ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТФКП
СЕМИНАРЫ

ПАНИН
АЛЕКСАНДР АНАТОЛЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

КАМИНСКОГО АЛЕКСЕЯ СЕРГЕЕВИЧА

Содержание

Семинар 1 **4**
Понятие функции комплексной переменной 4
Элементарные функции 4
Однозначные элементарные функции 4
Многозначные функции 7
Множества на комплексной плоскости 9

Семинар 2 **11**
Степенные ряды на комплексной плоскости 11
Общие факты. Радиус и круг сходимости 11
Стандартные разложения 15

Семинар 3 **21**
Ряд Лорана 21

Семинар 4 **30**
Классификация особых точек однозначных функций 30
Основные понятия 30
Случай многозначных функций 35

Семинар 5 **37**
Вычисление вычетов 37
Понятие вычета 37
Вычисление вычетов: разложением в ряд Лорана 39
Вычисление вычетов: другие методы 41

Семинар 6 **46**
Лемма Жордана 46

Семинар 7 **53**
Преобразование Лапласа и его свойства 53
Понятие преобразования Лапласа 53
Свойства преобразования Лапласа 53
Изображения некоторых элементарных функций 55
Решение задачи Коши для линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. Интеграл Меллина 56

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 1

Понятие функции комплексной переменной

Однозначные (однолистные) функции ставят числу из области определения в соответствие другое число:

$$z \in D(f) \mapsto w = f(z) \tag{1.1}$$

Многозначные же ставят числу в соответствие некоторое множество:

$$z \in D(f) \mapsto W = f(z) \tag{1.2}$$

Функция называется однолистной однозначной, если:

$$\forall z_1, z_2 \in D(f) z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2) \tag{1.3}$$

Примеры

1) Однозначная, но не однолистная:

$$f(z) = z^2 \tag{1.4}$$

2) Многозначная:

$$g(w) = \sqrt{w} \tag{1.5}$$

3) Однозначная, однолистная:

$$f(z) = z + z_0 \tag{1.6}$$

Элементарные функции

Однозначные элементарные функции

Примеры

1)

$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.7}$$

2)

$$e^z \equiv e^{x+iy} := e^x \cdot e^{yi} \equiv e^x(\cos y + i \sin y) \tag{1.8}$$

Нетрудно проверить, что из (1.8) можно получить знакомое свойство:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \tag{1.9}$$

Заметим, что при таком определении экспоненты:

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^x \tag{1.10}$$

$$\arg\left(e^{x+iy}\right) = \{y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.11}$$

$$R\left(e^z\right) = \mathbb{C}\backslash 0 \tag{1.12}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Область однолистности экспоненты:

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z \in (y_0, y_0 + 2\pi)\} \tag{1.13}$$

Нетрудно догадаться, какое отображение из одной комплексной плоскости (z) в другую (w) задаёт экспонента. На рис. (См. рис. 1.1) показано отображение прямоугольника из плоскости z в плоскость w комплексной экспонентой.

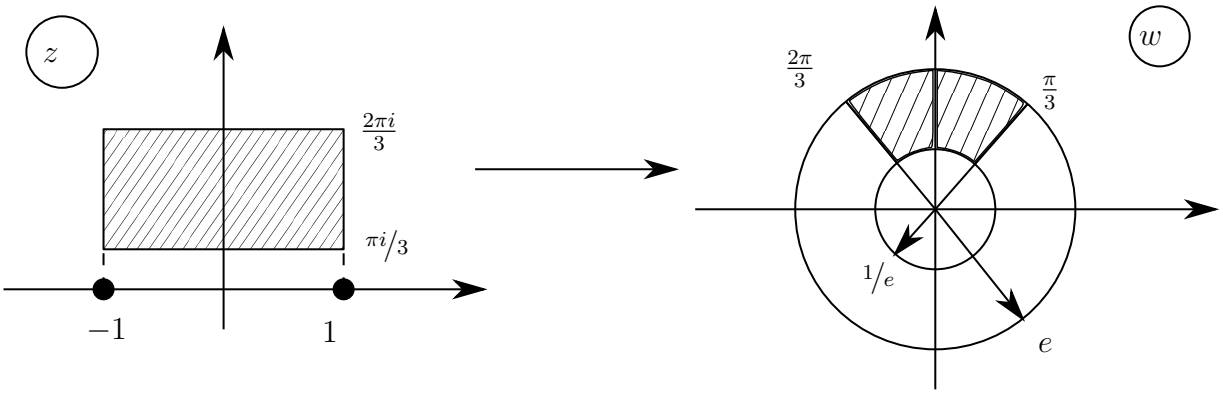

Рис. 1.1.

Введём тригонометрические функции:

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad ; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{1.14}$$

$$\operatorname{sh} z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad ; \quad \operatorname{ch} z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \tag{1.15}$$

Нетрудно проверить, что:

$$\sin(-z) = -\sin z \quad ; \quad \sin(z_1 + z_2) = \dots$$
$$\cos(-z) = \cos z \quad ; \quad \cos(z_1 + z_2) = \dots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z \tag{1.16}$$

Также можно получить связь тригонометрических и гиперболических функций:

$$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z \quad ; \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin z \tag{1.17}$$

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z \quad ; \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z \tag{1.18}$$

Найти комплексное число в алгебраической форме
№1.1

$$e^{2+3i} = e^2 \cos 3 + i e^2 \sin 3 \tag{1.19}$$

№1.2

$$\sin(2 + 3i) = \sin 2 \cos(3i) + \sin(3i) \cos 2 = \sin 2 \operatorname{ch} 3 + i \operatorname{sh} 3 \cos 2 \tag{1.20}$$

Исследовать e^z на периодичность на комплексной плоскости.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение.Пусть $D(f) = \mathbb{C}$ число $z_0 \neq 0$ называется периодом f, если

$$\forall z \in \mathbb{C} : f(z + z_0) = f(z) \tag{1.21}$$

Тогда, если z_0 - период e^z, то согласно (1.21) имеем

$$\forall z \in \mathbb{C} : e^{z+z_0} = e^z \Rightarrow e^z e^{z0} = e^z \Rightarrow e^{z_0} = 1 \Rightarrow e^{x_0}(\cos y_0 + i \sin y_0) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0 \tag{1.22}$$

Для мнимой части z_0 из (1.22) имеем:

$$y_0 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.23}$$

Ответ:

$$z_0 = 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.24}$$

№1.3

Исследовать на периодичность функцию $\operatorname{sh} z$.

Поскольку

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{1.25}$$

то $z_0 = 2\pi k i$ является периодом $\operatorname{sh} z$. Выясним, есть ли у этой функции другие периоды. Нетрудно заметить, что:

$$e^z = \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z \tag{1.26}$$

Заметим, следующие соотношения, следующие из (1.16), (1.17), (1.18):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - iz\right) = \cos(iz) \Rightarrow -\sin\left(iz - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(iz) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\left(iz + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(iz) \Rightarrow \sin\left(i\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)\right) = \cos(iz) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i \operatorname{sh}\left(z - \frac{\pi i}{2}\right) = \operatorname{ch} z \Rightarrow \operatorname{sh}\left(\frac{i\pi}{2} - z\right) = i \operatorname{ch} z \tag{1.27}$$

Пусть z_1 - период $\operatorname{sh} z$, тогда $-z_1$ также является периодом $\operatorname{sh} z$. Тогда, заметим, что

$$\operatorname{ch}(z + z_1) = \frac{1}{i} \operatorname{sh}\left(\frac{i\pi}{2} - (z + z_1)\right) = \frac{1}{i} \operatorname{sh}\left(\frac{i\pi}{2} - z\right) = \operatorname{ch} z \tag{1.28}$$

То есть z_1 является периодом и функции $\operatorname{ch} z$. Тогда в силу (1.26), если некоторое z_1 является периодом $\operatorname{sh} z$, то это же z_1 является периодом e^z, но тогда $z_1 = 2\pi k i$.

Аналогично исследуется на периодичность функция $\operatorname{ch} z$.

Покажем пример вывода формулы для понижения степени тригонометрической функции. Понизим степень функции $\sin^5 z$. Сделаем это с помощью треугольника паскаля (можно через бином Ньютона):

$$\sin^5 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{16}\left(e^{5iz} - 5e^{3iz} + 10e^{iz} - 10e^{-iz} + 5e^{-3iz} - e^{-5iz}\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(\sin(5z) - 5\sin(3z) + 10\sin z\right) \tag{1.29}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Многозначные функции

Многозначные функции называются равными, если:

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D(F_1) = D(F_2) \\ \forall z \in D(F_1) : W_1(z) = W(z) \end{cases} \tag{1.30}$$

Пример

$$\left(z^{1/2}\right)^2 \subset (z^2)^{1/2} \tag{1.31}$$

$$\arg z = \{\varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}, \tag{1.32}$$

где φ определяется, как:

$$z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi) \tag{1.33}$$

Определим комплексный логарифм:

$$\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} | e^w = z\} \tag{1.34}$$

($\operatorname{Ln} 0$ не определён)

Пусть $w = u + vi$, тогда:

$$e^{u+vi} = e^u(\cos v + i \sin v) = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) \tag{1.35}$$

Из (1.35) следует, что

$$e^u = \rho \quad \Leftrightarrow \quad u = \ln\rho \tag{1.36}$$

$$(\cos v + i \sin v) = (\cos\varphi + i \sin\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad v = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \tag{1.37}$$

Таким образом, для комплексного логарифма получим:

$$\operatorname{Ln} z = \begin{cases} \text{не определён}, z = 0, \\ \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}, z \neq 0 \end{cases} \tag{1.38}$$

Найти комплексный логарифм:

№4.1

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \left\{\ln\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) | k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{1.39}$$

№4.2

$$\operatorname{Ln}(-10) = \{\ln 10 + i(\pi + 2\pi k) | k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.40}$$

№4.3

$$\operatorname{Ln} 1 = \{i2\pi k | k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.41}$$

№4.4

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\operatorname{Ln}(2i) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \tag{1.42}$$

№4.5

$$\operatorname{Ln}\left(e^z\right) = \underbrace{\ln\left(e^x\right)}_{x} + i(y + 2\pi k) = z + 2\pi k i \tag{1.43}$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = e^{\operatorname{Ln} z} = z \tag{1.44}$$

и функцию

$$f(z) = z \tag{1.45}$$

Эти функции не равны:

$$\begin{aligned} f_1(z) &\neq f(z) \\ D(f_1) &= \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ D(f) &= \mathbb{C} \end{aligned}$$

Нетрудно вывести для комплексного логарифма соотношение, аналогичное обычному логарифму:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = W_1 + W_{2,k}, \tag{1.46}$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &\in \operatorname{Ln} z_1, \\ \{W_{2,k}\}_{k\in\mathbb{Z}} &= \operatorname{Ln} z_2 \end{aligned}$$

Определим ещё одну функцию:

$$z_1^{z_2} := e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1}, \quad (z_1 \neq 0) \tag{1.47}$$

Тогда

$$z^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{n}(\ln(|z|)+i(\varphi+2\pi k))} = e^{\frac{1}{n}\ln(|z|)} e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{i\frac{2\pi k}{n}} \tag{1.48}$$

Заметим, что (1.48) совпадает со старым определением.

Принято понимать обозначение $e^z = e^x e^{yi}$, как однозначную функцию, но обозначение

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, \tag{1.49}$$

как многозначную. Комплексную (многозначную) экспоненту принято обозначать так:

$$a^z|_{a=e} = e^{z \operatorname{Ln} e} = e^{z(1+2\pi k i)} \tag{1.50}$$

Записать комплексное число в показательной форме.

№5.1

$$2^i = e^{i \operatorname{Ln} 2} = e^{i(\ln 2 + i2\pi k)} = e^{-2\pi k}(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)) \tag{1.51}$$

№5.2

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$i^{i+2} = e^{(i+2)\operatorname{Ln} i} = e^{(i+2)(\cancelto{0}{\ln 1}+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right))} = e^{(-1+2i)\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} =$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} e^{i\pi+i2\pi k} = -e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi m}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1.52)$$

№5.3

$$1^e = e^{e\operatorname{Ln} 1} = e^{e2\pi ki} = \cos(2\pi ke) + i\sin(2\pi ke), \quad (1.53)$$

заметим, что множество (1.53) - счётное, поскольку

$$2\pi k_1 e - 2\pi k_2 e \neq 2\pi m \Leftrightarrow (k_1 - k_2)e \neq m, \quad (1.54)$$

что верно, поскольку число e - иррациональное.

Заметим, что функция $z_1^{z_2}$ может быть однозначной. Найдём условие, при котором это происходит. Заметим, что

$$z_1^{z_2} = e^{z_2\operatorname{Ln} z_1} = e^{z_2(\ln\rho_1+i(\varphi_1+2\pi k))} = e^{z_2\ln\rho_1}\cdot e^{z_2 i\varphi_1}\cdot e^{z_2 i2\pi k} \quad (1.55)$$

Из (1.55) видно, что функция будет однозначной, если:

$$\forall k \in \mathbb{Z}\,\exists n \in \mathbb{Z} : z_2 i2\pi k = 2\pi ni \Rightarrow z_2 k = n, \quad (1.56)$$

в частности при $k = 1 : z_2 = n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, функция $z_1^{z_2}$ является однозначной, если $z_2 \in \mathbb{Z}$. Нетрудно убедиться в том, что

$$(z_1^{z_2})^{z_3} \supset z_1^{z_2 z_3} \quad (1.57)$$

Множества на комплексной плоскости

Найдём, как будет выглядеть множество $M_1 = \{z|\,|z+1+i| \geq 1\}$. Можно сделать замену переменной $w = z+1+i$, и найти множество $|w|w \geq 1|$, а потом сместить его по осям (См. рис. 1.2).

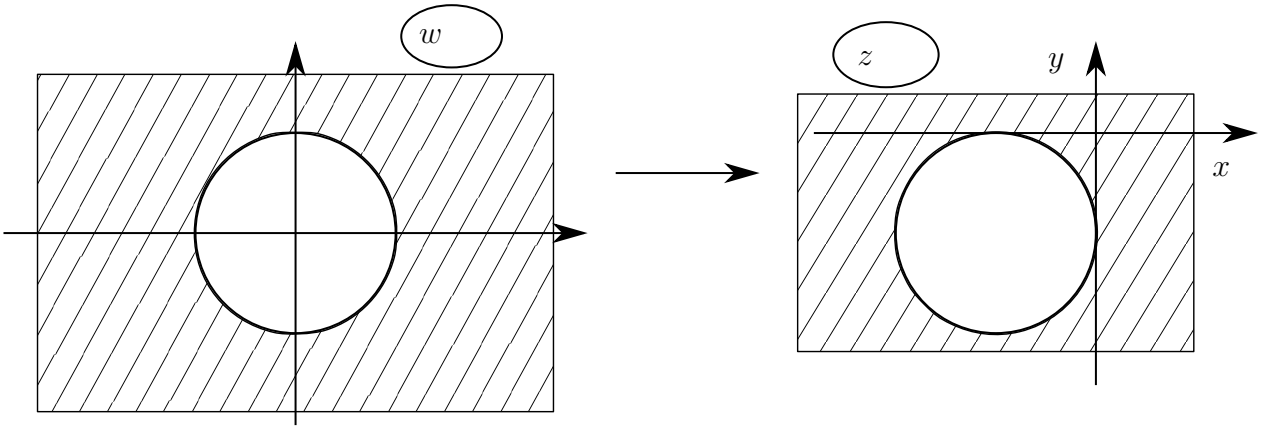

Рис. 1.2.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Аналогично найдём множество $M_2 = \left\{z|\frac{\pi}{2} \leq \arg(z+i) < \frac{3\pi}{4}\right\}$, сделав замену $w = z+i$, и найдя сперва множество $\left\{w|\frac{\pi}{2} \leq \arg w < \frac{2\pi}{4}\right\}$, а потом сместив его по мнимой оси (См. рис. 1.3).

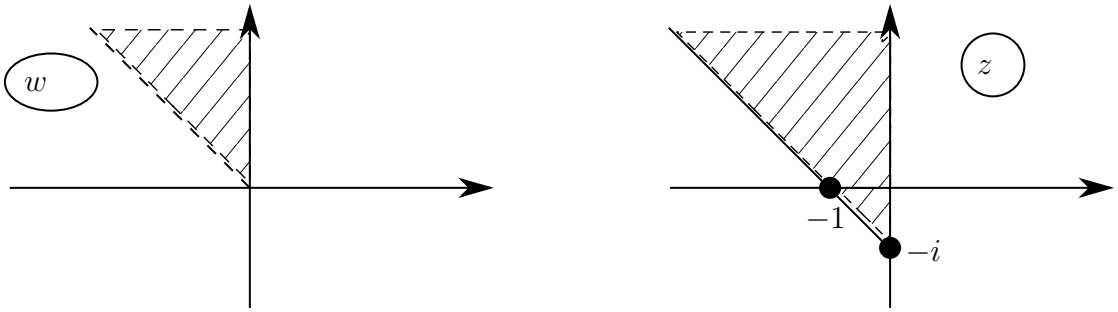

Рис. 1.3.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 2

Степенные ряды на комплексной плоскости

Общие факты. Радиус и круг сходимости

Степенной ряд некоторой функции представляет собой её представлением в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{2.1}$$

Теорема(Абеля)
Пусть ряд (2.1) сходится при $z = z_1 \neq z_0$ (См. рис. 2.1). Тогда ряд (2.1) сходится абсолютно при всех $z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причём сходимость равномерна в любом круге $\{z : |z - z_0| \leq \rho\}, \quad \rho < |z_1 - z_0|$.

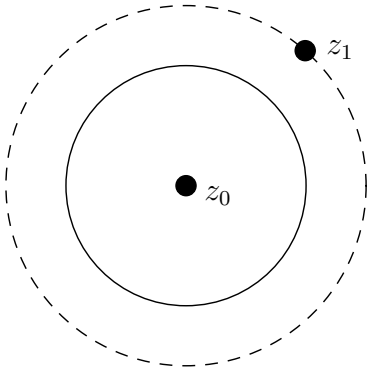

Рис. 2.1.

Следствие
Существует такое $R, 0 \leq R \leq +\infty$, что ряд (2.1) сходится при $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$. Такое число называется радиусом сходимости.

Несложно получить выражение для радиуса сходимости:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{2.2}$$

или

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|, \tag{2.3}$$

если предел (2.3) существует.

Найти радиус сходимости
№1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{1+i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i} \right)^n (z+1)^n \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{1}{1+i} \right)^n \right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{1+i} \right|^n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = \sqrt{2} \tag{2.5}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

№2

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} (z+i)^n \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\underbrace{\left|e^{in}\right|}_{=1}} = 1 \Rightarrow R = 1 \tag{2.7}$$

№3

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3+i^n)^n z^n; \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(3+i^n)^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|3+i^n|^n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |3+i^n| = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}, \tag{2.9}$$

где предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |3+i^n|$ легко найти, учитывая, что выражение $3+i^n$ может принимать только 4 различных значения (См. рис. 2.2).

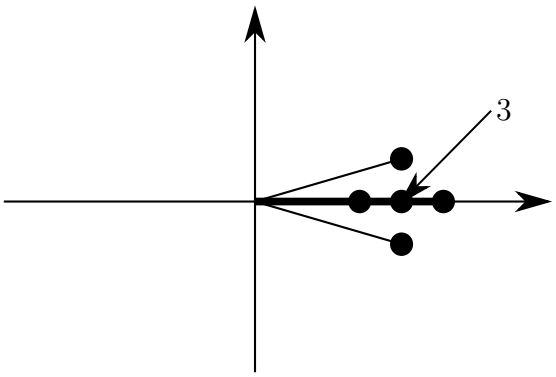

Рис. 2.2.

№4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n; \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{|in|^n}} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = \infty \tag{2.11}$$

№5

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! (z-2i)^n; \tag{2.12}$$

Воспользуемся формулой (2.3):

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty \Rightarrow R = 0 \tag{2.13}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

№6

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a^n}{\ln n}+b^n\right)z^n=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{\ln n}z^n}_{(1)}+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}b^nz^n}_{(2)} \tag{2.14}$$

Нетрудно получить радиусы сходимости получившихся рядов:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{|a|} \\ R_2 &= \frac{1}{|b|} \end{aligned}$$

1) Пусть $|a|\neq|b|$ (считаем, что $|a|>|b|$) (См. рис. 2.3), тогда в круге радиуса $\frac{1}{|a|}$ оба ряда сходятся, и ряд (2.14) соответственно тоже сходится. При $\frac{1}{|a|}<|z|<\frac{1}{|b|}$ ряд (1) сходится, а ряд (2) - расходится, соответственно, их сумма - ряд (2.14) расходится. При $|z|>\frac{1}{|b|}$ оба ряда (1) и (2) расходятся, и их сумма могла бы как расходится, так и сходится, но их сумма - ряд (2.14) расходится при $\frac{1}{|a|}<|z|<\frac{1}{|b|}$, а значит по следствию из теоремы Абеля при $|z|>\frac{1}{|b|}$ ряд (2.14) тоже расходится. Аналогично для $|a|>|b|$. Таким образом, при $|a|\neq|b|$ для радиуса сходимости ряда (2.14) имеем:

$$R=\min\left(\frac{1}{|a|},\frac{1}{|b|}\right) \tag{2.15}$$

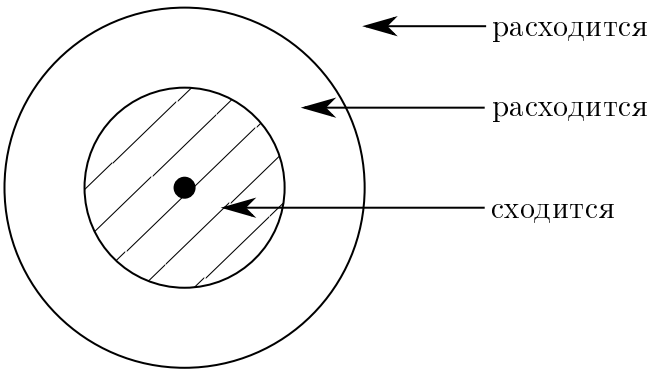

Рис. 2.3.

2) Пусть $|a|=|b|$ (См. рис. 2.4). В этом случае ряд (2.14) сходится при $|z|<\frac{1}{|b|}$ и расходится при $|z|>\frac{1}{|b|}$. Найдём, что будет при $|z|=\frac{1}{|b|}$. Рассмотрим точку $z=\frac{1}{b}$:

$$z=\frac{1}{b}:\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{a^n}{b^n\ln n}+1\right)}_{\to 1} \tag{2.16}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

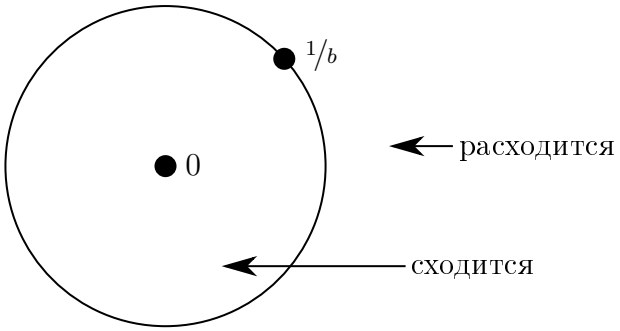

Рис. 2.4.

Последовательность членов ряда (2.16) при $n \to \infty$ стремится к 1, значит ряд (2.16) расходится. Тогда по следствию из теоремы Абеля ряд (2.14) расходится при $|z| = \frac{1}{|b|}$.

Найдём, что бывает на границе круга сходимости.
Теорема
Абсолютно сходящияся ряд сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} w_n \quad - \quad \text{сходится} \tag{2.17}$$

Найти поведение ряда на границе круга сходимости.
№8.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}; \quad R = 1 \tag{2.18}$$

Применим теорему, что выше, при $|z| = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{2.19}$$

Ряд (2.19) сходится, значит ряд (2.18) сходится при всех $z : |z| = 1$.
№8.2

$$\sum_{n-1}^{\infty} z^n; \quad R = 1 \tag{2.20}$$

Расходится при $|z| = 1$.
№8.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad R = 1 \tag{2.21}$$

При $z = 1$ - расходится; при $z = -1$ - сходится.
Утверждение

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть $c_n > 0$, $c_n \downarrow$ (убывает). Тогда ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{2.22}$$

сходится при всех $z : |z| = 1$, кроме, возможно, $z = 1$.

Доказательство

Пусть $|z| = 1, z \neq 1$. Тогда $\exists \varphi \in (0, 2\pi) : z = e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = e^{in\varphi}$. Тогда слагаемые ряда (2.22) примет вид:

$$c_n z^n = c_n \left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right) \tag{2.23}$$

Ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\varphi); \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\varphi)$$

сходятся по признаку Дирихле, значит и ряд (2.22) тоже сходится при указанных условиях.

Стандартные разложения

Приведём примеры разложения стандартных функций:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{2.24}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = +\infty \tag{2.25}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad R = +\infty \tag{2.26}$$

Из (2.24), (2.25), (2.26) нетрудно получить, что:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{2.27}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}; \quad R = 1 \tag{2.28}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n; \quad R = 1, \tag{2.29}$$

где

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \tag{2.30}$$

В (2.28) подразумевается главная ветвь логарифма. Чтобы найти область (круг) сходимости проведём замену переменных: $w = 1 + z$, тогда если разложение (2.28)

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

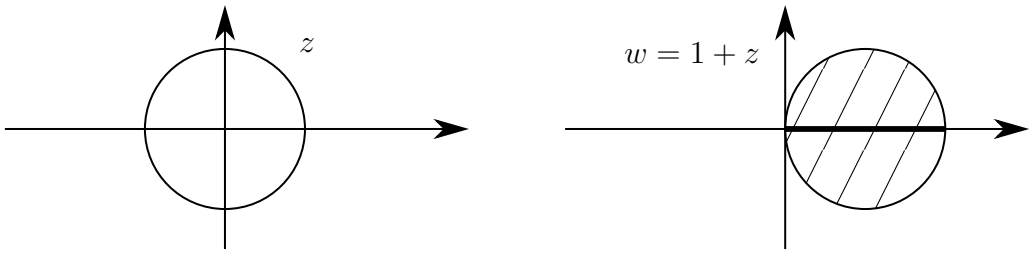

Рис. 2.5.

для логарифма на вещественной оси $\ln(1+x)$ определено в области $x \in (-1,1)$, то с учётом замены переменной имеем $\ln t, \quad t \in (0,2)$ (См. рис. 2.5). С учётом определения комплексного логарифма, можно определить, что разложение (2.28) выполнено для главной ветви:

$$\mathrm{Ln}(1+z) = \ln|1+z| + i\arg(1+z) + \cancel{2\pi k i} = \ln(1+z) \tag{2.31}$$

Теорема

1) Пусть внутри круга сходимости выполняются следующие условия: $\omega_R(z_0) \equiv \{z : |z-z_0| < R\}$:
   а) Сумма $S(z)$ является аналитической функцией.
   б) В любой точке $z \in \omega_R(z_0)$ возможен почленный переход к пределу.
   в) Ряд (2.1) можно дифференцировать и интегрировать почленно любое число раз, при этом радиус сходимости не меняется

2) Тогда если функция f - аналитична в круге сходимости ($f \in C^\infty(\omega_R(z_0))$), то в этом круге эта функция может быть разложена в степенной ряд (2.1) причём единственным образом:
$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \tag{2.32}$$
или
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\epsilon^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \tag{2.33}$$
где C_ϵ^+ - окружность радиуса ϵ с центром в точке z_0 полностью лежащая в $\omega_R(z_0)$ (См. рис. 2.6).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

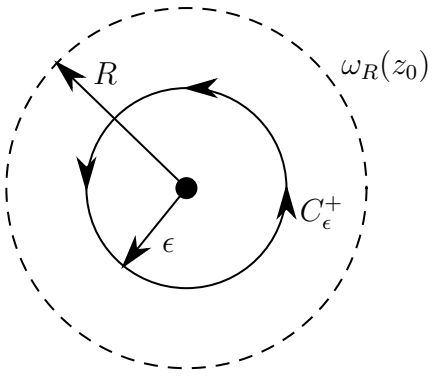

Рис. 2.6.

3) На границе круга сходимости есть хотя бы одна особая точка функции (См. рис. 2.7).

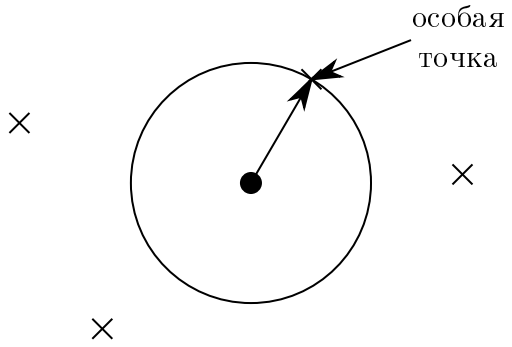

Рис. 2.7.

То есть, ряд Тейлора функции сходится в точности до ближайшей особой точки функции.

Найти радиус сходимости и просуммировать ряд:

№9.1

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} z^{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{2.34}$$

где

$$c_n = \begin{cases} c_n = 0, & n \nmid 4 \\ c_n = \dfrac{(-1)^{k+1}}{2^k}, & n = 4k \end{cases} \tag{2.35}$$

Введём переменную $\zeta = z^4$, тогда

$$f_1(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \zeta^n, \tag{2.36}$$

сходится при $|\zeta| < 2 \Rightarrow |z| < \sqrt[4]{2}$. Ряд (2.36) - это геометрическая прогрессия, тогда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} z^{4n} = -\frac{-\frac{1}{2}z^4}{1+\frac{1}{2}z^4} = \frac{z^4}{2+z^4} \tag{2.37}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

№9.2

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \tag{2.38}$$

Радиус сходимости: $R = 1$

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right)' = \left(\frac{1}{1-z} - 1 \right)' = \frac{1}{(1-z)^2} \tag{2.39}$$

Разложить по степеням z:
№10.1

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \tag{2.40}$$

№10.2

$$\sin^5 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^5 = \frac{e^{5iz} - e^{-5iz} - 5\left(e^{3iz} - e^{-3iz}\right) + 10\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2i \cdot 16} = \dots \tag{2.41}$$

№10.3

$$\frac{z^7}{1-z^3} = z^7 \cdot \frac{1}{1-z^3} = \left[\begin{matrix} z^3 = \zeta \\ \dfrac{1}{1-z^3} = \dfrac{1}{1-\zeta} \end{matrix} \right] = z^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (z^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+7} \tag{2.42}$$

№10.4

$$\frac{1}{z^2 - z - 2} = \frac{1}{(z-2)(z+1)} = \frac{1/3}{z-2} + \frac{-1/3}{z+1} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+z} + \underbrace{\frac{1}{2-z}}_{\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \right) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n \tag{2.43}$$

Найдём радиус сходимости:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}}}{(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}} \right| = 1 \Rightarrow R = 1 \tag{2.44}$$

То есть, ряд (2.43) сходится до ближайшей особой точки (См. рис. 2.8).

Пусть известны особые точки данной функции (См. рис. 2.9), тогда можно найти радиус сходимости степенного ряда данной функции, вычислив расстояние до ближайшей особой точки.

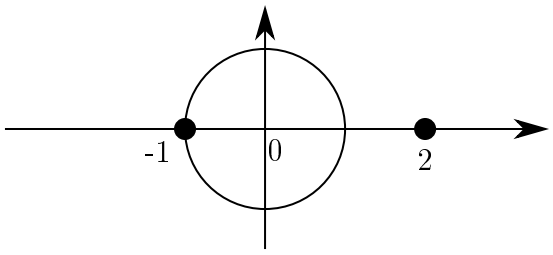

Рис. 2.8.

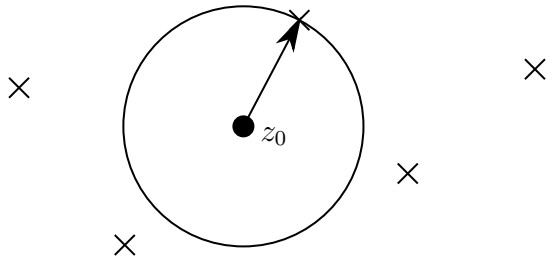

Рис. 2.9.

Не производя разложения, найти радиусы сходимости рядов Маклорена для данных функций:

№11.1

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \tag{2.45}$$

Корни: $1; 2 \Rightarrow R = 1$.

№11.2

$$\operatorname{arctg} x \tag{2.46}$$

Можно вычислить производную (что не изменит радиус сходимости) $\frac{1}{1+x^2}$, и, найдя особые точки производной (См. рис. 2.10), найти радиус сходимости ($R = 1$).

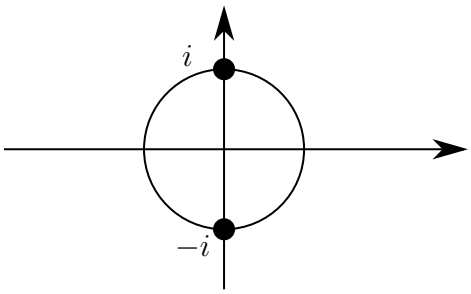

Рис. 2.10.

Домашнее задание

Объяснить кажущееся противоречие:

1) На границе сходимость есть хотя бы одна особая точка функции m.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) Ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} \tag{2.47}$$

имеет радиус сходимости $R = 1$, но на окружности $|z| = 1$ ряд (2.47) сходится к конечной сумме. Как это связано с особой точкой m?

Семинар 3

Ряд Лорана

Рядом Лорана называется степенной ряд вида:

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3.1}$$

Для удобства ряд (3.1) часто делят на правильную часть:

$$S^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3.2}$$

и главную часть:

$$S^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} \tag{3.3}$$

Сделав замену переменной $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$, легко убедиться, что область сходимости ряда (3.1) представляет собой кольцо - пересечение области (круга) сходимость ряда 3-2 M^+ и области сходимости ряда (3.3) M^-: $M = M^+ \cap M^-$ (См. рис. 3.1)

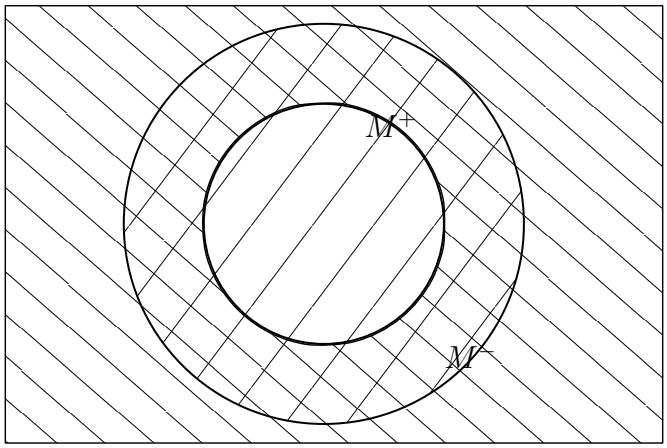

Рис. 3.1.

Множество внутренних точек области сходимость ряда (3.1) - это открытое кольцо: $\operatorname{int} M = r < |z - z_0| < R$ (кольцо может вырождаться в круг, или внешность к кругу).

Нетрудно получить выражения, для большого и малого радиусов кольца M:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}; \tag{3.4}$$

$$r = \overline{\lim_{m \to +\infty}} \sqrt[m]{|c_{-m}|}; \tag{3.5}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

или (если существуют пределы):

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|; \tag{3.6}$$

$$r = \lim_{m\to+\infty}\left|\frac{c_{-m-1}}{c_{-m}}\right| \tag{3.7}$$

Найти область сходимость и вычислить сумму рядов:
№1

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|}z^n \tag{3.8}$$

Разобьём на правильную и главную части. Правильная:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}z^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \Rightarrow R = 2 \tag{3.9}$$

Главная:

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-|-m|}z^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}z^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^m, \tag{3.10}$$

где $|z| > \frac{1}{2}$.

Таким образом, для ряда (3.8) имеем $M = \left\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\right\}$.

То же можно получить, используя выражения (3.4), (3.5):

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{2^{-|n|}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2 \tag{3.11}$$

$$r = \overline{\lim_{m\to+\infty}}\sqrt[m]{|c_{-m}|} = \overline{\lim_{m\to+\infty}}\sqrt[m]{2^{-|-m|}} = \frac{1}{2} \tag{3.12}$$

Вычислим суммы (3.9), (3.10):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}; \tag{3.13}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^m = \frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}} \tag{3.14}$$

Таким образом,

$$S(z) = \frac{2}{2-z} + \frac{1}{2z-1} = \frac{1}{2z-1} - \frac{2}{z-2} = \frac{z-2-4z+2}{2z^2-4z-z+2} = \frac{-3z}{2z^2-5z+2} \tag{3.15}$$

№2

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n+1} \tag{3.16}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3 \tag{3.17}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt[n]{3^n+1}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{3^n}}} \Rightarrow \text{ при } |z|=3: \left|\frac{1}{3\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{3^n}}}\right| = \frac{3^n}{3^n+1} \to 1 \Rightarrow \text{ расходится}$$

$$r = \overline{\lim_{m\to+\infty}} \sqrt[m]{|c_{-m}|} = \overline{\lim_{m\to+\infty}} \sqrt[m]{\frac{1}{3^{-m}+1}} = \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{\sqrt[m]{1+3^{-m}}} = 1 \tag{3.18}$$

При $|z|=1$ главная часть состоит из слагаемых: $\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1+3^{-m}} \to 1 \Rightarrow$ расходится.
Таким образом, получаем область сходимости: $M = \{z : 1 < |z| < 3\}$.
№3

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{(z+2i)^n} \tag{3.19}$$

Сделаем замену: $\zeta := \frac{1}{z+2i}$, тогда

$$S_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+1)\zeta^n \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{R_\zeta} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\right| = 2 \Rightarrow R_\zeta = \frac{1}{2} \Rightarrow r_z = 2, \tag{3.21}$$

То есть, при $|z+2i| > 2$ - ряд (3.19) сходится.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)\zeta^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2\zeta)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n = \frac{1}{1-2\zeta} + \frac{1}{1-\zeta} = \frac{1-\zeta+1-2\zeta}{1-3\zeta+2\zeta^2} = \\ = \frac{2-3\zeta}{2\zeta^2-3\zeta+1} = \frac{2-\frac{3}{z+2i}}{\frac{2}{(z+2i)^2}-\frac{3}{z+2i}+1} = \frac{2(z^2+4iz-4)-3(z+2i)}{2-3(z+2i)+z^2+4iz-4} = \\ = \frac{2z^2+z(-3+8i)-8-6i}{z^2+z(-3+4i)-2-6i},\end{aligned} \tag{3.22}$$

при $|z+2i| > 0$.

Теорема

1) Пусть сумма $S(z)$ ряда Лорана (3.1) является аналитической функцией в кольце сходимости $\{z : r < |z-z_0| < R\}$.

2) Тогда на любом замкнутом подмножестве кольца сходимости ряд (3.1) сходится равномерно

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема

Если однозначная функция f аналитична в $D = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, то она раскладывается в D единственным образом в ряд Лорана:

$$f(z)|_D = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{3.23}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \tag{3.24}$$

где интеграл берётся по контуру, находящемуся в кольце сходимости (См. рис. 3.2).

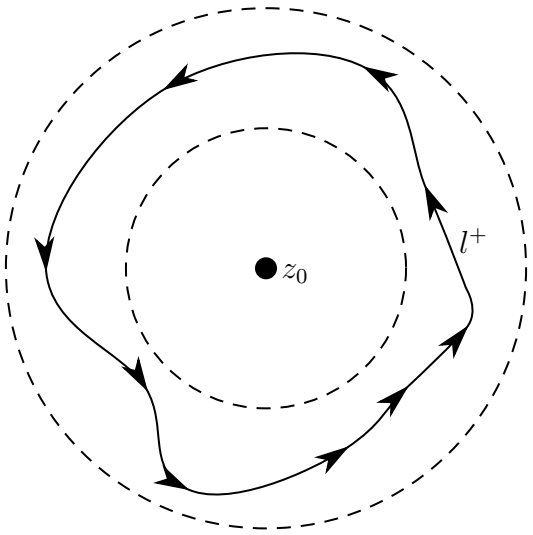

Рис. 3.2.

Если функция $f(z)$ имеет несколько особых точен, то в кольцах, располагающихся между соседними особыми точками (если $f(z)$ в них аналитична) эту функцию можно разложить в свои ряды Лорана (которые могут быть разными для каждого кольца) (См. рис. 3.3).

Если z_0 - особая точка, то в проколотой окрестности (См. рис. 3.3) функцию можно разложить в ряд Лорана (ряд Тейлора).

Замечание

Если $f \in C^\infty(\Omega_R(0))$, где $\Omega_R(0) = \{z : |z| > R\}$, то она раскладывается в ряд Лорана в $\Omega_R(0)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \tag{3.25}$$

Чтобы это сделать, произведём замену переменной $\zeta = \frac{1}{z}$ и рассмотрим функцию $f_1(\zeta) := f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, тогда заметим, что функция f_1 аналитична в круге $f_1 \in C^\infty\left(\omega_{\frac{1}{R}}(0)\right)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

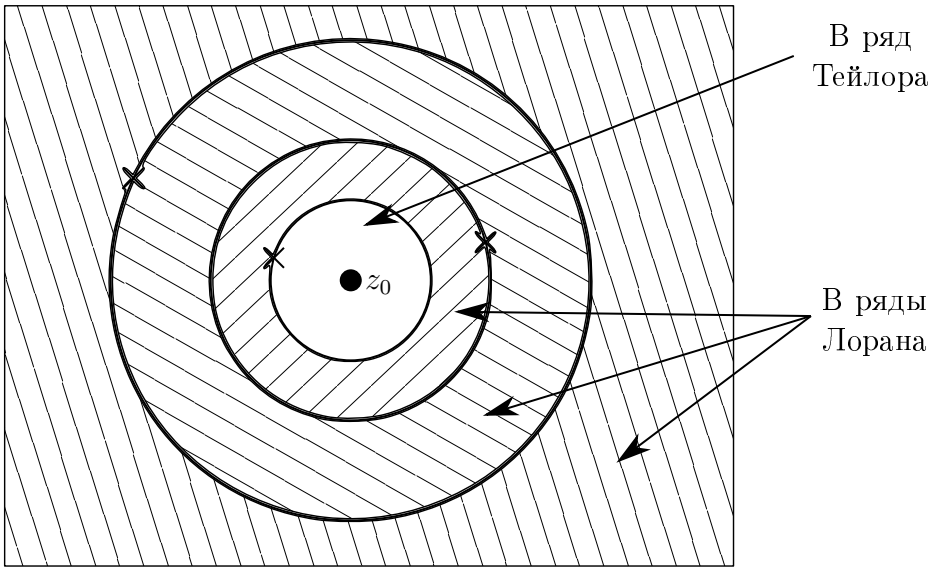

Рис. 3.3.

В таком случае её там можно разложить в ряд Лорана:

$$f_1(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{\zeta^n} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \zeta^n, \tag{3.26}$$

где $b_n = c_{-n}$. Так можно найти коэффициенты c_n разложения функции f в $\Omega_R(0)$.

№4

Разложить всеми возможными способами в ряд Лорана с центром разложения в точке $z_0 = 2$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} \tag{3.27}$$

С учётом последней теоремы и её следствий, зная, что особые точки функции (3.27): 1 и -1, отметим области, с разными разложениями в ряд Лорана с центром разложения в точке $z_0 = 2$ (См. рис. 3.4).

Сделаем замену переменной $\zeta := z - z_0 = z - 2$. Учтём, что

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right) \tag{3.28}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

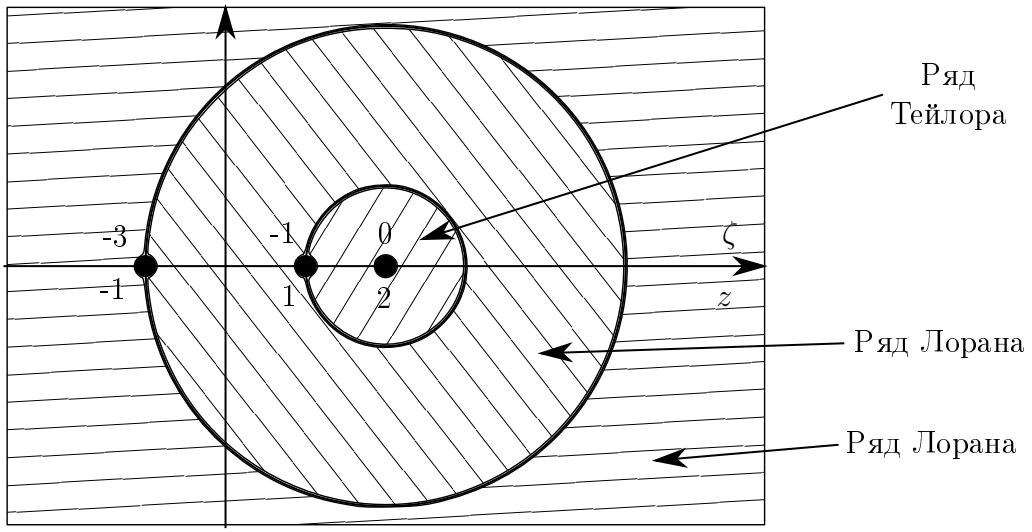

Рис. 3.4.

Тогда

$$f_1(\zeta) = f(\zeta+2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+\zeta} + \frac{1}{-1-\zeta}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+\zeta} + \underbrace{\frac{1}{3+\zeta}}_{\frac{1}{3}\frac{1}{1+\zeta/3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\zeta^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\zeta^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(-1+\frac{1}{3^{n+1}}\right)\zeta^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(-1+\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n \quad (3.29)$$

Мы получили разложение функции в круге (3.29). Перед тем как написать разложение функции в кольце (См. рис. 3.4) заметим, что разложение функции $\frac{1}{3+\zeta}$ будет таким же, как в (3.29), поскольку у этой функции нет особой точки в $\zeta = -1 \equiv z = 1$, но есть только особая точка при $\zeta = -3 \equiv z = -1$. То есть, для разложения функции $f_1(\zeta)$ в кольце нам нужно изменить лишь разложение для функции $\frac{1}{1+\zeta}$. Для этого, как уже говорилось в (3.26) нужно в разложении заменить ζ на $\frac{1}{\zeta}$ и раскладывать по $\frac{1}{\zeta}$, тогда:

$$-\frac{1}{1+\zeta} = -\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{\zeta}} = -\frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)^{n+1} \quad (3.30)$$

Таким образом, с учётом того, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)^{m+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)^k = \sum_{l=-\infty}^{-1}(-1)^l\zeta^l, \quad (3.31)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

разложение в кольце для функции (3.28) примет вид:

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)^{m+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\zeta^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-2)^n, \tag{3.32}$$

где

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{2\cdot 3^{n+1}}, n = 0,1,2,\dots \\ \dfrac{(-1)^n}{2}, n = -1,-2,\dots \end{cases} \tag{3.33}$$

Аналогично, заметим, что для функции $\frac{1}{1+\zeta}$ с внешней стороны кольца останется разложение (3.30), а вот разложение для функции $\frac{1}{3+\zeta}$ для этой области нужно поменять. Действуя аналогично получим с снаружи кольца ($|\zeta| > 3$ или $|z-2| > 3$):

$$\frac{1}{3+\zeta} = \frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{\zeta^{n+1}} = \\ = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-3)^{k-1}}{\zeta^k} = \sum_{l=-\infty}^{-1}(-3)^{-1-l}\zeta^l \tag{3.34}$$

Таким образом, при $|\zeta| > 3 \Leftrightarrow |z-2| > 3$ получим разложение:

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = f_1(\zeta) = \sum_{l=-\infty}^{-1}\frac{1}{2}\left[(-1)^l + (-3)^{-1-l}\right]\zeta^l = \\ = \sum_{l=-\infty}^{-1}\frac{1}{2}\left[(-1)^l + (-3)^{-1-l}\right](z-2)^l \tag{3.35}$$

№5

Разложить функцию

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} \tag{3.36}$$

в ряд Лорана в окрестности бесконечности.

Заменим $\zeta = \frac{1}{z}$, тогда

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} = e^{-\zeta} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\zeta)^n}{n!}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \tag{3.37}$$

То есть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{0}\frac{(-1)^m}{|m|!}z^m, \quad z \neq 0 \tag{3.38}$$

№6

Разложить функцию в окрестности z_0:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z-\frac{2}{27}}, \quad z_0 = 2 \tag{3.39}$$

Замена переменной $\zeta = z - 2$. Тогда

$$f_1(\zeta) = f(\zeta + 2) = \frac{\sin(\zeta + 2)}{\zeta} = \frac{\sin\zeta\cos 2 + \sin 2\cos\zeta}{\zeta} = \\ = \cos 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^{2n}}{(2n+1)!} + \sin 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^{2n-1}}{(2n)!}, \quad \zeta \neq 0 \quad (3.40)$$

№7

Разложить функцию в окрестности бесконечности:

$$f(z) = \ln\left(\frac{z^3}{z^3+2}\right) \quad (3.41)$$

Чтобы воспользоваться формулой (2.28) нужно выбрать главную ветвь логарифма, для этого возьмём комплексную плоскость с разрезом по отрицательной действительной оси (См. рис. 3.5) и будем считать, что дробь в (3.41) находится в окружности на рис. 3.5.

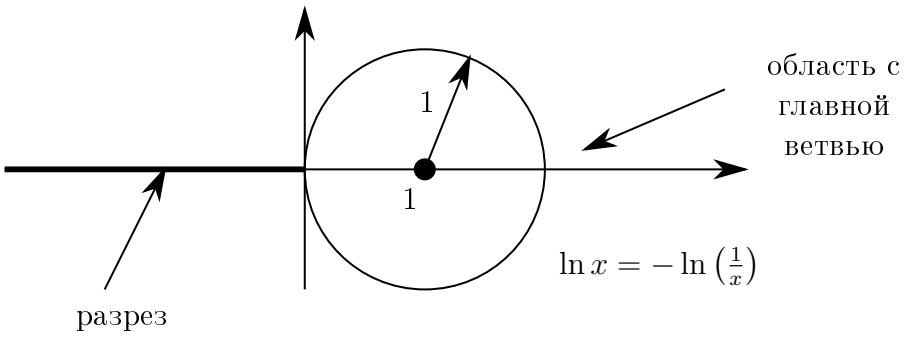

Рис. 3.5.

Тогда, поскольку

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n, \quad (3.42)$$

то имеем:

$$f(z) = \ln\left(\frac{z^3}{z^3+2}\right) = -\ln\left(\frac{z^3+2}{z^3}\right) = -\ln\left(1 + \frac{2}{z^3}\right) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{2^n}{z^{3n}}, \quad |z| < \sqrt[3]{2} \quad (3.43)$$

№8

Пусть функции $f_1(z), f_2(z)$ аналитичны в кольце $D = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ и раскладываются в нём в ряды:

$$f_1(z)|_D = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n; \quad (3.44)$$

$$f_2(z)|_D = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \quad (3.45)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказать, что

1) Сумма

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k} \tag{3.46}$$

сходится при $n \in \mathbb{Z}$.

2) Функция

$$f(z) := f_1(z) f_2(z) \tag{3.47}$$

раскладывается в ряд Лорана в кольце D:

$$f(z)|_D = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{3.48}$$

где

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k} \tag{3.49}$$

Возьмём в качестве контура l^+ окружность с радиусом, равным среднему арифметическому радиусов кольца, и центром в центре кольца. Тогда, согласно (3.24) имеем для коэффициентов функции $f(z)$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l^+} \frac{f_1(z) f_2(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l^+} \frac{\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \right) f_2(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{3.50}$$

поскольку l^+ - замкнутое подмножество кольца, то ряд в (3.50) сходится равномерно, и можно интегрировать почленно, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l^+} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \frac{f_2(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right) dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l^+} \frac{f_2(z)}{(z - z_0)^{n-k+1}} dz}_{b_{n-k}} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k} \tag{3.51}$$

Так как $f(z)$ аналитична в кольце, то она раскладывается там в ряд Лорана. Поскольку коэфициенты её разложения имеют вид (3.49), то ряд (3.47) сходится при $n \in \mathbb{Z}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 4

Классификация особых точек однозначных функций

Основные понятия

Определение.

z_0 называется правильной точкой функции f, если ($\overset{def}{\Leftrightarrow}$) f аналитична в точке z_0.

Определение.

z_0 называется особой точкой функции $f \quad \overset{def}{\Leftrightarrow}$:

1) z_0 - предельная точка области определения f;

2) z_0 - не является правильной точкой функции f.

В проколотой окрестности особой точки функцию можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z)|_{0<|z-z_0|<\delta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{4.1}$$

Определение.

z_0 называется устранимой особой точкой (у.о.т.) f, $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ она является особой, и разложение функции f в окрестности этой точки в ряд Лорана не содержит отрицательных степеней, или если $\exists w_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z), \quad w_0 \neq \infty$. Заметим, что тогда $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности z_0 ($\mathring{\omega}_\delta(z_0)$).

Определение.

У.о.т. z_0 называется нулём порядка N (нуль-N) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ разложение в $\mathring{\omega}_\delta(z_0)$ функции f в ряд Лорана имеет вид:

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_N \neq 0, \tag{4.2}$$

то есть первый ненулевой коэффициент в разложении стоит при степени N, а коэффициентов при отрицательных степенях нет.

Эквивалентные условия нуля-N функции f в точке z_0:

1)

$$f(z) = O^*\left((z-z_0)^N\right), \quad z \to z_0; \tag{4.3}$$

2)

$$\lim_{z\to z_0} f^{(n)}(z) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{4.4}$$

$$\lim_{z\to z_0} f^{(N)}(z) \neq 0; \tag{4.5}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3)

$$f(z) = \varphi(z)(z-z_0)^N, \quad \text{где } \varphi(z) \in C^\infty\left(\overset{\circ}{\omega}_\delta(z_0)\right), \tag{4.6}$$

$$\varphi(z_0) \neq 0. \tag{4.7}$$

Определение.

z_0 называется полюсом порядка N (полюс-N) функции $f \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_{-N} \neq 0, \tag{4.8}$$

то есть при разложении функции в ряд Лорана наименьшая отрицательная степень (наибольшая по модулю) равна $-N$, а у степеней ниже её стоят нулевые коэффициенты.

Эквивалентные условия полюса-N функции f в точке z_0:

1)

$$f(z) = O^*\left(\frac{1}{(z-z_0)^N}\right), \quad z \to z_0, \tag{4.9}$$

по сути, выражение (4.9) означает существование предела функции $f(z)\cdot(z-z_0)^N$, при $z \to z_0$.

2) Функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в точке z_0 нуль-N (аналогичное условие можно записать для нуля-N).

3)

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^N}, \quad \varphi \in C^\infty\left(\omega_\delta(z_0)\right), \varphi(z_0) \neq 0 \tag{4.10}$$

Определение.

z_0 называется существенно особой точкой (с.о.т.) функции f, если в разложении этой функции в ряд Лорана с центром в z_0 в главной части ряда бесконечно много членов. То есть не существует конечного или бесконечного предела в данной точке:

$$\begin{matrix} z_k \to z_0 \\ f(z_k) \not\to \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} z'_k \to z_0, z''_k \to z_0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} f(z'_k) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(z''_k) \end{matrix}$$

Определение.

Для функции $f(z)$ точка ∞ является особой точкой того же типа, что и точка 0 для функции: $f_1(w) := f\left(\frac{1}{w}\right)$, где $w := \frac{1}{z}$

Исследовать на особые точки

№1

$$f(z) = z^3 e^{-z^2} \tag{4.11}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Особая точка ∞:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} z^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n+3}, \tag{4.12}$$

то есть ∞ - существенно особая точка. Точка $z = 0$ - нуль-3.

№2

Пусть для функций f_1, f_2 точка z_0 является правильной или устранимой особой точкой, и $f_1 \not\equiv 0, f_2 \not\equiv 0$ в $\overset{\circ}{\omega}_\delta(z_0)$. Определить вид точки z_0 для функции f_1/f_2.

Имеем:

$$f_1\big|_{\overset{\circ}{\omega}_\delta(z_0)} = (z - z_0)^{N_1} \varphi_1(z), \quad \varphi_i(z_0) \neq 0, \quad \varphi_i \in C^\infty(\omega_\delta(z_0)), \tag{4.13}$$

$$f_2\big|_{\overset{\circ}{\omega}_\delta(z_0)} = (z - z_0)^{N_2} \varphi_2(z) \tag{4.14}$$

$$\left.\frac{f_1}{f_2}\right|_{\overset{\circ}{\omega}_\delta(z_0)} = (z - z_0)^{N_1 - N_2} \underbrace{\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}}_{\in C^\infty(\omega_{\delta'}(z_0))}, \tag{4.15}$$

где $0 < \delta' \leq \delta$.

Тогда, если $N_1 - N_2 \geq 0$, то z_0 - у.о.т. функции (4.15); если $N_1 - N_2 < 0$, то z_0 полюс функции (4.15).

№3

$$f(z) = \frac{\cos z - 1 - \frac{z^2}{2}}{z^4} \tag{4.16}$$

Особые точки: $0, \infty$.

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n)!} \tag{4.17}$$

Тогда 0 - у.о.т., которая не является нулём, поскольку:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \frac{(-1)^2}{4!} \tag{4.18}$$

Из (4.17) также можно увидеть, что ∞ - с.о.т.

№4

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 16)^3} \tag{4.19}$$

Особые точки: $0, \pm 4i, \infty$. Для $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{(z^2 + 16)^3}}_{\in C^\infty(\omega_\delta(0))}, \tag{4.20}$$

то есть 0 - полюс-2.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$z_1 = 4i$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{((z-4i)(z+4i))^3} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{(z-4i)^3}\cdot\frac{1}{(z+4i)^3} = \\ = \frac{1}{(z-4i)^3}\cdot\left(\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{(z+4i)^3}\right) \quad (4.21)$$

из (4.21) видно, что $z_1 = 4i$ - полюс-3. Аналогично можно показать, что $z_2 = -4i$ - полюс-3.

$z_3 = \infty$: Сделаем замену переменных $w := \frac{1}{z}$, тогда

$$f_1(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\frac{1}{w^2}\left(\frac{1}{w^2}+16\right)^3} = \frac{w^2}{\left(\frac{1}{w^2}+16\right)^3} = \frac{w^8}{(1+16w^2)^3}, \quad (4.22)$$

то есть $w_0 = 0$ - нуль-8 для функции $f_1(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Значит, $z_3 = \infty$ - нуль-8 для функции (4.19).

Утверждение

Если в окрестности ∞:

$$f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^N}\right), \quad (4.23)$$

где $N \in \mathbb{N}$, то $z = \infty$ - нуль-N функции $f(z)$.

Тогда:

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+16)^3} = O^*\left(\frac{1}{z^8}\right), \quad z \to \infty, \quad (4.24)$$

значит $z = \infty$ - нуль-8 функции (4.19).

№5

$$f(z) = e^{-\frac{1}{(z+1)^2}} \quad (4.25)$$

Особые точки:$z_0 = -1; z_1 = \infty$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{(z+1)^{2n}}, \quad (4.26)$$

при $z \neq 1, z \neq \infty$, значит $z_0 = -1$ - с.о.т.

Если $z \to \infty$, то $z+1 \to \infty \Leftrightarrow |z+1| \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{(z+1)^2} \to 0$. Тогда $e^{-\frac{1}{(z+1)^2}} \to 1 \Rightarrow z_1 = \infty$ - у.о.т., не являющаяся нулём.

№6

$$f(z) = z^2\cos\left(\frac{1}{z}\right) \quad (4.27)$$

Особые точки: $z_0 = 0, z_1 = \infty$. $z_0 = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n} z^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{3-2n}, \quad (4.28)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

значит $z_0 = 0$ - с.о.т.; $z_1 = \infty$ - полюс-3:

$$f_1(w) = \frac{1}{w^3}\cos w \Rightarrow w = 0 \text{ - полюс-3} \tag{4.29}$$

№7

$$f(z) = \frac{\cos z}{e^z - 1} \tag{4.30}$$

Особые точки: $z_k = 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad z = \infty$ - не изолированная особая точка.

Вспомним, что $\cos(iw) = \operatorname{ch} w; e^{2\pi ki} - 1 = 0$, тогда:

$$(e^z - 1)'\big|_{z=2\pi ki} = e^{2\pi ki} \neq 0 \Rightarrow z_k = 2\pi ki \text{ - для } e^z - 1 \text{ - нуль-1}$$

Значит $z_k = 2\pi ki$ - полюс-1.

№8

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} \tag{4.31}$$

Особые точки: $0; \infty; \frac{1}{\pi k}, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Заметим, что

$$\sin\left(\left(\frac{1}{\pi k}\right)^{n-1}\right) = 0 \Rightarrow \left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)' = -\frac{1}{z^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0, \tag{4.32}$$

то есть для знаменателя $\frac{1}{\pi k}$ - нуль-1, значит для функции (4.31) это полюс-1. Тогда 0 - не изолированная особая точка. ∞: сделаем замену переменной $w := \frac{1}{z}$, тогда

$$f_1(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\sin w} \tag{4.33}$$

Для $\sin w$ точка $w = 0$ - нуль-1, значит точка $z = \infty$ для функции (4.31) - полюс-1.

Убедимся в том, что $\sin w = 0 \Leftrightarrow w = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Пусть $w = x + iy$, учитывая то, что $|0| = 0$, и зная что при делении комплексных чисел их модули делятся получим:

$$0 = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \Rightarrow \left|e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right| = 0 \Rightarrow e^{-y} = e^{y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{2y} = 1 \Rightarrow y = 0 \tag{4.34}$$

№9

$$f(z) = e^{e^{1/z}} \tag{4.35}$$

Особые точки: $0, \infty$. Имеем:

$$\lim_{w\to 0} e^{e^w} = e \tag{4.36}$$

Значит ∞ - у.о.т., не нуль. Рассмотрим последовательности: $z'_n = \frac{1}{n}; \quad z''_n = -\frac{1}{n}$:

$$\left.\begin{array}{l} f(z'_n) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty \\ f(z''_n) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \end{array}\right| \Rightarrow z = 0 \text{ - с.о.т.} \tag{4.37}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Случай многозначных функций

Пусть $F(z)$ - многозначная функция.

Определение.

F распадается в области G на однозначные аналитические ветви $f_k, k \in N \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1)\forall k \in N & f_k \text{ - однозначные аналитические функции в } G, \\ 2)\forall z \in G & F(z) = \{f_k(z)\}_{k \in N} \end{cases},$$

где N не обязательно множество натуральных чисел.

Пример

$\sqrt[n]{z}$ распадается на ветви:

$$\varphi_k(z) = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n} + i\frac{2\pi k}{n}}, \tag{4.38}$$

где $\rho = |z|, \varphi \in (-\pi, \pi), \varphi \in \arg z; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$, f_k - однозначная аналитическая ветвь.

Для дальнейшего мы будем пользоваться понятием комплексной плоскости с разрезом - это комплексная плоскость без какого-то луча, выходящего из точки 0 (См. рис. 4.1).

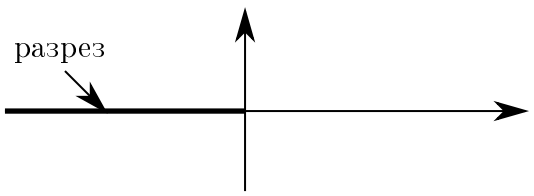

Рис. 4.1.

Определение.

Точка z_0 называется точкой ветвления многозначной функции $f(z)$, если:

1) В некоторой проколотой окрестности с разрезом (См. рис. 4.2) F распадается на однозначные аналитические ветви.

2) При однократном обходе точки z_0 внутри этой окрестности хотя бы одна из ветвей переходит в другую.

Пример1

Сузим аналитическую ветвь на контур на рис. 4.3 (окружность на комплексной плоскости с разрезом).

Рассмотрим изменение ветви вдоль этого контура (См. рис. 4.4): рассмотрим нулевую ветвь функции $\sqrt[n]{z}$. При подходе к разрезу сверху (верхний берег разреза) в пределе функция стремится к значению (это называется значением функции на верхнем берегу разреза) $f_0 \to \sqrt[n]{\rho}$. При обхождении этого контура эта функция будет получать прирост к аргументу её значения, и после полного обхода на нижнем берегу разреза у функции будет значение $f_0 \to \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Рассмотрим первую ветвь

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

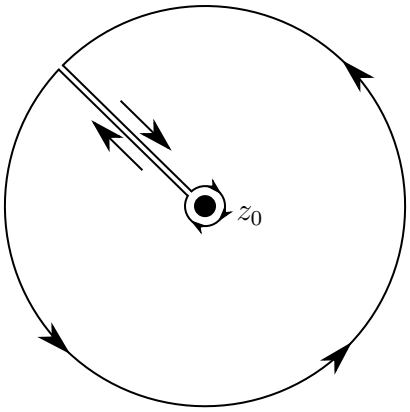

Рис. 4.2. Окрестность с разрезом

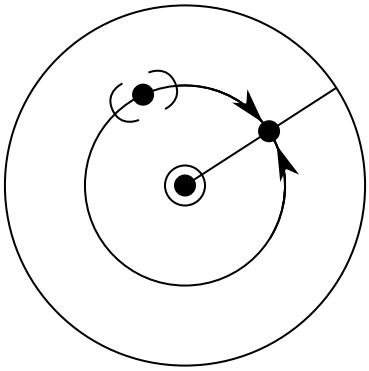

Рис. 4.3.

функции $\sqrt[n]{z}$. На верхнем берегу разреза она имеет значение $f_1 \to \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{2\pi}{n}}$, которое равно значению нулевой ветви f_0 на нижнем берегу разреза. То есть при полном обходе точки z_0 (центра окружности) по нашему контуру от верхнего берега разреза до нижнего нулевая ветвь приняла в конце обхода значение первой ветви в начале обхода. Это и означает, что нулевая ветвь перешла в первую.

Пример2

Рассмотрим точки ветвления функции $\sqrt{1+z^2} = \sqrt{(z+i)(z-i)}$ (См. рис. 4.5).

Эта функция состоит из произведения двух функций, у которых разные точки ветвления $(i, -i)$. При обходе, например точки i, сделав замену переменной $w = z-i$, становится ясно, что при обходе этой точки внутри её проколотой окрестности с разрезом, функция $\sqrt{z-i}$ получает прирост аргумента на 2π, в то время, как функция $\sqrt{z+i}$ не получает прироста к аргументу, в таком случае, аргумент произведения получает прирост на 2π, и это означает, что одна ветвь при обходе переходит в другую, то есть точка $z = i$ - это точка ветвления функции $\sqrt{1+z^2} = \sqrt{(z+i)(z-i)}$. Аналогично для точки $z = -i$. При обходе точки ∞ каждый из сомножителей получает прирост к аргументу на 2π, тогда аргумент произведения получает прирост на 4π, тогда при обходе точки ∞ функция домножается на $e^{i\frac{\Delta\varphi}{n}} = e^{i\frac{4\pi}{2}} = e^{2\pi i} = 1$, то есть ветвь корня переходит сама в себя при обходе точки ∞, а значит точка $z = \infty$ не является точкой ветвления.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

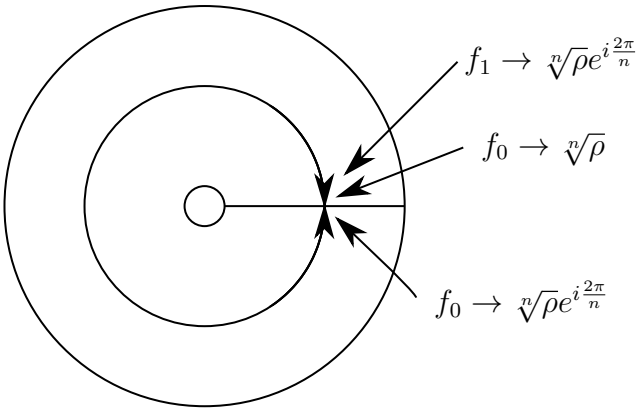

Рис. 4.4.

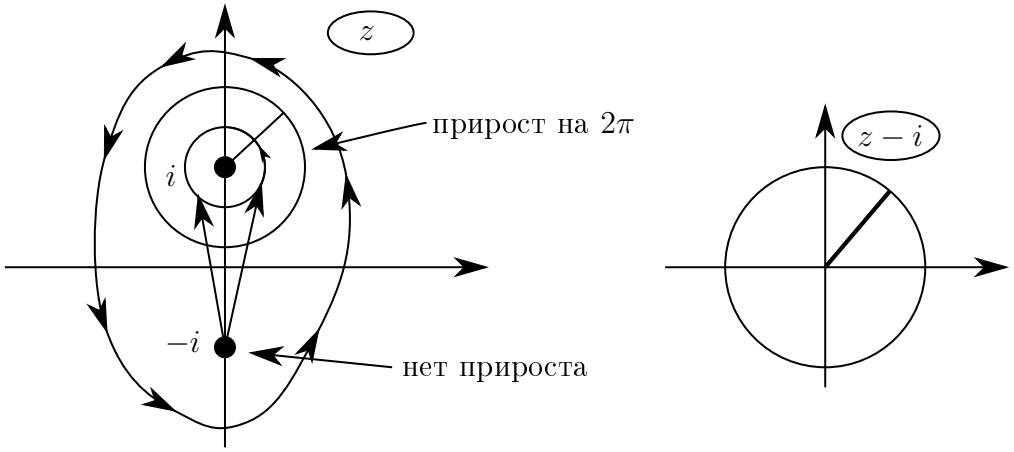

Рис. 4.5.

Семинар 5

Вычисление вычетов

Понятие вычета

Определение.

Пусть z_0 - изолированная особая точка (и.о.т.), или правильная точка, функции f (пусть для определённости $z_0 \neq 0$). Тогда вычетом функции f в точке z_0 (обозначается $res\,[f(z), z_0]$) называется выражение:

$$res\,[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{c^+} f(z)dz = c_{-1}, \tag{5.1}$$

где c^+ замкнутый контур (обходится в положительном направлении), который содержит в себе точку z_0 и не содержит других особых точек функции $f(z)$ (См. рис. 5.1).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

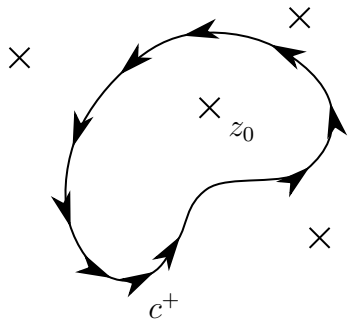

Рис. 5.1.

Вычетом в точке $z_0 = \infty$ называется выражение:

$$res\,[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c^+} f(z)dz = -c_{-1}, \tag{5.2}$$

где c^+ - замкнутый контур (обходится в положительном направлении), который содержит в себе все особые точки функции $f(z)$, кроме точки $z_0 = \infty$ (См. рис. 5.2).

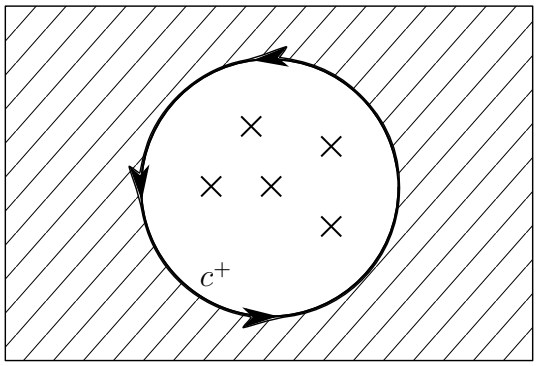

Рис. 5.2.

Пусть $z_0 \neq \infty$, тогда

$$f(z)|_{0<|z-z_0|<\delta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{5.3}$$

Если $z_0 = \infty$, то

$$f(z)|_{|z|>R} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{5.4}$$

Замечание 1
Если $z_0 \neq \infty$ - правильная или у.о.т., то

$$res\,[f(z), z_0] = 0, \tag{5.5}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

но обратное неверно (если вычет в точке равен нулю, то это не значит, что эта точка правильная или устранимая особая).

Замечание 2

Если $z_0 = \infty$ - у.о.т., то нельзя утверждать, что $res\,[f, \infty] = 0$.

Если $f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^m}\right); z \to \infty; m \geq 2$, то $res\,[f, \infty] = 0$.

Теорема

Пусть D - ограниченная область с кусочно гладкой границей. Пусть f - аналитична в D, кроме конечного числа точек $z_1, \ldots, z_n \in D$, и f - непрерывна в $\overline{D} \backslash \{z_1, \ldots, z_n\}$. Тогда

$$\oint\limits_{(\partial D)^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\,[f, z_k] \tag{5.6}$$

Теорема

Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{C} \backslash \{z_1, \ldots, z_n\})$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} res\,[f, z_k] + res\,[f, \infty] = 0 \tag{5.7}$$

Заметим, что $res\,[f, \infty]$ - это то же, что c_{-1} в разложении функции f в ряд Лорана в окрестности ∞. В окрестности нуля:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \tag{5.8}$$

Сделав замену $\left(f_1(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)\right)$, получим

$$f_1(w)|_{|w|<\frac{1}{R}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} w^n \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m w^m, \tag{5.9}$$

тогда $c_{-1} = b_1 \Rightarrow res\,[f, \infty] = -b_1$.

Вычисление вычетов: разложением в ряд Лорана

Найти вычеты функций в изолированных особых точках

№1

$$f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^7} \tag{5.10}$$

Особые точки: $0, \infty$

$z = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot z^{-7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n-5}}{(2n+1)!} \Rightarrow c_{-1} = -\frac{1}{6} \tag{5.11}$$

Значит $res\,[f, 0] = -\frac{1}{6}; \quad res\,[f, \infty] = \frac{1}{6}$.

№2

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$f(z) = z \cdot e^{\frac{1}{z-1}} \tag{5.12}$$

Особые точки: $1, \infty$.

$z = 1$:

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n} = [(z-1)+1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n} \Rightarrow c_{-1} = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow res\,[f,1] = \frac{3}{2} \Rightarrow res\,[f,\infty] = -\frac{3}{2} \tag{5.13}$$

№3

$$f(z) = \frac{1}{z^9 - z^{11}} \tag{5.14}$$

Особые точки: $0, 1, -1, \infty$.

$z = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{z^9 - z^{11}} = \frac{1}{z^9} \cdot \frac{1}{(1-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-9}, \quad |z| < 1 \tag{5.15}$$

Значит $c_{-1} = 1 \Rightarrow res\,[f,0] = 1$.

$z = \infty$:

$$f(z)\frac{1}{z^{11}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z^2} - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+11}}, \quad |z| > 1 \Rightarrow res\,[f,\infty] = -c_{-1} = 0 \tag{5.16}$$

Или

$$f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^{11}}\right), \quad z \to \infty \Rightarrow res\,[f,\infty] = 0 \tag{5.17}$$

Аналогично с точками $1, -1$.

№4

$$f(z) = \ln\left(\frac{z+3}{z}\right) \tag{5.18}$$

Особая точка: ∞. Сделаем замену переменной: $w := \frac{1}{z} \Rightarrow \ln(1+3w)$. Выберем разрез, соответствующий главной ветви логарифма (См. рис. 5.3).

$$\ln(1+3w) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2w)^k}{k} \Rightarrow -b_1 = -3 = res\,[f,\infty] \tag{5.19}$$

№5

Утверждение

Если функция f - чётная, а точка 0 - и.о.т., то $res\,[f,0] = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(f(z) + f(-z)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (-z)^n\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k} z^{2k} \Rightarrow c_{-1} = 0 \tag{5.20}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

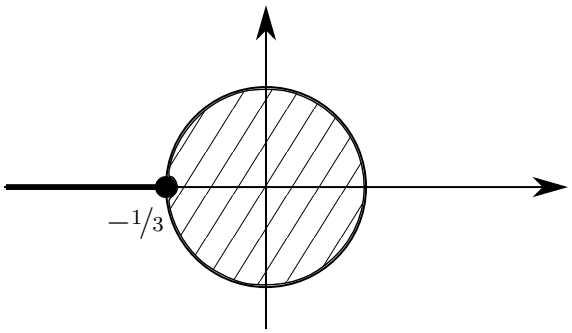

Рис. 5.3.

Вычисление вычетов: другие методы

Пусть z_0 - полюс-n. Тогда
А)

$$res\,[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (f(z)(z-z_0)^n) \tag{5.21}$$

Доказательство
Имеем:

$$f(z)|_{0<|z-z_0|<\delta} = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (z-z_0)^n\, f(z)|_{0<|z-z_0|<\delta} = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z-z_0)^n\, f(z)|_{0<|z-z_0|<\delta} = (n-1)!c_{-1} + A_n c_0 (z-z_0) + \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z-z_0)^n\, f(z)|_{0<|z-z_0|<\delta} = (n-1)!c_{-1} \tag{5.22}$$

А!) Пусть z_0 - полюс-1. Тогда

$$res\,[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0) \tag{5.23}$$

А!!) Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функция $\varphi(z)$ имеет в точке z_0 нуль-$(k-1)$, а функция $\psi(z)$ имеет в точке z_0 нуль-k, то функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс -1. Тогда

$$res\,[f, z_0] = k \cdot \frac{\varphi^{(k-1)}(z_0)}{\psi^{(k)}(z_0)} \tag{5.24}$$

А!!!) Если при этом $k = 1$, то (5.24) примет вид:

$$res\,[f, z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \tag{5.25}$$

№6

$$f(z) = \frac{1}{z^9 - z^{11}} \tag{5.26}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Посчитаем вычеты в точках $1, -1$. Заметим, что в этих точках (5.26) имеет полюса-1. Тогда можно применить (A!!!) (5.25):

$$res\,[f,1] = \frac{1}{9z^8 - 11z^{10}}\bigg|_{z=1} = -\frac{1}{2}; \tag{5.27}$$

$$res\,[f,-1] = \frac{1}{9z^8 - 11z^{10}}\bigg|_{z=-1} = -\frac{1}{2} \tag{5.28}$$

или по формуле (5.23)(A!):

$$\frac{z-1}{z^9 - z^{11}}\bigg|_{z=1} = \frac{\cancel{(z-1)}^{-1}}{\cancel{(1-z)}^{1}(1+z)z^9}\bigg|_{z=1} = -\frac{1}{2} \tag{5.29}$$

№7

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+4} \tag{5.30}$$

Найдём вычеты в точках: $z = 2i; z = -2i$. В этих точках функция имеет полюс-1, тогда можно применить соотношение (5.25) (A!!!):

$$res\,[f,2i] = \frac{e^z}{2z}\bigg|_{2i} = \frac{e^{2i}}{4i} = \frac{\cos 2 + i\sin 2}{4i} = \frac{\sin 2}{4} - i\frac{\cos 2}{4} \tag{5.31}$$

Аналогично с точкой $z = -2i$.

№8

$$f(z) = \frac{z^3}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}} \tag{5.32}$$

Найдём вычет в нуле. Используя (5.21) (A):

$$res\,[f,0] = 4 \cdot \frac{6}{\frac{4!}{4!}} = 24 \tag{5.33}$$

или, используя (5.23):

$$f(z)\cdot z = \frac{z^4}{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}} = \frac{z^4}{\frac{z^4}{24} + o(z^4)} = \frac{1}{\frac{1}{24} + o(1)} \to 24 \tag{5.34}$$

№9

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-a)^5} \tag{5.35}$$

Найдём вычет в точке a.

Заметим, что формула (5.21) будет работать при $n = N_0$, даже если функция имеет полюс-N ($N < N_0$) (То есть можно ошибиться с порядком полюса в большую сторону, при такой ошибке формула (5.21) всё равно даст верный результат). Тогда,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

используя (5.21), и заметив, что вне зависимости от значения a функция (5.35) имеет в точке a полюс порядка не выше 5, получим:

$$res\,[f,a]=\frac{1}{4!}\lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\right)^4\left(\frac{\sin z}{(z-a)^5}(z-a)^5\right)=\frac{1}{4!}\sin a=\frac{\sin a}{24} \tag{5.36}$$

№10

$$f(z)=\frac{z^{n-1}}{(\sin z)^n},\quad z_0=0 \tag{5.37}$$

Используя (5.23)(A!) получим:

$$res\,[f,0]=\lim_{z\to 0}z\cdot f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^n}{(\sin z)^n}=1 \tag{5.38}$$

№11

$$f(z)=\frac{z}{\operatorname{ch}z-1-\frac{z^2}{2}},\quad z_0=0 \tag{5.39}$$

Учтём, что:

$$\operatorname{ch}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{5.40}$$

Используя (A):

$$res\,[f,0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^2\left(z^3f(z)\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^2\left(\frac{z\cdot z^3}{\operatorname{ch}z-1-\frac{z^2}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\underbrace{\frac{z^4}{\operatorname{ch}z-1-\frac{z^2}{2}}}_{\frac{1}{g(z)}}\right) \tag{5.41}$$

В соответствии с введённым обозначением:

$$g(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{2n-4}}{(2n)!} \tag{5.42}$$

Учитывая, что первая производная функции (5.42) в нуле равна нулю (как и производные нечётных порядков), и то что:

$$g''(0)=2\cdot\frac{1}{6!};\quad g(0)=\frac{1}{4!} \tag{5.43}$$

получим

$$\left(\frac{1}{g(z)}\right)''\Big|_0=\left(-\frac{g'}{g^2}\right)'\Big|_0=-\left.\frac{g''g^2-g'\cdot 2gg'}{g^4}\right|_0=-\left.\frac{g''}{g^2}\right|_0+\left.\frac{2(g')^2}{g^3}\right|_0=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{6!}}{\left(\frac{1}{4!}\right)^2}=-\frac{(4!)^2}{6!}=-\frac{4!}{5\cdot 6}=-\frac{4}{5} \tag{5.44}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

№12

$$f(z) = e^{e^{\frac{1}{z}}} \tag{5.45}$$

Особые точки: $0, \infty$. Сделаем замену переменной $w = \frac{1}{z}$:

$$e^{e^w} \tag{5.46}$$

Из (5.46) можно увидеть, что для (5.45) ∞ - у.о.т.

Имеем

$$res\,[f, \infty] = -b_1 \tag{5.47}$$

$$f_1(w) = b_0 + b_1 w + \ldots \Rightarrow -b_1 = -f_1'(0) = -\left. e^{e^w} \cdot e^w \right|_0 = -e \Rightarrow res\,[f, \infty] = -e \tag{5.48}$$

В полюсе-N в ∞:

$$res\,[f(z), \infty] = -\frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{d^{(N+1)}}{dw^{(N+1)}} \left(w^N \cdot f_1(w) \right)\Big|_{w=0}, \tag{5.49}$$

где $w = \frac{1}{z}; f_1(w) = f\left(\frac{1}{w}\right), \quad N = n$, если ∞ - полюс-n; $N + 0$, если ∞ - у.о.т.

Если ∞ - у.о.т., то

$$res\,[f, \infty] = -\lim_{z \to \infty} z\,(f(z) - f(\infty)), \tag{5.50}$$

где

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z) \tag{5.51}$$

№13

Для функции

$$f(z) = \cos\left(\frac{(\sqrt{z})^{2n-1}}{1 + z + \cdots + z^n} \right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.52}$$

доказать, что ∞ - и.о.т., найти $res\,[f, \infty]$.

Разберёмся с областями однозначности функции (5.52). Выберем на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной вещественной оси контур (обходящийся в положительном направлении), который содержит нули знаменателя (См. рис. 5.4).

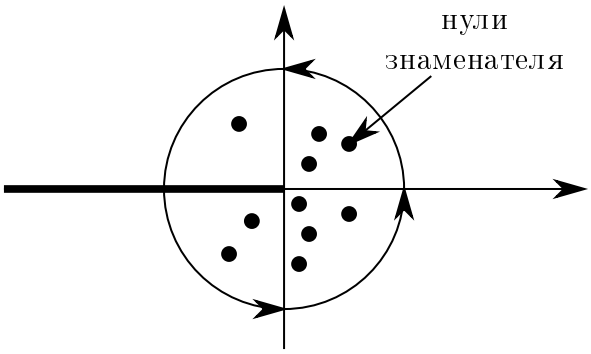

Рис. 5.4.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Несмотря на то, что при обходе этого контура ветвь корня переходит в другую ветвь, функция cos, для которой корень является аргументом, переходит сама в себя. В таком случае функцию можно доопределить до аналитичной в любой точке разреза, то есть функция (5.52) аналитична в окрестности ∞. Нетрудно увидеть, что $f(\infty) = 1$. Тогда получим, с учётом (5.50), что

$$res\,[f,\infty] = -\lim_{z\to\infty} z\left(\cos\left(\underbrace{\frac{(\sqrt{z})^{2n-1}}{1+\cdots+z^n}}_{\to 0}\right) - 1\right) =$$

$$= \lim_{z\to\infty} z\left(\frac{z^{2n-1}}{2\cdot(1+\cdots+z^n)^2} + o(\dots)\right) =$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left(\frac{z^{2n}}{2\cdot(1+\cdots+z^n)^2} + o\,(\dots)\right) = \frac{1}{2} \quad (5.53)$$

Таким образом, получаем:

$$res\,[f,\infty] = \frac{1}{2} \quad (5.54)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 6

Лемма Жордана

Рассмотрим интегралы:

$$I_C = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(ax) f(x) dx, \tag{6.1}$$

$$I_S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax) f(x) dx, \tag{6.2}$$

где функция f при действительных x принимает действительные значения, a - действительное.

Тогда можно записать $I_C = \operatorname{Re} I; I_S = \operatorname{Im} I$, где

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx, \tag{6.3}$$

где функция f такая, что $f|_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R}$.

Чтобы взять интеграл от комплексной переменной по действительной оси можно зафиксировать некоторое действительное R и взять интеграл по замкнутому контуру от $-R$ до R и по дуге окружности $C_{R'}$ (См. рис. 6.1), а потом устремить R к ∞. Потом из полученного значения вычесть значение интеграла по дуге окружности с устремлённым к бесконечности радиусом этой окружности.

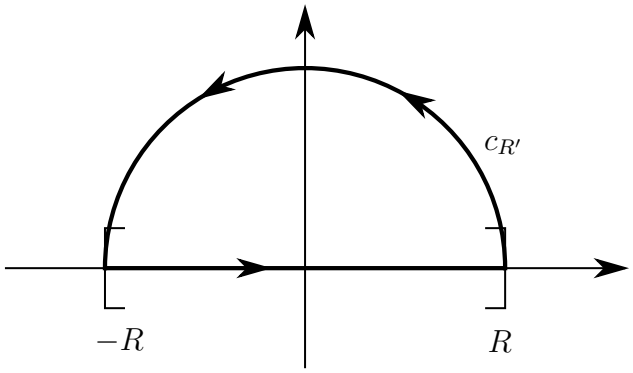

Рис. 6.1.

Наложим ограничения на функцию f в верхней полуплоскости (в.п.). Пусть 1)$f \in C^\infty(\text{в.п.} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$; $f \in C(\text{в.п.} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}), \operatorname{Im} z_k > 0$.

Лемма

Пусть выполнены условия:

1) Выполнено условие выше (условие 1));

2) $f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^\delta}\right), \delta > 0$ при $|z| \to \infty; \operatorname{Im} z \geq 0$;

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3) $a > 0$.

Тогда

$$\int\limits_{C_{R'}} e^{iaz} f(z)dz \to 0, \quad R \to +\infty \tag{6.4}$$

Аналогичное утверждение верно для дуги в секторе в в.п. №1

$$I(a) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx, \quad a > 0 \tag{6.5}$$

Заметим, что

$$I(a) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}dx \tag{6.6}$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty} I_{1R} = I_1 \tag{6.7}$$

Введём обозначения:

$$\widetilde{f}(z) = \frac{e^{iax}}{1+z^2}; \quad f(z) = \frac{1}{1+z^2} \tag{6.8}$$

Замкнём отрезок $[-R, R]$ дугой (См. рис. 6.2) и вычислим интеграл по этому контуру при $R \to \infty$

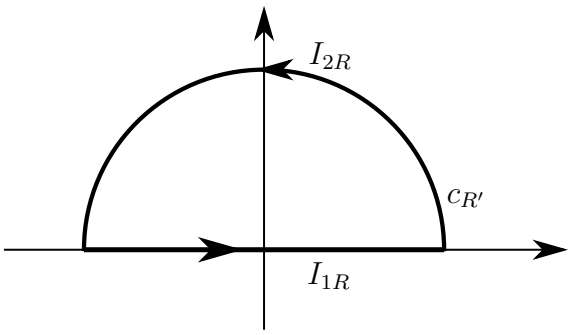

Рис. 6.2.

Получим, что этот интеграл равен:

$$\underbrace{I_{1R}}_{\to I_1} + \underbrace{I_{2R}}_{\to 0} = 2\pi i \; res\left[\widetilde{f}, i\right] = 2\pi i \frac{e^{iaz}}{2z}\bigg|_{zi} = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a} \tag{6.9}$$

В итоге, имеем:

$$I(a) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\pi e^{-a} = \frac{1}{2}\pi e^{-a} \tag{6.10}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

№2

$$I(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx \tag{6.11}$$

Нельзя написать, что (6.11) - это:

$$\operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta x}}{x} dx, \tag{6.12}$$

так как интеграл (6.12) расходится при $x \to 0$. Тогда запишем:

$$I(\beta) = \frac{1}{2} \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \delta \to +0}} \left(\int\limits_{-R}^{-\delta} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx + \int\limits_{\delta}^{R} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx \right) \tag{6.13}$$

Имеем:

$$I_{1\delta R} = \operatorname{Im} \left(\int\limits_{R}^{-\delta} \frac{e^{i\beta x}}{x} dx + \int\limits_{\delta}^{R} \frac{e^{i\beta x}}{x} dx \right) \tag{6.14}$$

Тогда при замыкании контура нужно учесть обход нуля (См. рис. 6.3).

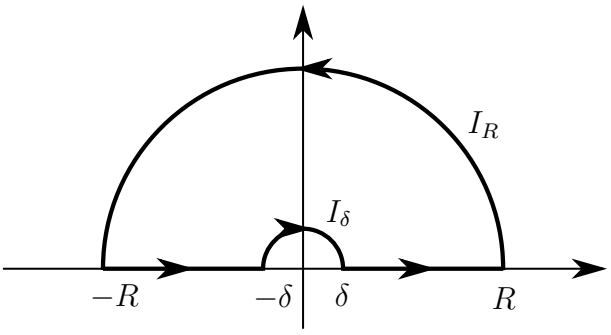

Рис. 6.3.

Аналитическое продолжение подынтегральной функции на комплексную плоскость:

$$\widetilde{f}(z) = \frac{e^{i\beta z}}{z} \tag{6.15}$$

Тогда имеем:

$$\underbrace{I_{1\delta R}}_{\to I_1} + \underbrace{I_\delta}_{\to ?} + \underbrace{I_R}_{\to 0} = 0 \tag{6.16}$$

Найдём, чему равен интеграл I_δ поскольку модуль z на дуге равен δ, то сделаем замену:

$$\begin{aligned} z &= \delta e^{i\varphi} \\ dz &= \delta i e^{i\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда

$$I_\delta = \int\limits_\pi^0 \frac{e^{i\beta\delta e^{i\varphi}}}{\delta e^{i\varphi}} \delta i e^{i\varphi} d\varphi = \int\limits_\pi^0 e^{i\beta\delta e^{i\varphi}} i d\varphi = i \int\limits_\pi^0 e^{i\beta\delta e^{i\varphi}} d\varphi \overset{\delta\to 0}{\to} -i\pi \tag{6.17}$$

Значит

$$I_\delta \to -i\pi \Rightarrow I_1 = i\pi, \tag{6.18}$$

где

$$I_1 = \lim_{\substack{\delta \to +0 \\ R \to +\infty}} \left(\int\limits_{-R}^{-\delta} + \int\limits_\delta^R \right) \frac{e^{i\beta x}}{x} dx \to i\pi \tag{6.19}$$

В дальнейшем для краткости записи будем пользоваться этим обозначением:

$$\left(\int\limits_a^b + \int\limits_c^d \right) f(z)dz \equiv \int\limits_a^b f(z)dz + \int\limits_c^d f(z)dz \tag{6.20}$$

Воспользуемся тем, что в нашем случае:

$$\lim \operatorname{Im} F(\delta, R) = \operatorname{Im} \lim F(\delta, R), \tag{6.21}$$

тогда

$$\operatorname{Im} I_1 = \pi \Rightarrow I(\beta) = \frac{\pi}{2}, \quad \beta > 0, \tag{6.22}$$

а в общем случае:

$$I(\beta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta \tag{6.23}$$

№3

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx \tag{6.24}$$

Рассмотрим функцию:

$$f(z) = \frac{z}{1+z^3} \tag{6.25}$$

Заметим, что ввиду областей однозначности этой функции значения её на положительной вещественной оси совпадают со значениями на луче повёрнутом на угол $\frac{2\pi}{3}$ против часовой стрелки (См. рис. 6.4).

Тогда:

$$f\left(xe^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}} f(x), \tag{6.26}$$

так как

$$\left(xe^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = x^3 e^{i2\pi} = x^3 \tag{6.27}$$

Свяжем значения интегралов по положительному вещественному лучу и по лучу, повёрнутому на угол $\frac{2\pi}{3}$ (См. рис. 6.5).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

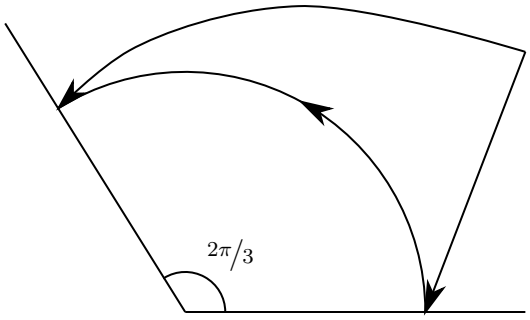

Рис. 6.4.

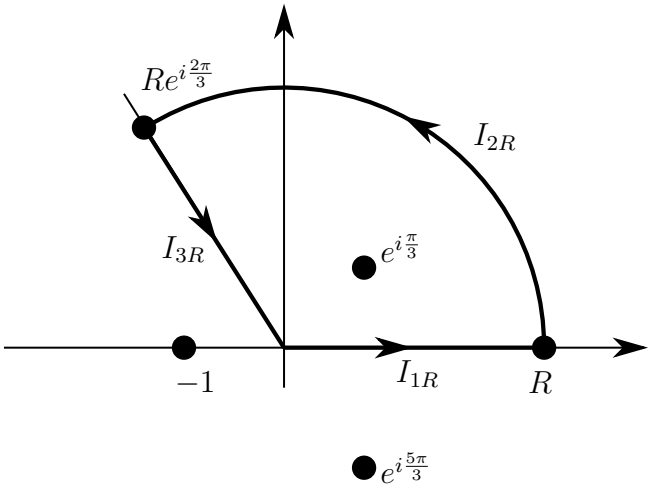

Рис. 6.5.

Имеем

$$I_{1R} = \int\limits_0^R \frac{x}{1+x^3}dx; \quad I_{3R} = \int\limits_{Re^{i\frac{2\pi}{3}}}^0 \frac{z}{1+z^3}dz \tag{6.28}$$

Сделаем замену переменной: $z = te^{i\frac{2\pi}{3}}$, тогда

$$I_{3R} = \int\limits_R^0 \frac{te^{i\frac{2\pi}{3}}}{1+t^3e^{i2\pi}}dte^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot (-I_{1R}) \tag{6.29}$$

В итоге, имеем:

$$I_{1R} + I_{2R} + I_{3R} = 2\pi i \left.\frac{z}{3z^3}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}} \Rightarrow I_{1R}\left(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) + I_{2R} = \frac{2\pi i}{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} \overset{R\to\infty}{\to}$$
$$\overset{R\to\infty}{\to} I\left(1 - e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right) + 0 = \frac{2\pi i}{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow I = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{2\pi i}{3}\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}} =$$
$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(-1)}{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{3}\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \tag{6.30}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

№4

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx, \quad 0 < p < 1 \tag{6.31}$$

Учтём, что областью однолистности этой функции будет комплексная плоскость с разрезом (См. рис. 6.6).

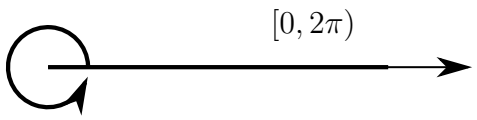

Рис. 6.6.

Определим однозначную ветвь функции z^{p-1}, как:

$$g(z) := |z|^{p-1} e^{i(p-1)\arg z}, \qquad \text{где } \arg z \in [o, 2\pi) \tag{6.32}$$

Тогда значения функции на вещественной положительной полуоси - это предел ветви (6.32) сверху. Предел этой ветви снизу будет иметь вид:

$$g(xe^{i2\pi}) = g(z) \cdot e^{i(p-1)2\pi} \tag{6.33}$$

С учётом обхода нуля и области однолистности контур, по которому будем брать интеграл будет проколотой окрестностью нуля с разрезом (См. рис. 6.7). Тогда

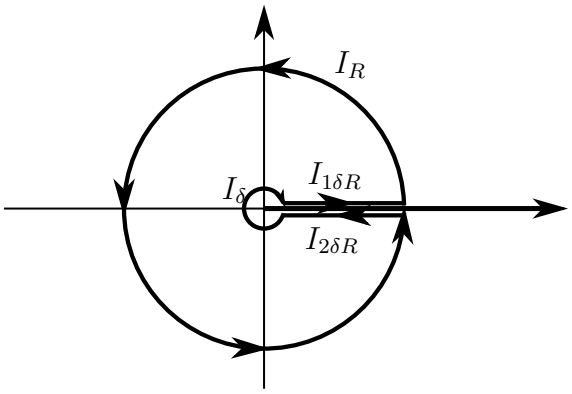

Рис. 6.7.

$$I(p) = \lim_{\substack{\delta \to +0 \\ R \to +\infty}} \int\limits_\delta^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \lim_{\substack{\delta \to +0 \\ R \to +\infty}} I_{1\delta R} \tag{6.34}$$

Свяжем значение функции на нижнем берегу разреза со значением её на верхнем берегу:

$$f\left(xe^{2\pi i}\right) = e^{i(p-1)2\pi} f(x) \tag{6.35}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда

$$I_{2\delta R} = -e^{i(p-1)2\pi} I_{1\delta R} \tag{6.36}$$

Заметим, что

$$f(z) \underset{|z|\to+\infty}{=} O^*\left(\frac{1}{z^{2-p}}\right), \quad 2-p>1 \Rightarrow I_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0 \tag{6.37}$$

Для интеграла по малой окружности:

$$I_\delta : |f(z)| = O^*\left(|z|^{p-1}\right), \tag{6.38}$$

где

$$f(z) = \frac{g(z)}{1-z} = \frac{z^{p-1}}{1-z} \tag{6.39}$$

Заметим, что поскольку на окружности радиуса δ: $|z| = \delta$, то можно ввести оценку для интеграла I_δ:

$$|I_\delta| \le 2\pi\delta \cdot \sup_{C_\delta} |f(z)| = C \cdot \delta^p \overset{\delta\to+0}{\to} +0 \tag{6.40}$$

Тогда, зная вычет функции (6.31) в точке -1, получим:

$$\underbrace{I_{1\delta R}}_{\to I} + \underbrace{I_R}_{\to 0} + \underbrace{I_{2\delta R}}_{\to -e^{i(p-1)2\pi} I} + \underbrace{I_\delta}_{\to 0} = 2\pi i e^{i(p-1)\pi}, \tag{6.41}$$

поскольку вычет берётся с условием ограничения на аргумент (6.32) ($-1 = e^{i\pi}$):

$$res\left[\frac{g(z)}{1+z}, -1\right] = g(z)\big|_{z=-1} \tag{6.42}$$

Таким образом, в пределе при $\delta \to +0; R \to +\infty$ получим:

$$I\left(1 - e^{i(p-1)2\pi}\right) = 2\pi i e^{i(p-1)\pi} \Rightarrow I = 2\pi i \frac{e^{i(p-1)\pi}}{1 - e^{i(p-1)2\pi}} =$$
$$= \pi \cdot \frac{2i}{e^{-i(p-1)\pi} - e^{i(p-1)\pi}} = \frac{\pi}{-\sin(\pi(p-1))} = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-p))} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \tag{6.43}$$

Если бы был интеграл:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx, \quad 0 < p < 1, \tag{6.44}$$

то вычеты считались бы в особых точках $\pm i$:

$$res\,[\dots] = \left.\frac{g(z)}{2z}\right|_{\pm i}, \tag{6.45}$$

где значения функции в точках $\pm i$ тоже вычислялись бы с условием ограничения на аргумент (6.32):

$$g(i) = e^{i\frac{\pi}{2}(p-1)}; \quad g(-i) = e^{i\frac{3\pi}{2}(p-1)} \tag{6.46}$$

Семинар 7

Преобразование Лапласа и его свойства

Понятие преобразования Лапласа

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Пусть функция f удовлетворяет следующим свойствам:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

2) На любом отрезке на $0, +\infty$ функция f кусочно непрерывна.

3) $\exists a \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} \forall t > 0 : |f(t)| \leq Me^{a't}$, где

$$a := \inf \left\{ a' \in \mathbb{R} | \exists M \in \mathbb{R} \forall t > 0 \, |f(t)| \leq Me^{a't} \right\} \tag{7.1}$$

Число a называется показателем степени роста функции f.

Для такой функции f можно ввести преобразование Лапласа:

$$F(p) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \quad \operatorname{Re} p > a \tag{7.2}$$

Функция $F(p)$ называется изображением функции $f(t)$.

Лемма

Пусть f определена при всех $t \geq 0$ и пусть при некотором $p_0 \in \mathbb{C}$ сходится интеграл:

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-p_0 t}dt \tag{7.3}$$

Тогда $F(p)$ определена при всех $p : \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$. $F(p)$ является аналитической функцией.

Функцию $F(p)$ из (7.2) будем обозначать так: $f(t) \doteq F(p)$ и наоборот $F(p) \doteq f(t)$.

Свойства преобразования Лапласа

Пусть $f_k(t) \doteq F_k(p), \quad k = 1, 2$. Тогда для этих функций справедливы следующие свойства:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \doteq \alpha F_1(p) + \beta F_2(p) \tag{7.4}$$

при $\operatorname{Re} p > \max\{a_1, a_2\}$, где a_1, a_2 - показатели роста функций f_1, f_2.

2)

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0 \tag{7.5}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(\underbrace{\alpha t}_{s}\right) e^{-pt}dt = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} f(s)e^{-\frac{s}{\alpha}p}ds = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \tag{7.6}$$

3) Пусть функция f сдвигается по вещественной оси на τ (См. рис. 7.1). Тогда

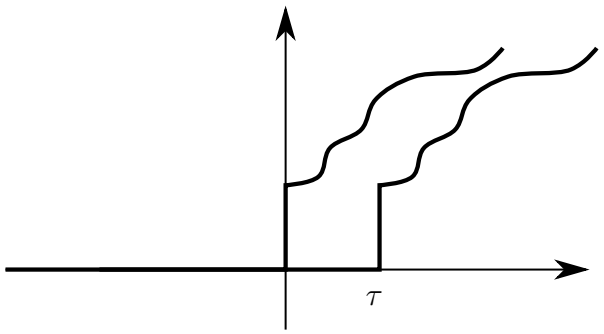

Рис. 7.1.

$$f_\tau(t) := \begin{cases} 0, t < \tau \\ f(t-\tau), t > \tau \end{cases} \tag{7.7}$$

В таком случае преобразование Лапласа такой функции будет иметь вид:

$$\int\limits_0^{+\infty} f_\tau(t)e^{-pt}dt = \int\limits_\tau^{+\infty} f(\underbrace{t-\tau}_{s})e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} f(s)e^{-(s+\tau)p}ds = e^{-p\tau}F(p) \tag{7.8}$$

4)

$$f^{(n)}(t) \doteq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n)}(0) \tag{7.9}$$

Выведем соотношение (7.9) для первой производной. Интегрируя по частям, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt = -f(0) + pF(p) \tag{7.10}$$

5) Нетрудно увидеть, подставив в (7.10), что

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \doteq \frac{1}{p}F(p) \tag{7.11}$$

6) Для свёртки

$$\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \doteq F_1(p)F_2(p) \tag{7.12}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

7)
$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t) \tag{7.13}$$

8)
$$\int\limits_p^{+\infty} F(q)dq \doteq \frac{f(t)}{t} \tag{7.14}$$

9) Поскольку
$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(p+\lambda)t}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}f(t)e^{-pt}dt \tag{7.15}$$
то
$$F(p+\lambda) \doteq e^{-\lambda t}f(t) \tag{7.16}$$

Изображения некоторых элементарных функций

1)
$$1 \equiv \sigma(t) := \begin{cases} 0, t<0, \\ 1, t>0 \end{cases} \doteq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0 \tag{7.17}$$

2) Функция t^n. Можно представить её, как функцию 1 (для которой $F(p) = \frac{1}{p}$), которую домножили на t^n, тогда согласно (7.13):
$$t^n \doteq (-1)^n F^{(n)}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0 \tag{7.18}$$

3) $e^{\alpha t}$. Из (7.16), (7.17) получим
$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha \tag{7.19}$$

4) $t^n e^{\alpha t}$. Из (7.16), (7.18) получим
$$t^n e^{\alpha t} \doteq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}} \tag{7.20}$$

5) $\cos(\omega t)$:
$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \\ = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega| \tag{7.21}$$

6) $\sin(\omega t)$:
$$\sin(\omega t) \doteq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega| \tag{7.22}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

7) $t\cos(\omega t)$. Из (7.13), (7.21):

$$t\cos(\omega t) \doteqdot -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right) = -\frac{p^2+\omega^2-p\cdot 2p}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2} \tag{7.23}$$

8) $t\sin(\omega t)$. Из (7.13), (7.22):

$$t\sin(\omega t) \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2} \tag{7.24}$$

9) $e^{\alpha t}\cos(\omega t)$.Из (7.16), (7.21):

$$e^{\alpha t}\cos(\omega t) \doteqdot \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha + |\operatorname{Im}\omega| \tag{7.25}$$

10) $e^{\alpha t}\sin(\omega t)$. Из (7.16), (7.22):

$$e^{\alpha t}\sin(\omega t) \doteqdot \frac{\omega^2}{(p-\alpha)^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha + |\operatorname{Im}\omega| \tag{7.26}$$

Решение задачи Коши для линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. Интеграл Меллина

Решить задачу Коши используя преобразование Лапласа. Чтобы это сделать производят преобразование Лапласа над левой и правой частями уравнения, что сводит дифференциальное уравнение к алгебраическому. Далее из полученного алгебраического уравнения находят изображение искомой функции и находят искомую функцию по её изображению

№1

$$\begin{cases} y'' + y = t\sin t, \quad t > 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases} \tag{7.27}$$

Пусть $y \doteqdot Y$. Тогда

$$y'' \doteqdot p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - p \tag{7.28}$$

Заметим, что

$$t\sin t \doteqdot \frac{2p}{(p^2+1)^2} \tag{7.29}$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (7.27). С учётом (7.28), (7.29) получим

$$Y(p) + Y(p)p^2 - p = \frac{2p}{(p^2+1)^2} \Rightarrow (p^2+1)Y = p + \frac{2p}{(p^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \underbrace{\frac{p}{p^2+1}}_{\to\cos} + \frac{2p}{(p^2+1)^3} \tag{7.30}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Заметим, что

$$\frac{1}{p^2+1} \doteq \sin t; \quad \frac{2p}{(p^2+1)^2} \doteq t\sin t \tag{7.31}$$

Найдём функцию по изображению:

$$\frac{2p}{(p^2+1)^3} \doteq \int\limits_0^t d\tau \sin(t-\tau)\tau\sin\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\cdot\tau\left(\cos(2\tau-t)-\cos t\right) =$$

$$= \frac{-t^2}{4}\cos t + \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^t d\tau\cdot\tau\cos(2\tau-t)}_{A} \tag{7.32}$$

Вычислим интеграл A:

$$A = \int\limits_0^t d\tau\cdot\tau\cos(2\tau-t) = \tau\cdot\frac{\sin(2\tau-t)}{2}\Big|_0^t - \int\limits_0^t \frac{\sin(2\tau-t)}{2}d\tau =$$

$$= \frac{t\sin t}{2} + \frac{\cos(2\tau-t)}{4}\Big|_0^t \tag{7.33}$$

Тогда (7.32) примет вид:

$$\frac{2p}{(p^2+1)^3} \doteq -\frac{t^2}{4}\cos t + \frac{t\sin t}{4} \tag{7.34}$$

Таким образом, из (7.30), (7.31), (7.34) получаем решение:

$$y(t) = -\frac{t^2}{4}\cos t + \frac{t\sin t}{4} + \cos t \tag{7.35}$$

Теорема1

Пусть известно, что F в области $\operatorname{Re} p > a$ является изображением кусочно гладкой функции $f(t)$ степени роста a.

Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \quad x > a, \tag{7.36}$$

интеграл (7.36) называется интегралом Меллина, он берётся по прямой параллельной оси ординат (См. рис. 7.2).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

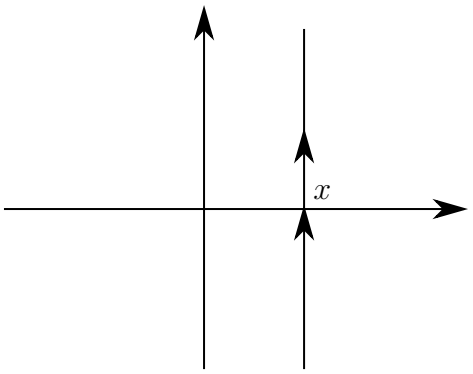

Рис. 7.2.

Теорема2
Пусть функция $F(p)$ удовлетворяет условиям:

1) F - аналитична при $p > a$;

2) В области $\operatorname{Re} p > a$: $F(p) \underset{|p|\to+\infty}{\to} 0$ равномерно относительно $\arg p$;

3) $\forall p : \operatorname{Re} p > a$ сходится интеграл:

$$\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\, dy, \quad \text{где } p = x + iy \tag{7.37}$$

Тогда функция F при $\operatorname{Re} p > 0$ является изображением функции $f(t)$, причём:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \tag{7.38}$$

интеграл (7.38), в отличие от интеграла (7.36), является криволинейным интегралом 1-го рода и берётся по вещественной переменной.
№2
Найти оригинал функции

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \tag{7.39}$$

Воспользуемся соотношением (7.36):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{pt} \frac{p}{p^2 + 1} dp \tag{7.40}$$

Возьмём интеграл (7.40) с помощью вычетов. Учитывая, что e^{pt} убывает в левой полуплоскости, выберем соответствующий контур интегрирования, который потом устремим к бесконечности (См. рис. 7.3).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

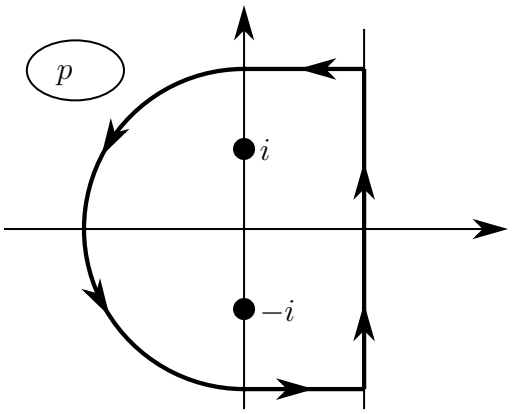

Рис. 7.3.

В пределе интегралы по мостам, связывающим половину окружности и отрезок, стремятся к нулю, интеграл по дуге окружности в пределе по лемме Жордана стремится к нулю, тогда:

$$f(t) = res\left[e^{pt}\frac{p}{p^2+1}, i\right] + res\left[e^{pt}\frac{p}{p^2+1}, -i\right] = \frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right) = \cos t, \quad t > 0 \quad (7.41)$$

Для случая $t < 0$ нужно выбрать другую полуплоскость, в которой на бесконечности убывает экспонента (правую) (См. рис. 7.4). Тогда бы контур не содержал особых точек и интеграл был бы равен нулю.

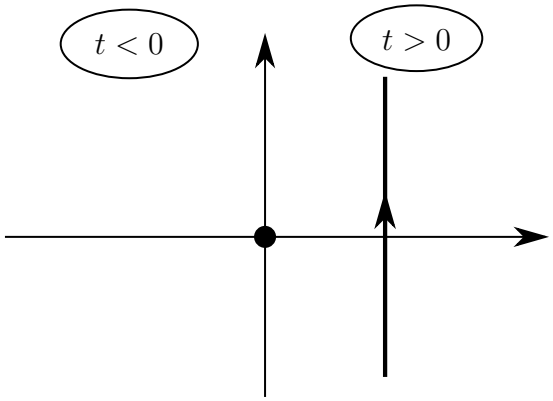

Рис. 7.4.

Таким образом, окончательно получаем:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \cos t, t > 0 \end{cases} \quad (7.42)$$

№3

Взять интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{e^{pt}}{p^2}dp \quad (7.43)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Возьмём с помощью вычетов. При $t > o$:

$$I = \frac{1}{1} \cdot \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{\cancel{p^2}} \cdot \cancel{p^2}\right) = te^{pt}\Big|_{p=0} = t \tag{7.44}$$

При $t < 0$ он равен нулю.

№4

Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + y' = te^{-t}, \quad t > 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \tag{7.45}$$

Имеем

$$y'' \quad \doteq \quad p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 1 \tag{7.46}$$

$$y' \quad \doteq \quad pY - y(0) = pY \tag{7.47}$$

$$te^{-t} \quad \doteq \quad \frac{1}{(p+1)^2} \tag{7.48}$$

Тогда уравнение (7.45) примет вид:

$$(p^2+p)Y - 1 = \frac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow (p^2+p)Y = 1 + \frac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow Y = \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)^3} \tag{7.49}$$

Найдём функцию по изображению:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{pt}\left(\frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)^3}\right) dp \tag{7.50}$$

Возьмём интеграл с помощью вычетов:

$$res\left[\frac{e^{pt}}{p(p+1)}, 0\right] \quad = \quad \lim_{p\to 0}\left(\frac{r^{pt}}{p+1}\right) = 1, \tag{7.51}$$

$$res\left[\frac{e^{pt}}{p(p+1)}, -1\right] \quad = \quad \frac{e^{pt}}{p}\Big|_{p=-1} = -e^{-t}, \tag{7.52}$$

$$res\left[\frac{e^{pt}}{p(p+1)^3}, 0\right] \quad = \quad \frac{e^{pt}}{(p+1)^3}\Big|_{p=0} = 1 \tag{7.53}$$

В полюсе-3 вычет считается, как $\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0)^3)''$. Тогда

$$\begin{aligned} res\left[\frac{e^{pt}}{p(p+1)^3}, -1\right] &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{pt}}{p}\right)''\Big|_{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{te^{pt}\cdot p - e^{pt}}{p^2}\right)'\Big|_{-1} = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(t^2e^{pt}p + \cancel{te^{pt}} - \cancel{te^{pt}})\,p^2 - (te^{pt}\cdot p - e^{pt})\cdot 2p}{p^4}\right)\Big|_{p=-1} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{-t^2e^{-t} + 2\,(t - te^{-t} - e^{-t})}{1} = -\frac{t^2}{2}e^{-t} - te^{-t} - e^{-t} \end{aligned} \tag{7.54}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Таким образом, получаем:

$$y(t) = 2 - 2e^{-t} - te^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t} \tag{7.55}$$

Можно вычислить оригинал изображения (7.49) другими способами.
Например, заметим, что:

$$Y(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^3}\right) = \frac{1}{p}F(p) \tag{7.56}$$

Найдём оригинал $F(p)$:

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^3} \doteq e^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \tag{7.57}$$

Тогда, с учётом (7.11) можно получить $y(t)$:

$$y(t) = \int\limits_0^t \left(e^{-\tau} + \frac{1}{2}\tau^2 e^{-\tau}\right) d\tau = \underbrace{e^{-\tau}\Big|_t^0}_{1-e^{-t}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau \tag{7.58}$$

Вычислим оставшийся интеграл:

$$\frac{1}{2}\int\limits_-^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau = -\frac{e^{-\tau}\tau^2}{2}\Big|_0^t + \int\limits_0^t e^{-\tau}\tau d\tau = -\frac{e^{-t}t^2}{2} - e^{-\tau}\tau\Big|_0^t + \int\limits_0^t e^{-\tau} d\tau =$$

$$= -\frac{e^{-t}t^2}{2} - e^{-t}t + 1 - e^{-t} \tag{7.59}$$

Можно вычислить оригинал с помощью разложения на простые дроби. Заметим, что

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}, \tag{7.60}$$

$$\frac{1}{p(p+1)^3} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+1)^3} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D}{p+1} \tag{7.61}$$

Коэффициенты A и B можно найти методом вычёркивания:

$$A = \frac{1}{\cancel{p}(p+1)^3}\Big|_{p=0} = 1; \quad B = \frac{1}{p\cancel{(p+1)^3}}\Big|_{p=-1} = -1 \tag{7.62}$$

Остальные коэффициенты находятся приведением (7.61) к общему знаменателю и приравниванием коэффициентов в числителе при одинаковых степенях p:

$$0 = p^3 + 3p^2 + 3p - p + Cp^2 + Cp + Dp^3 + 2Dp^2 + Dp \tag{7.63}$$

Поскольку в левой части (7.63) нет слагаемых с p^3, то$D = -1$. Тогда (7.63) примет вид:

$$0 = 3p^2 + 3p - p + Cp^2 + Cp - 2p^2 - p \tag{7.64}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Из (7.64) понятно, что $C = -1$.

Тогда, раскладывая дроби в (7.49) на простые, и зная оригиналы простых дробей, можно найти оригинал Y:

$$\frac{1}{p(p+1)^3} = \underbrace{\frac{1}{p}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{1}{(p+1)^3}}_{\to \frac{t^2}{2}e^{-t}} - \underbrace{\frac{1}{(p+1)^2}}_{\to te^{-t}} - \underbrace{\frac{1}{p+1}}_{\to e^{-t}} \tag{7.65}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ