14.6)$$

В такой калибровке в теории появляется только одно физическое поле; голдстоуновские моды, духи не проявляются с самого начала. Тогда потенциал становится функ-

цией только одной переменной:

$$V_\varphi = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4. \quad (14.7)$$

После того как поле φ приобретает вакуумное среднее, $\varphi = v + H$, все частицы Стандартной модели приобретают массу и для бозона Хиггса:

$$m_H^2 = 2\lambda v^2, \quad (14.8)$$

$$v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (14.9)$$

Таким образом, после открытия хиггсовского бозона (открытия его массы) стала известна λ — тем самым все параметры Стандартной модели были измерены.

Однако для реалистичного рассмотрения необходимо учесть квантовые поправки к потенциалу V . Квантовые поправки сделают массовый параметр μ и константу самодействия λ , зависящими от масштаба энергии Λ ,

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}\mu(\varphi)^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda(\varphi)\varphi^4. \quad (14.10)$$

Для обсуждения вакуумной стабильности можно опустить первое слагаемое V_{eff} , так как значение поля $\varphi \gg v$. Бегущая константа λ описывается бета-функцией:

$$\beta(\lambda) = \frac{\partial\lambda}{\partial\ln\Lambda}. \quad (14.11)$$

На однопетлевом уровне значение бета-функции есть

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[24\lambda^2 - 6y_t^2 + \frac{3}{8} \left(2g^4 + (g^2 + g'^2)^2 \right) + (-9g^2 - 3g'^2 + 12y_t^2)\lambda \right], \quad (14.12)$$

где член $24\lambda^2$ приходит от хиггсовского самодействия, член $-6y_t^4$ — от t -кварковой петли, член $\frac{3}{8} \left(2g^4 + (g^2 + g'^2)^2 \right)$ — от петли с калибровочными бозонами, а последний член — от перенормировки хиггсовского поля. Решая уравнение на бета-функцию, получим, что

$$\lambda(\Lambda) = \frac{\lambda(v)}{1 - \frac{24}{(4\pi)^2}\lambda(v)\ln\frac{\Lambda}{v}}. \quad (14.13)$$

Полюс Ландау достигается на масштабе

$$\Lambda_\infty = v \exp \frac{2\pi^2}{3\lambda(v)} = v \exp \frac{4\pi^2 v^2}{3m_H^2} \simeq v \times (5 \times 10^5)^{(v/m_H)^2}. \quad (14.14)$$

Для различных масс бозона Хиггса m_H имеем достижение полюса Ландау при следующих Λ_∞ : $m_H = 700$ ГэВ, то $\Lambda_\infty \simeq 10^3$ ГэВ; $m_H = 246$ ГэВ, то $\Lambda_\infty \simeq 10^8$ ГэВ;

$m_H = 125$ ГэВ, то $\Lambda_\infty \simeq 10^{24}$ ГэВ.

Если мы положим $\lambda(\Lambda_x) = x$, то

$$\Lambda_x = v \exp \left[\frac{4\pi^2}{3} \left(\left(\frac{v}{m_H} \right)^2 - \frac{1}{2x} \right) \right]. \quad (14.15)$$

То есть, $\lambda(\Lambda) < x$, если $\Lambda < \Lambda_x$. С точки зрения теории возмущений мы имеем «хорошую» теорию вплоть до $\Lambda_{4\pi}$. В случае лёгкого хиггсовского бозона, Стандартная модель пертурбативна вплоть до планковских энергий, а непертурбативной становится уже на энергиях $\mathcal{O}(10$ ТэВ), если $m_H > 400$ ГэВ.

Теперь обратимся к проблеме стабильности вакуума. Как было показано выше, более легкий бозон Хиггса означает больший непертурбативный масштаб. Однако если он слишком легкий, то теория сталкивается с другой проблемой — неустойчивостью вакуума, что связано с вкладом тяжелого t -кварка в бета-функцию.

Исследуем отдельно вклад от фермионной петли в бета-функцию. Если мы проигнорируем изменение y_f в бета-функции $\beta(\lambda)$, то

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{(4\pi)^2} [-6y_f^4], \quad (14.16)$$

тогда

$$\lambda(\Lambda) = \lambda(v) - 6y_f^4 \ln \frac{\Lambda}{v}, \quad (14.17)$$

т.е. $\lambda(\Lambda)$ уменьшается с ростом масштаба энергии!

Учитывая всё вместе, получим, что $\lambda(\mu)$ убывает и к значениям $\mu \sim 10^{10}$ ГэВ становится отрицательной величиной! Таким образом, это прямое указание на нестабильность вакуума.

14.3 Стабильность вакуума и эффективный потенциал

Устойчивость вакуума зависит от поведения эффективного потенциала 14.2. Рассмотрим как будет меняться ситуацию с вакуумом при добавлении «новой физики» (новые вклады в бета-функцию).

Если потребовать, чтобы вакуум был стабильным вплоть до планковских масштабов, то можно получить ограничение на массу хиггсовского бозона:

$$m_H[\text{GeV}] > 129.6 + 1.4 \left(\frac{m_t[\text{GeV}] - 173.1 \text{ GeV}}{0.7} \right) - 0.5 \left(\frac{\alpha_s(M_Z) - 0.1184}{0.0007} \right). \quad (14.18)$$

Как «спасти» электрослабый вакуум от нестабильности? Для этого можно добавить «новую физику», чтобы изменить поведение эффективного потенциала V_{eff} .

Существует множество простых способов сохранить стабильность электрослабого

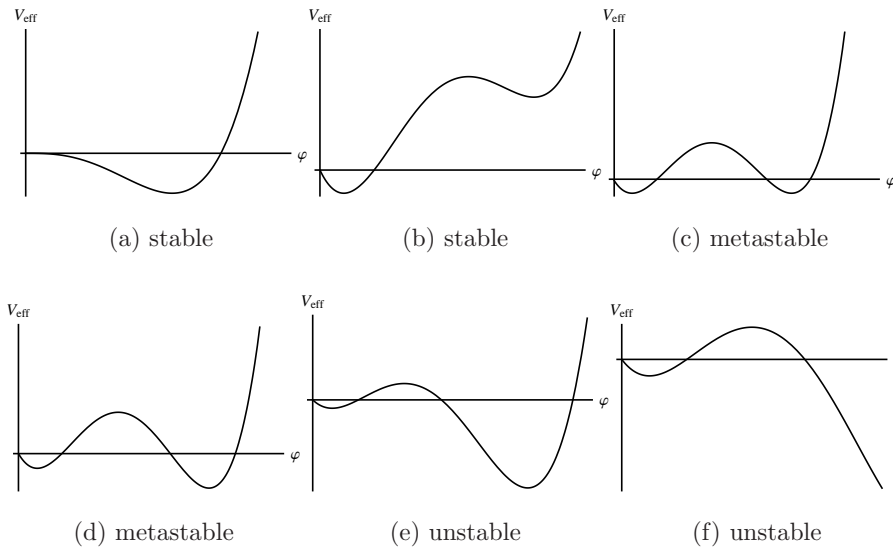


Рис. 14.2: Различные конфигурации (стабильного и нестабильного) эффективного потенциала.

вакуума вплоть до планковских масштабов. Все они связаны с изменениями в Стандартной модели, основанными на различных хорошо мотивированных соображениях. Например, добавление портового синглетного скаляра Хиггса модифицирует бета-функцию дополнительным бозонным вкладом, и этот член может служить для стабилизации вакуума на больших масштабах.

Можно также ввести новые поля материи, заряженных по калибровочной группе Стандартной модели, и в этом случае калибровочная связь может стать больше на больших масштабах, что косвенно повлияет на бета-функцию как дополнительный бозонный вклад.

14.4 Космологические аспекты метастабильности хиггсовского вакуума

Метастабильность хиггсовского вакуума особенно важна для космологии, поскольку существует множество механизмов, которые могли бы вызвать распад электро-слабого вакуума в ранней Вселенной²⁵.

Сценарии перехода из одного вакуума в другой (из ложного в истинный вакуум):

- туннелирование,
- тепловые флуктуации,
- тепловые флуктуации и туннелирование одновременно.

²⁵Смотри детали в <https://arxiv.org/abs/1809.06923>.

В каждом из них переход происходит сначала локально в небольшом объеме, за-
рождая маленький пузырь истинного вакуума. Затем пузырь начинает расширяться,
очень быстро достигая скорости света.

Если бы Вселенная была бесконечно старой, даже произвольно низкая скорость
распада вакуума была бы несовместима с нашим существованием. Следовательно,
последствия метастабильности вакуума можно рассматривать только в космологи-
ческом контексте, принимая во внимание конечный возраст и космологическую ис-
торию Вселенной. Хотя скорость распада вакуума в настоящее время чрезвычайно
медленная, это не обязательно было так в ранней Вселенной. Высокие значения па-
раметра Хаббла во время инфляции и высокие температуры после нее могли значи-
тельно увеличить скорость распада. Поэтому тот факт, что мы все еще наблюдаем
Вселенную в ее электрослабом вакуумном состоянии, позволяет нам накладывать
ограничения на космологическую историю, например, на температуру перегрева и
масштаб инфляции, а также на параметры Стандартной модели, такие как массы
частиц и взаимодействие между полем Хиггса и кривизной пространства–времени.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ