ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ЧАСТЬ 2

ХАЛИЛОВ
ВЛАДИСЛАВ РУСТЕМОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФАКУЛЬТЕТА ФФХИ МГУ
СТЕПАНОВА МАКСИМА ЕВГЕНЬЕВИЧА

Содержание

Лекция 1. Линейные колебания

Линейный колебания консервативных систем с одной степенью свободы

Механическая система совершает колебательные движение вблизи положения устойчивого равновесия. Одномерная система в пространстве конфигураций описывается буквой q — пространство независимых координат. Общий вид функции Лагранжа показывает движение в виде малых колебаний:

$$L = \frac{a(a)}{2}\dot{q}^2 - U(q)$$

Необходимо определить какие системы допускаю устойчивое равновесие и получить уравнение движения и показать, что движение носит колебательный характер. Обобщенная сила:

$$Q(q) = -\frac{dU}{dq}$$

В положении равновесия обобщенная сила:

$$Q(q_e) = 0$$

Система должна быть консервативной. Функция Лагранжа не зависит от времени. Обобщенная энергия системы:

$$H(q,\dot{q}) = \dot{q} \times \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$T^{(2)} > 0$$

$$a(q) > 0$$

Чтобы система совершала колебательные движения вблизи устойчивого равновесия, необходимо, чтобы в окрестности точки q_e сила возвращала систему в положение равновесия. Система должна двигаться так, что удовлетворяет следующему выражению:

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = H_0$$

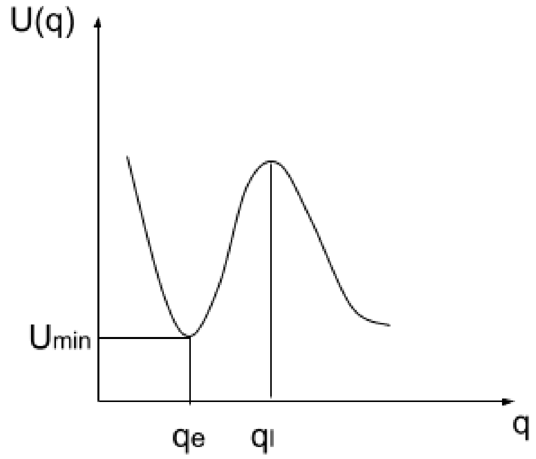

Рис. 1.1. Положение устойчивого равновесия

Необходимо определить положение устойчивого равновесия.

$$Q(q) = -\frac{dU}{dq}$$

Уравнение движения, описывающее движение вблизи устойчивого равновесия:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Чтобы уравнение было линейным, необходимо, чтобы функция Лагранжа была квадратичной по обобщенным скоростям, а потенциал содержа бы квадрат обобщенных координат:

$$U(q) = U(q_e) + \left.\frac{dU}{dq}\right|_{q_e}(q - q_e) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_e}(q - q_e)^2$$

В кинетической энергии:

$$a(q) = a(q_e) \equiv m$$

Конечный вид функции Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{k}{2}(q - q_e)^2 \quad k > 0$$

Отклонение от положения равновесия:

$$x = q - q_e$$

Функция Лагранжа в координатах x:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

Функция Лагранжа гармонического осциллятора:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Свободные колебания описываются однородным уравнением второго порядка по времени.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Решением этой системы являются 2 независимых линейных решения:

$$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}()\frac{c_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\omega t = a\cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{C_2}{C_1}$$

a — амплитуда колебания. Частота колебаний определяется механическими свойствами системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Амплитуда колебаний зависит от начальных условий:

$$x_0 = a\cos\alpha$$

$$\dot{x}_0 = -a\omega\sin\alpha$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0^2}{\omega^2}}$$

Начальная фаза выражается следующим образом:

$$tg\alpha = -\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega}$$

Обобщенная энергия системы сохраняется в системе:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{ma^2\omega^2\sin^2(\omega t + \alpha)}{2} + \frac{ka^2\cos^2(\omega t + \alpha)}{2} = \frac{ma^2\omega^2}{2}$$

Решение записывается следующим образом:

$$x(t) = Re(Ae^{i\omega t})$$

$$A = ae^{i\alpha}$$

Движение на фазовой плоскости образуют точки x и $\dot{x}$:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

На фазовой плоскости в начальный момент времени положение системы обозначается точка $M(x_0, \dot{x}_0)$ — изображающая точка. Траектория движения — эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2\omega^2} = 1$$

Вынужденные колебания

Предполагается, что механическая система помещена во внешнее поле, которое зависит от времени:

$$U(q) - U(q,t)$$

Рассматривается движение вблизи устойчивого равновесия в присутствии переменного внешнего поля:

$$U(x,t) = U(0,t) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} x$$

Функция Лагранжа одномерной системы:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + F(t)x$$

Уравнение Лагранжа записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

Движение механической системы, которое совершает малые колебания вблизи устойчивого равновесия под действием внешнего поля, описывается неоднородным уравнением второго порядка по времени. Решение неоднородного уравнения состоит из 2 частей:

$$x_{\text{пол}} = x_{\text{об}} + x_{\text{ч}}$$

$$x_{\text{об}} = a\cos(\omega t + \alpha)$$

Необходимо найти частный интеграл неоднородного уравнения. Внешняя сила является простой периодической функцией времени:

$$F(t) = F_0 \cos(\tilde{\omega}t + \gamma)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\tilde{\omega}t + \gamma)$$

$$x_{\text{ч}} = b\cos(\tilde{\omega}t + \gamma)$$

$$b(\omega^2 - \tilde{\omega}^2) = \frac{F_0}{m}$$

$$b = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

Полное решение в режиме малых колебаний:

$$x_{\text{пол}} = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)} \cos(\tilde{\omega}t + \gamma)$$

Движение представляет собой совокупность колебаний. Предполагается, что отклонения малы. Необходимо найти решение в точке резонанса:

$$x_{\text{пол}} = A\cos(\omega t + \alpha') + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)} [\cos(\omega t + \gamma) - \cos(\tilde{\omega}t + \gamma)]$$

$$\tilde{\omega} = \omega - \varepsilon$$

$$\omega^2 - \tilde{\omega}^2 = (\omega + \tilde{\omega})(\omega - \tilde{\omega})$$

$$\cos(\omega t + \gamma - \varepsilon t) = \cos(\omega t + \gamma)\left(1 - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2}\right) + sin(\omega t + \gamma)\varepsilon t$$

$$x_{\text{пол}} = A\cos(\omega t + \alpha') + \frac{F_0 t}{2m\omega} \sin(\omega t + \gamma)$$

Это решение описывает движение малых колебаний в точке резонанса. Амплитуда колебаний линейно растет со временем.

Затухающие колебания

Пусть есть гармонической осциллятор, который может совершать собственные колебания на частоте ω_0 и движется в среде сопротивления:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Уравнение движение гармонического осциллятора, на которого действует сила, приводящая к торможению:

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$$

Затухающие уравнения описываются однородным уравнением с постоянными коэффициентами второго порядка по времени.

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$2\mu = \frac{\alpha}{m}$$

μ — декремент затухания. Решение уравнения записывается в следующем виде:

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$(\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2)Ce^{\lambda t} = 0$$

Получается характеристическое уравнение, которое имеет 2 корня:

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e_2^{\lambda} t$$

Затухающие колебания возникают, когда трение относительно мало:

$$\omega_0 > \mu$$

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$$

$$x(t) = Re[Ae^{(-\mu+\omega_0)t}] = ae^{-\mu t}\cos(\omega t + \alpha)$$

Такое движение можно назвать колебанием затухающей амплитуды.

$$x(t) \neq x(t+T)$$

Время между двумя последовательными максимумами или минимумами одно и то же:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Такое движение называют условно периодическим. T — период условно периодического движения.

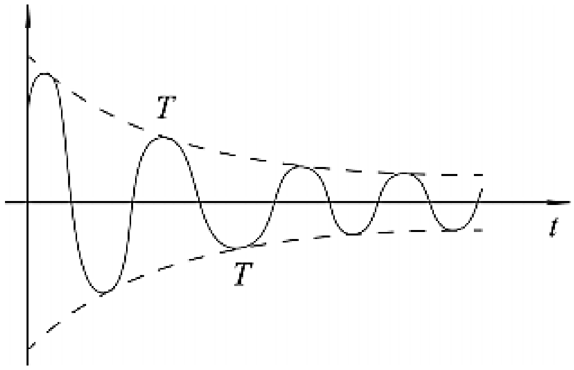

Рис. 1.2. Условно периодическое колебание

Пусть в начальный момент времени задана координата x_0 и скорость $\dot{x}_0$:

$$x_0 = a\cos\alpha$$

$$\dot{x}_0 = \mu a\cos\alpha - a\omega\sin\alpha$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \mu x_0)^2}{\omega^2}}$$

Амплитуда и начальная фаза колебаний:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\dot{x}_0 + \mu x_0}{x_0\omega}$$

Логарифмический декремент затухания определяет, когда амплитуда колебаний уменьшается в μT раз:

$$\mu T = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)}$$

Если трение сильное, то возникает апериодическое движение, которое не приводит к колебаниям:

$$\mu > \omega_0$$

$$x(t) = C_1 e^{(-\mu+\sqrt{\mu^2-\omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\mu+\sqrt{\mu^2-\omega_0^2})t}$$

$$|x| \to 0 \quad t \to \infty$$

Апериодическое затухание происходит, когда собственные корни кратные:

$$\mu = \omega_0$$

$$\lambda_{1,2} = -\mu$$

Решение выглядит следующим образом:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\mu t}$$

Лекция 2. Собственные колебания механической системы со многими степенями свободы

Собственные колебания механической системы со многими степенями свободы

Натуральная механическая система описывается функцией Лагранжа следующего вида:

$$L((q),(\dot{q})) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}((q))\dot{q}_j\dot{q}_k - U((q))$$

Рассматривается система с s обобщенными координатами в пространстве конфигураций.

$$\vec{q} = (q_1, ..., q_s), \quad \vec{\dot{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s)$$

Собственные колебания возникают в системе, где имеет место быть закон сохранения обобщенной энергии:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$H = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = H_0$$

Устойчивость по Ляпунову

Пусть задана некая система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_1}{dt} = Y_1(y_1, \ldots, y_n, t)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = Y_n(y_1, \ldots, y_n, t)$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{Y}(\vec{y}, t)$$

Пусть в этой системе известно решение, которое называется невозмущенным движением:

$$y_1 = f_1(t), \ldots, y_n = f_n(t)$$

Граничные условия для этого решения:

$$y_1(t_0) = f_1(t_0), \ldots, y_n(t_0) = f_n(t_0)$$

Малые приращения для начальных условий:

$$f_1(t_0)+\varepsilon_1,\ldots,f_n(t_0)+\varepsilon_n$$

Полученное новое решение называется возмущенным. Вводятся отклонения возмущенных движений от невозмущенных движений — вариации:

$$x_1=y_1(t)-f_1(t)$$

$$x_n=y_n(t)-f_n(t)$$

Вводится векторное пространство с координатами x:

$$f(x_i,\ldots,x_n)=0$$

Изображающая точка обозначается следующим образом:

$$M:x_1,\ldots,x_n$$

Выражения для n мерной сферы радиуса r:

$$x_1^2+x_2^2+,\ldots,+x_n^2=r^2$$

Начало координат отвечает за невозмущенное движение:

$$X_{0j}=\varepsilon_j$$

Пусть для $\varepsilon>0$ можно ввести такое $\delta>0$, что при начальных возмущениях x_{0j}, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{j=1}^{n}x_{0j}^2\leqslant\delta$ и при $t\geqslant t_0\to\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^2<\varepsilon$, то невозмущенное движение называется устойчивым.

Определение положения равновесия

Точка $\vec{x}_0$ называется положением равновесия системы дифференциальных уравнений, если эта точка является решением этой системы.

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$$

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_0$$

Векторное поле исчезает при равновесии:

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = 0$$

Динамика механической систем определяется следующими уравнения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0 \to \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \ldots S \tag{2.1}$$

Систему уравнений Лагранжа можно написать в виде системы уравнений первого порядка по времени.

$$\dot{q}_j = \xi_j$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \xi_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Теорема: критерий для положения устойчивого равновесия

$$\vec{q} = \vec{q}_e, \quad \dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}_e$$
$$\dot{\vec{q}}_e = 0$$
$$\left.\frac{\partial U}{\partial \vec{q}}\right|_{\vec{q}_e} = 0 \to \left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q_{ej}} = 0 \tag{2.2}$$

Уравнение движения в пространстве отклонения. Система уравнения Лагранжа для натуральной системы записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{q}} = 0$$

$$\dot{\vec{q}} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} = 0$$

q_e является точкой равновесия, только при выполнении условия (2.2).

Теорема Лагранжа (Необходимое и достаточное условия устойчивого равновесия)

Теорема Лагранжа формулирует необходимое и достаточное условия существования устойчивого равновесия, когда возможен режим собственных и свободных малых колебаний. Если точка $\vec{q}_e$ есть изолированный минимум потенциальной энергии механической системы, то положение равновесия будет устойчивым. Минимум потенциальной энергии называют изолированным, если в некоторой малой окрестности этого минимума нет других экстремумов.

$$U(\vec{q}) \geqslant U(\vec{q}_e)$$

Доказательство.

Движение рассматривается в фазовом пространстве. Изображающая точка записывается следующим образом:

$$\vec{q} = (q_1, \ldots, q_s)$$

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$$

Вводится отклонение:

$$\vec{x} = \vec{q} - \vec{q}_e$$

$$\vec{y} = \vec{\xi} - \vec{\xi}_e$$

Можно найти такое положительное δ, удовлетворяющее условию:

$$x_{01}^2 +, \ldots, x_{0s}^2 \leqslant \delta$$

$$x_1^2 +, \ldots, x_s^2 + y_1^2 +, \ldots, y_s^2 < \varepsilon$$

В положении равновесия:

$$\vec{x} = 0$$

$$\vec{q} = \vec{q}_e$$

$$\vec{y} = 0$$

$$\vec{\xi}_e = 0 \to \vec{q}_e = 0$$

Пусть:

$$U(\vec{q}_e) = U_0$$

Связная компонента множества q:

$$\vec{q} : U(\vec{q}) \leqslant U_0 + \varepsilon$$

$$\dot{\vec{q}}, \vec{q} : E = T + U \leqslant U_0 + \varepsilon$$

Можно получить закон сохранения механической системы:

$$\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}((q))\dot{q}, \quad \dot{q}_k + U((q)) = E_0$$

■

Решения вблизи положения устойчивого равновесия

Необходимо получить решения, которые описывают движение в механической системе. Рассматриваются малые отклонения. В режиме колебания потенциальная энергия имеет следующий вид:

$$U(q_1,\ldots,q_s)=U(q_{e1},q_{es})+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j\partial q_k}\right|_{\vec{q}=\vec{q}_e}(q_j-q_{ej})(q_k-q_{ek})=U_0+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}C_{jk}(q_j-q_{ej})(q_k-q_{ek})$$

$$C_{jk}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_k}\right|_{\vec{q}=\vec{q}_e}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}a_{jk}((q))\dot{q}_i\dot{q}_k$$

Структура функции Лагранжа в режиме малых линейных колебаний выглядит следующим образом:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}a_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}C_{jk}x_jx_k$$

$$x_j=q_j-q_0j$$

Уравнение движения записывается как:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0$$

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{ik}\ddot{x}_k+C_{ik}x_k)=0$$

В режиме малых колебаний движение механической системы описывается системой линейных дифференциальных уравнений второго порядка по времени с постоянным коэффициентом. Решение системы записывается следующим образом:

$$x_k(t)=C_ke^{\lambda t}$$

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{ik}\lambda^2+C_{ik})C_ke^{\lambda t}=0$$

Характеристический детерминант определяет корни, при которых существует нетривиальное решение:

$$det\left|a_{ik}\lambda^2+C_{ik}\right|_{i,k=1}^{s}=0$$

Корни определяются следующим образом:

$$x_k(t) = Re\left(\sum_{\alpha=1}^{2s} C_k^\alpha e^{\lambda_\alpha t}\right)$$

Выполняется закон сохранения энергии.

$$Re\lambda_\alpha = 0$$

$$\lambda_\alpha^\pm = \pm i\omega_\alpha$$

Положительные величины называются собственными частотами системы.

$$T_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_\alpha}$$

$$x_k(t) = Re()\sum_{\alpha=1}^{s} C_k^{\alpha(t)} e^{i\omega_\alpha t} + C_k^{\alpha(-)} e^{-i\omega_\alpha t})$$

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{ik}\lambda_\alpha^2 + C_{ik})C_k^\alpha = 0$$

$$C_k^\alpha = \frac{\Delta_k^\alpha(\lambda_\alpha^2)}{\Delta_s^\alpha(\lambda_\alpha^2)} C_S^\alpha \quad k = 1, \ldots S-1$$

$$C^\alpha = \frac{C_s^\alpha}{\Delta_s^\alpha(\lambda_\alpha^2)}$$

$$C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha(\lambda_\alpha^2) C^\alpha$$

Таким образом решение в виде малых колебаний можно представить в следующем виде:

$$x_k(t) = Re\sum_{\alpha=1}^{s}(\Delta_k^\alpha(i\omega_\alpha)C^{\alpha(+)})(k)e^{i\omega_\alpha t} + \Delta_k^\alpha(-i\omega_j)e^{-i\omega_\alpha t})$$

Лекция 3. Колебания систем со многими степенями свободы

Собственные колебания механической системы со многими степенями свободы

Рассматривается натуральная система, в которой задана функция Лагранжа, и система имеет s независимых координат:

$$\vec{q} = (q_1, \ldots, q_s)$$

Функция Лагранжа описывает консервативную систему:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}(\vec{q})\dot{q}_j\dot{q}_k - U(\vec{q})$$

Необходимо, чтобы существовало устойчивое положение равновесия, вокруг которого происходит колебание:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q_{jeq}} = 0$$

Изолированный минимум:

$$U(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{s} C_{jk}X_jX_k$$

$$c_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_U}|$$

$$x_j = q_j \times q_{jeq}$$

Функция Лагранжа вблизи положения равновесия имеет следующий вид:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} \times a_{jk}(\vec{q}_{eq})\dot{x}_j\dot{x}_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} c_{jk}x_jx_k$$

Уравнение Лагранжа имеет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{jk}\ddot{x}_k + c_{ik}x_k) = 0$$

Решение записывается следующим образом:

$$x_k = C_i e^{\lambda t}$$

Нетривиальное решение получается в следующей форме:

$$\sum_{k=1}(a_{ik}\lambda_\alpha^2 + c_{ik})C_k = 0$$

Получается характеристическое уравнение, которое определяет корни, при которых существует нетривиальное решение:

$$det\left|a_{ik}\lambda^2 + c_{ik}\right|_{i,k=1}^{s} = 0$$

$$\lambda_\alpha^\pm = \pm i\omega_\alpha$$

Положительные величины называются собственными частотами системы, которые не зависят от начальных условий. Можно получить связь между амплитудами, которые описывают систему.

$$C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha(\lambda_\alpha^2)C_\alpha$$

Окончательное решение в пространстве конфигураций:

$$x_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^\alpha a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$$

$$C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha a_\alpha$$

Вектор смещения записывается следующим образом:

$$\vec{x} = (x_1, ..., x_s)$$

Решение, используя вектор смещения:

$$\vec{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} \vec{C}^\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$$

В пространстве конфигураций как каждая координата так и вектор смещения представляются как наложение s периодических функций. Главное колебание записывается следующим образом:

$$\theta_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$$

Если частоты не соизмеримы, то ни вектор смещения, ни координаты не являются периодической функцией времени. Необходимо выбрать начальное условие так, чтобы все коэффициенты:

$$a_\alpha = 0, \quad \alpha \neq \gamma, \quad a_\alpha = a_\gamma, \quad \alpha = \gamma$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}$$

$$x_k = \sum_{\alpha=1}^{\alpha} \Delta_k^\alpha a_\alpha \cos\omega_\alpha + \beta_\alpha$$

$$x_{1,2} = x_0 \cos\omega_i t$$

$$x_1 = x_0 \cos\omega_2 t$$

$$x_2 = -x_0 \cos\omega_2 t$$

Нормальные координаты

Вводятся координаты x так, чтобы движение описывалось в виде простых гармонических колебаний:

$$x_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k^\alpha \theta_\alpha(t)$$

$$\theta_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$$

Функция Лагранжа в нормальных координатах:

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{a_\alpha}{2}\theta_\alpha^2 - \frac{C_\alpha}{2}\theta_\alpha^2\right)$$

$$\omega_\alpha^2 = \frac{C_\alpha}{a_\alpha}$$

Движение в нормальных координатах записывается следующим образом:

$$\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta_\alpha = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} C_{jk}x_j x_k$$

Необходимо определить число нормальных колебаний.

Случай нулевой частоты

Пусть в системе есть движение, которое соответствует нулевой частоте. В нормальных координат решение выглядит следующим образом:

$$\omega_\gamma = 0$$

$$\ddot{\theta}_\gamma = 0$$

$$\theta_\gamma(t) = \dot{\theta}_{\gamma 0} t + \theta_{\gamma 0}$$

Нулевая частота возникает в том случае, если в пространстве конфигураций минимум достигается не в одной точке, а в области пространства.

$$U = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$$

Положение равновесия определяется следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0$$

Случай кратных частот

Пусть есть колебание с нормальными координатами:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$$

Амплитуды определяются из выражения:

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{ik}\lambda_{kp}^2 + C_{ik}) C_k^{kp} = 0$$

Решение записывается в следующем виде:

$$x_k(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} C_k^\alpha \omega(\omega^2 t + \beta_\alpha)$$

Число нормальных координат в этом случае тоже есть s. Функция Лагранжа в случае кратных частот:

$$L = \frac{a_1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{C_1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) + \sum_{\alpha=4}^{s} \left(\frac{a_\alpha}{2}\theta_\alpha^2 - \frac{C_2}{2}\theta_2^2 \right)$$

Если частот различные, то они определяются однозначно. Записывается уравнение, которое определяет амплитуду:

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\alpha^2+c_{jk})C_k^\alpha=0$$

$$C_k^\alpha=\Delta_k^\alpha a_\alpha$$

$$\sum_{j,k=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\alpha^2+c_{jk})\Delta_k^\alpha\Delta_j^\beta a_\alpha^2=0$$

$$\lambda_\alpha^2=-\frac{\sum\limits_{j,k=1}^{s}a_{jk}\Delta_k^\alpha\Delta_j^\alpha}{\sum\limits_{j,k=1}^{s}c_{jk}\Delta_k^\alpha\Delta_j^\alpha}<0$$

Ортогональность амплитуд нормальных колебаний

Необходимо доказать, что амплитуды нормальных колебаний попарно ортогональны. Записывается уравнение, которое определяет связь между амплитудами:

$$\sum_{j,k=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\alpha^2+c_{jk})C_k^\alpha C_j^\beta=0$$

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{jk}\lambda_\beta^2+c_{jk})C_k^\beta C_j^\alpha=0$$

$$(\lambda_\alpha^2-\lambda_\alpha^2)\sum_{j,k=1}^{s}a_{jk}C_j^\alpha C_k^\beta=0$$

Если $\omega_\alpha\neq\omega_\beta$, то амплитуды попарно ортогональны.

$$\sum_{j,k=1}^{s}C_{jk}C_j^\alpha C_k^\beta=0$$

Пример 3.1. *Пусть есть система, которая состоит из 2 одинаковых масс, которые соединены пружиной. Вводятся координаты x_1,x_2, которые описывают отклонение от положения равновесия.*

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{k}{2}(x_1^2+x_2^2)-\frac{k_1}{2}(x_2-x_1)^2$$

Уравнение Лагранжа записывается следующим образом:

$$\ddot{x}_1+\frac{(k+k_1)x_1}{m}-\frac{kx_2}{m}=0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{(k+k_1)x_2}{m} - \frac{k_1 x_1}{m} = 0$$

$$x_i = C_i e^{\lambda t}$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k+k_1}{n_1}\right) C_1 - \frac{k_1}{m} C_2 = 0$$

$$-\frac{k}{m} C_1 + \left(\lambda^2 + \frac{k+k_1}{m}\right) C_2 = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \frac{k+k_1}{m} & -\frac{k_1}{m} \\ -\frac{k_1}{m} & \lambda^2 + \frac{k+k_1}{m} \end{vmatrix} = 0$$

Решение характеристического уравнения:

$$\left(\lambda_{1,2}^2 + \frac{k+k_1}{m}\right) = \pm \frac{k_1}{m}$$

$$\lambda_1^2 = -\frac{k}{m} \quad \lambda_1^{\pm} = \pm i\omega_1$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{k+2k_1}{m}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}$$

Необходимо найти связь между амплитудами:

$$\Delta_k^{\alpha} = (-1)^{s+k}$$

$$\delta_1^1 = \frac{k_1}{m}$$

$$\delta_2^1 = \frac{k_1}{m}$$

$$\delta_1^2 = \frac{k_1}{m}$$

$$\delta_2^2 = \frac{k_1}{m}$$

Решение записывается следующим образом:

$$\theta_1 = \Delta_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1)$$

$$\theta_2 = \Delta_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2)$$

$$\vec{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\theta_1(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\theta_2(t)$$

$$\sum_{j,k=1}^{2} a_{jk} C_j^{\alpha} C_k^{\beta} = 0$$

Лекция 4. Гамильтонова динамика, канонические уравнения

Гамильтонова динамика, канонические уравнения

Пространство конфигураций — это пространство обобщенных координат, которые определяют положение системы: $q_1, \dots, q_s$.

Функция Лагранжа — это функция обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени:

$$L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t)$$

Динамическое уравнение определяется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, s$$

Уравнение Лагранжа — это уравнение второго порядка по времени относительно координат q:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$$

Обобщенный импульс определяется через функцию Лагранжа:

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Пространство, определяемое Лагранжовой системой с s степенями свободы, называют фазовым пространством:

$$q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$$

Необходимо представить систему уравнений Лагранжа в виде эквивалентной системы уравнения Гамильтона первого порядка по времени. Это можно сделать с помощью преобразования Лежандра. Пусть задана функция: $f(x, y)$.

$$U = \frac{\partial f}{\partial x} \to g(U, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

Необходимо построить функцию g, которая зависит от U и y.

$$g = Ux - f(x, y)$$

$$dg = xdU + Udx - \frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$x = \frac{\partial g}{\partial U}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f(x,y) \leftrightarrow L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t)$$

$$x \leftrightarrow \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$$

$$y \leftrightarrow q_1, \dots, q_s$$

$$g = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Обобщенная энергия:

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L$$

Условие выпуклости в системе:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{S} a_{jk}(\vec{a}) \dot{q}_j \dot{q}_k > 0$$

$$dH = \sum_{j=1}^{S} (p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

$$dH = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Таким образом, связь между функциями H и L одна и та же. Функция Гамильтона определяется в фазовом пространстве переменных q, p.

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H(\vec{q},\vec{p},t)}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases}$$

Это система уравнений называется уравнением Гамильтона. Сначала необходимо определить функцию Лагранжа этой системы и обобщенные импульсы. Дальше необходимо построить обобщенную энергию. Разрешив уравнение обобщенных координат, подставить их в обобщенную энергию и получить функцию Гамильтона.

$$L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$H = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - L$$

Так же можно определить функцию Гамильтона и построить функцию Лагранжа:

$$H(\vec{q},\vec{p},t)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$L = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - H$$

Принцип Гамильтона в расширенном фазовом пространстве

Рассматривается интегральная кривая γ, которая является решением уравнения Гамильтона:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$$

Соединяет точки:

$$(t_0, \vec{q}_0, \vec{p}_0) \to (t_1, \vec{q}_1, \vec{p}_1)$$

Принцип Гамильтона в расширенном фазовом пространстве формулируется как теорема.

$$\int \vec{p} d\vec{q} - H dt$$

$$\delta\Phi = \int \sum_{j=1}^{S} \left(\delta p_j d d q_j + \dot{p}_j d \delta \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_i \right)$$

В тензорных обозначениях:

$$\delta\Phi = \int \sum_{j=1}^{S} \left(\delta p_j \dot{q}_j + p_j \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \times q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} d p_j \right) dt = 0$$

γ должна быть экстремалью.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\vec{x} = (q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p)$$

$$f(x) = \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_j}, \ldots \right)$$

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

Ключевым моментом является:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$det \left| \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \right| \neq 0$$

Поулчается следующее условие:

$$det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right| \neq 0$$

Интегрирование уравнения Гамильтона

Пусть координата q_1 — циклическая.

$$H(q_2, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s t)$$

$$q_2, \ldots, q_s \to \vec{q}'$$

$$p_2, \ldots, p_s \to \vec{p}'$$

Записывается уравнение Гамильтона:

$$\vec{q}' = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}'}$$

$$\vec{p}' = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}'}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

$$\dot{p}_1 = 0 \to p_1 = c$$

Система решается следующим образом:

$$H(\vec{q}'(t), \vec{p}'(t), c)$$

Система называется консервативной, если функция Гамильтона не зависит от времени. В этом случае функция Гамильтона сохраняется и является уравнением движения.

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = H_0$$

Система с двумя степенями свободы, если она консервативна и имеет одну циклическую координату, интегрируема в квадратурах. Функция Гамильтона одномерного гармонического осциллятора:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{k}{2}q^2$$

Строится функция обобщенной энергии:

$$H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2}$$

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

Функция Гамильтона в цилиндрической системе координат:

$$r, \varphi, z$$

$$U(\rho, z)$$

$$L = \frac{m}{z}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r,z)$$

$$p_r = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

$$p_z = m\dot{z}$$

Функция Гамильтона:

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(r,z)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r,z)$$

Функция Гамильтона в сферической системе координат:

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

$$p_r = m\dot{r}$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_0^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r)$$

Лекция 5. Решения уравнения Гамильтона

Гамильтонова динамика, канонические уравнения

Интегральные кривые уравнения Гамильтона являются единственными экстремалями функционала на классе кривых γ, концы которых лежат на подпространствах:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$$

$$\int (\vec{p} \times d\vec{q} - H dt) = \int (\vec{p} \times \dot{\vec{q}} - H) dt$$

$$(t_0, \vec{q}(t_0) = \vec{q}_0) \quad (t_1, \vec{q}(t_1) = \vec{q}_1)$$

Пусть:

$$\vec{p} = (p_1, \ldots, p_s)$$

$$\vec{q} = (q_1, \ldots, q_s)$$

Уравнение Гамильтона также называют каноническим уравнением.

Функция Гамильтона заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле

Рассматривается частица с зарядом e и массой m. Внешнее электромагнитное поле задается следующим образом:

$$\vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\Phi(\vec{r}, t)$$

Функция Лагранжа частицы записывается как:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) - e\Phi$$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$U_{\text{об}} = U^{(1)} + U^{(0)} = -\frac{e}{c}(\vec{A} \cdot \vec{r}) + e\Phi$$

Вектор импульса определяется следующим образом:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A} \to \dot{\vec{r}} = \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})}{m}$$

Обобщенная энергия строится в следующем виде:

$$H(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \vec{p}\dot{\vec{r}} - L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + e\Phi$$

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} + e\Phi$$

Таким образом уравнение Гамильтона записывается следующим образом:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$H = H_0$$

Функция Гамильтона сохраняется и есть интеграл движения.

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})$$

$$\dot{p} = \frac{e}{mc}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} - e\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{A}}$$

Решения уравнения Гамильтона

Рассматривается движение гармонического осциллятора. Функция Гамильтона записывается следующим образом:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

Необходимо найти решение. Уравнение Гамильтона записывается как:

$$\dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -kq$$

$$\ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0$$

Таким образом, решение записывается в следующем виде:

$$q(t) = a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$$

$$p(t) = m\dot{q} = -ma\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$$

Скобка Пуассона

Полная производная:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

Необходимо проверить следующее:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j \frac{\partial H}{\partial q_j}}\right) = 0$$

Кососимметричная комбинация определяется следующим образом:

$$[f,H] = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

Общее условие:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f,H] = 0$$

Скобки Пуассона определяются следующим образом:

$$[U,v] = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial U}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j}\right)$$

Свойства:

1) Кососимметричность:

$$[u,v] = -[v,u]$$

2)

$$[u,u] = 0$$

3)

$$[u,c(t)] = 0$$

4)

$$[u+v,w] = [u,w]+[v,w]$$

5)

$$[u,v,w] = u[v,w] + v[u,w]$$

6)

$$\frac{\partial}{\partial t}[u,v] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right]$$

Пусть:

$$u = q_k$$

Тогда скобка Пуассона:

$$[q_k, v] = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial q_k}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} = \frac{\partial v}{\partial p_k}$$

$$v = q_l$$

Скобка Пуассона:

$$[q_k, q_l] = 0$$

$$v = p_l$$

$$[q_k, p_l] = \delta_{kl}$$

$$u = p_k$$

$$[p_k, v] = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \frac{\partial v}{\partial q_j} = \frac{\partial v}{\partial q_k}$$

$$[p_k, p_l] = 0$$

Координаты, координаты импульса и импульс называют фундаментальными скобками Пуассона.

$$[p_k, H] = \frac{\partial H}{\partial q_k} = \dot{p}_k$$

$$\dot{p}_k = [p_k, H]$$

$$[q_k, H] = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

$$\dot{q}_k = [q_k, H]$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad f = H$$

Тождество Якоби

Тождество Якоби записывается следующим образом:

$$[u,[v,w]]+[v,[w,U]]+[w[U,v]]=0$$

С помощью тождества Якоби можно доказать теорему Пуассона.

Теорема 5.1. *Если функции u,v являются интегралами движения системы Гамильтона, то и функция, образованная скобками Пуассона, также является интегралом движения.*

$$v \to \frac{\partial U}{\partial t}+[U,H]=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+[v,H]=0$$

Доказательство.

Необходимо, чтобы выполнялось следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}[u,v]+[[u,v],H]=0$$

$$\frac{d[u,v]}{dt}=\left[\frac{\partial u}{\partial t},v\right]+\left[u,\frac{\partial v}{\partial t}\right]+[[u,v],H]+[[u,H]v]=\left[\frac{\partial u}{\partial t}+[u,H],v\right]+\left[u,\frac{\partial v}{\partial t}+[v,H]\right]=0$$

$$-[u,[v,H]]-[v,[H,u]]=[[u,v],H]$$

■

Вычисляется скобка Пуассона от функции $f(q_1,p_1)$ и $F(g(q_1,p_q),q_2,\dots,q_s,p_2,\dots,p_s)$.

$$[f,F]=\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial F}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial p_1}-\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial F}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial q_1}=\frac{\partial F}{\partial g}[f,g]$$

Если функция Гамильтона имеет следующую структуру:

$$H(u(q_1,p_1),q_2,\dots,q_s,p_2,\dots,p_s)$$

$$[u,H]=\frac{\partial H}{\partial u}[u,u]=0$$

То функция u является интегралом движения.

Рассматривается скобка Пуассона, образованная каноническими координатами и моментом импульса.

$$\vec{r}=(x,y,z)=(x_1,x_2,x_3)$$

Момент импульса определяется как:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]$$

Необходимо найти: $[\vec{r}, \vec{L}]$.

$$L_i = \sum_{j,k=1}^{3} e_{ijk} x_j p_k$$

$$e_{123} = e_{312} = e_{213} = e_{213} = -e_{132} = -e_{321} = 1$$

Скобка Пуассона:

$$[x_l, L_i] = \sum_{j,k=1}^{s} e_{ijk}[x_l, x_j p_k] = \sum_{j,k=1}^{s} e_{ijk}([x_l, x_j] p_k + (x_l, p_k) x_j) = \sum_{j,k=1}^{3} e_{lij} x_j$$

Необходимо показать с помощью скобок Пуассона, что момент импульса частицы и Гамильтониан частицы являются интегралами движения в задаче Кеплера.

$$H = \frac{P_l^2}{2m} - \frac{a}{\sqrt{x_l^2}} = H_0$$

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{\partial L_i}{\partial t} + [L_i, H] = 0$$

$$[L_i, H] = e_{ijk} \left(x_j [p_k, H] + p_k [x_j, H] \right)$$

$$[p_k, H] = -\frac{\partial p_k}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial x_n} = -\delta_{kl} \delta_{ln} \frac{a}{r_3} x_l$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_n} = \frac{a}{r^3} \delta_{ln} x_l$$

$$[x_j, H] = \delta_{jn} \frac{p_l}{n} \delta_{ln}$$

$$[L_i, H] = e_{ijk} \left(-x_j \frac{a}{r^3} x_l \delta_{kn} \delta_{ln} + \frac{p_k p_l}{m} \delta_{jk} \delta_{ln} \right)$$

$$e_{ijk} x_j x_k = 0$$

Было доказано, что вектор момента импульса сохраняется.

Лекция 6. Канонические преобразования. Унивалентные преобразования

Канонические преобразования

Уравнение Лагранжа ковариантное:

$$q_1, \ldots, q_s \to q_i' = q_i'(q_1, \ldots, q_s, t)$$

Уравнение Лагранжа сохраняет свой вид относительно точечных преобразований координат. Соответственно, уравнение Гамильтона тоже будет сохранять свой вид при таких преобразованиях:

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$$

В фазовом пространстве данной системы:

$$\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

$$\vec{P} = P(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

Существует преобразование, которое оставляет вид уравнения Гамильтона инвариантным:

$$\dot{\vec{O}} = \frac{\partial H'}{\partial \vec{P}}$$

$$\dot{\vec{P}} = -\frac{\partial H'}{\partial \vec{Q}}$$

Полученные новые координаты являются однозначными функциями.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_s} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial P_s}{\partial P_s} \end{vmatrix} = \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)} =$$

$$= \frac{\partial(\vec{Q}, \vec{P})}{\partial(\vec{q}, \vec{p})}$$

Канонические преобразования определяются с помощью производящей функции канонического преобразования. Всего 4 типа производящих функций:

$$F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$$

$$F_2(\vec{q},\vec{P},t)$$

$$F_3(\vec{p},\vec{Q},t)$$

$$F_4(\vec{p},\vec{P},t)$$

Основное требование состоит в том, чтобы динамика система была одна и та же.

$$\delta\sum_{t_0}^{t_1}(\vec{P}\cdot\dot{\vec{Q}}-H')dt=0$$

$$\delta Q\Big|_{t_0}^{t_1}=P$$

$$\delta\sum_{t_0}^{t_1}(\vec{p}\cdot\dot{\vec{q}}-H)dt=0,\quad \delta q=0$$

Унивалентные преобразования

$$\delta\sum_{t_0}^{t_1}(\vec{p}\cdot\dot{\vec{q}}-H)dt=\delta\sum_{t_0}^{t_1}\left[(\vec{P}\cdot\dot{\vec{Q}}-H')+\frac{dF}{dt}\right]dt$$

Рассматривается следующий принцип:

$$\delta\sum_{t_0}^{t_1}dF_1=\frac{\partial F_1}{\partial\vec{q}}\delta\vec{q}(t)\Big|_{t_0}^{t_1}+\frac{\partial F_1}{\partial\vec{Q}}\delta\vec{Q}\Big|_{t_0}^{t_1}$$

Канонические преобразования получаются следующим образом:

$$\dot{\vec{p}}\cdot\dot{\vec{q}}-H=\vec{P}\times\dot{\vec{Q}}-H'+\frac{dF_i}{dt}$$

Записывается преобразование F_1:

$$\frac{\partial F_1}{\partial\vec{q}}+\frac{\partial F_1}{\partial\vec{Q}}\dot{\vec{Q}}+\frac{\partial F_1}{\partial F}$$

$$\vec{p}=\frac{\partial F_1}{\partial\vec{q}}$$

$$\vec{P}=-\frac{\partial F_1}{\partial Q}$$

$$H=H+\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Записывается преобразование F_2:

$$F_2(\vec{q},\vec{S},t)$$

$$\vec{P} = \frac{\partial F_1}{\partial \vec{Q}}$$

$$F_1(\vec{q},\vec{Q},t)$$

$$F_1 = F_2 - \vec{P}\cdot\vec{Q}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \vec{q}}\dot{\vec{q}} + \frac{\partial F_2}{\partial \vec{P}}\dot{\vec{p}} + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \dot{\vec{P}}\cdot\vec{Q} - \vec{P}\cdot\dot{\vec{Q}}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{q}}$$

$$\vec{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{P}}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Записывается преобразование F_3:

$$F_3(\vec{p},\vec{Q},t)$$

$$\vec{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \vec{q}}$$

$$F_1 = F_3 + \vec{p}\cdot\vec{q}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \vec{p}}\dot{\vec{p}} + \frac{\partial F_3}{\partial \vec{Q}}\dot{\vec{Q}} + \frac{\partial F_3}{\partial t} + \vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{p}\cdot\vec{q}$$

$$\vec{q} = -\frac{\partial F}{\partial \vec{p}}$$

$$\vec{P} = -\frac{\partial F}{\partial \vec{Q}}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

Записывается преобразование F_4:

$$F_4(\vec{p},\vec{P},t)$$

$$F_1 = F_4 - \vec{P}\cdot\vec{Q} + \vec{p}\cdot\vec{q}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial \vec{p}}\dot{\vec{p}} + \frac{\partial F_4}{\partial \vec{P}}\dot{\vec{P}} + \frac{\partial F_4}{\partial t} - \dot{\vec{P}}\cdot\vec{Q} - \vec{P}\cdot\dot{\vec{Q}} + \dot{\vec{p}}\cdot\vec{q} + \vec{p}\cdot\dot{\vec{q}}$$

$$\vec{q} = -\frac{\partial F_4}{\partial \vec{p}}$$

$$\vec{Q} = \frac{\partial F_4}{\partial \vec{P}}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Тождественные, точные и канонические преобразования

Пример 6.1. *Пусть функция задана следующим образом:*

$$F_1 = \vec{q} \cdot \vec{Q} = \sum_{k=1}^{s} q_k Q_k$$

Необходимо получить уравнение:

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = Q_j$$

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -q_i$$

$$F_2 = \vec{q} \cdot \vec{P} = \sum_{k=1}^{s} q_k P_k$$

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j$$

$$F_2 = \sum_{k=1}^{s} f_k(q_1, \ldots, q_s, t) P_k$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = f_j(q_1, \ldots, q_s, t)$$

Гармонический осциллятор задается следующей функцией:

$$H = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{P_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2 q_k^2}{2} \right)$$

Рассматривается проводящая функция:

$$F_1 = \sum_{k=1}^{s} \frac{m_k \omega_k q_k^2}{2} \operatorname{ctg} Q_i$$

Записывается уравнение преобразования:

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = m_j \omega_j q_j \operatorname{ctg} Q_j$$

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = \frac{m_j \omega_j q_j^2}{2 \sin^2 Q_j}$$

$$q_j = \sqrt{\frac{2P_j}{m_j\omega_j}}\sin Q_j$$

$$p_j = \sqrt{2P_j m_j \omega_j}\cos Q_j$$

Строится функция Гамильтона:

$$H' = \sum_{k=1}^{s} p_k \omega_k$$

Все координаты циклические.

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j} = \omega_j \to Q_j = \omega_j t + Q_{j0}$$

$$\dot{P}_j = 0 \to P_j = P_{j0}$$

Решение уравнения выглядит следующим образом:

$$q_j(t) = \sqrt{\frac{2P_{j0}}{m_j\omega_j}}\sin(\omega_j t + Q_{j0})$$

Инфинитезимальные преобразования

Рассматриваются бесконечно малые канонические преобразования:

$$Q_j = q_j + \delta q_j$$

$$P_j = p_j + \delta p_j$$

$$F_2 = \sum_{k=1}^{s} q_k P_k + \varepsilon \tilde{F}_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2(\vec{q}, \vec{P}, t)}{\partial P_j}$$

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}(\vec{q}, \vec{P}, t)}{\partial q_j}$$

Уравнение в линейном приближении по ε:

$$P_j = p_j - \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial q_j}$$

$$Q_j = q_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial p_j}$$

$$\varepsilon = dt$$

$$\tilde{F}_2 = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

$$Q_j = q_j + dt\frac{\partial H}{\partial p_j} = q_j + \dot{q}_j dt = q_j(t + dt)$$

$$P_j = p_j - \frac{dt\partial H}{\partial q_j} = p_j + \dot{p}_j dt = p_j(t + dt)$$

Лекция 7. Теорема Лиувилля. Уравнение Гамильтона-Якоби

Теорема Лиувилля

Обобщенные координаты и обобщенные импульсы:

$$q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$$

Состояние механической системы в данный момент времени описывается изображающей точкой в фазовом пространстве. Фазовым потоком называется группа преобразований:

$$g^t : (\vec{q}_0 = \vec{q}(t_0), \vec{p}_0 = \vec{p}(t_0)) \to (\vec{q}(t), \vec{p}(t))$$

Фазовый поток — однопараметрическая группа преобразований фазового пространства. q, p являются решениями уравнения Гамильтона. Вводится элемент объема:

$$d\Gamma = d\vec{q}d\vec{p} = dq_1, \dots, dq_s, dp_1, \dots, dp_s$$

$$\Gamma = \int \underset{\gamma}{\dots} \int d\vec{q}d\vec{p} \equiv \int \underset{\gamma}{\dots} \int dq_1, \dots, dq_s, dp_1, \dots, dp_s$$

Рассматривается фазовое пространство и конечный объем. Этот объем заполнен непрерывным образом одинаковыми системами Гамильтона, которые отличаются начальными условиями. Ансамбль Гиббса — непрерывно заполненный гамильтоновыми частицами объём в фазовом пространстве. Гамильтоновы частицы — с одной и той же функцией Гамильтона.

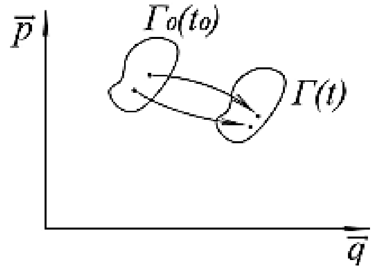

Рис. 7.1. Фазовое пространство и конечный объем

Теорема 7.1. *Теорема Лиувилля.*

При движении ансамбля Гиббса фазовый объём сохраняется $\Gamma = const$, *т.е.* $g^t\Gamma = \Gamma$.

Доказательство.

Нужно доказать, что:

$$\Gamma(t_0+dt)=\Gamma(t_0)$$

$$\int\ldots\int d\vec{q}d\vec{p}\bigg|_{t_0+dt}=\int\ldots\int d\vec{q}_0 d\vec{p}_0=\Gamma(t_0+dt)=\int\underset{\gamma}{\ldots}\int D(t_0+dt)d\vec{q}d\vec{p}$$

$D(t_0+dt)$ — якобиан преобразования.

$$D(t_0+dt)=\frac{\partial(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s)}{\partial(q_{10},\ldots,q_{s0},p_{10},\ldots,p_{s0})}$$

Нужно доказать, что $D(t_0+dt)=1$. Ранее было показано, что

$$q_i=q_{i0}+\frac{\partial H_0}{\partial p_{i0}}dt$$

$$p_i=p_{i0}-\frac{\partial H_0}{\partial q_{i0}}dt$$

$$H_0\equiv H(\vec{q}_0,\vec{p}_0,t)$$

Элементы Якобиана:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}}=\delta_{ij}+\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_{j0}\partial p_{i0}}dt$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_{j0}}=-\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{j0}\partial q_{i0}}dt$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_{j0}}=\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{j0}\partial p_{i0}}dt$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{j0}}=\delta_{ij}-\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{j0}\partial q_{i0}}dt$$

$$D(t_0+dt)=\begin{vmatrix}1+\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial q_{10}\partial p_{10}}dt & \cdots & \sim dt\\ \sim dt & 1+\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial q_{s0}\partial p_{s0}}dt & \sim dt\\ \sim dt & \cdots & 1-\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_{s0}\partial p_{s0}}dt\end{vmatrix}=$$

$$=1+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_{i0}\partial p_{i0}}-\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{i0}\partial q_{i0}}\right)dt+o(dt^2)$$

Вводятся обозначения:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}\vec{q}\\ \vec{p}\end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \vec{p}} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \vec{q}} \end{pmatrix}$$

Уравнения Гамильтона записывается в виде:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

Очевидно, что:

$$div\vec{f} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right)$$

Тогда:

$$\Gamma(t_0 + dt) = \int \underset{\gamma}{\dots} \int \{1 + \underbrace{div\vec{f}(\vec{q},\vec{p})}_{=0} dt\} d\vec{p}_0 d\vec{q}_0$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \int \underset{\gamma}{\dots} \int div\vec{f} d\vec{p} d\vec{q} = 0$$

■

Каноническое преобразование:

$$\vec{q},\vec{p} \longrightarrow \vec{Q},\vec{\rho}$$

Тогда по теореме Лиувилля можно получить интегральный инвариант Пуанкаре:

$$\underset{(2s)}{\int} \dots \int d\vec{q} d\vec{p} = \underset{(2s)}{\int} \dots \int d\vec{Q} d\vec{\rho}$$

Замечание 7.1. *Скобка Пуассона — тоже инвариант канонических преобразований.*

$$[u,v]_{(\vec{q},\vec{p})} = [u,v]_{(\vec{Q},\vec{\rho})}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби

$\forall H$ можно подобрать функцию F (при $c = 1$) так, чтобы существовало решение $K = 0$. Т.е. гипотетически существует каноническое унивалентное преобразование для всей системы, приводящее к новой функции Гамильтона $K = 0$. Предполагается, что существует производящая функция $F_1(q,Q,t) = F(q,Q,t)$. Уравнение Гамильтона-Якоби — нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных.

$$H + \frac{\partial F_2}{dt} = 0$$

$$\dot{\vec{Q}} = \frac{\partial H'}{\partial \vec{P}} = 0$$
$$\dot{\vec{P}} - -\frac{\partial H'}{\partial \vec{Q}} = 0$$

Уравнение , которое определяет каноническое преобразование:

$$H(\vec{q},\vec{p},t) + \frac{\partial F_2(\vec{q},\vec{P},t)}{\partial t} = 0$$

$$\vec{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{q}}$$

Полный интеграл — это некоторое частное решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, зависящее от стольких произвольных констант, каково число независимых переменных в уравнении.

$$\tilde{S} = S(t, q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) + \alpha_{s+1}$$

Независимые переменные в уравнении Гамильтона-Якоби: $q_1, ..., q_s, t \implies$ полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби зависит от $(s+1)$ произвольных констант:

$$F = F(q_1, ..., q_s, t; C_1, ..., C_s + C_{s+1})$$

Решение уравнения:

$$H(\vec{q}m\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \vec{q}}t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0$$
$$\alpha_i = P_i, \quad i = 1, \ldots, s$$

$$S(t, \vec{q}, \vec{\alpha})$$
$$p_j = \frac{\partial S(t, \vec{q}, \vec{\alpha})}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \to \beta_j = \frac{\partial S(\vec{q}, \vec{\alpha}, t)}{\partial \alpha_j}$$
$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{\beta}, \vec{\alpha}, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j$$
$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$$

Теорема 7.2. *Теорема Якоби.*

Функции q_j, p_j, полученные из соотношений:

$$\alpha_j = \frac{\partial S}{\partial \beta_j}$$

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$$

Где S — полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, являются решениями уравнений Гамильтона.

Доказательство.

Для координат:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} \dot{q}_k = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} = 0$$

Таким образом, первая группа уравнений:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Для импульсов:

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_k}}_{=\dot{q}_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} = 0$$

Таким образом, вторая группа уравнений:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

■

Пример 7.1. *Рассматривается гармонический осциллятор:*

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} + \frac{k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2}{2}$$

Функция Гамильтона:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2}{2} = 0$$

Решение можно искать в следующем виде:

$$S = -H_0 t + S_0(x, y, z)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2}{2} = H_0$$

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\,dt$$

Лекция 8. Действие как функция координат. Уравнение Гамильтона-Якоби

Уравнение Гамильтона-Якоби

Уравнение Гамильтона-Якоби — нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t) = 0$$

Функционал действия:

$$S(t, \vec{q})$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt$$

Принцип наименьшего действия состоит в том, что система Лагранжа движется таким образом, что истинные траектории являются экстрамалями функционала действия. Первая вариация функционала:

$$\delta S = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} S q_j \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_j dt$$

В момент времени t_0 все траектории проходят через точку:

$$\vec{q}_k = \vec{q}(t_0)$$

В момент времени t_1 траектория проходит через:

$$t_1 \to \vec{q}_1 = \vec{q}(t_1)$$

$$\delta \vec{q}(t_0) = 0$$

$$\delta \vec{q}(t_1) = 0$$

Траектория системы определяется функцией Лагранжа.

$$\delta S = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j$$

При таком подходе функция S рассматривается как функция координат.

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

Функционал рассматривается как функция времени:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{t}}, t)dt$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Необходимо найти:

$$\frac{dS}{dt} = L \quad t_1 \geqslant t \geqslant t_0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_j}\dot{q}_j - L = 0$$

Таким образом, получается функция Гамильтона и уравнение Гамильтона-Якоби.

Метод разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби

Решение задачи зависит от структуры функции Гамильтона. Пусть структура функции Гамильтона следующая:

$$H\left(g_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), \vec{q'}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q'}}, t\right)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби записывается следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(g_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), \vec{q'}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q'}}, t\right) = 0$$

$$\vec{q'} = q_2, \ldots, q_s$$

Решение необходимо найти в следующем виде:

$$S = S_1(q_1) + \tilde{S}(t, \vec{q})$$

Подстановка в уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left(g_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), \vec{q'}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \vec{q'}}, t\right) = 0$$

Это уравнение превращается в тождество.

$$g_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1$$

$$g_1(q_1, p_1) = \alpha_1$$

Функция Гамильтона:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(g_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), \ldots, g_s\left(q_s, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right)\right) = 0$$
$$g_1\left(q_1, \frac{dS_i}{dq_1}\right) = \alpha_1, \ldots, g_s\left(q_s, \frac{dS_s}{dq_s}\right) = \alpha_s$$

Если система консервативна, то решение записывается следующим образом:

$$S = -H_0 t + \sum_{j=1}^{s} S_{0j}(q_j; \vec{\alpha})$$

$$H_0 = H(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$$

Функция укороченного действия:

$$S_0(\vec{q}, \vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{s} S_{0j}(q_j; \vec{\alpha})$$

Пусть q_1 — циклическая координата:

$$g_1\left(\frac{dS_1}{dq_1}\right)$$

$$\frac{dS_1}{dq_1} = \alpha_1$$
$$S_1 = \alpha_i q_1$$

Первый интеграл движения:

$$p_1 = \alpha_1$$

Пример 8.1. *Задача изотропного двумерного гармонического осциллятора в методе Гамильтона-Якоби. Функция Гамильтона:*

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2}{2}$$

Решение находится с помощью уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2\right] + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2} = 0$$

Решение необходимо найти в следующем виде:

$$S = -H_0 t + S_1(q_1)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq_1}\right)^2 + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_2}{dq_2}\right)^2 + \frac{k_2 q_2^2}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq_1}\right) + \frac{k_1 q_1^2}{2} = \alpha_1$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_2}{dq_2}\right)^2 + \frac{k_2 q_2^2}{2} = \alpha_2$$

$$H_0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$S_i = \int \sqrt{2m\left(\alpha_i - \frac{k_i q_i^2}{2}\right)} dq_i$$

Интегралы движения в фазовом пространстве:

$$\frac{P_k^2}{2m} + \frac{k_i q_i^2}{2} = \alpha_i$$

Координаты находятся следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

$$S = -(\alpha_1 + \alpha_2)t + S_1(q_1) + S_2(q_2)$$

$$\beta_i = -t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq_i}{\sqrt{\alpha_i - \frac{k_i q_i^2}{2}}}$$

$$\beta_i = -t + \sqrt{\frac{m}{k_i}} \int \frac{dq_i}{\sqrt{\frac{2\alpha_i}{k_i} - q_i^2}} = -t + \sqrt{\frac{m}{k_i}} \arcsin \frac{q_i}{\sqrt{\frac{2\alpha_i}{k_i}}}$$

$$q_i(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_i}{k_i}} \sin \sqrt{\frac{k_i}{m}}(t + \beta_i)$$

Пример 8.2. *Необходимо найти полный интеграл и решение канонических уравнений частиц массы m в центрально симметричном поле:*

$$U(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

Сохраняется момент импульса частиц.

$$m > 0, a, b > 0$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Функция Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right) - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} = 0$$

Система консервативна. Решение необходимо найти в следующем виде:

$$S = -E_0 t + S_1(r) + S_2(\varphi)$$

φ *— циклическая координата.*

$$\frac{dS_2}{d\varphi} = \alpha_2$$

$$p_\varphi = L_i$$

$$\alpha_2 = L_0$$

$$-E_0 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2}^2 - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} = 0$$

$$S_1(r, \alpha_1, \alpha_2) = \int \sqrt{2m\left(E_0 + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} - \frac{L_0^2}{2mr^2}\right)} dr$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1$$

$$\beta_1 = -t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E_0 + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} - \frac{L_0^2}{2mr^2}}}$$

$$\beta_2 = \varphi - \frac{L_0}{\sqrt{2m\tilde{b}}} \int \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{E_0}{\tilde{b}} + \frac{a}{\tilde{b}r} - \frac{1}{r^2}} = \varphi + \frac{1}{r} \int \frac{d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}}$$

$$2m\tilde{b} = 2mb + L_0^2$$

$$\frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 + 2mb}} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{E_0}{\tilde{b}}+\frac{1}{p^2}-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2$$
$$\frac{a}{\tilde{b}r}=\frac{2}{rp}$$
$$p=\frac{2\tilde{b}}{a}=\frac{2}{a}\left(b+\frac{L_0^2}{2m}\right)$$

$$\underline{E_0}$$

$b\ +\ 1_{p^2=\frac{\varepsilon^2}{p^2}}\varepsilon=\sqrt{1+\frac{4\tilde{b}E_0}{a^2}}\beta_2=\varphi+\frac{1}{\gamma}\arccos\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}}$

Таким образом получается следующая траектория:

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\gamma(\varphi-\beta_2)}$$

Движение будет финитным в том случае, когда сохраняется энергия. В полной

В фазовом пространстве: $p_r, p_\varphi, r, \varphi$.

$$\alpha_1=E_0$$
$$\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{P_\varphi^2}{r^2}\right)-\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}=E_0$$
$$p_\varphi=L_0\to\alpha_2$$

Интегралы движения, которые должны выполнятся в фазовом пространстве: интеграл энергии и интеграл момента.

Переменные действие-угол

Условия должны быть следующими:

1) Система консервативна:
$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}=0\right)$$

2) Система совершает движение в ограниченной области пространства конфигураций.

3) Система совершает движение, близкое к периодическому. Таким движения называют условно периодическими.

4) Функция Гамильтона в тех переменных, в которых допускается их полное разделение, существует.

Лекция 9. Переменные действие-угол

Условия должны быть следующими:

1) Система консервативна:
$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$$

2) Система совершает движение в ограниченной области пространства конфигураций.

3) Система совершает движение, близкое к периодическому. Таким движения называют условно периодическими.

4) Функция Гамильтона в тех переменных, в которых допускается их полное разделение, существует.

Существуют 2 типа движения:

1) T_j — либрация.

2) Вращение:
$$p_j(q_j + q_{jT}) = p(q_j)$$

Существует пример, где реализуется и либрация, и вращение. Рассматривается частица массы, которая помещена в плоскость гладкой трубки.

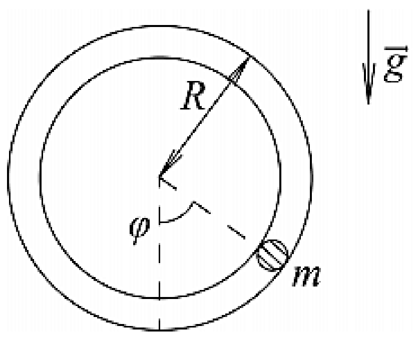

Рис. 9.1. Либрация и вращение

Функция Гамильтона имеет следующий вид:
$$H = \frac{P^2}{2mR^2} + mgR(1 - \cos\varphi)$$

Если начальное отклонение удовлетворяет теореме Лагранжа, то колебание будет вблизи равновесия. В виде фазовой поверхности выбирается поверхность цилиндра.

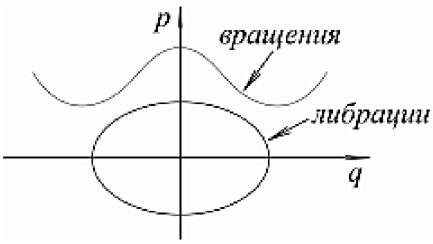

Рис. 9.2. Поверхность цилиндра

Если $H_0 > 2mgR$, то возможны вращения. Решение имеет следующий вид:

$$S = -H_0 t + S_0(\vec{q}, \vec{\alpha})$$

$$S_0(\vec{q}, \vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{s} S_{0j}(q_j, \vec{\alpha})$$

Уравнение Гамильтона при новых переменных записывается следующим образом:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}$$

$$\dot{P}_j = \frac{\partial H'}{\partial Q_j}$$

Функция S осуществляет переход к постоянным координатам и к постоянным импульсам. Рассматривается преобразование с производящей функцией $S(\vec{q}, \vec{\alpha})$:

$$p_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j} = \frac{dS_{0j}}{dq_j}$$

Задачей является нахождение таких переменных, которые будут играть роль новых постоянных импульсов. Определяются новые импульсы:

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j(q_j) dq_j = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q_j} dq_j = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S_{0j}}{\partial q_j} dq_j$$

$$J_j = J_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$$

Необходимо построить функцию канонического преобразования:

$$S_0(\vec{q}, \vec{\alpha}) \longrightarrow S_0(\vec{q}, J_1, \ldots, J_s) \longrightarrow$$

$$H_0 = H(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

$$H' = H(J_1, \dots, J_s)$$

Необходимо найти новые координаты:

$$Q_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j} = \varphi_j$$

Таким образом, пара (J_j, φ_j) называется переменными действие-угол. Записывается уравнение Гамильтона в этих переменных:

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H(J_1, \dots, J_s)}{\partial J_j}$$

$$\dot{J}_j = 0$$

Решение тривиальное.

$$J_j = J_{j0}$$

$$\varphi_j = \frac{\partial H}{\partial J_j} t + \varphi_{j0}$$

Необходимо найти изменение угловой переменной:

$$\Delta\varphi_{j,k} = \oint \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_j} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q_k} dq_k = 2\pi\delta_{jk}$$

$$\Delta\varphi_j = \omega_j T_j$$

$$T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}$$

Можно найти характерные частоты, которые есть в механической системе. Алгоритм решения:

1) Необходимо найти: $p_j(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$.

2) Необходимо найти переменные действия как: $J_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$.

3) Найти новую функцию Гамильтона: $H(\vec{\alpha}) \to H(J_1, \dots, J_s)$

4) Определить частоты следующим образом:

$$\omega_j = \frac{\partial H}{\partial J_j}$$

Пример 9.1. *Необходимо найти переменные действие-угол двумерного анизотропного гармонического осциллятора и написать функцию Гамильтона в этих переменных.*

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2}, \quad k_1 \neq k_2$$

Уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2\right\} + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2} = 0$$

Решение необходимо найти в следующем виде:

$$S = -(\alpha_1 + \alpha_2)t + S_1(q_1) + S_2(q_2)$$

$$g_1(p_1, q_1) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{k_1 q_1^2}{2} = \alpha_1$$

$$g_2(p_2, q_2) = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{k_2 q_2^2}{2} = \alpha_2$$

$$H_0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

Чтобы перейти в переменные действие-угол, необходимо найти новые постоянные импульсы:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\oint p_i(q_i)\, dq_i}_{=\pi a_i b_i} = \frac{a_i b_i}{2}$$

$$a_i = \sqrt{2m\alpha_i}$$

$$b_i = \sqrt{\frac{2\alpha_i}{k_i}}$$

$$J_i = \alpha_i \sqrt{\frac{m}{k_i}}$$

Тогда функция Гамильтона имеет следующий вид:

$$H(J_1, J_2) = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 = J_1 \sqrt{\frac{k_1}{m}} + J_2 \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

$$\Omega_1 = \omega_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

$$\Omega_2 = \omega_2 = \frac{\partial H}{\partial J_2} = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

$$\frac{p_i^2}{2m}+\frac{k_i q_i^2}{2}=J_i\sqrt{\frac{k_i}{m}}\Longrightarrow J_j=\frac{E_{0j}}{\omega_j}$$

$$\varphi_i=\frac{\partial S_0}{\partial J_i}$$

Укороченное действие записывается как:

$$S_0(\vec{q},\vec{\alpha})=S_1(q_1)+S_2(q_2)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial q_i}=\sqrt{2m\left(\alpha_i-\frac{k_i q_i^2}{2}\right)}$$

$$S_i=\int dq_i\sqrt{2m\left(\alpha_i-\frac{k_i q_i^2}{2}\right)}$$

$$S_i=\int dq_i\sqrt{2m\left(\omega_i J_i-\frac{k_i q_i^2}{2}\right)}$$

В точке остановки:

$$\varphi_i=\frac{\partial S_0}{\partial J_i}=\frac{\partial S_i}{\partial J_i}=\frac{\sqrt{m\omega_i}}{2}\int\frac{dq_i}{\sqrt{J_i-\frac{m\omega_i q_i^2}{2}}}=\int\frac{dq_i}{\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i}-q_i^2}}=\arcsin\frac{q_i}{\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i}}}$$

$$\Delta\varphi_i=2\arcsin\frac{q_i}{\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i}}}\Bigg|_{-\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i}}}^{\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i}}}=2\pi$$

Угловая переменная изменяется на 2π. Если рассматривать угловую переменную как функцию координат U, то она является неоднозначной функцией координаты U.

Пример 9.2. *Необходимо найти характерные частоты движения в задаче движения частицы m в центрально симметричном поле:*

$$U(r)=-\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}$$

Функция Гамильтона:

$$H=\frac{P_r^2}{2m}+\frac{P_\varphi^2}{2mr^2}-\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}$$

Координаты:

$$\vec{r} = \{x, y\}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{r^2}\right] - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} = 0$$

Решение необходимо найти в следующем виде:

$$S = -E_0 t + S_r(r) + L_0 \varphi$$

$$\frac{dS}{dr} = \int \sqrt{2m\left(E_0 + \frac{a}{r} - \frac{\tilde{b}}{r^2} - \frac{L_0^2}{2mr^2}\right)} dr$$

$$\tilde{b} = b + \frac{L_0^2}{2m}$$

Определяются переменные действия:

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} d\varphi = L_0$$

$$J_r = 2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m\left(E_0 + \frac{a}{r} - \frac{\tilde{b}}{r^2}\right)} dr =$$

$$= \left(-\sqrt{L_0^2 + \sqrt{\frac{ma^2}{-2E_0}}}\right)^2$$

$$E_0 = \frac{-ma^2}{2\left(J_r + \sqrt{J_\varphi^2 + 2mb}\right)^2} \cdot 2$$

$$H = -\frac{ma^2}{\left(J_r + \sqrt{J_\varphi^2 + 2mb}\right)^2}$$

Находятся частоты. В радиальном направлении:

$$\omega_r = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{2ma^2}{\left(J_r + \sqrt{J_\varphi^2 + 2mb}\right)^3}$$

$$\omega_\varphi = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi} = \frac{2ma^2}{\left(J_r + \sqrt{J_\varphi^2 + 2mb}\right)^3} \frac{1}{2\sqrt{J_\varphi^2 + 2mb}} \cdot 2J_\varphi = \frac{1}{\gamma}$$

$$\omega_r = \frac{\omega_\varphi}{\gamma}$$

Если $\gamma = \dfrac{k}{n}$, *то говорят о вырождении частот. Полностью вырожденное движение при:*

$$b = 0 \Longrightarrow \gamma = 1 \Longrightarrow \omega_r = \omega_\varphi$$

$T_r = T_\varphi$

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_r}$$

$$T_\varphi = \frac{2\pi}{\omega_\varphi}$$

Лекция 10. Условно-периодическое движение

Движение является условно периодическим, если $\forall i: p_i(q_i, \vec{\alpha})$ — либо замкнутая кривая (либрация), либо периодическая по q_i функция (вращение). Можно ввести новые фазовые переменные — переменные действие-угол.

$$S_0(\vec{q}, J_1, \ldots, J_s)$$

Происходит переход от канонических в переменные действие-угол:

$$\vec{q}, \vec{p} \to \{\varphi\}, \{J\}$$

$$\varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j}$$

$$J_j = \frac{1}{2}\oint p_j q_j dq_j$$

Эти переменные так же позволяют говорить о свойствах системы в фазовом пространстве.

$$H' = H(J_1, \ldots, J_s)$$

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial J_j}$$

Решение находится следующим образом:

$$\varphi_j = \frac{\partial H}{\partial J}T + \varphi_{j0}$$

$$\varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j} = \varphi_j(q, \{J\})$$

В исходном фазовом пространстве:

$$J_j(\alpha_1, \ldots, \alpha) = J(\{\vec{q}\}, \{\vec{p}\}) = J_{j0}$$

$$\dot{J}_j = 0$$

$$J_j = J_{j0}$$

$$\varphi_j(q_j, \{J(\vec{q}, \vec{p})\})$$

Рассматривается изменение координаты φ_j, когда обходят замкнутую кривую с возвращением назад:

$$\varphi_k(q_k, \{J\})$$

$$\Delta\varphi_k \to 2\pi$$

Проводится фазовая кривая. Рассматривается однозначная функция $F((q),(p))$. Всякая однозначная функция $F((q),(p)) \to F(\{\varphi\},\{J\})$ является периодической функцией по φ_i с периодом 2π.

$$F(\vec{q},\vec{p}) = \sum_{e_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{e_s=-\infty}^{\infty}\mathbb{C}(\{J\})\exp^{i(e_1\varphi_1+\dots+e_s\varphi_s)} = \left|\varphi_j = \omega_j t + \underbrace{\varphi_{j0}}_{\equiv 0}\ \omega_j = \frac{\partial H'}{\partial J_j}\right| =$$

$$= \sum_{e_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{e_s=-\infty}^{\infty}\mathbb{C}(\{J\})\exp^{i(e_1\omega_1+\dots+e_s\omega_s)}$$

Если все частоты не соизмеримы, то такое движение называется условно периодическим.

Невырожденное движение

1) Невырожденное движение: нет кратных частот.
2) Частично вырожденное движение: $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$.
3) Полностью вырожденное движение: $n_1\omega_1 = \dots = n_s\omega_s$.

Пусть $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$. Функция Гамильтона записывается следующим образом:

$$H = H(J_1,\dots,J_s) \to H(n_2J_1 + n_1J_2, J_3,\dots,J_s)$$

Интеграл движения:

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi\frac{\partial H}{\partial J_k} - \varphi_k\frac{\partial H}{\partial J_j}\right) = 0$$

$$J_j((q),(p)) = J_{j0}$$

$$\varphi_j = \omega_j t + \varphi_{j0}$$

Пример 10.1. *Рассматривается двумерный изотропный гармонический осциллятор.*

$$H = \frac{p_1^2+p_2^2}{2m} + \frac{k_1q_1^2 + k_2q_2^2}{2} \quad k_1 = k_2$$

$$q_1 \to x, \quad q_2 \to y$$

$$\begin{cases} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{k_ix_i^2}{2} = \alpha_i \\ H = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

$$J_i = \sqrt{\frac{m}{k_i}}\alpha_i$$

$$S_0 = S_1(q_1) + S_2(q_2)$$

$$S_i(q_i) = \int \sqrt{2m\left(\underbrace{\alpha_i}_{=J_i\omega_i} - \frac{k_i q_i^2}{2}\right)} dq_i =$$

$$= \int \sqrt{2m\left(J_i\omega_i - \frac{m\omega_i^2 q_i^2}{2}\right)} dq_i = \sqrt{2}m\frac{\omega_i}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i} - q_i^2 dq_i}$$

Угловая переменная:

$$\varphi_i = \frac{\partial S_i}{\partial J_i} = \int \frac{dq_i}{\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i} - q_i^2}} = \arcsin\frac{q_i}{\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i}}}$$

$$H = J_1\omega_1 + J_2\omega_2$$

$$\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega_i^2 q_i^2}{2} = \omega_i J_i \longrightarrow p_i = m\omega_i\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i} - q_i^2}$$

Таким образом, получается полное вырождение:

$$k_1 = k_2 \Longrightarrow \omega_1 = \omega_2$$

Доказательство.

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1$$

$$\sin\varphi_i = \frac{q}{\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i}}}$$

$$\cos\varphi_i = \sqrt{1\frac{m\omega_i q_i^2}{2J_i}}$$

Необходимо доказать, что эти выражения являются интегралами движения.

$$\sqrt{m\omega_1}\frac{q_1}{\sqrt{2J_1}}\sqrt{1 - \frac{m\omega q_2^2}{2J_2}} - \sqrt{\frac{m\omega}{2J_2}}q_2\sqrt{1 - \frac{m\omega q_1^2}{2J_1}}$$

$$p_i^2 = \sqrt{2m\left(\omega_i J_i - \frac{m\omega_i^2 U_i^2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i} - q_i^2}$$

$$\frac{q_1}{2J_1J_2}m\omega\sqrt{\frac{2J_2}{m\omega} - q_2^2} = \frac{1}{2\sqrt{J_1J_2}(xp_y - yp_x)} - \frac{1}{2\sqrt{J_1J_2}}L_z$$

Получается момент импульса осциллятора на ось z. Это новый однозначный интеграл движения. Существование этого интеграла движения допускает разделение переменных в полярных координатах.

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2$$

$$r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \equiv \sqrt{x_2 + y_2}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \frac{kr^2}{2} = 0$$

$$S = -E_0 t + L\varphi + S_r(r)$$

$$p_r(r) = \frac{dS_r}{dr} = \sqrt{2m\left(E_0 - \frac{kr^2}{2}\right) - \frac{L^2}{r^2}}$$

Переменные действия:

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m\left(E_0 - \frac{kr^2}{2}\right) - \frac{L^2}{r^2}}dr = -L + \sqrt{mk}\frac{E_0}{k}$$

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} d\varphi = L$$

$$E_0 = \omega(J_r + J_\varphi)$$

■

Лекция 11. Адиабатические инварианты

Невырожденное движение

Рассматривается двумерный изотропный гармонический осциллятор.

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{k_1 x_1^2 + k_2 y_2^2}{2} \quad k_1 = k_2$$

Было показано, что в пространстве, описываемое каноническими переменными действие-угол, движется согласно уравнениям:

$$J_1 = J_{x0} \quad \varphi_1 = \omega_{1t} + \varphi_{10}$$

$$J_2 = J_{y0} \quad \varphi_2 = \omega_{2t} + \varphi_{20}$$

Предполагается, что:

$$\omega_1 \neq \omega_2$$

Таким образом, в исходно фазовом пространстве, траектории гармонического осциллятора покрывают двумерное многообразие:

$$(x, y, p_x, p_y) \begin{cases} \dfrac{p_x^2}{2m} + \dfrac{m\omega_0^2 x^2}{2} = J_{x0}, \quad S^{(1)} \\ \dfrac{p_y^2}{2m} + \dfrac{m\omega_0^2 y^2}{2} = J_{y0}, \quad S^{(1)} \end{cases} \to S^{(1)} \times S^{(1)}$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2J_{x0}}{m\omega_1}} \sin(\omega_1 t + \varphi_{10})$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{2J_{y0}}{m\omega_2}} \sin(\omega_2 t + \varphi_{20})$$

Если $k_1 = k_2$, то $\omega_1 = \omega_2$ — полностью вырожденное движение. В декартовых координатах функция Гамильтона имеет следующий вид:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$$

Осциллятор изотропный. В полярных координатах:

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2m} + \frac{kr^2}{2}$$

Момент импульса частицы $(r, \varphi, P_r, P_\varphi)$:

$$J_\varphi \equiv P_\varphi = L_0$$

$$J_r \equiv \frac{1}{\omega}H(P_r, r, L) - L_0 = J_{r0} = const$$

$$S_0 = S_0(\varphi, r, J_r, J_\varphi) = L_0\varphi + S_1(r, J_r, J_\varphi)$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial S_0}{\partial J_r}$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial S_0}{\partial J_\varphi}$$

Эти уравнения определяют движение гармонического изотропного осциллятора в фазовом пространстве.

$$t = \frac{\varphi_1 - \varphi_{10}}{\omega_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1 + \varphi_{20} - \tilde{\varphi}_{10}$$

Переменные действия — адиабатические инварианты

Переменные действия могут быть введены для систем, когда:

1) Система консервативна.

2) Задача допускает разделение переменных.

Все параметры функции Гамильтона меняются достаточно медленно; параметр λ_i, T — период движения в системе. Медленность изменения параметров означает следующее:

$$\dot{\lambda}_i T \ll \lambda_i, \quad \lambda_i = \lambda_i(t)$$

$$H(g_1(q_1, p_1, \lambda_1), \ldots, g_s(q_s, p_s, \lambda_s))$$

Уравнения Гамильтона-Якоби можно решать при $\lambda_i = const$.

$$S = -H(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)t + S_0(\vec{q}, \vec{\alpha}, \vec{\lambda})$$

$$H = H\left(g_1\left(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \lambda_1\right), \ldots, g_s\left(q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}, \lambda_s\right)\right) = H_0$$

$$S = -H_0 t + S_0(\vec{q}, \vec{\alpha}, \vec{\lambda})$$

Можно ввести новую производящую функцию:

$$S_0(\vec{q}, \vec{J}, \vec{\lambda}), \quad H_0 = H(J_1, \ldots, J_s)$$

$$p_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j}$$

$$\varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}$$

$$H' = H(J_1, \ldots, J_s) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = H(\vec{J}) + \sum_k \frac{\partial S_0}{\partial \lambda_k}\dot{\lambda}_k$$

Таким образом, уравнения Гамильтона в переменных действие–угол:

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial J_j} + \sum_k \frac{\partial^2 S_0}{\partial J_j \partial \lambda_k}\dot{\lambda}_k$$

$$\dot{J}_j = \frac{\partial H'}{\partial \varphi_j} = -\sum_k \frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_j \partial \lambda_k}\dot{\lambda}_k$$

$$\varphi_j = \frac{\partial S_0(\vec{q}, \vec{J}, \vec{\lambda})}{\partial J_j}$$

$$q_j = q_j(\vec{\varphi}, \vec{J})$$

Необходимо показать, что переменные действия являются адиабатическими инвариантами. Интервал $T \gg T_\omega$ — период в системе.

$$T_\lambda \gg T$$

Вводится следующее определение:

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt$$

$$\bar{\dot{J}}_j = -\overline{\sum_k \frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_j \partial \lambda_k}\dot{\lambda}_k}$$

Периодическая функция по угловым переменным записывается следующим образом:

$$\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_k}$$

$$\bar{\dot{J}}_j = 0 \Longrightarrow \bar{J}_j = J_{j0}$$

Пример 11.1. *Необходимо посмотреть на то, как изменяется энергия заряженной частицы, которая движется в центрально симметричном поле при включении слабого однородного переменного магнитного поля.* $e, m, U(r), \vec{H}(t) \uparrow\uparrow \vec{e}_z$ *— медленная функция времени. Функция Лагранжа:*

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{eH}{2c}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} - U(r)$$

Обобщенная энергия:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + U(r)$$

Необходимо сделать следующие подстановки:

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$P_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$P_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + \frac{eH}{2c}r^2\sin^2\theta \longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} - \frac{eH}{2mc}$$

Функция Гамильтона записывается следующим образом:

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{P_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{eH}{2mc}P_\varphi + \frac{e^2H^2}{8mc^2}r^2\sin^2\theta$$

Так как поле слабое, то $H^2 \to 0$. *Решение задачи записывается следующим образом:*

$$S = -Et + P_{\varphi 0}\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{P_{\varphi 0}^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{eH}{2mc}P_{\varphi 0} + U(r) = E$$

$$P_\theta^2 + \frac{P_{\varphi 0}^2}{\sin^2\theta} = \alpha_2 \longrightarrow P_\theta = \sqrt{\alpha_1 - \frac{P_{\varphi 0}^2}{\sin^2\theta}}$$

Вводятся переменные действия:

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_\varphi d\varphi = P_{\varphi 0}$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} P_\theta(\theta)d\theta \cdot 2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} P_\theta(\theta)d\theta$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m\left(E + \frac{eH_0}{2mc}P_{\varphi 0} - U(r)\right) - \frac{\alpha_2}{r^2}}dr \cdot 2$$

$$\left(J_r = \frac{1}{2\pi}\oint P_r(r)dr\right)$$

J_φ, J_θ *— точные адиабатические инварианты.*

$$J_r \equiv J_{r0}\left(E + \frac{eH}{2mc}P_{\varphi 0}, \alpha_2\right) = const$$

$$E + \frac{eH}{2mc} P_{\varphi 0} = const = E_0$$

$$E_0 - \frac{eH(t)}{2mc} P_{\varphi 0} = E$$

Параметры E, P_φ — асимптотически зависимые.

Кинематика твердого тела

Твёрдое тело (абсолютно) — система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными при их движении. Твёрдое тело можно представить как дискретную совокупность материальных точек:

$$\sum_\alpha m_\alpha \longrightarrow \int_V \rho dV$$

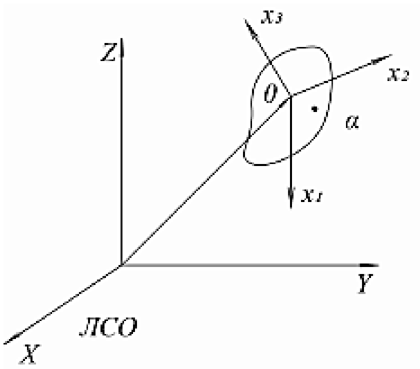

Рис. 11.1. Кинематика твердого тела

Положение твёрдого тела определяется 6 координатами. O — полюс (центр инерции). $\vec{R}$ — 3 координаты полюса (поступательное движение). (x_1, x_2, x_3) — 3 угла, определяющих ориентацию осей относительно XYZ (вращение). Бесконечно малое перемещение точки абсолютно твёрдого тела:

$$d\vec{R}_\alpha = \underbrace{d\vec{R}_0}_{\text{сдвиг полюса}} + \underbrace{d\vec{r}_\alpha}_{\text{вращение}}$$

$$d\vec{r}_\alpha = [\delta\vec{\varphi} \times d\vec{r}_\alpha]$$

$\delta\vec{\varphi}$ — вектор бесконечно малого поворота (одинаков для любой точки твёрдого тела), $\delta\vec{\varphi} \uparrow\uparrow$ ось вращения:

$$d\vec{R}_\alpha = d\vec{R}_0 + [\delta\vec{\varphi} \times d\vec{r}]$$

Промежуток времени dt:

$$\underbrace{\frac{d\vec{R}_\alpha}{dt}}_{=\vec{V}_\alpha} = \underbrace{\frac{d\vec{R}_0}{dt}}_{=\vec{V}_0} + \left[\underbrace{\frac{\delta\vec{\varphi}}{dt}}_{=\vec{\omega}} \times d\vec{r}_\alpha\right]$$

Таким образом, скорость точки твердого тела с индексом α:

$$\vec{V}_\alpha = \vec{V}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha]$$

Лекция 12.Кинематика твёрдого тела. Углы Эйлера

Кинематика твердого тела

Твёрдое тело (абсолютно) — система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными при их движении. Твёрдое тело можно представить как дискретную совокупность материальных точек:

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \longrightarrow \int_{V} \rho dV$$

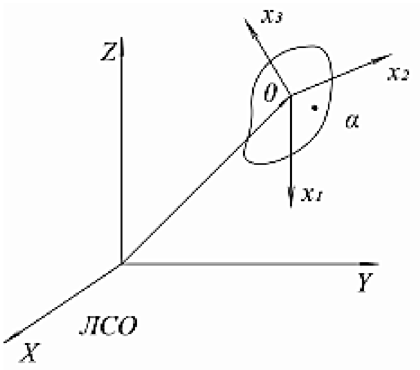

Рис. 12.1. Кинематика твердого тела

Положение твёрдого тела определяется 6 координатами. O — полюс (центр инерции). $\vec{R}$ — 3 координаты полюса (поступательное движение). (x_1, x_2, x_3) — 3 угла, определяющих ориентацию осей относительно XYZ (вращение). Бесконечно малое перемещение точки абсолютно твёрдого тела:

$$d\vec{R}_{\alpha} = \underbrace{d\vec{R}_0}_{\text{сдвиг полюса}} + \underbrace{d\vec{r}_{\alpha}}_{\text{вращение}}$$

$$d\vec{r}_{\alpha} = [\delta\vec{\varphi} \times d\vec{r}_{\alpha}]$$

$\delta\vec{\varphi}$ — вектор бесконечно малого поворота (одинаков для любой точки твёрдого тела), $\delta\vec{\varphi} \uparrow\uparrow$ ось вращения:

$$d\vec{R}_{\alpha} = d\vec{R}_0 + [\delta\vec{\varphi} \times d\vec{r}]$$

Промежуток времени dt:

$$\underbrace{\frac{d\vec{R}_{\alpha}}{dt}}_{=\vec{V}_{\alpha}} = \underbrace{\frac{d\vec{R}_0}{dt}}_{=\vec{V}_0} + \left[\underbrace{\frac{\delta\vec{\varphi}}{dt}}_{=\vec{\omega}} \cdot d\vec{r}_{\alpha} \right]$$

Таким образом, скорость точки твердого тела с индексом α:

$$\vec{V}_\alpha = \vec{V}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha]$$

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$$

Пусть:

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{a}$$

Тогда скорость записывается следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega} \cdot \vec{a}] + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$$

$$\vec{v} = \vec{V}' + [\vec{\omega}' \cdot \vec{r}']$$

$$\vec{V}' = \vec{V} + [\vec{\omega} \cdot \vec{a}]$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}'$$

Угловая скорость вращения твердого тела не зависит от выбора начала подвижной системы отсчета. Все такие системы отсчета вращаются вокруг параллельных друг другу осей с одной и той же скоростью. В какой-то момент времени:

$$\vec{V} \perp \vec{\omega}$$

По отношению к другому началу в тот же момент времени:

$$\vec{V}' \perp \vec{\omega}$$

Тогда в этот момент времени скорости всех точек твердого тела лежат в одной и той де плоскости $\vec{v} \perp \vec{\omega}$. Линейная скорость поступательного движения:

$$\vec{V}' = 0$$

$$\vec{V} = -[\vec{\omega} \cdot \vec{a}]$$

Тогда движение твёрдого тела (в данный момент времени) можно рассматривать как чистое вращение относительно мгновенной оси вращения. Пусть начало подвижной системы отсчёта выбрано в произвольной точке. Тогда импульс твердого тела:

$$\vec{P} = \sum_\alpha m_2(\vec{V} + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha] = M\vec{V} + M[\vec{\omega} \cdot \vec{r}_0] = M(\vec{V} + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_0]))$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_{\alpha} m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M}$$

$$M = \sum m_\alpha$$

Момент импульса относительно неподвижной системы отсчета записывается следующим образом:

$$\vec{L}_i = \sum_\alpha m_\alpha [(\vec{R} + \vec{r}_\alpha) \cdot [\vec{V} + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha]] =$$

$$= [\vec{R} \cdot \vec{P}] + M[\vec{r}_c \cdot \vec{V}] + \sum_\alpha m_\alpha [\vec{r}_\alpha \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha]]$$

Кинетическая энергия твердого тела:

$$T = \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{V}^2 + 2\vec{V} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha] + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha]^2) = \frac{M\vec{V}^2}{2} + M\vec{V} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_c] + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha]^2$$

Если на твёрдое тело действуют внешние силы $\vec{F}_\alpha$, $\vec{F}_{R\alpha}$, то:

1)

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F} + \vec{F}_R$$

$$\sum_\alpha \vec{F}_\alpha = \vec{F}$$

$$\sum_\alpha \vec{F}_R \alpha = \vec{F}_R$$

$\vec{F}$ — активные силы, $\vec{F}_R$ — силы реакции.

2)

$$\dot{\vec{L}}_i = \vec{M}_F + \vec{M}_R$$

$$\vec{M} = \sum_\alpha [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha]$$

$$\vec{M}_R = \sum_\alpha [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_R \alpha]$$

Эти уравнения определяют динамику твёрдого тела (6 скалярных уравнений).

Тензор инерции твердого тела

Тензорная запись бывает следующего вида: $\vec{r} \longrightarrow x_i$. Момент импульса твердого тела:

$$\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha [\vec{r}_\alpha \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha]] = \sum_\alpha m_\alpha \vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha^2 - \vec{r}_\alpha \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha)$$

Тензор инерции для всех компонентов импульса:

$$L_i = \sum_\alpha m_\alpha \omega_i x_l^2(\alpha) - k_i(\alpha)\omega_k \cdot x_k(\alpha)$$

$$L_i = J_{ik} \cdot \omega_k$$

Симметричный тензор второго ранга:

$$J_{ik} = \sum_\alpha m_\alpha (x_l^2(\alpha)\delta_{ik} - x_i(\alpha) \cdot x_k(\alpha))$$

Записывается вращательная энергия твердого тела:

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \vec{\omega}^2 \cdot \vec{r}_\alpha^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \omega_i^2 x_l^2(\alpha) - \omega_i x_l(\alpha)\omega_k x_k(\alpha) = \frac{J_{ik}\omega_i\omega_k}{2}$$

$$J_{ik} = \sum_\alpha m_\alpha (x_l^2(\alpha)\delta_{ik} - x_(\alpha) x_k)$$

$$J_{ik} = \begin{pmatrix} \sum\limits_\alpha m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -\sum\limits_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & -\sum\limits_\alpha m_\alpha x_\alpha z_\alpha \\ -\sum\limits_\alpha m_\alpha y_\alpha x_\alpha & \sum\limits_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -\sum\limits_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha \\ -\sum\limits_\alpha m_\alpha z_\alpha x_\alpha & -\sum\limits_\alpha m_\alpha z_\alpha y_\alpha & \sum\limits_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \end{pmatrix}$$

Диагональные моменты также называют осевыми моментами инерции, не диагональные — центробежными. Оси, в которых тензор инерции приобретает диагональный вод, называются главными осями инерции.

$$J_{ik} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

1) асимметрический волчок;

$$J_1 \neq J_2 \neq J_3$$

2) симметрический волчок;

$$J_1 = J_2 \neq J_3$$

3) шаровой волчок.

$$J_1 = J_2 = J_3$$

$$L_1 = J_1\omega_1, \quad L_2 = J_2\omega_2, \quad L_3 = J_3\omega_3$$

$$\vec{L}_1 = J\vec{\omega}$$

Если J_{ik} — тензор в системе, связанной с центром масс, и если есть система, полученная сдвигом на $\vec{a}$, то тогда легко доказать и получить формулу Штейнера:

$$J_ik' = J_ik + M(a_l^2\delta_ik - a_ia_k)$$

Углы Эйлера, кинематические формулы Эйлера

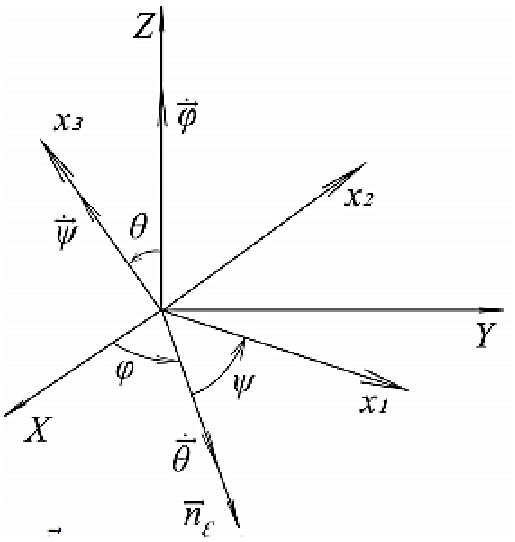

Рис. 12.2. Углы Эйлера

Единичные орты:

$$\vec{e}_i \longleftrightarrow x_i$$

$$\vec{n}_i \longleftrightarrow X_i$$

$\theta \longleftrightarrow [\vec{n}_3, \vec{e}_3]$

Независимые координаты:

$$\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$\vec{n}_E$ — линия узлов, единичный вектор. $\psi \longleftrightarrow [\vec{n}_E, \vec{e}_1] \varphi \longleftrightarrow [\vec{n}_1, \vec{n}_E]$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$\vec{d\chi}$ — вектор бесконечно малого поворота может бть представлен в следующем виде:

$$\frac{\vec{d\chi}}{dt} = \frac{\vec{d\theta}}{dt} + \frac{\vec{d\varphi}}{dt} + \frac{\vec{d\psi}}{dt} = \dot{\theta}\vec{n}_S + \dot{\varphi}\vec{n}_S + \dot{\psi}\vec{e}_3$$

$$\omega_i = \dot{\theta}(\vec{n}_\xi \cdot \vec{e}_i) + \dot{\varphi}(\vec{n}_3 \cdot \vec{e}_i) + \dot{\psi}(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_i)$$

Таким образом, кинематические формулы Эйлера:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}$$

Динамические уравнения Эйлера

В системе отсчёта, где J_{ik} имеет диагональный вид, то в подвижной системе отсчета:

$$L_i = J_i \omega_i$$

Необходимо вычислить $\dot{\vec{L}}$:

$$\vec{L} = L_i \vec{e}_i$$

$$\dot{\vec{L}} = J_i \dot{\omega}_i \vec{e}_i + L_i [\vec{\omega} \cdot \vec{e}_i] = J_i \omega_i \vec{e}_i + [\vec{\omega} \cdot \vec{L}] = \vec{M}_F$$

$$J_i \dot{\omega}_i \vec{e}_i + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \underbrace{L_1}_{=J_1\omega_1} & \underbrace{L_2}_{=J_2\omega_2} & \underbrace{L_3}_{=J_3\omega_3} \end{vmatrix} = \vec{M}$$

Таким образом, динамические уравнения Эйлера:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = M_1$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3 = M_2$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = M_3$$

Метод Лагранжа

Рассматривается тяжелый симметричный волчок. Необходимо найти интегралы движения. Заданы масса волчка, главные моменты инерции и расстояние l от неподвижной точки волчка до центра.

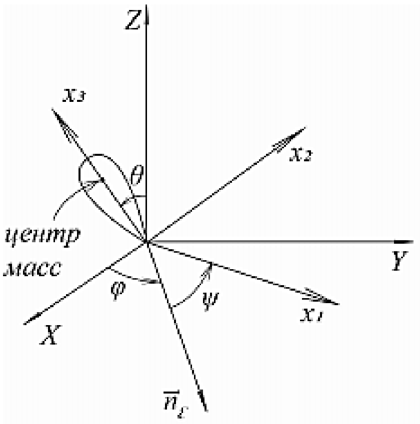

Рис. 12.3. Тяжелый симметричный волчок

По теореме Штейнера:

$$\tilde{J}_i k = J_i k + M(a_j^2 \varphi_i k - a_i a_k)$$

$$\tilde{J}_2 2 = \tilde{J}_1 1 = J_1 + Ml^2$$

$$\tilde{J}_{33} = J_3$$

Кинетическая энергия твёрдого тела:

$$T = \frac{\tilde{J}_{11}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \tilde{J}_{33}\omega_3^2}{2} = \frac{(J_1 + Ml^2)(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2}{2}$$

Потенциальная энергия:

$$U = Mgl\cos\theta$$

$$J_1 + Ml^2 \equiv \tilde{J}$$

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{\tilde{J}_1 1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \tilde{J}_3 3\omega_3^2}{2} = \frac{(J_1 + Ml^2)(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2}{2} - Mgl\cos\theta$$

Интегралы движения:

$$E_0 = \frac{\tilde{J}(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2)}{2} + \frac{J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2}{2} + Mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_1 \dot{\varphi}_i \sin^2\theta + J_3(\psi \dot{+} \dot{\varphi}\cos\theta) = p_{\varphi 0}$$

$$J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = P_{\psi 0}$$

Задача решается в квадратурах:

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \frac{P_{\psi 0}}{J_3}$$

$$\tilde{J}_1 \dot{\varphi}\sin^2\theta = p_{\psi 0}(1 - \cos\theta)$$

Лекция 13. Кинематика сплошной среды

Метод Лагранжа

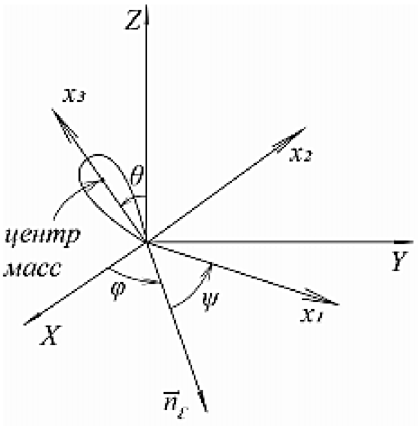

Рис. 13.1. Тяжелый симметричный волчок

Кинетическая энергия твёрдого тела:

$$T = \frac{\tilde{J}_{11}(\omega_1^2+\omega_2^2)+\tilde{J}_{33}\omega_3^2}{2} = \frac{(J_1+Ml^2)(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+J_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2}{2}$$

$$J_1+Ml^2 \equiv \tilde{J}$$

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{\tilde{J}_1 1(\omega_1^2+\omega_2^2)+\tilde{J}_3 3\omega_3^2}{2} = \frac{(J_1+Ml^2)(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+J_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2}{2} - Mgl\cos\theta$$

Интегралы движения:

$$E_0 = \frac{\tilde{J}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)}{2} + \frac{J_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2}{2} + Mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = J_1\dot{\varphi}_i\sin^2\theta + J_3(\psi \dot{+} \dot{\varphi}\cos\theta) = p_{\varphi 0}$$

$$J_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta) = P_{\psi 0}$$

Задача решается в квадратурах:

$$\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta = \frac{P_{\psi 0}}{J_3}$$

$$\tilde{J}_1\dot{\varphi}\sin^2\theta = p_{\psi 0}(1-\cos\theta)$$

Движение по θ:

$$\frac{\tilde{J}\dot{\theta}^2}{2} = \tilde{E} - U_{eff}(\theta)$$

$$\tilde{E} = E_0 - \frac{P_{\psi 0}^2}{2J_3} - Mgl$$

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(P_{\varphi 0} - P_{\psi 0}\cos\theta)^2}{2\tilde{J}\sin^2\theta} - Mgl(1-\cos\theta)$$

Движение по θ в квадратурах ограничено:

$$t - t_0 = \pm\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{\tilde{J}}(\tilde{E} - U_{eff}(\theta))}}$$

Можно заметить движение — нутация.

Кинематика сплошной среды

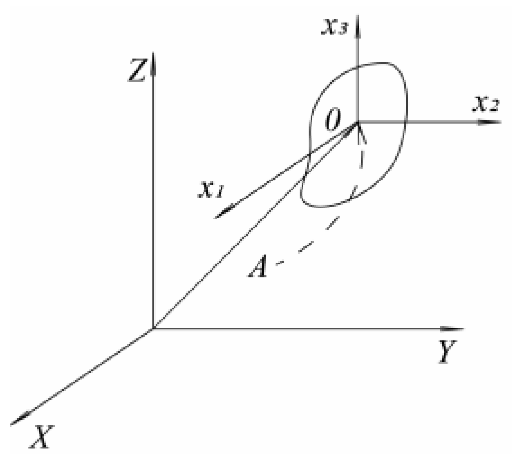

Рис. 13.2. Кинематика сплошной среды

A — полюс системы отсчёта. Физически бесконечная частица $\Longleftrightarrow$ элементарный объём (частица жидкости). Гипотеза сплошности: среда полностью заполнена физически бесконечно малыми частицами. В окрестности точки наблюдения всё движется поступательно, примерно с одинаковой скоростью. Элементарный объём — физически бесконечно малая частица, движущаяся со скоростью $\vec{v}$ (скорость сплошной среды в точке). $N_V \gg N_{\Delta V} \gg 1$, $\Delta V \ll V$ — для физически бесконечно малой частицы $\to \rho(\mu)$, $\vec{v}(\mu) \in C[V]$. Поле скоростей, поле плотностей массы — параметры сплошной среды, непрерывные функции координат и времени. Существуют 2 способа описания сплошной среды:

1) Лагранжев подход. $\vec{r}_0,\ t_0 \longleftrightarrow \forall$ элементарному объёму (физически бесконечно малой частице). Не годится при деформациях.

2) Эйлеров подход. $\vec{r},\ t \longleftrightarrow$ точке пространства, в которую приходит физически бесконечно малая частица (элементарный объём).

Необходимо установить возможные перемещения элементарных объемов при движении сплошной среды.

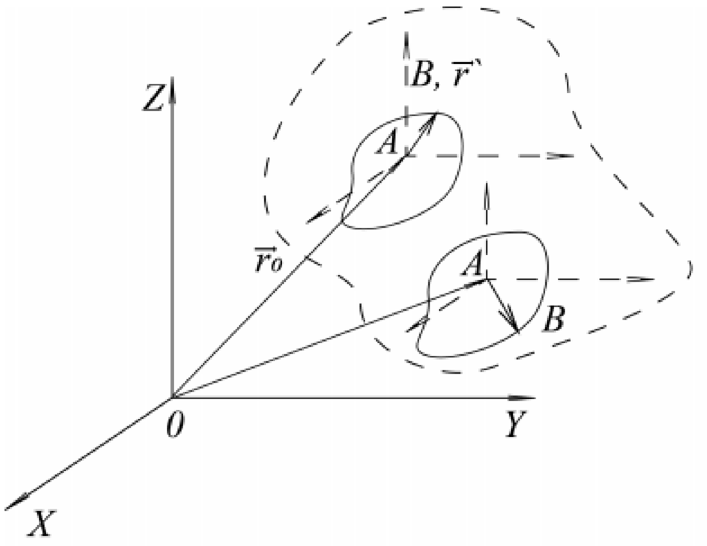

Рис. 13.3. Движение сплошной среды

Радиус–вектор точки B:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$(\Delta V)^{1/3} \ll V^{1/3}$$

За промежуток времени dt физически бесконечно малая частица переместится на $d\vec{r}$:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' \to d\vec{r}' = d\vec{r} - d\vec{r}_0$$

Определяется поле перемещения:

$$\vec{u} \equiv d\vec{r} \Longrightarrow \vec{u}(\vec{r},t)$$

Поэтому:

$$d\vec{r}_0 = \vec{u}(\vec{r}_0, t)$$

Тогда:

$$d\vec{r}' = \vec{u}(\vec{r}, t) - \vec{u}(\vec{r}_0, t)$$

Предполагается, что $\vec{u}$ — достаточно гладкая функция. Учтено, что $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$. Тогда:

$$d\vec{r}' = \vec{u}(\vec{r}, t) - \vec{u}(\vec{r}_0, t) = \begin{pmatrix} u_1(\vec{r}) - u_1(\vec{r}_0) \\ u_2(\vec{r}) - u_2(\vec{r}_0) \\ u_3(\vec{r}) - u_3(\vec{r}_0) \end{pmatrix} = (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\vec{u} = \begin{pmatrix} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})u_1 \\ (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})u_2 \\ (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})u_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow dx_i^{'} = x_k^{'} \frac{\partial}{\partial x_k} u_i$$

Симметричный и антисимметричный тензор:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$$

Рассматривается $\chi_{ki} = -\chi_{ik} \longrightarrow$ три независимые компоненты. Необходимо поставить в соответствие трёхмерный вектор по следующему правилу:

$$d\chi_i = e_{ijk}\chi_{jk} \longrightarrow (d\chi_1, d\chi_2, d\chi_3) = (\chi_{23}, \chi_{31}, \chi_{12}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d\vec{\chi}\frac{1}{2}[\vec{\nabla} \times \vec{u}] = \frac{1}{2}Rot\ \vec{u}$$

$$dx_i^{'} = \chi_{ki}x_k^{'} = e_{lki}d\chi_l x_k^{'} = e_{ilk}d\chi_l x_k^{'} = [d\vec{\chi} \cdot \vec{r}']_i$$

Таким образом, поле бесконечно малых поворотов:

$$d\vec{r}' = [d\vec{\chi} \cdot d\vec{r}']$$

Симметричный тензор:

$$\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) \longrightarrow dx_i^{'} = \varepsilon_{ki}x_k^{'}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i^{'}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kj}(\delta_{ki}x_j^{'} + x_k^{'}\delta_{ji}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}x_j^{'} + \varepsilon_{ki}x_k^{'})$$

Вводится следующая функцию:

$$\Psi = \frac{1}{2}\varepsilon_{kj}x_k^{'}x_j^{'}$$

Тогда:

$$dx_i^{'} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i^{'}} \Longrightarrow d\vec{r}' = \vec{\nabla}'\Psi \Longrightarrow d\vec{r} = d\vec{r}_0 + [d\vec{\chi} \cdot \vec{r}'] + \vec{\nabla}'\Psi$$

$d\vec{r}$ — перемещение B, $d\vec{r}_0$ — перемещение A, $[d\vec{\chi} \times \vec{r}']$ — поворот B, $\vec{\nabla}'\Psi$ — деформации сплошной среды. Поэтому тензор деформации:

$$\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

Тензор можно привести к диагональному виду в системе главных осей $x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}$:

$$diag(\varepsilon_1^{'}, \varepsilon_2^{'}, \varepsilon_3^{'})$$

Отсюда следует, что все деформации сплошной среды можно свести к суперпозиции 3–х элементарных. Рассматривается элементарный объём в форме параллелепипеда:

$$V = x_1^{'} x_2^{'} x_3^{'}$$

$$V + dV = V(1+\varepsilon_1^{'})(1+\varepsilon_2^{'})(1+\varepsilon_3^{'}) \cong V(1+\varepsilon_1^{'}+\varepsilon_2^{'}+\varepsilon_3^{'})$$

$V + dV$ — изменение объёма за счёт деформаций.

$$\frac{dV}{V} = \varepsilon_1^{'}+\varepsilon_2^{'}+\varepsilon_3^{'} = inv = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = div\ \vec{u}(\vec{r}, t)$$

Поле скоростей

Поле скоростей определяется следующим образом:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$u_i = v_i dt \Longrightarrow \begin{cases} \chi_{ki} = \omega_{ki} dt \\ \varepsilon_{ki} = v_{ki} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right), \\ v_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \end{cases}$$

$\vec{\omega}$ — угловая скорость элементарного объёма. Таким образом, поле вихрей:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\chi}}{dt}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Rot\ \vec{u}\right) = \frac{1}{2}Rot\ \vec{v}$$

Далее вводится следующая функция:

$$\Phi = \frac{1}{2}v_{ki}x_k^{'}x_i^{'}$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' \Longrightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\cdot\vec{r}'] + \vec{\nabla}'\Phi$$

$\vec{v}$ — скорость B относительно неподвижной системы отсчёта, $[\vec{\omega}\cdot\vec{r}']$ — поворот B, $\vec{\nabla}'\Phi$ — скорость деформации сплошной среды.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{V}\right) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = div\ \vec{v}$$

Условие несжимаемости:

$$div\ \vec{v} = 0$$

Уравнения движения сплошной среды

Объёмные силы (массовые) — силы дальнего действия (не убывают по мере продвижения вглубь объёма), действуют одинаково на весь объём.

$$\vec{F}(\vec{r},t) \sim \rho(\vec{r},t)\Delta V\vec{f}(\vec{r},t)$$

Поверхностные силы — действуют на вещество, примыкающее к границе объёма (глубина проникновения мала): $\vec{F}(\vec{r},t,\vec{n})\Delta S$, где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности. Третий закон Ньютона:

$$\begin{cases} \vec{F}_1(\vec{r},t,\vec{n}), \vec{F}_2(\vec{r},t,-\vec{n}) \\ \vec{F}_1(\vec{r},t,\vec{n}) = -\vec{F}_2(\vec{r},t,-\vec{n}) \end{cases}$$

Поверхностная сила является нечетной функцией нормали $\vec{n}$, $(\vec{n}_1 = -\vec{n}_2)$. Поверхностную силу можно представить следующим образом:

$$F_i = p_{ik}(\vec{r},t)n_k$$

p_{ik} — тензор локальных напряжений. p_{ik} — i–я компонента поверхностной силы, действующая на единицу площади элемента поверхности, расположено нормально к оси x_k.

Лекция 14. Гидродинамика идеальной жидкости

Уравнение движения сплошной среды. Объемные и поверхностные силы, тензор локальных напряжений

Объёмные силы (массовые) — силы дальнего действия (не убывают по мере продвижения вглубь объёма), действуют одинаково на весь объём.

$$\vec{F}(\vec{r},t) \sim \rho(\vec{r},t)\Delta V \vec{f}(\vec{r},t)$$

Поверхностные силы — действуют на вещество, примыкающее к границе объёма (глубина проникновения мала): $\vec{F}(\vec{r},t,\vec{n})\Delta S$, где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности. Третий закон Ньютона:

$$\begin{cases} \vec{F}_1(\vec{r},t,\vec{n}), \vec{F}_2(\vec{r},t,-\vec{n}) \\ \vec{F}_1(\vec{r},t,\vec{n}) = -\vec{F}_2(\vec{r},t,-\vec{n}) \end{cases}$$

Поверхностная сила является нечетной функцией нормали $\vec{n}$, $(\vec{n}_1 = -\vec{n}_2)$. Поверхностную силу можно представить следующим образом:

$$F_i = p_{ik}(\vec{r},t)n_k$$

p_{ik} — тензор локальных напряжений. p_{ik} — i–я компонента поверхностной силы, действующая на единицу площади элемента поверхности, расположено нормально к оси x_k. $p_{ik}(\vec{r},t) = p_{ki}(\vec{r},t)$ — симметричный тензор. Диагональные компоненты — нормальные напряжения. Вне диагонали — касательные напряжения. $p_{ik} \longrightarrow$ локально приводится к виду:

$$diag(p_1^{'} + p_2^{'} + p_3^{'})$$

$\rho = \rho(\vec{r},t)$, ΔV — выделенный элемент объёма. Уравнение движения записывается следующим образом:

$$\rho \Delta V \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i \Delta V + \underbrace{\oint p_{ik} n_k dS}_{=\int\limits_V \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\Delta V' = \frac{\partial d p_{ik}}{\partial x_k}\Delta V}$$

Таким образом:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$$

Учтено, что:

$$dv_i = \frac{\partial d v_i}{\partial t}dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}dx_k$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v}$$

Уравнение, которое описывает сплошную среду:

$$\rho \left(\frac{\partial d v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \tag{14.1}$$

Записывается закон сохранения массы:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\Pi \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint (\rho \vec{v}, \vec{n}) dS$$

$$\int \left(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i}}_{=0} \right) dV = 0$$

Таким образом, уравнение неразрывности записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div$$
$$\rho \vec{v} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla}, \rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div\ \vec{v} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div\ \vec{v} = 0 \tag{14.2}$$

Таким образом, уравнения (14.1) и (14.2) образуют систему. Идеальной жидкостью называют жидкость, удовлетворяющую требованиям:

1) $p_{ik} = -p(\vec{r}, t)\delta_{ik}$ — тензор локальных напряжений изотропен в любой точке среды.

2) Отсутствуют процессы диссипации энергии, внутреннее трение; можно пренебречь теплообменом между участками сплошной среды.

Уравнение Эйлера:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div\ \vec{v} = 0$$

Баротропный процесс $\longleftrightarrow \rho = f(P)$ является примером изоэнтропического процесса, при котором:

$$S(p,v) = S_0 = const$$

Итак, имеются S уравнений и S неизвестных функций $p, \rho, \vec{v}$, т.е. система замкнута. Пусть объёмные силы потенциальны, т.е.:

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} u$$

Изменение удельной энергии записывается следующим образом:

$$\frac{de}{dt} = -p\frac{dV}{dt} \quad V = \frac{1}{\rho}$$

Энтальпия — внутренняя энергия:

$$w = e + p\frac{1}{\rho}$$

$$dw = \underbrace{de}_{=-pdV} + dpV + pdV = Vdp \Longrightarrow \underline{\vec{\nabla} w = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}}$$

В уравнении Эйлера:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v}}_{=\vec{\nabla}\frac{v^2}{2} - [\vec{v}[\vec{\nabla}, \vec{v}]]}$$

$$[\vec{v}[\vec{\nabla}, \vec{v}]] = \vec{\nabla}(\vec{v}, \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla}, \vec{v})$$

Уравнение можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}] = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + w + u\right)$$

Вектор вихря:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}[\vec{\nabla}, \vec{v}]$$

Получится уравнение Эйлера в дифференциальной форме для идеальной жидкости в потенциальном поле объёмных сил.

Линии тока — линии, касательные к которым в точке касания указывают направление течения жидкости.

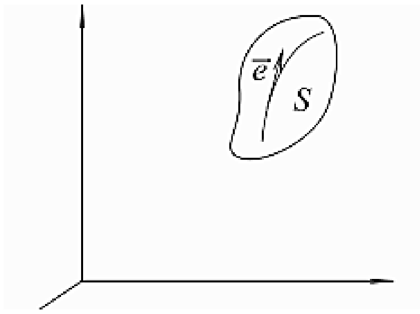

Рис. 14.1. Линии тока

Линия тока определяется следующим уравнением:

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \frac{\vec{v}}{v} \Longrightarrow \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

Установившееся (стационарное) течение — в любой точке пространства скорость не зависит от времени.

$$2[\vec{\omega}, \vec{v}] = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + w + u\right)$$

$$\vec{e}\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + w + u\right) = 0$$

Записывается интеграл Бернулли: $\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + w + u\right) = P_0 = const$

Потенциальное течение — течение сплошной среды, при котором в любой точке сплошной среды отсутствуют вихри, т.е.:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} Rot\ \vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$$

Φ — потенциал поля скоростей.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + w + u\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + w + u + \frac{d\Phi}{dt}\right) = 0$$

Записывается соотношение Коши (интеграл):

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + w + u + \frac{d\Phi}{dt} = f(t)$$

Если течение ещё и установившееся, т.е. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ и $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, то следующее уравнение выполнено во всём объёме жидкости:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + w + u = C$$

Уравнение непрерывности для энергии и импульса идеальной жидкости

Записывается уравнение неразрывности и уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0$$

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Учтена изоэнтропичность процесса, т.е.:

$$\frac{dS}{dt}=0$$

$$\frac{de}{dt}=-p\frac{dV}{dt}=-p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{p}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$\sum_i\Longrightarrow\rho\frac{d(\vec{v}^2/2)}{dt}=\rho f_i v_i-v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}\Longrightarrow\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+e\right)=-\frac{\partial(pv_i)}{\partial x_i}+\rho f_i v_i$$

Пусть $f_i=0$, тогда:

$$\frac{\partial\rho(e+\vec{\nabla}^2/2)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\rho v_i\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+e+\frac{p}{\rho}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\left(e+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)dV=$$

$$=-\oint\rho v_i n_i\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+e+\frac{p}{\rho}\right)dS\equiv-\oint\rho\vec{v}\vec{n}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+e+\frac{p}{\rho}\right)dS$$

Вектор Умова–Пойтинга записывается следующим образом:

$$\vec{w}=\rho\vec{v}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+e+\frac{p}{\rho}\right)$$

Таким образом, уравнение неразрывности для потока энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\rho v_i\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+e+\frac{p}{\rho}\right)=0$$

Записывается уравнение Эйлера для идеальной жидкости ($f_i=0$):

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_i v_k}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_k}\delta_{ik}$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\big(\underbrace{p\delta_{ik} + \rho v_i v_k}_{=P_{ik}}\big) = 0$$

P_{ik} — некоторая тензорная величина.

$$P_{ik} = p_i\delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

Потоки импульса сплошной среды определяются тензорной величиной P_{ik}.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV = -\oint P_{ik} n_k dS$$

Распространение малых возмущений в сжимаемой сплошной среде

Рассматривается идеальная сжимаемая жидкость:

$$p = p_0 + p'$$

$$p' \ll p$$

Где p_0 — равновесное значение, p' — малые возмущения.

$$\rho = \rho_0 + \rho^{'}$$

$$\rho^{'} \ll \rho_0$$

Записывается линеаризованное уравнение Эйлера и уравнение неразрывности:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p', \\ \dfrac{\partial \rho^{'}}{\partial t} + \rho_0 div\ \vec{v} = 0. \end{cases}$$

Учтено, что:

$$p' = p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)\bigg|_{S=const}(\rho - \rho_0) \Longleftrightarrow p' = c^2\rho^{'}$$

Течение потенциально:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$$

Тогда:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = -p' \\ \dfrac{\partial \rho^{'}}{\partial t} + \rho_0 \Delta\Phi = 0 \ \Bigg| \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}+\Delta\left(\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=0\longleftrightarrow\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}=\Delta p'=c^2\Delta\rho'$$

Записывается волновые уравнения для ρ' и p':

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-c^2\Delta\rho'=0\\ \dfrac{\partial^2 p'}{\partial t^2}-c^2\Delta p'=0\end{cases}$$

Таким образом, все малые возмущения давления p' и плотности ρ' распространяются с одинаковой скоростью в виде волн малых амплитуд в сплошной среде. Из уравнения Эйлера можно получить волновое уравнение для потенциала поля скоростей:

$$\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-p'=-c^2\rho'\;\Big|\cdot\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\rho_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-c^2\frac{\partial p'}{\partial t}=\rho_0 c^2\Delta\Phi\longrightarrow\Delta\Phi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

Рассматривается следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}-c^2\Delta\rho'=0$$

Пусть возмущение распространяется вдоль оси OX, т.е.:

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}=0\Longrightarrow\rho'=f_1(x-at)+f_2(x+at)\Big|_{a=c}$$

Пусть из н.у. следует, что $f_2\equiv 0$, тогда $\rho'=f_1(x-ct)$ — уравнение для бегущей волны, распространяющейся в положительном направлении OX с $c=const$. Тогда фронт волны — плоскость:

$$x-ct=const\Longrightarrow x=ct+const$$

Лекция 15. Гидродинамика вязкой среды

Распространение малых возмущений в сжимаемой сплошной среде

Для потенциала поля скоростей:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \Longrightarrow \Phi = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

Пусть начальные условия таковы, что $\Phi = f_1(x-ct)$. Далее:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$$

$$\vec{v} = \{v_x, 0, 0\}$$

Это приводит к тому, что звуковые волны — продольные.

$$v = v_x = f_1^{'}$$

Выводится условие малости возмущения:

$$\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -p' = -c^2\rho^{'} \Longrightarrow \rho^{'} = -\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\rho_0}{c}f_1^{'} = \frac{\rho_0}{c}v \Longrightarrow \frac{v}{c} = \frac{\rho^{'}}{\rho_0} \ll 1 \Longrightarrow \underline{v \ll c}$$

Необходимо найти решения уравнения колебаний в виде:

$$\Phi = Re\big(\Phi_0(x,y,z)\exp^{-i\omega_0 t}\big) \Longrightarrow \Delta\Phi_0 + \frac{\omega_0^2}{c^2}\Phi_0 = 0$$

Таким образом, получается уравнение Гельмгольца.

$$\Longrightarrow Re\Phi_0 = Re\left(A\exp^{i\dfrac{\omega_0}{c}x}\right)$$

Где $A = a\exp^{i\alpha}$ — решение. Уравнение для плоской монохроматической звуковой волны записывается следующим образом:

$$\Phi = Re\left(a\exp^{i\left(\dfrac{\omega_0}{c}x-\omega_0 t+\alpha\right)}\right)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega = kc \Longrightarrow \Phi = a\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

a — амплитуда, $(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$ — фаза.

Тензор вязких напряжений. Уравнение Навье-Стокса. Динамически подобные течения, число Рейнольдса

При идеальной жидкости тензор локальных напряжений изотропен и имеет следующий вид:

$$p_{ik} = -p\delta_{ik}$$

Далее формально записывается:

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + t_{ik}$$

t_{ik} — тензор вязких напряжений. $t_{ik} = t_{ki}$ — так как процессы вращения частиц жидкости не приводят к появлению поверхностных сил (т.е. p_{ik} остаётся симметричным). В линейном приближении:

$$t_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \varsigma\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

η, ς — первая и вторая вязкости. Числа в изотропной среде:

$$\eta = \eta(p, T)$$

$$\varsigma = \varsigma(p, T)$$

Таким образом, рассматривается изотропная линейная вязкая среда. Уравнение движения примет вид:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k}$$

Замечание 15.1. *Процессы, описывающиеся данным уравнением движения, необратимы, т.к. идут с диссипацией энергии.*

Пусть $\eta = const$, $\varsigma = const$, тогда:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\varsigma\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+$$

$$+\left\{\eta\left(-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\varsigma\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}+\eta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\left\{\left(\varsigma+\frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial v_l}{\partial x_l}+\eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}\right\}$$

Уравнение Навье–Стокса записывается следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p+\eta\Delta\vec{v}+\left(\varsigma+\frac{\eta}{3}\right)grad\ div\ \vec{v}$$

Рассматривается несжимаемая жидкость ($\rho = const$):

$$\begin{cases} div\ \vec{v}=0,\\ \rho\left(\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p+\eta\Delta\vec{v}+0\end{cases}$$

Алгоритм решения этой системы выглядит следующим образом:

$$Rot\left\{\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}\right)\right\}=-\underbrace{[\vec{\nabla},\vec{\nabla}p]}_{=\vec{0}}+Rot\ (\eta\Delta\vec{v})$$

Получается уравнение относительно $\vec{v}$. Решением будет поле скоростей.

Замечание 15.2. *Граничное условие* $\vec{v}\Big|_S=\vec{0}$ *(скорость на границе).*

$$div\ (-\vec{\nabla}p+\eta\Delta\vec{v})=div\ \left(\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}\right)$$

$$-\Delta p+\eta\Delta\underbrace{div\ \vec{v}}_{=0}=\rho\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{div\ \vec{v}}_{=0}+\rho\ div\ \left((\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}\right)$$

$$\Delta p=-\rho\ div\ \left((\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}\right)=-\rho\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\vec{v},\vec{\nabla})v_i\right)=-\rho\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_k\frac{\partial}{\partial x_k}v_i\right)=-\rho\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=$$

$$=-\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{=0}\right)=-\rho\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

При полученном ранее $\vec{v}$ это уравнение определяет p.

Динамически подобные течения. Число Рейнольдса

ρ, η — параметры жидкости. l — характерный размер труб, v_0 — скорость натекающего потока на пространственной бесконечности. Эти величины определяют масштабы измерения. Уравнение Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости (индексный вид):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\left(\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}\right)_i + \frac{\eta}{\rho}\Delta v_i$$

Уравнение Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости (векторный вид):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$$

Проводится процедура обезразмеривания:

$$\vec{V} = \frac{\vec{v}}{\vec{v}_0}$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}}{l}$$

$$T = \frac{t v_0}{l}$$

$$P = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial T} \cdot \frac{v_0^2}{l} + (\vec{V}, \vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{V}\frac{v_0^2}{l} = -\frac{v_0^2}{l}\vec{\nabla}_R P + \frac{\eta}{\rho}\frac{v_0^2}{l^2}\Delta_{\vec{R}}\vec{V}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial T} + (\vec{V}, \vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{V} = -\vec{\nabla}_R P + \underbrace{\dfrac{\eta}{\rho v_0 l}}_{=\frac{1}{Re}} \Delta_{\vec{R}}\vec{V}, \\ div_R\, \vec{V} = 0 \end{cases}$$

Число Рейнольдса выражается следующим образом:

$$Re = \frac{\rho v_0 l}{\eta}$$

Решением системы будет:

$$\vec{V} = \vec{V}(T, \vec{R}, Re)$$

Таким образом, получается закон подобия Рейнольдса. Геометрически подобные течения — течения, для которых отличается один из параметров ρ, η, v_0, l. Для таких течений решение определяется законом подобия Рейнольдса.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ