ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ФОРШ
ПАВЕЛ АНАТОЛЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КЛЮШНИКОВА НИКИТУ СЕРГЕЕВИЧА

Оглавление

Лекция 1. Формализм Лагранжа. Уравнения Лагранжа для материальной точки. Уравнения Лагранжа в обобщённых координатах.

Формализм Лагранжа.

В рамках данного курса мы будем заниматься основной задачей механики – определением закона движения механической системы (как зависят координаты механической системы от времени). Нам уже известен один подход для решения данной задачи – законы Ньютона. Однако этот способ не единственный и не всегда удобный способ. Далее мы рассмотрим еще три способа получения закона движения: уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона и уравнения Гамильтона-Якоби. Начнем рассмотрение с уравнений Лагранжа.

Далее мы будем часто пользоваться понятием материальной точки (частицы) (это объект, размерами которого можно пренебречь в данной задаче). Отметим также, что все, что мы будем делать в рамках курса, мы будем делать в инерциальных системах отсчета.

Уравнение Лагранжа для материальной точки.

Пусть есть некоторая материальная точка массы m. Тогда в инерциальной системе отсчёта ее движение описывается вторым законом Ньютона, который имеет вид

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{1.1}$$

где $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к данной точке.

Отметим, что для второй производной имеет мест о обозначение

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \tag{1.2}$$

Введем некоторую функцию $U(\vec{r}, t)$, которая зависит от радиус-вектора частицы и времени t так, что сила, действующая на частицу, может быть записана в виде

$$\vec{F} = -gradU = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \tag{1.3}$$

Если такая функция $U(\vec{r}, t)$ существует, то она называется потенциальной энергией частицы, а сила при этом называется потенциальной.

Отметим, что в (1.3) стоит производная по радиус-вектору. С другой стороны градиент можно записать в виде

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \vec{e}_x\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.4}$$

Также будем пользоваться обозначением

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\vec{r}}} = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \tag{1.5}$$

Итак, мы рассматриваем материальную точку в потенциальном поле, для которого можно ввести потенциальную энергию. Введем кинетическую энергию

$$T = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} \tag{1.6}$$

Найдем производную кинетической энергии

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} \tag{1.7}$$

Теперь найдем производную по времени от (1.7)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\ddot{\vec{r}} \tag{1.8}$$

Сравним полученное выражение со вторым законом Ньютона

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \tag{1.9}$$

Видно, что правые части выражений совпадают, поэтому

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \tag{1.10}$$

Преобразуем это выражение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial (T-U)}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{1.11}$$

Обозначим

$$L = T - U \tag{1.12}$$

– функция Лагранжа.

В итоге получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{1.13}$$

– уравнение Лагранжа.

Это уравнение можно записать в проекциях

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{1.14}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{1.16}$$

Эти уравнения могут использоваться для нахождения закона движения системы.

Пример 1. Есть некоторая пружинка жёсткости k, к которой прикреплен грузик массы m (рис. 1.1).

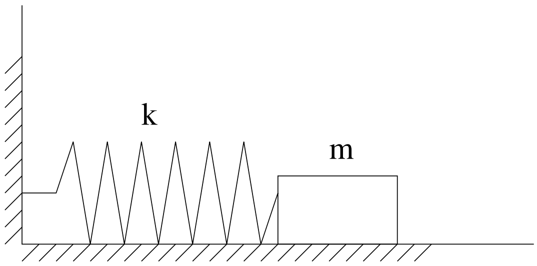

Рис. 1.1: Иллюстрация к объяснению.

Запишем уравнение Лагранжа. Для описания такой системы достаточно одной оси x. Тогда кинетическая энергия

$$T = \frac{m\ddot{x}^2}{2} \tag{1.17}$$

а потенциальная энергия

$$U = \frac{kx^2}{2} \tag{1.18}$$

Тогда функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \tag{1.19}$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \tag{1.20}$$

Посчитаем

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \tag{1.21}$$

Тогда уравнение Лагранжа для данной системы имеет вид

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1.22}$$

Отметим, что уравнения Лагранжа не меняются при переходе к другим системам координат.

Обобщенные координаты.

Пусть есть некоторая механическая система. Обязаны ли мы описывать эту систему в прямоугольной системе координат? Нет. Нам достаточно выбрать какие-то координаты, которые однозначно задают положение системы. То есть для описания системы нам нужно задать какие-то независимые координаты, которые полностью определяют положение этой системы, причём эти координаты необязательно будут декартовы. Эти координаты называются обобщенными.

Механическая система – набор частиц с наложенными связями. Связи – это любые ограничения на движение механической системы. Далее мы будем рассматривать только голономные связи. Голономная связь для механической системы N частиц – это связь, которую можно задать уравнением

$$f\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t\right) = 0 \tag{1.23}$$

Пример 2. Пусть частица движется по поверхности сферы радиуса R (рис. 1.2).

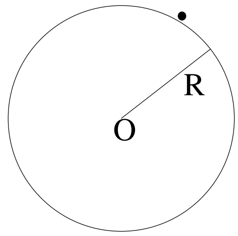

Рис. 1.2: Иллюстрация к объяснению.

На координаты точки, движущейся по сфере, наложено условие

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{1.24}$$

Это есть условие голономной связи.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек, на которую наложено n голономных связей. То есть у нас есть уравнения

$$f_k\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}, t\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.25}$$

В сущности эти уравнения можно записать в виде

$$f_k\left(x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N, t\right) = 0 \tag{1.26}$$

Тогда из этих n уравнений можно выразить n координат через оставшиеся координаты. Поэтому получаем, что независимых координаты s штук, где

$$3N - n = s \tag{1.27}$$

Значит, наложение голономных связей уменьшает количество необходимых координат. В качестве этих координат можно взять любые s координат, которые будут независимыми и будут однозначно описывать положение рассматриваемой системы. Эти координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ – обобщенные координаты. s – число степеней свободы.

В качестве обобщенных координат можно выбрать любые другие обобщённые координаты, поэтому радиус-вектор любой частицы рассматриваемой системы можно представить в виде некоторой функции от данных обобщённых координат

$$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_j}\,(q_1, q_2, \ldots, q_s) \tag{1.28}$$

Пример 3. Рассмотрим математический маятник (рис. 1.3).

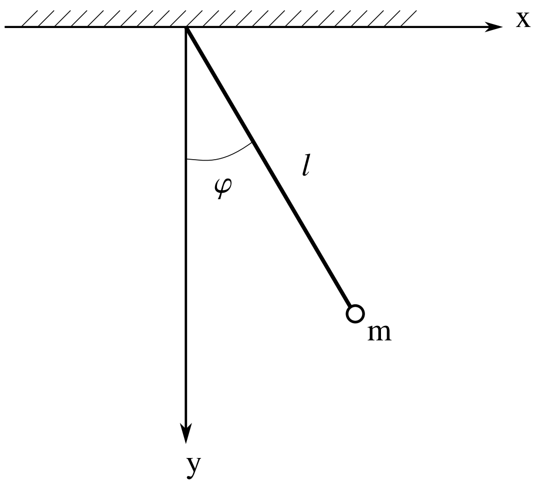

Рис. 1.3: Иллюстрация к примеру.

Отметим, что положение материальной точке по x и y не является независимым. Существует условие голономной связи

$$x^2 + y^2 = l^2 \tag{1.29}$$

Значит, можно ввести только одну обобщенную координату вместо двух. В качестве обобщенной координаты выберем угол отклонения. Тогда

$$y = l\cos\varphi \tag{1.30}$$

$$x = l\sin\varphi \tag{1.31}$$

При этом получаем, что радиус-вектор в сущности есть функция от одной обобщенной координаты

$$\vec{r}\,(x, y) = \vec{r}(\varphi) \tag{1.32}$$

Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах.

Рассмотрим механическую систему, в которой N материальных точек. Пусть на эту систему наложено n голономных связей. Попробуем записать второй закон Ньютона для этой системы. Для каждой точки системы обозначим второй голономных связей. Попробуем записать второй закон Ньютона для этой системы. Для каждой точки системы запишем уравнение

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad i = 1, \ldots N \tag{1.33}$$

где $\overrightarrow{R}_i$ – сила реакции опоры.

Уравнения связи

$$f_k\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}\right) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.34}$$

Отметим, что здесь намеренно убрано время t для упрощения дальнейших выкладок.

Предположим, что для данной системы можно вывести потенциальную энергию $U\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}, t\right)$ такую, что

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \tag{1.35}$$

Также будем считать связи идеальными. Идеальные связи – нет трения.

Тогда уравнение Ньютона можно записать в виде

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} + \vec{R}_i \tag{1.36}$$

Введем s обобщённых координат

$$3N - n = s \tag{1.37}$$

Нам нужно ввести координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Тогда каждый радиус-вектор частицы есть функция от этих координат

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_s\right) \tag{1.38}$$

Измени данные координаты

$$\begin{aligned} q_1 &\to q_1 + \delta q_1 \\ q_2 &\to q_2 + \delta q_2 \\ &\ldots \\ q_s &\to q_s + \delta q_s \end{aligned} \tag{1.39}$$

Найдем разность

$$\vec{r}_i\left(q_1+\delta q_1,\ldots,q_s+\delta q_s\right)-\vec{r}_i\left(q_1,\ldots,q_s\right)=\vec{r}_i\left(q_1,q_2,\ldots,q_s\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-$$
$$-\vec{r}_i\left(q_1,\ldots,q_s\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\delta\vec{r}_i \tag{1.40}$$

Здесь мы разложили первый член этой разности по малому параметру. Последнее равенство – введенное обозначение.

Будем считать, что мы произвели такие смещения (1.39), что эти смещения вызвали изменение радиус-вектора, удовлетворяющие условиям связи. Это значит, что выполняются уравнения

$$f_k\left(\overrightarrow{r_1}+\delta\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2}+\delta\overrightarrow{r_2},\ldots,\overrightarrow{r_N}+\delta\overrightarrow{r_N}\right)=0 \quad k=1,\ldots,n \tag{1.41}$$

Такие смещения называют смещениями, совместимыми с уравнениями связи (виртуальные смещения).

Каждое из уравнений (1.36) умножим на соответствующее смещение

$$\left(m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2},\delta\vec{r}_i\right)=-\left(\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i},\delta\vec{r}_1\right)+\left(\overrightarrow{R_i},\delta\vec{r}_i\right) \tag{1.42}$$

Связи идеальные, поэтому силы реакции опоры всегда перпендикулярна произведению, то есть

$$\left(\vec{R}_i,\delta\vec{r}_i\right)=0 \tag{1.43}$$

Сложим оставшиеся уравнения

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\right)=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i},\delta\vec{r}_i\right) \tag{1.44}$$

Преобразуем правую сумму данного уравнения

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i},\delta\vec{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i},\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\delta q_\alpha\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)=$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right]=\sum_{\alpha=1}^{s}\delta q_\alpha\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \tag{1.45}$$

В квадратных скобках отмечены промежуточные комментарии к преобразованию.

Преобразуем левую часть (1.44)

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2},\delta\vec{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2},\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\delta q_\alpha\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)=$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\delta q_\alpha\sum_{i=1}^{N}m_i\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)-\left(\dot{\vec{r}}_i,\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\right\} \tag{1.46}$$

Запишем следующие два соотношения

$$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} \tag{1.47}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q\alpha}\right)=\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \tag{1.48}$$

Мы докажем их позже. С их помощью можно преобразовать выражение (1.46) к виду

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2},\delta\vec{r}_i\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\delta q_\alpha\sum_{i=1}^{N}m_i\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}},\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\left(\dot{\vec{r}}_i,\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}\right)\right\} \tag{1.49}$$

Тогда

$$\left(\dot{\vec{r}}_i,\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}\left(\frac{\dot{\vec{r}}_i^2}{2}\right) \tag{1.50}$$

а во втором скалярном произведении

$$\left(\dot{\vec{r}}_i,\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\dot{\vec{r}}_i^2}{2}\right) \tag{1.51}$$

Введем кинетическую энергию

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\dot{\vec{r}}_i^2}{2}=\sum_{\alpha=1}^{s}\delta q_\alpha\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right\} \tag{1.52}$$

Тогда выражение (1.46) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\frac{d^2 2\vec{r}_i}{dt^2},\delta\vec{r}_i\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\delta q_\alpha\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right\} \tag{1.53}$$

Подставим (1.45) и (1.53) в (1.44)

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\delta q_\alpha\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right\}=-\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \tag{1.54}$$

Преобразуем

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \delta q_\alpha \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_\alpha} \right\} = 0 \tag{1.55}$$

Отсюда получаем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s \tag{1.56}$$

Лекция 2. Формализм Лагранжа. Уравнения Лагранжа при наличии диссипативных сил.

Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах (дополнение).

В прошлый раз мы рассмотрели систему из N материальных точек, на которую наложены идеальные голономные связи, представимые в виде

$$f_k\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N\right) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

При этом мы показали, что уравнения движения для данной системы представимые в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s \tag{2.2}$$

где

$$s = 3N - n \tag{2.3}$$

– число степеней свободы.

Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа. Функция

$$L = T - U \tag{2.4}$$

называется функцией Лагранжа.

Ранее мы ввели равенство

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{2.5}$$

Докажем его. Отметим, что радиус-вектор i-й частицы есть функция от всех обобщенных координат

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t)\right) \tag{2.6}$$

при этом обобщенные координаты зависят от времени. То есть, радиус-векторы частиц есть сложные функции от времени. Найдем полную производную по времени от радиус-вектора

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta \tag{2.7}$$

Продифференцируем правую и левую части полученного выражения по $\dot{q}_\alpha$. Для этого отметим, что имеет место

$$\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} = \left.\begin{matrix} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{matrix}\right\} = \delta_{\alpha\beta} \tag{2.8}$$

Тогда получаем

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{2.9}$$

Видно, что каждый член в данной сумме, за исключением случая $\alpha = \beta$, равен нулю. Этим и обосновано последнее равенство в (2.9). Таким образом, мы доказали (2.5).

Теперь докажем второе соотношение, которым мы пользовались на предыдущей лекции

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \tag{2.10}$$

Найдем производную

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_s = \\ = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\beta = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь мы воспользовались тем, что можно поменять порядок дифференцирования и суммирования, так как переменные независимые. В последнем равенстве мы учли, что

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta \tag{2.12}$$

Уравнение Лагранжа для свободной частицы.

Пример 4. Найти уравнение и функцию Лагранжа для свободной частицы в случаях

- цилиндрической системы координат
- сферической системы координат

Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Свяжем ее с прямоугольной декартовой системой координат (рис. 2.1).

Тогда связь между прямоугольной и цилиндрической системой координат

$$\begin{aligned} z &= z \\ x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned} \tag{2.13}$$

При этом

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \rho < \infty \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{aligned} \tag{2.14}$$

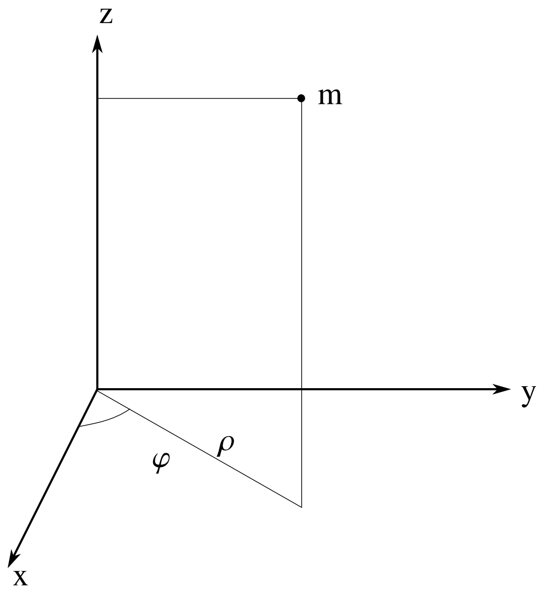

Рис. 2.1: Иллюстрация к объяснению.

Выразим функцию Лагранжа. Частица свободная, значит, на нее не действуют внешние силы, потенциальная энергия равна нулю. Запишем кинетическую энергию

$$T = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{2.15}$$

Запишем производные координат по времени

$$\dot{z} = \dot{z} \tag{2.16}$$

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \tag{2.17}$$

$$\dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \tag{2.18}$$

Тогда получаем кинетическую энергию

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) = L \tag{2.19}$$

Теперь запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{2.20}$$

Подставим функцию Лагранжа и получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z} \tag{2.21}$$

При этом

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{2.22}$$

Поэтому уравнение по оси z имеет вид

$$m\ddot{z} = 0 \tag{2.23}$$

Уравнение по оси ρ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \tag{2.24}$$

Запишем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\ddot{\rho} \tag{2.25}$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 \tag{2.26}$$

Поэтому получаем уравнение Лагранжа по ρ

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = 0 \tag{2.27}$$

Теперь рассмотри уравнение Лагранжа по φ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.28}$$

Производная

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \tag{2.29}$$

Производная по времени

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\ddot{\varphi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} \tag{2.30}$$

При этом

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.31}$$

Поэтому уравнение Лагранжа по переменной φ

$$m\rho^2\ddot{\varphi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0 \tag{2.32}$$

Сократим уравнение

$$m\left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right) = 0 \tag{2.33}$$

Теперь рассмотрим вторую часть задачи. Рассмотрим сферическую систему координат (рис. 2.2).

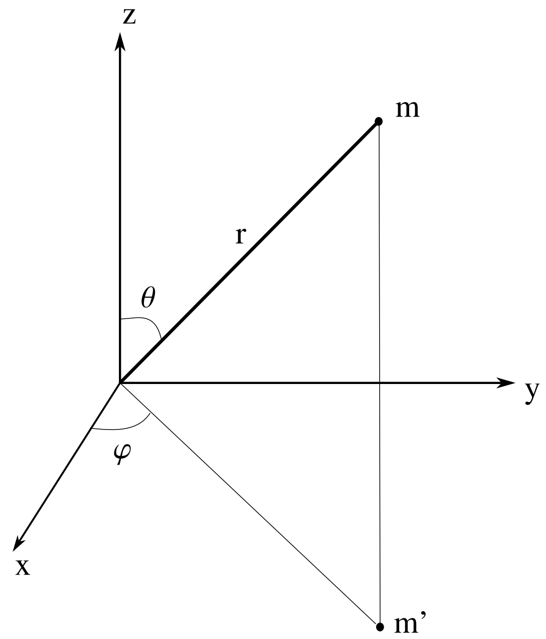

Рис. 2.2: Иллюстрация к объяснению.

Запишем связь между прямоугольными и сферическими координатами

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta \\ x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \end{aligned} \tag{2.34}$$

При этом

$$\begin{aligned} 0 \leqslant\, & r < \infty \\ 0 \leqslant\, & \varphi < 2\pi \\ 0 \leqslant\, & \theta \leqslant \pi \end{aligned} \tag{2.35}$$

Запишем кинетическую энергию в сферической системе координат

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) = L \tag{2.36}$$

Пример 5. Рассмотрим математический маятник. Пусть есть некоторое тело на нерастяжимой нити (рис. 4.2).

Будем считать, что подвес движется по вертикали по какому-то закону $s(t)$. Составить уравнение Лагранжа и функцию Лагранжа для этой системы

Введем обобщенную координату φ. Тогда

$$x = l\sin\varphi \tag{2.37}$$

$$y = l\cos\varphi - s(t) \tag{2.38}$$

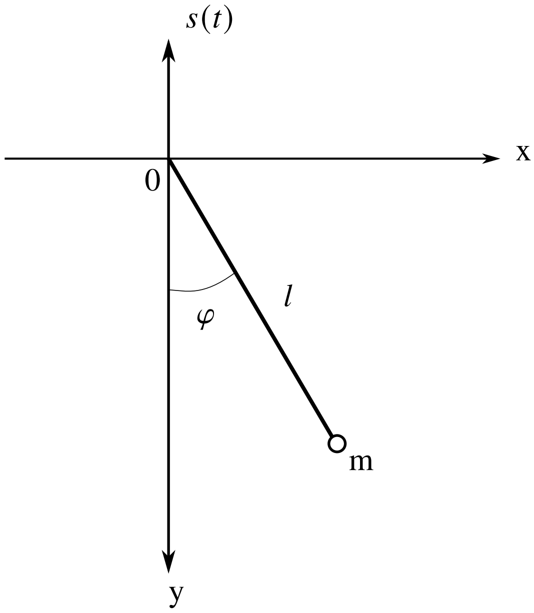

Рис. 2.3: Иллюстрация к объяснению.

Запишем кинетическую энергию

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{2.39}$$

Найдем

$$\dot{x} = l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \tag{2.40}$$

$$\dot{y} = -l\sin\varphi \cdot \varphi - \dot{s} \tag{2.41}$$

Получим

$$T = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}\dot{s} + \dot{s}^2\right) \tag{2.42}$$

Потенциальная энергия имеет вид

$$U = -mgy = -mg\left(l\cos\varphi - s\right) \tag{2.43}$$

Тогда функция Лагранжа принимает вид

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}\dot{s} + \dot{s}^2\right) + mg\left(l\cos\varphi - s\right) \tag{2.44}$$

Запишем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.45}$$

Найдем производную

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\sin\varphi \cdot \dot{s} \tag{2.46}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi} + ml\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}\dot{s} + ml\sin\varphi\ddot{s} \tag{2.47}$$

Теперь найдем производную

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}\dot{s} - mgl\sin\varphi \tag{2.48}$$

Тогда уравнение Лагранжа

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\sin\varphi\,(g + \ddot{s}) = 0 \tag{2.49}$$

Преобразуем уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{g + \ddot{s}}{l}\sin\varphi = 0 \tag{2.50}$$

Пусть закон движения точки подвеса

$$s = \frac{at^2}{2} \tag{2.51}$$

Будем считать, что колебания малы

$$\sin\varphi \approx \varphi \tag{2.52}$$

Тогда получаем, что уравнение Лагранжа принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g + a}{l}\varphi = 0 \tag{2.53}$$

– уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\frac{g + a}{l} = \omega^2 \tag{2.54}$$

Уравнение Лагранжа при наличии диссипативных сил.

Будем считать, что на рассматриваемую материальную точку помимо потенциальных сил действует диссипативная сила, которая пропорциональна скорости частицы

$$\overrightarrow{F_j} = -\lambda\dot{\vec{r}}, \quad \lambda = const \tag{2.55}$$

Покажем, что в этом случае уравнение Лагранжа можно оставить без изменений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{2.56}$$

при условии, что функция Лагранжа имеет вид

$$L = e^{\frac{\lambda}{m}t}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}, t)\right) \tag{2.57}$$

Докажем это. Возьмём записанную функцию Лагранжа и запишем для нее уравнение Лагранжа. Для этого найдем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = e^{\frac{\lambda}{m}t} m\dot{\vec{r}} \tag{2.58}$$

Найдем производную

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = e^{\frac{\lambda}{m}t} m\ddot{\vec{r}} + \lambda e^{\frac{\lambda}{m}t}\dot{\vec{r}} \tag{2.59}$$

и производную вида

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = e^{\frac{\lambda}{m}t}\left(-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\right) \tag{2.60}$$

Отметим, что

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\right) \tag{2.61}$$

– потенциальная сила.

Таким образом, получаем уравнение Лагранжа

$$e^{\frac{\lambda}{m}t} m\ddot{r} + e^{\frac{\lambda}{m}t}\lambda\dot{\vec{r}} - e^{\frac{\lambda}{m}t}\vec{F} = 0 \tag{2.62}$$

Преобразуем уравнение

$$m\ddot{\vec{r}} = -\lambda\dot{\vec{r}} + \vec{F} = \vec{F}_j + \vec{F} \tag{2.63}$$

где

$$\vec{F}_d = -\lambda\dot{\vec{r}} \tag{2.64}$$

– диссипативная сила.

Итак, мы получили второй закон Ньютона. Следовательно, в декартовой системе координат уравнение Лагранжа (2.56) с функцией Лагранжа (2.57) описывает движение частицы при наличии диссипативной силы.

Пример 6. Рассмотрим следующий пример. Пусть пружинка жесткости k прикреплена к грузику массы m, находящемуся в кювете с жидкостью. Тогда можно считать, что на грузик действует некая диссипативная сила

$$F_d = -\lambda\dot{x} \tag{2.65}$$

Функция Лагранжа в этом случае

$$L = e^{\frac{\lambda}{m}t}\left(\frac{m\ddot{x}}{2} - \frac{kx^2}{2}\right) \tag{2.66}$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\frac{\lambda}{m}t} m\dot{x} \tag{2.67}$$

а также

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\frac{\lambda}{m}t} m\ddot{x} + \lambda e^{\frac{\lambda}{m}t}\dot{x} \tag{2.68}$$

посчитаем также

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e^{\frac{\lambda}{m}t} kx \tag{2.69}$$

Тогда получаем уравнение движения

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0 \tag{2.70}$$

Лекция 3. Уравнения Лагранжа при наличии электромагнитных сил.

Уравнение Лагранжа при электромагнитных силах.

Рассмотрим системы, в которых действуют электромагнитные силы. Это значит, что есть электрическое поле, которое характеризуется напряженностью электрического поля $\vec{\mathcal{E}}$ и магнитное поле, которое характеризуется напряженностью магнитного поля $\vec{H}$. Также для магнитного поля можно рассмотреть вектор магнитной индукции

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{3.1}$$

где μ – магнитная проницаемость. Далее мы будем рассматривать немагнитные среды, поэтому $\mu = 1$.

Далее мы будем работать в системе СГС. В этом случае сила Лоренца записывается в виде

$$\vec{F} = e\vec{\mathcal{E}} + \frac{e}{c}\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{H}\right] \tag{3.2}$$

где e – заряд частицы, c – скорость света.

Для частицы в электромагнитном поле можно записать второй закон Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{\mathcal{E}} + \frac{e}{c}\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{H}\right] \tag{3.3}$$

Перепишем этот закон в проекциях на оси. Для этого распишем векторное произведение

$$\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{H}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\dot{y}H_z - \dot{z}H_y\right) + \vec{e}_y\left(\dot{z}H_x - \dot{x}H_z\right) + \vec{e}_z\left(\dot{x}H_y - \dot{y}H_x\right) \tag{3.4}$$

Тогда второй закон Ньютона в проекциях имеет вид

$$m\ddot{x} = e\mathcal{E}_x + \frac{e}{c}\left(\dot{y}H_z - \dot{z}H_y\right) \tag{3.5}$$

$$m\ddot{y} = e\mathcal{E}_y + \frac{e}{c}\left(\dot{z}H_x - \dot{x}H_z\right) \tag{3.6}$$

$$m\ddot{z} = e\mathcal{E}_y + \frac{e}{c}\left(\dot{x}H_y - \dot{y}H_x\right) \tag{3.7}$$

Теперь нам нужно записать функцию и уравнения Лагранжа для частицы, находящейся в электромагнитном поле и покажем, что полученная функция Лагранжа приводит к уравнениям из второго закона Ньютона, то есть является правильной.

Отметим, что удобно характеризовать электрическое и магнитное поля с помощью потенциалов. $\Phi\left(\vec{r}, t\right)$ – скалярный потенциал, $\vec{A}\left(\vec{r}, t\right)$ – векторный потенциал. Существует связь между напряженностью электрического и магнитного полей с одной стороны, и векторным и скалярным потенциалами с другой стороны. Напряженность электрического поля

$$\vec{\mathcal{E}} = -grad\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.8}$$

а напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = rot\vec{A} \tag{3.9}$$

Здесь ротор – это операция вида

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{3.10}$$

Отметим, что здесь

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = H_x \\ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = H_y \\ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = H_z \end{gathered} \tag{3.11}$$

Аналогично можно выразить напряжённость электрического поля через компоненты

$$\mathcal{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{3.12}$$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{3.13}$$

$$\mathcal{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{3.14}$$

Некоторые способы нахождения векторного потенциала.

Пример 7. Пусть дано некоторое однородное магнитное поле. Это означает, что

$$\vec{H} = const \tag{3.15}$$

Найти векторный потенциал для этого поля.

Вектор $\vec{H}$ имеет одно конкретное направление. Поэтому мы можем выбрать систему координат таким образом, чтобы ось z совпадала с направлением вектора $\vec{H}$

$$z \| \vec{H} \tag{3.16}$$

Тогда

$$\vec{H} = (0, 0, H) \tag{3.17}$$

Тогда для векторного потенциала можно положить

$$A_y = xH \tag{3.18}$$

$$A_x = 0 \tag{3.19}$$

$$A_z = 0 \tag{3.20}$$

Видно, что соответствующее уравнение для напряженности поля выполняется. Отметим, что векторный потенциал можно было выбрать иначе. Для однородного магнитного поля векторный потенциал всегда можно выбрать в виде

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{H} \times \vec{r}\right] \tag{3.21}$$

Проверим, что в нашем случае такой выбор векторного потенциала не совпадает с потенциалом вида (3.18)-(3.20)

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{H} \times \vec{r}\right] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & H \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(-\frac{yH}{2}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{xH}{2}\right) \tag{3.22}$$

Вообще говоря, существуют более строгие метода выбора векторного потенциала, однако в нашем курсе мы будем пользоваться подобным простым способом выбора. Отметим, что в выборе векторного потенциала есть произвол, главное, чтобы выполнялось соотношение (3.9).

Функция Лагранжа при наличии электромагнитного поля.

Функция Лагранжа для частицы, находящейся в электромагнитном поле, имеет вид

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}\left(\vec{A}, \vec{r}\right) - e\Phi \tag{3.23}$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{3.24}$$

Покажем, что для данной функции Лагранжа через уравнение Лагранжа можно получить уравнения (3.5)-(3.7). Получим первое уравнение. Запишем функцию Лагранжа через обобщенные координаты

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{e}{c}\left(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}\right) - e\Phi \tag{3.25}$$

Посчитаем производную

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x\left(x, y, z, t\right) \tag{3.26}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) - e\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{3.28}$$

Поэтому из уравнения Лагранжа получаем

$$m\ddot{x} + \frac{e}{c}\left\{\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\dot{y} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\dot{z}\right\} + e\left(\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \tag{3.29}$$

Отметим, что для скобок в данном выражении имеют место равенства

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = -\mathcal{E}_x \tag{3.30}$$

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) = -H_z \tag{3.31}$$

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = H_y \tag{3.32}$$

Поэтому окончательно получаем

$$m\ddot{x} = e\mathcal{E}_x + \frac{e}{c}\left(H_z\dot{y} - H_y\dot{z}\right) \tag{3.33}$$

Остальные два уравнения (3.6)-(3.7) получаются аналогично. Следовательно, записанные функция Лагранжа и уравнения Лагранжа описывают правильное поведение частицы в электромагнитном поле.

Принцип наименьшего действия.

Рассмотрим систему с одной степенью систему. Мы будем характеризовать эту систему одной обобщенной координатой q. Эта система как-то движется, нам известно, чему равна координата в два разных момента времени

$$q(t_1) = q_1 \tag{3.34}$$

$$q(t_2) = q_2 \tag{3.35}$$

Пусть $L\left(q,\dot{q},t\right)$ – функция Лагранжа указанной системы. Определим величину

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2} L\left(q,\dot{q},t\right)dt \tag{3.36}$$

– действие системы.

Принцип наименьшего действия: механическая система между двумя моментами времени (в которые нам известны координаты) движется таким образом, чтобы действие S было минимальным.

Отметим, что S – функционал. Это значит, что некоторой функции $y(x)$ можно поставить в соответствие число по правилу $\Phi\left(y(x)\right)$. Это и есть функционал.

Примеры. Пусть дана функция $y(x)$, непрерывная на $[0,1]$. Зададим функционал

$$\Phi\left(y(x)\right)=\int\limits_{0}^{1} y(x)dx \tag{3.37}$$

С помощью этот закона каждой функции мы ставим в соответствие некоторое число. Например, возьмем функцию

$$y(x)=e^x \tag{3.38}$$

Для нее функционал

$$\Phi\left(y(x)\right)=\int\limits_{0}^{1} e^x dx=e-1 \tag{3.39}$$

Можно взять другой закон для функционала. Например,

$$\Phi\left(y(x)\right)=y'(x_0) \tag{3.40}$$

где $y(x)$ – дифференцируемая при $x\in[0,1]$ функция. Например,

$$y(x)=x^2,\ \ x_0=\frac{1}{2} \tag{3.41}$$

Тогда

$$\Phi\left(y(x)\right)=y'(x_0)=2x_0=1 \tag{3.42}$$

Для обычной функции под приращением функции понимается

$$\delta y(x)=\widetilde{y}(x)-y(x) \tag{3.43}$$

При этом производная приращения есть приращение производной

$$(\delta y(x))' = \widetilde{y}'(x) - y'(x) = \delta y'(x) \tag{3.44}$$

Рассмотрим разность функционалов

$$\Phi\left(y + \delta y\right) - \Phi(y) \approx \Phi(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y - \Phi(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y \tag{3.45}$$

Здесь мы воспользовались разложением в ряд Тейлора до первого члена. Полученное выражение есть вариация функционала

$$\delta\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y \tag{3.46}$$

Если есть функционал $\Phi(y)$, то вариацию функционала можно определить как производную по некоторому параметру

$$\delta\Phi = \left.\frac{\partial \Phi(y + \alpha\delta y)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{3.47}$$

В случае нескольких аргументов $\Phi\left(y_1(x), y_2(x), \ldots,\right)$ вариация функционала определяется как

$$\delta\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \ldots \tag{3.48}$$

Вернемся к принципу наименьшего действия. Изобразим на графике координату частицы от времени (рис. 4.1).

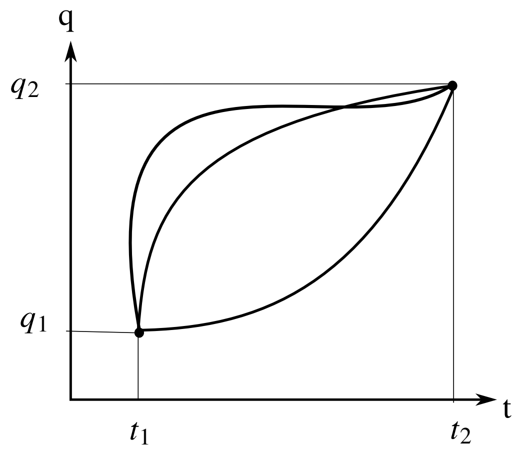

Рис. 3.1: Иллюстрация к объяснению.

Между указанными точками частица может двигаться по любой траектории. Принцип же наименьшего действия утверждает, что частица будет двигаться по той траектории, для которой действие минимально.

Итак, у нас есть различные функции $q(t)$, по которым может двигаться частица. Чтобы определить конкретный закон, нужно сравнить функционал действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt \tag{3.49}$$

для разных кривых. Найдем разность

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t\right) - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \approx \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right) dt - \\ - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right) dt \tag{3.50}$$

Здесь мы использовали разложение в ряд до первого члена.Таким образом, вариация равна

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right) dt \tag{3.51}$$

Преобразуем полученное выражение

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right) dt = \left[\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q\right] = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\right) dt \tag{3.52}$$

Второй член в данном интеграле был проинтегрирован по частям.

Учтем, что положения системы в моменты времени t_1 и t_2 фиксированы, поэтому приращения

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{3.53}$$

Значит, первый член в (3.52) равен нулю. Поэтому получаем, что вариация равна

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) \delta q dt \tag{3.54}$$

Отметим, что из сказанного выше вариация

$$\delta S \geqslant 0 \tag{3.55}$$

Покажем, что на самом деле $\delta S = 0$. Предположим обратное. Пусть

$$\delta S > 0 \text{ при } \quad q + \delta q \tag{3.56}$$

Тогда получаем, что

$$\delta S < 0 \quad \text{при} \quad q - \delta q \tag{3.57}$$

Поэтому получаем, что

$$\delta S = 0 \tag{3.58}$$

Значит, уравнение (3.54) имеет место только если

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{3.59}$$

А это и есть уравнение Лагранжа системы с одной степенью свободы.

Лекция 4. Формализм Лагранжа. Принцип наименьшего действия.

Механическая система s степенями свободы.

В прошлый раз мы получили уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы из принципа наименьшего действия. В этот раз рассмотрим систему с s степени свободы. Она характеризуется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Пусть $L\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t\right)$ – функция Лагранжа данной системы. Будем считать, что в некоторый начальный момент времени координата частицы фиксирована

$$t_1: \quad q_1(t_1) = q_1^{(1)}, \quad q_2(t_1) = q_2^{(1)}, \ldots, q_s(t_1) = q_s^{(1)} \tag{4.1}$$

В некоторый конечный момент времени координата также фиксирована

$$t_2: \quad q_1(t_1) = q_1^{(2)}, \quad q_2(t_1) = q_2^{(2)}, \ldots, q_s(t_1) = q_s^{(2)} \tag{4.2}$$

Далее для упрощения будем обозначать функцию Лагранжа $L\left(q, \dot{q}, t\right)$ (вектор-функция).

Определение 1. Функционал

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt \tag{4.3}$$

называется действием системы.

Определение 2. Отображение заданного множества функций в множество действительных чисел называется функционалом.

В нашем случае множество функций это

$$\{q\} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{4.4}$$

Кроме того, эти функции принимают заданные фиксированные величины на краях отрезка

$$q\left(t_1\right) = q^{(1)} \tag{4.5}$$

$$q\left(t_2\right) = q^{(2)} \tag{4.6}$$

При это функции дважды непрерывно дифференцируемы.

Итак, действие есть функционал, которое ставит в соответствие число некоторому набору s функций

$$S = S\left[q_1, q_2, \ldots, q_s\right] = S\left[q\right] \tag{4.7}$$

Определение 3. Функционал $S\left[q\right]$ называется линейным, если выполняются следующие равенства

1. $S\left(q + \widetilde{q}\right) = S[q] + S[\widetilde{q}]$
2. $S[\alpha q] = \alpha S[q]$

Определение 4. Пусть $\widetilde{q}(t)$ – некоторая функция из области распределения рассматриваемого функционала. Рассмотрим функцию $q(t)$, которая отличается от $\widetilde{q}(t)$ очень мало. Тогда разность

$$q(t) - \widetilde{q}(t) = \delta q(t) \tag{4.8}$$

называется приращением функции.

Для нашей системы эта запись эквивалентна

$$q_1(t) - \widetilde{q}_1(t) = \delta q_1, \ldots, q_s(t) - \widetilde{q}_s(t) = \delta q_s \tag{4.9}$$

Можно получить, что

$$\frac{d}{dt}\delta q(t) = \delta\dot{q}(t) \tag{4.10}$$

Определение 5. Приращением функционала называется разность

$$\Delta S = S\left[q + \delta q\right] - S\left[q\right] \tag{4.11}$$

В нашем случае эта запись эквивалентна (учитываем, что речь идет о вектор-функции)

$$\Delta S = S\left[q_1 + \delta q_1, \ldots, q_s + \delta q_s\right] - S\left[q_1, \ldots, q_s\right] \tag{4.12}$$

Определение 6. Пусть приращение функционала можно представить в виде суммы двух функционалов

$$\Delta S = K\left(q, \delta q\right) + K'\left(q, \delta q\right) \tag{4.13}$$

где $K\left(q, \delta q\right)$ – линейный по δq функционал, а

$$K'\left(q, \delta q\right) = o\left(\|\delta q\|\right) \tag{4.14}$$

Последнее равенство означает, что если

$$\|\delta q\| \leqslant \varepsilon \tag{4.15}$$

то

$$|K'| \leqslant c(\varepsilon) \cdot \varepsilon \tag{4.16}$$

причем

$$c(\varepsilon) \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0 \tag{4.17}$$

Тогда линейная часть

$$\delta S = K\left(q, \delta q\right) \tag{4.18}$$

называется вариацией функционала.

Отметим, что в данном случае норму можно ввести как

$$\|\delta q\| = \max_{\alpha} \max_{t} \left[|\delta q_\alpha|, |\delta \dot{q}_\alpha|\right] \tag{4.19}$$

Найдем вариацию S. По определению

$$\begin{aligned}\Delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\left(q_1 + \delta q_1, \ldots, q_s + \delta q_s, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s + \delta \dot{q}_s, t\right) dt - \\ - \int\limits_{t_1}^{t_2} L\left(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t\right) dt = \\ = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\left(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t\right) dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) dt + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} o\left(\|\delta q\|\right) dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} L\left(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t\right) dt\end{aligned} \tag{4.20}$$

Здесь мы разложили подынтегральную функцию в ряд Тейлора. Отметим, что первый член разложения сокращается с последним членом в (4.20). Второй член разложения линеен по δq. Рассмотрим последний интеграл отдельно. Будем считать, что

$$\|\delta q\| \leqslant \varepsilon \tag{4.21}$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} o\left(\|\delta q\|\right) dt\right| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} \left|o\left(\|\delta q\|\right)\right| dt \leqslant c(\varepsilon)\varepsilon\left(t_2 - t_1\right) \tag{4.22}$$

при этом

$$c(\varepsilon) \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0 \tag{4.23}$$

Поэтому получаем, что линейная часть разложения и есть вариация функционала

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha\right) dt \tag{4.24}$$

Преобразуем

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) dt = \left[\delta \dot{q}_\alpha = \frac{d}{dt} \delta q_\alpha \right] =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right) dt \tag{4.25}$$

Отметим, что в точках t_1 и t_2 положение системы строго задано, поэтому

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \bigg|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{4.26}$$

Итак, получаем

$$\delta S = \sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt \tag{4.27}$$

Замечание. В прошлый раз мы рассмотрели величину $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y$. Для задачи, где функционал имеет вид

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_2} L\left(y, \dot{y}, t\right) dt \tag{4.28}$$

Для такого функционала под производной можно понимать

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \tag{4.29}$$

А произведение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dx \tag{4.30}$$

Заметим также, что под величиной в скобках понимают величину

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial y_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_s} \right\} \tag{4.31}$$

Это градиент функционала.

Замечание. Вариацию функционала мы определили как производную по параметру

$$\delta \Phi(y) = \frac{\partial \Phi\left(y + \alpha \delta y\right)}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} \tag{4.32}$$

Теорема. Пусть функционал $S[q]$ достигает минимума на какой-то вектор-функции $\widetilde{q}(t)$. Тогда $\widetilde{q}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\delta S = 0 \tag{4.33}$$

Отметим, что данное условие является необходимым условием минимума функционала.

Доказательство. Пусть в $\widetilde{q}$ достигается минимум. Рассмотрим разность

$$S\left[\widetilde{q} + \delta q\right] - S\left[\widetilde{q}\right] \geqslant 0 \tag{4.34}$$

Эта разница должна быть неотрицательной, так как функционал $S[\widetilde{q}]$ имеет минимальное значение. Приращение функционала равно нулю, значит, и его основная часть неотрицательна

$$\delta S \geqslant 0 \tag{4.35}$$

Однако, можно показать, что на самом деле

$$\delta S = 0 \tag{4.36}$$

(от противного).

Принцип наименьшего действия.

Механическая система между фиксированными точками $q(t_1)$ и $q(t_2)$ движется таким образом, чтобы действие S было минимальным. При это сравниваются все пути, проходящие через данные фиксированные точки (рис. 4.1).

Рис. 4.1: Иллюстрация к объяснению.

Это означает, что мы сравниваем кривую, на которой достигается минимум действия, со всеми остальными возможными кривыми, проходящими через указанные фиксированные точки.

Вариация действия равна

$$\delta S = \sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt \tag{4.37}$$

В соответствии с указанной теоремой, должно выполняться равенство

$$\delta S = \sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt = 0 \tag{4.38}$$

Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s \tag{4.39}$$

Это и есть уравнения Лагранжа.

Итак, мы показали, что

1. принцип наименьшего действия можно положить в основу получения закона движения системы

2. принцип наименьшего действия – интегральный принцип, который в некоторых задачах может быть более удобен в сравнении с остальными

3. принцип наименьшего действия показывает, что уравнения Лагранжа верны в любой системе координат

4. если к функции Лагранжа прибавить полную производную по времени от произвольной функции, зависящую от обобщенных координат и времени

$$L + \frac{df\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, t\right)}{dt} \tag{4.40}$$

то уравнения Лагранжа не изменятся. То есть, функция Лагранжа определена неоднозначно. Отметим, что под функцией мы понимаем

$$f\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, t\right) = f(q, t) \tag{4.41}$$

Докажем это свойство. Рассмотрим действие вида

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q,t)}{dt} \right) dt \tag{4.42}$$

Его вариация

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(q,t)}{dt} dt = \delta \left(f\left(q^{(2)}, t_2\right) - f\left(q^{(1)}, t_1\right) \right) = 0 \tag{4.43}$$

Соответственно, в таком случае нет никакой поправки к функции Лагранжа.

Пример 8. Ранее мы рассмотрели задачу про математический маятник, точка подвеса которого движется по закону $s(t)$ (рис. 4.2).

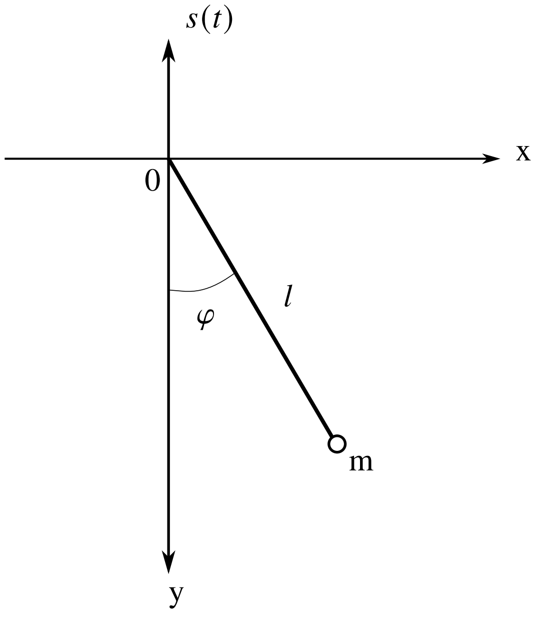

Рис. 4.2: Иллюстрация к объяснению.

Функция Лагранжа в этом случае имеет вид

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + ml \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}\dot{s} + \frac{m\dot{s}^2}{2} + mgl\cos\varphi - mgs \tag{4.44}$$

Этот вид функции Лагранжа неудобен. Отметим, что мы можем выкинуть из (4.44) слагаемые $\frac{m\dot{s}^2}{2}$ и mgs, так как они не зависят от обобщенной координаты. Рассмотрим производную

$$\frac{d}{dt}(ml\cos\varphi \cdot \dot{s}) = ml\cos\varphi \cdot \ddot{s} - ml\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}\dot{s} \tag{4.45}$$

Отсюда

$$ml\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\dot{s} = ml\cos\varphi\cdot\ddot{s} - \frac{d}{dt}\left(ml\cos\varphi\cdot\dot{s}\right) \tag{4.46}$$

Поэтому функцию Лагранжа можно упростить

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + ml\cos\varphi\cdot\ddot{s} + mgl\cos\varphi \tag{4.47}$$

Лекция 5. Законы сохранения обобщенной энергии, обобщенного импульса, момента импульса.

Законы сохранения. Закон сохранения обобщенной энергии.

Рассмотрим законы сохранения с точки зрения однородности и изотропии пространства-времени. Кроме того, выведем законы сохранения из уравнения Лагранжа. Сперва рассмотрим закон сохранения обобщённой энергии. Рассмотрим механическую систему с s степенями свободы, характеризуемую обобщёнными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Пусть эта система обладает следующим свойством. На каком бы интервале времени мы бы не посмотрели на эту систему, то при одинаковых условиях эта система будет вести себя одинаковым образом. Это свойство называется однородностью времени.

Итак, система описывается с помощью системы уравнений Лагранжа. Основой системы уравнений Лагранжа является функция Лагранжа. В случае выполнения условия однородности времени функция Лагранжа не будет явно зависеть от времени

$$L = L\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s\right) \tag{5.1}$$

то есть частная производная по времени от функции Лагранжа будет равна нулю

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{5.2}$$

Выясним, к чему приведет данное условие. Найдем полную производную функции Лагранжа по времени

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \ldots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = \\ = \sum_{\alpha=1}^{s}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right\}\end{aligned} \tag{5.3}$$

Согласно уравнению Лагранжа, должно выполняться

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s \tag{5.4}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{5.5}$$

Подставим данное выражение в (5.3) и получим

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right\} = \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha \tag{5.6}$$

Преобразуем это выражение

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L\right\} = 0 \tag{5.7}$$

Отсюда получаем, что величина, стоящая в фигурных скобках, является сохраняющейся величиной. Обозначим ее

$$E = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L \tag{5.8}$$

Определение 1. Величина E, определенная согласно (5.8), называется обобщенной энергией системы.

Заметим, что если закон движения механической системы не зависит от интервала времени, в который мы рассматриваем систему, то обобщенная энергия сохраняется

$$E = const, \quad \text{если} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{5.9}$$

Определение 2. Замкнутой системой частиц называется система частиц, взаимодействующих только друг с другом.

Замечание. Очевидно, для замкнутой системы выполняется закон сохранения обобщённой энергии.

Замечание. Отметим также, что закон сохранения обобщенной энергии справедлив не только для замкнутых систем, но и для систем, находящихся в постоянных полях.

Пример 1. Пусть частица движется в потенциальном поле, зависящем только от декартовых координат $U(x, y, z)$. Найти обобщенную энергию данной частицы.

Решение. Запишем функцию Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x, y, z) \tag{5.10}$$

По определению

$$\begin{aligned} E = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L = \\ = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{m}{2}\dot{z}^2 + U(x, y, z) = \\ = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + U(x, y, z) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Пример 2. Рассмотрим частицу массой m заряда e, находящуюся в электромагнитном поле. Определить ее обобщенную энергию.

Решение. Для частицы в электромагнитном поле функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\left(\vec{A}, \dot{\vec{r}}\right) - e\Phi \tag{5.12}$$

По определению

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\dot{\vec{r}} - L = m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\left(\vec{A}, \dot{\vec{r}}\right) - \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{e}{c}\left(\vec{A}\dot{\vec{r}} + e\varphi\right) = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + e\Phi \tag{5.13}$$

Закон сохранения обобщенного импульса.

Закон сохранения обобщенного импульса связан с однородностью пространства. Однородность пространства означает, что мы можем переносить систему в пространстве как целое без изменений в системе.

Рассмотрим механическую систему, в которой имеются N материальных точек. Они характеризуются радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$. Сдвинем систему как целое на некоторый малый вектор $\vec{\varepsilon} = const$

$$\begin{gathered} \overrightarrow{r_1} \to \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{\varepsilon} \\ \overrightarrow{r_2} \to \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{\varepsilon} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \overrightarrow{r_N} \to \overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{\varepsilon} \end{gathered} \tag{5.14}$$

Отметим, что скорости частиц при этом не меняются

$$\begin{gathered} \dot{\vec{r}}_1 \to \dot{\vec{r}}_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{\vec{r}}_N \to \dot{\vec{r}}_N \end{gathered} \tag{5.15}$$

Изначально у нас была функция Лагранжа вида

$$L = L\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}, \dot{\overrightarrow{r_1}}, \dot{\overrightarrow{r_2}}, \ldots, \dot{\overrightarrow{r_N}}, t\right) \tag{5.16}$$

После сдвига системы функция Лагранжа изменилась

$$L = L\left(\overrightarrow{r_1} + \vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r_2} + \vec{\varepsilon}, \ldots, \overrightarrow{r_N} + \vec{\varepsilon}, \dot{\overrightarrow{r_1}}, \dot{\overrightarrow{r_2}}, \ldots, \dot{\overrightarrow{r_N}}, t\right) \tag{5.17}$$

Рассмотрим изменение функции Лагранжа при таком сдвиге

$$L\left(\overrightarrow{r_1} + \vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r_2} + \vec{\varepsilon}, \ldots, \overrightarrow{r_N} + \vec{\varepsilon}\right) - L\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}\right) \tag{5.18}$$

Рассмотрим эту разницу, ограничившись только первым членом разложения по ε

$$\delta L = L\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}\right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\vec{\varepsilon} - L\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}\right) \tag{5.19}$$

Итак, получаем

$$\delta L = \vec{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \tag{5.20}$$

Отметим, что если при таком параллельном сдвиге системы ничего не изменяется, то разница функций Лагранжа (5.16) и (5.17) должна быть равна нулю

$$L\left(\overrightarrow{r_1} + \vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r_2} + \vec{\varepsilon}, \ldots, \overrightarrow{r_N} + \vec{\varepsilon}\right) - L\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}\right) = 0 \tag{5.21}$$

Следовательно,

$$\delta L = \vec{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \tag{5.22}$$

Запишем уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \tag{5.23}$$

Отсюда получаем

$$\delta L = \vec{\varepsilon}\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0 \tag{5.24}$$

В силу произвольности ε получаем, что данное равенство возможно, только если

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0 \tag{5.25}$$

Отметим, что величина, стоящая под знаком производной по времени, оказывается сохраняющейся величиной. Обозначим ее

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \tag{5.26}$$

Определение 3. $\vec{P}$, определенная выше в (5.26), наведывается обобщенным импульсом системы.

Отметим, что если при сдвиге системы как целого, поведение системы не меняется, то обобщенный импульс системы сохраняется. В частности обобщенный импульс сохраняется $\vec{P} = const$, если система замкнута.

Примеры нахождения обобщенного импульса.

Пример 3. Найти обобщенный импульс замкнутой системы материальных точек, характеризующихся радиус-векторами $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}$. Потенциальная энергия взаимодействия есть функция только радиус-векторов частиц

$$U = U\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}\right) \tag{5.27}$$

Функция Лагранжа такой системы равна

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_N}\right) \tag{5.28}$$

Обобщенный импульс такой системы по определению

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_2} + \ldots + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_N} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 + \ldots + m_N \dot{\vec{r}}_N \tag{5.29}$$

Видно, что обобщенный импульс системы совпадает с обычным импульсом. Однако в общем случае это не так.

Пример 4. Рассмотрим точку массой m заряда e, находящуюся в электромагнитном поле. Найти ее обобщенный импульс.

Функция Лагранжа данной частицы

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\left(\vec{A}, \dot{\vec{r}}\right) - e\Phi \tag{5.30}$$

Тогда по определению

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A} \tag{5.31}$$

Отсюда видно, что обобщенный импульс не совпадает с обычным механическим импульсом.

Отметим, что систему можно характеризовать любыми обобщенными координатами, необязательно декартовыми. Если характеризовать систему обобщенными координатами, то можно ввести обобщенный импульс по обобщенной координате.

Обобщенный импульс по координате.

Определение 4. Обобщенный импульс по обобщенной координате q_α это

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{5.32}$$

Пример 5. Рассмотрим сферический маятник. Есть некоторая точка подвеса, к ней на легком стержне длиной R подвешена материальная точка массой m (рис. 5.1). Эта точка может вращаться.

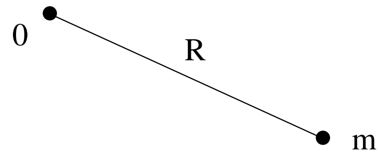

Рис. 5.1: Иллюстрация к примеру.

Найдем функцию Лагранжа. Здесь удобно выбрать сферическую систему координат с центром в точке 0. Тогда радиальная компонента сферической системы координат

$$r = R \tag{5.33}$$

Функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}\left(R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right) \tag{5.34}$$

Найдем обобщенный импульс по обобщенной координате θ

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \tag{5.35}$$

и по обобщенной координате φ

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \tag{5.36}$$

Замечание. Обобщенные импульсы по координате p_α вообще говоря не совпадают с проекциями обобщенного импульса $\vec{P}$.

Определение 5. Координата q_α называется циклической, если она не входит явным образом в функцию Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{5.37}$$

Отметим, что в предыдущем примере φ является циклической координатой.

Утверждение. Обобщенный импульс p_α соответствующий циклической обобщенной координате q_α сохраняется.

Доказательство. Запишем уравнение Лагранжа по координате q_α

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{5.38}$$

По определению 4

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha \tag{5.39}$$

По определению 5

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{5.40}$$

Поэтому

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = 0 \tag{5.41}$$

Поэтому

$$p_\alpha = const \tag{5.42}$$

Закон сохранения момента импульса.

Закон сохранная момента импульса связан с изотропией пространства. Изотропия пространства означает инвариантность системы относительно поворотов в пространстве. То есть в случает изотропии пространства мы можем поворачивать систему вокруг любой оси без изменений. Если мы поворачиваем систему как целое вокруг любой оси, то сохраняется полный момент импульса, если же может повернуть только вокруг конкретной оси, то сохраняется проекция момента импульса на эту ось.

Итак, анализируя какую-то систему, мы можем по свойствам пространства и времени определить величины, которые будут сохраняться в этой систему.

Рассмотрим систему из N частиц, которые характеризуются радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$. Повернём данную систему на какой-то угол относительно какой-то оси (рис. 5.2).

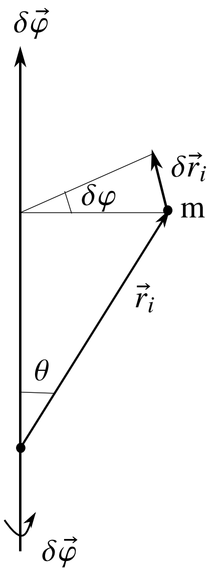

Рис. 5.2: Иллюстрация к объяснению.

Положение $i-$й точки будет характеризоваться радиус-вектором $\vec{r}_i$. Пусть угол между радиус-вектором и осью вращения равен θ. Повернем систему вокруг этой оси на бесконечно малый угол $\delta\varphi$. При этом частица как-то сместится на бесконечно малую величину $\delta\vec{r}$. Тогда угол поворота точек равен $\delta\varphi$. Этот угол бесконечно малый. Придадим направление углу поворота.

Определим, чему равен модуль смещения

$$|\delta\vec{r}_i| = r_i \sin\theta\delta\varphi \tag{5.43}$$

Сам вектор смещения можно записать в виде

$$\delta\vec{r}_i = [\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i] \tag{5.44}$$

Изменение по скорости

$$\delta\dot{\vec{r}}_i = \left[\delta\vec{\varphi}\times\dot{\vec{r}}_i\right] \tag{5.45}$$

При таком повороте функция Лагранжа

$$L = L\left(\overrightarrow{r_1}+\delta\overrightarrow{r_1},\ldots,\overrightarrow{r_N}+\delta\overrightarrow{r_N},\dot{\vec{r}}_1+\delta\dot{\vec{r}}_1,\ldots,\dot{\vec{r}}_N+\delta\dot{\vec{r}}_N\right) \tag{5.46}$$

Приращение функции Лагранжа при повороте

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial L}{\partial\overrightarrow{r_i}}+\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\delta\dot{\vec{r}}_i\right\} \tag{5.47}$$

Учтем, что обобщенный импульс i-й частицы

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i} = \vec{P}_i \tag{5.48}$$

Учтем также, что

$$\frac{\partial L}{\partial\overrightarrow{r_i}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i} = \dot{\vec{P}}_i \tag{5.49}$$

Поэтому приращение функции Лагранжа

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{i=1}^{N}\left\{\dot{\vec{P}}_i\delta\overrightarrow{r_i}+\vec{P}_i\delta\dot{\vec{r}}_i\right\} = \sum_{i=1}^{N}\left\{\dot{\vec{P}}_i\left[\delta\vec{\varphi}\times\overrightarrow{r_i}\right]+\vec{P}_i\left[\delta\vec{\varphi}\times\dot{\vec{r}}_i\right]\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left\{\delta\vec{\varphi}\left[\overrightarrow{r_i}\times\dot{\vec{P}}_i\right]+\delta\vec{\varphi}\left[\dot{\vec{r}}_i\times\vec{P}_i\right]\right\} = \delta\varphi\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left[\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{P_i}\right] = 0\end{aligned} \tag{5.50}$$

Равенство нулю следует из предположения, что система не изменяется при повороте. В силу произвольности вектора $\delta\vec{\varphi}$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left[\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{p_i}\right]=0 \tag{5.51}$$

Значит, сохраняется выражение

$$\vec{M}=\sum_{i=1}^{N}\left[\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{p_i}\right] \tag{5.52}$$

Определение 6. Величина $\vec{M}$, определенная в (5.52), называется моментом импульса системы.

Отметим, что такой момент импульса системы может не совпадать с механическим моментом импульса системы.

Лекция 6. Интегрирование уравнений движение Одномерное движение. Движение в центральном поле.

Закон сохранения момента импульса.

На прошлой лекции мы вели момент импульса системы. Отметим, что момент импульса сохраняется в замкнутой механической системе. Таким образом, для замкнутой системы выполняются все законы сохранения: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса.

Интегрирование уравнений движения.

Основная задача теоретической механики – нахождение закона движения механической системы. Ранее мы рассмотрели законы сохранения. Часто они помогают найти закон движения системы. Иногда задачу можно решить, пользуясь только законами сохранения. В других случаях законы сохранения упрощают решение.

Одномерное движение.

Определение 1. Одномерным называется движение механической системы с одной степенью свободы. Для описания одномерного движения достаточно только одной обобщённой координаты.

Отметим, что одномерному движению соответствует не только одна частица, движущаяся вдоль прямой. Например, математический маятник (рис. 6.4) описывает одномерное движение, так как для описания системы достаточно только одной обобщенной координаты φ.

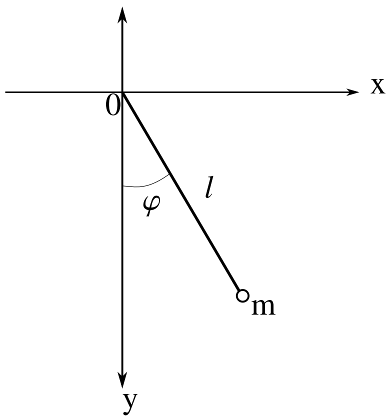

Рис. 6.1: Иллюстрация к объяснению.

В качестве примера системы с одномерным движением, в которой больше одного тела, можно рассмотреть систему их двух грузов (рис. 6.2). Для описания такой системы достаточно только одной обобщенной координаты $x = q_1$.

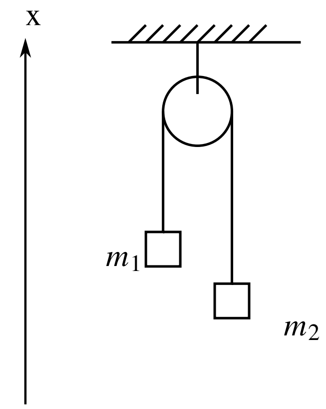

Рис. 6.2: Иллюстрация к объяснению.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек, характеризуемых радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$. Движение одномерное, поэтому каждый из этих векторов зависит только от одной обобщённой координаты $r_i = r_i(q), \;\; i = 1, 2, \ldots, N$. Будем считать, что на систему наложены идеальные голономные связи и действуют потенциальные силы, причем потенциальная энергия не зависит явно от времени

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{6.1}$$

Для такой системы функция Лагранжа

$$L = T - U \tag{6.2}$$

По определению

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} \tag{6.3}$$

Распишем

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \dot{q} \tag{6.4}$$

Эта функция зависит от времени неявно, через q. Подставим данное выражение в кинетическую энергию. Тогда получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q}, \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q} \right) \dot{q}^2 = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2} \tag{6.5}$$

где введено обозначение

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q}, \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q} \right) = m(q) \tag{6.6}$$

Это выражение не является массой системы и может зависеть от обобщенной координаты. Так, в случае математического маятника кинетическая энергия

$$T = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} \tag{6.7}$$

Здесь перед φ^2 стоит ml^2. Это выражение аналогично введенному (6.6).

Получаем

$$L = T - U = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2} - U(q) \tag{6.8}$$

Отметим,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{6.9}$$

Значит, обобщенная энергия сохраняется

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = const \tag{6.10}$$

Найдем обменённую энергию

$$E = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2} + U(q) \tag{6.11}$$

Выразим отсюда

$$\dot{q}^2 = \frac{2}{m(q)} \left(E - U(q) \right) \tag{6.12}$$

Отсюда получаем

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{m(q)} \left(\exists - U(q) \right)} \tag{6.13}$$

Знак "+" берется на тех участках движения, на которых $\dot{q} > 0$, а знак "-" – там, где $\dot{q} < 0$. Отсюда получаем

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \tag{6.14}$$

Проинтегрируем

$$\int_{t_0}^{t} dt = \pm \int_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{m(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \tag{6.15}$$

Где

$$q(t_0) = q_0 \tag{6.16}$$

Отсюда получаем

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{m(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \tag{6.17}$$

Данная формула определяет закон движения механической системы. Поясним это. Если задано поле $U(q)$, то интеграл в правой части (6.17) можно посчитать. Пусть он равен $f(q)$. Поэтому получаем

$$t - t_0 = f(q) \tag{6.18}$$

Отсюда можно получить

$$q = \widetilde{f}(t) \tag{6.19}$$

что и есть закон движения.

Решение задачи, представленное в виде (6.17), называется решением задачи в квадратурах.

Рассмотрим возможные типы движения в одномерном случае. Запишем формулу для энергии

$$E = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2} + U(q) \tag{6.20}$$

Пусть потенциальная энергия имеет вид, представленный на рис. 6.3.

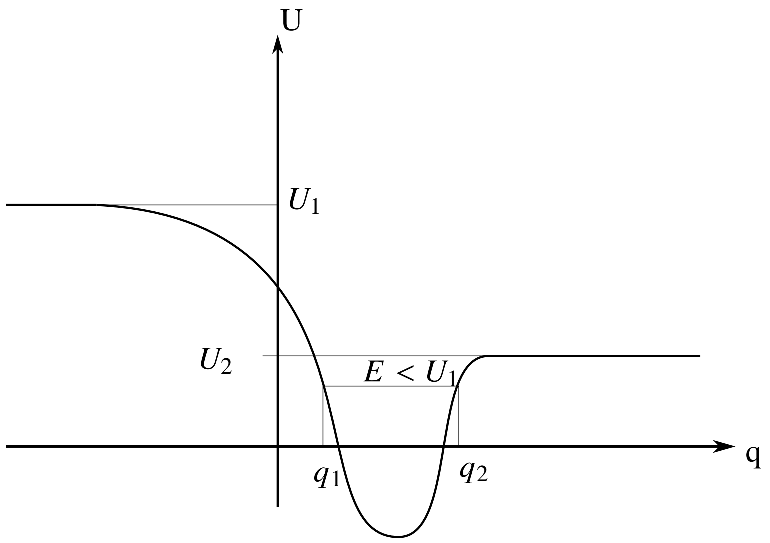

Рис. 6.3: Иллюстрация к объяснению.

Отметим, из формулы (6.20) следует, что частица не может находится в поле энергии ниже, чем потенциальная энергия U. То есть частица не может находиться под графиком. Частица с энергией $E > U_1$ может находиться при любых координатах q, то есть такая частица может уйти на бесконечно вправо или влево. Такое движение называется инфинитным. Для частицы с энергией $U_2 < E < U_1$ движение также будет инфинитным, однако в данном случае движение на бесконечность возможно только вправо.

Рассмотрим частицу $E < U_1$. Эта частица может находиться только в области между точками q_1 и q_2. Такая частица будет совершать колебательное периодическое движение. В этом случае частица не может уйти на бесконечность. Такое движение называется финитным. В точках q_1 и q_2 выполняется равенство

$$E = U\left(q_{1,2}\right) \tag{6.21}$$

В этом случае обобщенная скорость $\dot{q}$ должна быть равна нулю. Поэтому эти точки $q_{1,2}$ называются точками остановки частицы.

Найдем период движения в данном случае. Воспользуемся формулой (6.17). Найдем время движения частицы от точки q_1 к точке q_2. В (6.17) выберем знак "+", так как при движении частицы от q_1 к q_2 координата частицы возрастает с течением времени. Таким образом, время движения равно

$$\int\limits_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{m(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \tag{6.22}$$

Чтобы найти период, нужно прибавить время, которое частица движется из q_2 в q_1. В этом случае в формуле (6.17) берем знак "-". Тогда получаем период движения

$$T = \int\limits_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{m(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} + \left(-\int\limits_{q_2}^{q_1} \sqrt{\frac{m(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \right) \tag{6.23}$$

Преобразуем

$$T = \int\limits_{q_1}^{q_2} \sqrt{2m(q)} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \tag{6.24}$$

Пример 1. Рассмотрим математический маятник (рис. 6.4). Найдем период колебаний данного маятника, считая, что колебания не обязательно малы.

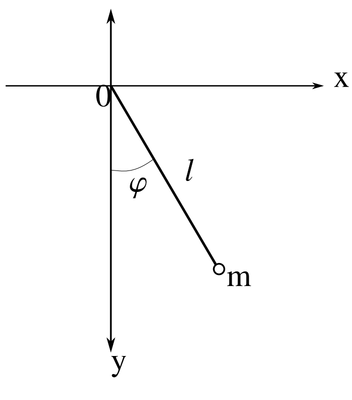

Рис. 6.4: Иллюстрация к объяснению.

Функция Лагранжа для математического маятника

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi \tag{6.25}$$

Она не завит явно от времени

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{6.26}$$

Поэтому обобщённая энергия системы сохраняется. По определению

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L \tag{6.27}$$

Найдем обобщённую энергию

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi \tag{6.28}$$

Введем максимальный угол отклонения φ_0. В этом случае полная энергия маятника будет определяться только потенциальной энергией

$$E = -mgl\cos\varphi_0 \tag{6.29}$$

Найдем из (6.28) и (6.29) получаем

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{ml^2}\left(mgl\cos\varphi - mgl\cos\varphi_0\right) = \frac{2g}{l}\left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - \left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)\right) = \\ = \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \tag{6.30}$$

Отсюда получаем

$$\dot{\varphi} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} \tag{6.31}$$

Учтем, что

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{6.32}$$

Поэтому можно разделить переменные

$$dt = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \tag{6.33}$$

Найдем выражение для периода колебаний. Посчитаем, какое время маятник будет двигаться от угла $\varphi = 0$ до точки φ_0. Для этого проинтегрируем (6.33). Это будет четверть периода. Поэтому период колебаний равен

$$T = 4\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}} \tag{6.34}$$

Преобразуем этот интеграл. Введем новую переменную ξ

$$\sin\xi = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} \tag{6.35}$$

Пределы интегрирования изменяется на пределы от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Продифференцируем (6.35)

$$\cos\xi d\xi = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi \tag{6.36}$$

При этом

$$\cos\xi = \sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}} \tag{6.37}$$

Поэтому получаем

$$\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}\cdot\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}d\varphi \tag{6.38}$$

Согласно обозначениям,

$$\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}} = \sin^2\xi \tag{6.39}$$

Поэтому

$$d\varphi = \frac{2\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}} \tag{6.40}$$

Ввержение для периода движения преобразуется к виду

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}} \tag{6.41}$$

Интеграл, присутствующий здесь, называется эллиптическим интегралом первого рода. Вычислим этот интеграл в приближении. Разложим подынтегральное выражение с точностью до второго члена

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}} \approx 1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi \tag{6.42}$$

Тогда

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi\right)d\xi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right) \tag{6.43}$$

Рассмотрим случай малых углов, то есть можно считать, что

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2} \tag{6.44}$$

Тогда период равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\varphi_0^2}{16}\right) \tag{6.45}$$

Если бы в разложении (6.42) мы брали бы только первый член разложения, то получили бы формулу для периода при малых углах колебаний.

Движение в центральном поле.

Рассмотрим движение частицы массой m в потенциальном поле, причем потенциальная энергия зависит только от расстояния до частицы от некоторой фиксированной точки O (рис. 7.1).

$$U = U(r) \tag{6.46}$$

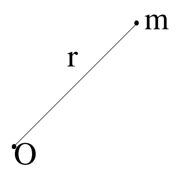

Рис. 6.5: Иллюстрация к объяснению.

Эта фиксированная точка O называется центром поля.

Определение 2. Поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой фиксированной точки

$$U = U(r) \tag{6.47}$$

называется центральным.

Отметим, что в случае центрального поля выполняются законы сохранения энергии и момента импульса.

Утверждение. Траектория частицы в центральном поле лежит в одной плоскости.

Доказательство. Момент импульса сохраняется. Значит, этот вектор постоянен по модулю и по направлению. Направим ось z системы координат вдоль вектора $\vec{M}$ (рис. 6.6).

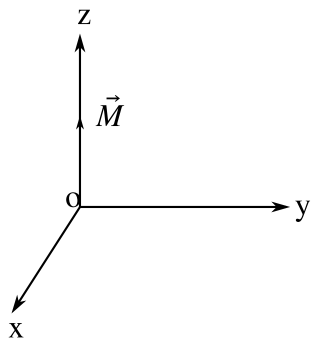

Рис. 6.6: Иллюстрация к объяснению.

Тогда

$$\vec{M} = (0, 0, M) \tag{6.48}$$

Положение частицы характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$. Если этот вектор всегда лежит в одной плоскости, значит, частица тоже все время находится в одной плоскости. По определению момент импульса равен векторному произведению

$$\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{P}\right] \tag{6.49}$$

По определению векторного произведения получаем, что вектор $\vec{M}$ перпендикулярен каждому из сомножителей в векторном произведении (6.49). Значит,

$$\vec{M} \perp \vec{r} \tag{6.50}$$

Это означает, что

$$\left(\vec{M}, \vec{r}\right) = 0 \tag{6.51}$$

Момент импульса $\vec{M}$ сохраняет постоянное напр ведение. Значит, вектор $\vec{r}$ всегда перпендикулярен моменту импульса $\vec{M}$ и, значит, всегда лежит в одной плоскости, перпендикулярной оси z. Значит, частица лежит в плоскости xy. Введем полярную систему координат (рис. 7.2).

Запишем функцию Лагранжа в полярных координатах. В этом случае нам достаточно всего две обобщенных координаты – r и φ.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r) \tag{6.52}$$

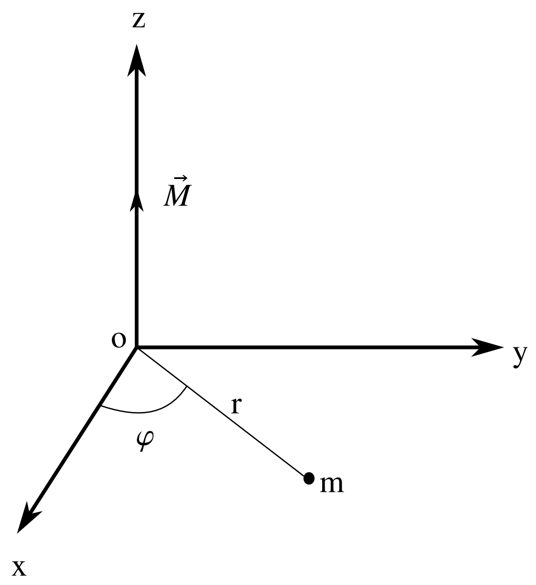

Рис. 6.7: Иллюстрация к объяснению.

Лекция 7. Интегрирование уравнений движения. Движение в центральном поле.

Частица в центральном поле.

В прошлый раз мы начали изучать движение частицы в центральном поле. Дана некоторая частица массы m, потенциальная энергия которой зависит только от расстояния r между этой частицей и некоторой точкой, называемой центром поля (рис. 7.1).

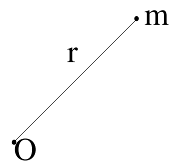

Рис. 7.1: Иллюстрация к объяснению.

В данной задаче сохраняются обобщённая энергия и момент импульса. Кроме того, мы показали, что траектория такой частицы лежит в одной плоскости. Если ось z направить вдоль сохраняющегося вектора $\vec{M}$, начало системы координат связать с центром поля, а плоскость, в которой движется частица, обозначить yx (рис. 7.2), то для характеризации положения рассматриваемой частицы достаточно задать две обобщенные координаты. В данном случае удобнее использовать полярные координаты.

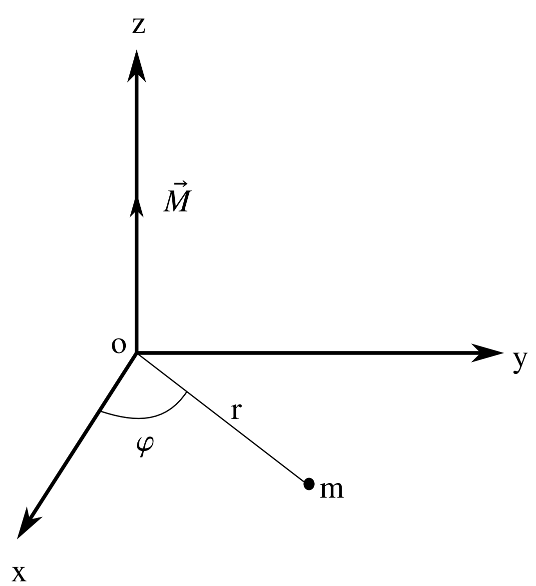

Рис. 7.2: Иллюстрация к объяснению.

В этом случае функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r) \tag{7.1}$$

Видно, что функция Лагранжа не зависит от времени явно

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{7.2}$$

Значит, сохраняется обобщенная энергия

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} - L \tag{7.3}$$

Запишем

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) \tag{7.4}$$

Отметим, что здесь φ – циклическая координата. Соответствующий ей обобщённый импульс сохраняется

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = M_z = M \tag{7.5}$$

Отметим, что в данном случае обобщённый импульс совпадает с проекцией момента импульса на ось z. Ось z совпадает с вектором момента импульса.

Покажем, что p_φ есть проекция момента импульса на z. По определению момента импульса

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}] \tag{7.6}$$

Распишем проекции импульса

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} \\ p_y &= m\dot{y} \end{aligned} \tag{7.7}$$

Тогда из оподления векторного произведения получаем выражение для проекции момента импульса

$$M_z = xp_y - yp_x = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) \tag{7.8}$$

Перейдем от декартовых координат к полярным

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{7.9}$$

Тогда

$$M_z = m\rho^2\dot{\varphi} \tag{7.10}$$

Таким образом, (7.10) и (7.5) совпадают. Значит, момент импульса сохраняется. Итак, момент импульса

$$M = mr^2\dot{\varphi} \tag{7.11}$$

Отсюда

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2} \tag{7.12}$$

Тогда получаем, что полная энергия равна

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{7.13}$$

Отсюда получим

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{M^2}{2mr^2} - U(r)\right) \tag{7.14}$$

Тогда

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{7.15}$$

Отметим, что знак "+" берется на тех участках, где $\dot{r} > 0$, а знак "-" – на тех участках, где $\dot{r} < 0$.

Учтем, что

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} \tag{7.16}$$

Тогда можно разделить переменные

$$dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{m^2r^2}}} \tag{7.17}$$

Проинтегрируем данное выражение

$$t - t_0 = \int\limits_{t_0}^{t} dt = \pm\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{m^2r^2}}} \tag{7.18}$$

где

$$r_0 = r(t_0) \tag{7.19}$$

– координата в начальный момент времени.

Интеграл в (7.18) можно взять численно или аналитически. Поэтому отсюда можно получить выражение для изменения расстояния от частицы до центра поля $r(t)$. Это только часть решения поставленной задачи. Теперь нам нужно найти зависимость второй координаты от времени $\varphi(t)$.

Рассмотрим формулу

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2} \tag{7.20}$$

Учтем, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{7.21}$$

Отсюда

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt = \pm\frac{M}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{m^2r^2}}} \tag{7.22}$$

Здесь мы учли выражение (7.17) для dt.

Проинтегрируем данное выражение

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm\int\limits_{r_0}^{r} \frac{M}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{m^2r^2}}} \tag{7.23}$$

где

$$\varphi_0 = \varphi(t_0) \tag{7.24}$$

Запишем выражение (7.22) в виде

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{7.25}$$

Эта формула определяет зависимость $\varphi(t)$. Таким образом, мы полностью определили закон движения.

Рассмотрим выражение для полной энергии частицы

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{7.26}$$

Отметим, что здесь есть только одна обобщенная координата – радиальная составляющая. Следовательно, это уравнение можно проанализировать аналогично одномерному случаю. Определим возможные типы движения частицы по отношению к центру. Однако в данном случае нам нужно проводить анализ не с помощью полной потенциальной энергии, а только с помощью одной его части, называемой эффективной энергией

$$\frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = U_{eff}(r) \tag{7.27}$$

Нам нужно анализировать график эффективной энергии. Там, где полная энергия равна полной энергии

$$E = U_{eff}(r) \tag{7.28}$$

получаем, что

$$\dot{r} = 0 \tag{7.29}$$

Эта точка называется точкой поворота. В прошлый раз, в одномерном случае такая точка называлась точкой остановки. Однако в данном случае частица не останавливается, так как у нее есть составляющая скорости, за которую отвечает координата φ.

Пусть точек поворота будет две, то есть у уравнения (7.28) два решения – r_{min} и r_{max}. Это означает, что частица совершает относительно центра поля финитное движение и движется в кольце между двумя окружностями. Такое движение будет финитным (рис. 7.3).

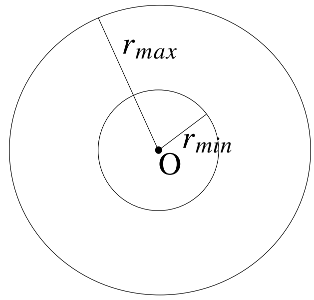

Рис. 7.3: Иллюстрация к объяснению.

Замечание. В случае, если угол отсчитывать от точки поворота, то есть в точке поворота $\varphi_0 = 0$, траектория частицы будет симметричной слева и справа от точки поворота (рис. 7.4).

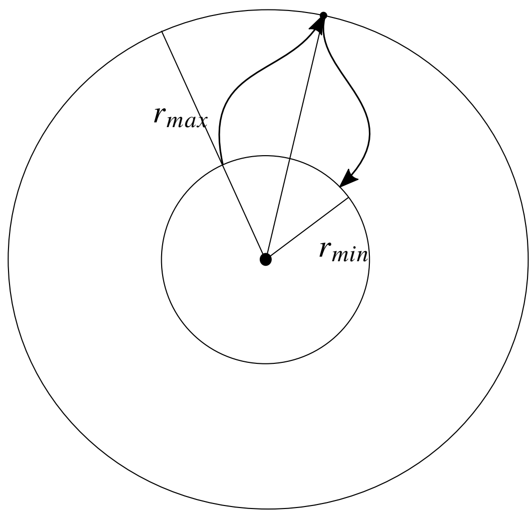

Рис. 7.4: Иллюстрация к объяснению.

Замечание. Имеет место закон сохранения импульса

$$M = mr^2\dot{\varphi} = const \tag{7.30}$$

Перепишем его виде

$$M = mr^2\dot{\varphi} = 2m\frac{1}{2}r \cdot r\frac{d\varphi}{dt} \tag{7.31}$$

Рассмотрим траекторию частицу в центральном поле. Возьмём две бесконечно близкие друг к другу. Это означает, что угол, на который успела повернуться частица, бесконечно мал (рис. 7.5).

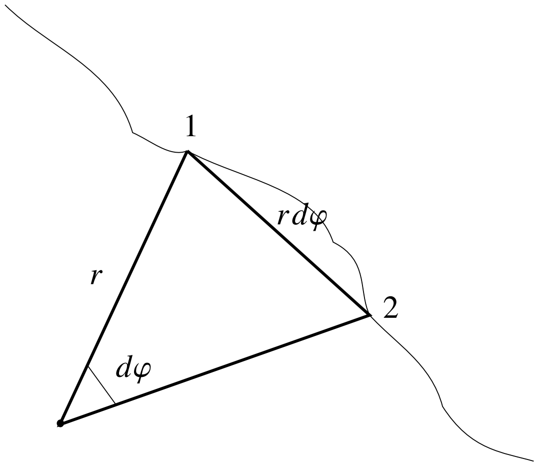

Рис. 7.5: Иллюстрация к объяснению.

Найдем площадь указанного треугольника и обозначим ее du

$$\frac{1}{2}rrd\varphi = du \tag{7.32}$$

Тогда момент импульса можно переписать в виде

$$M = 2m\dot{u} \tag{7.33}$$

где

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \tag{7.34}$$

– секториальная скорость.

Момент импульса сохраняется. Значит, сохраняется и секториальная скорость

$$\dot{u} = const \tag{7.35}$$

Это означает, что за равные промежутки времени площади сегментов, заметаемых радиус-вектором точки во время движения, будет одинаковой.

Отметим, что движение планет есть движение в центральном поле. Для такой системы секториальная скорость также постоянна.

Задача двух тел.

Рассмотрим задачу двух тел. Даны две частицы массами m_1 и m_2. Есть какая-то система координат. В этой системе координат первая частица характеризуется радиус-вектором $\vec{r_1}$, а вторая – радиус-вектором $\vec{r_2}$ (рис. 7.6).

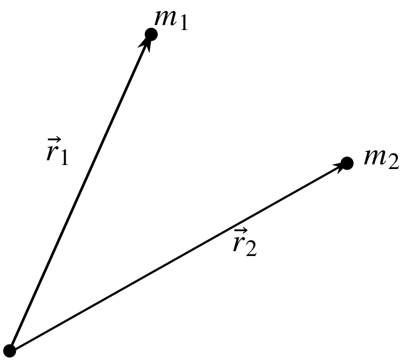

Рис. 7.6: Иллюстрация к объяснению.

Частицы взаимодействуют друг с другом, но энергия их взаимодействия зависит только от расстояния между частицами

$$U = U\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right) \tag{7.36}$$

Найти закон движения такой системы, то есть найти закон движения каждой из частиц. Функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}^2}{2} - U\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right) \tag{7.37}$$

Введем радиус-вектор

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{7.38}$$

– вектор расстояния между частицами. Введем также

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 m_2} \tag{7.39}$$

– вектор положения центра масс системы. (7.38) и (7.39) – новые обобщенные координаты. Решаю эту систему относительно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, получим

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{7.40}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{7.41}$$

Найдем

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}} \tag{7.42}$$

Аналогично для $\dot{\vec{r}}_2$. Поэтому выражение для функции Лагранжа в новых координатах

$$L = \frac{\mu\dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U\left(|\vec{r}|\right) \tag{7.43}$$

где

$$\mu = m_1 + m_2 \tag{7.44}$$

а

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{7.45}$$

– приведенная масса.

Видно, что полученная функция Лагранжа имеет два слагаемых, которые зависят от новых обобщенных координат по отдельности. Таким образом, задача сводится к двум отдельным задачам для движения $\vec{R}$ и для движения $\vec{r}$. Для движения центра масс системы $\vec{R}$ отметим, что $\vec{R}$ – ациклическая координата. Поэтому соответствующий импульс

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = \mu \dot{\vec{R}} \tag{7.46}$$

Отсюда

$$\vec{R} = \frac{\vec{P}}{\mu} t + \vec{R}_0 \tag{7.47}$$

где $\vec{R}_0$ – начальное положение центра масс системы. Таким образом, центр масс системы движется равномерно.

Рассмотрим движение приведенной массы. В этом случае функция Лагранжа

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r) \tag{7.48}$$

это функция Лагранжа для движения в центральном поле. Решение этой задачи нам уже известно, то есть мы можем найти $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$.

Кулоновское поле и потенциал гравитационного взаимодействия.

Пример 2. Найти траекторию движения частицы в центральном поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0 \tag{7.49}$$

Согласно (7.25), уравнение траектории определяется выражением

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M}{r^2}}} \tag{7.50}$$

Будем считать, что начальный угол $\varphi_0 = 0$. Также будем считать, что мы выбрали тот интервал по времени, который соответствует $\dot{r} > 0$, поэтому в (7.50) выбираем "+".

Тогда

$$\varphi = -\int\limits_{r_0}^{r} \frac{Md\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{2mE + 2m\alpha\frac{1}{r} - M^2\left(\frac{1}{r}\right)^2}} = arccos\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}\Bigg|_{r_0}^{r} \tag{7.51}$$

Мы можем выбрать r_0 любым, так как он определяется начальным моментом времени. Мы можем выбрать начальный момент времени так, чтобы

$$\frac{1}{r_0} = \frac{m\alpha}{M^2} + \frac{1}{M}\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}} \tag{7.52}$$

Тогда при подстановке в (7.51) получаем

$$\varphi = arccos\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE} + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}} = arccos\frac{\frac{M^2}{m\alpha}\cdot\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{\frac{2M^2E}{m\alpha^2} + 1}} \tag{7.53}$$

Введем обозначения

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} \tag{7.54}$$

и

$$\sqrt{\frac{2M^2E}{m\alpha^2} + 1} = e \tag{7.55}$$

Тогда

$$\varphi = arccos\frac{\frac{p}{r} - 1}{e} \tag{7.56}$$

Тогда получаем

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi \tag{7.57}$$

Это есть уравнение конического сечения. p – параметр, e – эксцентриситет. То есть мы получили коническое сечение с фокусом, находящимся в начале системы координат.

Отметим, что в начальный момент времени, если $\varphi_0 = 0$, то величина $e\cos\varphi_0$ будет иметь максимальное значение. Следовательно, r_0 имеет минимальное значение, то есть r_0 есть минимальное расстояние до начала координат.

Если энергия E отрицательна, то эксцентриситет $e < 1$ и коническое сечение – эллипс, причем начало координат лежит в одном из фокусов этого эллипса.

Если энергия E положительна, то эксцентриситет $e > 1$, а сечение – гипербола.

Если полная энергия E равна нулю, то эксцентриситет $e = 1$, коническое сечение – парабола.

Отметим, что эллипс соответствует финитному движению, так как частица движется по эллипсу и не может уйти на бесконечность. Гипербола и парабола соответствуют инфинитному движению.

Убедимся в том, что анализ типов движения по эффективной энергии даст нам аналогичный результат.

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \tag{7.58}$$

График эффективной энергии представлен на рис. 7.7.

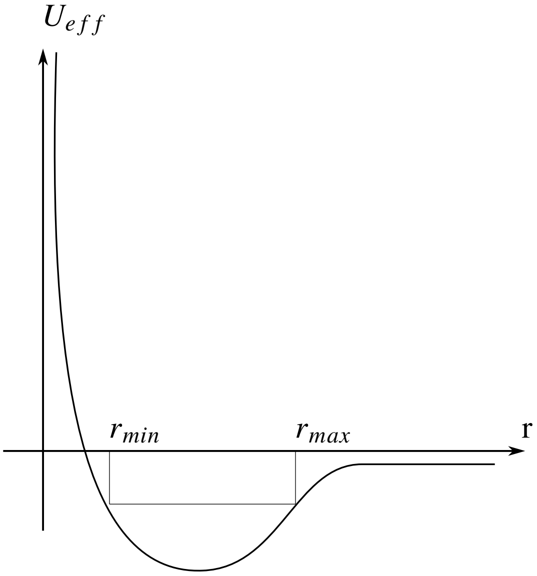

Рис. 7.7: Иллюстрация к объяснению.

Лекция 8. Интегрирование уравнений движения. Рассеяние частиц. Колебания систем с одной степенью свободы

Рассеяние частиц

Будем считать, что у нас есть некоторый центр поля в троечке O. На этот центр с бесконечно большого расстояния летит частица с массой m. Они взаимодействуют, и под действием поля частица откланяется и уходит дальше на бесконечность. Пусть V_∞ - скорость этой частицы. ρ - прицельное расстояние. (Расстояние, на котором частица бы прошла мимо центра, если бы между ними не было взаимодействия) Будем считать, что взаимодействие частицы с центром может быть описано потенциальной энергией $U(r)$. Если мы проведем некоторый отрезок $OA = r_{min}$ - минимальное расстояние между частицей и центром, то углы между OA и асимптотами будут равны $\widetilde{\varphi}$.

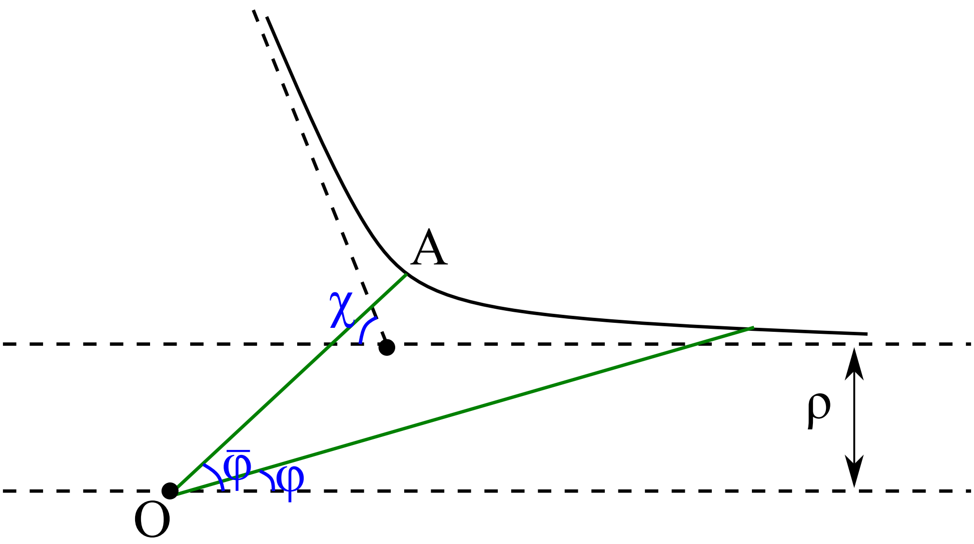

Рис. 8.1: Иллюстрация к объяснению.

Будем характеризовать положение нашей частицы в пространстве двумя параметрами: расстоянием до частицы r и углом φ. Поскольку движение происходит в центральном поле, мы можем воспользоваться формулами, записанными в центральном поле из предыдущих лекций, для нахождения угла φ, где угол φ - угол рассеяния. Очевидно

$$\chi = \pi - 2\widetilde{\varphi} \tag{8.1}$$

Согласно формуле предыдущего параграфа

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{8.2}$$

Пусть $\varphi i_0 = 0$ при $r_0 = \infty$, $r = OA$.
Тогда

$$\widetilde{\varphi} = - \int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{8.3}$$

Попробуем выразить неизвестные нам M, E через известные нам m, V_∞, ρ. Поскольку энергия в процессе сохраняется, можем ее найти через кинетическую энергию частицы. $E = \frac{m{V_\infty}^2}{2}$. Также сохраняется момент импульса. Тогда запишем:

$$|\vec{M}| = |[\vec{r} \times mV_\infty]| = mV_\infty r \sin\varphi = mV_\infty \rho \tag{8.4}$$

Тогда:

$$\widetilde{\varphi} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{2U}{m{V_\infty}^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} \tag{8.5}$$

Однако, в действительности, это знание нам ничего не дает. Связано это с тем, то в диапазоне от ρ до $d\rho$ частиц летит много, и углы рассеивания у всех будут разными.

Пусть эти частицы рассеиваются в интервал углов $\chi \div \chi + d\varphi$. И понятно, что частицы, летящие ближе к центру, будут рассеиваться сильнее, а летящие дальше - слабее. Получается, частицы будут рассеиваться в целый диапазон углов.

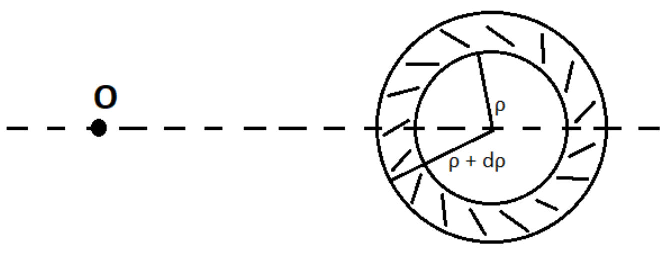

Рис. 8.2: Иллюстрация к объяснению.

Введем две вспомогательные величины:

- n - плотность потока - число частиц, проходящих через площадку, расположенную перпендикулярно движению частиц, и имеющую единичную площадь.

- dN - число частиц, рассеиваемых в единицу времени в интервал углов $\chi \div \chi + d\chi$

Определение. Дифференциальным (эффективным) сечением рассеивания называется величина

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \tag{8.6}$$

Пусть существует взаимно однозначная связь между прицельным расстоянием и углами рассеяния

$$[\rho, \rho + d\rho] \to [\chi, \chi + d\chi] \tag{8.7}$$

Тогда определим число частиц в кольце от ρ до $\rho + d\rho$. Для этого плотность потока умножить на площадь кольца

$$dN = n * 2\pi\rho d\rho \tag{8.8}$$

Тогда дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho \tag{8.9}$$

Перепишем в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\chi \tag{8.10}$$

Телесный угол равен

$$d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi \tag{8.11}$$

Тогда

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\Omega \tag{8.12}$$

Пример 3. Давайте определим эффективное сечение рассеяния $d\sigma$ для

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} \tag{8.13}$$

Воспользуемся Формулой (8.5) и получим :

$$\widetilde{\varphi} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{mV_\infty{}^2 r} - \frac{\rho^2}{r^2}}} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mV_\infty{}^2\rho} + \frac{\rho}{r}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{(mV_\infty{}^2\rho)^2}}}\Bigg|_{r_{min}}^{\infty} \tag{8.14}$$

В этой формуле r_{min} есть точка поворота. Точку поворота же можно найти из условия

$$E = U_{eff} \tag{8.15}$$

Эффективная потенциальная энергия равна

$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{8.16}$$

Подставим в формулу соответствующие значения

$$\frac{mV_\infty^2}{2} = \frac{\alpha}{r} + \frac{mV_\infty^2\rho^2}{2r^2} \tag{8.17}$$

Преобразуем уравнение

$$1 - \frac{2\alpha}{mV_\infty^2 r} - \frac{\rho^2}{r^2} = 0 \tag{8.18}$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{-\frac{\alpha}{mV_\infty^2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2V_\infty^2} + \rho^2}}{\rho^2} \tag{8.19}$$

Подставим полученное значение в (8.14)

$$\widetilde{\varphi} = \arccos\frac{\frac{\alpha}{mV_\infty{}^2\rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mV_\infty{}^2\rho}\right)^2}} \tag{8.20}$$

После простых алгебраический преобразований легко получить:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2V_\infty{}^4} tg^2\left(\frac{\widetilde{\varphi}}{2}\right) \tag{8.21}$$

Согласно формуле (8.1)

$$\chi = \pi - 2\widetilde{\varphi} \tag{8.22}$$

Отсюда следует

$$\widetilde{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2} \tag{8.23}$$

Тогда

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2V_\infty{}^4} ctg^2(\frac{\chi}{2}) \tag{8.24}$$

Если продифференцировать левую и правую части равенства по $d\chi$, получим:

$$2\rho\frac{d\rho}{d\chi} = -\frac{\alpha^2}{m^2V_\infty{}^4} ctg(\frac{\chi}{2})\frac{1}{\sin\frac{\chi}{2}^2} \tag{8.25}$$

Пользуясь формулой (8.13), получаем

$$d\sigma = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\chi \tag{8.26}$$

Тогда

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{m^2V_\infty{}^4}\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin\frac{\chi}{2}^3}d\chi \tag{8.27}$$

Телесный угол

$$d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi \tag{8.28}$$

Поэтому

$$d\chi = \frac{\Omega}{4\pi \sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}} \tag{8.29}$$

Тогда получим

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mV_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin\frac{\chi}{2}^2} \tag{8.30}$$

– формула Резерфорда.

Колебания систем с одной степенью свободы

Будем считать, что у нас есть механическая система с идеальными голономными и стационарными связями, которая имеет одну степень свободы, и, соответственно, может характеризоваться одной координатой q.

Также будем считать, что потенциальная энергия U(q) не зависит от времени. Функция Лагранжа для данной системы

$$L = \frac{m(q)q^2}{2} - U(q) \tag{8.31}$$

Пусть $U(q_0)$ - минимум. Будем считать, что отклонение точки от положения равновесия очень маленькое. Тогда можно осуществить разложение

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} + \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0} (q - q_0)^2 \tag{8.32}$$

Для краткости положим

$$\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0} = k \tag{8.33}$$

и

$$q - q_0 = \xi \tag{8.34}$$

Также примем

$$U(q_0) = 0 \tag{8.35}$$

Тогда потенциальная энергия примет вид

$$U = \frac{k\xi^2}{2} \tag{8.36}$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{m(q)q^2}{2} = \frac{mv}{2}\left(\frac{d(q-q_0)}{dt}\right)^2 = \frac{m(q)\dot{\xi}^2}{2} \tag{8.37}$$

Пусть

$$m(q) = m(q_0) = m \tag{8.38}$$

Тогда

$$T = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} \tag{8.39}$$

и функция Лагранжа

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - \frac{k\xi^2}{2} \tag{8.40}$$

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\xi}} - \frac{\delta L}{\delta\xi = 0} \tag{8.41}$$

Распишем это уравнение

$$m\ddot{\xi} + k\xi = 0$$

$$\omega = \frac{k}{m} \tag{8.42}$$

Перепишем в виде

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0$$

Где

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{8.43}$$

Полученное уравнение описывает гармонические колебания, его решение можно записать в виде

$$\xi = C\cos(\omega t + \alpha) \tag{8.44}$$

Запишем это выражение в виде

$$\xi = Re[A\exp^{i\omega t}] \tag{8.45}$$

Где комплексная постоянная представима через некоторые действительные постоянные

$$A = C\exp^{i\alpha} \tag{8.46}$$

Тогда

$$A\exp^{i\omega t} = C\exp^{i(\omega t+\alpha)} = C(\cos(\omega t + \alpha) + i\sin(\omega t + \alpha)) \tag{8.47}$$

Возьмем реальную часть от этого уравнения

$$Re[A\exp^{i\omega t}] = C\cos(\omega t + \alpha) \tag{8.48}$$

Отметим, что полученное выражение окажется полезным при решении задачи на колебания со многими степенями свободы.

Колебания систем со многими степенями свободы.

Будем считать, что нам дана система из N числа материальных точек, которые характеризуются радиус-векторами $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$. На эту систему наложены идеальные голономные связи. Система имеет s степеней свободы и может характеризоваться обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) \tag{8.49}$$

Выразим радиус-вектор любой частицы как функцию от обобщенных координат и времени

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{8.50}$$

Для простоты будем считать, что связи стационарны. В этом случае время не будет явно входить в (8.50). Перепишем функцию Лагранжа как функцию от обобщённых координат. Для этого перепишем потенциальную энергию в виде

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \tag{8.51}$$

Для потенциальной энергии рассчитаем

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \tag{8.52}$$

Тогда

$$\dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \tag{8.53}$$

Тогда получаем, что функция Лагранжа в обобщенных координатах имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U(q_1, \ldots, q_s, t) \tag{8.54}$$

Обозначим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right) = m_{\alpha\beta}(q) \tag{8.55}$$

Итак, в сделанных обозначениях функция Лагранжа для системы с s степенями свободы имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \xi_j m_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, t\right) \tag{8.56}$$

Лекция 9. Интегрирование уравнений движения. Рассеяние частиц. Колебания систем со многими степенями свободы.

Колебания систем со многими степенями свободы.

Рассмотрим механическую систему с S степенями свободы, которая характеризуется обобщенным координатами $q_1, q_1, ..., q_s$. На эту систему наложены идеальные голономные стационарные связи. На систему действуют только потенциальные силы. Потенциальная энергия $U = U(q_1, q_2..., q_s)$.

Ранее для такой системы получили функцию Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}(q)\dot{q_\alpha}\dot{q_\beta} - U = U(q_1, q_2..., q_s) \tag{9.1}$$

Где

$$m_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q+\beta} \tag{9.2}$$

m_i– масса частицы системы, $\vec{r}_i$– радиус-вектор системы, N – количество материальных точек(частиц) системы.

$$m_{\alpha\beta}(q) = m_{\beta\alpha}(q) \tag{9.3}$$

Требование:

$$U(q_1^0, q_2^0, ..., q_s^0) = U(q^0) = min \tag{9.4}$$

Минимум потенциальной энергии – положение устойчивого равновесия системы.

Рассмотрим малые отклонения системы от положения равновесия. Разложим потенциальную энергию в ряд вблизи точки минимума до второго порядка.

$$U = U(q_1, q_2..., q_s) = U(q_1^0, q_2^0, ..., q_s^0) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Big|_{q^0}(q_\alpha - q_\alpha^0)(q_\beta - q_\beta^0) \tag{9.5}$$

Введем

$$K = \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Big|_{q^0} \tag{9.6}$$

$$\xi_\alpha = (q_\alpha - q_\alpha^0) \tag{9.7}$$

$$\xi_\beta = (q_\beta - q_\beta^0) \tag{9.8}$$

Без обобщения общности можно положить потенциальную энергию в точке минимума равно нулю

$$U\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_s^0\right) = 0 \tag{9.9}$$

Тогда потенциальная энергия принимает вид

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \tag{9.10}$$

Очевидно, что из-за независимости второй производной по очередности переменных

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} \tag{9.11}$$

Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}(q)\dot{\xi}_\alpha\dot{\xi}_\beta \tag{9.12}$$

Мы считаем, что отклонения и скорости малы. Нам нужно получить малые члены квадратичной малости. Для этого нужно, чтобы $m_{\alpha\beta}(q)$ не зависело от q. Разложим

$$m_{\alpha\beta}(q) = m_{\alpha\beta}(q^0) = m_{\alpha\beta} \tag{9.13}$$

Тогда кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\alpha\dot{\xi}_\beta \tag{9.14}$$

Тогда функция Лагранжа в приближении малых колебаний

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j=\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\alpha\dot{\xi}_\beta - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \tag{9.15}$$

Запишем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial\xi_\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s \tag{9.16}$$

То есть мы получаем s дифференциальных уравнений. Получим их явно. Вычислим производную

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\beta \tag{9.17}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}\ddot{\xi}_\beta \tag{9.18}$$

Аналогично

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\xi_\beta \tag{9.19}$$

Поэтому уравнения Лагранжа принимают вид

$$\sum_{\beta=1}^{s}\left[m_{\alpha\beta}\ddot{\xi}_\beta + K_{\alpha\beta}\xi_\beta\right] = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s \tag{9.20}$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$\xi_\beta = A_\beta e^{i\omega t} \tag{9.21}$$

Здесь A_β – комплексная постоянная, ω – действительная постоянная. Подставим вид данного решения в уравнения Лагранжа. Найдем вторую производную

$$\ddot{\xi}_\beta = -\omega^2 A_\beta e^{i\omega t} \tag{9.22}$$

Тогда после поставления соответствующих выражений для (9.21) в (9.20), получаем

$$\sum_{\beta=1}^{s}\left[-\omega^2 m_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}\right] A_\beta = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, s \tag{9.23}$$

– система линейных однородных уравнений относительно индексов A_β. Известно, что система линейных однородных уравнений имеет отличные от нуля решения, когда ее определитель равен нулю

$$\left|-\omega^2 m_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}\right| = 0 \tag{9.24}$$

Отсюда можно найти значения ω_k, при которых система имеет решения. Этих частот будет s штук. Имеем невырожденный случай, если w_k различны. Если есть кратные частоты, то такой случай называют вырожденным. Рассмотрим общий метод нахождения частот на примере.

Пример.

Пример 4. Рассмотрим малые колебания двойного математического маятника (рис. 9.1). Найти частоты этих малых колебаний.

Здесь имеем две обобщённые координаты – φ_1 и φ_2. Начало отсчета потенциальной энергии произвольно. Распишем потенциальную энергию системы

$$U = U_1 + U_2 \tag{9.25}$$

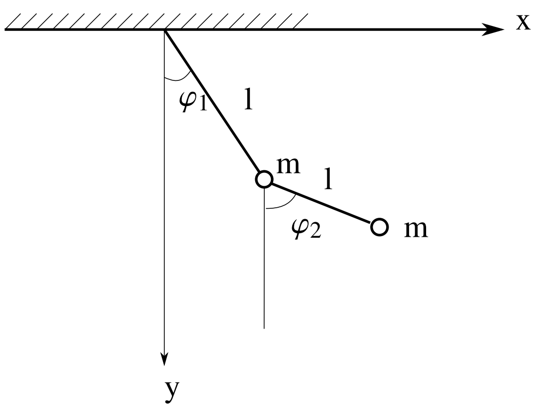

Рис. 9.1: Иллюстрация к объяснению.

Потенциальная энергия первого грузика равна

$$U_1 = -mgl\cos\varphi_1 \tag{9.26}$$

Потенциальная энергия второго грузика

$$U_2 = -mg\left(l\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2\right) \tag{9.27}$$

Отсюда

$$U = U_1 + U_2 = -2mgl\cos\varphi_1 - mgl\cos\varphi_2 \tag{9.28}$$

Отсюда видно, что минимум потенциальной энергии достигается в точке

$$\begin{cases} \varphi_1^0 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} \tag{9.29}$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 \tag{9.30}$$

Кинетическая энергия первого грузика

$$T_1 = \frac{ml^2\dot{\varphi}_1^2}{2} \tag{9.31}$$

Кинетическая энергия второго грузика

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \tag{9.32}$$

Выразим координаты через обобщенные

$$x_2 = l\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2 \tag{9.33}$$

$$y_2 = l\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 \tag{9.34}$$

Найдем

$$\dot{x}_2 = l\cos\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1 + l\cos\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_2 \tag{9.35}$$

$$\dot{y}_2 = -l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1 - l\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2 \tag{9.36}$$

Отсюда получаем выражение для кинетической энергии

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}_1^2 + l^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l^2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) \tag{9.37}$$

Учтем, что колебания малы. Для этого нужно учесть члены до квадратичного. Рассмотрим кинетическую энергию (9.37). Первые два члена в скобках подходят, так как сами по себе являются квадратичными. Третий же член не подходит, так как квадратичный мнодитель $\dot{\varphi}_1\cdot\dot{\varphi}_2$ умножается на $\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$. Чтобы получить здесь квадратичный член, нужно положить сюда значение точки равновесия, то есть

$$\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0 \tag{9.38}$$

Потенциальная энергия не содержит квадратичных членов. Разложим косинусы в ряд вблизи положения равновесия

$$\cos\varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \tag{9.39}$$

$$\cos\varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} \tag{9.40}$$

Тогда получаем потенциальную энергию в приближении

$$U = -3mgl + mgl\varphi_1^2 + mgl\frac{\varphi_2^2}{2} \tag{9.41}$$

Первый член в потенциальной энергии можно выбросить при написании функции Лагранжа, так как с физической точки зрения от отвечает за смещение начала отсчета потенциальной энергии.

Таким образом, функция Лагранжа

$$L = ml^2\dot{\varphi}_1^2 + ml^2\frac{\dot{\varphi}_2^2}{2} + ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - mgl\varphi_1^2 - mgl\frac{\varphi_2^2}{2} \tag{9.42}$$

Тогда уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0 \tag{9.43}$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = 2ml^2\dot{\varphi}_1 + ml^2\dot{\varphi}_2 \tag{9.44}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 \tag{9.45}$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -2mgl\varphi_1 \tag{9.46}$$

Отсюда получаем первое уравнение Лагранжа

$$2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + 2mgl\varphi_1 = 0 \tag{9.47}$$

Аналогично получаем второе уравнение Лагранжа

$$ml^2\ddot{\varphi}_2 + ml^2\ddot{\varphi}_1 + 2mgl\varphi_2 = 0 \tag{9.48}$$

Получаем систему из двух дифференциальных уравнений. Будем искать решение в виде

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t} \tag{9.49}$$

$$\varphi_2 = A_2 e^{i\omega t} \tag{9.50}$$

Где A_1, A_2 – некоторые комплексные постоянные. Подставим (9.49)-(8.50) в полученную систему. Для этого вычислим

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 A_1 e^{i\omega t} \tag{9.51}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 A_2 e^{i\omega t} \tag{9.52}$$

Тогда при подстановке в систему

$$2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) A_1 - \omega^2 A_2 = 0 \tag{9.53}$$

$$-\omega^2 A_1 + \left(\frac{q}{l} - \omega^2\right) A_2 = 0 \tag{9.54}$$

Итак, получили линейную систему однородных уравнений. Найдем, при каких ω эта система имеет ненулевые решения и сами эти решения. Запишем детерминант данной системы

$$\begin{vmatrix} 2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{9.55}$$

Отсюда

$$2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) - \omega^4 = 0 \tag{9.56}$$

Решение данного уравнения

$$\pm\omega^2 = \sqrt{2}\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) \tag{9.57}$$

то есть получаем

$$\omega_{1,2}^2 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right)\frac{g}{l} \tag{9.58}$$

Итак, имеем две частоты колебаний.

Теоретическое решение поставленной задачи (продолжение).

Вернемся к теории, к этому примеру вернемся позже. Из характеристического детерминанта (9.24) мы определили собственные частоты ω_k. Найденные значения ω_k мы подставляем в систему уравнений (9.23) и получаем коэффициенты $A_\beta^{(k)}$ для определенной частоты с индексом k. Для невырожденного случая коэффициенты могут быть записаны через алгебраические дополнения

$$A_\beta^{(k)} = \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} A_k \tag{9.59}$$

где A_k – произвольная комплексная постоянная, а $\Delta_{\beta_k\beta}$ – алгебраическое дополнение элементов β_k строки определителя (9.24) при $\omega = \omega_k$.

Тогда мы получаем некое частное решение, соответствующее частоте ω_k

$$\xi_\beta^{(k)} = \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} A_k e^{i\omega_k t} \tag{9.60}$$

Общее решение

$$\xi_\beta = \sum_{k=1}^{s} \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} A_k e^{i\omega_k t} \tag{9.61}$$

Переведем это решение в действительный вид. любая комплексная константа может быть представлена в виде

$$A_k = C_k e^{i\alpha_k} \tag{9.62}$$

Тогда

$$\xi_\beta = \sum_{k=1}^{s} \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} C_k \cos\left(\omega_k t + \alpha_k\right), \quad \beta = 1, 2, \ldots, s \tag{9.63}$$

Видно, что решение представляет собой суперпозицию гармонических колебаний.

Введем некоторые новые координаты

$$\theta_k = C_k \cos\left(\omega_k t + \alpha_k\right), \quad k = 1, 2, \ldots, s \tag{9.64}$$

Тогда видно, что координаты ξ_β представляют собой линейную суперпозицию координат.

Выбор обобщенных координат произволен, поэтому с помощью уравнений (9.63) мы можем перейти от одних обобщенных координат к другим

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s \to \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s \tag{9.65}$$

Новые обобщенные координаты будут изменяться по гармоническому закону, то есть будут удовлетворять уравнению

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = 0 \tag{9.66}$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ – главные (нормальные) координаты.

Пример (продолжение).

Пример 4 (продолжение). Запишем систему уравнений

$$2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) A_1 - \omega^2 A_2 = 0 \tag{9.67}$$

$$-\omega^2 A_1 + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) A_2 = 0 \tag{9.68}$$

Ранее мы нашли два корня

$$\omega_{1,2}^2 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right) \frac{m}{g} \tag{9.69}$$

Выберем для определённости частоту

$$\omega_1^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right) \frac{g}{l} \tag{9.70}$$

Подставим найденную частоту во второе уравнение системы

$$-\left(2 + \sqrt{2}\right) \frac{g}{l} A_1 - \left(1 + \sqrt{2}\right) \frac{g}{l} A_2 = 0 \tag{9.71}$$

Отсюда получаем

$$A_2 = -\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} A_1 \tag{9.72}$$

Таким образом,

$$A_2 = -\sqrt{2} A_1 \tag{9.73}$$

При этом константа A_1 может быть произвольной. Для определенности обозначим

$$A_1 = A_1^{(1)} \tag{9.74}$$

Тогда

$$A_2 = -\sqrt{2}A_1^{(2)} \tag{9.75}$$

Соответственно, частное решение

$$\varphi_1^{(1)} = A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} \tag{9.76}$$

а второе частное решение

$$\varphi_2^{(1)} = -\sqrt{2}A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} \tag{9.77}$$

Представим комплексную константу в виде

$$A_1^{(1)} = C_1 e^{i\alpha_1} \tag{9.78}$$

Тогда

$$\varphi_1^{(1)} = C_1 \cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right) \tag{9.79}$$

$$\varphi_2^{(1)} = -\sqrt{2}C_1 \cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right) \tag{9.80}$$

Теперь найдем частное решение для частоты ω_2. Возьмем

$$\omega_2^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)\frac{g}{l} \tag{9.81}$$

Подставим ее во второе уравнение системы и получим

$$A_2 = \sqrt{2}A_1 \tag{9.82}$$

Обозначим

$$A_1 = A_1^{(2)} \tag{9.83}$$

Отсюда получаем

$$\varphi_1^{(2)} = A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} \tag{9.84}$$

$$\varphi_2^2 = \sqrt{2}A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} \tag{9.85}$$

Переходим к действительным постоянным

$$A_1^{(2)} = C_2 e^{i\alpha_2} \tag{9.86}$$

Тогда

$$\varphi_1^{(2)} = C_2 \cos\left(\omega_2 t + \alpha_2\right) \tag{9.87}$$

$$\varphi_2^{(2)} = \sqrt{2} C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{9.88}$$

Отсюда получаем общие решения

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_2^{(2)} = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{9.89}$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2} C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \sqrt{2} C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{9.90}$$

Можно ввести новые обобщенные координаты

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{\sqrt{2}}\right) = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \tag{9.91}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{\sqrt{2}}\right) = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{9.92}$$

Замечание. Если частоты ω_k вырождены, то

1. коэффициенты $A_\beta^{(k)}$ не выражаются через алгебраическое дополнение
2. в случае кратных частот одной частоте могут соответствовать несколько решений, причем любая суперпозиция этих решений тоже решение.

Лекция 10. Интегрирование уравнений движения. Колебания молекул. Движение твердого тела. Тензор инерции.

Колебания молекул

Определение. *Молекула* – N материальных точек, которые взаимодействуют друг с другом и не находятся ни в каких внешних полях.

Молекула состоит из атомов, которые будем считать в самом простом приближении материальными точками. Эти материальные точки могут друг с другом взаимодействовать.

Число степеней свободы молекулы, состоящей из N атомов S=3N. Т.к. на систему не наложено жестких связей.

Молекула может двигаться следующим образом.

1. Поступательное движение молекулы как целого. На такое движение отводится 3 степени свободы.
2. Вращательное движение молекулы – 3 степени свободы (есть исключение для линейной молекулы).
3. Колебательное движение молекулы – 3N-6 степеней свободы

Замечание. В случае линейной молекулы 2 вращательные степени свободы, а следовательно на колебательные степени свободы приходится 3N-5.

Колебания молекул описываются точно так же как и колебания механической системы. Но так как молекула может двигаться поступательно и совершать вращательное движение, при рассмотрении колебаний эти движения надо исключить.

Каждая материальная точка в молекула характеризуется своим радиус-вектором относительно введеной системы отсчета:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,(0)} + \vec{u}_i \qquad , i = 1, 2, ..., N, \tag{10.1}$$

где $\vec{r}_i^{\,(0)}$ – радиус вектор, проведенный в точку равновесия атома, $\vec{u}_i$ – смещение из положения равновесия. Будем считать u_i малым смещением, значит рассматриваем малые колебания.

- Исключим поступательное движение следующим образом: импульс системы равен нулю, центр инерции не сдвигается. Полная масса системы: $\mu = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$. Тогда по определению центра масс:

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i^{\,(0)} \tag{10.2}$$

Учитывая $\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,(0)} + \vec{u}_i$, получим *условие исключения поступательного движения* :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{u}_i = 0 \tag{10.3}$$

- Исключим вращательное движение. Положим момент импульса равным нулю.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i] \tag{10.4}$$

Учитывая, что $\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{u}}_i$ и пренебрегая величиной второго порядка малости, запишем:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ [\vec{r}_i^{\,(0)} \times \dot{\vec{u}}_i] = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\ [\vec{r}_i^{\,(0)} \times \vec{u}_i] \tag{10.5}$$

Чтобы момент импульса был равен нулю, положим, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ [\vec{r}_i^{\,(0)} \times \vec{u}_i] = 0 \tag{10.6}$$

Это уравнение *исключает вращательное движение*.

Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{u}_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\ [\vec{r}_i^{\,(0)} \times \vec{u}_i] = 0$ представляют собой идеальные голономные связи, наложенные на систему. Они уменьшают количество обобщенных координат, необходимых для рассмотрения системы.

Дальнейшее решение задачи о колебании молекул аналогично представленному ранее: учитывая голомные связи выбираем обобщенные координаты, записываем уравнения Лагранжа с учетом малости колебаний, из решения системы уравнений Лагранжа находим частоты, затем подставляем в систему и находим решение.

Движение твердого тела

Тензор инерции

Определение. *Твердое тело* – это система материальных точек, расстояние между которыми можно считать постоянными в данной задаче.

1) Определим число степеней свободы. Твердое тело имеет 6 степеней свободы. Получим это двумя способами.

1. Твердое тело может двигаться поступательно (3 степени свободы) и вращательно (еще 3 степени свободы).

2. Определим число степеней свободы с помощью соотношения, учитывающего наложенные голономные связи. Чтобы задать положение абсолютно твердого тела, надо задать положение 3-х точек, не лежащих на одной прямой. Так как расстояние между этими точками постоянно, считаем эти расстояниями связями, наложенными на систему (как невесомые жесткие стержни). Имеем N=3 материальных точек и n=3 голономные связи, наложенные на систему. Тогда число степеней свободы S=3N-3=6.

Замечание. Для абсолютно тонкого стержня S=5. Не рассматриваем вращение вдоль стержня.

2) Построим функцию Лагранжа. Найдем кинетическую и потенциальную энергию через обобщенные координаты. Возьмем неподвижную систему отсчета XYZ. Если систему X'Y'Z' жестко свяжем с телом, тогда можно характеризовать положение твердого тела положением штрихованой системы относительно нештрихованой. Выберем O' в центре инерции абсолютно твердого тела для удобства. Введем радиус-вектор $\vec{R}$, соединяющий начала координат O и O'. Рассмотрим произвольную точку тела, ее радиус-вектор в нештрихованной и штрихованной системах коодинат соответственно: $\vec{r}, \vec{r'}$, где $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$.

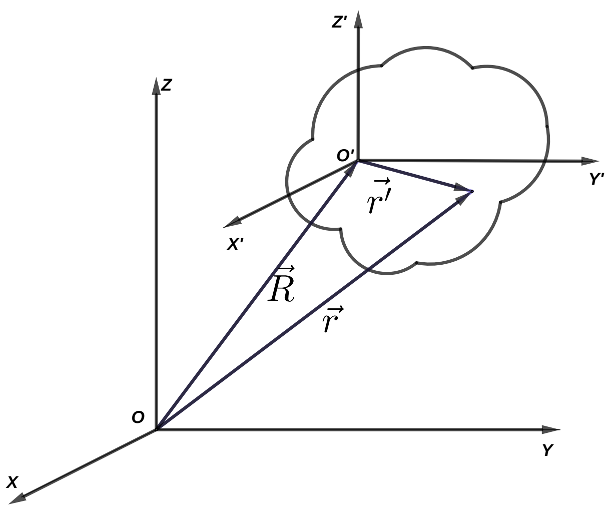

Рис. 10.1: Абсолютно твердое тело

Любое перемещение твердого тела можно представить как поступательное движение центра инерции и вращательное движение вокруг оси, проходящей в центр инерции.

Предадим бесконечно малое перемещение тела. Перемещение нашей произвольной точки:

$$d\vec{r} = d\vec{R} + [d\vec{\phi} \times \vec{r}'] \tag{10.7}$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + [\frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r}']. \tag{10.8}$$

Введем следующие обозначения: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – скорость произвольно выбранной точки твердого тела; $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ – скорость центра инерции твердого тела, $\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$ – угловая скорость вращения твердого тела.

Если знаем скорость произвольной точки твердого тела, можем записать кинетическую энергию (суммируем по всем точкам):

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{V} + [\vec{\Omega} \times \vec{r}']\right)^2 = \sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 + \sum m\vec{V}[\vec{\Omega} \times \vec{r}'] + \sum \frac{m}{2}[\vec{\Omega} \times \vec{r}']^2 \tag{10.9}$$

Рассмотрим слагаемые:

- $\sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 = \frac{\vec{V}^2}{2}\sum m = \frac{\vec{V}^2}{2}\mu = \frac{\mu\vec{V}^2}{2}$, где μ – масса твердого тела
- $\sum m\vec{V}[\vec{\Omega} \times \vec{r}'] = \sum m\vec{r}'[\vec{V} \times \vec{\Omega}] = [\vec{V} \times \vec{\Omega}]\sum m\vec{r}' = 0$, т.к. $\sum m\vec{r}' = 0$ положение центра инерции.
- $\sum \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\times\vec{r}']^2 = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}^2\vec{r}'^2 sin^2(\widehat{\vec{\Omega}, \vec{r}'})\right) = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}^2\vec{r}'^2 - \vec{\Omega}^2\vec{r}'^2 cos^2(\widehat{\vec{\Omega}, \vec{r}'})\right) = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}^2\vec{r}'^2 - (\vec{\Omega}\vec{r}')^2\right)$

Тогда выражение для кинетической энергии будет иметь вид

$$T = \frac{\mu\vec{V}^2}{2} + \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}^2\vec{r}'^2 - (\vec{\Omega}\vec{r}')^2\right) \tag{10.10}$$

Физический смысл слагаемых:

- $T_{\text{пост}} = \frac{\mu\vec{V}^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения центра масс ;
- $T_{\text{вращ}} = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}^2\vec{r}'^2 - (\vec{\Omega}\vec{r}')^2\right)$ – кинетическая энергия вращательного движения.

Хотим получить тензор инерции. Вектор $\vec{\Omega}$ имеет три компоненты $\vec{\Omega} = \{\Omega_{x'}; \Omega_{y'}; \Omega_{'z}\}$. Введем Ω_i, где i=1, 2, 3 : $\Omega_{x'} = \Omega_1; \Omega_{y'} = \Omega_2; \Omega_{'z} = \Omega_3$.

Аналогично компоненты $\vec{r'} = \{x'; y'; z'\}$ будем обозначать x_i, где i=1, 2, 3.

Запишем все произведения, содержащиеся во вращательной кинетической энергии.

$$\Omega^2 = \Omega_{x'}^2 + \Omega_{y'}^2 + \Omega_{z'}^2 = \sum_{i=1}^{3} \Omega^2 = \Omega_i^2 \tag{10.11}$$

$$\vec{r}^2 = x_l^2 \tag{10.12}$$

Распишем скалярное произведение.

$$\left(\vec{\Omega}\vec{r'}\right) = \Omega_x x' + \Omega_y y' + \Omega_z z' = \sum_{i=1}^{3} \Omega_i x_i = \Omega_i x_i \tag{10.13}$$

Подставим найденные в выражение для кинетической энергии вращательного движения.

$$T_{\text{вращ}} = \sum \frac{m}{2}\left(\Omega_l^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\right) \tag{10.14}$$

Введем величину $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера. $\Rightarrow$

$$\Omega_i^2 = \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} \iff \sum_{i=1}^{3} \Omega_i^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \Omega_i \Omega_k \delta_{ik}$$

$$T_{\text{вращ}} = \sum \frac{m}{2}\left(\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\right) = \frac{1}{2}\Omega_i \Omega_k \sum m\left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right) \tag{10.15}$$

Обозначим $I_{ik} = \sum m\left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right)$. Для каждого i и k эта величина и будет меняться, т.к. она зависит от индексов. Это и есть *тензор инерции*.

Определение (неточное). Тензор – совокупность величин, которые при преобразовании системы координат преобразуются по некоторому закону.

Данный тензор инерции твердого тела I_{ik} содержит девять компонент. По построению он симметричен: $I_{ik} = I_{ki}$.

С учетом введенных обозначений перепишем формулу для кинетической энергии следующим образом.

$$T = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k \tag{10.16}$$

Вычислим явно компоненты тензора инерции.

- $I_{11} = \sum m\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2\right) = \sum m\left(x_2^2 + x_3^2\right) = \sum m\left(y'^2 + z'^2\right)$
- $I_{12} = -\sum m x_1 x_2 = -\sum m x' y'$
- ...

Запишем тензор в виде матрицы. Первый индекс нумирует строки, второй – столбцы.

$$I = \begin{pmatrix} \sum m(y'^2 + z'^2) & -\sum m x' y' & -\sum m x' z' \\ -\sum m y' x' & \sum m(x'^2 + z'^2) & -\sum m y' z' \\ -\sum m z' x' & -\sum m z' y' & \sum m(x'^2 + y'^2) \end{pmatrix} \tag{10.17}$$

Если тело сплошное и можно ввести плотность ρ, тогда переходим от суммирования по всем материальным точкам к интегрированию по всему объему:

$$\sum m \to \int \rho d\tau$$

$$I = \begin{pmatrix} \int \rho(y'^2 + z'^2) d\tau & -\int \rho x' y' d\tau & -\int \rho x' z' d\tau \\ -\int \rho y' x' d\tau & \int \rho(x'^2 + z'^2) d\tau & -\int \rho y' z' d\tau \\ -\int \rho z' x' d\tau & -\int \rho z' y' d\tau & \int \rho(x'^2 + y'^2) d\tau \end{pmatrix} \tag{10.18}$$

Воспользуемся тем, что симметричный тензор можно привести к диагональному виду путем соответствующего выбора направлений осей X’, Y’, Z’.

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \tag{10.19}$$

Замечение. Далее будем обозначать диагональные компоненты следующим образом: $I_{11} = I_1,\ I_{22} = I_2,\ I_{33} = I_3$.

Определение. Оси X’,Y’,Z’, в которых тензор инерции диагонален называются *главными осями инерции*, а сами значения, стоящие по диагонали I_1, I_2, I_3 – называются *главными моментами инерции*.

Пример 1. Вычислим главные моменты инерции сплошного однородного шара массой μ, радиуса R.

Решение. Выберем систему координат X’Y’Z’, проходящую через центр масс, тогда тензор инерции будет иметь диагональный вид и из полной симметрии задачи все моменты инерции, стоящие на диагонали, будут одинаковы.

Вычислим I_3.

$$I_3 = \int \rho(x'^2 + y'^2) d\tau \tag{10.20}$$

Перейдем в сферическую систему координат: $x' = rsin\Theta cos\phi$; $x' = rsin\Theta sin\phi$.

$$I_3 = \rho \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{R} r^2 sin^2\Theta r^2 sin\Theta dr d\Theta d\phi = \rho 2\pi \frac{R^5}{5} \int\limits_0^{\pi} sin^3\Theta d\Theta = \rho \frac{8\pi}{15} R^5 \qquad (10.21)$$

Подставим $\rho = \frac{\mu}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

$$I_3 = \frac{2}{5}\mu R^2 = I_2 = I_1 \qquad (10.22)$$

Лекция 11. Движение твердого тела. Углы Эйлера. Интегрирование уравнений движения твердого тела. Канонический формализм. Уравнения Гамильтона

Момент инерции. Теорема Штейнера

Система координат X'Y'Z' жестко связана с твердым телом, а начало этой системы координат помещено в центр инерции тела. Ранее записали тензор инерции, вычисленный относительно центра инерции тела. Возьмем точку $\tilde{O}$, отстоящей от O' на расстояние, характеризующееся вектором $\vec{a}' = (a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$. Компоненты вектора обозначим a_i, где i=1,2,3.

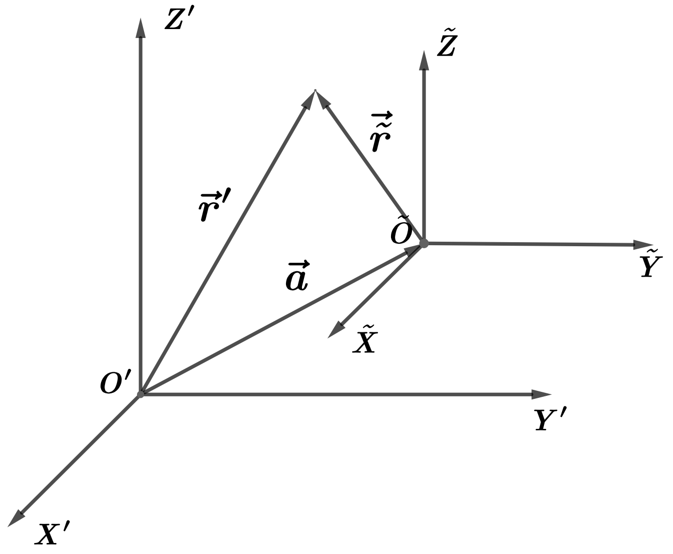

Рис. 11.1: Новая система координат

Вычислим тензор инерции относительно точки $\tilde{O}$. Введем оси $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$, параллельные осям X', Y', Z'.

$$\tilde{I}_{ik} = \sum m\left(\tilde{x}_l^2\delta_{ik} - \tilde{x}_i\tilde{x}_k\right)$$

Связь тезора инерции относительно центра инерции и тензора цнерции, вычисленного относительно точки $\tilde{O}$

$$\tilde{I}_{ik} + \mu(a_l^2\delta_{ik} - a_i a_k)$$

Эту связь иногда называют *теоремой Штейнера*.

Доказывается подстановкой $x_i = \tilde{x}_i + a_i$, что следует из $\vec{r}' = \vec{\tilde{r}} + \vec{a}'$.

Углы Эйлера

Для того, чтобы исследовать движение твердого тела необходимо построить функцию Лагранжа. Чтобы построить функцию Лагранжа необходимо построить потенциальную и кинетическую энергии. На прошлой лекции для кинетической энергии записали следующее выражение

$$T = \frac{\mu\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k. \tag{11.1}$$

При выборе направление осей штрихованной системы координат X'Y'Z' вдоль главных осей инерции, отличными от нуля будут только компоненты $I_{11} = I_1,\ I_{22} = I_2,\ I_{33} = I_3$. То есть тензор инерции приводится к диагональному виду. Тогда выражение для кинетической энергии станет

$$T = \frac{\mu\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\Big(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\Big). \tag{11.2}$$

Выразим кинетическую энергию через обобщенные координаты и обобщенные скорости. Чтобы разобраться с угловыми скоростями, выразить их через обобщенные координаты, понадобятся *углы Эйлера*. Углы Эйлера определят ориентацию тела.

Введем углы Эйлера. Так как сейчас нас интересует только ориентация штрихованой системы относительно неподвижной, совместим начало координат неподвижной и штрихованой систем координат. Построим линию ON пересечения плоскости X'Y' и плоскости XY. Линия ON называется линией узлов. Зададим ей направление так, чтобы она совпадала с векторным произведением $[\vec{z} \times \vec{z'}]$. Далее вводим углы Θ, ϕ, ψ, которые и называются углами Эйлера. (см. рис. 11.2)

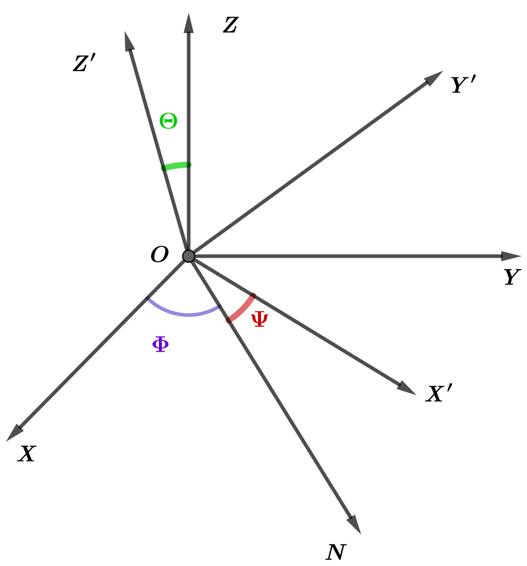

Рис. 11.2: Совмещение осей координат

- Угол Θ соответствует повороту вокруг линии узлов ON.
- Угол ϕ – вращение вокруг оси Z.
- Улол ψ – вращение относительно оси Z'.

Если задать эти три угла, можно однозначно определить ориентацию системы штрихованой относительно нештрихованой, таким образом однозначно определить ориентацию твердого тела. $\phi, \psi \in (0; 2\pi), \quad \Theta \in (0, \pi)$.

Рассмотрим бесконечно малый угол поворота, характеризующийся вектором $\vec{d\Theta}$. Его модуль равен углу поворота, а направление совпадает с направлением оси вращения, в данном случае с $\vec{ON}$. Продифференцировав малые углы поворота по времени, получим угловые скорости $\vec{\dot{\Theta}}, \ \vec{\dot{\phi}}, \ \vec{\dot{\psi}}$, направленные вдоль осей вращения ON, Z и Z' соответственно.

Спроектируем $\vec{\dot{\Theta}}, \ \vec{\dot{\phi}}, \ \vec{\dot{\psi}}$ на оси X', Y' и Z'.

- $\dot{\psi}_{z'} = \dot{\psi}, \ \dot{\psi}_{x'} = 0, \ \dot{\psi}_{y'} = 0$
- $\dot{\Theta}_{z'} = 0, \ \dot{\Theta}_{x'} = \dot{\Theta}cos\psi, \ \dot{\Theta}_{y'} = -\dot{\Theta}sin\psi$
- $\dot{\phi}_{z'} = \dot{\phi}cos\Theta, \ \dot{\phi}_{x'} = \dot{\phi}sin\Theta sin\psi, \ \dot{\phi}_{y'} = \dot{\phi}sin\Theta cos\psi$

Теперь найдем *выражения для угловых скоростей через углы Эйлера*.

- $\Omega_{x'} = \Omega_1 = \dot{\phi}sin\Theta sin\psi + \dot{\Theta}cos\psi$
- $\Omega_{y'} = \Omega_2 = \dot{\phi}sin\Theta cos\psi - \dot{\Theta}sin\psi$
- $\Omega_{z'} = \Omega_3 = \dot{\phi}cos\Theta + \dot{\psi}$

Теперь можно использовать Лагранжев подход, так как есть 6 обобщенных координат : x, y, z, (координаты центра инерции) и $\phi, \ \psi, \ \Theta$ (углы Эйлера).

Интегрирование уравнений движения твердого тела

Вводим координаты центра масс X, Y,Z, через них можно выразить скорость. Подставим выражение для угловых скоростей через углы Эйлера в кинетическую энергию.

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2\right)+\frac{I_1}{2}\left(\dot{\phi}sin\Theta sin\psi+\dot{\Theta}cos\psi\right)^2+\frac{I_2}{2}\left(\dot{\phi}sin\Theta cos\psi-\dot{\Theta}sin\psi\right)^2+\frac{I_3}{2}\left(\dot{\phi}cos\Theta+\dot{\psi}\right)^2 \tag{11.3}$$

Если в задаче задана потенциальная энергия, ее можно представить как функцию, зависящую от координат и углов Эйлера:

$$U = U(X, Y, Z, \phi, \Theta, \psi). \tag{11.4}$$

Тогда функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$L = T - U. \tag{11.5}$$

Далее алгоритм решения стандартный, с помощью формализма Лагранжа нахождим закон движения.

Пример. Свободное движение симметрического волчка.

Симметрический волчок – твердое тело, у которого два главных момента инерции совпадают между собой, но отличаются от третьего $I_1 = I_2 = I \neq I_3$ (если $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ – это асимметрический волчок, если $I_1 = I_2 = I_3$ – шаровой волчок).

На волчок не действуют силы, значит его потенциальная энергия U=0.

$$L = T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{I}{2}\left(\left(\dot{\phi} sin\Theta sin\psi + \dot{\Theta} cos\psi\right)^2 + \left(\dot{\phi} sin\Theta cos\psi - \dot{\Theta} sin\psi\right)^2\right) +$$

$$+\frac{I_3}{2}\left(\dot{\phi} cos\Theta + \dot{\psi}\right)^2 = \frac{\mu\dot{\vec{R}}}{2} + \frac{I}{2}\left(\dot{\phi}^2 sin^2\Theta + \dot{\Theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\phi} cos\Theta + \dot{\psi}\right)^2 \tag{11.6}$$

Исследуем функцию Лагранжа на законы сохранения:

- Найдем циклические координаты (не входят явно в функцию Лагранжа) $\vec{R}, \phi, \psi$. Им соответствуют сохраняющиеся обобщенные импульсы.

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = \mu \dot{\vec{R}} \tag{11.7}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I\dot{\phi} sin^2\Theta + I_3\left(\dot{\phi} cos\Theta + \dot{\psi}\right) \cdot cos\Theta \tag{11.8}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\phi} cos\Theta + \dot{\psi}\right) \tag{11.9}$$

- Сохраняется обобщенная энергия, т.к. функция Лагранжа явно не зависит от времени(сейчас нам он не интересен).

Проанализируем, что дают законы сохранения:

- Заметим, что $\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{p}}{\mu} = const$. Будем считать, что работаем в системе с

$$\dot{\vec{R}} = 0 \tag{11.10}$$

- Заметим, что p_ϕ– проекция момента импульса системы на ось z.

$$p_\phi = \mu_z \tag{11.11}$$

- Аналогично p_ψ – проекция момента импульса системы на ось z'.

$$p_\psi = \mu_{z'} \tag{11.12}$$

Так как нет полей, момент импульса сохраняется. Т.е. полный вектор момент импульса $\vec{M} = const$. Выберем ось z так, чтобы $\vec{M} = (0, 0, M)$. Это значит, что $M_z = M \quad \Rightarrow \quad M_{z'} = Mcos\Theta$.

Перепишем последние два закона сохранения в виде:

$$M = I\dot{\phi}sin^2\Theta + I_3\Big(\dot{\phi}cos\Theta + \dot{\psi}\Big) \cdot cos\Theta \tag{11.13}$$

$$Mcos\Theta = I_3\Big(\dot{\phi}cos\Theta + \dot{\psi}\Big) \tag{11.14}$$

Отметим, что раз сохраняется величина M и $Mcos\Theta$, то угол Θ должен быть постоянным $\Theta = const$.

Это означает, что ось z’ в процессе движения всегда наклонена под одним углом углом Θ.

Подставим это.

$$M = I\dot{\phi}sin^2\Theta + Mcos^2\Theta \tag{11.15}$$

$$M(1 - cos^2\Theta) == I\dot{\phi}sin^2\Theta \tag{11.16}$$

$$\dot{\phi} = \frac{M}{I}$$

Где $\dot{\phi}$ – скорость относительно оси z. Таким образом видим, что ось z’ жестко связана с твердым телом. Ось z’, составляя угол Θ, вращается с постоянной скоростью вокруг оси z. Данное явление называют *регулярной прецессией*.

Заметим, что

$$\dot{\psi} = \frac{Mcos\Theta}{I_3} - \dot{\phi}cos\Theta = Mcos\Theta\Big(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I}\Big) \tag{11.17}$$

Это значит, что $\dot{\psi} = const$.

Найдем углову скорость вращени $\Omega_{z'}$ относительно оси z.

$$\Omega_{z'} = \dot{\phi}cos\Theta + \dot{\psi} = \frac{M}{I}cos\Theta + \frac{Mcos\Theta}{I_3} - \frac{Mcos\Theta}{I} = \frac{Mcos\Theta}{I_3} \tag{11.18}$$

Это постоянная величина, значит волчок сам вращается осносительно оси z’ с угловой скоростью $\Omega_{z'}$

Канонический формализм

Уравнения Гамильтона

Пусть имеется механическая система с s степенями свободы, функция Лагранжа которой считается известной $L = L(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q_1}, \dot{q_2}, ..., \dot{q_s}, t)$, q – обощенные координати.

Найдем полный дифференциал:

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} d\dot{q_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{11.19}$$

Знаем, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} = p_\alpha$ – *обобщенный импульс*.

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha \tag{11.20}$$

Подставим это в полный дифференциал

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha d\dot{q_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{11.21}$$

Представим $p_\alpha d\dot{q_\alpha} = d(p_\alpha \dot{q_\alpha}) - \dot{q_\alpha} dp_\alpha$.

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha dq_\alpha + d\Big(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q_\alpha}\Big) - \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{11.22}$$

$$d\Big(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q_\alpha} - L\Big) = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q_\alpha} dp_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{11.23}$$

Обозначим $H = \sum\limits_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q_\alpha} - L$.

Если дифференциал функции H может быть представлен в виде дифференциалов от некоторого набора переменных, то саму эту функцию можно представить как функцию от некоторого набора переменных. Значит,

$$H = H(q, p, t).$$

Определение. Функция H, зависящая от обобщенных координат и импульсов $H = H(q_1, q_2, ..., q_s, p_1, p_2, ..., p_s, t)$, определяемая равенством $H = \sum\limits_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q_\alpha} - L$, называется *функцией Гамильтона.*

Замечание. Физический смысл функции Гамильтона – обобщенная энергия системы.

Заметим, что

$$\begin{cases} \dot{q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \end{cases} \tag{11.24}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Гамильтона (каноническими уравнениями).*

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{11.25}$$

(5.2)

Эти уравнения позволяют находить законы движения.

Замечание. Преимущество использования уравнений Гамильтона заключается в том, что возножность перехода к новым координатам значительно шире чем в случае подхода Лагранжа. В подходе Гамильтона можно изменять не только S штук обобщенных координат, но и S штук обобщенных импульсов.

Пример. Найдем функцию Гамильтона для системы в потенциальном поле а) в прямоугольных декартовых координатах, б) в сферической системе координат.

а) Функция Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z). \tag{11.26}$$

Строим функцию Гамильтона. Обобщенная энергия:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) \tag{11.27}$$

Подставим $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}$. Аналогично получаем $\dot{y} = \frac{p_y}{m}$; $\dot{z} = \frac{p_z}{m}$.

Получим функцию Гамильтона:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + U(x, y, z) \tag{11.28}$$

б) Функция Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{y}^2 + r^2 sin^2\Theta\dot{\phi}^2) - U(r, \Theta, \phi). \tag{11.29}$$

Обобщенная энергия:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{y}^2 + r^2 sin^2\Theta\dot{\phi}^2) + U(r, \Theta, \phi). \tag{11.30}$$

Перейдем к обобщенным импульсам:

- $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$;
- $p_\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = mr^2\dot{\Theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\Theta} = \frac{p_\Theta}{mr^2}$;
- $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 sin\Theta\dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 sin^2\Theta}$.

Функция Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 sin^2\Theta}) \tag{11.31}$$

Лекция 12. Канонический формализм. Интегрирование уравнений Гамильтона. Вывод уравнений Гамильтона из принципа наименьшего действия

Продолжение темы уравнений Гамильтона

Было показано, что для механической системы с S степенями свободы можно ввести функцию Гамильтона

$$H(q_1, q_2, ..., q_s, p_1, p_2, ..., p_s, t) = \Big(\sum_{(} \alpha = 1)^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\Big)_{\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q,p)}. \tag{12.1}$$

С помощью функции Гамильтона можно записать систему, которая является уравнениями движения системы.

$$\begin{cases} \dot{q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, ..., s \\ \dot{p_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \end{cases} \tag{12.2}$$

Эти Уравнения Гамильтона позволяют найти закон движения механической системы.

Пример. Найдем функцию Гамильтона для частицы зарядом e массой m, находящейся в электромагнитном поле $\vec{A}(\vec{r}, t), \Phi(\vec{r}, t)$.

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A}, \dot{\vec{r}}) - e\Phi \tag{12.3}$$

Обобщенная энергия:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\dot{\vec{r}} - L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + e\Phi \tag{12.4}$$

Перейдем к обобщенным импульсам:

$$\vec{p}_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) \tag{12.5}$$

Функция Гамильтона:

$$H = \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} + e\Phi \tag{12.6}$$

Интегрирование уравнений Гамильтона

1. Если какая-то координата q_α не входит в функцию Гамильтона H, т.е. является циклической координатой, соответствующий ей обобщенный импульс сохраняется

$$p_\alpha = const. \tag{12.7}$$

Если p_α не входит в функцию Гамильтона H, то соответствующая координата сохраняется

$$q_\alpha = const. \tag{12.8}$$

2. Ранее записали, что $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$. Следовательно $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

   Знаем, что если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то сохраняется обобщенная энергия.Значит если t не входит в H, то

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = const.$$

3. Функция Гамильтона имеет вид $H(f(q_1, p_1), q_2..., q_s, p_2, ..., p_s, t)$, тогда

$$f(q_1, p_1) = const \tag{12.9}$$

   Докажем это. $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1}\dot{p}_1$.
   Воспользуемся уравнениями Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} \end{cases} \tag{12.10}$$

   Получим:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow f(q_1, p_1) = const \tag{12.11}$$

Пример. Нахождение закона движения. Пусть дана система с функцией Гамильтона:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)^2. \tag{12.12}$$

Где $m, \omega, \lambda = const$

Проанализируем законы сохранения. Заметим, что $H = f(x, p) + \lambda f^2(x, p)$. Значит, пользуясь пунктом 3, можем записать

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = C = const. \tag{12.13}$$

Запишем уравнение Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} + 2\lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\frac{p}{m} = \frac{p}{m} + 2\lambda C\frac{p}{m} \tag{12.14}$$

Выразим p через C и x.

$$p = \pm\sqrt{2mC - m^2\omega^2x^2} \tag{12.15}$$

Выберем знак плюс. Подставим p.

$$\dot{x} = \Big(1 + 2\lambda C\Big)\sqrt{\frac{2C}{m} - \omega^2x^2} \tag{12.16}$$

Получили дифференциальное уравнение, в котором перемененные легко разделяются.

$$dt = \frac{1}{1+2\lambda C}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2C}{m} - \omega^2x^2}} \tag{12.17}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} dt = \frac{1}{1+2\lambda C}\int\limits_{x_0=0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2C}{m} - \omega^2x^2}} \tag{12.18}$$

Подстановка $x = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2C}{m}}sinz$

$$t - t_0 = \frac{1}{1+2\lambda C}\frac{1}{\omega}arcsin\Big(\omega\sqrt{\frac{m}{2C}}x\Big)\Bigg|_{x_0}^{x} \tag{12.19}$$

$$t - t_0 = \frac{1}{1+2\lambda C}\frac{1}{\omega}arcsin\Big(\omega\sqrt{\frac{m}{2C}}x\Big) \tag{12.20}$$

Закон движения системы:

$$x = \sqrt{\frac{2C}{m\omega^2}}sin[(1+2\lambda C)\omega(t-t_0)] \tag{12.21}$$

Видно, что система совершает гармонические колебания с частотой $\Omega = (1 + 2\lambda C)\omega$ и амплитудой $A = \sqrt{\frac{2C}{m\omega^2}} \quad \Rightarrow \quad 2C = mA^2\omega^2$

Заметим, что частота колебаний зависит от амплитуды: $\Omega = (1 + \lambda mA^2\omega^2)\omega$

Вывод уравнений Гамильтона из принципа наименьшего действия

Из принципа наименьшего действия ранее были получены уравнения Лагранжа.

Был введен функционал

$$S[q] = \int\limits_{t_1}^{t^2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{12.22}$$

Начальные и конечные точки заданы: $q_\alpha(t_1) = q_\alpha^{(1)};\ q_\alpha(t_2) = q_\alpha^{(2)},\ \alpha = 1, 2, ...s.$

Принцип наименьшего действия утверждает, что система между этими двумя точками движется по такой кривой, для которой функционал действия принимает наименьшее значение.

Получим из этого принципа уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона

$$H = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad \Rightarrow \quad L = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - H \tag{12.23}$$

Подставим такой вид функции Лагранжа в выражение для действия.

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t^2} \Big(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(q,p,t) \Big) dt \tag{12.24}$$

В начальный и конечный моменты система занимает фиксированное положение. $q_\alpha(t_1) = q_\alpha^{(1)},\ q_\alpha(t_2) = q_\alpha^{(2)},\ \alpha = 1, 2, ...s$

Необходимым условием, чтобы действие принимало минимальное значение является равенство нулю *вариации действия*.

$$\delta S = 0 \tag{12.25}$$

Варьируем обобщенные координаты и импульсы

$$q_\alpha \to q_\alpha + \delta q_\alpha;\ p_\alpha \to p_\alpha + \delta p_\alpha \tag{12.26}$$

Рассмотрим действие для одномерной системы:

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} \Big(p\dot{q} - H(q,p,t) \Big) dt \tag{12.27}$$

Варьируем координату и импнльс:

$$q \to q + \delta q;\ p \to p + \delta p$$

Чтобы найти вариацию, расмотрим разность

$$S[q+\delta q, p+\delta p] - S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} \Big((p+\delta p)(\dot{q}+\delta\dot{q}) - H(q+\delta q, p+\delta p, t) \Big) dt - \int_{t_1}^{t_2} \Big(p\dot{q} - H(q,p,t) \Big) dt. \tag{12.28}$$

Получим линейный функционал.

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(p\delta\dot{q} + \dot{q}\delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\Big)dt \tag{12.29}$$

Распишем $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$

$$\delta S = p\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(-\dot{p}\delta q + \dot{q}\delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\Big)dt \tag{12.30}$$

Вспомним, что $q(t_1)$ и $q(t_2)$ заданы, значит $\delta q(t_1) = 0$ и $\delta q(t_2) = 0$.

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\Big)\delta p dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\Big)\delta q dt = 0 \tag{12.31}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \;\; \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{12.32}$$

Канонические преобразования

Разберем преимущество уравнения Гамильтона перед уравнением Лагранжа.

- Для уравнения Лагранжа можем выбрать любые обобщенные координаты: $q_\alpha \to Q_\alpha, \; \alpha = 1, 2, ..., s$, где $Q_\alpha = Q_\alpha(q, t)$.

  При этом уравнения Лагранжа не изменятся. Это называется *ковариантностью уравнений Лагранжа.*

- В формализме Гамильтона можно заменить не только обобщенные координаты, но и обобщенные импульсы, расширив таким образом класс возможных преобразований $q_\alpha \to Q_\alpha; \; p_\alpha \to P_\alpha \; \alpha = 1, 2, ..., s$, где $Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t); \; P_\alpha = P_\alpha(q, p, t)$.

  Но не все такие преобразования оставляют неизменным вид уравнений Гамильтона.

Определение. Преобразования $Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t); \; P_\alpha = P_\alpha(q, p, t)$ называются *каноническими*, если они не изменяют вид уравнений Гамильтона. То есть

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha}; \;\; \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} \tag{12.33}$$

Где $H' = H'(Q, P, t)$.

Замечение. Будем называть q_α, p_α старыми переменными, а Q_α, P_α – новыми переменными.

Среди канонических преобразований можно выделить один очень важный подкласс. Он следует из того, что уравнение Гамильтона можно вывести из принципа наименьшего действия.

Получили Уравнение Гамильтона из

$$\delta\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot q_\alpha - H(q,p,t)\Big)dt = 0. \tag{12.34}$$

В случае канонических преобразований $q_\alpha \to Q_\alpha; p_\alpha \to P_\alpha$ не изменяются уравнения Гамильтона, заничит для них уравнения Гамильтона можно получить из того же вариационного принципа :

$$\delta\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot Q_\alpha - H'(Q,P,t)\Big)dt = 0. \tag{12.35}$$

Чтобы и из первой, и из второй вариации получилились одни и те же уравнения, подынтегральные функции не могут отличаться друг от друга больше чем на полную производную по времени от некоторой функции F:

$$\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot q_\alpha - H(q,p,t) = \sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot Q_\alpha - H'(Q,P,t) + \frac{dF(q,Q,t)}{dt} \tag{12.36}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dF(q,Q,t)}{dt}dt = F(q,Q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} = F(q^{(2)},Q^{(2)},t^{(2)}) - F(q^{(1)},Q^{(1)},t^{(1)}) \tag{12.37}$$

– постоянная величина, потому что в принципах наименьшего действия координаты фиксированы $q_\alpha(t_1) = q_\alpha^{(1)};\ q_\alpha(t_2) = q_\alpha^{(2)};\ldots$ и $Q_\alpha(t_1) = Q_\alpha^{(1)};\ Q_\alpha(t_2) = Q_\alpha^{(2)};\ldots$. При варьировании постоянной величины получим ноль. С *физической точки зрения* это значит, что к действию прибавили некоторую постоянную, которая никак не сказывается на нахождении траектории, которая дает минимум функционала.

Из

$$\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot q_\alpha - H(q,p,t) = \sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot Q_\alpha - H'(Q,P,t) + \frac{dF(q,Q,t)}{dt} \tag{12.38}$$

следует:

$$dF = \sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha dq_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha dQ_\alpha + (H'-H)dt \tag{12.39}$$

Тогда можно записать следующее преобразование. Это *канонические преобразования, порождаемые производящей функцией* $F(q_1,q_2,\ldots,q_s,Q_1,Q_2,\ldots,Q_s,t)$

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha};\ P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha};\ H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{12.40}$$

Лекция 13. Канонический формализм. Скобки Пуассона

Продолжение. Канонические преобразования

Если есть система с s степенями свободы, в Гамильтоновом формализме она характеризуется обобщенными координатами и импульсами $q_1, q_2, ..., q_s, p_1, p_2, ..., p_s$, то можно перейти к новым обобщенным координатам и импульсам $Q_1, Q_2, ..., Q_s, P_1, P_2, ..., P_s$, выразив их через старые:

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t); \tag{13.1}$$

$$P_\alpha = P_\alpha(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t), \ \alpha = 1, 2, ..., s. \tag{13.2}$$

В отличии от Лагранжевого подхода здесь меняются и координаты, и импульсы. Таким образом при рассмотрении механической системы можно получить наиболее удобную функцию Гамильтона

$$H' = H'(Q_1, ..., Q_s, P_1, ..., P_s, t). \tag{13.3}$$

Если вид уравнений Гамильтона сохраняется, то есть справедливо

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha}; \ \ \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} \tag{13.4}$$

Такие преобразования называются каноническими.

На прошлой лекции было показано, что можно задать некоторую функцию $F = F(q_1, q_2, ..., q_s, Q_1, ..., Q_s, t)$, называемую производящей функцией, и с помощью нее определить каноническое преобразование по формулам

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}; \ P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}; \ H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{13.5}$$

Рассмотрим

$$dF = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha dq_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha dQ_\alpha + (H' - H)dt. \tag{13.6}$$

Перепишем в следующем виде :$P_\alpha dQ_\alpha = d(Q_\alpha P_\alpha) - Q_\alpha dP_\alpha$. Подставим.

$$d(F + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha P_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha dP_\alpha + (H' - H)dt. \tag{13.7}$$

Обобзначим $d(F + \sum\limits_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha P_\alpha) = \Phi$. Представим ее как $\Phi = \Phi(q, P, t)$. Это тоже *производящая функция*.

Запишем каноническое преобразование, порождаемое функцией $\Phi(q, P, t)$:

$$p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}; \ Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha}; \ H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{13.8}$$

Замечание. Аналогично из выражения для дифференциала функции F или дифференциала функции Ф, можно получить другие производящие функции, зависящие от (p, Q, t) и (p, P, t).

Пример. Рассмотрим одномерный гармонический осциллятор. Функция Гамильтона :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \tag{13.9}$$

Предположим, что задана производящая функция:

$$F = \frac{m\omega q^2}{2} ctgQ. \tag{13.10}$$

- Найдем каноническое преобразование, порождаемое функцией F(q,Q).

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q ctgQ \tag{13.11}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \frac{1}{sin^2 Q} \tag{13.12}$$

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H \tag{13.13}$$

- Запишем уравнение Гамильтона в новых переменных.

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \tag{13.14}$$

Из второго и первого уравнения канонических преобразований найдем

$$q^2 = \frac{2P}{m\omega} sin^Q \tag{13.15}$$

$$p^2 = m^2\omega^2 q^2 ctg^2 Q = 2Pm\omega cos^2 Q \tag{13.16}$$

$$H' = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \omega cos^2 Q + P\omega sin^2 Q \tag{13.17}$$

$$H' = P\omega \tag{13.18}$$

Получим уравнения Гамильтона в новых переменных:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega \tag{13.19}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \tag{13.20}$$

- Найдем закон движения данного гармонического осцеллятора.

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \;\Rightarrow\; P = P_0 = const \tag{13.21}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega \;\Rightarrow\; Q = \omega t + Q_0,\; Q_0 = const \tag{13.22}$$

Из $q^2 = \frac{2P}{m\omega} sin^Q$:

$$q = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} sin(\omega t + Q_0) \tag{13.23}$$

Пример. Пусть для системы с S степенями свободы задана производящая функция $F = \sum\limits_{\alpha=1}^{s} q_\alpha Q_\alpha$. Найти каноническое преобразование, порождаемое этой функцией.

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha;\; P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} = -q_\alpha;\; H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H \tag{13.24}$$

Заметим, что импульсы и координаты поменялись местами.

Пример. Задана производящая функция

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^{s} f_\alpha(q_1, ..., q_s, t) P_\alpha \tag{13.25}$$

Каноническое преобразование:

$$Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha} = f_\alpha(q_1, ..., q_s, t) \tag{13.26}$$

Новые координаты представили только через старые координаты. Такие преобразования называются *точечными преобразованиями.*

Скобки Пуассона

Пусть есть механическая система с s степенями свободы. Рассмотрим некоторую функцию $f(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t)$. Найдем полную производную по времени от этой функции:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) \tag{13.27}$$

Воспользуемся уравнениями Гамильтона:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha};\; \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \tag{13.28}$$

Подставим это в полную производную по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right) \tag{13.29}$$

Обобзначим

$$\{H, f\} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right) \tag{13.30}$$

Это называется *скобкой Пуассона*.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \tag{13.31}$$

Определение. Пусть даны функции $f(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t)$ и $(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t)$. Скобкой Пуассона называется выражение $\{f, g\} = \sum\limits_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\right)$

Свойства скобок Пуассона:

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
2. $\{f, C\} = 0$, если C=const;
3. $\{f + h, g\} = \{f, g\} + \{h, g\}$, где $h = h(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t)$
4. $\{f \cdot h, g\} = f\{h, g\} + h\{f, g\}$
5. $\frac{\partial d}{\partial dt}\{f, g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$
6. $\{f, q_\alpha\} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$; $\{f, p_\alpha\} = -\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, ..., s$
7. $\{q_\alpha, q_\beta\} = 0$; $\{p_\alpha, p_\beta\} = 0$; $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$
8. Тождество Якоби. $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

- Первые 7 свойств доказываются прямой подстановкой.
- С помощью свойства 6 можео записать уравнения Гамильтона в виде

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha};\ \dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad\Rightarrow\quad \dot{q}_\alpha = \{H, q_\alpha\}; \dot{p}_\alpha = \{H, p_\alpha\} \tag{13.32}$$

- Докажем тождество Якоби. Распишем по определению :

$$\{f, \{g, h\}\} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\{g, h\}}{\partial q_\alpha} - ...\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\sum_{\beta=1}^{s}[\frac{\partial g}{\partial p_\beta}\frac{\partial h}{\partial q_\beta} - \frac{\partial g}{\partial q_\beta}\frac{\partial h}{\partial p_\beta}]) - ...\right) \tag{13.33}$$

Заметим, что при раскрытии скобок все члены будут содержать вторые производные от функций f, g, h. Для доказательства достаточно показать, что сократятся все члены, содержащие, например, $\frac{\partial^2 g}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}$.

$$\{f,\{g,h\}\} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial^2 g}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\frac{\partial h}{\partial p\beta} + \ldots \tag{13.34}$$

Рассмотрим другую скобку Пуассона

$$\{h,\{f,g\}\} = \sum_{\alpha=1}^{s}\Big(\frac{\partial h}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\{f,g\} - \ldots\Big) = \sum_{\alpha=1}^{s}\Big(\frac{\partial h}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\big(\sum_{\beta=1}^{s}\big[\frac{\partial f}{\partial p_\beta}\frac{\partial g}{\partial q_\beta} - \ldots\Big) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} + \ldots = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial h}{\partial p_\beta}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial^2 g}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} + \ldots \tag{13.35}$$

Аналогично сокращаются остальные члены.

Определение. Функция $f(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s,t)$ называется *интегралом движения*, если она не изменяет своего значения при движении механической системы или если полная производная по времени равня нулю $\frac{df}{dt} = 0$.

Замечание. Отметим, что согласно формуле

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\} \tag{13.36}$$

, если функция f явно не зависит от времени и {H, f}=0 , то f – интеграл движения.

Теорема 1. (Теорема Пуассона.) Пусть функция $f(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s,t)$ и $g(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s,t)$ – интегралы движения. Тогда скобра Пуассона этих двух функций {f, g} тоже является интегралом движения.

Доказательство. Нужно показать, что $\frac{d\{f,g\}}{dt} = 0$.

Можем записать

$$\frac{d\{f,g\}}{dt} = \frac{\partial\{f,g\}}{\partial t} + \{H,\{f,g\}\}. \tag{13.37}$$

Воспользуемся свойством 5 скобок Пуассона:

$$\frac{d\{f,g\}}{dt} = \{\frac{\partial f}{\partial t},g\} + \{f,\frac{\partial g}{\partial t}\} + \{H,\{f,g\}\}. \tag{13.38}$$

По условию теоремы f – интеграл движения, значит

$$\frac{df}{df} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial t} = -\{H,f\}. \tag{13.39}$$

Аналогично получим, что

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\{H, g\}. \tag{13.40}$$

Значит,

$$\frac{d\{f,g\}}{dt} = \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\} + \{h, \{f, g\} = 0 \tag{13.41}$$

в силу тождества Якоби. Ч.т.д

Замечание. Часто скобка Пуассона от двух интегралов движения $\{f, g\}$ либо равна константе, либо есть функция от двух изначальных интегралов f и g. Т.е. она не приводит к независимому третьему интегралу.

Теорема 2. (Инвариантность скобок Пуассона при каноническом преобразовании.) Пусть совершено каноническое преобразование от старых переменных к новым переменным $\langle q, p \rangle \quad \to \quad \langle Q, P \rangle$. Тогда скобка пуассона от функций f,g, вычисленная по старым переменным, равна скобке пуассона от этих же функций f,g, но вычисленная по новым переменным $\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$

Доказательство (физическое). Отметим, что при канонических преобразованиях время t выступает как некоторый параметр. Поэтому если докажем теорему для f и g явно не зависящих от t, то она будет верна и для случая, когда f и g явно зависят от t.

Будем считать, что f- функция Гамильтона какой-то механической системы(воображаемой). Тогда в силу $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}$ можем записать:

$$\frac{dg}{dt} = \{f, g\}. \tag{13.42}$$

Заметим, что левая часть уравнения не зависит от того, в каких переменных вычисляем правую часть. Поэтому правая часть тоже не должна зависеть от того, в каких переменных ее вычисляем.

Т.е.

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \tag{13.43}$$

Следствие теоремы 2 и свойства 7. Если преобразование каноническое, то выполняются следующие равнества

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{q,p} = 0;\ \{P_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = 0;\ \{P_\alpha, Q_\beta\}_{q,p} = \delta_{\alpha\beta} \tag{13.44}$$

Лекция 14. Канонический формализм. Теорема об инвариантности фазового пространства. Действие как функция координат и времени. Уравнение Гамильтона-Якоби

Теорема об инвариантности фазового пространства

Рассмотрим механическую систему с S степенями свободы, которая характеризуется набором обобщенных координат и импульсов $q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s$.

Определение. *Фазовым пространством* называется пространство 2s измерений, по осям которого отложены обобщенные координаты и импульсы $q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s$.

Рассмотрим пространство s=1. Отметим, что положение механической системы в данный момент времени задается точкой. При движении системы точка будет перемещаться и получим линию в фазовом пространстве. Рассмотрим некий объем γ в фазовом

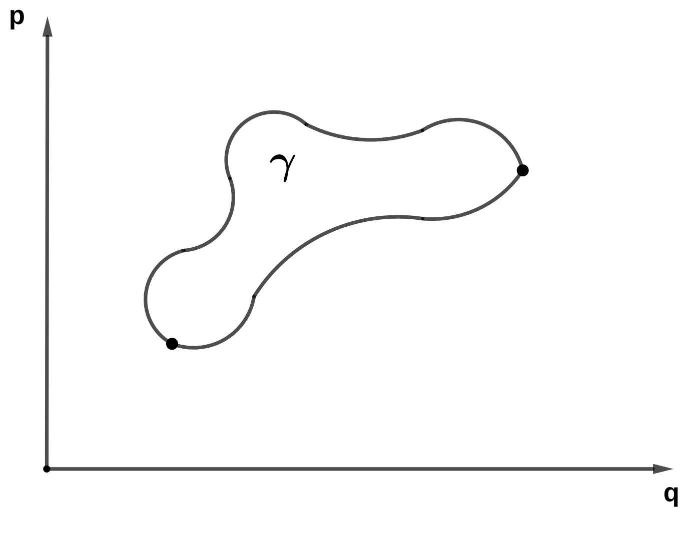

Рис. 14.1: Объем в фазовом пространстве

пространстве.

$$\gamma = \int dq_1 ... dq_s dp_1 ... dp_s. \tag{14.1}$$

Предположим, что совершили каноническое преобразование $(q, p) \rightarrow (Q, P)$. Тогда объем в новом фазовом пространстве $\Gamma = \int dQ_1 ... dQ_s dP_1 ... dP_s$.

Теорема 3. (О инвариантности фазового пространства). Объем фазового пространства сохраняется при канонических преобразованиях $\gamma = \Gamma$.

Доказательство. Запишем выражение для объема Г:

$$\int dQ_1 ... dQ_s dP_1 ... dP_s = \int D dq_1 ... dq_s dp_1 ... dp_s \tag{14.2}$$

Где D – якобиан перехода.

Чтобы доказать теорему, докажем, что

$$D = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1. \tag{14.3}$$

Запишем в явном виде:

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & ... & \frac{\partial Q_1}{\partial p_s} \\ ... \\ \frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_s}{\partial p_1} & ... & \frac{\partial Q_s}{\partial p_s} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial P_1}{\partial q_s} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & ... & \frac{\partial P_1}{\partial p_s} \\ .... \\ \frac{\partial P_s}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial P_s}{\partial q_s} & \frac{\partial P_s}{\partial p_1} & ... & \frac{\partial P_s}{\partial p_s} \end{vmatrix} \tag{14.4}$$

Можем записать

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)} \Bigg/ \frac{\partial(q,p)}{\partial(q,P)}. \tag{14.5}$$

- Рассмотрим знаменатель:

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(q,P)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial q_1}{\partial q_s} & \frac{\partial q_1}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial q_1}{\partial P_s} \\ ...... \\ \frac{\partial q_s}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial q_s}{\partial q_s} & \frac{\partial q_s}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial q_s}{\partial P_s} \\ \frac{\partial p_1}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial p_1}{\partial q_s} & \frac{\partial p_1}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial p_1}{\partial P_s} \\ ... \\ \frac{\partial p_s}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial p_s}{\partial q_s} & \frac{\partial p_s}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial p_s}{\partial P_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ... & 0 & \frac{\partial q_1}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial q_1}{\partial P_s} \\ ... \\ 0 & ... & 1 & \frac{\partial q_s}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial q_s}{\partial P_s} \\ 0 & ... & 0 & \frac{\partial p_1}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial p_1}{\partial P_s} \\ ... \\ 0 & ... & 0 & \frac{\partial p_s}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial p_s}{\partial P_s} \end{vmatrix} \tag{14.6}$$

Учли, что переменные q и p – независимые перемнные.

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(q,P)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial p_1}{\partial P_s} \\ ... \\ \frac{\partial p_s}{\partial P_1} & ... & \frac{\partial p_s}{\partial P_s} \end{vmatrix} \tag{14.7}$$

- Рассмотрим числитель:

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} \\ \dots\dots\dots & & \\ \frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s} \end{vmatrix} \tag{14.8}$$

Покажем, что определитель числителя и знаvенателя равны. Тогда их отношение будет равно единице.

- Выберем в определителе *знаменателя* некоторую строку α и столбец β. На их пересечении стоит элемент $\frac{\partial p\alpha}{\partial P_\beta}$.

  Будем считать, что каноническое преобразование задано призводящей функцией

$$\Phi(q,P,t) \;\Rightarrow\; p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \tag{14.9}$$

  Тогда элемент может быть выражен:

$$\frac{\partial p\alpha}{\partial P_\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \tag{14.10}$$

- Выберем в определителе *числителя* некоторую строку α и столбец β. На их пересечении стоит элемент $\frac{\partial Q\alpha}{\partial q_\beta}$.

  Каноническое преобразование задано призводящей функцией

$$\Phi(q,P,t) \;\Rightarrow\; \quad Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha} \tag{14.11}$$

  . Тогда элемент:

$$\frac{\partial Q\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_\alpha \partial q_\beta} \tag{14.12}$$

Сравним два полученных элемента, стоящих в определителях на одном и том же месте. Эти элементы совпадают, если строки и столбцы поменять местами. Так как при таком преобразовании определитель не меняется, следовательно якобиан перехода D=1.

Следствие.(Теорема Лиувилля) При движении механической системы фазовый объем сохраняется.

Движение механической системы можно рассматривать как каноническое преобразование.

Если система в момент времени t характеризовалась обобщенными и координатами и импульсами q_t, p_t, то в момент $t + \tau$ система будет характеризоваться

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, t, \tau), p_{t+\tau} = p(p_t, p_t, t, \tau) \tag{14.13}$$

Эти формулы можно рассматривать как переход от старых координат к новым координатам и импульсам.

Так как движется реальная механическая система, то в любой момент времени она должна удовлетворять уравнениям Гамильтона, а раз новые переменные удовлетворяют уравнениям Гамильтона, то это есть каноническое преобразование. Значит, движение механической системы есть каноническое преобразование. Согласно доказанной выше теореме объем при канонических преобразованиях объем сохраняется. Тем самым и обосновывается следствие.

Действие как функция координат и времени

Для механической системы, характеризуемой s степенями свободы и описываемой функцией Лагранжа $L(q_1, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s, t)$, ранее определили действие системы

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{14.14}$$

В начальный и конечный моменты времени система занимает фиксированноые положения: $q(t_1) = q^{(1)}$, $q(t_2) = q^{(2)}$. Введя таким образом действие, система будет двигаться по такой кривой, чтобы введенное действие принимало наименьшее значение. Мы рассматривали совокупность виртуальных траекторий и вычисляли вариацию действвия. Рассмотрим другую ситуацию. Будем считать, что в начальный момент времени система находится в фиксированном положении q_1, но в конечный момент времени система может находиться в разных положениях. Причем все имеющиеся кривые будем считать кривыми действительного движения системы. Тогда действие записывается следующим образом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{14.15}$$

Где начальное положение $q(t_1) = q^{(1)}$ фиксировано, а конечное положение $q(t_2)$ принимает любое значение. Таким образом действие становится функцией конечного положения $q(t_2)$.

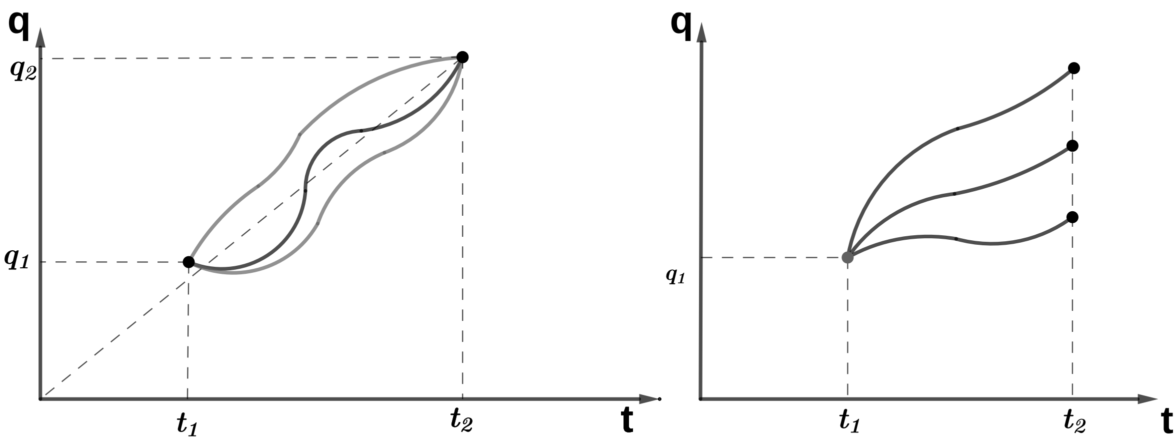

Рис. 14.2: Кривые движения

Вариация действия:

$$dS = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \Big[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} \Big] \delta q_\alpha dt \tag{14.16}$$

- Раз все имеющиеся траектории – траектории действительного движения, значит все траектории подчиняются уравнению Лагранжа. Значит, подынтегральное выражение зануляется и все интегралы пропадают.
- $\delta q_\alpha(t_1) = 0$, т.к. в начальный момент точка фиксирована.
- $\delta q_\alpha(t_2) \neq 0$. Обозначим $\delta q_\alpha = \delta q_\alpha(t_2)$.

$$dS = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \delta q_\alpha$$

$$\Rightarrow \; p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha, \; \alpha = 1, 2..., s} \tag{14.17}$$

Рассмотрим еще одну задачу. Будем считать, что все кривые, начинающиеся в фиксированной точке q_1 проходят через точку q_2 в разные моменты времени.

Из определения действия S следует, что

$$\frac{dS}{dt} = L. \tag{14.18}$$

Рассматривая действие как функцию координаты и времени, можем записать следующее:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha \tag{14.19}$$

Из разности последних двух равенств следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\Big(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\Big) \tag{14.20}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{14.21}$$

Придем к новому методу нахождения закона движения система. Этот метод основан на уравнении Гамильтона-Якоби.

Уравнение Гамильтона-Якоби

Если рассматривать действие как функцию координат и времени $S(q, t)$, согласно уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \tag{14.22}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t) = 0. \tag{14.23}$$

Согласно уравнению $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$, можем переписать следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, ..., q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0. \tag{14.24}$$

Получили *уравнение Гамильтона-Якоби.*

Определение. Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби называется его решение, зависящее от s+1 независящих констант.

$$S = S(q_1, ..., q_s, C_1, ..., C_s, t) + A \tag{14.25}$$

Где $C_1, ..., C_s, A$ – константы.

Полный интеграл без аддитивной константы $S(q_1, ..., q_s, C_1, ..., C_s, t)$ рассмотрим как *производящую функцию*. Эта производящая функция зависит от старых координат $q_1, ..., q_s$ и новых импульсов $C_1, ..., C_s$. Тогда функция S порождает каноническое преобразование.

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}; \;\; Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial C_\alpha}, \;\; \alpha = 1, 2, ...s. \tag{14.26}$$

Новая функция Гамильтона (в силу уравнения Гамильтона-Якоби):

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{14.27}$$

Запишем уравнение Гамильтона для новых переменных:

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial C_\alpha} = 0 \;\Rightarrow\; Q_\alpha = const \tag{14.28}$$

$$\dot{C}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha} = 0 \;\Rightarrow\; C_\alpha = const \tag{14.29}$$

Перепишем

$$Q_\alpha = \frac{\partial S(q_1, ..., q_s, C_1, ..., C_s)}{\partial C_\alpha}, \;\alpha = 1, 2, ..., s \tag{14.30}$$

Из этой системы, размерая ее относительно $q_1, ..., q_s$, находим закон движения:

$$q_\alpha = q_\alpha(t, C_1, ..., C_s, Q_1, ..., Q_s), \;\alpha = 1, 2, ..., s. \tag{14.31}$$

Таким образом уравнение Гамильтона-Якоби позволяет найти закон движения.

Шаги, чтобы найти закон движения механической системы с помощью уравнения Гамильтона-Якоби.

1. Составить функцию Гамильтона системы

$$H = H(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t) \tag{14.32}$$

2. Записать уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, ..., q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0, \text{ где } p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \alpha = 1, 2, ...s \tag{14.33}$$

3. Необходимо найти полный интеграл

$$S = S(q_1, ..., q_s, C_1, ..., C_s, t) + A \tag{14.34}$$

4. Записать систему равенств, из которой следует закон движения механической системы.

$$Q_\alpha = \frac{\partial S(q_1, ..., q_s, C_1, ..., C_s)}{\partial C_\alpha, \;\alpha = 1, 2, ..., s} \tag{14.35}$$

Лекция 15. Канонический формализм. Закон движения частицы, движущейся в поле электрического диполя.

Разделение переменных.

В прошлый раз мы показали, что закон движения механической системы можно найти, используя уравнения Гамильтона-Якоби. Оно имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0 \tag{15.1}$$

Ключевым в данном подходе является отыскание интеграла:

$$S = S\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, t, C_1, \ldots, C_s\right) + A \tag{15.2}$$

Оно называется полным интегралом.

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби в ином виде:

$$F\left(q_1, \ldots, q_s, t, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, \frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0 \tag{15.3}$$

Пусть определённая координата q_1 и производная $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ входят в уравнение Гамильтона-Якоби только в виде некой комбинации. То есть, само уравнение можно переписать в следующем виде:

$$F\left(f\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0 \tag{15.4}$$

Попытаемся найти решение уравнения в виде следующей комбинации:

$$S = S_1(q_1) + \widetilde{S}\left(q_2, \ldots, q_s, t\right) \tag{15.5}$$

Подставим данный вид решения в уравнение, тогда получается, что:

$$F\left(f\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right), q_2, \ldots, q_s, t, \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q_s}, \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial t}\right) = 0 \tag{15.6}$$

Из этого уравнения видно, что:

$$f\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = C_1 = const \tag{15.7}$$

Данное уравнение интегрируется в квадратурах. В квадратурах из него можно найти функцию $S_1(q_1)$.

Тогда всё уравнение Гамильтона-Якоби будет иметь вид:

$$F\left(C_1, q_2, \ldots, q_s, t, \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q_s}, \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial t}\right) = 0 \tag{15.8}$$

Отметим, что данное уравнение аналогично исходному, но содержит на одну переменную меньше. Если в последнем уравнении можно аналогично выделить другую переменную q_2 и проделать аналогичную процедуру.

Если таким образом можно отделить все переменные, то полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби найдётся.

В качестве отделимой переменной может выступать и время t.

Рассмотрим частный случай, когда переменная q_1 не входит явно в уравнение Гамильтона-Якоби. Тогда уравнение

$$F\left(C_1, q_2, \ldots, q_s, t, \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q_s}, \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial t}\right) = 0 \tag{15.9}$$

Сведётся к уравнению:

$$\frac{dS_1}{dq_1} = C_1 \tag{15.10}$$

Данное уравнение элементарно интегрируется. Получается, что:

$$S_1 = C_1 q_1 \tag{15.11}$$

Таким образом, если q_1 не входит явно в уравнение Гамильтона-Якоби, то решение мы можем искать в виде:

$$S = C_1 q_1 + \widetilde{S}\left(q_2, \ldots, q_s, t\right) \tag{15.12}$$

В качестве такой переменной может выступать и время, тогда решение нужно искать в виде:

$$S = -C_1 t + \widetilde{S}\left(q_1, \ldots, q_s\right) \tag{15.13}$$

Минус возникает для придания постоянной C_1 физический смысл. Эта константа играет роль обобщённой энергии системы.

Рассмотрим метод на примере.

Пример 7.

Пусть дана частица с массой m и зарядом e. Она движется в поле электрического диполя. Необходимо найти закон движения частицы, пользуясь уравнением Гамильтона-Якоби.

Рассмотрим диполь (рисунок 15.1, не в масштабе). Считается, что частица движется на больших расстояниях, значительно больше a.

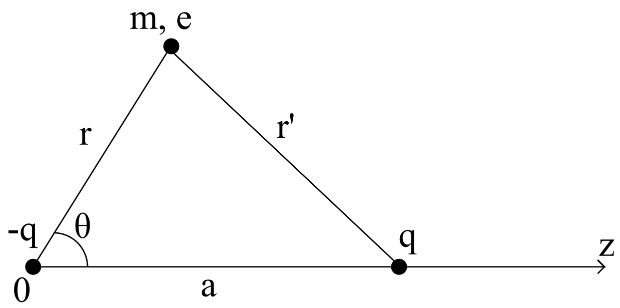

Рис. 15.1: Иллюстрация примеру 7. Диполь с расстоянием a между зарядами и частица с массой m и зарядом e.

Сначала можно записать функцию Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - e\Phi \tag{15.14}$$

Можно ввести полярную систему координат таким образом, что полярная ось z будет проходить через диполь. Начало отсчёта будет в точке, где находится отрицательный заряд. Радиальная координата r - расстояние от центра до рассматриваемой точки. Угол между полярной осью и радиальной составляющей - это θ. Обозначим r' за расстояние от положительного заряда диполя до частицы.

Скалярный потенциал складывается из двух составляющих (работа ведётся в системе Гаусса):

$$\Phi = \frac{q}{r'} - \frac{q}{r} \tag{15.15}$$

По теореме косинусов:

$$r' = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta} = r\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r} - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)} \tag{15.16}$$

Тогда потенциал:

$$\Phi = \frac{q}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta}} - 1\right) \tag{15.17}$$

Так как: $r \gg a$ Тогда:

$$\frac{a}{r} \ll 1 \tag{15.18}$$

И можно рассмотреть с учётом малого параметра, разложить в ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r} - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)}} = 1 + \frac{a}{r}\cos\theta \tag{15.19}$$

Тогда потенциал преобразуется к виду:

$$\Phi = \frac{qa}{r^2}\cos\theta \tag{15.20}$$

Обозначим модуль дипольного момента:

$$qa = p \tag{15.21}$$

Векторно дипольный момент:

$$\vec{p} = q\vec{a} \tag{15.22}$$

Можно отойти от детского представления диполя и рассмотреть чуть более общий случай. Перепишем потенциал в данном случае.

$$\Phi = \frac{qa}{r^2}\cos\theta = \frac{p}{r^2}\cos\theta \tag{15.23}$$

Можно взять систему, состоящую из многих зарядов, суммарный заряд которой нулевой. Аналогично можно рассмотреть движение заряженной частицы на большом расстоянии от данной системы зарядов. Тогда потенциал, создаваемой данной системой будет в точности равен (равенство основных членов):

$$\Phi = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \tag{15.24}$$

Дипольный момент будет выглядеть уже по-другому:

$$\vec{P} = \sum_i q_i\vec{r}_i \tag{15.25}$$

Теперь вернёмся к ранее рассмотренной задаче с диполем из двух зарядов. Запишем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{ep}{r^2}\cos\theta \tag{15.26}$$

Теперь можно легко получить обобщённую энергию:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + \frac{ep}{r^2}\cos\theta \tag{15.27}$$

Чтобы записать функцию Гамильтона, необходимо выразить обобщённые скорости через обобщённые импульсы. Обобщённые импульсы:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \tag{15.28}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{15.29}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \tag{15.30}$$

Из полученных равенств легко получается функция Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p)\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta}\right) + \frac{ep}{r^2}\cos\theta \tag{15.31}$$

Теперь, для нахождения закона движения, необходимо записать уравнения Гамильтона-Якоби.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \tag{15.32}$$

В данном уравнения обобщённые импульсы можно выразить через производную функции действия:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \ldots, \tag{15.33}$$

Для p_θ и p_φ получаются аналогичные выражения.

Тогда уравнение Гамильтона-Якоби будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \frac{ep}{r^2}\cos\theta = 0 \tag{15.34}$$

Далее необходимо отыскать полный интеграл полученного уравнения.

Для начала необходимо найти переменные, которые не входят явным образом в уравнение Гамильтона-Якоби. Такие переменные - это время t и φ. Тогда получаем вид полного интеграла:

$$S = -C_1 t + C_2 \varphi + \widetilde{S}(r, \theta) \tag{15.35}$$

Далее необходимо подставить решение в уравнение Гамильтона-Якоби:

$$-C_1 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial \widetilde{S}}{pat\theta}\right)^2 + \frac{C_2^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + \frac{ep}{r^2}\cos\theta = 0 \tag{15.36}$$

Домножим обе части последнего уравнения, тогда получается, что:

$$-2mr^2 C_1 + r^2\left(\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial r}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{C_2^2}{\sin^2 \theta} + 2mlp\cos\theta\right] = 0 \tag{15.37}$$

Квадратными скобками выделена часть, которая представляет собой функцию от θ и $\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \theta}$ и она не содержит переменной r. Таким же образом, оставшаяся часть уравнения (вне квадратных скобок) не содержит переменной θ. То есть, переменная θ - отделимая. То, что стоит в квадратных скобках - это функция $f(q_1)$ из теории. Таким образом, можно искать:

$$\widetilde{S}(r,\theta) = S_1(r) + S_2(\theta) \tag{15.38}$$

Тогда сразу можно записать, что:

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} + 2mlp\cos\theta = C_3 \tag{15.39}$$

Тогда то, что стоит в квадратных скобках в уравнении - это просто константа C_3. С учётом этого, можно записать, что:

$$-2mr^2C_1 + r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 = -C_3 \tag{15.40}$$

Таким образом, переменные полностью разделились. Из двух последних уравнений можно найти S_1 и S_2. Получаем из первого уравнения:

$$S_2 = \pm\int\sqrt{C_3 - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2mlp\cos\theta d\theta} \tag{15.41}$$

Аналогично из второго уравнения системы получается:

$$S_1 = \pm\int\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}dr} \tag{15.42}$$

Итого можно записать полный интеграл:

$$S = -C_1t + C_2\varphi \pm \int\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}dr} \pm \int\sqrt{C_3 - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2mlp\cos\theta d\theta} \tag{15.43}$$

Для точности записи можно было бы прибавить ещё аддитивную константу, но она не влияет на нахождения закона движения. Кроме того, она содержится в интегралах.

Рассмотрим вопрос о знаках перед интегралами. Обобщённые импульсы, согласно ранее записанным формулам:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \pm\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}} \tag{15.44}$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial\theta} = \pm\sqrt{C_3 - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2mlp\cos\theta} \tag{15.45}$$

Кроме того, согласно формулам (были получены ранее):

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial\dot r} = m\dot r \tag{15.46}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{15.47}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta\dot{\varphi} \tag{15.48}$$

Видно, что:

- Знак "+" берётся там, где $\dot{r} > 0$
- Знак "-" берётся там, где $\dot{r} < 0$

Для θ знаки ставятся аналогично.

На последнем шаге необходимо записать выражения вида:

$$Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial C_\alpha} \tag{15.49}$$

Итого будет три уравнения:

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial C_1} = -t \pm \int \frac{mdr}{\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}}} \tag{15.50}$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial C_2} = \varphi \mp \int \frac{C_2 d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{C_3 - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2mlp\cos\theta}} \tag{15.51}$$

$$Q_3 = \frac{\partial S}{\partial C_3} = \pm\frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\sqrt{C_3 - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2mlp\cos\theta}} \mp \frac{1}{2\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}}}} \tag{15.52}$$

Эти три равенства определяют закон движения.

- Первое равенство определяет зависимость $r(t)$ - зависимость расстояния от диполя с течением времени.
- Два последних равенства определяют траекторию движения заряда вблизи диполя.

Данная задача демонстрирует применение метода уравнения Гамильтона-Якоби для нахождения закона движения.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ