МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ЧАСТЬ 3

КАРАПЕТЯН
АЛЕКСАНДР ВЛАДЛЕНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
ПЕТРУСОВУ ЕКАТЕРИНУ ДМИТРИЕВНУ

Содержание

Лекция 1 **6**
Гамильтонова механика . . . 6
Лагранжева механика, принцип Гамильтона-Остроградского . . . 6
Преобразование Лежандра. Переменные Гамильтона (канонические). Функция Гамильтона . . . 7
Уравнения Гамильтона и их свойства . . . 8
Пример: плоская задача Кеплера . . . 9
Принцип Гамильтона в форме Пуанкаре . . . 10

Лекция 2 **11**
Интегральные инварианты . . . 11
Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре (УИИП) . . . 11
Теоремы о взаимосвязи гамильтоновой системы и УИИП . . . 11
Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана (ИИП-К) . . . 12
Теорема об инвариантности ИИП-К. Обратная теорема . . . 13
Уравнения Уиттекера. Пример . . . 13

Лекция 3 **15**
Канонические преобразования . . . 15
Канонические преобразования: определения и групповые свойства . . . 15
КП - группа . . . 15
Критерии каноничности с использованием скобок Пуассона и Лагранжа 16
Критерий каноничности с использованием производящей функции . . . 17
Сохранение гамильтоновой структуры уравнений при КП . . . 18
КП и процесс движения . . . 18

Лекция 4 **20**
Уравнения Гамильтона-Якоби . . . 20
Свободное каноническое преобразование (СКП) и его производящая функция . . . 20
Уравнение Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби . . . 21
Методы отыскания полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби . 22

Лекция 5 **25**
Интегрируемость системы по Лиувиллю . . . 25
Четвёртый метод отыскания полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби: отделение переменных . . . 25
Теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновых систем . . . 25

Лекция 6 **29**
Интегрирование в моделях . . . 29
Эллиптические интегралы 1 и 2 рода. Их свойства . . . 29
Квадратура для вращений математического маятника . . . 30

Полный интеграл уравнений Гамильтона-Якоби для математического маятника . . . 32

Лекция 7 **34**
Переменные „действие-угол“ . . . 34
Подробнее о методе разделения переменных при отыскании первого интеграла уравнения Гамильтона-Якоби . . . 34
Система Лиувилля . . . 34
Система Штеккеля (n=3) . . . 36
Переход к переменным, при которых уравнение Гамильтона-Якоби решается методом разделения переменных . . . 36
Переменные „действие-угол“ . . . 38

Лекция 8 **39**
Нахождение переменных „действие-угол “ . . . 39
Уравнение Гамильтона-Якоби для определения производящей функции канонической замены . . . 39
Нахождение переменной „угол“ . . . 39
Алгоритм нахождения переменных „действие-угол “ . . . 40

Лекция 9 **42**
Переменные „действие-угол“: математический маятник . . . 42
Математический маятник и его колебания . . . 42
Переменная „действие“для колебаний математического маятника . . . 42
Переменная „угол“для колебаний математического маятника . . . 43
Выражение старых переменных через переменные „действие-угол“ . . . 44
Случай вращения . . . 44

Лекция 10 **46**
Переменные „действие-угол“: задача Кеплера . . . 46
Постановка плоской задачи Кеплера . . . 46
Построение переменной „действие“ в задаче . . . 47
Построение переменной „угол“в задаче . . . 48
Динамика в переменных „действие-угол“. Резонанс . . . 49
Особый переход к переменным „действие-угол“для систем с малыми параметрами . . . 49

Лекция 11 **51**
Переменные „действие-угол“: теорема Пуанкаре . . . 51
Нахождение первого интеграла. Резонансная поверхность. Вековое множество. Система, интегрируемая по Пуанкаре . . . 51
Теорема Пуанкаре . . . 52

Лекция 12 **55**
Маятник Капицы . . . 55
Маятник Капицы (маятник с вибрирующей точкой подвеса) . . . 55

Лекция 13 **59**
Метод усреднения 59
Метод усреднения (теоремы Крылова-Боголюбова) для систем стандартного вида 59
Модельный пример 60
Маятник Капицы в сопротивляющейся среде 61
Метод усреднения для маятника Капицы в сопротивляющейся среде 62

Лекция 1

Гамильтонова механика

Лагранжева механика, принцип Гамильтона-Остроградского

Основы Лагранжевой механики:

1) связи только голономные

2) силы только потенциальные

$a = (a^1, \dots, a^n)$ - обобщенные координаты (независимы по определению)
$\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ - обобщенные координаты (независимы, т.к. связи голономные)
Кинетическая энергия $T = T_2 + T_1 + T_0$, квадратичная форма обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат и времени $T_2 = \frac{1}{2}(A(q,t)\dot{q}, \dot{q})$, линейная форма обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат и времени $T_1 = (a(q,t), \dot{q}), T_0 = a_0(q,t)$.
Потенциальная энергия зависит от обобщенных координат и времени $V(q,t)$.
Функция Лагранжа $L = T - V = L_2 + L_1 + L_0, L_2 = T_2, L_1 = T_1, L_0 = a_0 - V$.
Уравнения движения

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{0.1}$$

Если в расширенном корреляционном пространстве $(q;t)$ зафиксируем точки (q_0, t_0), (q_1, t_1) и введем множество гладких кривых $\Omega = \{\gamma(t) : \gamma(t_0) = q_0, \gamma(t_1) = q_1\}$. Возьмем $\gamma_0(t) \in \Omega$ кривую и введем гладкое семейство кривых $\gamma_\alpha(t) \in \Omega(|\alpha| \leqslant \alpha_0)$.

$$\gamma_\alpha(t) = \{q(\alpha, t)\}$$
$$\delta q = \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} \delta\alpha$$

Действие по Гамильтону вдоль кривой $\gamma(t)$:

$$I(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

Принцип Гамильтона-Остроградского: Кривая $\gamma_0(t)$-экстремаль функционала $I(\gamma)$, если и только если $q = \gamma_0(t)$ -решение краевой задачи для уравнений Лагранжа (0.1).
Краевая задача $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$.

Преобразование Лежандра. Переменные Гамильтона (канонические). Функция Гамильтона

.

Гамильтон предложил переход $q, \dot{q} \to q, p$. Обобщенные импульсы

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A(q,t)\dot{q} + a(q,t) \tag{1}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = a_{ij}(q,t)\dot{q}^j + a_i(q,t) \tag{1'}$$

Соотношения (1) и (1') разрешимы относительно $\dot{q}$, т.к. определитель A не равен нулю.

$$\dot{q} = A^{-1}(p - a) \tag{2}$$

$$\dot{q}^i = a^{ij}(p_j - a_j), a^{ij} = (a_{ij})^{-1} \tag{2'}$$

p - ковектор, (1) - преобразование Лежандра, (2) - обратное к нему, p, q - канонические переменные Гамильтона.

Определение Функция Гамильтона $H(q,p,t)$ по определению

$$H = \{(p, \dot{q}) - L\}_{(2)} = \{p, \dot{q}^i - L(\dot{q}, q, t)\}_{(2)} \tag{3}$$

Утверждение

$$H = \{L_2 - L_0\}_{(2)} \tag{4}$$

Доказательство

$$H \overset{(3)}{=} \{p\dot{q} - L\}_{(2)} = \{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q}\right) - L\}_{(2)} = \{2L_2 + L_1 - L_2 - L_1 - L_0\}_{(2)} = \{L_2 - L_0\}_{(2)}$$

Пример - плоская круговая ограниченная задача трех тел (ПКОЗТТ) Функция Лагранжа астероида во вращающейся системе координат после деления на массу астероида и в безразмерных переменных

$$L = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - V(x,y), n = 2, q^1 = x, q^2 = y$$
$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y$$
$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x$$

$$\begin{aligned} p_x + y &= \dot{x} \\ p_y - x &= \dot{y} \end{aligned} \tag{5}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$H \overset{(4)}{=} \{\frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + V(x,y)\}_{(5)} = \frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2) + (p_x y - p_y x) + V(x,y)$$

Замечание Если связи, наложенные на систему не зависят от времени, то $T = T_2 = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q},\dot{q}) \Rightarrow p = A\dot{q}, \dot{q} = A^{-1}p \Rightarrow H = \frac{1}{2}(A^{-1}p,p) + V = H_2 + H_0$.

В общем случае $H = H_2 + H_1 + H_0$

Уравнения Гамильтона и их свойства

Из (1) и (3) следует, что $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q} \end{cases} \tag{6}$$

(6) - уравнения Гамильтона с $2n$-уравнений 1-го порядка.

Свойства уравнений Гамильтона

1) $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}$

<u>*Доказательство*</u>

$$\dot{H} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Следствие Если функция Гамильтона не зависит от времени, то (6) допускает

$$H(q,p) = h = const \tag{7}$$

2) Если $\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = 0$, то

$$p_\alpha = c_\alpha = const \tag{8}$$

3) $div\{\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\} = 0$ <u>*Доказательство*</u>

$$div\{\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0$$

Следствие 1 Уравнения Гамильтона сохраняют фазовый объем. В фазовом пространстве есть объем в начальный времени τ_0. Из каждой точки этого объема выходит решение задачи Коши $(q_0,p_0) \in \tau_0 \to q_0(t), p_0(t), t = t_0$. В какой-то следующий момент времени получаем объем:

$$\int_\tau dpdq = \int_{\tau_0} dp_0 dq_0$$

Следствие 2 Асимптотическая устойчивость в гамильтоновых системах невозможна.

4) При взаимно однозначных заменах координат сохраняется гамильтонова структура уравнений.

   В уравнении (6) $q \to \widetilde{q} = \widetilde{q}(q,t) \Rightarrow q(\widetilde{q},t)$.

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t} + \left(\frac{\partial q}{\partial \widetilde{q}}, \dot{\widetilde{q}}\right) \Rightarrow$$

$$\{L(q,\dot{q},t)\} = L\left(q(\widetilde{q},t), \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \widetilde{q}}\dot{\widetilde{q}}, t\right) = \widetilde{L}(\widetilde{q},\dot{\widetilde{q}},t)$$

$$\widetilde{p} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{\widetilde{q}}} \Rightarrow \widetilde{H}(\widetilde{q},\widetilde{p},t) = (\dot{\widetilde{p}}\widetilde{q} - L(\widetilde{q},\dot{\widetilde{q}},t))_{(*)} \Rightarrow$$

$$\dot{\widetilde{q}} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{p}},\ \dot{\widetilde{p}} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{q}} \tag{$\widetilde{6}$}$$

   Замечание Если от $(q,p) \to (\widetilde{q},\widetilde{p}), \widetilde{q} = \widetilde{q}(q,p,t), \widetilde{p} = \widetilde{p}(q,p,t)$, то в общем случае гамильтонова структура нарушается.

   Замечание Если исходная система не консервативна, т.е. $Q(q,\dot{q},t) = -\frac{\partial V(q,t)}{\partial q} + Q_*(q,\dot{q},t)$, то можно ввести канонические переменные Гамильтона, функцию Гамильтона и записать уравнение в виде

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + P \end{cases} \qquad P = Q_*(q,\dot{q},t)\Big|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t} = P(a,p,t)$$

Пример: плоская задача Кеплера

В декартовых координатах

$$L = \frac{1}{2}m(x^2+y^2) + \frac{m\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$q' = x, p' = y$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, p_y = \frac{L}{\dot{y}} = m\dot{y}$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2) - \frac{m\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

В полярных координатах

$$x,y \to r,\phi : x = rcos\phi, y = rsin\phi \Rightarrow$$

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}m(r^2+r^2\phi^2) + \frac{m\mu}{r}$$

$$p_r = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, p_\phi = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) - \frac{\mu m}{c}, \widetilde{H} = h, p_\phi = c = const$$

Принцип Гамильтона в форме Пуанкаре

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, H = H(q,p,t) \tag{1}$$

$$q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1 \tag{2}$$

$$\gamma_0(t) = \{q_0(t), p_0(t)\} - \text{решение краевой задачи (1), (2)} \tag{3}$$

Рассмотрим расширенные фазовые пространства $\{q,p,t\}$. Зафиксируем в подпространстве $\{q,t\}$ точки $(q_0,t_0),(q_1,t_1)$ (2). Рассмотрим в $\{q,p,t\}$ множество Ω гладких кривых $\gamma(t) = \{q(t),p(t)\}$ с фиксированными в подпространстве $\{q,t\}$ концами (2). Вдоль кривой $\gamma(t)$ введем действие по Пуанкаре

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} (p\dot{q} - H)dt \tag{4}$$

Фиксируем кривую $\gamma_0(t) \in \Omega$. Рассматриваем гладкое семейство кривых $\gamma_\alpha(t) \in \Omega, (|\alpha| \leqslant \alpha_0), q(\alpha,t_0) = q_0, q(\alpha,t_1) = q_1$.

$$\delta q = \left.\frac{\partial q(\alpha,t)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha, \delta p = \left.\frac{\partial p(\alpha,t)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha, \delta H = \frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p$$

- изохронная вариация

Теорема (Пуанкаре) Кривая $\gamma_0(t)$ - экстремаль действия (4), если и только если $\gamma_0(t)$ - решение краевой задачи (1), (2).

<u>*Доказательство*</u>

$$\delta A(\gamma_0) = \delta \int_{t_0}^{t_1} (p\dot{q} - H)dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta p\dot{q} - \delta H)dt = \int_{t_0}^{t_1} [(\delta p, \dot{q}) + (p, \delta\dot{q}) - H_q\delta q - H_p\delta p]dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{q}, \delta p) + (p, \delta q)^{\cdot} - (\dot{p}, \delta q) - H_q\delta q - H_p\delta p]dt = \int_{t_0}^{t_1} (p, \delta q)^{\cdot} dt + \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{q} - H_p, \delta p) -$$
$$- (\dot{p} + H_q, \delta q)]dt$$

Если $\gamma_0(t)$ - решение, то $\dot{q} = H_q, \dot{p} = H_p$. Если $\delta A(\gamma_0(t)) = 0, \delta q, \delta p$ - произвольные в $(t_0,t_1) \Rightarrow \dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q$, то $\gamma_0(t)$ - решение задачи (1), (2).

Лекция 2

Интегральные инварианты

Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре (УИИП)

$$\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q, H = H(q,p,t), H_q = \frac{\partial H}{\partial q}, H_p = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1}$$

Рассмотрим семейство задач Коши

$$t_0, q_0 = q_0(s), p_0 = p_0(s), s \in [0,1], q_1(1) = q_0(0), p_0(1) = p_0(0) \tag{2}$$

Начальные условия $q_0(s)$ и $p_0(s)$ образуют в пространстве $\{q,p\}$ замкнутую кривую, а в пространстве $\{q,p,t\}$ замкнутую ориентированную кривую γ_0, лежащую в гиперплоскости $t = t_0$.

Рассмотрим семейство решений задач Коши (2) для (1)

$$q = q(s,t), p = p(s,t) \tag{3}$$

В силу теоремы единственности (принципа детерминированности)

$$q(1,t) = q(0,t), p(1,t) = p(0,t) \tag{4}$$

Решения, выпущенные из каждой точки кривой Γ_0 образуют трубку, т.е. решения (3) образуют трубку решений. Если зафиксировать момент времени t и на этом уровне провести сечение трубки с той же ориентацией. Введем изохронные вариации фазовых переменных и функции Гамильтона:

$$\delta q = \frac{\partial q(s,t)}{\partial s}\delta s, \delta p = \frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\delta s, \delta H = H_q \delta q + H_p \delta p$$

Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре:

$$I_p = \oint\limits_{\Gamma_t} p\delta q, I_p = I_p(t)$$

Теоремы о взаимосвязи гамильтоновой системы и УИИП

Теорема 1 $I_p = const, \oint_{\Gamma_t} p\delta q = \oint_{\Gamma_0} p\delta q$ с одной ориентацией.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство

$$\dot{I}_p = (\oint\limits_{\Gamma_t} p\delta q)^{\cdot} = \oint\limits_{\Gamma_t}(p\delta q)^{\cdot} = \oint\limits_{\Gamma_t}(\dot{p}\delta q + p(\delta q)^{\cdot}) = \oint\limits_{\Gamma_t}(\dot{p}\delta q + p\delta\dot{q}) = \oint\limits_{\Gamma_t}(\dot{p}\delta q + \delta(p\dot{q}) - \dot{q}\delta p) =$$
$$= \oint\limits_{\Gamma_t}\delta(p\dot{q}) + \oint\limits_{\Gamma_t}(\dot{p}\delta q - \dot{q}\delta p) = \oint\limits_{\Gamma_t}(-H_q\delta q - H_p\delta p) = -\oint\limits_{\Gamma_t}\delta H = 0$$

Рассмотрим систему ОДУ:

$$\dot{q} = Q(q,p,t), \dot{p} = P(q,p,t) \tag{5}$$

Для нее рассмотрим (2) и получим кривую $\Gamma_0, t = t_0$. Рассмотрим (3) и получим кривую Γ_t, вычислим I_p.

Теорема 2 Если $I_p = const$, то существует $H(q,p,t) : Q = H_p, P = -H_q$.

Доказательство

$$0 = \dot{I}_p = (\oint\limits_{\Gamma_t} p\delta q)^{\cdot} = \oint\limits_{\Gamma_t}(p\delta q)^{\cdot} = \oint\limits_{\Gamma_t}(\dot{p}\delta q + p(\delta q)^{\cdot}) = \oint\limits_{\Gamma_t}(\dot{p}\delta q + p\delta\dot{q})$$
$$= \oint\limits_{\Gamma_t}(\dot{p}\delta q + \delta(p\dot{q}) - \dot{q}\delta p) = \oint\limits_{\Gamma_t}\delta(p\dot{q}) + \oint\limits_{\Gamma_t}(\dot{p}\delta q - \dot{q}\delta p) = \oint\limits_{\Gamma_t}(\dot{p}\delta q - \dot{q}\delta p)$$
$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \oint\limits_{\Gamma_t}(P\delta q - Q\delta p) = 0 \Rightarrow \exists F(q,p,H) : P = \frac{\partial F}{\partial q}, Q = -\frac{\partial F}{\partial p} \Rightarrow H = -F$$

Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана (ИИП-К)

$$\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q, H = H(q,p,t), H_q = \frac{\partial H}{\partial q}, H_p = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1}$$

$$t_0 = t_o(s), q_0 = q_0(s), p_0 = p_0(s), s \in [0,1], q_1(1) = q_0(0), p_0(1) = p_0(0), t_0(1) = t_0(0) \tag{2}$$

Семейство задач Коши образует замкнутую неизохронную кривую Γ в $\{q,p,t\}$.

$$q = q(s,t), p = p(s,t) \tag{3}$$

$$q(1,t) = q(0,t), p(1,t) = p(0,t) \tag{4}$$

Проведем сечение в произвольной $t_1(s)$ и получим кривую Γ_1 с той же ориентацией. Введем неизохронные вариации $\delta t = \frac{\partial t}{\partial s}\delta s, \delta q = \frac{\partial q(s,t)}{\partial s}\delta s, \delta p = \frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\delta s, \delta H = H_q\delta q + H_p\delta p$. Введем интегральный инвариант Пуанкаре-Картана:

$$I_c = \oint\limits_{\Gamma}(p\delta q - H\delta t)$$

Теорема об инвариантности ИИП-К. Обратная теорема

Теорема 3 $I_c = const$

Доказательство Для произвольного $s \in [0,1]$ находим решение $\gamma_s(t) = \{q(s,t), p(s,t)\}$ на $[t_0(s), t_1(s)]$. Вычислим действие по Пуанкаре

$$A(\gamma_s) = \int_{t_0(s)}^{t_1(s)} (p\dot{q} - H)dt$$

Для точки $s + \delta s$ получаем кривую $\gamma_{s+\delta s}$ и решение на $[t_0(s+\delta s), t_1(s+\delta s)]$. Вычисляем действием по Пуанкаре

$$A(\gamma_{s+\delta s}) = \int_{t_0(s+\delta s)}^{t_1(s+\delta s)} (p\dot{q} - H)dt$$

$$A(\gamma_{s+\delta s}) - A(\gamma_s) = \delta A(\gamma_s) + o(\delta s)$$

$$\delta A(\gamma_s) = (p\delta q - H\delta t)\Big|_{t_0(s)}^{t_1(s)} + \int_{t_0(s)}^{t_1(s)} \delta[p\dot{q} - Hdt]$$

$$\delta A(\gamma_s) = (p\delta q - H\delta t)\Big|_{t_0(s)}^{t_1(s)} + \int_{t_0(s)}^{t_1(s)} [(\dot{q} - H_p)\delta p - (\dot{p} + H_q)\delta q]dt$$

$$\delta A(\gamma_s) = (p\delta q - H\delta t)\Big|_{t_0(s)}^{t_1(s)}$$

$$\int_0^1 \delta A(\gamma_s) = \int_0^1 (p\delta q - H\delta t)\Big|_{t_0(s)}^{t_1(s)} = \oint_{\Gamma_1} (p\delta q - H\delta t) - \oint_{\Gamma_0} (p\delta q - H\delta t) \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma_1} (p\delta q - H\delta t) = \oint_{\Gamma_0} (p\delta q - H\delta t)$$

Теорема 4 Если для решений семейства задач Коши (2) для системы

$$\dot{q} = Q(q,p,t), \dot{p} = P(q,p,t) \tag{5}$$

существует $H(q,p,t) : I_c = const$, то $Q = H_p, P = -H_q$.

Уравнения Уиттекера. Пример

$$\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q, H = H(q,p,t), H_q = \frac{\partial H}{\partial q} \tag{1}$$

$$H(q,p) = h \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} \neq 0 \tag{3}$$

Из (2) по условию (3)

$$p_n = -K(\overline{q}, \overline{p}, \tau, h), \overline{q} = (q^1, \ldots, q^{n-1}), \overline{p} = (p_1, \ldots, p_{n-1}), \tau = q^n \tag{4}$$

$$I_p = \oint\limits_{\Gamma} p\delta q = const$$

$$\oint\limits_{\Gamma} p\delta q = \oint\limits_{\overline{\Gamma}} (\overline{p}\delta\overline{q} - K\delta\tau) = \overline{I_c}$$

$$\Rightarrow \overline{q}' = K_{\overline{p}}, \overline{p}' = -K_{\overline{q}}, ()' = \frac{d()}{d\tau} \tag{5}$$

Пример гамильтоновой системы с 2 степенями свободы

$$n = 2, q^1 = x, q^2 = y, p_1 = u, p_2 = v$$
$$H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2), H = h \Rightarrow$$
$$v = \sqrt{2h - u^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{2h - u^2 - x^2 - \tau^2} = -K(u, x, \tau, h)$$
$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{u}{\sqrt{2h - u^2 - x^2 - \tau^2}}, \frac{du}{d\tau} = -\frac{x}{\sqrt{2h - u^2 - x^2 - \tau^2}}$$
$$\dot{x} = u, \dot{u} = -x, \dot{y} = v, \dot{v} = -y$$

Лекция 3

Канонические преобразования

Канонические преобразования: определения и групповые свойства

$$\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q, H = H(q,p,t) \tag{1}$$

$$\dot{z} = JH_z, z = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n), J = \begin{pmatrix} O_{n\times n} & E_{n\times n} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{pmatrix} \tag{1*}$$

$$J^{-1} = J^T = -J, J^2 = E_{2n\times 2n}$$
$$H = H(z,t)$$

$$q,p \to \widetilde{q},\widetilde{p} : \widetilde{q} = \widetilde{q}(q,p,t), \widetilde{p} = \widetilde{p}(q,p,t) \tag{2}$$

$$z \to \widetilde{z} : \widetilde{z} = \widetilde{z}(z,t) \tag{2*}$$

$$|M| \neq 0, M = \left(\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix}$$

$$q = q(\widetilde{q},\widetilde{p},t), p = p(\widetilde{q},\widetilde{p},t) \tag{3}$$

$$z = z(\widetilde{z},t) \tag{3*}$$

Определение 1 Преобразование (2) ((2*)) называется каноническим, если $\exists c \neq 0$:

$$M^T J M = cJ \tag{4}$$

При этом постоянная с называется валентностью канонического преобразования (КП) (2) ((2*)). Если $c = 1$, то КП называется унивалентным.

Далее занимаемся унивалентными КП.

КП - группа

Утверждение 1 КП образуют группу.

Доказательство

1) $e = \{\widetilde{z} = z\}$

2) $z \to \widetilde{z}(2^*) \Rightarrow \widetilde{z} \to z(3^*)$

$(M^{-1})^T J (M^{-1}) = J \leftrightarrow (M^{-1})^T J = JM \leftrightarrow J = M^T J M$

3)

$$
\begin{aligned}
&z \to z_1 = z_1(z,t) - \text{КП}\\
&z_1 \to z_2 = z_2(z,t) - \text{КП}\\
&\widetilde{z} = z_2(z_1(z,t),t) = \widetilde{z}(z,t) \overset{?}{-} \text{КП}\\
&J \overset{?}{=} M^T J M\\
&M = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial z} = \frac{\partial z_2}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z} \Rightarrow M^T = \left(\frac{\partial z_1}{\partial z}\right)^T \left(\frac{\partial z_2}{\partial z_1}\right)^T\\
&M^T J M = \left(\frac{\partial z_1}{\partial z}\right)^T \left(\frac{\partial z_2}{\partial z_1}\right)^T J \frac{\partial z_2}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z} = \left(\frac{\partial z_1}{\partial z}\right)^T J \frac{\partial z_1}{\partial z} = J
\end{aligned}
$$

Утверждение $M^T J M = J \leftrightarrow M J M^T = J$

Критерии каноничности с использованием скобок Пуассона и Лагранжа

Пусть $\phi(q,p,t)$ и $\psi(q,p,t)$ - скалярные функции.
Определение 2 Скобка Пуассона функций ϕ и ψ:

$$(\phi,\psi) = \frac{\partial \phi}{\partial q^i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \phi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q^i} = -(\psi,\phi)$$

Пусть $\widetilde{q} = \widetilde{q}(x,y,\dots)$ и $\widetilde{p} = \widetilde{p}(x,y,\dots)$; x,y - скаляры.
Определение 3 Скобка Лагранжа переменных x,y :

$$[x,y] = \frac{\partial \widetilde{q^i}}{\partial x}\frac{\partial \widetilde{p_i}}{\partial y} - \frac{\partial \widetilde{q^i}}{\partial y}\frac{\partial \widetilde{p_i}}{\partial x} = -[y,x]$$

Утверждение 1 Преобразование (2) каноническое, если и только если

$$(\widetilde{q^i},\widetilde{q^j}) = 0, (\widetilde{p_i},\widetilde{p_j}) = 0, (\widetilde{q^i},\widetilde{p_j}) = \delta^i_j, i,j = \overline{1,n} \tag{5}$$

Утверждение 2 Преобразование (2) каноническое, если и только если

$$[\widetilde{q^i},\widetilde{q^j}] = 0, [\widetilde{p_i},\widetilde{p_j}] = 0, [\widetilde{q^i},\widetilde{p_j}] = \delta^j_i, i,j = \overline{1,n} \tag{6}$$

Доказательство

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^k \\ -\delta_k^i 0 & \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial q^i} & \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial q^i} & \frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial p_j} \end{pmatrix}, M^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{q^j}}{\partial q^i} & \frac{\partial \widetilde{p^j}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \widetilde{q^j}}{\partial p^i} & \frac{\partial \widetilde{p^j}}{\partial p_i} \end{pmatrix}$$

$$M^T J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{q^j}}{\partial q^i} & \frac{\partial \widetilde{p^j}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \widetilde{q^j}}{\partial p^i} & \frac{\partial \widetilde{p^j}}{\partial p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^k \\ -\delta_k^i 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \widetilde{p_k}}{\partial q^i} & \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial q^i} \\ -\frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial p_i} & \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial p_i} \end{pmatrix}$$

$$M^T J M = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \widetilde{p_k}}{\partial q^i} & \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial q^i} \\ -\frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial p_i} & \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial q^i} & \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial q^i} & \frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial q^i}\frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial q^j} - \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial q^j}\frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial q^i} & \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial q^i}\frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial p^j} - \frac{\partial \widetilde{q^k}}{\partial p^j}\frac{\partial \widetilde{p^k}}{\partial q^i} \\ -//- & -//- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [q^i, q^j] & [q^i, p_j] \\ -[q^j, p_i] & [p_i, p_j] \end{pmatrix} \overset{(6)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ -\delta_i^j & 0 \end{pmatrix} = J$$

Критерий каноничности с использованием производящей функции

Теорема Преобразование (2) каноническое, если и только если существует функция $F(q, p, t) \in C$:

$$p\delta q - \widetilde{p}\delta\widetilde{q} = \delta F \tag{7}$$

Замечание $\delta F = \frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p, \delta\widetilde{q} = \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p}\delta p$ - изохронная вариация

Доказательство Из (7) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial q^i} = p_i - \widetilde{p}_s\frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_i} = -\widetilde{p}_s\frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial p_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q^j} = p_j - \widetilde{p}_s\frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial q^j}, \frac{\partial F}{\partial p_j} = -\widetilde{p}_s\frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial p_j}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j} = -\frac{\partial \widetilde{p}_s}{\partial q^i}\frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial q^j} - \widetilde{p}_s\frac{\partial^2 \widetilde{q^s}}{\partial q^i \partial q^j}, \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^i} = -\frac{\partial \widetilde{p}_s}{\partial q^j}\frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial q^i} - \widetilde{p}_s\frac{\partial^2 \widetilde{q^s}}{\partial q^j \partial q^i}$$

$$F''_{ij} = F''_{ji} \leftrightarrow \frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial q^i}\frac{\partial \widetilde{p}_s}{\partial q^j} - \frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial q^j}\frac{\partial \widetilde{p}_s}{\partial q^i} = 0 \leftrightarrow [q^i, q^j] = 0$$

Аналогично из $\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_i} \Rightarrow [p_i, p_j] = 0$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q^i} = \delta_i^j - \frac{\partial \widetilde{p}_s}{\partial p_j}\frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial q^i} - \widetilde{p}_s\frac{\partial^2 \widetilde{q^s}}{\partial p_j \partial q^i}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial p_j} = -\frac{\partial \widetilde{p}_s}{\partial q^i}\frac{\partial \widetilde{q^s}}{\partial p_j} - \widetilde{p}_s\frac{\partial^2 \widetilde{q^s}}{\partial q^i \partial p_j} \Rightarrow [q^i, p_j] = \delta_i^j$$

(6) выполнено, когда выполнено (7) и наоборот, оба условия- условия каноничности. F - производящая функция канонического преобразования.

Сохранение гамильтоновой структуры уравнений при КП

Теорема Если (2) - КП, то существует функция $\widetilde{H}(\widetilde{q},\widetilde{p},t)$: в новых переменных уравнения движения имеют вид $\widetilde{q} = \widetilde{Hp}, \widetilde{p} = -\widetilde{H1}$

Доказательство Для доказательства необходимо построить функцию $\widetilde{H}$. (2) - КП $\Rightarrow \exists F(q,p,t) : (7)$. Возьмем

$$\widetilde{H}(\widetilde{q},\widetilde{p},t) = \{H(q,p,t) + \frac{\partial F(q,p,t)}{\partial t}\}_{(3)} \tag{8}$$

Рассмотрим

$$\widetilde{I}_c = \oint\limits_{\widetilde{\Gamma}} (\widetilde{p}\delta\widetilde{q} - \widetilde{H}\delta t) \overset{(2),(7),(8)}{=} \oint\limits_{\Gamma} \left(p\delta q - \delta F - H\delta t - \frac{\partial F}{\partial t}\delta t \right) = \oint\limits_{\Gamma} (p\delta q - H\delta t) - \oint\limits_{\Gamma} \Delta F = const$$

Пример

$$\begin{aligned}
&q \to \widetilde{q} = \widetilde{q}(q,t) \Rightarrow q = q(\widetilde{q},t) \\
&\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial \widetilde{q}}\dot{\widetilde{q}} + \frac{\partial q}{\partial t}, \delta q = \frac{\partial q}{\partial \widetilde{q}}\delta\widetilde{q} \\
&\widetilde{L}(\dot{\widetilde{q}},\widetilde{q},t) = L\left(\frac{\partial q}{\partial \widetilde{q}}\dot{\widetilde{q}}, q(\widetilde{q}), t\right) \\
&\widetilde{p} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q}{\partial \widetilde{q}} = p\frac{\partial q}{\partial \widetilde{q}} \\
&q = q(\widetilde{q},t), p = \widetilde{p}\frac{\partial \dot{\widetilde{q}}}{\partial q} \\
&p\delta q - \widetilde{p}\delta\widetilde{q} = \widetilde{p}\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q}\delta q - \widetilde{p}\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q}\delta q = 0
\end{aligned}$$

(7) выполнено в частности для $F = 0$ и $\widetilde{H} = H(q(\widetilde{q},\widetilde{p},t), p(\widetilde{q},\widetilde{p},t), t)$.

КП и процесс движения

$$\dot{z} = JH_z \tag{1*}$$

решение задачи Коши для (1*):

$$z(t_0) = z_0 \Rightarrow z(t,t_0,z_0) \tag{9}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение Унивалентное КП $z_0 \to z(t, t_0, z_0)$
Доказательство

$$M = \left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right), \dot{M} = \left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)^{\cdot} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0} = \frac{\partial}{\partial z_0}\left(J\frac{\partial H}{\partial z_i}\right) = J\frac{\partial^2 H}{\partial z_0 \partial z} = J\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial z}\frac{\partial z}{\partial z_0} =$$
$$= JH''_{z^2}M$$
$$\dot{M}^T = M^T H''_{z^2} J^T = -M^T H''_{z^2} J$$
$$\left(M^T J M\right)^{\cdot} = \dot{M}^T J M + M^T J \dot{M} = -M^T H''_{z^2} J \cdot JM + M^T J \cdot JH''_{z^2} = 0$$
$$M^T J M = M_0^T J M_0 = EJE = J$$

В данном случае $|M| = 1$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4

Уравнения Гамильтона-Якоби

Свободное каноническое преобразование (СКП) и его производящая функция

$$\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q, H = H(q,p,t) \tag{1}$$

$$q,p \to \widetilde{q},\widetilde{p} : \widetilde{q} = \widetilde{q}(q,p,t)\ \ (2.1), \widetilde{p} = \widetilde{p}(q,p,t)\ \ (2.2) \tag{2}$$

$$|M| \neq 0, M = \left(\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix}$$

$$q = q(\widetilde{q},\widetilde{p},t), p = p(\widetilde{q},\widetilde{p},t) \tag{3}$$

$$p\delta q - \widetilde{p}\delta\widetilde{q} = \delta F, F = F(q,p,t) \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p}\right| \neq 0 \tag{5}$$

Определение КП свободное, если выполнено условие (5).
Из (2.1) при условии (5) можно найти $p = p(q,\widetilde{q},t) \Rightarrow \widetilde{p} = \widetilde{p}(q,\widetilde{q},t)$.

$$p = p(q,\widetilde{q},t, \widetilde{p} = \widetilde{p}(q,\widetilde{q},t) \tag{6}$$

Из (4) $\Rightarrow$

$$p\delta q - \widetilde{p}\delta\widetilde{q} = \delta F(q, p(q,\widetilde{q},t),t) = \delta S(q,\widetilde{q},t) \tag{7}$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \widetilde{p} = -\frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}} \tag{8}$$

Утверждение 1 Если $S = S(q,\widetilde{q},t) \in C^2$ и $\left|\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \widetilde{q}}\right| \neq 0$, то соотношение (8) задает СКП.

Доказательство Каноничность следует из (7) $\Rightarrow$ (4). Для доказательства того, что оно СКП подставим $\widetilde{q} = \widetilde{q}(q,p,t)$ в (8.1), получим $p = \frac{\partial S(q,\widetilde{q}(q,p,t),t)}{\partial q}$ и продифференцируем по $t : E = \frac{\partial p}{\partial p}\frac{\partial^2 S}{\partial \widetilde{q}\partial q}\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p} \Rightarrow \left|\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial p}\right| = \dfrac{1}{\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \widetilde{q}}} \neq 0$

$S(q,\widetilde{q},t)$ удовлетворяющая (1) - производящая функция СКП.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Уравнение Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби

Пусть (2) - СКП, найдем $\widetilde{H}(\widetilde{q},\widetilde{p},t) = \left(H(q,p,t) + \frac{\partial S(q,\widetilde{q},t)}{\partial t}\right)_{(3)}$.

В новых переменных

$$\dot{\widetilde{q}} = \widetilde{H}_{\widetilde{p}}, \dot{\widetilde{p}} = -\widetilde{H}_{\widetilde{q}} \tag{9}$$

Если $\widetilde{H} = 0$, то из (9) $\Rightarrow$

$$\widetilde{q} = \alpha, \widetilde{p} = \beta, \alpha \in R^n, \beta \in R^n \tag{10}$$

α, β - произвольные постоянные, значит, (10) - общее решение (9). Тогда в силу (3) $q = q(\alpha,\beta,t), p = p(\alpha,\beta,t)$ - общее решение системы (1). $\widetilde{H} = 0 \leftrightarrow$

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

(11) - уравнение Гамильтона-Якоби.

Определение Полный интеграл Гамильтона Якоби - функция $W(q,\alpha,t) \in C^2$:

1) W удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби (11)

2) W зависит от n произвольных состояний α

3) $\left|\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \alpha}\right| \neq 0$

Теорема Якоби Если $W(q,\alpha,t)$ - полный интеграл уравнения (11), то соотношения

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \beta = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}, \alpha \in R^n, \beta \in R^n \tag{12}$$

определяют общее решение исходной системы (1).

Доказательство

1) Докажем, что из (12) следует, что

$$q = q(\alpha,\beta,t), p = p(\alpha,\beta,t) \tag{13}$$

Из (12.2) $\overset{(3)}{\Rightarrow} q = q(\alpha,\beta,t) \overset{(12.1)}{\Rightarrow} p = p(\alpha,\beta,t)$.

2) Докажем, что (13) - решение (1). Возьмем в качестве производящей функции СКП $S(q,\widetilde{q},t) = W(q,\widetilde{q},t)$. Тогда $\widetilde{H} = 0 \Rightarrow \widetilde{q} = \alpha, \widetilde{p} = \beta \Rightarrow$ утверждение теоремы.

Пример 1 Пусть $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), q, p$ - скаляры. Тогда уравнение в частных производных

$$\frac{1}{2}\left(q^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, W = W(q,\alpha,t), \alpha \in R$$

Поиск общего интеграла затруднителен.

Методы отыскания полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби

1) Случай наличия циклических координат

Пусть $q = (r, s), r \in R^k, s \in R^{n-k}, \frac{\partial H}{\partial S} = 0, S$ - циклические координаты $\Rightarrow p_s = \sigma, \sigma \in R^{n-k}$. Значит, $H = H(r, p_r, p_s, t)$. Тогда уравнение Гамильтона-Якоби:

$$H\left(r, \frac{\partial S}{\partial p_r}, \sigma, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$W(r, \rho, \sigma, t), (\rho, \sigma) = \alpha \in R^n, \rho \in R^k$ ищем в виде

$W = (s, \sigma) + U(r, \rho, \sigma, t),$ где U удовлетворяет

$$H\left(r, \frac{\partial U}{\partial r}, \sigma, t\right) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

и условию $\left|\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \rho}\right| \neq 0$

Докажем, что в таком виде W - полный интеграл Гамильтона-Якоби. Очевидно, что она удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби, т.к. U удовлетворяет (14). Проверим условие невырожденности:

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \alpha}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \rho} & \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial s \partial \rho} & \frac{\partial^2 W}{\partial s \partial \sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \rho} & \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \sigma} \\ 0 & E \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \rho}\right| \neq 0$$

2) Случай консервативных систем $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Тогда уравнение (1) имеет первый интеграл.

$$H(q, p) = h \tag{15}$$

В этом случае полный интеграл Гамильтона-Якоби ищется в виде $W = -ht + V(q, \overline{\alpha}, h), \overline{\alpha} \in R^{n-1}, (\alpha, h) \in R^n$, причем V удовлетворяет уравнению $H\left(q, \frac{\partial V}{\partial q}\right) = h$ и условию $\left|\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial \overline{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial h}\right)\right| \neq 0, V$ - характеристическая функция Гамильтона. Ясно, что W удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби. Общее решение ищется из уравнений

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \overline{\beta} = -\frac{\partial V}{\partial \overline{\alpha}}, \overline{\beta} \in R^{n-1}, \tau = t - \frac{\partial V}{\partial h}, \tau \in R \tag{16}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial h} \Delta_i \neq 0 \Rightarrow \exists i_0 : \Delta_{i_0} \neq 0, \frac{\partial^2 V}{\partial q^{i_0} \partial h} \neq 0$$

Пусть $i_0 = n$:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^n \partial h} \neq 0, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial \overline{q} \partial \overline{\alpha}}\right| \neq 0, \overline{q} = (q^1, \ldots, q^{n-1}) \tag{17}$$

Из (16.2), (17) $\Rightarrow \exists \overline{q} = \overline{q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, h, q^n)$. Из (16.2) $\Rightarrow p = p(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, h, q^n)$. Из (16.3), (17) $\Rightarrow q^n = q^n(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, h, \tau, t), q = q(\alpha, \beta, t), p = p(\alpha, \beta, t), \alpha = (\overline{\alpha}, h), \beta = (\overline{\beta}, \tau)$.

Продолжение примера 1

$W = -ht + V(q, h)$

$\frac{1}{2}\left(q^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2\right) = h$

$\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) = \pm\sqrt{2h - q^2}$

$V = \pm\int\sqrt{2h - q^2}dq = \{q = \sqrt{2h}sinx\} = \pm 2h\int cos^2 x dx - \pm h\int(1 + cos2x)dx =$
$= \pm h(x + sinxcosx)$

$x = arcsin\frac{q}{\sqrt{2h}}, V = \pm h(arcsin\frac{q}{\sqrt{2h}} + \frac{q}{\sqrt{2h}}\sqrt{1 - \frac{q^2}{2h}}$

$p = \frac{\partial V}{\partial q}; \tau = t - \frac{\partial V}{\partial h}$

$\frac{\partial^2 V}{\partial h \partial q} = \frac{1}{\sqrt{2h - q^2}} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial h} = \pm\int\frac{dq}{\sqrt{2h - q^2}} = \int dx = \arcsin\frac{q}{\sqrt{2h}}$

$\arcsin\frac{q}{\sqrt{2h}} \pm = t - \tau \Rightarrow q = \pm\sqrt{2h}sin(t - \tau)$

$p = \pm\sqrt{2h}cos(t - \tau)$

Пример 2. Плоская задача Кеплера В безразмерных переменных и полярных координатах $H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\rho^2}{r^2}\right) - \frac{1}{r}$

а) $\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$

б) $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{r\pi^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{1}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$
$$S = -ht + \sigma\phi + V(r, \rho, \sigma, h)$$

h, σ - произвольные постоянные

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{2\tau^2} - \frac{1}{r} = h \Rightarrow V(r, \sigma, h)$$
$$p_r = \frac{V}{r}, p_\phi = \sigma, \rho = - - \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \tau = t - \frac{\partial V}{\partial h}$$

3) Метод разделения переменных

Пусть $H(q,p) = H(f^1(q^1,p),\ldots,f^n(q^n,p))$.

$$\frac{\partial f^i}{\partial p_i} \neq 0$$
$$W = -ht + V(1,\overline{\alpha},h)$$
$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i(q^i,\alpha_i), f^i\left(q^i, \frac{dV_i}{dq^i}\right) = \alpha^i$$
$$H(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = h$$
$$\frac{dV_i}{dq^i} = g_i(\alpha^i,q^i), V_i = \int g_i dq^i$$
$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \alpha}\right| = \left|\frac{\partial^2 V}{\partial q^1 \partial \alpha^1}\right| \ldots \left|\frac{\partial^2 V}{\partial q^n \partial \alpha^n}\right|, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial \alpha^i}\right| \neq 0$$

Лекция 5

Интегрируемость системы по Лиувиллю

Четвёртый метод отыскания полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби: отделение переменных

$$
\begin{aligned}
&H = f^n(f^{n-1}, q^n, p_n),\\
&f^{n-1} = f^{n-1}(f^{n-2}, q^{n-1}, p_{n-1}), \dots, f^2 = f^2(f^1, q^2, p^2), f^1 = f^1(q^1, p_1)\\
&H = h = \alpha^n, W = -\alpha^n t + V(q, \alpha), V = \sum_{i=1}^{n} V_i,\\
&V_1 = V_1(q^1, \alpha^1), V_2 = V_2(q^2, \alpha^1, \alpha^2), \dots, V_n = V_n(q^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n)\\
&V_i : f^i\left(\alpha^{i-1}, q^i, \frac{dV_i}{dq^i}\right) = \alpha^i i = \overline{1, n}, \alpha^0 = 1
\end{aligned}
$$

Предположим, что $\frac{\partial f^i}{\partial p_i} \neq 0$. Тогда все уравнения разрешимы относительно $\frac{dV_i}{dq^i} \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV_1}{dq^1} = g_1(q^1, \alpha^1) \Rightarrow V_1 = \int g_1(q^1, \alpha^1) dq^1\\
&\frac{dV_i}{dq^i} = g_i(\alpha^{i-1}, q^i, \alpha^i), i = \overline{2, n} \Rightarrow V_i = \int g_i(q^i, \alpha^{i-1}\alpha^i) dq^i\\
&\left|\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial \alpha}\right| \neq 0
\end{aligned}
$$

Теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновых систем

Определение Система ОДУ $\dot{x} = X(x, t), x \in R^k$ интегрируема в квадратурах (по Лиувиллю), если отыскание ее общего решения $x = x(t, c), c \in R^k$ сводится к арифметическим операциям, операциям дифференцирования, операциям решения конечных уравнений $f(x, t) = 0, F : R^k \times R \to R^k$ и взятию однократных интегралов вида $\int q(\xi) d\xi, \xi \in R$.

Рассмотрим систему

$$
\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q, H = H(q, p, t), q = (q^1, \dots, q^n), p = (p_1, \dots, p_n) \tag{1}
$$

Пусть $u(q, p, t), v(q, p, t)$- первые интегралы системы (1):

$$
(\dot{u})_{(1)} = \{\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial q}, \dot{q}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial p}, \dot{p}\right)\}_{(1)} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q}\right) =
$$

$$
= \frac{\partial u}{\partial t} + (u, H) = 0 : \frac{\partial v}{\partial t} + (v, H) = 0
$$

Определение Интегралы u, v находятся в инволюции, если $(u, v) = 0$.

Если гамильтонова система консервативна, $H = const, u$ не зависит от времени, то он обязательно находится в инволюции с $H : (u, H) = 0$.

Теорема Лиувилля Если гамильтонова система с n степенями свободы имеет n первых интегралов вида

$$f^r(q, p, t) = \alpha^r (r = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

удовлетворяющих условиям

$$rank\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = n, f = (f^1, \ldots, f^n) \tag{3}$$

$$(f^r, f^s) = 0 (r, s = \overline{1, n} \tag{4}$$

то система интегрируема по Лиувиллю (т.е. квадратурно).

Доказательство Из (2) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$

$$p_i = \phi_i(q, \alpha, t) \tag{5}$$

Тогда

$$(H)_p = H(q, \phi(q, \alpha, t), t) = H_*(q, \alpha, t)$$

Для доказательства теоремы рассмотрим следующую лемму.

Лемма Справедливо соотношение

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial q^i} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = -\frac{\partial H_*}{\partial q^i} \tag{7}$$

Доказательство леммы Докажем (6): $f^r(1, \phi(q, \alpha, t), t) = \alpha^r \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial f^r}{\partial q^i} + \frac{\partial f^r}{\partial p_j}\frac{\partial \phi_j}{\partial q^i} = 0 \\ \frac{\partial f^s}{\partial q^j} + \frac{\partial f^s}{\partial p_i}\frac{\partial \phi_i}{\partial q^j} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Умножим первую группу соотношений (8) на $\frac{\partial f^s}{\partial p_i}$ и просуммируем по i, а вторую умножим на $\frac{\partial f^r}{\partial p_j}$ и просуммируем по j, а затем из первой суммы вычтем вторую. В итоге получим

$$\frac{\partial f^r}{\partial q^i}\frac{\partial f^s}{\partial p_i} - \frac{\partial f^s}{\partial q^j}\frac{\partial f^r}{\partial p_j} = \frac{\partial f^r}{\partial p_j}\frac{\partial f^s}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q^j} - \frac{\partial \phi_j}{\partial q^i}\right)$$

Из (4) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial f^r}{\partial p_j}\frac{\partial f^s}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q^j} - \frac{\partial \phi_j}{\partial q^i}\right) = 0 \Rightarrow (6)$$

Докажем (7):

$$\dot{p}_i \overset{(5)}{=} \dot{\phi}_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_i}{\partial q^j}\dot{q}^j \overset{(6)}{=} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_j}{\partial q^i}\dot{q}^j \overset{(1)}{=} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_j}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_j}$$
$$\dot{p}_i \overset{(1)}{=} -\frac{\partial H}{\partial q^i} \Rightarrow \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q^i} = -\frac{\partial H_*}{\partial q^i} \Rightarrow (7)$$

Из формул (6), (7) следует, что $\exists W(q,\alpha,t) \in C^2$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -H_*, \frac{\partial W}{\partial q^i} = \phi_i$$
$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \alpha}\right| = \left|\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial p}\right|} \neq 0$$

Будем искать W в виде $W = -\int H_*(q,\alpha,t)dt + V(q,\alpha)$. В интеграле $\int H_* dt$ переменные q считаются параметрами $\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} = -H_*.V$ ищем в виде суммы $V = \sum_{i=1}^n V_i, V_1 = V_1(q^1,\ldots,q^n,\alpha),\ldots,V_n = V_n(q^n,\alpha)$.

$$\frac{\partial W}{\partial q^1} = \phi_1 \Rightarrow -\int \frac{\partial H_*}{\partial q^1}dt + \frac{\partial V_1}{\partial q^1} = \phi_1 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial q^1} = \phi_1 + \int \frac{\partial H_*}{\partial q^1}dt = \psi_1$$
$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial H_*}{\partial q^1} = 0 \Rightarrow \psi_1 = \psi_1(q^1,\ldots,q^n,\alpha) \Rightarrow V_1 = \int \psi_1 dq^1$$
$$\frac{\partial W}{\partial q^2} = -\int \frac{\partial H_*}{\partial q^2}dt + \frac{\partial V_1}{\partial q^2} + \frac{\partial V_2}{\partial q^2} = \phi_2 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial V_2}{\partial q^2} = \phi + 2 + \int \frac{\partial H_*}{\partial q^2}dt - \int \frac{\partial \psi_1}{\partial q^2}dq^1 = \psi_2$$
$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial H_*}{\partial q^2} = 0$$
$$\frac{\partial \psi_2}{\partial q^1} = \frac{\partial \phi_2}{\partial q^1} + \int \frac{\partial^2 H_*}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial q^2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial q^1} + \int \frac{\partial^2 H_*}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial q^2} - \int \frac{\partial^2 H_*}{\partial q^1 \partial q^2} = 0$$
$$\psi_2 = \psi_2(1^2,\ldots,q^n,\alpha) \Rightarrow V_2 = \int \psi_2 dq^2$$

И так далее - найдем все слагаемые как однократные интегралы. Значит, найдем полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, удовлетворяющий $\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0$. Теорема доказана.

Следствие Если $H = H(q,p)$, то система (1) всегда имеет интеграл $H = const$, т.е. для ее полной интегрируемости по Лиувиллю достаточно найти $n-1$ первых интегралов в инвалюции между собой и интегралом H.

Пример: тяжелое твердое тело (ТТТ) с неподвижной точкой $n = 3$. Всегда есть 2 интеграла

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$H = T + V = const$$
$$K_z = const$$

Еще один дополнительный интеграл существует в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, в них задача интегрируем по Лиувиллю.

Лекция 6

Интегрирование в моделях

Эллиптические интегралы 1 и 2 рода. Их свойства

Определение 1 Эллиптический интеграл 1 рода

$$\mathscr{K}(\psi, k) = \int_o^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\psi}}$$

Эллиптический интеграл 2 рода

$$\mathscr{E}(\psi, k) = \int_o^\psi \sqrt{1-k^2 sin^2\psi} d\psi$$

ψ - переменная, $|k| < 1$ - параметр

Определение 2 Полный эллиптический интеграл 1 рода

$$K = \mathscr{K}(\frac{\pi}{2}, k) = K(k)$$

Полный эллиптический интеграл 2 рода

$$E = \mathscr{E}(\frac{\pi}{2}, k) = E(k)$$

Свойства полных эллиптических интегралов

0) $E(-k) = E(k), K(k) = K(-k)$

1) $K(0) = \frac{\pi}{2} = E(0), E(\pm 1) = 1, \lim_{|k|\to 1-0} K(k) = +\infty$

2) $(1-k^2)K(k) < E(k) < K(k)$
   $1-k^2 < 1-k^2 sin^2\psi$

3) $E' = \frac{1}{k}(E-K), K' = \frac{E-(1-k^2)K}{k(1-k^2)}$

   При положительных K, E убывает. $E'\Big|_{k=0} = K'\Big|_{k=0} = 0$
   $E''\Big|_{k=0} = -\frac{\pi}{4}, K''\Big|_{k=0} = \frac{\pi}{4}$

4) $|k| \ll 1 E = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{k^2}{4} + O(k^4)), K = \frac{\pi}{2}(1 + \frac{k^2}{4} + O(k^4))$

5) $K = \dfrac{1}{2}\, ln \dfrac{1}{1-k^2}\, O(1), \;\; |k| \to 1$

Квадратура для математического маятника

Математический маятник - материальная точка, двигающаяся по гладкой неподвижной окружности радиуса l в поле силы тяжести. Введем обобщенную координату q и рассмотрим маятник на рис. 6.1. Система галономная с идеальными связями, поэтому уравнения движения можно записать в виде уравнений Лагранжа 2 рода.

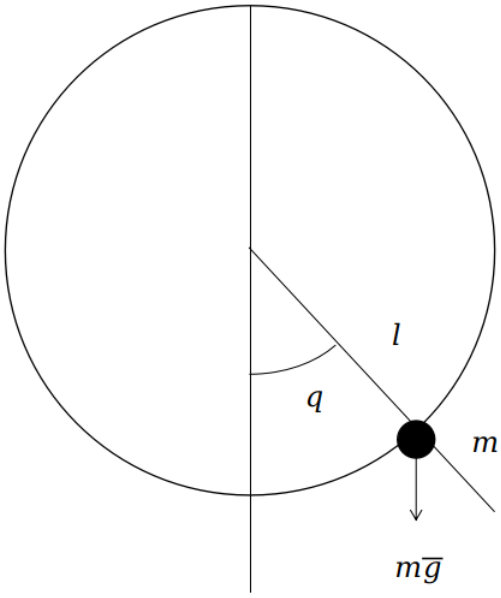

Рис. 6.1: Математический маятник

$$T = \frac{ml^2q^2}{2}, V = mgl(1 - cosq), L = T + V$$
$$m = 1, g = 1, l = 1$$
$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - 1 + cosq$$
$$H = \frac{\dot{q}^2}{2} + 1 - cosq = h$$

Рассмотрим различные состояния. При $h = 0$ получаем равновесие математического маятника, т.е. $q = 0$. При $0 < h < 2$ маятник совершает периодические колебания, которые на фазовой плоскости представляют собой замкнутые кривые. При $h = 2, q = \pi$, а также возникает сепаратриса. При $h > 2$ получаем вращения. Далее рассмотрим колебания и вращения и напишем для них квадратуры, которые будут являться эллиптическими интервалами 1 и 2 рода. Из уравнения для H

получим, что $\dot{q} = \pm\sqrt{2(h-1+cosq}$ $\Rightarrow$ квадратура для математического маятника равна

$$\pm\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{2(h-1+cosq)}} = t - t_0$$

При $t = t_0, q = q_0$ получаем начальное состояние.

1) **Квадратура для вращений**

$h > 2, h = \dfrac{2}{k^2}$

$$1 - cosq = 2sh^2\frac{q}{2}$$
$$t - t_0 = \pm\int_{\frac{q_0}{2}}^{\frac{q}{2}}\frac{2d(\frac{q}{2})}{\sqrt{2\left(\frac{2}{k^2} - 2sin^2\frac{q}{2}\right)}} = \pm\int_{\frac{q_0}{2}}^{\frac{q}{2}}\frac{kd\psi}{\sqrt{1-k^2sin^2\psi}} =$$
$$= \pm k\left(\mathscr{K}\left(\frac{q}{2},k\right) - \mathscr{K}\left(\frac{q_0}{2},k\right)\right)$$

Общее решение уравнения движения для математического маятника $q = q(t, q_0, t_0, k) = q(t, t_0, q, q_0)$. А период $T = 2kK(k)$. При рассмотрении предельного значения $|k| \to 1-0, h \to 2+0$, получаем приближение к сепаратрисам и бесконечный период. При $k = 0\, T = \pi k\left(1 + \frac{k^2}{4}\right) = \pi\sqrt{\frac{2}{h}}$. Из начального условия получаем, что $h = \frac{\dot{q}_0^2}{2}$. При подстановке получаем $T = 2\pi\dot{q}$.

С другой стороны получаем результат, отвечающий тому, как происходит в реальности при $k = 0$:

$$T = \frac{L}{\dot{q}_0} = \frac{2\pi}{\dot{q}_0}$$

2) **Квадратура для колебаний**

$$0 < h < 2, |q| < \alpha \Rightarrow$$
$$1 - cos\alpha = h \Rightarrow 2sin^2\frac{\alpha}{2} = h$$
$$k = sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{h}{2}}$$

Сделаем замену $ksin\psi = sin\frac{q}{2}$ и получим итоговую замену

$$t - t_0 = \mathscr{K}(\psi, k) - \mathscr{K}(\psi_0, k) \Rightarrow q = q(t, t_0, q, q_0)$$
$$k = sin\frac{\alpha}{2}, t = \frac{T}{4}, q = \alpha$$
$$\frac{T}{4} = K(k) \Rightarrow T = 4K(k) = 2\pi\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

Полный интеграл уравнений Гамильтона-Якоби для математического маятника

$$H = H(q,p,t), \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \alpha} \neq 0$$

Тогда $W(t,q,\alpha)$ - полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби. Для получения

1) $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta \Rightarrow q = q(\alpha, \beta, t)$

2) $\frac{\partial W}{\partial q} = p \Rightarrow p = p(\alpha, \beta, t)$

q, p - решение канонических уравнений Гамильтона.

$$L = \frac{q^2}{2} - 1 + cosq$$
$$H = \frac{p^2}{2} + 1 - cosq$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + 1 - cosq = 0$$

H не зависит от времени, значит W ищем в виде:

$$W = -ht + V(q,h)$$
$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) + 1 - cosq$$
$$V = \pm \int_0^q \sqrt{2(h - 1 + cosq)}dq$$

1) **Для вращений:** $h > 2, k = \sqrt{\frac{2}{h}}, h = \frac{2}{k^2}$

$$V = \pm 2 \int \sqrt{2\left(\frac{2}{k^2} - 2sin^2\frac{q}{2}\right)}d(\frac{q}{2}) = \pm\frac{4}{k}\int_0^{\frac{\psi}{2}} \sqrt{1 - k^2 sin^2\psi}d\psi = \pm\frac{4}{k}\mathscr{E}(\psi, k)$$
$$W = -ht \pm \frac{4}{k}\mathscr{E}(\psi, k) = -ht \pm \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{h}}\mathscr{E}(\psi, \sqrt{\frac{2}{h}})$$
$$-t + \frac{\partial}{\partial n}\left(2\sqrt{2h}\mathscr{E}\left(\psi, \sqrt{\frac{2}{h}}\right)\right) = \beta$$
$$-t + \sqrt{\frac{2}{h}}\mathscr{K}\left(\psi, \sqrt{\frac{2}{h}}\right) = \beta$$

2) **Для колебаний:** $0 < h < 2, k = sin\frac{\alpha}{2}$

$$V = \pm 2\int\sqrt{2\left(k^2 - 2sin^2\frac{q}{2}\right)}dq = \pm\int\frac{k^2cos^2\psi d\psi}{\sqrt{1-k^2sin^2\psi}} = \pm 4\mathscr{E}(\psi,k) - (1-k^2)\mathscr{K}(\psi,k)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7

Переменные „действие-угол“

Подробнее о методе разделения переменных при отыскании первого интеграла уравнения Гамильтона-Якоби

Уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) = 0$$

Случаи полного разделения переменных в системе:

1) $H = H(f_1(p_1, q_1) = h, \ldots, f_n(p_n, q_n)), f_i(p_i, q_i) = \alpha_i, \frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0, h = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$S = -ht + V(q_1, \ldots, q_n), V = \sum_{i=1}^{n} V_i(q_i)$$
$$f_i(\frac{V_i}{q_i}, q_i) = \alpha_i, \frac{V_i}{q_i} = g_i(q_i, \alpha_i)$$
$$V = \sum_i \int g_i(q_i, \alpha_i) dq_i$$
$$S = -h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)t + V$$

2) $H = F_n(q_n, p_n, F_{n-1}(q_{n-1}, p_{n-1}, F_{n-2}(\ldots, F_2(q_2, p_2, F_1(q_1, p_1))))$

$$F_1(q_1, p_1) = \alpha_1, F_2(q_2, p_2, \alpha_1), \ldots, F_i(q_i, p_i, \alpha_{i-1}) = \alpha_i, \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \neq 0$$
$$S = -ht + \sum_i V_i(q_i)$$
$$F_1(q_1, \frac{V_1}{q_1}) = \alpha_1, F_2(\alpha_1, q_2, \frac{V_2}{q_2} = \alpha_2, dots \Rightarrow \frac{V_1}{q_1} = g_1(q_1, \alpha_1), \frac{V_2}{q_2} = g_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) \ldots$$
$$S = -\alpha_n t + \sum_i \int g_i(q_i, \alpha_i, \alpha_{i-1}) dq_i$$

Система Лиувилля

Пусть кинетическая и потенциальная энергия механической системы имеют структуру:

$$T = \frac{1}{2}Q\sum_{i=1}^{n} R_i(1_i)\dot{q}_i^2$$
$$V = \frac{\sum_i D_i(q_i)}{Q}, Q = \sum_i Q_i(q_i)$$

Тогда уравнение Гамильтона-Якоби допускает полный интеграл методом разделения переменных.

$$p_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Q, R_i\dot{q}_i$$
$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{QR_i} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow H = (\sum p_i\dot{q}_i - L)_{(*)}, H = \frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{2R_i} + D_i\right)$$
$$S = -ht + V(q_1, \ldots, q_n)$$
$$\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2R_i}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)^2 + D_i\right) = h$$

Задача Если $H = \frac{\sum_i f_i(p_i, q_i)}{\sum_i \phi_i(p_i, q_i)}$, то $f_i - h\phi_i = \alpha_i$ - первый интеграл.

Ищем V в виде

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i(q_i)$$
$$\frac{1}{2R_i}\left(\frac{V}{q_i}\right)^2 + D_i - hQ_i = \alpha_i$$
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0 \Rightarrow \left(\frac{V}{q_i}\right)^2 = f_i(h, \alpha_i, q_i), f_i = 2R_i(\alpha_i + hQ_i - D_i)$$
$$S = -ht + \sum_{i=1}^{n}\int\sqrt{f_i(h, \alpha_i, q_i)}dq_i$$

Система Штеккеля (n=3)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(q_1) & \varphi_2(q_2) & \varphi_3(q_3) \\ \psi_1(q_1) & \psi_2(q_2) & \psi_3(q_3) \\ \xi_1(q_1) & \xi_2(q_2) & \xi_3(q_3) \end{vmatrix}$$
$$T = \frac{\Delta}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{\phi_1} + \frac{\dot{q}_2^2}{\phi_2} + \frac{\dot{q}_3^2}{\phi_3}\right)$$
$$W = \frac{f_1(q_1)\phi_1 + f_2(q_2)\phi_2 + f_3(q_3)\phi_3}{\Delta}$$

ϕ_i - алгебраические дополнения элементов 1 строки. Тогда после преобразования Лежандра

$$H = \frac{1}{2\Delta}(\phi_1 p_1^2 + \phi_2 p_2^2 + \phi_3 p_3^2) + \frac{f_1\phi_1 + f_2\phi_2 + f_3\phi_3}{\Delta}$$
$$S = -ht_+ V(q_1, \ldots, q_n)$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 \phi_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 \phi_2 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)^2 \phi_3 = 2(h\Delta - f_1\phi_1 - f_2\phi_2 - f_3\phi_3)$$
$$\varphi_1\phi_1 + \varphi_2\phi_2 + \varphi_3\phi_3 = \Delta$$
$$\psi_1\phi_1 + \psi_2\phi_2 + \psi_3\phi_3 = 0$$
$$\xi_1\phi_1 + \xi_2\phi_2 + \xi_3\phi_3 = 0$$
$$V = \sum V_i(q_i)$$

Если $\left(\frac{\partial V_i}{\partial q_i}\right)^2 = 2(h\varphi_i + a_1\psi_i + a_2\xi_i - f_i)), i = \overline{1,3}$, то полученная выше запись будет решением уравнения Гамильтона-Якоби. Заметим, что для каждого фиксированного i выражение в правой части зависит только от $q_i \Rightarrow V_i = V_i(q_i, h, a_1, a_2)$.

Переход к переменным, при которых уравнение Гамильтона-Якоби решается методом разделения переменных

Пусть $\widetilde{P}_i, \widetilde{Q}_i$ - каноническая замена переменных.

$$\widetilde{P}_i = \widetilde{P}_i(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t), \widetilde{Q}_i = \widetilde{Q}_i(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t)$$

Замена невырожденная, т.к.

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial p} & \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial q} \\ \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial p} & \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial q} \end{vmatrix} \neq 0$$

Замена каноническая, значит, для нее справедлив критерий каноничности.

$$\sum_i p_i \delta q_i - \sum \widetilde{P}_i, \delta, \widetilde{Q}_i = \delta F(\overline{p}, \overline{q}, t)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

δ - производная при фиксированном времени. Можно обратить замену

$$
\begin{aligned}
&p_i = p_i(\widetilde{P}, \widetilde{Q}, t)\\
&q_i = q_i(\widetilde{P}, \widetilde{Q}, t)\\
&\left\|\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial p}\right\| \neq 0\\
&p_i = p_i(\overline{q}, \widetilde{P}, t)\\
&\widetilde{Q_i} = \widetilde{Q_i}(\overline{q}, \widetilde{P}, t)\\
&\sum_i p_i \delta q_i + \sum_i \widetilde{Q_i}\delta\widetilde{P}_i - \sum_i \widetilde{Q_i}\delta\widetilde{P}_i - \sum \widetilde{P}_i, \delta, \widetilde{Q_i} = \delta F\\
&\sum_i p_i \delta q_i + \sum_i \widetilde{Q_i}\delta\widetilde{P}_i = \delta S(\overline{q}, \widetilde{P}, t) = \delta(F + \sum_i \widetilde{Q_i}\widetilde{P}_i)\\
&p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \widetilde{Q_i} = \frac{\partial S}{\partial \widetilde{P}_i}, i = \overline{1, n} \ \ (*)
\end{aligned}
$$

Если существует $S(\overline{q}, \widetilde{P}, t) \in C^2$ и $\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \widetilde{P}}\right\| \neq 0$, то формулы (*) определяют унивалентную каноническую замену, удовлетворяющую условию невырожденности.

$$
\begin{aligned}
&H = \{\frac{\partial S}{\partial t} + H\}\Big|_{\overline{p}=\overline{p}(\overline{P},\overline{Q},t), \overline{q}=\overline{q}(\overline{P},\overline{Q},t)} = H(\overline{P}, \overline{Q}, t)\\
&H = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\overline{q}, \frac{\partial S}{\partial \overline{q}}\right) = 0\\
&S = -ht + V(\overline{q})\\
&H(\overline{q}, \overline{p}) = h\\
&H = H\left(\overline{q}, \frac{\partial V}{\partial q}\right) = h \Rightarrow V(\overline{q}, \overline{\beta}), \overline{\beta} \in R^n\\
&\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial \overline{\beta}}\right\| \neq 0\\
&S = V(\overline{q}) \Rightarrow H = \{\frac{\partial S}{\partial t} + H\}\Big|_{\overline{p}=\overline{p}(\overline{P},\overline{Q},t), \overline{q}=\overline{q}(\overline{P},\overline{Q},t)} = h(\overline{\beta}) = h(\widetilde{P}) \Rightarrow H = H(\widetilde{P})\\
&\frac{\widetilde{P}}{t} = -\frac{\partial H}{\partial \widetilde{Q}} = 0\\
&\widetilde{P} = \overline{\beta} = const\\
&\frac{Q}{t} = \frac{\partial H}{\partial \overline{P}} = w(\widetilde{P})\\
&Q_i = w_i(\widetilde{P})t + Q_i^0
\end{aligned}
$$

Переменные „действие-угол“

Определение Переменные $(\overline{I}, \overline{\varphi})$($\overline{I}$ - новые импульсы, $\overline{\varphi}$ - новые координаты) называются переменными „действие-угол“, если эти переменные удовлетворяют условиям:

1) в переменных $(\overline{I}, \overline{\varphi})$ $H = H(\overline{I})$
   а) интегралы $\overline{I}$ не меняются от времени
   б) условные координаты φ меняются равномерно
2) "старые"координаты и индексы $\overline{p}, \overline{q}$ являются 2π-периодическими функциями в угловых координатах $\varphi : \overline{p} = \overline{p}(I, \overline{\varphi}), \overline{q} = \overline{q}(I, \overline{\varphi})$

$$
\begin{aligned}
&p_i = p_i(\overline{I}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = p_i(\overline{I}, \varphi_1 + 2\pi, \ldots, \varphi_n | 2\pi) \\
&q_i = q_i(\overline{I}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = q_i(\overline{I}, \varphi_1 + 2\pi, \ldots, \varphi_n | 2\pi) \\
&(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in T^n
\end{aligned}
$$

В одномерной системе

Пусть $(q, p) \in R^2$ - старые координаты; $p = p(I, \varphi), q = q(I, \varphi), p = p(I, \varphi + 2\pi), q = q(I, \varphi + 2\pi)$.

$$
\begin{aligned}
&H = H(q, p) = h \\
&\sum_h = \{(q, p) : H(q, p) = h\}
\end{aligned}
$$

Пусть $\gamma(h_0)$ - замкнутая фазовая кривая, лежащая на уровне Σ_{h_0} функции Гамильтона. Окрестность, в которой они определяются, $h_1 < h < h_2, dH\Big|_{h \in (h_1, h_2)} \neq 0$. При этом получается построение переменных „действие-угол“. $\gamma = \gamma(h)$ замкнута, движение периодично с периодом 2π. Начало движения находится в некоторой точке фазовой кривой и в момент 2π движение в этой точке заканчивается. Тогда интегральный инвариант Пуанкаре

$$
\begin{aligned}
&\oint\limits_{\gamma(h)} pdq = \oint\limits_{\gamma(h)} Id\varphi \\
&I \oint\limits_{\gamma(h)} d\varphi = 2\pi I \Rightarrow I = \frac{1}{2\pi} oint_{\gamma(h)} pdq
\end{aligned}
$$

Переменная I - деленная на 2π площадь фигуры, ограниченной замкнутой фазовой кривой $\gamma(h)$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 8

Нахождение переменных „действие-угол“

Уравнение Гамильтона-Якоби для определения производящей функции канонической замены

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma(h)} pdq \qquad (*)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для определения производящей функции канонической замены $W(q, I)$ имеет вид:

$$H(q, \frac{dW}{dq}) = h$$

Для $W(q, I)$ должно выполняться условие $\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial I} \neq 0$. Рассмотрим интеграл по замкнутой кривой, параметризованной S:

$$\oint\limits_{\gamma(h)} d\varphi = \oint\limits_{\gamma(h)} d\varphi(q(s, I), I) = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial s} ds = \{p = \frac{\partial W}{\partial q}, \varphi = \frac{\partial W}{\partial I}\} = \int_0^1 \frac{\partial^2 W}{\partial s \partial I} ds =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right) ds = \frac{\partial}{\partial I} \int_0^1 (\frac{\partial W}{\partial s}) ds = \frac{\partial}{\partial I} \int_0^1 \frac{\partial W}{\partial q} \frac{dq}{ds} ds = \frac{\partial}{\partial I} \oint\limits_{\gamma(h)} \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I}(2\pi I) =$$

$$= 2\pi$$

$W - 2\pi$ периодическая функция.

Нахождение переменной „угол“

$$\varphi = \frac{\partial W(q, I)}{\partial I} = \int_{q_0(I)}^{q} \frac{\partial q}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial I} dq - p_0(I) \frac{dq_0}{dI}$$

$q_0(I)$ выбирается с учетом специфики задачи. С помощью этих формул находятся переменные „действие-угол“.

Алгоритм нахождения переменных „действие-угол“

1) Используя зависимость $H = H(p,q) = h$ с учетом условия $dH\Big|_{\gamma(h)} \neq 0$, найти интервал изменения $h_1 < h < h_2$, при котором фазовые кривые замкнуты. Найти зависимость $p = p(h,q)$.

2) Используя (*) найти зависимость $I = I(h)$. Обратив её, найти зависимость новой функции Гамильтона от переменной действие.

3) Учитывая, что $I = I(h), h = H(p,q)$, подставляя h в $I(h)$, найти зависимость $I = I(H) = I(p,q)$.

4) Из специфики задач выбрав $q_0 = q_0(I)$, найти переменную φ, используя формулу
$$\varphi(q,I) = \frac{dh}{dI}\int_{q_0(I)}^{q} \frac{\partial p}{\partial h}dq - p_0(I)\frac{dq_0(I)}{dI} \qquad (**)$$

5) Подставляя $I = I(p,q)$ в (**), получим $\varphi = \varphi(p,q)$

Пример: гармонический осциллятор Гармонический осциллятор - материальная точка массой m, которая движется по прямой и которая к некоторой начальной точке прикручена пружиной жесткости k. В начальный момент пружина не растянута, кинетическая энергия точки равна $T = \frac{m}{2}\dot{q}^2$, а потенциальная - $V = \frac{k}{2}q^2$. По этим данным необходимо получить функцию Лагранжа $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2$. Осуществим преобразование Лежандра и от функции Лагранжа перейдем к функции Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$$
$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{w^2}{2}q^2$$
$$w^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow H = \frac{p^2}{2} + \frac{w^2}{2}q^2$$

По закону сохранения энергии

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{w^2}{2}q^2 = h$$
$$H = \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{a^2} = 1, b = \sqrt{2h}, a = \sqrt{\frac{2h}{w^2}}$$
$$dH\Big|_{\gamma} \neq 0$$
$$pdp + w^2qdq \neq 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Исключаем из рассмотрения $\{p = q = 0\}$. Значит, $h_1 = 0, h_2 = +\infty$ и два варианта: $h > 0$ или $h_1 < h < h_2$.

$$p = \pm\sqrt{2h - w^2q^2} \Rightarrow q \in (q_1, q_2) = \left(-\sqrt{\frac{2h}{w^2}}, \sqrt{\frac{2h}{w^2}}\right)$$

Выберем ориентацию на кривой $\gamma(h)$ так, чтобы ее обход происходил по часовой стрелке. Тогда

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma(h)} pdq = \frac{1}{2\pi}[\int_{-\sqrt{\frac{2h}{w^2}}}^{\sqrt{\frac{2h}{w^2}}} \sqrt{2h - w^2q^2}dq - \int_{\sqrt{\frac{2h}{w^2}}}^{-\sqrt{\frac{2h}{w^2}}} \sqrt{2h - w^2q^2}dq] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{\frac{2h}{w^2}}}^{\sqrt{\frac{2h}{w^2}}} \sqrt{2h - w^2q^2}dq = \{q = \sqrt{\frac{2h}{w^2}}sinu, u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2h(1 - sin^2u)}\sqrt{\frac{2h}{w^2}}cosudu = \frac{2h}{\pi w}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2udu = \frac{h}{\pi w}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2cos^2udu =$$
$$= \frac{h}{\pi w}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2u)du = \frac{h}{w} \Rightarrow I = \frac{h}{w} = \frac{p^2}{2w} + \frac{w}{2}q^2 \Rightarrow \widetilde{H} = wI$$
$$p = \pm\sqrt{2h - w^2q^2} = \pm\sqrt{2wI - w^2q^2} = p(I, q)$$
$$\frac{dp}{dh} = \pm\frac{1}{\sqrt{2wI - w^2q^2}}$$
$$\frac{dh}{dI} = w$$

Выберем $q_0 = q_0(I) = q_1 = -\sqrt{\frac{2h}{w^2}} = -\sqrt{\frac{2I}{w}}$. Тогда $p_0(I) = 0$. Необходимо найти интеграл

$$\varphi = w\int_{-\sqrt{\frac{2I}{w}}}^{q} \frac{dq}{\sqrt{2wI - w^2q^2}} \Rightarrow$$
$$\varphi = Arcsin\left(\sqrt{\frac{w}{2I}}q\right) + \frac{\pi}{2} = Arccos\left(-\sqrt{\frac{w}{2I}}q\right)$$

Окончательно

$$I = \frac{p^2}{2w} + \frac{w}{2}q^2$$
$$\varphi = \begin{cases} arccos\left(-\sqrt{\frac{w}{2I}}q\right) + 2\pi n, p \geqslant 0 \\ -arccos\left(-\sqrt{\frac{w}{2I}}q\right) + 2\pi n, p < 0 \end{cases}$$

Зависимость новых переменных через старые. p имеет тот знак, что и $sin\varphi \Rightarrow p = \sqrt{2wI}sin\varphi, q = -\sqrt{\frac{2I}{w}}cos\varphi$

Лекция 9

Переменные „действие-угол“: математический маятник

Математический маятник и его колебания

Математический маятник - материальная точка массы m, закрепленная на стрежне длины l, двигающаяся под действием силы тяжести. Функция Лагранжа

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{q}^2 + mglcos\varphi$$
$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + w_0^2cos\varphi, w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p = \dot{q}$$
$$H = \frac{1}{2}p^2 - w_0^2cosq = h$$
$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0 = \frac{\partial H}{\partial q}, p = 0 = sinq$$

Пусть β - максимальная амплитуда колебаний, тогда $cos\beta = -\frac{h}{w_0^2}, |h| < w_0^2, |q| < \pi$. Вспомним, что $I(h) = \oint_{\gamma(h)} pdq$. Преобразуем выражение для интеграла энергии:

$$p^2 = 2(h + w_0^2cosq) = 2w_0^2(cosq - cos\beta) = 4w_0^2(sin^2\frac{\beta}{2} - sin^2\frac{q}{2}) = \{sin\frac{q}{2} =$$
$$= sin\psi sin\frac{\beta}{2}\} = 4w_0^2sin^2\frac{\beta}{2}cos^2\psi$$

$p \geqslant 0, \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - обход происходит от $-\beta$ до β. При рассмотрении другого промежутка на ψ получаем другой путь обхода $\Rightarrow p = 2w_0sin\frac{\beta}{2}cos\psi$. Пусть $sin\frac{\beta}{2} = k \in (0, 1)$.

Переменная „действие“для колебаний математического маятника

Переменная действие - симметрична относительно осей координат, поэтому интегрирование идет по первой четверти.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$q \geqslant 0, p \geqslant 0, \psi \in (0, \frac{\pi}{2})$$
$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma(h)} pdq = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\psi) \frac{dq}{d\psi} d\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\psi) \frac{dq}{d\psi} d\psi$$
$$\frac{\pi}{2} < q < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow cos\frac{q}{2} \geqslant 0 \Rightarrow cos\frac{q}{2} = \sqrt{1 - k^2 sin^2\psi}$$
$$\frac{d}{d\psi} : sin\frac{q}{2} = sin\psi sin\frac{\beta}{2}$$
$$\frac{1}{2} cos\frac{q}{2} \frac{dq}{d\psi} = kcos\psi, \frac{dq}{d\psi} = \frac{2kcos\psi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\psi}}$$
$$p = 2w_0 kcos\psi \Rightarrow I(h) = \frac{8w_0 k^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\psi}} =$$
$$= \frac{8w_0}{\pi}(E(k) - (1 - k^2)K(k))$$

$E(k)$ - полный эллиптический интеграл 2 рода, $K(k)$ - полный эллиптический интеграл 1 рода.

$$\frac{dI(h)}{dk} = \frac{8w_0}{\pi} kK(k) \neq 0$$
$$\frac{dk}{dI} = \frac{\pi}{8w_0 kK(k)}$$
$$h = -w_0^2 cos\beta = -w_0^2(1 - 2sin^2\frac{\beta}{2}) = -w_0^2(1 - 2k^2) = 2w_0^2 k^2 - w_0^2$$
$$\dot{I} = 0, \dot{\varphi} = w$$
$$w = \frac{dh(I)}{I} = \frac{h}{k}\frac{k}{I} = \frac{\pi w_0}{2K(k)}$$

w-частота колебаний, а период $\tau = \frac{2\pi}{w} = \frac{4K(k)}{w_0}$

Переменная „угол“для колебаний математического маятника

$$\varphi(p, I) = \frac{dh}{dI} \int_{q_0(I)}^{q} \frac{\partial p}{\partial h} dq - p_0(I) \frac{dq_0(I)}{dI}$$

Выберем $q_0(I) = 0$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{p^2}{2} - w_0^2 cosq = h, p\frac{\partial p}{\partial h} = 1$$
$$\varphi(q, I) = \int_0^q \frac{\pi w_0}{2K(k)} \frac{dq}{p} = \{q = 2arcsin(ksin\psi, p = 2w_0 kcos\psi\} =$$
$$= \frac{\pi}{2K(k)} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\psi}} = \frac{\pi}{2} \frac{F(\psi, k)}{K(k)}$$

Попытаемся отсюда выразить ψ

$$u = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\theta}} \Rightarrow \theta = \theta(u)$$

Амплитуда $u : \theta = \theta(u, k) = am(u)$. Тогда функции Якоби

$$sn(u, k) = sin(am(u)) \quad - \text{эллиптический синус}$$
$$cn(u, k) = cos(am(u)) \quad - \text{эллиптический косинус}$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{F(\psi, k)}{K(k)}, \psi = am\left(\frac{2K(k)\varphi}{\pi}\right)$$

Выражение старых переменных через переменные „действие-угол“

$$q = 2arcsin[ksn\left(\frac{2K(k)\varphi}{\pi}, k\right)]$$
$$p = 2w_0 cn\left(\frac{2K(k)\varphi}{\pi}, k\right)$$

Случай вращения

$$H = \frac{p^2}{2} - w_0^2 cosq = h$$

Будем рассматривать вращение при $p > 0, h > w_0^2$. Пусть в момент времени $t = 0 : q = 0, p = p_0 > 0$. Тогда

$$h = \frac{p_0^2}{2} - w_0^2 = \frac{2w_0^2}{k_2^2} - w_0^2$$
$$k_2^2 = \frac{4w_0^2}{p_0^2} = \frac{2w_0^2}{w_0^2 + h}$$

$0 < k < 1$ на вращениях, т.е. при $h < w_0^2$

$$p = \frac{2w_0}{k_2}\sqrt{1 - k_2^2 sin^2\frac{q}{2}}$$
$$I = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma(h)} pdq = \frac{w_0}{\pi k_2}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1 - k_2^2 sin^2\frac{q}{2}}dq = \{q = 2x\} = \frac{4w_0}{\pi k_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - k_2^2 sin^2 x}dx$$
$$I = \frac{4w_0 E(k_0)}{\pi k_2} \Rightarrow k_2 = k_2(I)$$
$$\frac{dI}{dk_2} = -\frac{4w_0 K(k_2)}{\pi k_2^2} \neq 0$$
$$\widetilde{H} = \widetilde{h}(I) = \frac{2w_0^2}{k_2^2(I)} - w_0^2$$
$$w_2 = \frac{\partial\widetilde{H}}{\partial I} = \frac{\partial\widetilde{H}}{\partial k_2}\frac{dk_2}{dI} = \frac{\pi w_0}{k_2 K(k_2)}$$

Производящая функция замены, от переменных (p, q) к переменным „действие-угол “(I, φ):

$$V(q, I) = \frac{4w_0}{k_2}E(\frac{q}{2}, k_2)$$
$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial I} = \frac{\partial V}{\partial k_2}\frac{\partial k_2}{\partial I} = \frac{\pi F(\frac{q}{2}, k_2)}{K(k_2)}$$
$$q = 2am(\frac{K(k_2), \varphi}{\pi})$$
$$p = \frac{2w_0}{k_2}\sqrt{1 - k_2^2 sin^2\frac{q}{2}} = \frac{2w_0}{k_2}\sqrt{1 - k_2^2 sin^2(\frac{K(k_2)\varphi}{\pi}, k_2)} = \frac{2w_0}{k_2}dn(\frac{K(k_2)\varphi}{\pi}, k)$$

Лекция 10

Переменные „действие-угол“: Задача Кеплера

Постановка плоской задачи Кеплера

Точка массы m двигается в неподвижной плоскости под действием ньютоновского притяжения к неподвижному центру. Вводятся полярные координаты (r, ψ). Тогда скорость точки $\overline{v} = \dot{r}\overline{e_r} + \dot{\psi}\overline{e_\psi}$. Кинетическая энергия $T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2)$, а потенциальная энергия $V = -\frac{\mu m}{r}, \mu = \gamma M$. Тогда функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2) + \frac{\mu m}{r}$$
$$L = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\psi}^2}{2} + \frac{\mu}{r}$$

Функция Гамильтона после преобразования Лежандра:

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\psi^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}$$
$$p_\psi = c = const, p_r = p$$
$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}$$
$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c})^2 - \frac{\mu^2}{2c^2} = h$$

Уровень Σ_n гамильтониана задается соотношением:

$$p^2 + (\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c})^2 = 2h + \frac{\mu^2}{c^2} \geqslant 0$$
$$\frac{\mu}{c} - \sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2}} \leqslant \frac{c}{r} \leqslant \frac{\mu}{c} + \sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2}}$$

В области $r > 0$ уровень Σ_h ограничен при $\frac{\mu}{c}\sqrt{2h + \frac{\mu}{c}} > 0, 0 > 2h \geqslant -\frac{\mu^2}{c^2}$.

1) Если $2h < -\frac{\mu^2}{c^2}$, то $\Sigma_h = \varnothing$

2) Если $2h = -\frac{\mu^2}{c^2}$, то $\Sigma_h = (p, r) = (0, \frac{c^2}{\mu}$.

При $h > 0$ фазовые кривые не замкнуты.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Построение переменной „действие“ в задаче

Кривая $\gamma(h)$ задается уравнением:

$$p_2 = \frac{2hr^2 + 2\mu r - c^2}{r^2} \geqslant 0 \Rightarrow r_1(h) \leqslant r \leqslant r_2(h)$$
$$r_{1,2}(h) = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2hc^2}}{2h}$$

Введем

$$r_c = r_c(h) = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{\mu}{2h}$$
$$A = A(h) = \frac{r_1 - r_2}{2} = -\frac{\sqrt{\mu^2 + 2hc^2}}{2h}$$
$$r(\lambda) = r_c - Acos\lambda$$
$$p(\lambda) = \sigma(\lambda)sin\lambda, \sigma(\lambda) \leqslant 0$$

$\sigma(\lambda)$ выбирается так, чтобы для заданной параметризации уравнение для кривой $\gamma(h)$ задавалось так, как приведено выше.

$$p(\lambda) = \frac{\sqrt{-2h}Asin\lambda}{r_c - Acos\lambda}$$
$$W = \int_{q_0(I)}^{q} pdq, \varphi = \frac{\partial W}{\partial I}, W = W(q, I)$$
$$I = \int_{r_1}^{r} pdr = \int_0^{\lambda} p(\lambda)\frac{dr}{d\lambda}d\lambda = \{\frac{dr}{d\lambda} = Asin\lambda\} = \int_0^{\lambda} \frac{\sqrt{-2h}A^2sin^2\lambda}{r_c - Acos\lambda}d\lambda = G(\lambda, h)$$
$$A^2sin^2\lambda = A^2 - r_c^2 + (r_c - Acos\lambda)(r_c + Acos\lambda)$$
$$G(\lambda, h) = \sqrt{-2h}\int_0^{\lambda}(r_c + Acos\lambda + \frac{A^2 - r_c^2}{r_c - Acos\lambda}d\lambda = \sqrt{-2h}(r_c\lambda + Asin\lambda -$$
$$- 2\sqrt{r_c^2 - A^2}Arctg\frac{(r_c + A)tg\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{r_c^2 - A^2}})$$
$$G(0, h) = 0, \lambda = \pi + 2\pi k$$
$$G(\pi + 2\pi k, h) = \sqrt{-2h}(r_c(\pi + 2\pi k) - 2\sqrt{r_c^2 - A^2}(\frac{\pi}{2} + \pi k))$$

Обратимся к переменной действие:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} pdr = \int_{-\pi}^{\pi} p(\lambda)\frac{dr}{d\lambda}d\lambda = \frac{G(\pi, h) - G(-\pi, h)}{2\pi}$$
$$I(h) = \sqrt{-2h}(r_c - \sqrt{r_c^2 - A^2})$$

Напишем в явном виде $r_c = -\frac{\mu}{2h}, r_c^2 - A^2 = -\frac{c^2}{2h}$

$$I(h) = \sqrt{-2h}\left(-\frac{\mu}{2h} - \sqrt{\frac{-c^2}{2h}}\right) = \frac{\mu}{\sqrt{-2h}} - c \qquad (*)$$

Необходимо разрешить последнее соотношение относительно h :

$$h(I) = \widetilde{H(I)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{I+c}\right)^2 \quad (**)$$
$$W = \int_{r_1}^{r} pd\lambda = \int_0^{\lambda} p\frac{dr}{d\lambda}d\lambda = g(\lambda(r, h(I)), h(I))$$

Построение переменной „угол“в задаче

Получим угловую переменную из условия $\varphi = \frac{\partial W}{\partial I}$:

$$\varphi = \frac{dh}{dI}\int_{r_1}^{r}\frac{\partial p}{\partial h}dr - p_1(I)\frac{r_1}{I}$$

Считая, что p лежит на кривой $\gamma(h)$, выберем $p_r(I) = 0$.

$$\frac{dh}{dI} = \frac{\mu^2}{(I+c)^3}$$
$$\frac{p^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = h, p\frac{\partial p}{\partial h} = 1$$

С учетом выбранной параметризации p :

$$\frac{\partial p}{\partial h} = \frac{1}{p} = \frac{r_c - Acos\lambda}{\sqrt{-2h}Asin\lambda}, \frac{dr}{d\lambda} = Asin\lambda$$
$$\int_{r_1}^{r}\frac{\partial r}{\partial h}dr = \int_0^{\lambda}\frac{\partial p}{\partial h}\frac{dr}{d\lambda}d\lambda = \int_0^{\lambda}\frac{r_c - Acos\lambda}{\sqrt{-2h}}d\lambda = \frac{1}{\sqrt{-2h}}(r_c\lambda - Asin\lambda)$$
$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-2h}}(r_c\lambda - Asin\lambda)\frac{\mu^2}{(I+c)^3}$$
$$\varphi = \lambda - \sqrt{1 - \frac{c^2}{(I+c)^2}}sin\lambda, I = \frac{\mu}{\sqrt{-2h}} - c$$

Знак p совпадает со знаком $sin\lambda \Rightarrow$

$$\lambda(r,h) = Arccos(\frac{r_c - r}{A}) = \begin{cases} arccos(\frac{r_c - r}{A}) + 2\pi n, p \geqslant 0 \\ -arccos(\frac{r_c - r}{A}) + 2\pi k, p \leqslant 0 \end{cases}$$

Таким образом, получаем следующие зависимости: $\varphi = \varphi(p,r), I = I(p,r)$, т.е. получаем зависимости переменных „действие-угол“ от старых переменных.

Динамика в переменных „действие-угол“. Резонанс

Чаще всего переменные „действие-угол“ используются в теории возмущения гамильтоновых систем.

$$\begin{aligned}
&\dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} = 0, \dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \nu_i(\overline{I}) \\
&(\nu_1, \ldots, \nu_n) = \overline{\nu}(\overline{I}) \ - \ \text{вектор частот} \\
&T_I^n = \{(\overline{I}, \overline{\varphi}), \varphi \in T^n\} \\
&\dot{\overline{\varphi}} = \overline{\nu}, d\varphi_1, \ldots, d\varphi_n
\end{aligned}$$

Эти частоты могут оказаться такими, что существует набор целых чисел

$$\begin{aligned}
&\exists \overline{k}, \overline{k} \in Z^n \ \{0\} \\
&(\overline{k} \cdot \overline{\nu}) = k_1\nu_1 + \cdots + k_n\nu_n = 0
\end{aligned}$$

$(\overline{k} \cdot \overline{\nu}) = 0$ - резонанс. Если в системе имеется резонанс, то вектор частот $\overline{\nu}$ и соответствующий тор называются резонансом.

Утверждение Если вектор частот $\overline{\nu}$ - не резонансный, то всякая траектория, определяемая уравнением $\dot{\overline{\varphi}} = \nu(I)$ обматывает тор T_I^r всюду плотно.

Особый переход к переменным „действие-угол“для систем с малыми параметрами

$$\begin{aligned}
&H(\overline{I}, \overline{\varphi}, \overline{\varepsilon}) = H_0(\overline{I}) + \varepsilon H_1(\overline{I}, \varphi) + O(\varepsilon^2) \\
&(\overline{I}, \overline{\varphi} \, mod \, 2\pi) \to (\overline{J}, \overline{\psi} \, mod \, 2\pi) \\
&H(\overline{I}, \overline{\varphi}, \overline{\varepsilon}) \to \mathscr{H}(\overline{J}, \varepsilon) \\
&W(\overline{J}, \overline{\varphi}, \varepsilon) = W_0(j, \varphi) + \varepsilon W_1(J, \varphi) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

$\varepsilon = 0$ - все хорошо $W_0(\overline{J}, \overline{\varphi})$, $\frac{\partial W_0}{\partial \varphi} = J$.

$$\psi = \frac{\partial W}{\partial J} = \varphi + \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial J} + O(\varepsilon^2)$$
$$I = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = J + \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2)$$
$$\mathscr{H}(\overline{J},\varepsilon) = H(\overline{J} + \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}) + O(\varepsilon^2), \overline{\varphi}, \varepsilon)$$
$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0(J) + \varepsilon\mathscr{H}_1(\overline{J}) + O(\varepsilon^2) = H_0(\overline{J} + \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2)) + \varepsilon H_1(\overline{J}+$$
$$+ \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2), \overline{\varphi}) + O(\varepsilon^2)$$
$$\mathscr{H}_0(\overline{J}) = H_0(\overline{J})$$

$$\mathscr{H}_1(J) = \left(\overline{\nu}(\overline{J}) \cdot \frac{\partial W_1(\overline{J},\varphi)}{\partial \varphi}\right) + H_1(\overline{J},\overline{\varphi}) \tag{1}$$

Разложим $H_1(J,\varphi), W_1(\overline{J},\varphi)$ в ряд Фурье.

$$H_1(\overline{J},\overline{\varphi}) = \sum_{\overline{k}\in Z^n} h_k(\overline{J})e^{i(\overline{k}\overline{\varphi})}$$
$$W_1(\overline{J},\overline{\varphi}) = \sum_{\overline{k}\in Z^n} w_k(\overline{J})e^{i(\overline{k}\overline{\varphi})}$$
$$(\overline{\nu}, \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}) = \sum_{\overline{k}\in Z^n} i(\overline{\nu}\cdot\overline{k})w_k e^{i(\overline{k}\overline{\varphi})}$$

Уравнение (1) распадается на 2 части:

1) $\overline{k} = 0, \mathscr{H}_1(\overline{J}) = h_0(\overline{J})$

2) $\overline{k} \neq 0, 0 = i(\overline{\nu}(\overline{J})\cdot\overline{k})w_k(\overline{J}) + h_k(\overline{J})$

   $W_k(\overline{J}) = \frac{-h_k(\overline{J})}{i(\nu(\overline{J})\cdot k)} = \frac{ih_k(\overline{J})}{(\overline{\nu(J)}\cdot\overline{k})}$

Вопрос 1 Сходится ли ряд $W_0 + \varepsilon W_1 + \ldots$
$\Gamma_k = \{J \in R^n : (\overline{\nu}(\overline{J},\overline{k})) = 0\}$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11

Переменные „действие-угол“: теорема Пуанкаре

Нахождение первого интеграла. Резонансная поверхность. Вековое множество. Система, интегрируемая по Пуанкаре

Система невырождена по импульсам в некоторой области $D \subset R^n$

$$det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j}\right) \neq 0$$

Найдем первый интеграл гамильтоновой системы

$$F(\overline{I}, \overline{\varphi}, \varepsilon) = F_0(\overline{I}, \overline{\varphi}) + \varepsilon F_1(\overline{I}, \overline{\varphi}) + \varepsilon^2 F_2(\overline{I}, \overline{\varphi}) + O(\varepsilon^3)$$

F_i - гладкие функции. Т.к. интеграл не зависит от времени, то в силу уравнений движения

$$\begin{aligned}
&0 = \{F, H\} = \{F_0, H_0\} + \varepsilon(\{F_1, H_0\} + \{F_0, H_0\}) + O(\varepsilon^2) \Rightarrow \\
&\{F_0, H_0\} = 0, \{F_1, H_0\} + \{F_0, H_0\} = 0
\end{aligned}$$

Заметим, что F_0 не зависит от $\overline{\varphi}$. Разложим F_0, F_1 в ряды Фурье:

$$\begin{aligned}
&F_0(\overline{I}, \overline{\varphi}) = \sum_{\overline{k} \in Z^n} f_k(\overline{I}) e^{i(\overline{k}\overline{\varphi})} \\
&F_1(\overline{I}, \overline{\varphi}) = \sum_{\overline{k} \in Z^n} g_k(\overline{I}) e^{i(\overline{k}\overline{\varphi})} \\
&\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_0}{\partial \varphi} \frac{\partial H_0}{\partial I} = 0 \\
&\sum_{\overline{k} \in Z^n} i(\overline{\nu} \cdot \overline{k}) f_k(I) e^{i(\overline{k}\overline{\varphi})} = 0 \Rightarrow f_k(I) = 0
\end{aligned}$$

Разложим в ряд Фурье H_1

$$\begin{aligned}
&H_1(\overline{I}, \overline{\varphi}) = \sum_{\overline{k} \in Z^n} h_k(\overline{I}) e^{i(\overline{k}\overline{\varphi})} \\
&\left(\frac{\partial H_0}{\partial \overline{I}} \cdot \overline{k}\right) f_k - \left(\frac{\partial F_0}{\partial \overline{I}}\right) h_k = 0
\end{aligned}$$

Для каждого $h_k \neq 0$ определим вековую (резонансную) поверхность $\Gamma_k = \{\overline{I} \subset D\,(\overline{\nu}(I) \cdot k) = 0, h_k(I) \neq 0\}$.

Определение Множество

$$B = \cup_{k \neq 0} \Gamma_k$$

называется вековым множеством.

Пусть $\overline{I} \in B$, тогда $I \in \Gamma_k$ для некоторого k $\Rightarrow (\overline{\nu} \cdot k) = 0, h_k \neq 0 \Rightarrow (\frac{\partial \overline{F_0}}{\partial I}, k) = 0$. Следовательно, в точках $I \in \Gamma_k$ градиенты $\frac{\partial \overline{F_0}}{\partial I}, \frac{\partial \overline{H_0}}{\partial I}$ лежат в одной плоскости, нормалью к которой является $\overline{k}$.

Определение Система интегрируема по Пуанкаре, если она имеет полный набор гладких интегралов $F^j(\overline{I}, \overline{\varphi}, \varepsilon), j = \overline{1, n}$. При чем $F_0^j = F^j\Big|_{\varepsilon=0}$ не являются зависимыми.

Теорема Пуанкаре

Теорема Пуанкаре Предположим, что вековое множество всюду плотно в D. Тогда система не интегрируема по Пуанкаре.

Если $I \in \Gamma_k$, то градиенты функций $F_0^1, \ldots, F_0^n$ ортогональны k. Следовательно, эти функции зависимы.

$$\Delta(I) = det\left(\frac{\partial(F_0^1 \ldots F_0^n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)}\right) = 0$$

Непрерывная функция, обращающаяся в ноль на всюду плотном множестве, равна нулю тождественно.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы.

$$\begin{aligned}
&H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + \varepsilon^2 H_2(I, \varphi)\\
&I = \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \psi = \frac{\partial W}{\partial J}\\
&W = W_0(J, \varphi) + \varepsilon W_1(J, \varphi) + \varepsilon^2 W_2(J, \varphi) + \ldots\\
&H(J) = H_0(J, \varphi) + \varepsilon H_1(J, \varphi) + \varepsilon^2 H2(J, \varphi) + \ldots\\
&\varepsilon_0 : H_0(J) = \mathscr{H}_0(J)\\
&\varepsilon_1 : \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\frac{\partial H_0}{\partial J} + H_1(J, \varphi) = \mathscr{H}_1(J)\\
&\varepsilon^2 : \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial J \partial J} + \frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\frac{\partial H_0}{\partial J} + \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\frac{\partial H_1}{\partial J} + H_2(J, \varphi) = \mathscr{H}_2(J)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathscr{H}_1(J) = \overline{H_1}(J, \varphi)\\
&\overline{H_1}(J, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(J, \varphi) d\varphi\\
&\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} = \frac{1}{\nu(J)}(H(J) - H_1(J, \varphi))
\end{aligned}$$

Находим W_1 и дальнейшие функции

$$\frac{\partial H_0}{\partial j}\frac{\partial W_2}{\partial \varphi} = \mathscr{H}_2(J) - H_2(J,\varphi) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial J \partial J} - \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\frac{\partial H_1}{\partial J}$$
$$\mathscr{H}_2(J) = \overline{H_2}(J,\varphi) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial J \partial J} + \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\frac{\partial H_1}{\partial J}$$
$$\frac{\partial H_0}{\partial J}\frac{\partial W_n}{\partial \varphi} = H_n(J) - V_n(J,\varphi)$$
$$H_n(J) = \overline{V_n}(J,\varphi)$$
$$\frac{\partial W_n}{\partial \varphi} = \frac{1}{\nu(J)} - (\mathscr{H}_n - V_n(J,\varphi))$$

Пример Пусть $H = H_0(p,q) + \varepsilon H_1(p,q)$

$$H_0 = \frac{1}{2}(p^2+q^2)$$
$$H_1 = -\frac{q^4}{2\varphi}$$
$$H = T + V$$

Система с одной степенью свободы $T = \frac{p^2}{2}, V = -(1-\frac{q^2}{2}) + \dots$

$$\begin{cases} p = \sqrt{2I}cos\varphi \\ q = \sqrt{2I}sin\varphi \end{cases}$$
$$H_0 = I, H_1 = -\frac{J^2 sin^4\varphi}{6}, \frac{\partial H_0}{\partial J} = 1$$
$$\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} - \frac{J^2 sin^4\varphi}{6} = \mathscr{H}_1(J)$$
$$\mathscr{H}_1(J) = -\frac{1}{2\pi}\int +0^{2\pi}\frac{J^2 sin^4\varphi}{6}d\varphi$$
$$\int_0^{2\pi} sin^4\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi}(sin^2)^2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{(1-cos^2\varphi)^2}{4}d\varphi$$

Разложим в ряд Фурье и после всех вычислений получим, что $\mathscr{H}_1(J) = -\frac{J^2}{16}$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} = -\frac{J^2}{16} + \frac{J^2}{6} sin^4\varphi$$
$$W_1 = -\frac{J^2}{24} sin^3\varphi cos\varphi - \frac{J^2}{16} sin\varphi cos\varphi, W_0 = J\varphi$$
$$\psi = \frac{\partial W}{\partial J}, I = \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$
$$W = J\varphi - \frac{\varepsilon J^2}{24} sin^3\varphi cos\varphi - \frac{\varepsilon J^2}{16} sin\varphi cos\varphi \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \psi = \varphi - \frac{\varepsilon J}{12} sin^3\varphi cos\varphi - \frac{\varepsilon J}{8} sin\varphi cos\varphi \\ I = J + \frac{\varepsilon J^2}{24} sin^4\varphi - \frac{\varepsilon J^2}{8} sin^2\varphi cos^2\varphi - \frac{\varepsilon J^2}{16} cos^2\varphi + \frac{\varepsilon J^2}{16} sin^2\varphi \end{cases}$$

С точностью до членов порядка ε :

$$J = I - \frac{\varepsilon I^2}{24} sin^4\varphi + \frac{\varepsilon I^2}{8} sin^2\varphi cos^2\varphi + \frac{\varepsilon I^2}{16} cos^2\varphi - \frac{\varepsilon I^2}{16} sin^2\varphi$$

Теперь $H = J - \frac{\varepsilon J^2}{16}$.

$$\dot{\psi} = w = \frac{\partial H}{\partial J} = 1 - \frac{\varepsilon J}{8} \approx 1 - \frac{\varepsilon h}{8}$$

Период колебаний $\tau = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{1-\frac{\varepsilon h}{8}} \approx 2\pi(1 + \frac{\varepsilon h}{8})$

Лекция 12

Маятник Капицы

Маятник Капицы (маятник с вибрирующей точкой подвеса)

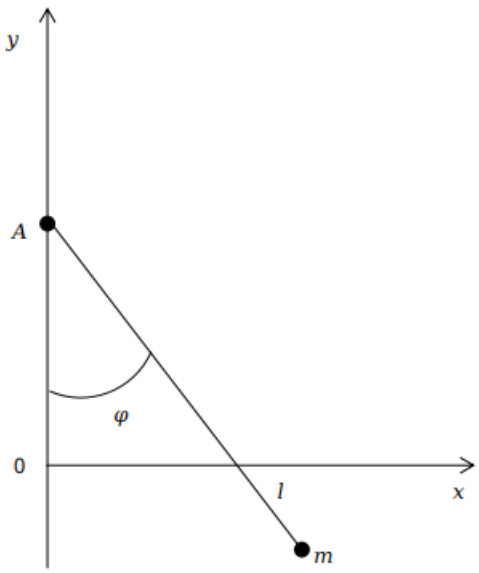

Рис. 12.1: Маятник Капицы

Рассмотрим маятник Капицы на рис. 12.1 и запишем уравнения:

$$OA = a\varepsilon cos\frac{wt}{\varepsilon}, w^2 = \frac{a}{t}, a > 0, 0 < \varepsilon < 1$$
$$T = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2), V = m\varphi y$$
$$x = lsin\varphi, y = -lcos\varphi + a\varepsilon cos\frac{wt}{\varepsilon}$$
$$\dot{x} = l\dot{\varphi}cos\varphi, \dot{y} = l\dot{\varphi}sin\varphi - awsin\frac{wt}{\varepsilon}$$
$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - malw\dot{\varphi}sin\frac{wt}{\varepsilon} + ma^2w^2sin^2\frac{wt}{\varepsilon}$$
$$V = mglcos\varphi + mga\varepsilon cos\frac{wt}{\varepsilon}$$

К функции Лагранжа можно прибавлять или отнимать функции не зависящие от времени, поэтому:

$$L = T - V, \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \leftrightarrow \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Lambda = \frac{L - ma^2w^2sin^2\frac{wt}{\varepsilon} + mga\varepsilon cos\frac{wt}{\varepsilon}}{ml^2} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{a}{l}w\dot{\varphi}sin\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon} + w^2cos\varphi$$

Перейдем к каноническим переменным $\varphi, \dot{\varphi} \to \varphi_i, p_i, p = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} - \frac{a}{l}wsin\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon} \Rightarrow$

$$\dot{\varphi} = p + \frac{a}{l}wsin\varphi \tag{$*$}$$

$$H = (\Lambda_2 - \Lambda_0)_* = \frac{1}{2}p^2 + \frac{a}{l}wpsin\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}w^2sin^2\varphi sin^2\frac{wt}{\varepsilon} + w^2cos\varphi$$

$$\dot{\varphi} = H_p = p + \frac{q}{l}wsin\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon}$$

$$\dot{p} = -H_q = -\frac{a}{l}wpcospsin\frac{wt}{\varepsilon} = \frac{a^2}{l^2}sin\varphi cos\varphi sin^2\frac{wt}{\varepsilon} - w^2sin\varphi$$

Получили уравнения движения в канонических переменных. Они допускают два положения равновесия:

$$\varphi = 0, p = 0 \tag{1}$$

$$\varphi = \pi, p = 0 \tag{2}$$

Сделаем каноническое преобразование $\varphi, p \to \widetilde{\varphi}, \widetilde{p}$ с помощью производящей функции $W(\varphi, \widetilde{p}, t, \varepsilon) = \varphi\widetilde{p} + \varepsilon w(\varphi, \widetilde{p}, t)$. Тогда

$$\begin{cases} p = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \widetilde{p} + \varepsilon\frac{\partial W(\varphi,\widetilde{p},t)}{\partial \varphi} \\ \widetilde{\varphi} = \frac{\partial W}{\partial \widetilde{p}} = \varphi + \varepsilon\frac{\partial W(\varphi,\widetilde{p},t)}{\partial \widetilde{p}} \end{cases}$$

Получаем каноническую замену переменных

$$\begin{cases} p = \widetilde{p} + \varepsilon\frac{\partial W(\widetilde{\varphi},\widetilde{p},t)}{\partial \widetilde{\varphi}} + O(\varepsilon^3) \\ \varphi = \widetilde{\varphi} - \varepsilon\frac{\partial W(\widetilde{\varphi},\widetilde{p},t)}{\partial \widetilde{\widetilde{p}}} + O(\varepsilon^3) \end{cases} \tag{$**$}$$

Введем обозначение $\frac{wt}{\varepsilon} = \tau$. Тогда

$$()^{\cdot} = \frac{d()}{dt} = \frac{d()}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{w}{\varepsilon}()', \ \ ()' = \frac{d}{d\tau}$$

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{a}{l}wpsin\varphi sin\tau + \frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}w^2sin^2\varphi sin^2\tau + w^2cos\varphi$$

Необходимо найти $w(\widetilde{q}, \widetilde{p}, \tau)$.

$$\widetilde{H}(\widetilde{q}, \widetilde{p}, \tau, \varepsilon) = \left(H(q, p, \tau, \varepsilon) + \frac{\partial w}{\partial t}\right)_{(*)} = \left(H(q, p, \tau, \varepsilon) + \frac{w}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{(*)}$$

$$\widetilde{H}(\widetilde{q}, \widetilde{p}, \tau, \varepsilon) = \frac{1}{2}\widetilde{p}^2 + \frac{a}{l}w\widetilde{p}sin\varphi sin\tau + \frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}w^2sin^2\widetilde{\varphi}sin^2\tau - w^2cos\widetilde{\varphi} + w\frac{\partial w}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial W}{\partial t}$$

Ищем w - 2π периодическую по τ.

$$\widetilde{H}(\widetilde{q},\widetilde{p},\tau,\varepsilon) = \frac{1}{2}\widetilde{p}^2 - w^2 cos\widetilde{\varphi} + wf(\widetilde{\varphi},\widetilde{p}) + O(\varepsilon^2) \leftrightarrow$$
$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\frac{a}{l}\widetilde{p}sin\varphi sin\tau - \frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}sin^2\widetilde{\varphi}sin^2\tau + f(\widetilde{\varphi},\widetilde{p})$$
$$w = \frac{a}{l}\widetilde{p}sin\widetilde{\varphi}cos\tau - \frac{a^2}{4l^2}wsin^2\widetilde{\varphi}\tau + \frac{a^2}{8l^2}wsin^2\widetilde{\varphi}sin^2\tau + f(\widetilde{\varphi},\widetilde{p})\tau$$

$w - 2\pi$-периодическая по $\tau \leftrightarrow f = \frac{a^2}{4l^2}wsin^2\widetilde{\varphi}$. Таким образом, получили

$$\widetilde{H}(\widetilde{q},\widetilde{p},\tau,\varepsilon) = \frac{1}{2}\widetilde{p}^2 - w^2 cos\widetilde{\varphi} + w^2\frac{a^2}{4l^2}sin^2\widetilde{\varphi} + O(\varepsilon^2)$$
$$\widetilde{H}(\widetilde{q},\widetilde{p},\tau,\varepsilon) = \widetilde{H_0}(\widetilde{\varphi},\widetilde{p}) + O(\varepsilon^2)$$
$$\widetilde{H}(q,p,\tau,\varepsilon) = \overline{H_0}(q,p) + O(\varepsilon)$$
$$\overline{H_0}(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + w^2 v(\varphi)$$
$$v(\varphi) = -cos\varphi + \frac{a^2}{4l^2}wsin^2\widetilde{\varphi}$$

В нулевом приближении по $\varepsilon : \dot{\varphi} = p, \dot{p} = -w^2\frac{\partial W}{\partial \varphi}$. Найдем положение равновесия приближенной системы.

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, sin\varphi + \frac{a^2}{2l^2}sin\varphi cos\varphi = sin\varphi\left(1 + \frac{a^2}{2l^2}cos\varphi\right) = 0$$

В приближенной системе существуют следующие положения равновесия:

$$\varphi = 0, p = 0 \tag{1}$$

$$\varphi = \pi, p = 0 \tag{2}$$

$$\varphi_{3,4} = \pm arccos\left(-\frac{2l^2}{a^2}\right) \tag{3,4}$$

(1), (2) - для любого $\frac{a}{l}$, (3,4) - при $a^2 > 2l^2$.

$$v''(0) = 1 + \frac{a^2}{2l^2} > 0$$
$$v''(\pi) = \frac{a^2}{2l^2} - 1 > 0, a^2 > 2l^2$$
$$v''(\pi) = \frac{a^2}{2l^2} - 1 < 0, a^2 < 2l^2$$
$$v''(\varphi_{3,4}) < 0$$

Получилось, что 0 - устойчив, а $\pi, -\pi$ - не устойчивы. При $a^2 < 2l^2$ получаем, что верхнее положение равновесия неустойчиво. При $a^2 > 2l^2$ получаем, что верхнее положение равновесия устойчиво. Из устойчивости в приближенной системе обязательно следует устойчивости равновесия и в исходной системе, т.е. $a^2 > 2l^2$ - условие устойчивости верхнего положения равновесия и в исходной системе. Новым положения равновесия приближенной системы в исходной системе соответствуют периодические движения маленькой амплитуды в окрестности точек равновесия приближенной системы.

$$\overline{H} = \frac{1}{2\pi} = \int_0^{2\pi} H d\tau$$

Лекция 13

Метод усреднения

Метод усреднения (теоремы Крылова-Боголюбова) для систем стандартного вида

$$x^{'} = \varepsilon V(x,\tau,\varepsilon), V(x,\tau+2\pi,\varepsilon) = V(x,\tau,\varepsilon), x \in R^n, \tau \in R^n, x^{'} = \frac{dx}{d\tau}, \varepsilon \in [0,\varepsilon]$$

$$x^{'} = \varepsilon v(x,\tau) + O(\varepsilon^2), v(x,\tau) = V(x,\tau,0) \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, x_\varepsilon(\tau) : x_\varepsilon(0) = x_0, t = \varepsilon\tau \ \ - \text{медленное время}$$

$$\dot{x} = v(x, \frac{t}{\varepsilon}) + O(\varepsilon) \tag{2}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = x^{'}\frac{1}{\varepsilon}$$

Теорема 1 Существует $\varepsilon_0 > 0$ и $x \to y, y = x+\varepsilon f(x,\tau)$, $f(x,\tau+2\pi) = f(x), f(x_0,0) = 0$. Существует такая замена, что (1) переходит в (3), (2) переходит в (4).

$$y^{'} = \varepsilon\overline{v}(y) + O(\varepsilon^2) \tag{3}$$

$$y^{'} = \overline{v}(y) + O(\varepsilon) \tag{4}$$

$$\overline{v}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(y,\tau)d\tau$$

$$v(y,\tau) = \overline{v}(y) + \widetilde{v}(y,\tau), \overline{\widetilde{v}}(y,\tau) = 0$$

<u>*Доказательство*</u> Докажем, что такая замена переменных существует и построим ее в явном виде.

$$y^{'} = x^{'} - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial\tau} + \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x}, x^{'}\right) = \varepsilon v(x,\tau) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial\tau} + O(\varepsilon^2) = \varepsilon\overline{v}(y) + \varepsilon[\widetilde{v}(x,\tau) + \frac{\partial t}{\partial\tau}] + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} = -\widetilde{v}(x,\tau) \Rightarrow f = -\int_0^\tau \widetilde{v}(x,\tau)d\tau$$

Рассмотрим систему

$$y^{'} = \overline{v}(y) \tag{5}$$

Теорема 2 Пусть $y(\tau)$ - решение системы (5) на $[0,\tau_0]$. Тогда $\exists\varepsilon_0 > 0, c > 0$: решение $x_\varepsilon(t)$ системы (1) ($x_\varepsilon(0) = x_0$) существует на $[0,t_0], t_0 = \frac{\tau_0}{\varepsilon}$, причем $||x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)|| < c\varepsilon, \forall t \in [0,t_0]$.

Теорема 3 Пусть x_0 - невырожденное равновесие системы (5), т.е. $\overline{v}(x_0) = 0, |A| \neq 0, A = \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}\right)_{y=x_0}$, тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$: система (1) имеет 2π-периодическое решение $x_\varepsilon(\tau) = x_0 + O(\varepsilon)$. В частности, стационарное решение $x_\varepsilon(\tau) = x_0$. Более того, если A - гурвицова матрица (все $Re\lambda < 0, |\lambda E - A| > 0$), то периодическое решение $x_\varepsilon(\tau) = x_0 + O(\tau)$ - ассимптотически устойчива.

Модельный пример

$$
\begin{aligned}
&x^{'} = \varepsilon x(1 - 2x^2 sin^2\tau) = \varepsilon x(1 - x^2) + \varepsilon x^3(1 - 2sin^2\tau)\\
&y = x + \varepsilon(x, \tau)\\
&y^{'} = x^{'} + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial \tau} + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}x^{'} = \varepsilon x(1 - x^2) + \varepsilon[x^3(1 - 2sin^2\tau) + \frac{\partial f}{\partial \tau}] + O(\varepsilon^3) \Rightarrow\\
&y^{'} = \varepsilon x(1 - x^2) + O(\varepsilon^2) \Rightarrow f(x, \tau) = -\frac{x^3}{2}sin2\tau
\end{aligned}
$$

$$\dot{y} = y(1 - y^2) \tag{6}$$

$$y = 0,\ (x_0 = 0 \Rightarrow x_\varepsilon(\tau) = 0) \tag{a}$$

$$y = \pm 1,\ (x_0 = \pm 1 \Rightarrow x_\varepsilon(\tau) = \pm 1 + O(\varepsilon)) \tag{b, c}$$

$$
\begin{aligned}
&x_\varepsilon(\tau) = \pm 1 + \varepsilon g(\tau) + O(\varepsilon) \Rightarrow\\
&\pm 1 = \pm 1 - \frac{\varepsilon}{2}sin2\tau(\pm 1 + \varepsilon g(\tau))^3 + o(\varepsilon), \nu(\tau) = \frac{sin2\tau}{2}
\end{aligned}
$$

Значит, периодическое решение $x_\varepsilon(\tau) = \pm(1 + \frac{\varepsilon}{2}sin2\tau) + o(\varepsilon)$ близкое к равновесию. Уравнение (a) неустойчиво, т.к. в окрестности 0 уравнение первого приближения переходит в $\dot{y} = y$. Устойчивость получим при $y = \pm 1$.

$$y = \pm 1 + z, \dot{z} = (\pm 1 + z)(\pm 2z - z^2) = -2z + o(z)$$

Замечание Если нас интересует только устойчивость соответствующих решений системы (1), то замена $x \to y$ не нужна. Можно решить через

$$\dot{x} = \overline{v}(x) + O(\varepsilon) \tag{7}$$

$$\dot{x} = \overline{v}(x) \tag{8}$$

Маятник Капицы в сопротивляющейся среде

Рассмотрим маятник Капицы на рис. 13.1 и запишем уравнения:

$$
\begin{aligned}
&OA = a\varepsilon cos\frac{wt}{\varepsilon}, w^2 = \frac{a}{t}, a > 0, 0 < \varepsilon < 1\\
&T = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2), V = m\varphi y\\
&x = lsin\varphi, y = -lcos\varphi + a\varepsilon cos\frac{wt}{\varepsilon}\\
&\dot{x} = l\dot{\varphi}cos\varphi, \dot{y} = l\dot{\varphi}sin\varphi - awsin\frac{wt}{\varepsilon}\\
&\overline{F} = -mk\overline{v_m} = -mk(\dot{x}\overline{l_x} + \dot{y}\overline{l_y})
\end{aligned}
$$

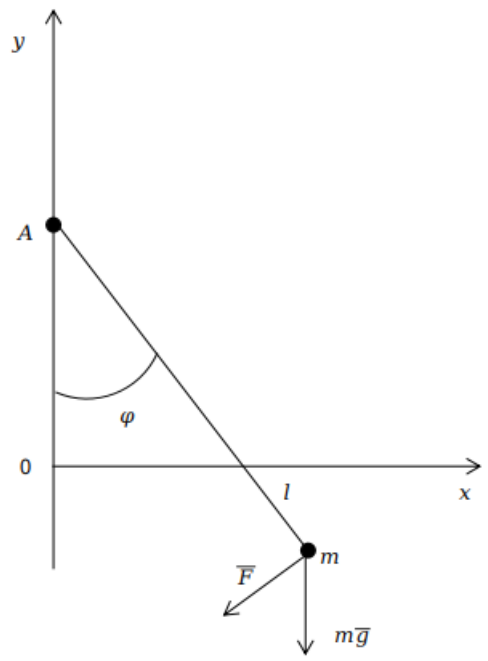

Рис. 13.1: Маятник Капицы

$$\overline{M_0} = [\overline{r}, \overline{F}] = -mk[x\overline{l_x} + y\overline{l_y}, \dot{x}\overline{l_x} + \dot{y}\overline{l_y}]$$
$$\overline{M_0} = -mk(x\dot{y} - \dot{x}y))\overline{l_z} = M_{\overline{l_z}}$$
$$M = -ml^2k[(\dot{\varphi} - \frac{a}{l}wsin\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon}) + \varepsilon\dot{\varphi}\frac{a}{l}cos\varphi cos\frac{wt}{\epsilon}] = Q_\varphi$$
$$Q_\varphi = ml^2\Phi, \Phi = -k[-//-]$$
$$L = ml^2\Lambda + R(t)$$
$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi}\right)^{\cdot} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi} = \Phi(\dot{\varphi}, \varphi, t)$$

Метод усреднения для маятника Капицы в сопротивляющейся среде

$$\Lambda = \frac{1}{2}[\dot{\varphi}^2 - 2\frac{a}{l}w\dot{\varphi}sin\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon} + 2w^2cos\varphi]$$
$$\varphi, \dot{\varphi} \to \varphi, p = \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\varphi}} \Rightarrow$$
$$\dot{\varphi} = p + \frac{a}{l}wsin\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon}$$
$$H = \frac{1}{2}(p^2 + 2\frac{a}{l}wpsin\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon} + \frac{a^2w^2}{l^2}sin^2\varphi sin^2\frac{wt}{\varepsilon} - 2w^2cos\varphi)$$

Запишем уравнение движения маятника Капицы в гамильтоновой форме:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p} = p + \frac{a}{l}wsin\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon} + \frac{a^2w^2}{l^2}sin\varphi sin^2\frac{wt}{\varepsilon}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p} + \Phi_*, \Phi_* = \Phi(\varphi, p, t)$$
$$\Phi_* = -kp + O(\varepsilon)$$
$$\dot{p} = -\frac{a}{l}wpcos\varphi sin\frac{wt}{\varepsilon} - \frac{a^2w^2}{l^2}sin\varphi sin^2\frac{wt}{\varepsilon} - w^2in\varphi - kp + O(\varepsilon)$$

Решения равновесия

$$\varphi = 0, p = 0 \tag{1}$$
$$\varphi = \pi, p = 0 \tag{2}$$

Если $\tau = \frac{wt}{\varepsilon} \Rightarrow \varphi' = \frac{\varepsilon}{w}\frac{\partial H(\varphi,p,\tau)}{\partial p}$, $p' = -\frac{\varepsilon}{w}\frac{\partial H(\varphi,p,\tau)}{\partial\varphi} - \frac{\varepsilon}{w}kp + O(\varepsilon^2)$, то получаем стандартный вид для теории Крылова-Боголюбова и можно применить теоремы

1-3. Формально совершается переход

$$
\begin{aligned}
&\varphi, p \to \psi, q: \\
&\psi = \varphi + f_1(\varphi, p, \tau) \\
&q = p + f_2(\varphi, p, \tau) \\
&{}' = \frac{\partial \overline{H}}{\partial q} \\
&q' = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \psi} - kq \\
&\varphi' = \frac{\partial \overline{H}}{\partial p} \\
&p' = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \varphi} - kp \\
&\overline{H} = \frac{1}{2}(p^2 + \frac{a^2 w^2}{2l^2} sin^2\varphi - 2w^2 cos\varphi) \\
&V_w = \frac{a^2 w^2}{4l^2} sin^2\varphi - w^2 cos\varphi \\
&V_w' = w^2 sin\varphi \left(\frac{a^2}{2l^2}\right) = 0 \\
&\varphi_{3,4} = \pm arccos(\frac{2l^2}{a^2}), a^2 > 2l^2
\end{aligned}
$$

Методику усреднения применяют и к гамильтоновым системам в случае, если $k = 0$. Тогда можно исследовать устойчивость системы и получить, что верхнее положение равновесия устойчиво.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ