ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ЧАСТЬ 1

ХАЛИЛОВ
ВЛАДИСЛАВ РУСТЕМОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФАКУЛЬТЕТА ФФХИ МГУ
СТЕПАНОВА МАКИМА ЕВГЕНЬЕВИЧА

Содержание

Лекция 1. Основная задача механики. Виды связей

Понятие механической системы. Материальная точка

Вводятся понятия механических систем двух типов:

1) Простейшая механическая система — материальная точка. Под такой системой понимается тело исчезающее малых размеров, но имеющее массу. Понятие материальной точки можно использовать, когда интересуются пространственным движением тел, и пренебречь вращением этого тела относительно центра масс точки.

2) Система материальных точек отличается от материальных точек тем, что в такой системе может существовать еще и взаимодействие между телами, которые входят в данную систему.

Изучается движение механических систем, которые либо являются материальными точками, либо системами материальных точек.

Основная задача механики

Предполагается, что динамическое уравнение для системы точек записывается в форме уравнения Ньютона в инерциальной системе отсчета. Рассматривается материальная точка массы m. Рассматривается некая система отсчета и движение этой материальной точки в системе отсчета. Пусть точка совершает движение по какой-то траектории. Необходимо знать радиус-вектор $\vec{r}(t)$ и скорость точки $\dot{\vec{r}}(t)$.

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Скорость точки — это касательный вектор. Пусть в этой системе отсчета инерциальной задано силовое поле, которое действует на материальную точку. Тогда уравнение движения есть уравнение Ньютона:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Основной задачей механики для материальной точки во внешнем поле является задача нахождения радиуса-вектора точки как функция времени по заданным условиям движения и по заданным начальным условиям.

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$$

Пусть есть система материальных точек N, масса точек m_i, радиус-вектор $\vec{r}_i$ и система уравнений:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$$

Сила $\vec{F}_i$ состоит из двух частей: сила, которая создается внешним полем, и внутренняя сила.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{in}$$

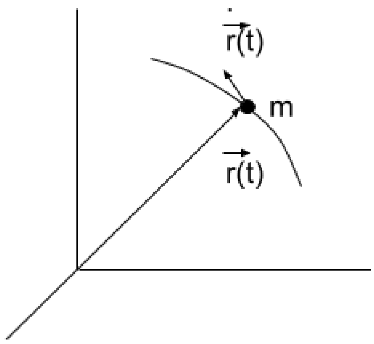

Рис. 1.1. Траектория и радиус-вектор

Основная задача механики для системы материальных точек формулируется таким же образом, как и для одной материальной точки. Если удается найти решение для этой задачи при определенных начальных условиях, то такое решение называется частным решением. Общее решение — это решение, когда оно годится при произвольных начальных условиях. Такие системы называют свободными системами.

Пример 1.1. *Рассматривается маятник, где материальная точка m соединена с системой отсчета нерастяжимой нитью, либо невесомым стержнем. Радиус-вектор направлен по стержню. Расстояние от точки до начала системы отсчета должно быть равно l^2.*

$$f = \vec{r}^2 - l^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

Не все координаты являются независимыми, существует связь между координатами. Поскольку есть стержень возникает сила реакции. Поэтому система несвободная.

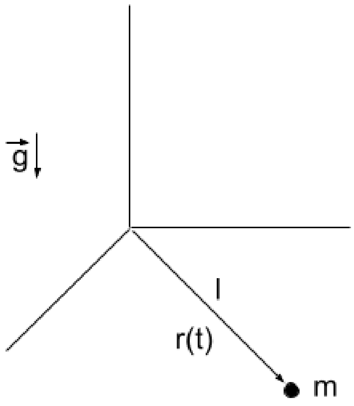

Рис. 1.2. Несвободная система

Пример 1.2. *Рассматривается точка массы m, которая находится на гладкой плоскости, которая движется вертикально вверх с постоянной скоростью u.*

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\dot{\vec{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Уравнение записывается следующим образом:

$$f = \dot{z} - u = 0$$

В таких случаях говорят, что на систему наложены связи.

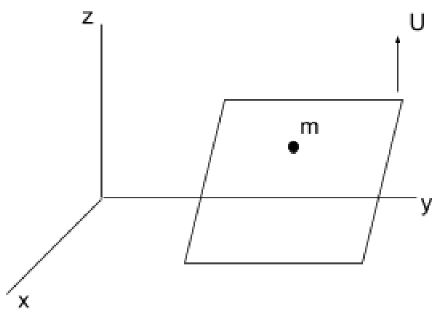

Рис. 1.3. Несвободная система в плоскости

Связи

Пусть на систему из N материальных точек, которая находится в поле сил F_i, наложены еще связи. Связи можно задать в форме уравнений или функциональных соотношений между координатами и скоростями точек системы. Пусть на систему из N материальных точек наложены k связи:

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0; \quad \alpha = 1, \dots, k$$

В этом случае система уравнений выглядит следующим образом:

$$m_i\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

Основная задача механики формулируется следующим образом. Необходимо найти $3N$ значение координат и $3N$ реакций связи. Всего есть $3N + K$ уравнений.

Виды связей

Все уравнения связи можно проинтегрировать по времени тк, что они превращаются в некие функции:

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

Такие связи называются **голономными**.

Если в уравнение связи время не входит, то такие связи называют стационарными.

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N) = 0$$

Решение основной задачи механики

Решается основная задача механики только для систем, в которых действующая связь — голономная. **Задача:** нахождение закона движения и реакций связей по заданным силам $\vec{F}_i (i = 1, ..., N)$ и заданным уравнениям голономных связей. Пусть есть $6N$ неизвестных функций и $3N + K$ скалярных уравнений. Чтобы решить задачу при $k < 3N$, необходимо уменьшить число компонент. Необходимо найти соотношение, которое связывает силу реакцию с заданными функциями:

$$6N - 3N - k = 3N - k = s$$

Виртуальные, возможные и действительные перемещения

Определение 1.1. *Виртуальным перемещением системы называют бесконечно малое изменение конфигурации этой системы, согласующееся со связями в данный момент времени, т.е. если:*

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0; \quad \alpha = 1, ..., k$$

То и:

$$f_\alpha(\vec{r}_1+\delta\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N+\delta\vec{r}_N,t)=0;\quad \alpha=1,\ldots,k$$

Если обозначить виртуальное перемещение как $\delta r_i(t)$, то:

$$\tilde{f}_\alpha(\vec{r}_1+\delta\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N+\delta\vec{r}_N,t)=0$$

Поскольку это бесконечно малое перемещение, это выражение можно разложить в ряд, оставляя только линейные члены:

$$\tilde{f}_\alpha(\vec{r}_1+\delta\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N+\delta\vec{r}_N,t)+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\tilde{f}_\alpha}{\partial\vec{r}_i}\delta\vec{r}_i(t)\right)=0,\quad \alpha=1,\ldots,k$$

Уравнение, которое удовлетворяет виртуальному перемещению системы, записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{r}_i}\delta\vec{r}_i\right)=0,\quad \alpha=1,\ldots,k$$

Для одной точки уравнение виртуального перемещения следующее:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{r}}\times\delta\vec{r}=0$$

Для маятника уравнение:

$$f=\vec{r}^2-l^2=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}=2\vec{r}$$

Уравнение виртуального перемещения для маятника:

$$\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=0$$

$$x\delta x+y\delta y+z\delta z=0$$

Уравнение для плоскости:

$$f=z-ut-z_0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Уравнение виртуального перемещения для плоскости:

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}=0\leftrightarrow\delta z=0$$

Определение 1.2. *Возможными перемещениями называют перемещения, которые удовлетворяют уравнениям связи.*

Если обозначить возможное перемещение как $d\vec{r}_i$, то возможное перемещение удовлетворяет уравнению:

$$f_\alpha(\vec{r}_1 + d\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N + d\vec{r}_N, t + dt) = 0; \quad \alpha = 1, \ldots, k$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \cdot dt = 0$$

Определение 1.3. *Действительное перемещение обладает длительностью, удовлетворяет уравнениям связи и уравнениям движения, происходит под действием сил связи и внешних сил.*

Определение 1.4. *Виртуальное перемещение ($\delta\vec{r}$) — произвольное бесконечно малое изменение координат точек системы, взятое в данный фиксированный момент времени и удовлетворяющее лишь уравнениям связи (не обладает длительностью, может противоречить уравнению движения, а потому нефизично).*

Определение 1.5. *Пусть сумма работ всех реакций связей на любых виртуальных перемещениях точек системы равна нулю: $\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0$. Связи, удовлетворяющие этому условию, называют идеальными.*

Принцип виртуальных перемещений

Определение 1.6. *Принципом, или началом, механики называют такое общее математически формулируемое предложение, из которого механика как физическая теория может быть выведена дедуктивно, т.е. могут быть получены уравнения движения для механических систем общего типа или для систем некоторого ограниченного класса.*

Эти принципы базируются на понятиях виртуальных перемещений. Рассматривается несвободная система материальных точек в равновесии. Тогда сила, которая действует на эту систему $\vec{\Phi}_i = 0$, где:

$$\vec{\Phi}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{N}(\vec{\Phi}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i)}_{=0 \text{ (связи идеальны)}} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0$$

$\vec{F}_i$ — активная (внешняя) сила.

Принцип виртуальных работ (перемещений). Виртуальная работа сил реакции всегда равна нулю на любом виртуальном перемещении, не нарушающем заданных кинематических условий:

$$0=\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i)=-\sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i)$$

Необходимо получить динамическое уравнение. Принцип Даламбера записывается следующим образом:

$$\vec{\Phi}_i=m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i-\vec{R}_i$$

Если в системе действуют идеальные связи, то движение системы может осуществляться таким образом, что должна обращаться в 0 следующая виртуальная работа:

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i)=0,\sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i)=0\Longrightarrow\sum_{i=1}^{N}((m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i)\cdot\delta\vec{r}_i)=0$$

Этот принцип называется принципом Даламбера или общим уравнением механики.

Уравнение Лагранжа

Пусть есть k зависимых вариаций и $3N-k$ независимых вариаций. Уравнение для вариаций, если заданы уравнения связи, определяется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)=0$$

Предполагается, что все уравнения связи независимы. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_\alpha\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)=0$$

Принцип Даламбера переписывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i-\sum_{i=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{r}_i}\right)\delta\vec{r}_i=0$$

Необходимо подобрать множители Лагранжа таким образом, чтобы можно было положить равным 0 коэффициенты при k зависимых вариациях. Оставшиеся коэффициенты при независимых вариациях должны быть равными 0 чтобы принцип удовлетворялся. Таким образом принцип Даламбера удовлетворяется если выполняется уравнение Лагранжа с неопределенными множителями Лагранжа или уравнение

Лагранжа первого рода:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

Основная задача механика состоит из совместного решения системы уравнения с реакциями связи и заданными уравнениями связи:

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0; \quad \alpha = 1, \dots, k$$

Для случая голономных связей принцип Даламбера позволяет решить динамическую задачу о движении системы из N материальных точек, на которые наложены связи и действует активная сила $\vec{F}_i$.

Пример 1.3. *Рассматривается сферический маятник. Необходимо найти реакцию связи как функцию координат.*

$$f = \vec{r}^2 - l^2 = 0$$

Связь можно дифференцировать по времени:

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0$$

$$\dot{\vec{r}}^2 + (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}) = 0$$

Записывается уравнение Лагранжа первого рода:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + 2\lambda\vec{r}$$

$$\vec{R} = 2\lambda\vec{r}$$

Натяжение направлено по радиусу-вектора. Уравнение виртуального перемещения записывается как:

$$\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$$\vec{R} \cdot \delta\vec{r} = 0$$

Сначала необходимо найти значение λ:

$$-m\dot{\vec{r}}^2 = m(\vec{g}\vec{r}) + 2\lambda l^2$$

$$m(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) = m(\vec{g}\vec{r})$$

Таким образом, можно увидеть закон сохранения механической энергии системы.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}-m(\vec{g}\vec{r})\right]=0$$

$$E=T+U=\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}-m(\vec{g}\vec{r})$$

$$\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}-m(\vec{g}\vec{r})=E_0$$

E_0 — *значение энергии в начальным момент времени.*

$$m\dot{\vec{r}}=2(E_0+m(\vec{g}\vec{r}))$$

$$2(E_0+m(\vec{g}\vec{r}))=m(\vec{g}\vec{r})+2\lambda l^2$$

$$2\lambda=-\frac{2E_0+3m(\vec{g}\vec{r})}{l^2}$$

Тогда сила реакции:

$$\vec{R}=2\lambda\vec{r}=-\frac{2E_0+3m(\vec{g}\vec{r})}{l^2}\cdot\vec{r}$$

Внешнее поле — стационарно. Потенциальная энергия не зависит от времени и связи, наложенные на систему, — стационарны. В этом случае сохраняется механическая энергия системы.

Пример 1.4. *Уравнение связи на плоскости:*

$$f=z-ut-z_0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}=(0,0,1)$$

Уравнение движения записывается следующим образом:

$$m\ddot{\vec{r}}=m\vec{g}+\lambda\vec{e}_z$$

$$m\ddot{x}=0,\quad m\ddot{y}=0$$

$$m\ddot{z}=-mg+\lambda$$

$$\dot{z}=u$$

$$\ddot{z}=0$$

$$\lambda=mg$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}-m(\vec{g}\vec{r})\right]=mgu$$

Механическая энергия системы не сохраняется, если связи — не стационарны.

Лекция 2. Принцип Даламбера. Уравнение Лагранжа

Принцип Даламбера

Принцип Даламбера гласит, что если в системе N материальных точек действуют связи, заданные k уравнениями, то в том случае если связи идеальны, то динамика системы следует принципу Даламбера.

$$\sum_{i=1}^{N}((m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\cdot\delta\vec{r}_i) = 0$$

В этот принцип сила реакции не входит. Чтобы удовлетворить этому принципу, достаточно написать уравнение:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{r}_i}, \quad i = 1,\ldots,N$$

Сила реакции определяется следующим образом:

$$\vec{R}_i = \sum_{i=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{r}_i}$$

Пример 2.1. *Необходимо найти силу реакции как функцию координат в задаче сферического маятника.*

$$f = \vec{r}^2 - l^2 = 0$$

Связь можно дифференцировать по времени:

$$(\vec{r}\cdot\vec{r}) = 0$$

$$\dot{\vec{r}}^2 + (\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}}) = 0$$

Записывается уравнение Лагранжа первого рода:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + 2\lambda\vec{r}$$

$$\vec{R} = 2\lambda\vec{r}$$

Натяжение направлено по радиусу-вектора. Уравнение виртуального перемещения записывается как:

$$\vec{r}\cdot\delta\vec{r} = 0$$

$$\vec{R}\cdot\delta\vec{r}=0$$

Сначала необходимо найти значение $\boldsymbol{\lambda}$*:*

$$-m\dot{\vec{r}}^2=m(\vec{g}\vec{r})+2\lambda l^2$$

$$m(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}})=m(\vec{g}\dot{\vec{r}})$$

Идеальность связи связана со свойствами тех поверхностей стержня, которые ограничивают движение. Таким образом, можно увидеть закон сохранения механической энергии системы.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}-m(\vec{g}\vec{r})\right]=0$$

$$E=T+U=\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}-m(\vec{g}\vec{r})$$

$$\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}-m(\vec{g}\vec{r})=E_0$$

E_0 *— значение энергии в начальным момент времени.*

$$m\dot{\vec{r}}=2(E_0+m(\vec{g}\vec{r}))$$

$$2(E_0+m(\vec{g}\vec{r}))=m(\vec{g}\vec{r})+2\lambda l^2$$

$$2\lambda=-\frac{2E_0+3m(\vec{g}\vec{r})}{l^2}$$

Тогда сила реакции:

$$\vec{R}=2\lambda\vec{r}=-\frac{2E_0+3m(\vec{g}\vec{r})}{l^2}\cdot\vec{r}$$

Внешнее поле — стационарно. Потенциальная энергия не зависит от времени и связи, наложенные на систему, — стационарны. В этом случае сохраняется механическая энергия системы.

Пример 2.2. *Необходимо найти силу реакции и закон движения точки (все координаты точки как как функции времени). Уравнение связи на плоскости:*

$$f=z-ut-z_0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}=(0,0,1)$$

Уравнение движения записывается следующим образом:

$$m\ddot{\vec{r}}=m\vec{g}+\lambda\vec{e}_z$$

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda$$

$$\dot{z} = u$$

$$\ddot{z} = 0$$

$$\lambda = mg$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - m(\vec{g}\vec{r})\right] = mgu$$

Механическая энергия системы не сохраняется, если связи — не стационарны.

Уравнение Лагранжа с неопределенными множителями первого рода позволяет полностью решить динамическую задачу, найти закон движения и силу реакции.

Уравнение Лагранжа в независимых координатах (второго рода)

Принцип Даламбера универсальный. Пусть в системе N материальных точек есть голономные идеальные связи, то не все из $3N$ координатного набора $\{\vec{r}_\alpha\}$ являются независимыми: можно на основе уравнений голономных связей выразить k штук координат через остальные $3N-k$, т.е. независимыми являются $3N-k \equiv s$. s — число степеней свободы системы.

Определение 2.1. *Минимально необходимое число независимых координат, с помощью которых можно однозначно задать положение тел системы в любой момент времени, называется числом степеней свободы системы.*

Выбор независимых координат должен удовлетворять двум основным требованиям ($q_1 \dots q_s$ — обобщенные координаты):

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$f_\alpha(\vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, t), t) \equiv 0$$

Все радиусы - векторы всех точек являются однозначными функциями независимых координат и времени. Уравнения связи должны обращаться в тождество.

$$det\left|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right|_s \neq 0$$

Уравнение для изменения полной энергии системы при наличии связей

Рассматривается сферический маятник. Уравнение связи записывается следующим образом:

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0$$

В качестве независимых координат выбираются:

$$q_1=x, \quad q_2=y$$

Тогда z является зависимой координатой:

$$z=\sqrt{l^2-q_1^2-q_2^2}$$

Уравнение связи выражается независимыми координатами:

$$q_1^2+q_2^2+l^2-q_1^2-q_2^2-l^2 \equiv 0$$

Пусть зависимые координаты сферические: r,θ,φ. Уравнение связи:

$$r^2-l^2=0$$

Независимые координаты: θ,φ.

Основная идея получения уравнения Лагранжа второго рода состоит в том, чтоб переписать принцип Даламбера, используя понятия виртуальных перемещений в независимых координатах δq_i. Необходимо найти первую производную по времени:

$$\dot{\vec{r}}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Зависимые виртуальные перемещения выражаются через независимые виртуальные перемещения:

$$\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Принцип Даламбера:

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}-\vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы материальных точек:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\dot{\vec{r}}_i^2}{2}$$

Необходимо определить кинетическую энергию в пространстве конфигураций:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\dot{\vec{r}}_i^2}{2} = T((q),(\dot{q}),t)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Вводятся обобщенные силы:

$$Q_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

Таким образом, принцип Даламбера записывается как:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

Получается система уравнений Лагранжа второго порядка в независимых координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1,\ldots,s$$

Вывод уравнений Лагранжа для системы N частиц с s степенями свободы из уравнений Даламбера

Рассматривается случай, когда механическая система находится исключительно в поле потенциальных сил.

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i}$$

Потенциальная энергия системы в независимых координатах:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U(q_1,\ldots,q_s)}{\partial q_j}$$

Механическая система находится под действием потенциальных сил, заданных потенциалом U:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Вводится функция Лагранжа обобщенных координат:

$$L((q),(\dot{q}),t) = T((q),(\dot{q}),t) - U(q)$$

Имеется следующая система уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$q_j(t) = q_j(t, c_1, \ldots, c_{2s})$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j(t), t)$$

Для решения используется уравнение Ньютона:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$$

Примеры функции и уравнения Лагранжа в различных потенциальных полях

Если потенциальное поле задано как функция декартовых координат, то тогда удобно использовать функцию Лагранжа в качестве обобщенных координат $U(x,y,z)$. Кинетическая энергия записывается следующим образом:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z$$

Уравнение Лагранжа в цилиндрической системе координат

Точка массы m движется в потенциальном поле, которое задано в цилиндрических координатах $U(\rho,z)$. Функция Лагранжа записывается следующим образом:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-U(\rho,z)$$

$$d\vec{r}=d\rho\vec{e}_\rho+\rho d\varphi\vec{e}_\varphi+dz\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}=m\dot{\rho}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\rho}=m\rho\dot{\varphi}^2$$

$$m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=-\frac{\partial U}{\partial\rho}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}m\rho^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

$$m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})=0$$

$$m\ddot{z}=-\frac{\partial U}{\partial z}$$

Лекция 3. Функция и уравнение Лагранжа

Функция Лагранжа и уравнение Лагранжа

Система из N материальных точек, на которую наложены k голономных связей и при этом все связи идеальны описывается одной единственной функцией — функцией Лагранжа, если в системе действуют только потенциальные силы. В этом случае функция Лагранжа строится следующим образом:

$$s = 3N - k$$

Обобщенные независимые координаты обозначаются как $q_1, \ldots, q_s$. Механическая система задается многообразием обобщенных координат и функцией обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s$. Кинетическая энергия определяется как функцию обобщенных координат, скоростей и времени:

$$T((q), (\dot{q}), t)$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \geqslant 0$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Если действующие в системе силы потенциальные, то потенциал U можно переписать в обобщенных координатах и записать функцию Лагранжа с потенциальными силами:

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t)}{\partial \vec{r}_i}$$

$$U(q_1, \ldots, q_s, t)$$

$$L = T((q), (\dot{q}), t) - U((q), t)$$

Динамические уравнения определяются следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \ldots, s$$

Если заданы диссипативные силы, то функция Лагранжа записывается как:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^d \quad j = 1, \ldots, s$$

$$Q_j^d = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^d \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Структура кинетической энергии. Кинетическая энергия в виде суммы квадратичной и линейной форм обобщённых скоростей

Необходимо изучать зависимость функции Лагранжа от обобщенных скоростей.

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}a_{jk}((q),t)\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{s}a_j((q),t)\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$a_{jk}((q),t)=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$a_j((q),t)=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$$

$$a_{jk}=a_{kj}$$

Кинетическая энергия как функция обобщенных скоростей имеет следующий вид:

$$T((q),(\dot{q}),t)=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}$$

$$T^{(2)}\geqslant 0$$

Квадратичная форма обобщенных скоростей остается, когда система свободная и связи стационарные. Структура функции Лагранжа следующая:

$$L=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}-U^{(0)}$$

Заряженная частица в электромагнитном поле. Обобщённый потенциал

Движение заряженной частицы массы m, заряда e в электромагнитном поле определяется уравнениями Лоренца.

$$m\ddot{\vec{r}}=e\vec{\varepsilon}+\frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\cdot\vec{H}]$$

Кроме потенциальной силы также возникла сила, которая линейна скорости. Электромагнитное поле можно описать с помощью напряженности и скалярного ($\Phi(\vec{r},t)$) или векторного ($\vec{A}(\vec{r},t)$) потенциала.

$$\vec{\varepsilon}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] = rot\vec{A}$$

Внешнее электромагнитное поле описывается с помощью скалярного и векторного потенциала.

Пример 3.1. *Необходимо получить уравнение движения Лоренца как уравнение Лагранжа. Обобщенный потенциал записывается следующим образом:*

$$U^{об} = -\frac{e}{c}(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) + e\Phi$$

$$L = T - U^{об} = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U^{об}$$

Векторное уравнение Лоренца:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} - \frac{\partial U^{об}}{\partial \dot{\vec{r}}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U^{об}}{\partial \vec{r}}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{об}}{\partial \dot{\vec{r}}} + \frac{\partial U^{об}}{\partial \vec{r}} = 0$$

Обобщенная сила определяется следующим образом:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{об}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial U^{об}}{\partial \vec{r}}$$

Доказательство.

$$\vec{F}_л = -\vec{\nabla}U^{об} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{об}}{\partial \dot{\vec{r}}}$$

$$U^{об} = -\frac{e}{c}(\vec{A}(\vec{r},t) \cdot \dot{\vec{r}}) + e\Phi$$

$$\vec{F}_л = -e\vec{\nabla}\Phi + \frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{A}(\vec{r},t) \cdot \dot{\vec{r}}) - \frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} =$$

$$= \frac{-e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{e}{c}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = e \cdot \vec{\varepsilon} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}} \cdot \vec{H}]$$

Была получена сила Лоренца. ■

Уравнение получается следующим:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{\varepsilon} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}} \cdot \vec{H}]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Обобщенная потенциальная сила определяется как:

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$$

Структура обобщенной потенциальной силы:

$$\tilde{Q}_j = \vec{F}^{об} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{dU^{об}}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} - \frac{\partial U^{об}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^{об}}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial U^{об}}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_j} - \frac{\partial U^{об}}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{об}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U^{об}}{\partial q_j}$$

Помимо потенциальных сил, действую еще и гироскопические силы. Структура обобщенного потенциал в обобщенных координатах записывается как:

$$U^{об} = \sum_{k=1}^{s} U_k((q),t)\dot{q}_k + U^0((q),t)$$

Обобщенный потенциал зависит от обобщенных скоростей линейным образом. Таким образом, общая структура обобщенного потенциала, которая будет входить в функцию Лагранжа как функция обобщенных скоростей, такова:

$$U^{об} = U^{(1)} + U^0$$

Общая структура функции Лагранжа:

$$L = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U^{(1)} - U^0$$

Необходимо получить структуры гироскопических сил в обобщенных координатах:

$$\tilde{Q}_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{об}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U^{об}}{\partial q_j}$$

$$\tilde{Q}_j = -\frac{\partial U^0}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial U_k}{\partial q_j}\dot{q}_k + \frac{d}{dt}U_j((q),t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}U_j + \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial U_j}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\tilde{Q}_j = -\frac{\partial U^0}{\partial q_j} + \frac{\partial U_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial U_j}{\partial q_k} - \frac{\partial U_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k$$

Обобщённый импульс и обобщённая энергия. Законы сохранения

Рассматривается частица в поле потенциальных сил в декартовой системе координат. Функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)$$

Для такой системы проекция импульса на ось x:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

Необходимо определить обобщенный импульс. Рассматривается функция Лагранжа и система с s степеней свободы. Обобщенный импульс:

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$P_j = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_k + a_j - U_j$$

Записывается уравнение Лагранжа через обобщенный импульс:

$$\frac{d}{dt}P_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

В том случае, если функция Лагранжа не зависит от какой-то координаты и диссипативные силы отсутствуют, то:

$$\frac{dP_1}{dt} = 0$$

Если нет диссипаций, то обобщённый импульс, соответствующий циклической координате, является интегралом движения. При наличии диссипативных сил функция Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^0$$

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j = W^d$$

W^d — мощность диссипативных сил.

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} + W^d$$

Пусть функция Лагранжа не зависит от времени и отсутствуют диссипативные силы. В этом случае система обращается в 0.

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

$$H((q),(\dot{q}),t) = H_0$$

Обобщённая энергия и закон сохранения обобщённой энергии

Механическая энергия записывается следующим образом:

$$E = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} + U^{(0)}$$

$$L = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U^{(1)} - U^{0}$$

$$H = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - T^{(2)} - T^{(1)} - T^{(0)} + U^{(1)} + U^{0}$$

Лекция 4. Принцип наименьшего действия

Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона-Остроградского

Пространство обобщенных координат называют пространством конфигураций. Для механической системы с s степенями свободы пространство конфигураций можно рассматривать как координатное пространство с координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Движение механической системы рассматривается в $s+1$ пространстве. При движении механической системы координаты q зависят от времени. Это координатное пространство можно рассматривать как векторное пространство. В каждой точке можно ввести касательный вектор:

$$\dot{\vec{q}}(t) = \frac{d\vec{q}}{dt} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s)$$

Механическая система задается многообразием обобщенных координат и функцией обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s$. Для механической системы функция Лагранжа равна разности кинетической энергии и обобщенно потенциальной энергии. Движение механической системы описывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{q}} = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_s}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$$

Динамика механической систем описывается уравнением Лагранжа по принципу Даламбера.

$$L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

С s степенями свободы в промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ движется по траектории $\vec{\xi}(t)$ в $s+1$ расширенном пространстве, на которой функционал действия S на пространстве кривых, проходящих через точки достигает экстремума (часто, но не всегда минимума):

$$t_0, \vec{q}_0 = \vec{q}(t_0)$$

$$t_1, \vec{q}_1 = \vec{q}(t_1)$$

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\, dt$$

Дифференциал функционала. Необходимое условие экстремума

Математическое условие:

$$\delta S = 0$$

Функционал определяется на бесконечномерном пространстве (пространство кривых). Необходимо найти кривую ξ для функционала на плоскости:

$$\xi = \{t, x : x = x(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$$

$$\Phi(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

Рассматривается следующая кривая:

$$\xi' = \xi + \delta x(t)$$

Приращение функционала записывается следующим образом:

$$\Phi(\xi + \delta x) - \Phi(\xi)$$

Функционал дифференцируем, если приращение функционала представить следующим образом:

$$\Phi(\xi + \delta x) - \Phi(\xi) = \delta\Phi(\delta x) + R((\delta x)^2)$$

$$\delta\Phi(\delta x_1 + \delta x_2) = \delta\Phi(\delta x_1) + \delta\Phi(\delta x_2)$$

$$\delta\Phi(c\delta x) = c\delta\Phi(\delta x)$$

$$\delta x < \varepsilon$$

$$\delta\dot{x} < \varepsilon$$

$$R < c\varepsilon^2$$

Линейный член функционала называется его дифференциалом или вариацией. δx — вариация кривой. Если функционал дифференцируем, то линейная часть его определена однозначно. Необходимо найти дифференциал функционала для системы с одной степенью свободы.

$$\Phi(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$$

$$\Phi(\xi+\delta x)-\Phi(\xi)=\int\limits_{t_0}^{t_1}[L(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)-L(x,\dot{x},t)]dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)dt+R((\delta x)^2)=$$

$$=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Bigg|_{t_0}^{t_1}+\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x dt+R((\delta x)^2)$$

Экстремалью дифференцируемого функционала называется такая кривая, что:

$$\delta\Phi(\delta x)=0 \quad \forall\delta x$$

Теорема 4.1. *Чтобы ξ была экстремалью дифференцируемого функционала определенного на пространстве кривых $x(t)$, проходящих через точки:*

$$t_0, x_0=x(t_0)$$

$$t_1, x_1=x(t_1)$$

необходимо и достаточно, чтобы вдоль кривой выполнялось следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

Лемма, доказательство теоремы

Лемма 4.1. *Если непрерывная функция $f(t)$ такова, что:*

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)f(t)dt=0$$

$$g(t_0)=g(t_1)=0$$

$$f(t)\equiv 0$$

Доказательство.

Дифференциал функционала:

$$d\Phi=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Bigg|_{t_0}^{t_1}+\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x dt$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\delta x(t)dt=0$$

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$$

$$f(t) \equiv 0$$

Вдоль кривой на плоскости:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

■

Необходимо определить функцию Лагранжа как функцию $2s+1$:

$$L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

Теорема 4.2. *Чтобы кривая $\vec{\xi}(t)$ $s+1$ пространства была бы экстрамалью функционала, определенного в пространстве, проходящих через точки:*

$$t_0, \vec{q}_0 = \vec{q}(t_0)$$

$$t_1, \vec{q}_1 = \vec{q}(t_1)$$

Необходимо и достаточно, чтобы вдоль кривой выполнялись уравнения Лагранжна Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \ldots, s$$

Задача на одномерное движение

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Строится функционал:

$$S(\xi) = \frac{m}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{x}^2 dt$$

$$\delta S(\delta x) = 0$$

Это приводит к уравнениям:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} = 0$$

Решение этого уравнения:

$$x(t) = c_1 t + c_0$$

$$\dot{x} = c_1$$

В момент времени t_0:

$$x_0 = c_1 t_0 + c_2$$

В момент времени t_1:

$$x_1 = c_1 t_1 + c_2$$

$$c_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

Таким образом, функционал записывается как:

$$S(\xi) = \frac{m}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{x}^2 dt = \frac{m}{2}\frac{(x_1 - x_0)^2}{t_1 - t_0}$$

$$\frac{m}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}[(\dot{x} + \delta\dot{x})^2 - \dot{x}^2]dt = \frac{m}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} 2\dot{x}\delta\dot{x}dt + \frac{m}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}(\delta\dot{x})^2 dt$$

Свойства принципа наименьшего действия

$$\delta S(\delta\vec{q}) = 0$$

Уравнение Лагранжа будет одним и тем же не для одной функции, а для целого класса функций, отличающихся следующим образом:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

Пусть есть функция Лагранжа L', которая зависит от тех же самых координат и отличается от функции Лагранжа L на полную производную по времени от произвольной функции координат:

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{dF(\vec{q}, t)}{dt}$$

$$\delta S' = \delta S + \delta\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{dF(\vec{q}, t)}{dt}dt = \delta S + \frac{\partial F}{\partial\vec{q}}\delta\vec{q}(t)\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

$$L' = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) + c\dot{x}\sin\, x$$

$$L' = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) + at^2$$

Лекция 5. Одномерное движение

Интегрирование уравнений Лагранжа второго рода

Пусть есть механическая система с s свободными степенями. Высшее производное, которое входит в уравнение Лагранжа — обобщенные координаты $\ddot{q}_j$. Обратная задача механики состоит в том, чтобы найти решение уравнения движения как функцию координат и заданных в начальных условиях. Предполагается, что систему s дифференциальных уравнений Лагранжа можно представить частично в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} f_k((q),(\dot{q}),t) = 0$$
$$f_k((q),(\dot{q}),t) = c_k \quad k = 1,\ldots,s$$

Первым интегралом движения называю функции обобщенных скоростей, координат и времени, которые на уравнениях движения обращаются в константу. Первые интегралы уравнения движения называются независимыми в том случае, если из этой системы можно выразить каждую скорость.

$$det\left|\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j}\right| \neq 0$$

$$\frac{d}{dt} F_j((q),t,(c)) = 0$$
$$F_j((q),t,(c)) = \tilde{c}_j$$

Предполагается, что функции независимы:

$$det\left|\frac{\partial F_j}{\partial q_k}\right| \neq 0$$

Вторые интегралы уравнения движения — это функции обобщенных координат и времени, зависит от константы на уравнениях движения.

Определение 5.1. *Интеграл движения — это функция $((q),(\dot{q}),t)$, сохраняющая своё значение при движении системы.*

Если вторые интегралы движения независимы, то:

$$q_i = q_i(t,(c),(\tilde{c})) \quad i = 1,\ldots,s$$

Если известны системы, которые описываются s степенями свободы в пространстве конфигураций, s независимых первых интегралов движения и s независимых вторых интегралов движения, то известно и решение задачи в виде таблицы.

Механическая система с одной степенью свободы. Интегрирование уравнений движения

Общий вид функции Лагранжа записывается как:

$$L=\frac{a(q,t)}{2}\dot{q}^2-U(q,t)$$

Пример 5.1. *Пусть функция Лагранжа имеет следующий вид:*

$$L=\frac{a(t)}{2}\dot{q}^2-U(t)\quad a(t)>0$$

q *— координата циклическая, не входит в функцию Лагранжа.*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$$

Следовательно, первый интеграл движения:

$$a(t)\dot{q}=c$$

Второй интеграл движения записывается следующим образом:

$$a(t)=\int\frac{c}{a(t)}dt+\tilde{c}$$

Пример 5.2. *Пусть система описывается функцией Лагранжа:*

$$L=\frac{a(q)}{2}\dot{q}^2-U(q)$$

Функция Лагранжа не зависит от времени, поэтому сохраняется обобщенная энергия. Обобщенная энергия:

$$H=\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L=\frac{a(q)\dot{q}^2}{2}+U(q)$$

$$\frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

Первый интеграл уравнения движения записывается как:

$$H_0=\frac{a(q)\dot{q}^2}{2}+U(q)=c$$

Второй интеграл уравнения движения находится следующим образом:

$$\frac{dq}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{a(q)}(H_0-U(q))}$$

$$\pm\int\frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a(q)}(H_0-U(q))}}=t+\tilde{c}$$

Задача интегрируется в квадратурах при произвольных коэффициентах.

Одномерное движение. Доступные области движения

Допустимые области движения по координате q в пространстве конфигураций существенным образом определяются потенциальной энергией и начальным значением H_0. Движение возможно в тех областях, когда:

$$\frac{a(q)\dot{q}^2}{2} = H_0 - U(q) \geqslant 0$$

$$a(q) = m$$

$$q = x$$

Необходимо исследовать движение частиц с различными начальными данными, которые описываются функцией Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

Интеграл энергии имеет следующий вид:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E_0$$

$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = E$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E_0 - U(x)$$

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} = t + \tilde{c}$$

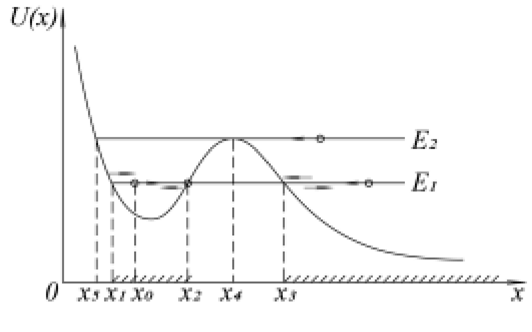

Рис. 5.1. Потенциальная энергия в пространстве x

$$x_1(E_0) \to E_0 - U(x) = 0$$

Очевидно, что в областях 2 и 4 частица находиться не может, поскольку в этих областях $U(x) > E_0$. Эти области называются классически недоступными областями. Эти области определяются как потенциальной энергией, так и заданными начальными условиями. Пусть частица находится в начальный момент времени в области й и имеет координату x_0. Тогда не зависимо от скорости частицы $\dot{x}_0 \gtrless 0$, то в этом случае частица при любой начальной скорости уйдет на $-\infty$. То же самое происходит и в области 5. Таким образом в областях 1 и 5 инфинитное движение в одну сторону.

В любой области:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = f(x)$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$$

Движение в области 3 происходит в ограниченной области, поэтому движение называется финитным. Движение носит колебательный характер. Время движения от точки x_2 до точки x_3:

$$t_{x_2 \to x_3} = t_{x_3 \to x_2}$$

Период колебаний частицы:

$$T(E_i) = 2t_{x_2 \to x_3}$$

$$T(E_0) = 2\int\limits_{x_2(E_0)}^{x_3(E_0)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}}$$

Рассматривается движение вблизи особых точек потенциальной энергии. Пусть энергия частица E_0. Начальная координата частицы x_0 находится справа от координаты x_1. Рассматривается движение в окрестности точки x_1.

$$\Delta x = x(t) - x_1 \sim \varepsilon$$

$$U(x) = U(x_1) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_1}(x - x_1)$$

$$F = -\left.\frac{-dU}{dx}\right|_{x=x_1}$$

$$\pm\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x - x_1}} = \sqrt{\frac{2F}{m}}(t - t_0)$$

$$\pm 2\sqrt{x(t) - x_1}\Big|_{x_0}^{x_1} = \sqrt{\frac{2F}{m}}t - t_0$$

$$\sqrt{x(t)-x_1}-\sqrt{x_0-x_1}=\pm\sqrt{\frac{F}{2m}}t-t_0$$

$$\frac{\dot{x}}{2\sqrt{x-x_1}}=\pm\sqrt{\frac{F}{2m}}$$

Начальная точка находится в точке остановки:

$$x_0=x_1$$

$$x(t)-x_0=\frac{F}{2m}(t-t_0)^2$$

Отрезок времени, которое частица тратит на прохождение малого участка пути, записывается следующим образом:

$$\Delta t\sim\sqrt{\frac{2m}{F}s}\sim s^{\frac{1}{2}}$$

Вдали от точки остановки:

$$\Delta t\sim s$$

Вблизи точки остановки время замедляется.

Пусть точка остановки попадает на максимум потенциального барьера. Рассматривается движение вблизи этой точки в малой окрестности.

$$U(x)=U(x_1)+\frac{1}{2}U''(x_1)(x-x_1)^2$$

$$U''(x_1)<0$$

Квадратура движения определяется следующей формулой:

$$\int\limits_{x_0}^{x}-\frac{dx}{(x-x_1)}=\pm a(t-t_0)$$

$$a=\sqrt{\frac{-2}{m}\frac{U''(x_1)}{2}}>0$$

$$\ln\left|\frac{x(t)-x_1}{x_0-x_1}\right|=\pm a(t-t_0)$$

Решение выглядит следующим образом:

$$x(t)-x_1=(x_0-x_1)e^{\pm a(t-t_0)}$$

$$x_0>x_1,\quad \dot{x}_0>0$$

$$x_0 > x_1, \quad \dot{x}_0 < 0$$

$$x_0 < x_1, \quad \dot{x}_0 > 0$$

$$x_0 < x_1, \quad \dot{x}_0 < 0$$

$$\dot{x}_0 = \pm a(x_0 - x_1)$$

В случаях 2 и 3:

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1)e^{-a(t-t_0)}$$

В случаях 1 и 4:

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1)e^{a(t-t_0)}$$

Гармонический осциллятор

Гармоническим осциллятором называется система, которая описывается следующей функцией Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \quad k, m > 0$$

Движение частицы возможно с любой положительной энергией: $E_0 \geqslant 0$. Первый интеграл движения записывается следующим образом:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E_0 - \frac{kx^2}{2}$$

$$E_0 = \frac{kx^2}{2}$$

$$x_{\pm 1}(E_0) = \pm\sqrt{\frac{2E_0}{k}} = \pm b$$

$$\pm\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - \frac{kx^2}{2})}} = t - t_0$$

$$\pm\sqrt{\frac{m}{k}}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = t - t_0$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos\frac{x}{b}\Bigg|_{x_0}^{x(t)} = t - t_0$$

$$\arccos\frac{x_0}{b} = \alpha$$

Таким образом, движение гармонического осциллятора:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)+\alpha\right]$$

Период колебаний гармонического осциллятора:

$$T(E_0) = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Лекция 6. Движение в центрально-симметричном поле

Движение точечной частицы в центральном поле. Плоскость Лапласа

Центральное поле — поле, в котором сила, действующая на движущуюся в нём частицу, направлена вдоль линии, соединяющей силовой центр и частицу, и зависит от расстояния между ними.

Потенциальная энергия частицы массы m, которая находится в данном поле, зависит только от расстояния от центра поля. $U(r)$ — потенциальная энергия.

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

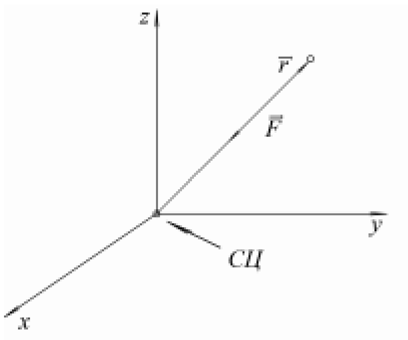

Рис. 6.1. Центральное поле

Записывается функция Лагранжа для такой частицы:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r)$$

Первый интеграл уравнения движения:

$$\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r) = E_0$$

Уравнение движения записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Чтобы найти решение задачи , необходимо найти 3 независимых первых интегралов движения и 3 независимых вторых интегралов движения.

$$[\vec{r}\cdot m\ddot{\vec{r}}] = \left[\vec{r}\cdot f(r)\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0$$

$$[\vec{r}\cdot m\ddot{\vec{r}}] = 0$$

Импульс частицы:

$$\vec{P} = m\dot{\vec{r}}$$

Момент импульса движения определяется следующим образом:

$$\vec{L} = [\vec{r}\cdot\vec{P}] = [\vec{r}\cdot m\dot{\vec{r}}]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

При движении частицы в центрально симметричном поле момент импульса частицы относительно центра поля определяется постоянным вектором.

$$\vec{L} = \vec{L}_0$$

$$\vec{L} = m\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = m(y\dot{z}-z\dot{y})\vec{e}_x + m(z\dot{x}-x\dot{z})\vec{e}_y + m(x\dot{y}-y\dot{x})\vec{e}_z$$

$$\vec{L} = \vec{L}_0 \rightarrow \begin{cases} m(y\dot{z}-z\dot{y}) = L_{x0} \\ m(z\dot{x}-x\dot{z}) = L_{y0} \\ m(x\dot{y}-y\dot{x}) = L_{z0} \end{cases}$$

$$m[\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}] = 0$$

$$m[\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}]\cdot\vec{r} = 0$$

Скалярное произведение:

$$L_x\cdot\dot{x} + L_y\cdot\dot{y} + L_z\cdot\dot{z} = 0$$

Из этого равенства следует, что не все компоненты момента импульса являются независимыми относительно скоростей.

$$x = x_1, \quad y = x_2 \quad z = x_3$$

$$det\left|\frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}_j}\right| = 0$$

Из этих 3 интегралов движения независимыми могут быть только 2. В качестве независимых первых интегралов движения выбираются энергия и x, y компоненты.

$$\vec{L}_0 \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

$$\vec{L}_0 \cdot \vec{r} = 0$$

$$L_{x0} \cdot x + L_{y0} \cdot y + L_{z0} \cdot z = 0$$

$$\vec{L} = m[\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}] = 2m\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{L}_0$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r} \cdot d\vec{r}]$$

Необходимо найти 2 вторых интеграла движения. В центрально симметричном поле движение частицы происходит в неподвижной плоскости, проходящая через центр поля. Вводятся полярные координаты: ρ, φ.

$$L_0 = \sqrt{L_{x0}^2 + L_{y0}^2 + L_{z0}^2}$$

Записывается уравнение сохранения энергии и момента в этой системе координат:

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + U(\rho) = E_0$$

$$\vec{L}_0 = L_0\vec{e}_z$$

$$m\rho^2\dot{\varphi} = L_0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2}$$

В радиальном направлении:

$$\frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + U(\rho) + \frac{L_0^2}{2m\rho^2} = E_0$$

$$0 \leqslant \rho < \infty$$

Эффективная потенциальная энергия зависит от параметров истинной потенциальной энергии и момента импульса $U_{eff}(\rho, L_0)$. Пусть $\vec{L}_0 = 0$.

$$\vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\varphi} = 0$$

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E_0 - U(\rho) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2} \geqslant 0$$

Область движения:

$$E_0 - U(\rho) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2} = 0$$

$$\dot{\rho}(\rho_k) = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m\rho_k^2}$$

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U(\rho) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2}\right)}} = t + c_5$$

Это уравнение определяет движение в радиальном направлении. Необходимо найти последний второй интеграл движения:

$$\int \frac{L_0}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U(\rho) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2}\right)}} = \varphi + c_6$$

Это уравнение определяет уравнение траектории. Вместо этого уравнения можно использовать следующее:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_0}{m\rho^2(t)}$$

Исследование траектории

Границы области движения в радиальном направлении существенным образом определяется энергией и моментом импульса:

$$E_0 - U(\rho) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2} = 0$$

$$U_{eff} = U(\rho) + \frac{L_0^2}{2m^2}$$

$$\rho_{min} \to \rho_{max} \to \rho_{min}$$

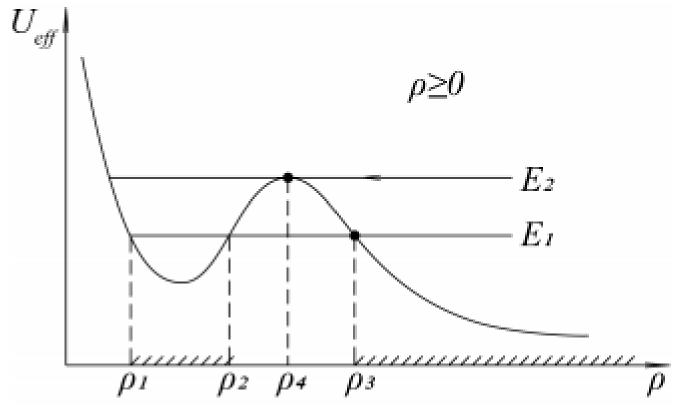

Рис. 6.2. Исследование траектории

$$\Delta\varphi = 2\int\limits_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{L_0}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{eff})}}$$

$$\Delta\varphi(E_0, L_0) = 2\pi\frac{k}{n}$$

$$U(r) = ar^2$$

$$U(r) = \frac{a}{r}$$

$$\rho \to 0 \quad U(\rho) \to -\infty$$

Основное уравнение, которое определяет движение в радиальном направлении:

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E_0 - U(\rho) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2} > 0$$

$$E_0\rho^2\Big|_{\rho\to 0} > U(\rho)\rho^2\Big|_{\rho\to 0} + \frac{L_0^2}{2m}$$

$$0 > U(\rho)\rho^2 + \frac{L_0^2}{2m}$$

Пусть поле притяжения аппроксимируются при малых ρ функций.

$$U(\rho)_{\rho\to 0} \sim -\frac{a}{\rho^\nu}$$

Тогда центр поля достижим для частицы при значениях:

$$\nu = 2 \quad a > \frac{L_0^2}{2m}$$

$$U(r) = -\frac{a}{r} - \frac{b}{r^2}, \quad a, l > 0$$

$$U_{eff} = -\frac{a}{\rho} - \frac{b}{\rho^3} + \frac{L_0^2}{2m\rho^2}$$

$$L_0^4 > 16m^2ab$$

Лекция 7. Задача Кеплера

Качественное исследование траектории движения точечной частицы в центрально-симметричном поле

В центрально симметричном поле движение частицы проходит в плоскости, нормаль которой направлена по моменту импульса частицы, которая является интегралом движения. Используются полярные координаты для описания движения частицы. Движение в радиальном направлении:

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E_0 - U_{eff}(\rho, L_0)$$

$$U_{eff} = U(\rho) + \frac{L_0^2}{2m\rho^2}$$

$$\dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{eff})}$$

Уравнение траектории частицы:

$$\varphi + c = \pm\int \frac{L_0}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{eff})}}$$

Рассматривается классификация траектории в поле:

$$U(r) = -\frac{a}{b} - \frac{b}{r^3}, \quad a, b > 0$$

$$U_{eff} = -\frac{a}{\rho} - \frac{b}{\rho^3} + \frac{L_0^2}{2m\rho^2}$$

Рассматривается асимптотика:

$$\rho \to 0 \quad U_{eff} \to -\infty$$

$$\rho \to \infty \quad U_{eff} \to -0$$

$$U'_{eff} = \frac{a}{\rho^2} + \frac{3b}{\rho^4} - \frac{L_0^2}{m\rho^3} = 0$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2ma}\left(L_0^2 \mp \sqrt{L_0^4 - 12m^2ab}\right)$$

Две точки экстремума: ρ_1, ρ_2. ρ_1 ближе к центру, чем ρ_2. При $L_0^4 < 12m^2ab$ точки экстремума попадают в комплексную область, и эффективная энергия не имеет точки экстремума.

При $12m^2ab < L_0^4 < 16m^2ab$ можно посчитать вторую производную и показать, что в точке ρ_1 энергия достигает максимума, а в точке ρ_2 — минимума.

Рассматривается движение частиц, моменты импульса которых удовлетворяют условию:

$$L_0^4 > 16m^2ab$$

Полярную ось необходимо направить в наиболее близкую точку траектории вдоль оси x. Если энергия частиц близка к максимуму потенциального барьера, то скорость точки в радиальном направлении будет уменьшаться:

$$E_0 = U_{effmax} - \delta$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{k}{m}$$

При $E_0 = U_{eff\ min}$ траектория — окружность. Движение устойчивое. Траектории симметричны относительно π центра.

Пусть энергия частицы $E_0 = U_m$. U_m — U_{eff} достигает максимума. Радиальная скорость отрицательна. Движение происходит в центре поля. Движение частицы в радиальном направлении при приближении к точки ρ_1 определяется той же формулой, что и одномерное движение, то можно сказать, что частица будет достигать окружности радиуса ρ_1 за бесконечно большое время. В данном случае частица может находиться не только справа ρ_1, но и слева. При $E_0 = U_m$ и $\rho_0 = \rho_1$ движение будет происходить по окружности.

Пусть $E_0 = U_m + \delta$. Начальная скорость будет отрицательной. Радиальная скорость частицы уменьшается.

Пусть $E_0 > U_m$, то происходит падение частицы в центр поля.

Задача Кеплера. Траектории частицы

Под задачей Кеплера подразумевается следующее поле:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$\alpha = GmM$$

$$\alpha = e_1e_2$$

$$\varphi + c = \int \frac{L_0}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 \pm \frac{\alpha_0}{\rho}\right) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2}}} =$$

$$= \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{\rho} \mp \frac{1}{P}\right)^2}}$$

$$P = \frac{L_0^2}{m\alpha_0}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}}$$

$$\varphi + c = -\int \frac{d\left(\frac{1}{\rho} \mp \frac{1}{P}\right)}{\sqrt{\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{\rho} \mp \frac{1}{P}\right)^2}}$$

$$\varphi + c = \arccos \frac{\frac{1}{\rho} \mp \frac{1}{P}}{\frac{e}{p}}$$

Уравнение конического сечения записывается следующим образом:

$$\rho = \frac{P}{1 + e\cos(\varphi + c)}$$

P — параметр орбиты, e — эксцентриситет.

Эффективная энергия:

$$U_{eff} = -\frac{\alpha_0}{\rho} + \frac{L_0^2}{2m\rho^2}$$

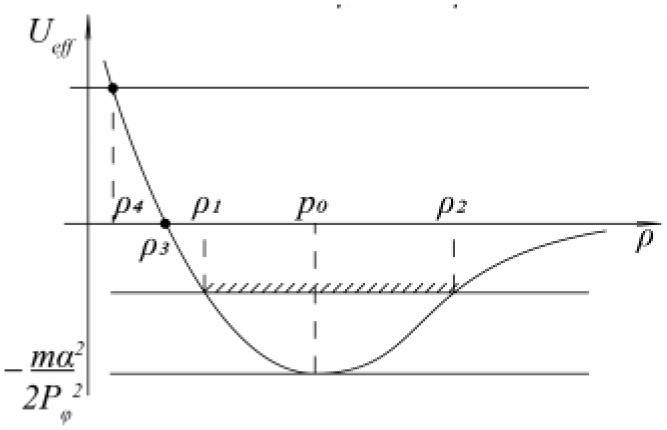

Рис. 7.1. Задача Кеплера

Полярную ось необходимо направить по оси x. Энергия достигает минимума:

$$U'_{eff} = \frac{\alpha_0}{\rho^2} - \frac{L_0^2}{m\rho^3} = 0$$

$$\rho_1 = \frac{L_0^2}{m\alpha_0}$$

$$U_{eff}(\rho) = U_m$$

$$U_m = -\frac{m\alpha^2}{2L_0^2}$$

Пусть $E_0 > 0$ $\dot{\rho} < 0$, уравнение траектории:

$$\rho = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_0L_0^2}{m\alpha^2}}, \quad e > 1$$

Таким образом, траектория — гипербола.

Пусть $E_0 < 0$ и $e < 1$, то траектория — эллипс.

$$\rho_{min} = \frac{P}{1+e}$$

$$\rho_{max} = \frac{P}{1-e}$$

Пусть $E_0 = \frac{-m\alpha^2}{L_0^2}$ и $e = 0$, то траектория — окружность.

Траектория частицы при инфинитном движении в поле отталкивания

Рассматривается частица той же самой массы и момент импульса тот же самый, но в поле отталкивания.

$$U_{eff} = \frac{\alpha_0}{\rho} + \frac{L_0^2}{2m\rho^2}$$

Уравнение траектории:

$$\rho = \frac{P}{-1 + e\cos(\varphi + c)}$$

Полярная ось направлена из центра поля в минимальную точку орбиты.

$$E_0 > 1$$

Законы Кеплера

Пусть большая полуось эллипса — a, а малая полуось эллипса — b. Из аналитической геометрии известно:

$$a = \frac{P}{1-e^2}$$

$$b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$a = \frac{\frac{L_0^2}{m|\alpha|}}{-\frac{2E_0L_0^2}{m|\alpha|^2}} = -\frac{\alpha}{2|E_0|}$$

Большая полуось эллипса зависит только от энергии частицы, не от момента частицы. Энергия зависит только от радиуса орбиты. Рассматривается второй закон Кеплера. Записывается закон сохранения момента импульса частицы в центрально симметричном поле:

$$L_0 = 2m\frac{dS}{dt}$$

$$L_0 \cdot T = 2m\pi ab$$

$$L_0^2 T^2 = 4m^2\pi^2 a^2 b^2$$

$$b^2 = aP$$

$$L_0^2 T^2 = 2m^2\pi^2 a^3 \frac{L_0^2}{m|\alpha|}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{|\alpha|}a^3$$

Векторный интеграл Лапласа

В поле отталкивания и притяжения существует еще один важнейший интеграл движения, который сохраняется только в таком поле:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Этот интеграл движения называют векторным интегралом Лапласа. Необходимо найти направление и доказать, что векторная величина $\vec{J}$ является интегралом движения:

$$\vec{J} = [\dot{\vec{r}} \cdot \vec{L}] - \frac{\alpha}{r}\vec{r}$$

Уравнение движения записывается следующим образом:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{\alpha\vec{r}}{r^3}$$

$$\dot{\vec{J}} = [\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{L}] + [\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{L}}] - \frac{\alpha\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\alpha\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3} = 0$$

Лекция 8. Аддитивные интегралы движения

Векторный интеграл Лапласа

Теорема 8.1. *При движении частицы массы m в центрально симметричном поле*

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$\vec{J} = [\dot{\vec{r}} \cdot \vec{L}] - \frac{\alpha\vec{r}}{r}$$

Полная производная по времени обращается в 0:

$$\dot{\vec{J}} = 0$$

Необходимо доказать это выражение.

Доказательство.

Функция Лагранжа:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha\vec{r}}{r^2}$$

$$\dot{\vec{J}} = [\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{L}] + [\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{L}}] - \frac{\alpha\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\alpha\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{r^3}$$

Момент импульса сохраняется относительно центра поля.

$$[\ddot{\vec{r}} \cdot m[\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}]] = \vec{r}(m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(m\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) = -\frac{\alpha r(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{r^3} + \frac{\alpha\dot{\vec{r}}}{r}$$

Таким образом, доказано, что на уравнениях движения в данном поле величина полная производная по времени обращается в 0.

$$\dot{\vec{J}} = 0, \quad \vec{J} = \vec{J}_0$$

■

Частица движется в плоскости, нормаль которой направлена по сохраняющемуся вектору момента импульса.

$$\left([\dot{\vec{r}} \cdot \vec{L}] - \frac{\alpha\vec{r}}{r}\right) \cdot \vec{L}_0 = 0$$

$$(\vec{J} \cdot \vec{L}) = 0$$

$\vec{J}$ лежит в плоскости движения частиц. Необходимо посчитать $\vec{J}$ в тот момент времени, когда частица находится на минимальном расстоянии от центра поля. Существует три типа траекторий: эллипс, гипербола и парабола. Во всех этих случаях:

$$\rho_{min} = \frac{P}{1+e}$$

$$\vec{J} = [\dot{\vec{r}} \cdot \vec{L}] - \frac{\alpha \vec{r}}{r}$$

Первый член:

$$[\vec{r} \cdot \vec{L}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \rho_{min}\dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{vmatrix} = \rho_{min}\dot{\varphi} L_0 \vec{e}_x$$

Второй член:

$$\vec{J} \parallel \vec{e}_x$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m\rho_{min}^2}$$

$$\rho_{min}\frac{L_0^2}{m\rho_{min}^2} = \frac{L_0^2 m\alpha}{mL_0^2}(1+e)$$

$$\rho_{min} = \frac{P}{1+e}$$

$$\vec{J} = (\alpha(1+e) - \alpha)\vec{e}_x = \alpha e \vec{e}_x$$

α — интенсивность взаимодействия.

Функция Лагранжа замкнутой системы N материальных точек. Аддитивные интегралы движения

Определение 8.1. *Системой материальных точек называют совокупность тел, каждое из которых можно считать материальной точкой.*

Определение 8.2. *Замкнутой системой — систему, в которой взаимодействием с прочими телами можно пренебречь.*

Если физическую систему можно разбить в какой-то момент времени на сумму не взаимодействующих частей, то величина, равная сумме этих частей, называется аддитивным интегралом движения. Для каждой точки можно найти величину, которая описывает физическую систему.

Определяется функция Лагранжа когда система замкнутая:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U_{in}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

Присутствует взаимодействие между точками. Пусть наиболее существенны парные взаимодействия между i, j, и это взаимодействие подчиняется 3 закону Ньютона. U_{in} — внутренняя энергия.

$$U_{in} = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{N} U_{ij} \left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \right)$$

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{\partial U_{in}}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\vec{F}_{ji} = -\frac{\partial U_{in}}{\partial \vec{r}_j}$$

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ji}$$

Если есть внешнее поле, то потенциальная энергия будет состоять из 2 частей:

$$U^{out}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) + U_{in}$$

Пусть есть система из N материальных точек. Необходимо рассмотреть возможные преобразования могут возникать в этой системе:

1) сдвиг всей системы материальных точек на постоянный $\vec{\varepsilon}$;

2) поворот механической системы вокруг оси. Параметр преобразования — $\vec{\delta\varphi} = \delta\varphi\vec{n}$;

3) сдвиг по времени:
$$t' = t + \tau$$

Преобразование функции Лагранжа при поворотах

Общее преобразование:

$$\delta L = L(\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i + \delta\dot{\vec{r}}_i, t + \tau) - L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\dot{\vec{r}}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}\tau$$

В результате таких движений функция Лагранжа не изменилась. Первое преобразование:

$$\vec{\delta\varphi} = 0, \quad \tau = 0$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i + \vec{\varepsilon}$$

Получается следующее приращение функции Лагранжа в результате такого движения в системе:

$$\partial L = \vec{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\delta L = 0 \to \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = 0$$

$$\vec{P}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0$$

$\vec{P}$ — полный импульс системы материальных точек. Это равенство представляет 3 первых интеграла движения. В этой системе сохраняются 3 компонент импульса. Рассматриваются систему отсчета s и s'. Системы связаны следующим образом:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}'_i + \vec{V}$$

Считаются импульсы:

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Получается закон преобразования импульса:

$$\vec{P} = \vec{P}' + M\vec{V}$$

Необходимо найти систему, где $\vec{P}' = 0$.

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_{i0}}{M} = \vec{V}_0$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \vec{V}_0 t + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_{i0}$$

Эти соотношения можно рассматривать как второй интеграл движения. Замкнутая механическая система имеет 3 первых интеграла движения и 3 вторых интеграла движения.

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0$$

Рассматривается преобразование, которое характеризуется бесконечно малым поворотом системы:

$$\vec{\delta\varphi} = \delta\varphi\vec{n}, \quad \tau = 0, \quad \vec{\varepsilon} = 0$$

$$\delta\vec{r}_i = [\vec{\delta\varphi}\cdot\vec{r}_i]$$

$$\delta\dot{\vec{r}}_i = [\vec{\delta\varphi}\cdot\dot{\vec{r}}_i]$$

Приращение функции Лагранжа определяется следующим образом:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_i}\cdot[\vec{\delta\varphi}\cdot\vec{r}_i] + \frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}[\vec{\delta\varphi}\cdot\dot{\vec{r}}_i]\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i} = \vec{P}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_i} = \dot{\vec{P}}_i$$

$$\delta L = \vec{\delta\varphi}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i\cdot\vec{P}_i]$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i\cdot m_i\dot{\vec{r}}_i] \equiv \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i\cdot\vec{P}_i]$$

Таким образом, первый интеграл движения:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\vec{L} = \vec{L}_0$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{a}$$

Момент импульса:

$$\vec{L} = \vec{L}' + M[\vec{a}\dot{V}] = \vec{L}' + [\vec{a} \cdot \vec{P}]$$

Рассматривается преобразование момента:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i' + \vec{V}$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + M[\vec{R} \cdot \vec{V}]$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{R} \cdot \vec{P}]$$

Рассматривается следующее преобразование:

$$\delta\vec{\varphi} = 0, \quad \vec{\varepsilon} = 0, \quad \tau \neq 0$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial t}\tau$$

$$\frac{dL}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - L} + \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\dot{\vec{r}}_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\right) \cdot \vec{r}_i\right)$$

$$\frac{d}{dt}H = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$H = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i - L$$

Функция Лагранжа не зависит от времени:

$$\delta L = 0 \to \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Получается закон сохранения механической энергии.

$$\frac{dH}{dt} = 0 \to H = H_0$$

Рассматривается преобразование функции Лагранжа от одной системы в другую, которая движется относительно первой с постоянной скоростью $\vec{V}$:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{V}t$$

$$L' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i'^2 + \vec{V}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i' + \frac{M}{2}\vec{V}^2 + U_{in}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{V}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i' + \frac{M\vec{V}^2}{2}t$$

В результате такого преобразования (преобразование Галилея) функция Лагранжа не изменилась.

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + A(\vec{\delta\varphi})\vec{r}_i + \vec{} + \vec{V}t$$

$$t' = t + \tau$$

Лекция 9. Теорема Нётер

Аддитивные интегралы движения. Связь законов сохранения энергии, импульса и момента импульса со свойствами симметрии пространства и времени. Теорема Нетер

В замкнутой системе присутствует взаимодействие между точками. Пусть наиболее существенны парные взаимодействия между i, j, и это взаимодействие подчиняется 3 закону Ньютона. Было показано, что радиус векторов:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{\varepsilon}$$

Это приводит к тому, что функция Лагранжа не меняется, сохраняется полный импульс:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \vec{P}_0$$

Это означает, что есть 3 первых интеграла движения. Решение записывается в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \vec{P}_0 t + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{i0}$$

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0$$

$$\vec{R}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Замкнутая система также имеет 3 вторых интеграла движения. Рассматривается преобразование поворотов на бесконечно малый угол $\vec{\delta\varphi}$. При таких поворотах функция Лагранжа также не меняется. Из этого вытекает закон сохранения момента импульса:

$$\vec{\delta\varphi} \to \delta L = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \vec{L} = \vec{L}_0$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \cdot m \dot{\vec{r}}_i] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \cdot \vec{P}_i]$$

Момент импульса сохраняется относительно любой точки пространства. Любые направления — эквивалентны. Аддитивные интегралы движения позволяют установить свойства пространства времени. Рассматривается следующее преобразование:

$$t' = t + \tau$$

Приращение функции Лагранжа не меняется:

$$\delta L = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \to E = E_0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i}{2} + U^{in}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = E_0$$

В целом замкнутая система имеет 10 интегралов движения: 7 первых и 3 вторых. Пусть есть система отсчета s и s', которая движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ относительно системы s. Было показано, что функция Лагранжа инвариантна относительно преобразования.

$$\vec{r}_i = A(\vec{\delta\varphi})\vec{r}_i' + \vec{\varepsilon} + \vec{V}_0 t'$$

$$t = t' + \tau$$

A — матрица поворота. Замкнутая система в s и s' системах будет иметь одни и те же динамические уравнения. Ни один из параметров не входит в функцию Лагранжа.

Предполагается, что система не являются замкнутой. Внешние тела не входят в систему и взаимодействуют с телами системы, создают внешнее поле, которое добавляется в потенциальную энергию.

$$U^{tot} = U^{out}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) + U^{in}$$

Это приведет к следующим изменениям:

$$P_x = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i = P_{x_0}$$

$$P_y = P_{y_0}$$

При сдвигах в x и y направлениях свойства системы не меняются, так как они не входят в потенциальную энергию, и компоненты импульса сохраняются.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U^{out}}{\partial \vec{r}_i}$$

Рассматривается момент импульса. Момент импульса сохраняется в том случае, если механическая система обладает некой вращательной симметрией.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i \cdot \frac{\partial U^{out}}{\partial \vec{r}_i}\right]$$

В центрально симметричном поле сохраняются все 3 компоненты момента импульса, но только относительно центра поля. В свободной системе момент импульса сохраняется относительно любой точки пространства. Рассматривается энергия:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial U^{out}}{\partial t}$$

$$E = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\dot{\vec{r}}_i^2}{2} + U^{out} + U^{in}$$

Энергия системы будет сохраняться, если внешнее поле стационарно.

Механическое подобие

Предполагается, что функция Лагранжа подвергается некому преобразованию, и в результате функция Лагранжа изменяется на постоянный множитель, то ясно, что уравнения движения останется тем же самым.

$$L' = aL$$

Пусть система имеет потенциальную энергию такую, что потенциальная энергия является однородной функцией декартовых координат системы точек. Степень однородности — k.

$$U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

$$U(\alpha\vec{r}_1, \ldots, \alpha\vec{r}_N) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

Проводится преобразование функции Лагранжа:

$$\vec{r}_i' \to \alpha\vec{r}_i \quad t' \to \beta t$$

$$T' = \frac{\alpha^2}{\beta^2}T$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k$$

$$\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

$$L' = \alpha^k L$$

Таким образом, уравнение Лагранжа в штрихованных координатах и в штрихованном времени не изменяется.

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}$$

Рассматриваются камни, падающие на землю:

$$\left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{l'}{l}$$

Рассматривается гармонический осциллятор:

$$\frac{t'}{t} = c$$

Период колебаний не зависит от амплитуды колебаний. Рассматривается движение частицы в гравитационном поле:

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Также можно получить соотношение импульсов:

$$\frac{P'}{P} \sim \frac{l'}{l}\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\frac{E'}{E} \sim \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}$$

$$\frac{L'}{L} \sim \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}$$

Теорема о вириале сил

Рассматривается система с N материальными точками. Эта система совершает движение в ограниченной области физического пространства. Определяется величина G:

$$G(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot m\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \vec{P}_i$$

$$\dot{\vec{P}}_i = \vec{F}_i$$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^{N} [(\dot{\vec{r}}_i \cdot m_i \dot{\vec{r}}_i) + (\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{P}}_i)] = 2T + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i)$$

$$\overline{f} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{G(\tau)-G(0)}{\tau} = 2\overline{T} + \overline{\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\cdot\vec{F}_i)}$$

Таким образом получается выражение для теоремы о вириале сил:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\cdot\vec{F}_i)}$$

Пусть внешнее поле потенциальное.

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\cdot\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i})}$$

Пусть функция U является однородной функцией декартовых координат со степенью однородности k:

$$\overline{T} = \frac{k}{2}\overline{U}$$

Пусть потенциальная энергия консервативна и не зависит от времени:

$$T+U=E=E_0$$

$$\overline{T}+\overline{U}=E_0$$

$$\overline{U} = \frac{2}{2+k}E_0$$

$$\overline{T} = \frac{k}{k+2}E_0$$

Задача двух тел

Пусть в системе отсчета s радиус вектор первой точки $\vec{r}_1$, второй точки — $\vec{r}_2$. Взаимодействие между точками подчиняется третьему закону Ньютона.

$$U(\vec{r}_2-\vec{r}_1||)$$

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}$$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

Уравнение движения в системе s:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}$$

Чтобы решить задачу, необходимо найти 12 интегралов движения: 6 первых и 6 вторых. Известно 10 интегралов движения.

$$m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \vec{P}_0$$

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0$$

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_0 = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_{10} + m_2\dot{\vec{r}}_{20}}{M}$$

Вводится система отсчета s' и записывается уравнение движения:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1' = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1'}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2' = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2'}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2'}{M} = 0$$

$$m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0$$

Вводится следующая координата, которая характеризует относительное движение точки 1 относительно точки 2:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2' - \vec{r}_1'$$

$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2(t) = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Таким образом, можно написать общее выражение:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Лекция 10. Задача двух тел

Задача двух тел. Продолжение. Решение в квадратурах

Пусть в системе отсчета s радиус вектор первой точки $\vec{r}_1$, второй точки — $\vec{r}_2$. Взаимодействие между точками подчиняется третьему закону Ньютона. Решение этой задачи можно получить в виде квадратур.

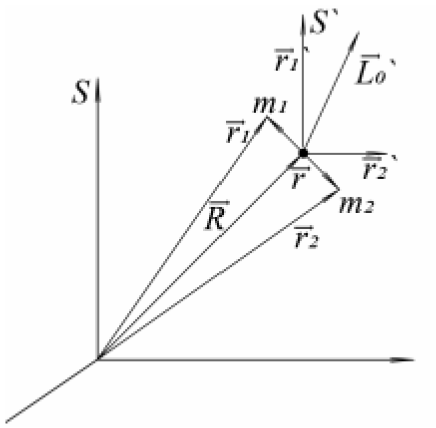

Рис. 10.1. Задача двух тел

Вводится система центра масс s'.

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2' - \vec{r}_1'$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1^{\,\prime}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2^{\,\prime}$$

Если записать уравнение Лагранжа и характеризовать в качестве координаты r, то уравнение Лагранжа сводится к одному и тому же уравнению:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}}$$

Приведенная масса:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Поскольку в пространстве конфигураций система имеет 6 степеней свободы и, чтобы получить решение в виде квадратур, необходимо предъявить 6 независимых первых интегралов движения и 6 независимых вторых интегралов движения. Известно 10 интегралов движения.

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$M\dot{\vec{R}} = M\vec{V}_0 = \vec{P}_0$$

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0$$

Система замкнута, поэтому сохраняется механическая энергия системы.

$$E = \frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2} + E' = \frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1'^{\,2}}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2'^{\,2}}{2} + U(r) = \frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r)$$

$$\frac{\mu\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r) = E_0'$$

Сохраняется момент импульса:

$$\vec{L} = [\vec{R}\cdot\vec{P}] + \vec{L}' = [\vec{R}\cdot\vec{P}] + m_1[\vec{r}_1\cdot\dot{\vec{r}}_1] + m_2[\vec{r}_2\cdot\dot{\vec{r}}_2] = [\vec{R}\cdot\vec{P}] + \mu[\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}]$$

$$\mu[\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}] = \vec{L}_0'$$

Выбираются компоненты: L'_{x0}, L'_{y0}.

$$(L_0'\cdot\vec{r}) = 0$$

$$L'_{x0}x + L'_{y0}y + L'_{z0}z = 0$$

Движение происходит в плоскости:

$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

Первый интеграл движения:

$$t + \tilde{C}_1 = \pm\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_0' - U(r) - \frac{L_0'^2}{2\mu r^2}\right)}}$$

Уравнение траектории:

$$\varphi + \tilde{C}_2 = \pm\int\frac{L_0'}{\mu r^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_0' - U(r) - \frac{L_0'^2}{2\mu r^2}\right)}}$$

Центр подобия находится в центре масс. Решение задачи можно написать следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{r}_1(t) = \vec{R}(t) - \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}(t) \\ \vec{r}_2(t) = \vec{R}(t) + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}(t) \end{cases}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Пусть на систему наложено однородное внешнее поле. Записывается функция Лагранжа:

$$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) + (\vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1) + (\vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2)$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{\partial U^{ext}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_i}$$

$$U^{ext} = -(\vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1) - (\vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2)$$

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$$

$$L = \frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r) + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\cdot\vec{R} + \mu\left(\frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_1}{m_1}\right)\cdot\vec{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}}$$

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \mu\left(\frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_1}{m_1}\right)$$

$$\vec{F}_i = e_i\vec{E}$$

e — напряженность.

$$U(r) = \frac{e_1e_2}{r}$$

В качестве силы:

$$\vec{F}_i = m_i\vec{g}$$

В качестве взаимодействия:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Вдоль внешнего поля импульс не сохраняется.

Задача рассеяния. Упругое рассеяние

Упругое рассеяние частиц — внутреннее состояние частиц не меняется при их столкновениях. Предполагается, что в начальный момент времени есть 2 пучка частиц, которые разделены достаточно большим пространственным интервалом, что означает взаимодействия между ними нет. Частицы каждого пучка имеют одинаковые массы и скорости. Пучки достаточно разряжены. Только одна пара частиц может взаимодействовать.

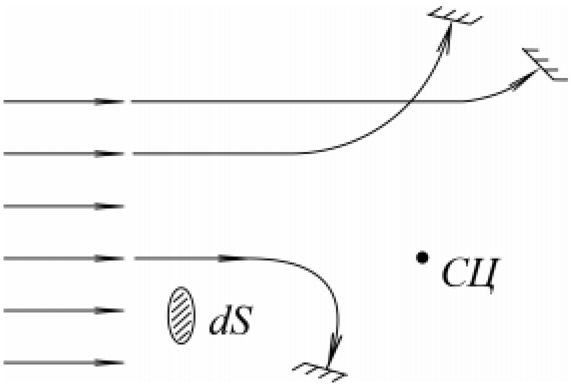

Рис. 10.2. Пучки частиц

Эту задачу можно решить как задачу двух тел. Необходимо определить скорость частиц на бесконечности по заданным скоростям частиц до рассеянности, а также по заданной энергии взаимодействия частиц.

$$\vec{v}_1^+ = \vec{v}_0^+ - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}^+$$

$$\vec{v}_2^+ = \vec{v}_0^+ + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}^+$$

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2' - \vec{v}_1'$$

$$\vec{v}_0^+ = \vec{v}_0^- = \frac{m_1\vec{v}_1^- + m_2\vec{v}_2^-}{m_1+m_2}$$

$$\left.\frac{\mu v^{+2}}{2} + U(r)\right|_{r\to\infty} = \left.\frac{\mu v^{-2}}{2} + U(r)\right|_{r\to\infty}$$

$$v^+ = v^-$$

$$\vec{v}^+ = v^-\vec{n}_\theta$$

Окончательное решение задачи:

$$\vec{v}_1^+ = \vec{v}_0^- - \frac{m_2}{m_1+m_2}v^-\vec{n}_\theta$$

$$\vec{v}_2^+ = \vec{v}_0^- + \frac{m_1}{m_1+m_2} v^- \vec{n}_\theta$$

В системе центра масс траектории точек подобны.

$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{P}_1' + \vec{P}_2' = 0$$

Скорости частиц в любой момент времени не меняются, но противоположны по направлению.

$$\vec{P}_1'^+ + \vec{P}_2'^+ = 0$$

$$\vec{P}_1'^- + \vec{P}_2'^- = 0$$

Необходимо найти $\vec{n}$.

$$\theta = \pi - 2\varphi_0$$

Уравнение траектории:

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L_0'}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_0' - U(r) - \frac{L_0'^2}{2\mu r^2}\right)}}$$

Частицы различаются моментом импульса. Прицельный параметр (ρ) — длина перпендикуляра, опущенного из силового центра на первоначальное направление движения частицы пучка. Угол рассеяния (θ) — угол между направлениями частиц падающей и рассеянной.

$$E_0' = \frac{\mu v^{-2}}{2}$$

$$L_0' = \mu|[\vec{r}_- \cdot \vec{v}^-]| = \mu|r_-||v^-| \in (\vec{r}_- \cdot \vec{v}^-) = \mu\rho v^-$$

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu v^{-2}} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu v^{-2}} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

Диаграммы импульсов

Часто необходимо связать угол отклонения центра масс с углом отклонения лабораторной системы отсчета. Рассматривается диаграмма импульсов, которая характеризует рассеяние в лабораторной системе отсчета.

$$\vec{P}_1^+ = \frac{m_1}{M}(\vec{P}_1^- + \vec{P}_2^-) - \mu v^- \vec{n}_\theta$$

$$\vec{P}_2^+ = \frac{m_2}{M}(\vec{P}_1^- + \vec{P}_2^-) + \mu v^- \vec{n}_\theta$$

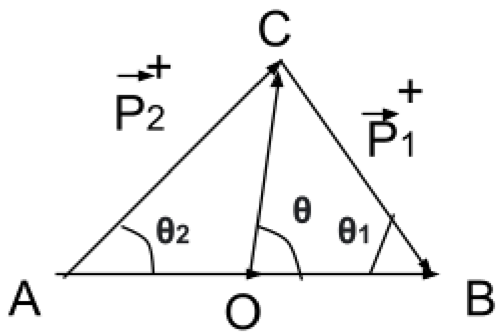

Рис. 10.3. $m_1 > m_2$

Точки A, O, B не меняются, точка C может менять значение по окружности.

$$\vec{v}_1 = 0$$

$$\vec{P}_1^- = 0$$

$$v_2^- = v^-$$

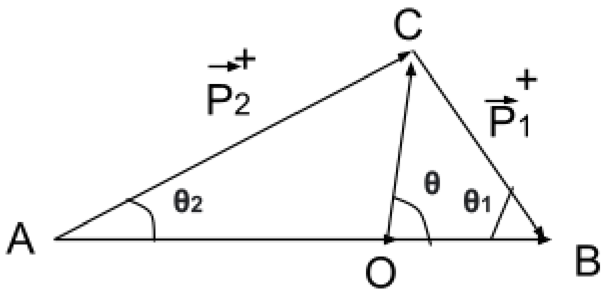

Рис. 10.4. $m_2 > m_1$

Пусть $m_1 > m_2$:

$$|\vec{AO}| < |\vec{OB}|$$

$$|\vec{OB}| = |\vec{OC}|$$

$$0 \leqslant \theta_2 \leqslant \pi$$

Пусть $m_2 > m_1$:

$$|\vec{AO}| > |\vec{OB}|$$

$$|\vec{OB}| = |\vec{OC}|$$

$$\sin\theta_{2max} = \frac{|\vec{OC}|}{|\vec{AO}|} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi - \theta}{2}$$

Лекция 11. Рассеяние. Формула Резерфорда

Рассеяние. Диаграмма импульсов

Диаграмма импульсов нужна, чтобы связать углы рассеяния в лабораторной системе отсчета с углами рассеяния в системе центра масс, а также выразить скорость частиц после рассеяния через углы отклонения в системе центра масс. В качестве лабораторной системы отсчета рассматривается система отсчета, связанная с частицами массы m_1.

$$\vec{v_1^-} = 0$$

$$v^- = |\vec{v_2^-}|$$

Пусть $m_1 > m_2$:

$$|\vec{AO}| < |\vec{OB}|$$

$$|\vec{OB}| = |\vec{OC}|$$

$$0 \leqslant \theta_2 \leqslant \pi$$

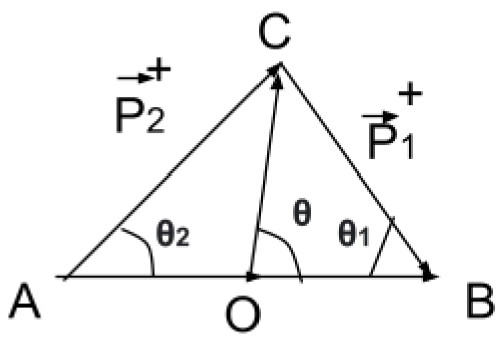

Рис. 11.1. $m_1 > m_2$

Пусть $m_2 > m_1$:

$$|\vec{AO}| > |\vec{OB}|$$

$$|\vec{OB}| = |\vec{OC}|$$

$$\sin\theta_{2max} = \frac{|\vec{OC}|}{|\vec{AO}|} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$2\theta_1 + \theta = \pi$$

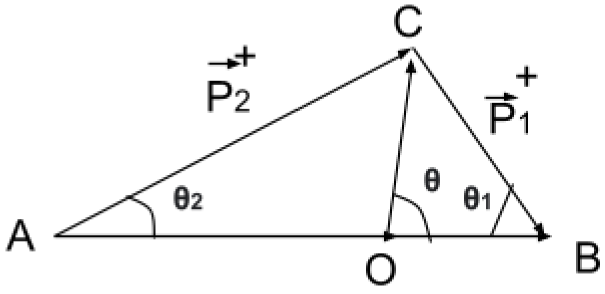

Рис. 11.2. $m_2 > m_1$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{m_1 \sin\theta}{m_2 + m_1 \cos\theta}$$

Необходимо записать скорости частиц после рассеяния как функции угла рассеяния в системе центра масс:

$$v_1^+ = 2\frac{m_2 v^-}{m_1 + m_2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$v_2^+ = 2\frac{v^-}{m_1 + m_2}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta}$$

Необходимо получить в явном виде связь между углами отклонения в системе отсчета лабораторной и в системе центра масс.

$$\sin^2\theta_2(m_1^2\cos^2\theta + m_2^2 + 2m_1 m_2\cos\theta) = m_1^2\sin^2\theta\cos^2\theta_2$$

$$m_1^2\cos^2\theta + 2m_1 m_2\sin^2\theta_2\cos\theta + m_2^2\sin^2\theta_2 - m_1^2\cos^2\theta_2 = 0$$

$$\cos\theta = -\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta_2 \pm \sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2}\sin^2\theta_2 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2} =$$

$$= -\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta_2 + pm\cos\theta_2\sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\sin^2\theta_2}$$

$$\theta(\theta_{2max}) > \theta \geqslant 0$$

$$\pi \geqslant \theta > \theta(\theta_{2max})$$

Можно также найти угол разлета в лабораторной системе отсчета $\theta_1 + \theta_2$.

Дифференциальное эффективное сечение рассеяния

Необходимо получить характеристики для процесса рассеяния. Каждый из пучков частиц однороден. Процесс рассеяния однократен. Процессы отклонения пар частиц являются независимыми друг от друга. Процесс описывается μ точкой.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\theta = \pi - 2\int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu v^{-2}} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

Прицельный параметр (p) — длина перпендикуляра, опущенного из силового центра на первоначальное направление движения частицы пучка.

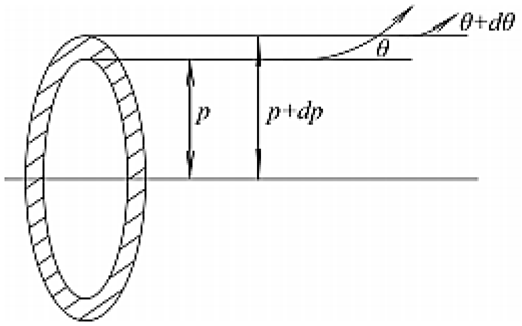

Рис. 11.3. Прицельный параметр

Рассматриваются 2 частицы в пучке с прицельными параметрами p и dp. Все частицы, пролетевшие в кольцо $(p, p+dp)$, рассеиваются в интервале углов $\theta, \theta + d\theta$. Очевидно, что в интервал углов $\theta + d\theta$ попадут частицы, которые пройдут сквозь кольцо $2\pi\rho d\rho$. Плотность потока (характеристика пучка): $j = \dfrac{dN}{dtdS}$ — сколько частиц пролетает в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения пучка. Дифференциальное сечение рассеяния — экспериментально измеримая величина.

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\rho d\rho$$

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\theta$$

Полное сечение рассеяния:

$$\sigma^{tot} = \int\limits_{0}^{\rho_{max}} 2\pi\rho d\rho \sim \pi\rho_{max}^2$$

Формула Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния легких заряженных частиц на первоначально неподвижных тяжелых ядрах

$$U(r) = -\frac{a}{r}$$

$$\theta = \pi - 2\int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 + \frac{2a}{r\mu v^{-2}} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

Введя x получается следующее:

$$x = \frac{\rho}{r}$$

$$\theta = \pi - 2\int\limits_{0}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{2a}{\mu v^{-2}\rho}x - v^2}}$$

$$x^2 - \frac{2a}{\mu v^{-2}\rho}x - 1 = 0$$

$$x_{max} = \frac{a}{\mu v^{-2}\rho} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{\mu v^{-2}\rho}\right)^2}$$

$$\theta = -2\operatorname{arctg}\frac{a}{\mu v^{-2}\rho}$$

$$\rho(\theta) = -\frac{a}{\mu v^{-2}}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$

$$d\sigma = \pi\left(\frac{a}{\mu v^{-2}}\right)^2 \frac{\cos\theta}{\sin^3\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$$

Общая формула получается формулой Резерфорда, которая описывает процесс рассеяния частиц массы m_1, m_2 друг на друге:

$$d\sigma = \frac{\rho\theta}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|d\Omega$$

$$\mu\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Характер расходимости следующий:

$$d\sigma\Big|_{\theta\to 0} \sim 8\pi\left(\frac{a}{\mu v^{-2}}\right)^2 \frac{d\theta}{\theta^3}$$

$$\rho\Big|_{\theta\to 0} \sim -\frac{2a}{\mu v^{-2}}\frac{1}{\theta}$$

Транспортное сечение записывается следующим образом:

$$\sigma^{tr} = \int d\sigma(\theta)(1-\cos\theta)$$

$$d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{a}{\mu v^{-2}}\right)^2 \frac{\sin\theta_1}{\cos^3\theta_1}d\theta_1$$

Пусть $m_1 \gg m_2$, тогда:

$$\operatorname{tg}\theta_2 \simeq \operatorname{tg}\theta$$

$$d\sigma_2 = d\sigma(\theta=\theta_2)$$

Пусть $m_1 = m_2 = m$, тогда:

$$\mu = \frac{m}{2}$$

$$\operatorname{th}\theta_2 = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$\theta_2 = \frac{\theta}{2}$$

$$d\sigma_2 = 2\pi\left(\frac{a}{\mu v^{-2}}\right)^2 \frac{\cos\theta_2}{\sin^3\theta_2}d\theta_2$$

При тождественных частиц друг на друге:

$$\theta_1, \theta_2 = \tilde{\theta}$$

$$d\sigma_1(\tilde{\theta}) + d\sigma_2(\tilde{\theta}) = 2\pi\left(\frac{a}{\mu v^{-2}}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^4\tilde{\theta}} + \frac{1}{\cos^4\tilde{\theta}}\right)\cos\tilde{\theta}\sin\tilde{\theta}d\tilde{\theta}$$

Рассматривается рассеяние шаров m_1 и m_2. Потенциал взаимодействия записывается следующим образом:

$$U(r) = \begin{cases} \infty & r < R = R_1 + R_2 \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Эффективный потенциал записывается как:

$$U_{eff} = U(r) + \frac{E\rho^2}{r^2}$$

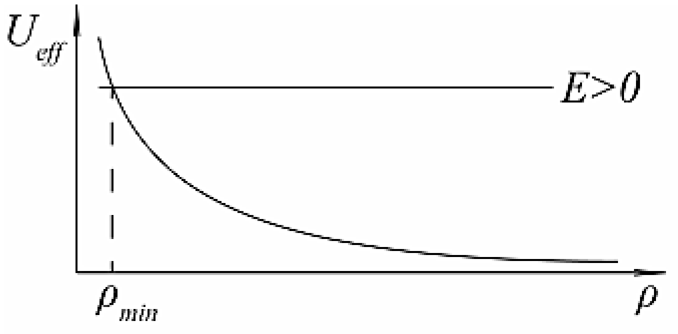

Рис. 11.4. Эффективный потенциал

$$\theta = \pi - 2\int_R^\infty \frac{\rho}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} = \pi + 2\arcsin\frac{\rho}{r}\Big|_R^\infty = \pi - 2\arcsin\frac{\rho}{R}$$

$$\rho = R\sin\frac{\pi-\theta}{2} = R\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\rho_{max} = R$$

Дифференциальное сечение рассеяния находится следующим образом:

$$d\sigma = 2\pi R^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{\pi R^2}{2}\sin\theta d\theta \simeq \frac{R^2}{4}d\Omega$$

Такие сечение называется изотропным.

$$\sigma^{tot} = \int_0^{\rho_{max}} 2\pi\rho d\rho = \pi\rho_{max}^2 = \pi R^2$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ