МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ФЕДОРОВСКИЙ
КОНСТАНТИН ЮРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ТАГИРОВА МАГОМЕДА ДЖАБРАИЛОВИЧА

Содержание

1. Лекция 1. Комплексные числа, комплексная плоскость 6
Комплексные числа, комплексная плоскость 6
Корни (степени $n \in \{2, 3, \dots\}$) из комплексных чисел 8
Предел последовательности комплексных чисел 9
Непрерывность функций комплексного переменного 10
Комплексная экспонента(и логарифм) 10
Вещественная и комплексная линейность ($\mathbb{R}-$ и $\mathbb{C}-$ линейность) 14
Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция 16

2. Лекция 2. Некоторые сведения о множествах в $\mathbb{C}$. Теорема Жордана 19
Некоторые сведения о множествах в $\mathbb{C}$ 19
Путь (кривая) в $\mathbb{C}$ 23
Теорема Жордана 25

3. Лекция 3. Вещественная и комплексная дифференцируемость 27
Функции комплексного переменного 27
Вещественная дифференцируемость функций комплексного переменного . 28
Комплексная дифференцируемость 29
Первые свойства $\mathbb{C}$-дифференцируемых функций 32
Голоморфные функции 34
Геометрический смысл комплексной производной, конформность 35

4. Лекция 4. Дробно-линейные функции. Функция Жуковского 37
Дробно-линейные функции 37
Круговое свойство ДЛФ и сохранение симметрии при ДЛО 39
Групповое свойство ДЛФ 46
Функция Жуковского 47
Тригонометрические и гиперболические функции 51

5. Лекция 5. Элементарные функции. Степенные ряды 54
Элементарные функции (окончание) 54
Числовые ряды 56
Длина пути, спрямляемые пути и кривые 63
Интеграл по кривой 65
Операции над кривыми 68
Простейшие свойства интеграла вдоль кривой 69

6. Лекция 6. Интегрирование функций комплексного переменного 71
Комплексная первообразная 71
Теорема Коши для выпуклой области 78

Теорема Коши и интегральная формула Коши в простейших случаях . . . 79
Локальное представление голоморфных функций степенными рядами . . . 82

7. Лекция 7. Индекс кривой относительно точки 90
Индекс кривой относительно точки . . . 90

8. Лекция 8. Приращение аргумента вдоль пути (кривой) 95
Приращение аргумента вдоль пути (кривой) . . . 95
Цепи и циклы . . . 99
Допустимые области . . . 109

9. Лекция 9. Нули голоморфных функций. Теорема единственности 113
Нули голоморфных функций. Теорема единственности . . . 113
Поведение степенного ряда на границе круга сходимости . . . 115
Ряд Лорана . . . 120
Изолированные особые точки однозначного характера . . . 123

10. Лекция 10. Вычеты. Теорема Коши о вычетах для v.p.-интегралов 128
Вычеты . . . 128
Теорема Коши о вычетах для v.p.-интегралов . . . 132
Примеры вычисления v.p.-интегралов . . . 138

11. Лекция 11. Принцип аргумента и его следствия 142
Логарифмический вычет . . . 142
Принцип аргумента . . . 143
Лемма Шварца и ее следствия . . . 148
Доказательство малой теоремы Пикара для целых функций контролируемого роста . . . 151

12. Лекция 12. Однолистные функции 154
Однолистные функции . . . 154
Теорема Гурвица и ее следствия . . . 156
Конформные автоморфизмы $\mathbb{D}, \mathbb{C}$ и $\mathbb{C}_\infty$ . . . 158
Теорема Римана, конформный радиус . . . 159

13. Лекция 13. Конформные отображения 163
Теорема Римана, конформный радиус . . . 163
Функционалы на семействах голоморфных функций . . . 164
Доказательство теоремы Римана . . . 165
Принцип симметрии Римана-Шварца . . . 167
Локально связные множества . . . 171
Теоремы Каратеодори . . . 172

14. Лекция 14. Конформные отображения. Часть 2 **176**
Теория аналитического продолжения по Вейерштрассу 176

15. Лекция 15. Конформные отображения. Часть 3 **187**
Теория аналитического продолжения по Вейерштрассу 187
Полная аналитическая функция 189

1. Лекция 1. Комплексные числа, комплексная плоскость

Введение.
Курс посвящен работе с функциями на двумерной плоскости. Точки на плоскости интерпретируются как комплексные числа. Отличие от других курсов анализа состоит в классах рассматриваемых функций. Это станет заметно в тех ситуациях, когда без введения комплексной структуры, некоторые свойства функций не будут проявляться. Главным образом это будут специальные дифференциальные свойства функций, которые "хорошо" согласовываются с комплексной структурой. В результате мы получим класс функций, которые с аналитической точки зрения лучше, чем изученные до этого.

Комплексные числа, комплексная плоскость

Обозначения.
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ - множества вещественных, рациональных, целых и натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{z \in \mathbb{Z} : z \geqslant 0\}$.

Определение 1.1. Множество (система) **комплексных чисел** - это, по определению, множество $\mathbb{C} = \{x + iy : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ i\ -\ \text{символ}\}$.
Сложение и **умножение** на множестве $\mathbb{C}$ определены следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

где $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$.

Упражнение 1.1
Проверить, что $\mathbb{C}$ является **полем** относительно введенных операций, и что **нулем** и **единицей** в поле $\mathbb{C}$ являются $0 = 0 + i0$ и $1 = 1 + i0$ соответственно.
Показать, что подполе $\{x + i0 : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ изоморфно полю $\mathbb{R}$.

Обозначим $\{x + i0 : x \in \mathbb{R}\} \sim \mathbb{R}$ и $\{0 + iy : y \in \mathbb{R}\} \sim i\mathbb{R}$.

Определение 1.2. Если $z \in \mathbb{C}$ и $z = x + iy$, то $x = Re\ z$ - **вещественная часть** z, а $y = Im\ z$ - **мнимая часть** z.
Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется **комплексно-сопряженным к** z.

Замечание.
Комплексное число z является вещественным (т.е. $\in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow z = \overline{z}$.
Комплексное число z является **чисто мнимым** (т.е. $\in i\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

Определение 1.3. Модуль комплексного числа $z = x + iy$ - это число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Модуль числа $z \in \mathbb{C}$ называют также его (**полярным**) **радиусом**.

Если $z \neq 0$, то существует единственное $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$ такое, что $Re\ z = |z| \cos \varphi_0$ и $Im\ z = |z| \sin \varphi_0$. Это φ_0 называется **главным значением (полярного аргумента)** z и обозначается $\varphi_0 = arg\ z$.

Полным (полярным) аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется множество $Arg\ z = \{\varphi_0 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, где $\varphi_0 = arg\ z$.

Если $\theta \in Arg\ z$, а $r = |z|$, то выражение $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ называется **тригонометрической формой** z (при $\theta = \varphi_0$ говорят об основной тригонометрической форме).

Замечание.
Определяя аргумент комплексного числа, будем считать, что в заданном диапазоне всегда можно найти единственное значение φ_0, удовлетворяющее определению.

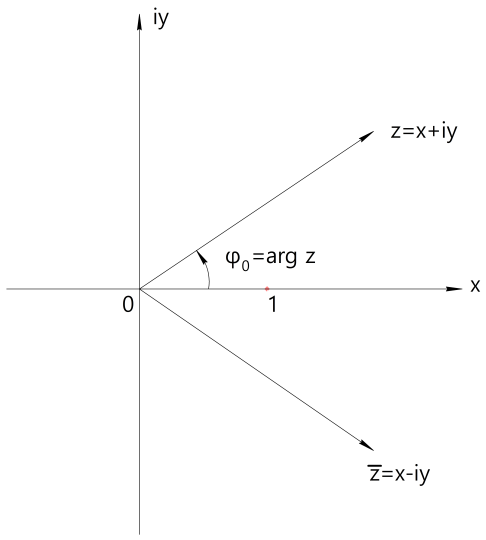

Рис 1.1 Представление комплексного числа на плоскости

Если $z_{1,2} \in \mathbb{C}$, $r_{1,2} = |z_{1,2}|$ и $\theta_{1,2} \in Arg\ z_{1,2}$, то имеет место равенство

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

В частности, отображение $z \to pz$, $p \in \mathbb{C}$ - это растяжение в $|p|$ раз и поворот на угол $arg\ p$.

Формула Муавра: если $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$, то

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Несколько простых формул:

1) $z\overline{z} = |z|^2$

2) Если $z = x + iy$, а $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan t < \dfrac{\pi}{2}$, то

   а) при $x > 0$ имеем $arg\ z = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

   б) при $x < 0$ и $y \geqslant 0$ имеем $arg\ z = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi$

   в) при $x < 0$ и $y \leqslant 0$ имеем $arg\ z = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi$

3) Если $z \neq 0$, то $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

Основная теорема алгебры.
Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, т.е. любой многочлен $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ с комплексными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$ имеет в $\mathbb{C}$ корень.

Следствие из теоремы Фробениуса.
Пусть $\mathbb{K}$ - поле, такое, что $\mathbb{C}$ является подполем $\mathbb{K}$ и такое, что $\mathbb{K}$ является конечномерным линейным пространством над $\mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Это следствие говорит о единственности поля комплексных чисел.

Корни (степени $n \in \{2, 3, \dots\}$) из комплексных чисел

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Скажем, что $w \in \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$.
Из **формулы Муавра** следует, что $\sqrt[n]{0} = 0$, а если $z \neq 0$, то множество $\sqrt[n]{z}$ состоит из n элементов $\{w_0, \dots, w_k = \sqrt[n]{z_{(k)}}, \dots, w_{n-1}\}$:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0 + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Элемент w_0 называется **основным (или главным) значением** $\sqrt[n]{z}$.

Положим $\omega_{n,k} := \sqrt[n]{1_{(k)}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Число $\omega_n := \omega_{n,1}$ называется **первообразным корнем степени n из единицы**. Все остальные корни получаются из первообразного возведением в подходящую степень. Легко видеть, что $\omega_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Т.е. совокупность $\{\omega_{n,k} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ - это циклическая группа порядка n (относительно умножения в $\mathbb{C}$).

Упражнение 1.2

1) Проверить, что $\forall k = 0, 1, \ldots, n-1$ выполнено $\omega_{n,k} = \omega_n^k$, а $\omega_n^{-1} = \omega_n^{n-1}$.
   Проверить, что $\forall j \in \mathbb{Z}_+$ выполнено $\omega_n^j = \omega_n^{j \ (mod\ n)}$.

2) Показать, что $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ и $\forall j \in \mathbb{N}$ выполнено $\omega_{nj,kj} = \omega_{n,k}$.

3) Проверить, что $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_{n,k} = 0$.

4) Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $b \in \sqrt[n]{z}$. Тогда $\sqrt[n]{z} = \{b, \omega_n b, \omega_n^2 b, \ldots, \omega_n^{n-1} b\}$.

Предел последовательности комплексных чисел

В $\mathbb{C}$ вводится **метрика** $d(z, w) = |z - w|$ (стандартная метрика в $\mathbb{R}^2$). Метрика порождает топологию, поэтому мы имеем все стандартные понятия, связанные с пределом последовательности.

Определение 1.4. Число $a \in \mathbb{C}$ является **пределом** последовательности $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ при $n \to \infty$ (где $z_n \in \mathbb{C}$), если $\forall \varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$, выполнено $|z_n - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Упражнение 1.3

1) Пусть $z_n = x_n + iy_n$. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ эквивалентно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Re\ a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = Im\ a$.

2) Проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

3) Пусть $a \neq 0$. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ эквивалентно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |a|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Arg\ z_n = Arg\ a\ (mod\ 2\pi)$, т.е. найдутся $\theta_n \in Arg\ z_n$ и $\alpha \in Arg\ a$ такие, что $\theta_n \to \alpha$ при $n \to \infty$.

Непрерывность функций комплексного переменного

Обозначения. При $a \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ обозначим:

1) $B(a,r) = U(a,r) = \{z : |z-a| < r\}$ - открытый круг (окрестность) на плоскости. Если пишут $U(a)$ - радиус неважен.

2) $B'(a,r) = U'(a,r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ - проколотый круг (окрестность) точки.

3) $C(a,r) = \{z : |z-a| = r\}$ - окружность.

4) $\mathbb{T} = C(0,1)$, $\mathbb{D} = B(0,1)$ - соответственно окружность и открытый круг в центре координат с радиусом 1.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $E \neq \emptyset$, а b - предельная точка множества E (т.е. $\forall \delta > 0$ выполнено $E : \cap U'(b,\delta) \neq \emptyset$). Пусть $f : E \to \mathbb{C}$ - некоторая функция. Напомним определение предела функции f при $z \to a$ (по множеству E).

Определение 1.5. $\lim\limits_{(z \in E) \to b} f(z) = w$, $w \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\forall z \in U'(b,\delta) : \cap E$ выполнено $f(z) \in U(w,\varepsilon)$.
Если $\exists r > 0 : U'(b,r) \subset E$, то вместо $(z \in E) \to b$ пишут $z \to b$.

Функция f называется **непрерывной в точке** b (по E; как и раньше, b - предельная точка для E), если $\lim\limits_{(z \in E) \to b} f(z) = f(b)$. Кроме того, если b - изолированная точка E, то f непрерывна в b, по-определению.

Функция f называется **непрерывной на множестве** $E_1 \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества E_1.

Комплексная экспонента(и логарифм)

Чтобы определить комплексную экспоненту вспомним второй замечательный предел (как определялась функция e^x в вещественном анализе).

Определение 1.6. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда $e^z = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$.

Предложение 1.1
Пусть $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Тогда предел, определяющий e^z существует. При этом $|e^z| = e^x$ и мнимая часть $y \in Arg\ e^z$.

Доказательство.
Начнем с модуля: так как

$$\left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \left|1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right|^n \underset{|z|=\sqrt{x^2+y^2}}{\overset{\text{по формуле}}{=}} \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}|e^z| = e^x$ в силу стандартных свойств вещественных степени, экспоненты и логарифма (можно использовать, например, свойства $a^m = e^{m\ln a}$ и $\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$, $t \in \mathbb{R}$).

Теперь разберемся с аргументами.

Нас интересует, что можно сказать про $Arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Посмотрим сначала на комплексное число $\left(1+\frac{z}{n}\right)$. z - фиксированное комплексное число, $n \gg 1$. С геометрической точки зрения число $\left(1+\frac{z}{n}\right)$ лежит в некоторой окрестности единицы (см. рис. 1.2).

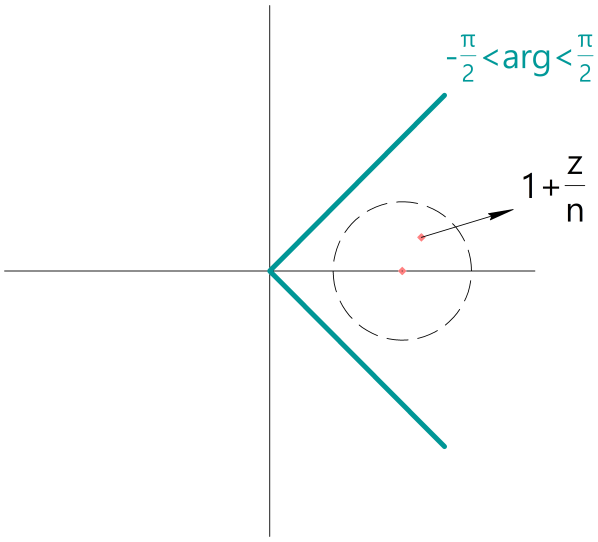

Рис. 1.2

Этот круг лежит в секторе правой полуплоскости, среди тех множеств, где главный аргумент меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Выразим аргумент в явном виде через арктангенс: $arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}$. При больших n $\arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} \sim \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}$, при возведении

в степень n происходит умножение на n (мы можем выйти из главного значения), поэтому $y \in Arg\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$. ■

Следствия:

1) При $\varphi \in \mathbb{R}$ выполнено $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

2) Если $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$ и $\theta \in Arg\ z$, то $z = re^{i\theta}$ - **показательная форма комплексного числа.**

3) При $z = x+iy$ и $w = u+iv$ используя стандартные формулы тригонометрии получаем:

$$e^{z+w} = e^{x+u}(\cos(y+v)+i\sin(u+v)) = e^x(\cos y + i\sin y)e^u(\cos v + i\sin v) = e^z e^w$$

4) В частности, при $z \in \mathbb{C}$ выполнено $e^{z+2\pi i} = e^z$ (экспонента периодична с периодом $2\pi i$).

Давайте теперь посмотрим, как устроена экспонента. Мы выяснили, что она $2\pi i$-периодическая. Необходимо понять, какое отображение плоскости в себя реализует экспонента.

1. Чтобы отображение было взаимно-однозначным, необходимо, чтобы не было точек, отличающихся на $2\pi ik$. Возьмем горизонтальную полосу, ограниченную прямыми $y = \alpha$ и $y = \alpha + 2\pi$, т.е. $\{z : \ \alpha < Im\ z < \alpha + 2\pi\}$. Посмотрим, что будет происходить с этой полосой при отображении экспонентой. Для этого посмотрим, куда переходят при отображении вертикальные отрезки и горизонтальные прямые:

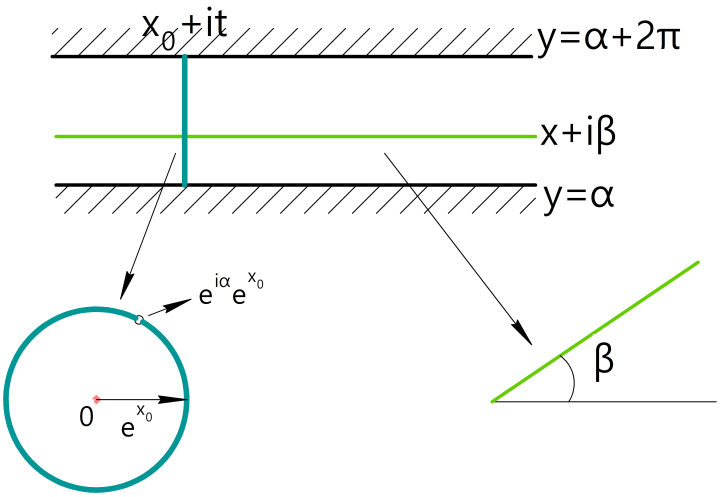

Рис 1.3 Отображение полосы экспонентой

- Вертикальные отрезки задаются фиксированной координатой x_0, т.е. $x_0 + it$, где $t \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$. Подставим в экспоненту: $e^{x_0}e^{it}$. Радиус фиксирован, угол пробегает 2π - это окружность с центром в нуле радиуса e^{x_0}, из которой выбросили точку $e^{x_0}e^{i\alpha}$.

- Горизонтальные прямые имеют вид $x + i\beta$. Подставляя в экспоненту, можно увидеть, что это лучи, выпущенные из начала координат под углом β.

В результате образом полосы становится плоскость, из которой вырезан луч, выпущенный из начала координат под углом α. Обозначим этот луч таким образом: $e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$ - луч $\{te^{i\alpha} : t \geqslant 0\}$.

2. Пусть $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi < +\infty$.
Множество $\Pi_{\alpha,\beta} = \{z : \alpha < Im\ z < \beta\}$ (горизонтальная полоса) при отображении $z \to w = e^z$ переходит в $A_{\alpha,\beta} = \{w : \alpha < arg_{(\alpha,\beta)}w < \beta\}$ (сектор с вершиной в начале координат), где $arg_{(\alpha,\beta)}(\cdot)$ - конкретная подходящая однозначная ветвь $Arg\ z$.

Многозначная функция $Ln\ z$ (обратная функция к экспоненте).
В $\mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$ есть функция, обратная к e^z.

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $z \neq 0$. По определению, $w \in Ln\ z$, если $e^w = z$.

Если $z = re^{i\theta}$, а $w = u + iv$, то $re^{i\theta} = e^{u+iv}$, откуда $u = \ln r$ (так как $r > 0$, то речь идет о хорошо известном вещественном (натуральном) логарифме) и $v = \theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, при $z \neq 0$, имеем $Ln\ z = \{\ln|z| + i(arg\ z + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Основной ветвью логарифма называется функция $\ln(z) = \ln|z| + iarg\ (z)$ (где $\ln|z|$ - это вещественный логарифм, а $arg\ (z)$ - основное значение аргумента). С учетом ранее введенных обозначений, $\ln(z) = \ln_{(-\pi,\pi)}(z)$ на $A_{-\pi,\pi}$.

Упражнение 1.4
Проверить, что отображение $z \to z^n$ является гомеоморфизмом $A_{\alpha,\beta}$ на $A_{n\alpha,n\beta}$ при $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi n^{-1} < +\infty$. Тогда на множестве $A_{n\alpha,n\beta}$ определено обратное отображение

$$z = \sqrt[n]{w}_{(n\alpha,n\beta)} = e^{\frac{1}{n}\ln_{(n\alpha,n\beta)}}$$

При этом $\sqrt[n]{w}_{(-\pi,\pi)} = \sqrt[n]{w}_{(0)}$ на $A_{-\pi,\pi} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Найти множество точек разрыва функции $\sqrt[n]{z}_{(0)}$ в $\mathbb{C}$.

Вещественная и комплексная линейность ($\mathbb{R}-$ и $\mathbb{C}-$ линейность)

Как вещественное линейное пространство $\mathbb{C}$ изоморфно $\mathbb{R}^2$.

- Пусть у нас есть комплексное число $z = x + iy$ и комплексно-сопряженное $\overline{z} = x - iy$, тогда легко посчитать, что $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}(\overline{z} + z) \\ y = \dfrac{i}{2}(\overline{z} - z) \end{array}\right.$. Если A - линейный оператор в $\mathbb{R}^2$, имеющий в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$ матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то его можно записать в комплексном виде

$$z \to l_{\text{д}}(z) = \frac{(a+d) - i(b-c)}{2} z + \frac{(a-d) + i(b+c)}{2} \overline{z}$$

- Функция $l(z) = pz + q\overline{z}$ при $p, q \in \mathbb{C}$ является $\mathbb{R}$-**линейной**, т.е. $l(z + w) = l(z) + l(w)$ и $l(\alpha z) = \alpha l(z)$ при $z, w \in \mathbb{C}$ и $\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$.

- Если $l(z) = pz + q\overline{z}$ при $p, q \in \mathbb{C}$, то отображение $z \to l(z)$ можно представить в виде линейного оператора в $\mathbb{R}^2$, с матрицей (в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$) вида $\begin{pmatrix} Re(p+q) & -Im(p-q) \\ Im(p+q) & Re(p-q) \end{pmatrix}$.

- Более сильное свойство линейности функции φ - это $\mathbb{C}$-**линейность**: $\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w)$ и $\varphi(\alpha z) = \alpha\varphi(z)$ при $z, w \in \mathbb{C}$ и $\underline{\alpha \in \mathbb{C}}$.

Замечание.
Показать, что $\mathbb{R}$-линейная функция $l(z) = pz + q\overline{z}$ является $\mathbb{C}$-линейной $\Leftrightarrow q = 0$.
Доказательство.
Необходимо показать, что

$$l(\beta z) = p\beta z + q\overline{\beta}\overline{z} = \beta(pz + q\overline{z}) \quad \Rightarrow \quad q\overline{z}(\overline{\beta} - \beta) = 0$$

Это выполняется, когда $q = 0$. Поэтому функции вида $l(z) = pz$ - являются $\mathbb{C}$-линейными. ■

Оператор комплексной структуры.
Отображение $z \to iz$ $\left(\text{поворот на угол } \dfrac{\pi}{2}\right)$ соответствует оператору J, имеющему (в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$) матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Заметим, что $J^2 = -I$ (единичная матрица).

Определение 1.7. Пусть $\mathcal{X}$ - вещественное линейное пространство. Линейный оператор J в $\mathcal{X}$, обладающий свойством $J^2 = -I$ (если такой существует), называется **оператором комплексной структуры** в $\mathcal{X}$. Наличие этого оператора позволяет превратить вещественное линейное пространство в комплексное линейное пространство, т.е. ввести операцию умножения на комплексные коэффициенты.

Если в $\mathbb{R}$-линейном пространстве $\mathcal{X}$ имеется оператор комплексной структуры J, то на $\mathcal{X}$ можно ввести и структуру $\mathbb{C}$-линейного пространства: при $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathcal{X}$ нужно положить $ax = a_1x + a_2Jx$. Полученное пространство обозначим $\mathcal{X}_J$. Проверка аксиом комплексного линейного пространства для $\mathcal{X}_J$ остается в качестве упражнения.

Упражнение 1.5
Пусть $\mathcal{X}$ - $\mathbb{R}$-линейное пространство, $dim\ \mathcal{X} = n$, пусть в $\mathcal{X}$ имеется оператор комплексной структуры J. Доказать, что $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X} = 2m$ и J имеет (в подходящем базисе) матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$, где I_m - единичная $m \times m$-матрица.

Указания к Упражнению 1.5:

1) Пусть $\mathcal{X}$ - это $\mathbb{C}$-линейное пространство. Тогда $\mathcal{X}$ можно рассматривать и как $\mathbb{R}$-линейное пространство, которое удобно обозначить $\mathcal{X}_R$. Если $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{X} = n$ и $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)$ - базис в $\mathcal{X}$, то $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n, i\overline{e}_1, \ldots, i\overline{e}_n)$ - базис в $\mathcal{X}_R$. В частности, $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}_R = 2n$.

2) Пусть дан линейный оператор в $\mathcal{X}$ с матрицей $A = B + iC$ в базисе $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)$. Тогда его можно рассматривать как оператор в $\mathcal{X}_R$, имеющий (в соответствующем базисе в $\mathcal{X}_R$) матрицу $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$.

3) Пусть $\mathcal{X}$ - $\mathbb{R}$-линейное пространство с комплексной структурой J. Тогда $\mathcal{X}_J$ - это $\mathbb{C}$-линейное пространство, причем $(\mathcal{X}_J)_R = \mathcal{X}$. Пусть $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{X}_J = n$, причем конечномерность $\mathcal{X}_J$ вытекает из того, что любой базис пространства $\mathcal{X}$ порождает (над $\mathbb{C}$) все пространство $\mathcal{X}_J$. Выберем базис $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)$ в $\mathcal{X}_J$. Матрица умножения на i в этом базисе имеет вид iI_n, где I_n - единичная $n \times n$-матрица.

Утверждение, содержащееся в Упражнении 1.5, вытекает теперь из предыдущих утверждений о базисе $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n, i\overline{e}_1, \ldots, i\overline{e}_n)$ в $\mathcal{X}_R$ и о виде матрицы соответствующего оператора в этом базисе.

Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция

Во многих вопросах анализа нам необходимо будет изучить поведение функций не только на комплексной плоскости, но и на бесконечности. Пусть $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} : \cup\{\infty\}$ - **одноточечная компактификация** $\mathbb{C}$ (расширенная комплексная плоскость). Также используются обозначения $\overline{\mathbb{C}}$, $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}^\sharp$.

Напоминание.
Если $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ - хаусдорфово локально-компактное топологическое пространство, то его одноточечная компактификация - это топологическое пространство $(\mathcal{X}_\infty, \tilde{\mathcal{T}})$, где ∞ - символ, причем $\infty \notin \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_\infty = \mathcal{X} \cup \{\infty\}$ и $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\mathcal{X}_\infty \setminus K : K \in \mathcal{K}\}$, а $\mathcal{K}$ - это совокупность всех компактных подмножеств в $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$.
Пространство $(\mathcal{X}_\infty, \tilde{\mathcal{T}})$ компактно и хаусдорфово, а стандартное вложение $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ в $(\mathcal{X}_\infty, \tilde{\mathcal{T}})$ непрерывно.

Введем в $\mathbb{C}_\infty$ структуру метрического пространства. При $z, w \in \mathbb{C}$ положим

$$d^\sharp(z,w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \quad d^\sharp(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \quad d^\sharp(\infty,\infty) = 0$$

Далее мы покажем, что $d^\sharp$ - это метрика на $\mathbb{C}_\infty$, причем топология, задаваемая $d^\sharp$ будет топологией одноточечной компактификации $\mathbb{C}$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (ξ, η, ζ) сферу S с диаметром 1 и центром в точке $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ (рис. 1.4). Уравнение сферы имеет вид $\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Пространство $\mathbb{C}$ мы отождествим с $\{(\xi, \eta, 0) : \xi, \eta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим $O = (0,0,0)$ и $N = (0,0,1)$. Точке $M_z \in S \setminus \{N\}$ поставим в соответствие точку $z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2(\xi, \eta)$ в которой луч NM_z пересекает плоскость $\{\zeta = 0\}$.

Определим отображение $\mathfrak{z} : S \to \mathbb{C}_\infty$ так, что

$$\mathfrak{z}(M_z) = z, \quad M \neq N, \quad \mathfrak{z}(N) = \infty$$

Мы получили взаимно-однозначное соответствие между точками на плоскости и точками на сфере $S \setminus \{N\}$. Построенное отображение называется **стереографической проекцией**.

Упражнение 1.6

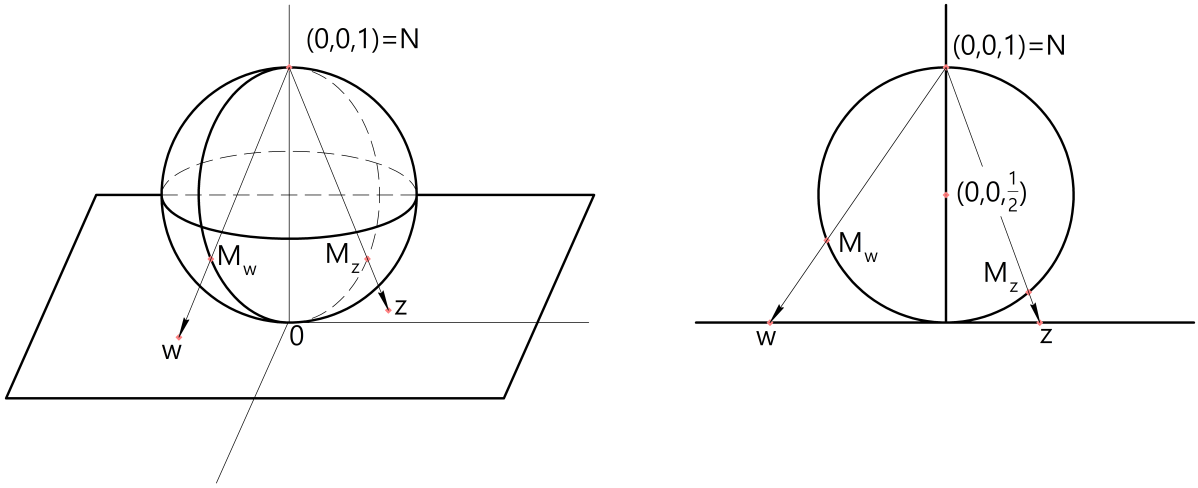

Рис 1.4 Стереографическая проекция

Пусть $M = (\xi, \eta, \zeta) \in S$ и $\mathfrak{z}(M) = z = x + iy$. Доказать формулы

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\xi}{1-\zeta} \\ y = \dfrac{\eta}{1-\zeta} \end{array}\right., \qquad \left[\begin{array}{l} \xi = \dfrac{x}{1+|z|^2} \\ \eta = \dfrac{y}{1+|z|^2} \\ \zeta = \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2} \end{array}\right.$$

Указание: использовать коллинеарность $\overline{NM_z}$ и $\overline{N\mathfrak{z}(M_z)}$ и уравнение сферы S.

Предложение 1.2
Если $d_3(A, B)$ - расстояние в $\mathbb{R}^3$, то при $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ имеем $d^\sharp(z, w) = d_3(M_z, M_w)$, где $M_z = \mathfrak{z}^{-1}(z)$.
Доказательство.
Рассмотрим случай $z, w \in \mathbb{C}$. Оставшиеся случаи могут быть легко выведены из него предельным переходом. Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$, а $R = d_3(M_z, M_w)^2$. Тогда

$$R = \left(\frac{x}{1+|z|^2} - \frac{u}{1+|w|^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+|z|^2} - \frac{v}{1+|w|^2}\right)^2 + \left(\frac{|z|^2}{1+|z|^2} - \frac{|w|^2}{1+|w|^2}\right)^2$$

Сумма первых двух слагаемых приводится к виду

$$\frac{|z|^2}{(1+|z|^2)^2} + \frac{|w|^2}{(1+|w|^2)^2} - 2\frac{xu+yv}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

Складывая это выражение с третьим слагаемым получаем

$$R = \frac{|z|^2+|z|^4}{(1+|z|^2)^2} + \frac{|w|^2+|w|^4}{(1+|w|^2)^2} - 2\frac{|z|^2|w|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)} - 2\frac{xu+yv}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

откуда

$$R = \frac{|z|^2 + |w|^2 - 2xu - 2yv}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)} = \frac{(x-u)^2 + (y-v)^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)} = \frac{|z-w|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

Т.е. $d_3(M_z, M_w)^2 = R = d^\sharp(z,w)^2$. ■

Из Предложения 1.2 вытекает, что отображение $\mathfrak{z} : S \to \mathbb{C}_\infty$ является **изометрией**. Так как (S, d_3) - компактное метрическое пространство, то и $(\mathbb{C}_\infty, d^\sharp)$ тоже компактное метрическое пространство. Расширенную комплексную плоскость называют также **сферой Римана**.

Замечание.
На ограниченных множествах в $\mathbb{C}$ евклидова и сферическая метрика эквивалентны. Если $z, w \in B(0,R)$ при некотором $R > 0$, то справедливы неравенства

$$\frac{|z-w|}{1+R^2} \overset{(1)}{\leqslant} d^\sharp(z,w) \overset{(2)}{\leqslant} |z-w|$$

Для неравенства (1) воспользуемся тем фактом, что множества компактные, и все рассматриваемые точки находятся в круге с центром в начале координат радиуса R. Поэтому мы делаем оценку снизу максимально возможным значением.
Неравенство (2) очевидно, так как $d^\sharp(z,w) = \dfrac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}$.

Сферическая метрика задает в $\mathbb{C}$ топологию, порожденную системой сферических окрестностей. Под **сферической окрестностью** точки $a \in \mathbb{C}_\infty$ понимается множество $U^\sharp(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : d^\sharp(z,a) < \varepsilon\}$

Из эквивалентности евклидовой и сферической метрик на ограниченных множествах вытекает, что соответствующие топологии в $\mathbb{C}$ также эквивалентны: для любых $a \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$ найдутся $\left[\begin{array}{l} \varepsilon_{1,2} > 0 \text{ такие, что } U^\sharp(a,\varepsilon_1) \subset U(a,\varepsilon) \subset U^\sharp(a,\varepsilon_2) \\ \varepsilon'_{1,2} > 0 \text{ такие, что } U(a,\varepsilon'_1) \subset U^\sharp(a,\varepsilon) \subset U(a,\varepsilon'_2) \end{array}\right.$.

Кроме того, так как

$$U^\sharp(\infty,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : d^\sharp(z,\infty) < \varepsilon\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{\varepsilon^{-2} - 1}\} \cup \{\infty\}$$

то заданная нами выше топология в $\mathbb{C}_\infty$ эквивалентна топологии, соответствующей сферической метрике (так как $d^\sharp(z,w) \leqslant 1$ для всех $z, w \in \mathbb{C}_\infty$, то можно ограничиться случаем $\varepsilon < 1$).

2. Лекция 2. Некоторые сведения о множествах в $\mathbb{C}$. Теорема Жордана

Некоторые сведения о множествах в $\mathbb{C}$

Обозначения:
Для множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим через

- E° - внутренность
- $\overline{E}$ - замыкание в топологии $\mathbb{C}$
- $\overline{E}|_\infty$ - замыкание в топологии $\mathbb{C}_\infty$
- ∂E - границу в топологии $\mathbb{C}$
- $\partial_\infty E$ - границу в топологии $\mathbb{C}_\infty$

Замечание.
Посмотрим наглядно, чем отличаются ∂ и ∂_∞.
Рассмотрим множество $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ - внешность круга единичного радиуса. Тогда $\partial\Omega = \Pi = \{|z| = 1\}$ (связное множество), а $\partial_\infty\Omega = \Pi \cup \{\infty\}$ (несвязное множество).

Напоминание.
Относительной топологией множества E (сокращенно о.т. E) называется топология, заданная системой окрестностей $\{U(w, r) \cap E : w, r > 0\}$.

Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{C}_\infty$, а $E \subset \mathcal{X}$. Для множества $M \subset E$ обозначим через $\overline{M}|_E$ и $M^\circ|_E$ соответственно замыкание и внутренность M в относительной топологии E.

Замечание.
$M \subset E$ может быть открытым или замкнутым в о.т. E, но не обладать этими свойствами в $\mathcal{X}$. Так при $E = (1, 2) \cup (3, 4)$ интервал $(1, 2)$ открыт и замкнут в о.т. E, но он не является ни открытым ни замкнутым в $\mathcal{X}$.

Определение 2.1. Множество $E \subset \mathcal{X}$ называется **связным**, если не существует двух непустых замкнутых в относительной топологии E подмножеств $E_1, E_2 \subset E$ таких, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ и $E = E_1 \cup E_2$.

Замечание.
Если множество $E \subset \mathcal{X}$ не связно, то множества E_1 и E_2 из Определения 2.1 будут

не только замкнутыми, но и открытыми в о.т. E. Поэтому в Определении 2.1 можно говорить о разложении E в объединение непустых непересекающихся открыто-замкнутых множеств.

Упражнение 2.1

1) Множество $E \subset \mathcal{X}$ связно в том и только том случае, когда не существует пары непустых подмножеств $E_1, E_2 \subset E$ таких, что $E = E_1 \cup E_2$, но $\overline{E}_1 \cap E_2 = E_1 \cap \overline{E}_2 = \emptyset$ (все замыкания в топологии $\mathcal{X}$).

2) Пусть $Y_1, Y_2 \subset \mathcal{X}$ - замкнутые множества, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Если $E \subset Y_1 \cup Y_2$ - непустое связное множество, то либо $E \subset Y_1$, либо $E \subset Y_2$.

3) Пусть $U_1, U_2 \subset \mathcal{X}$ - открытые множества, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Если $E \subset U_1 \cup U_2$ - непустое связное множество, то либо $E \subset U_1$, либо $E \subset U_2$.

4) Множество $E \subset \mathcal{X}$ связно в том и только том случае, когда не существует пары открытых множеств W_1 и W_2 со следующими свойствами: $W_1 \cap E \neq \emptyset$, $W_2 \cap E \neq \emptyset$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $E \subset W_1 \cup W_2$.

Простейшие примеры связных множеств - это отрезок $[a, b]$, круг $B(a, r)$, $r > 0$, и кольцо $A(a, r, R) := \{r < |z - a| < R\}$, $R > r > 0$.

Предложение 2.1
Пусть E - связное множество в $\mathbb{C}$, и пусть $Y \subset E$ - некоторое его непустое подмножество, открытое и замкнутое в относительной топологии E. Тогда $Y = E$.
Доказательство.
Пусть множество $M := E \setminus Y \neq \emptyset$. Так как Y замкнуто в о.т. E, то $\overline{Y}|_E = Y$ и

$$\overline{Y} \cap M = \overline{Y}|_E \cap M = Y \cap M = \emptyset.$$

Так как Y открыто в о.т. E, то M замкнуто в этой топологии и

$$\overline{M} \cap Y = \overline{M}|_E \cap Y = M \cap Y = \emptyset.$$

Полученное противоречие (с первым утверждением Упражнения 2.1) показывает, что $M = \emptyset$ и, следовательно, $E = Y$. ■

Пусть дан набор различных точек $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$. Множество $\Lambda(a_1, \ldots, a_N) = [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup \cdots \cup [a_{N-1}, a_N]$ называется **ломанной** с вершинами в точках $a_1, \ldots, a_N$. Любая ломанная связна.

Множество E называется **линейно связным**, если $\forall a, b \in E$ найдется ломанная Λ с условиями a - начало Λ, b - конец Λ и $\Lambda \subset E$.

Предложение 2.2
Пусть $U \subset \mathbb{C}$ - открытое множество. Тогда U связно $\Leftrightarrow$ U линейно связно.
Доказательство.
$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть U линейно связно, но не связно. Тогда найдутся открытые множества W_1 и W_2 такие, что $W_1 \cap U \neq \emptyset$, $W_2 \cap U \neq \emptyset$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ и $U \subset W_1 \cup W_2$.
Пусть $a \in W_1 \cap U$, $b \in W_2 \cap U$ и пусть $\Lambda \subset U$ - ломанная, соединяющая a и b.
Тогда $\Lambda = (\Lambda \cap W_1) \cup (\Lambda \cap W_2)$, а последнее невозможно, так как Λ связна.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $a \in U$ - фиксировано, и пусть E - это множество таких $b \in U$, которые можно соединить с a некоторой ломаной. Тогда E открыто. В самом деле, пусть $b \in E$, тогда существует ломанная $\Lambda \subset U$ с началом a и концом b. Так как U - открыто, то найдется круг $B(b,r) \Subset U$. Так как $B(b,r)$ выпуклый, то любая точка $w \in B(b,r)$ может быть соединена с b отрезком $[b,w] \subset B(b.r) \subset U$. Ломаная $\Lambda_1 = \Lambda \cup [b,w] \subset U$ и соединяет a и w, откуда $w \in E$.
Аналогично проверяется, что множество $E_1 := U \setminus E$ также открыто. Но тогда $U = E \cup E_1$, что противоречит связности U. ■

Напомним, что **областью** (в $\mathcal{X}$) называется любое непустое открытое и связное множество.

Связной компонентой (короче **компонентой**) множества E называется такое подмножество $E_1 \subset E$, что E_1 связно и E_1 не является собственным подмножеством никакого другого связного подмножества E. Любое открытое множество состоит из не более чем счетного числа областей.

Определение 2.2. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется **односвязной**, если выполнено любое из следующих двух эквивалентных условий:

1) множество $\partial_\infty D$ связно

2) множество $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ связно

Например, внешность круга Ω, рассмотренная ранее, - не односвязная область.

Рассмотрим, как получить какой-нибудь "хороший" класс примеров односвязных областей.

- Пусть D - **звездная** (или **звездообразная**) область в $\mathbb{C}$, т.е. существует точка $z_0 \in D$ ("центр" области D) такая, что для любой точки $z \in D$ выполнено $[z_0, z] \subset D$. В этом случае можно проверить, что множество $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ связно. Т.е. всякая звездная область односвязна.

В частности, любая выпуклая область односвязна (область D называется выпуклой, если $\forall z, w \in D$ выполнено $[z, w] \subset D$).

Приведем конкретные примеры: круг $B(a, R)$ является односвязной областью; полоса $\Pi_{\alpha,\beta} = \{z : \alpha < Im\ z < \beta\}$ является односвязной областью (хотя множество $\mathbb{C} \setminus \Pi_{\alpha,\beta}$ не связно в $\mathbb{C}$).

- Кольцо $V(a, r, R) = \{r < |z - a| < R\}$ - это не односвязная область, так как $\partial_\infty V(a, r, R) = C(a, r) \cup C(a, R)$.
  Область $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ не односвязная, так как множество $\mathbb{C}_\infty \setminus D = \{0, \infty\}$ не связно (хотя множество $\mathbb{C} \setminus D = \{0\}$ связно в $\mathbb{C}$).
  Аналогичный пример получается, если рассмотреть $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ (внешность единичного круга в $\mathbb{C}$).

- В случае областей в $\mathbb{C}_\infty$ односвязные области определяются аналогично: область $D \subset \mathbb{C}\infty$ называется односвязной, если множество $\partial_\infty D$ связно. Так, внешность единичного круга, рассматриваемся в $\mathbb{C}_\infty$ уже односвязна (ее границей является связное множество $\mathbb{T}$).

Заметим, что если область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна, то она односвязна и как область в $\mathbb{C}_\infty$.

Упражнение 2.2
Пусть D - область в $\mathbb{C}$ такая, что множество $\partial_\infty D$ связно. Тогда множество $\mathbb{C} \setminus D$ тоже связно.

Оболочка компакта. Пусть K - компакт в $\mathbb{C}$ (т.е. K - замкнутое и ограниченное множество). Тогда $\mathbb{C} \setminus K$ состоит из не более чем счетного числа непересекающихся компонент (областей), среди которых есть ровно одна неограниченная. Обозначим ограниченный компакт $\mathbb{C} \setminus K$ через $\Omega_m(K)$, $m \in M(K) \subset \mathbb{N}$, а неограниченный компакт $\mathbb{C} \setminus K$ - через $\Omega_\epsilon(K)$. При этом $\partial\Omega_m(K) \subset K$ и $\partial\Omega_\epsilon(K) \subset K$. В качестве упражнения предлагается проверить эти свойства.

Определение 2.3. Множество $\hat{K} = K \cup \bigcup\limits_{m \in M(K)} \Omega_m(K)$ называется **оболочкой** (топологической или полиномиально выпуклой) компакта K.

Заметим, что если $M(k) = \emptyset$ (т.е. если множество $\mathbb{C} \setminus K$ связно), то $\hat{K} = K$. Верно и обратное, если $\hat{K} = K$, то множество $\mathbb{C} \setminus K$ связно.

Смысл термина **полиномиально выпуклая оболочка** (используется также термин **полиномиальная оболочка**) будет раскрыт позднее.

Предложение 2.3

Пусть D - односвязная область в $\mathbb{C}$, а $K \subset D$ - компакт. Тогда $\hat{K} \subset D$.

Доказательство.

Если K такой, что $M(K) = \emptyset$, то $\hat{K} = K$ и утверждение очевидно.

Пусть $M(K) \neq \emptyset$ и $W_1 : \bigcup\limits_{m \in M(K)} \Omega_m(K)$. Тогда W_1 - ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$ (и, следовательно, в $\mathbb{C}_\infty$).
Далее, $W_2 := \Omega_\epsilon(K) \cup \{\infty\}$ - это открытое множество в $\mathbb{C}_\infty$, причем $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ и $W_1 \cup W_2 = \mathbb{C}_\infty \setminus K$.

Если $\hat{K} = K \cup W_1 \not\subset D$, то $W_1 \not\subset D$. Из этого вытекает, что $W_1 \cap (\mathbb{C}_\infty 0 \setminus D) \neq \emptyset$. Далее, $\infty \in W_2 \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus D)$, т.е. $W_2 \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus D) \neq \emptyset$. Но $\mathbb{C}_\infty \setminus D \subset W_1 \cup W_2$, откуда следует, что множество $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ несвязно. А это противоречит односвязности D. ■

Путь (кривая) в $\mathbb{C}$

Пусть $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$, $d_0 < d_1$. Пусть $I = [d_0, d_1] \subset \mathbb{R}$ отрезок вещественной прямой с началом в d_0 и концом в d_1.

- **Путем** в $\mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $\gamma : I \to \mathbb{C}$.
- Путь $\gamma : I \to \mathbb{C}$ называется **замкнутым**, если $\gamma(d_0) = \gamma(d_1)$.
- Множество $\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{C}$ называется **носителем** γ.

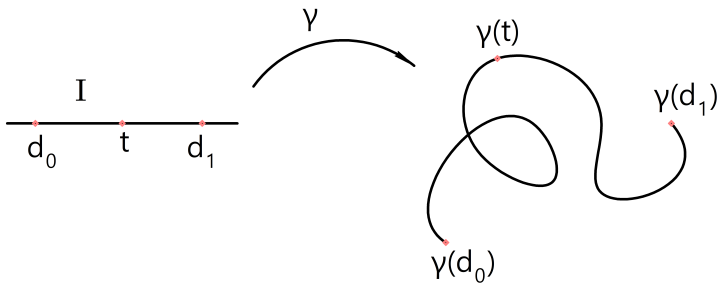

Рис. 2.1

Пример.

1) Рассмотрим отрезок $I = [0, 1]$ и отображение $\gamma(t) = e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$. В этом случае, носитель $\gamma^* = \Pi$ - единичная окружность. При $t = 0$ мы находимся в точке 1, при $t = \frac{1}{4}$ мы попадаем в точку i, и так далее.

2) При этом мы можем записать другой путь $\gamma_2(t) = e^{2\pi i t^2}$. Носитель останется тем же $\gamma_2^* = \gamma^* = \Pi$. Поменялась скорость обхода окружности.

3) Рассмотрим еще один путь $\gamma_3 = e^{4\pi i t}$. Носитель формально остается тем же, но окружность будет пройдена 2 раза.

Пусть $I_1 = [d_0, d_1]$ и $I_2 = [d_0', d_1']$ - два отрезка вещественной прямой.

- Пути $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{C}$ называются **эквивалентными**, если найдется непрерывная строго возрастающая функция $\psi : I_1 \to I_2$ такая, что $\psi(I_1) = I_2$ и $\gamma_1(t) = \gamma_2(\psi(t))$ $\forall t \in I_1$. **Обозначение**: $\gamma_1 \approx \gamma_2$.

- Отношение путей $\approx$ - это отношение эквивалентности. Если $\gamma_1 \approx \gamma_2$, то $\gamma_1^* \approx \gamma_2^*$ (носители эквивалентных путей совпадают).

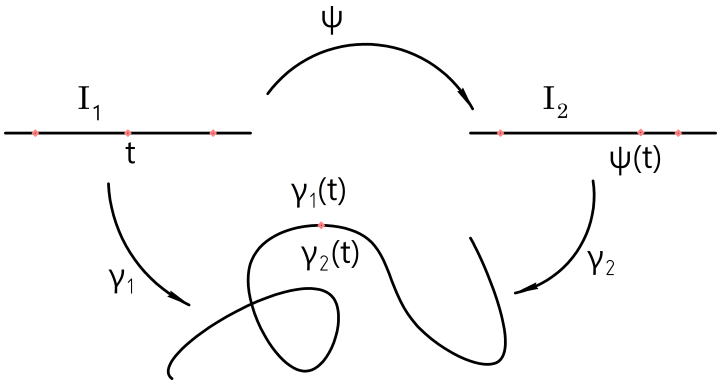

Рис. 2.2

Упражнение 2.3

Проверить, какие из следующих путей эквивалентны друг другу, а какие нет:

$$\left[\begin{array}{l} \gamma_1(t) = e^{2\pi i t} \text{ при } t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) = e^{4\pi i t} \text{ при } t \in [0,1] \\ \gamma_3(t) = e^{2\pi i t^2} \text{ при } t \in [0,1] \\ \gamma_4(t) = e^{-2\pi i t} \text{ при } t \in [-1,0] \\ \gamma_5(t) = e^{4\pi i \sin t} \text{ при } t \in [0, \frac{\pi}{6}] \end{array}\right.$$

- Класс путей, эквивалентных данному пути γ называется **кривой**. Другими словами, кривая Γ - это класс $\Gamma = \{\gamma' : \gamma' \approx \gamma\}$. Множество $\Gamma^* = \gamma^* \subset \mathbb{C}$ называется **носителем кривой** Γ.

- Любой из эквивалентных путей, определяющих кривую Γ, можно понимать как **параметризацию** Γ. Заметим, что Γ всегда можно задать путем, определенным на $[0,1]$: если путь $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C}$ определяет Γ, то $\gamma \approx \gamma_0$ при $\gamma_0(t) = \gamma(d_0 + (d_1 - d_0)t)$, $t \in [0,1]$.

Теорема Жордана

Определение 2.4.

1) Путь $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C}$ называется **жордановым**, если $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при всех $t_1, t_2 \in [d_0, d_1]$ с условием $t_1 < t_2$.

2) Путь γ называется **замкнутым жордановым**, если $\gamma(d_0) = \gamma(d_1)$, но $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при всех $t_1, t_2 \in [d_0, d_1)$ с условием $t_1 < t_2$.

3) Класс эквивалентных жордановых путей называется **жордановой кривой** (или просто **кривой**), а класс эквивалентных замкнутых жордановых путей - **замкнутой жордановой кривой** (или просто **замкнутой кривой**).

- Носитель всякой жордановой кривой гомеоморфен отрезку $[0, 1]$, а носитель всякой замкнутой жордановой кривой гомеоморфен $\mathbb{T}$.

- Пути и кривые в $\mathbb{C}_\infty$ определяются аналогично.

Теорема 2.1. (**теорема Жордана**)

1) Если Γ - жорданова кривая в $\mathbb{C}$, то $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ связно и $\partial\Omega = \Gamma$.

2) Пусть Γ - замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$. Тогда множество $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ не связно. Оно состоит из двух непересекающихся компонент: ограниченной области $D(\Gamma)$ и неограниченной области $D_\epsilon(\Gamma)$, причем $\partial D(\Gamma) = \partial D_\epsilon(\Gamma) = \Gamma^*$.

- Область $D(\Gamma)$ из второго утверждения теоремы Жордана называют **внутренностью** Γ, а область $D_\epsilon(\Gamma)$ - **внешностью** Γ.

- Область D в $\mathbb{C}$ называется **жордановой областью**, если $D = D(\Gamma)$ для некоторой замкнутой жордановой кривой Γ в $\mathbb{C}$.

На рисунке 2.3 мы используем одно и то же обозначение для кривой и ее носителя, так как это не приводит к двусмысленности.

Кривая Γ_1 на этом рисунке - это жорданова кривая, кривая Γ_2 - нет. Кривая Γ_3 - это замкнутая жорданова кривая и на рисунке отмечены области $D(\Gamma)$ и $D_\epsilon(\Gamma)$, а кривая Γ_4 - это замкнутая кривая, не являющаяся жордановой кривой.

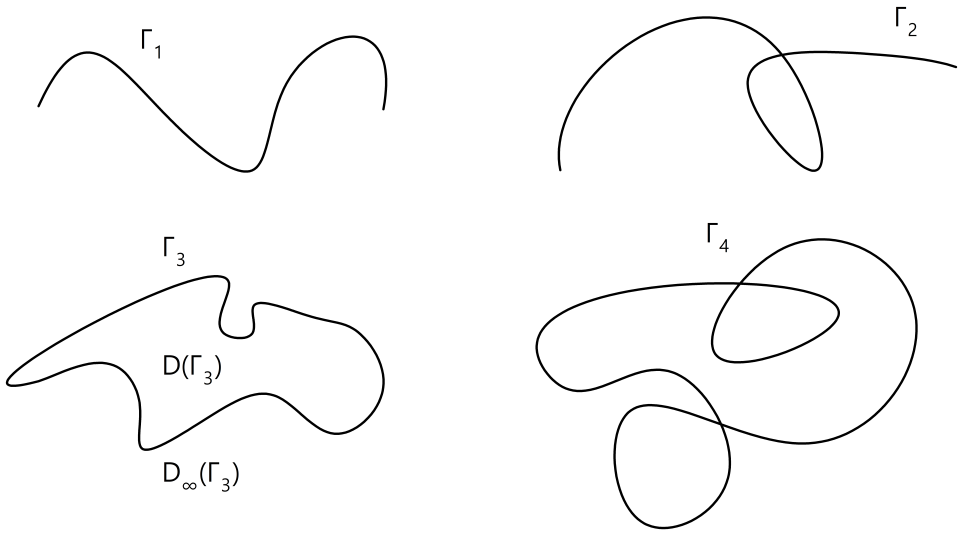

Рис. 2.3

Предложение 2.4 (следствие Предложения 2.3)
Пусть D - односвязная область в $\mathbb{C}$, а Γ - замкнутая жорданова кривая такая, что $\Gamma^* \subset D$. Тогда $D(\Gamma) \cup \Gamma^* = \hat{\Gamma} \subset D$, где, для краткости, использовано соглашение об обозначении $\hat{\Gamma^*} = \hat{\Gamma}$.

3. Лекция 3. Вещественная и комплексная дифференцируемость

Функции комплексного переменного

Наша ближайшая цель состоит в изучении класса функций, дифференциальные свойства которых хорошо согласуются с комплексной структурой.

Пусть E - некоторое подмножество комплексной плоскости и пусть на множестве E задано некоторое отображение $f : E \to \mathbb{C}$. Тогда говорят, что на множестве E задана **функция комплексного переменного** f. Для того, чтобы задать f необходимо задать на E две вещественнозначные функции, скажем $u(x, y)$ и $v(x, y)$, от двух вещественных переменных. Тогда, если $z = x + iy \in E$ то $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Простейшие примеры:

$$\begin{array}{lll} f(z) = z^2 & u(x,y) = x^2 - y^2 & v(x,y) = 2xy \\ f(z) = e^{2z-\overline{z}} & u(x,y) = e^x \cos 3y & v(x,y) = e^x \sin 3y \\ f(z) = |z|^2 + \overline{z}^2 & u(x,y) = 2x^2 & v(x,y) = -2xy \end{array}$$

Совокупность функций, **непрерывных** на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$ обозначим через $C(E)$. Кроме того, совокупность функций, **непрерывных** и **ограниченных** на E обозначим через $BC(E)$. При $f \in BC(E)$ положим $\|f\|_E = \sup\limits_{z \in E} |f(z)|$. Обозначим $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{C}}$.

Упражнение 3.1
Пусть K - компакт в $\mathbb{C}$, а $f \in C(K)$.

1) Доказать, что f ограничена на K.

2) Проверить, что существуют $a, b \in K$ такие, что $|f(a)| \geqslant |f(z)|$ и $|f(b)| \leqslant |f(z)|$ для всех $z \in K$.

3) Доказать, что f равномерно непрерывна на K.

Вещественная дифференцируемость функций комплексного переменного

Напомним, что функция $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определенная в окрестности $U(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^2$ и принимающая там вещественные значения, называется дифференцируемой в точке a, если

$$F(a + \Delta z) - F(a) = dF(a)\Delta z + o(\Delta z)$$

где $\Delta z \in \mathbb{R}^2$ произвольный малый вектор, $dF(a)\Delta z = d_1\Delta x + d_2\Delta y$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ - дифференциал F (в точке a), и $o(\Delta z) \to 0$ при $|\Delta z| \to 0$. Как хорошо известно, если функция F дифференцируема в точке a, то существуют $F'_x(a)$ и $F'_y(a)$ и выполнено

$$dF(a)\Delta z = F'_x(a)\Delta x + F'_y(a)\Delta y$$

Напоминание.
$o(1)$ (при $z \to a$) - это класс функций h, определенных в проколотой окрестности a (каждая h в своей) и таких, что $\lim\limits_{z\to a} h(z) = 0$. Далее, если g определена в $U'(a)$, то $o(g) = g(z)o(1)$ (при $z \to a$). Классы $O(1)$ и $O(g)$ (при $z \to a$) определяются также стандартно.

Ясно, что $o(x) \subsetneq o(z)$, $o(y) \subsetneq o(z)$ и $o(z) = o(\overline{z}) = o(|z|)$ при $z \to 0$. Проверка этих фактов оставляется в качестве простого упражнения.

Определение 3.1. Функция комплексного переменного f, определенная в окрестности $U(a)$ точки $a \in \mathbb{C}$ называется **вещественно дифференцируемой** (или, короче, $\mathbb{R}$ – **дифференцируемой**) в точке a, если $u = Re\ f$ и $v = Im\ f$ дифференцируемы в точке a как функции двух вещественных переменных.

Дифференциалом $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции f в точке a называется выражение $df(a) := du(a) + idv(a)$.

Таким образом (здесь и далее мы полагаем $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$)

$$df(a)\Delta z = (u'_x(a)\Delta x + u'_y(a)\Delta y) + i(v'_x(a)\Delta x + v'_y(a)\Delta y),$$

или, короче,

$$df(a)\Delta z = f'_x(a)\Delta x + f'_y(a)\Delta y$$

где $f'_x(a) := u'_x(a) + iv'_x(a)$ и $f'_y(a) := u'_y(a) + iv'_y(a)$.

Формулу для дифференциала $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции удобно переписать в несколько ином виде. Положим $\Delta\overline{z} = \overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y$ и выразим $\Delta x = \dfrac{1}{2}(\Delta\overline{z} + \Delta z)$ и $\Delta y = \dfrac{1}{2}(\Delta\overline{z} - \Delta z)$. Тогда

$$df(a)\Delta z = f'_z(a)\Delta z + f'_{\overline{z}}(a)\Delta\overline{z},$$

где

$$f'_z(a) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a := \frac{1}{2}(f'_x(a) - if'_y(a))$$

$$f'_{\overline{z}}(a) = \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_a := \frac{1}{2}(f'_x(a) + if'_y(a))$$

Выражения $f'_z(a)$ и $f'_{\overline{z}}(a)$ называются **производными Коши-Римана** функции f. Они определены для любой вещественно-дифференцируемой функции. Оператор $\overline{\partial} : f \to f'_z$ называется **оператором Коши-Римана**.
Несмотря на то, что "переменные" z и $\overline{z}$ не являются, формально говоря, независимыми, f'_z и $f'_{\overline{z}}(a)$ часто называют **(формальными) частными производными по** z и $\overline{z}$.

Пусть $\beta \in (-\pi, \pi]$. Пусть функция f определена в $U(a)$, $a \in \mathbb{C}$, и $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке a. Тогда существует

$$f'_{(\beta)}(a) := \lim_{\Delta z \to 0(\beta)} \frac{f(a + \Delta z) - f(a)}{\Delta z}$$

где $\Delta z \to 0(\beta)$ означает, что $\Delta z = re^{i\beta}$ и $r \to 0+$. Этот предел называют производной f по направлению β. Легко видеть, что

$$f'_{(\beta)}(a) = \frac{1}{e^{i\beta}} \lim_{r \to 0+} \frac{f(a + re^{i\beta}) - f(a)}{r} = e^{-i\beta}(f'_x(a)\cos\beta + f'_y(a)\sin\beta)$$

В частности, $f'_{(0)}(a) = f'_x(a)$, а $f'_{(\frac{\pi}{2})}(a) = -if'_y(a)$.

Величину $f'_{(\beta)}(a)$ удобно выразить через $f'_z(a)$ и $f'_{\overline{z}}(a)$:

$$f'_{(\beta)}(a) = e^{-i\beta}(f'_z(a)e^{i\beta} + f'_{\overline{z}}(a)e^{-i\beta}) = f'_z(a) + e^{-2i\beta}f'_{\overline{z}}(a)$$

Полезно отметить, что зависимость от β в последнем выражении имеется только во втором слагаемом.

Комплексная дифференцируемость

Пусть $a \in \mathbb{C}$, и пусть функция f определена в $U(a)$ и $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке a. Тогда дифференциал $df(a)$ функции f в точке a - это $\mathbb{R}-$линейная функция (переменного Δz).

Естественный шаг в построении теории функций, дифференциальные свойства которых согласованы со структурой комплексных чисел, состоит в том, чтобы выделить в классе $\mathbb{R}$-дифференцируемых функций **специальный подкласс, состоящий из всех функций, дифференциал которых обладает дополнительно свойством $\mathbb{C}$-линейности**.

Определение 3.2. Пусть $a \in \mathbb{C}$, а функция f определена в окрестности точки a и $\mathbb{R}$-дифференцируема в этой точке. Функция f называется $\mathbb{C}$-**дифференцируемой** (другими словами, **комплексно дифференцируемой**) в точке a, если ее дифференциал $df(a)$ в этой точке является $\mathbb{C}$-**линейной функцией** (переменного Δz).

Критерий $\mathbb{C}$-линейности
Пусть f - некоторая $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция в точке a. Тогда $df(a)\Delta z = f'_z(a)\Delta z + f'_{\overline{z}}(a)\Delta\overline{z}$. Как было показано ранее, $\mathbb{R}$-линейная функция $pz + q\overline{z}$ является $\mathbb{C}$-линейной тогда и только тогда, когда $q = 0$. Из этого непосредственно вытекает следующий критерий $\mathbb{C}$-дифференцируемости.

Предложение 3.1
Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$-дифференцируема в этой точке. Для того, чтобы функция f была $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке a необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих двух (эквивалентных) условий:

1) $f'_{\overline{z}}(a) = 0$,

2) $u'_x(a) = v'_y(a)$ и $u'_y(a) = -v'_x(a)$, где $u = Re\ f$, а $v = Im\ f$.

Доказательство.
$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $f'_{\overline{z}}(a) = 0$. Тогда $df(a)\Delta z = f'_z(a)\Delta z$, а такая функция является $\mathbb{C}$-линейной.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $df(a)$ (как функция от Δz) является $\mathbb{C}$-линейной. Так как $df(a)\Delta z = f'_z(a)\Delta z + f'_{\overline{z}}(a)\Delta\overline{z}$, то из критерия $\mathbb{C}$-линейности вытекает, что $f'_z(a) = 0$.

Покажем теперь, что условия 1) и 2) эквивалентны. В самом деле, пусть $f = u + iv$, тогда

$$f'_z(a) = \frac{1}{2}(f'_x(a) + if'_y(a)) = \frac{1}{2}(u'_x(a) - v'_y(a)) + \frac{i}{2}(u'_y(a) + v'_x(a))$$

Остается отделить вещественную и мнимую части в этом выражении и приравнять их к нулю. ■

Определение 3.3. Условия 1) и 2) Предложения 3.1 называются условиями Коши-Римана (другой термин - условия Даламбера-Эйлера).

Определение 3.4. Пусть f - функция, определенная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$.

Если существует предел $f'(a) := \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(a+\Delta z) - f(a)}{\Delta z}$, то величина $f'(a)$ называется **комплексной производной** функции f в точке a.

Предложение 3.2

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $\in \mathbb{C}$. Тогда

1) $f \in \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\{a\}) \Leftrightarrow$ существует $f'(a)$,

2) Если $f \in \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\{a\})$, то $f'(a) = f'_z(a)$ и, следовательно, $\forall \beta \in [0, 2\pi)$ выполнено $f'_{(\beta)}(a) = f'(a)$ (т.е. производные по всем направлениям функции f в точке a совпадают).

Доказательство.

Если функция комплексно-дифференцируема в точке a (т.е. $f \in \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\{a\})$), то $df(a)\Delta z = f'_z(a)\Delta z$. Переходя к приращениям, получим $f(a+\Delta z) - f(a) = f'_z(a)\Delta z + o(\Delta z)$. Поделим это выражение на Δz и получим условие существования производной $f'(a) = f'_z(a)$. Обратно доказывается аналогично. ■

Простой пример.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция $f(z) = z^n$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой всюду в $\mathbb{C}$. При этом $dz^n(a)\Delta z = na^{n-1}\Delta z$ для любого $a \in \mathbb{C}$ и, следовательно, $f'(a) = na^{n-1}$. В самом деле,

$$(a+\Delta z)^n - a^n = \Delta z \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \Delta z^{k-1} = \Delta z(na^{n-1} + o(1))$$

при $\Delta \to 0$. Заметим также, что для любого $\beta \in (-\pi, \pi]$ выполнено

$$f'_{(\beta)}(a) = e^{i\beta}(\partial_x (x+iy)^n|_a \cos\beta + \partial_y (x+iy)^n|a \sin\beta) = na^{n-1},$$

где $\partial_x f = f'_x$, а $\partial_y f = f'_y$ соответственно.

Матричная форма условий Коши-Римана.

Пусть функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке a. При этом f задает отображение

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

из окрестности точки a в $\mathbb{R}^2$, а $\mathbb{R}$-дифференцируемость f в точке a эквивалентна дифференцируемости F в этой точке. Пусть $dF|_a$ - дифференциал F в точке a.

Тогда матрица отображения $dF|_a$ (в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$) имеет вид

$$[dF]_a = \begin{pmatrix} u'_x(p,q) & u'_y(p,q) \\ v'_x(p,q) & v'_y(p,q) \end{pmatrix},$$

где $a = p + iq$.

Предложение 3.3 (упражнение)
Функция f, определенная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке a, является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке a, если и только если

$$[dF]_a = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

где F - отображение (3.1), а $A, B \in \mathbb{R}$. При этом $f'(a) = A + iB$.

Так, если f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке a, то $det[dF]_a = |f'(z_0)|^2 \geqslant 0$. В частности, в этом случае F вырождено в точке $a \Leftrightarrow f'(a) = 0$.

Первые свойства $\mathbb{C}$-дифференцируемых функций

Предложение 3.4 (упражнение)
Пусть f и g являются $\mathbb{C}$-дифференцируемыми в точке $a \in \mathbb{C}$, а $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$. Тогда $\lambda_1 f + \lambda_2 g$, fg и $\dfrac{f}{g}$ (при $g(a) \neq 0$) также $\mathbb{C}$-дифференцируемы в точке a и

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g)'(a) = \lambda_1 f'(a) = \lambda_2 g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\Big|_a = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Предложение 3.5 (теорема о производной сложной функции)
Пусть функция g является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке a, а функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $b = g(a)$. Тогда $f \circ g(z) = f(g(z))$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке a, причем $(f \circ g)'(a) = f'(b)g'(a)$.
Доказательство.
Пусть функция g задает отображение $G : U(a) \to \mathbb{R}^2$, а функция f задает отображение $F : U(b) \to \mathbb{R}^2$, соответственно. Здесь $U(a)$ и $U(b)$ - окрестности точек a и b соответственно. Предложение 3.3 дает:

$$[dG]_a = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix}, \qquad [dF]_b = \begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix},$$

где $g'(a) = A_1 + iB_1$ и $f'(b) = A_2 + iB_2$. Ясно, что функция $f \circ g$ задает отображение $F \circ G : U(a) \to \mathbb{R}^2$, для которого

$$[d(F \circ G)]_a = \begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

где $A := A_1A_2 - B_1B_2$ и $B := A_1B_2 + A_2B_1$. Остается заметить, что $A + iB = (A_2 + iB_2)(A_1 + iB_1)$. ■

Нам будет достаточно следующего (не самого общего) варианта теоремы об обратной функции.

Предложение 3.6 (теорема об обратной функции)
Пусть функция f такая, что отображение $f : U(a) \to U(b)$, $a \in \mathbb{C}$, $b = f(a)$, гомеоморфно, и пусть $g = f^{-1}$ в $U(b)$. Если $f \in \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\{b\})$ и $f'(a) \neq 0$, то $g \in \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\{b\})$ и выполнено $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
Доказательство.
Пусть $\Delta w \neq 0$ таково, что $b + \Delta w \in U(b)$. Тогда существует (причем единственное - в силу гомеоморфности) $\Delta z \neq 0$ такое, что $b + \Delta w = f(a + \Delta z)$. Тогда

$$\frac{g(b + \Delta w) - g(b)}{\Delta w} = \frac{\Delta z}{f(a + \Delta z) - f(a)} \to \frac{1}{f'(a)}, \quad \Delta w \to 0,$$

так как $\Delta z \to 0$ при $\Delta w \to 0$ в силу гомеоморфности f в $U(a)$. ■

Несложно проверить, что условия этого предложения будут выполнены, если, например, отображение F (определенное функцией f) непрерывно дифференцируемо в окрестности точки a и $det[dF]_a \neq 0$.

$\mathbb{C}$-дифференцируемость в бесконечности

Определение 3.5. Пусть функция f определена и конечна в окрестности ∞. Функция f называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой в ∞, если функция $g(w) = f\left(\dfrac{1}{w}\right)$, определенная в точке $w = 0$ условием $g(0) = f(\infty)$ такова, что $g \in \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\{0\})$. В таком случае по определению полагаем, что

$$f'(\infty) = g'(0) = \lim_{z \to \infty} z(f(z) - f(\infty)).$$

Это определение комплексной дифференцируемости в точке ∞ корректно, так как производные $\mathbb{C}$-дифференцируемой функции по всем направлениям совпадают.

Например, если $f(z) = \dfrac{1}{z}$ и $f(\infty) = 0$, то $f \in \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\{\infty\})$ и $f'(\infty) = 1$.

Голоморфные функции

Определение 3.6. Функция f называется **голоморфной** в точке $a \in \mathbb{C}_\infty$, если она определена и $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция f называется **голоморфной** в некоторой области $D \subset \mathbb{C}_\infty$, если она голоморфна в каждой точке этой области.

Обозначения.
Класс функций, голоморфных в точке $a \in \mathbb{C}_\infty$ будем обозначать символом $H(\{a\})$ (или $H(a)$). Класс функций, голоморфных в области $D \subset \mathbb{C}_\infty$ будем обозначать символом $H(D)$. Функции класс $H(\mathbb{C})$ называются **целыми**.

Кроме того, через $H(E)$ мы будем обозначать класс функций, каждая из которых определена и голоморфна в некоторой (своей для каждой функции) окрестности множества $E \subset \mathbb{C}_\infty$.

Примеры.

1) Пусть $f_1(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Условия Коши-Римана показывают, что $z = 0$ - это единственная точка, в которой f_1 является $\mathbb{C}$-дифференцируемой. Т.е. f_1 нигде не голоморфна.

2) Пусть теперь $f_2(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $f_2 \in H(\mathbb{C})$. В качестве простого **упражнения** предлагается проверить, что $e^z \in H(\mathbb{C})$, но ни функция z^n, ни функция e^z не голоморфны в ∞.

Комментарий.
Часто вместо термина "голоморфная функция" применяется термин "аналитическая функция". Раньше использовался также термин "регулярная функция". Однако сегодня термин "аналитическая функция" используется для функций, допускающих представление рядами весьма общего вида (голоморфные функции - это очень небольшой подкласс всех аналитических функций), а термин "регулярная функция" сейчас используется для обозначения ряда других свойств функций.

Аналитичность функций двух переменных.
Рассмотрим функцию $f(x, y)$, заданную в окрестности $U(a)$. Необходимо, чтобы в любом достаточно малом круге $B(a, \delta)$ функция представлялась в виде ряда:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{km}(x - x_a)^k (y - y_a)^m$$

локально-равномерно сходящегося в этом круге.

Неформально мы можем переписать этот ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{c}_{km}(z-a)^k(\overline{z}-\overline{a})^m$$

в $B(a,\delta')$, где $\delta'<\delta$. Это и есть неформальное понимание термина аналитичности.

В дальнейшем мы покажем, что голоморфные функции локально представимы рядами вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$.

Геометрический смысл комплексной производной, конформность

Определение 3.7. Пусть $a\in\mathbb{C}$ и $f\in\mathfrak{D}_{\mathbb{R}}(\{a\})$. Говорят, что f **конформна** в точке a, если $df(a)$ является (как функция от Δz) композицией гомотетии (растяжения) и поворота (с центром в 0). В этом случае пишем $f\in Conf(\{a\})$.

Предложение 3.7
Пусть $a\in\mathbb{C}$ и $f\in\mathfrak{D}_{\mathbb{R}}(\{a\})$. Тогда $f\in Conf(\{a\})\Leftrightarrow f\in\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\{a\})$ и $f'(a)\neq 0$, причем $df(a)$ в этом случае - это композиция растяжения с коэффициентом $k=|f'(a)|$ и поворота на угол $\theta=arg(f'(a))$.

Это утверждение непосредственно следует из определений $\mathbb{C}$-дифференцируемости и конформности функции в точке.

Предложение 3.8 (упражнение)
Пусть $f\in Conf(\{a\})$, причем $f=u+iv$, а функции u и v имеют непрерывные частные производные в окрестности точки a. Тогда отображение, определяемое функцией f сохраняет углы между гладкими кривыми в точке a.

Определение 3.8. Пусть $f:U(\infty)\to\mathbb{C}_\infty$. Скажем, что f **конформна в** ∞, если $g\in Conf(\{0\})$, где

$$g(w)=\begin{cases} f(1/w), & g(0)=f(\infty), \quad \text{при } f(\infty)\neq\infty,\\ \dfrac{1}{f(1/w)}, & g(0)=0, \quad \text{при } f(\infty)=\infty,\end{cases}.$$

Определение 3.9. Функция f называется **локально конформной** в области $D \subset \mathbb{C}_\infty$ (пишем $f \in Conf_0(D)$), если $\forall z \in D$ выполнено $f \in Conf(\{z\})$. Функция f называется **конформной в области** D (пишем $f \in Conf(D)$), если она локально конформна и взаимно-однозначна в D. **Голоморфные взаимно-однозначные** функции называются **однолистными**.

Предложение 3.9 (следствие Предложения 3.7)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, а $f : D \to \mathbb{C}$ - некоторая функция. Тогда

1) $f \in Conf_0(D) \Leftrightarrow f \in H(D)$ и $f'(z) \neq 0$ всюду в D;

2) $f \in Conf(D) \Leftrightarrow f \in H(D)$, $f'(z) \neq 0$ всюду в D и f взаимно однозначна в D.

Например, если $f(z) = z^2$, то функция $f \in Conf_0(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, но $f \notin Conf(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Рассмотрим эту функцию подробнее. Посмотрим, как z^2 отображает стандартные множества на плоскости. Будем считать, что на плоскости есть полярная сетка. Тогда посмотрим, во что переходят окружности $|z| = r$ и лучи $arg\ z = \alpha$ под действием функции z^2.
Представим $z = re^{i\theta}$, тогда $z^2 = re^{2i\theta}$, то есть лучи растягиваются (изменится скорость движения по этому лучу): $\{z : arg\ z = \alpha\} \overset{z \to z^2}{\to} \{z : arg\ z = 2\alpha\}$
Окружности перейдут в удвоенные окружности радиуса r^2: $\{z : \ |z| = r\} \overset{z \to z^2}{\to} 2 \times \{z : \ |z| = r^2\}$. Окружность удвоенная, так как если представить движение точки по окружности, то за время, пока $arg\ z = \alpha$ меняется от 0 до π, $arg\ z = 2\alpha$ меняется от 0 до 2π.

Рассмотрим верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{z : Im\ z > 0\}$. При отображении $z \to z^2$ верхняя полуплоскость перейдет в плоскость с вырезанным лучом, выходящим из начала координат и направленным в сторону положительной вещественной оси.

Значит дуги окружностей на верхней полуплоскости переходят в круги радиуса r^2 на плоскости с разрезом в точке пересечения с лучом.
Также если полуплоскость расположена под углом α к горизонтали, то луч, по которому проходит разрез, будет расположен под углом 2α к горизонтали (см. рис. 3.1).
Если $\exists z, -z \in D$, то z^2 не взаимно-однозначна (не конформна).

Упражнение 3.2

1) Проверить, что функция z^2 конформна в области $D \subset \mathbb{C}$ в том и только том случае, когда области D и $\{-z : z \in D\}$ не пересекаются.

2) Проверить, что функция e^z конформна в области $D \subset \mathbb{C}$ в том и только том случае, когда области D и $\{z + 2\pi i : z \in D\}$ не пересекаются.

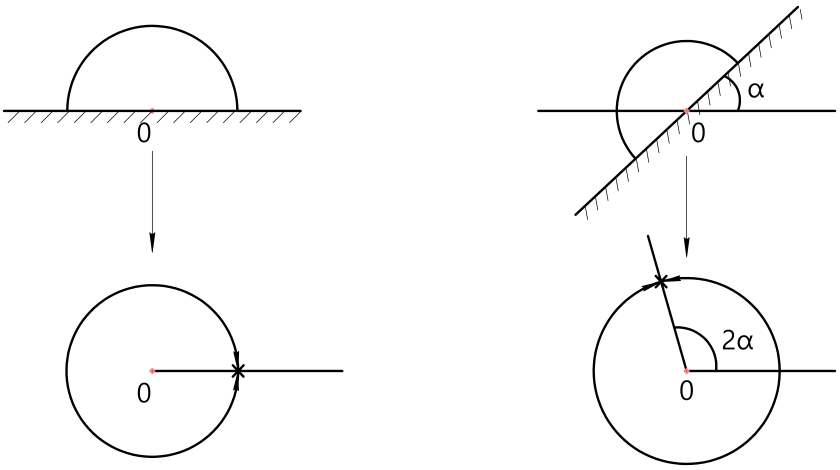

Рис. 3.1

4. Лекция 4. Дробно-линейные функции. Функция Жуковского

В этой лекции мы остановимся на свойствах элементарных функций комплексного переменного двух видов: на дробно-линейных функциях и на функции Жуковского. Вместе с рассмотренными ранее функциями e^z, $ln\ z$, z^n при $n \in \mathbb{N}$ и $\sqrt[n]{z}_{(0)}$ (и их различными композициями) это даст хороший запас элементарных функций комплексного переменного.

Дробно-линейные функции

Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$. Определим функцию $W : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ следующим образом: при $z \neq -\dfrac{d}{c}$ и $z \neq \infty$ положим

$$W(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,,, \tag{4.1}$$

а в точках $z = -\dfrac{d}{c}$ и $z = \infty$ доопределим функцию W так, чтобы $W\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$ и $W(\infty) = \dfrac{a}{c}$ при $c \neq 0$. а $W(\infty) = \infty$ при $c = 0$.

Определение 4.1. Функция вида (4.1) называется **дробно-линейной**. Помимо этого термина, также используется термин **дробно-линейное отображение**. Используются аббревиатуры **ДЛО** и **ДЛФ**. Совокупность всех ДЛФ обозначается символом $M\ddot{o}b$.

- При $c = 0$ ДЛФ W вида (4.1) является линейной.
- При $c \neq 0$ ДЛФ W вида (4.1) может быть записана в виде

$$W(z) = A + \frac{B}{z + C}\,,$$

где $A = \dfrac{a}{c}$, $B = \dfrac{(bc - ad)^2}{c^2}$ и $C = \dfrac{d}{c}$. Следовательно, W является композицией функций следующих типов ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а $z_0 \in \mathbb{C}$):

$$T_1(z) = \alpha z, \quad T_2(z) = z + z_0, \quad T_3(z) = \frac{1}{z}.. \tag{4.2}$$

Другими словами, любая ДЛФ является композицией линейных функций и, при необходимости, функций $\dfrac{1}{z}$.

Лемма 4.1
ДЛФ $W(\cdot)$ задает гомеоморфизм расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}_\infty$ на себя и является конформной всюду в $\mathbb{C}_\infty$.
Доказательство.
Ясно, что утверждение достаточно проверить для каждой из функций T_j, $j = 1, 2, 3$, по отдельности. Обратимость функций T_1, T_2, T_3 и непрерывность функций $T_1, T_2, T_3, T_1^{-1}(z) = \dfrac{z}{\alpha}$, $T_2^{-1}(z) = z - z_0$ и $T_3^{-1}(z) = \dfrac{1}{z}$ всюду в $\mathbb{C}_\infty$ очевидна.

Так как функции T_j, $j = 1, 2, 3$ взаимно-однозначны, то для проверки их конформности нам достаточно проверить их локальную конформность.

При всех $z \in \mathbb{C}$ имеем $T_1'(z) = \alpha \neq 0$ $T_2'(z) = 1$, т.е. функции T_1 и T_2 локально конформны в $\mathbb{C}$. Так как $T_1(\infty) = \infty$ и $T_2(\infty) = \infty$, то конформность T_1 и T_2 в ∞ эквивалентна конформности функций $g_1(z) = \dfrac{1}{T_1(\frac{1}{z})} = \dfrac{z}{\alpha}$ и $g_2(z) = \dfrac{1}{T_2(\frac{1}{z})} = \dfrac{z}{(zz_0 + 1)}$ в 0. Последнее вытекает из того, что $g_1'(0) = \dfrac{1}{\alpha} \neq 0$ и $g_2'(0) = 1$ соответственно.

Проверим теперь локальную конформность функции $T_3 = \dfrac{1}{z}$. Так как $T_3'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$, то функций T_3 локально конформна в $\mathbb{C}$, за исключением точки $z = 0$. Конформность функции T_3 в ∞ следует из конформности функции $g_3(z) = z$ в 0. Так как $T_3^{-1}(z) = \dfrac{1}{z}$, то конформность функции T_3 в начале координат следует из ее конформности в ∞ с использованием теоремы о производной обратной функции. ■

Мы получили класс отображений, которые осуществляют конформное отображение всей расширенной плоскости в себя.

Круговое свойство ДЛФ и сохранение симметрии при ДЛО

Нам потребуется понятие **обобщенной окружности**. Этим термином мы будем называть любую окружность или прямую в $\mathbb{C}$. Кроме того, обобщенной окружностью в $\mathbb{C}_\infty$ мы будем называть любую окружность в $\mathbb{C}$ или любую прямую в $\mathbb{C}$, дополненную точкой ∞.

Напоминание.
При стереографической проекции любая обобщенная окружность в $\mathbb{C}_\infty$ переходит в окружность на сфере (прямым соответствуют окружности, проходящие через северный полюс, а окружностям - не проходящие). Это обстоятельство и оправдывает использование термина обобщенная окружность.

Лемма 4.2 (круговое свойство ДЛО)

1) ДЛФ переводит любую обобщенную окружность в обобщенную окружность.

2) Любая обобщенная окружность может быть преобразована в любую другую обобщенная окружность при помощи подходящей ДЛФ.

Доказательство.
Первое утверждение очевидно справедливо для любой непостоянной линейной функции $W(z) = a_1 z + b_1$. Пусть теперь W - это функция вида (4.1), а $c \neq 0$. Тогда W может быть представлена в виде композиции линейных функций и функции $T_3(z) = \dfrac{1}{z}$.
Следовательно, для доказательства первого утверждения его остается проверить для функции T_3. Напомним, что в координатах (x, y), $x + iy = z$, любая обобщенная окружность задается уравнением

$$A(x^2 + y^2) + B_1 x + B_2 y + C = 0 \ ,, \tag{4.3}$$

где координаты $A, B_1, B_2, C \in \mathbb{R}$ не равны нулю одновременно ($A = 0$ для прямых и $A \neq 0$ для окружностей). Это уравнение можно записать в виде

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0, \quad \text{где} \quad B = \frac{1}{2}(B_1 - iB_2). \tag{4.4}$$

При отображении $z \to w = \dfrac{1}{z}$ множество $\Gamma = \{z : Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$ переходит в множество $\Upsilon = \{w : A + B\overline{w} + \overline{B}w + Cw\overline{w} = 0\}$, которое также является окружностью (при $C \neq 0$) или прямой (при $C = 0$).

Покажем теперь, что любая обобщенная окружность может быть преобразована в любую другую обобщенную окружность при помощи подходящей ДЛФ. В самом деле, любая окружность в $\mathbb{C}$ может быть преобразована в любую другую окружность при помощи сдвига и гомотетии, а любая прямая в $\mathbb{C}$ может быть преобразована в любую другую прямую при помощи сдвига и поворота. Остается заметить, что прямая $\mathbb{R} = \{Im\ z = 0\}$ при помощи ДЛО $z \to \dfrac{z-i}{z+i}$ преобразуется в окружность $\mathbb{T} = \{|z| = 1\}$. ■

Замечание 4.1
Пусть W - ДЛФ вида (4.1). Если обобщенная окружность Γ проходит через точку $-\dfrac{d}{c}$, то множество $W(\Gamma)$ - это прямая, а если Γ не проходит через $-\dfrac{d}{c}$, то множество $W(\Gamma)$ - это обычная окружность.

Понятие точек, симметричных относительно прямой, хорошо известно. Определим симметрию относительно окружности.

Определение 4.2. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ и $R > 0$. Точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ симметричны относительно окружности $C(z_0, R)$, если они лежат на одном луче с началом в z_0 и $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$. По определению считается, что z_0 и ∞ симметричны относительно $C(z_0, R)$.

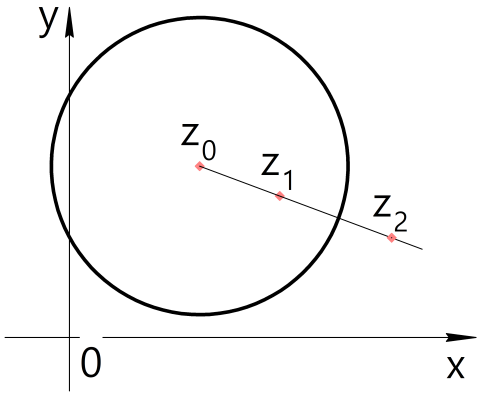

Рис. 4.1

Нетрудно проверить, что z_1 и z_2 симметричны относительно окружности $C(z_0, R)$ в том и только том случае, когда

$$z_2 = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_0} .. \tag{4.5}$$

Аналогично, z_1 и z_2 симметричны относительно прямой $\{z : B_1x + B_2y + C = 0\}$, где $B_1, B_2, C \in \mathbb{R}$ в том и только том случае, когда

$$z_2 = -\frac{\overline{B}}{B}\overline{z}_1 - \frac{C}{B}, \quad B = \frac{1}{2}(B_1 - iB_2) \ .. \tag{4.6}$$

То есть z_1 и z_2 симметричны относительно обобщенной окружности $\{z : Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$ тогда и только тогда, когда

$$z_2 = \frac{\overline{B}\overline{z}_1 + C}{A\overline{z}_1 + B}. \tag{4.7}$$

Равенство (4.7) имеет смысл не только при $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, но и если одна из этих точек равна ∞. Если $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, то (4.7) представимо в виде

$$A\overline{z}_1 z_2 + \overline{B}\overline{z}_1 + Bz_2 + C = 0$$

Лемма 4.3 (сохранение симметрии относительно обобщенной окружности при ДЛО)
Пусть W - ДЛФ, Γ - обобщенная окружность. Если точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty$ симметричны относительно Γ, то точки $w_1 = W(z_1)$ и $w_2 = W(z_2)$ симметричны относительно $W(\Gamma)$.
Доказательство.
Пусть Γ - это обобщенная окружность $\{z : Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$. Тогда z_1 и z_2 связаны соотношением $A\overline{z}_1 z_2 + \overline{B}\overline{z}_1 + Bz_2 + C = 0$. Напомним, что W является композицией линейных функций и функции $\frac{1}{z}$. Ясно, что линейная функция (представимая в виде композиции сдвига, поворота и растяжения), обладает требуемым свойством сохранения симметрии. Тот факт, что точки $w_1 = \frac{1}{z_1}$ и $w_2 = \frac{1}{z_2}$ симметричны относительно обобщенной окружности $A + B\overline{w} + \overline{B}w + C|w|^2 = 0$ непосредственно вытекает из соотношения $A\overline{z}_1 z_2 + \overline{B}\overline{z}_1 + Bz_2 + C = 0$ (достаточно подставить в него $z_1 = \frac{1}{w_1}$ и $z_2 = \frac{1}{w_2}$ и упростить получившееся выражение). ■

Лемма 4.4 (построение ДЛФ по "трем точкам")
Для любых трех различных точек $z_1, z_2, z_2 \in \mathbb{C}_\infty$ и для любых трех различных точек $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ существует единственная ДЛФ W такая, что $w_j = W(z_j)$ при $j = 1, 2, 3$.
Доказательство.
При $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$ определим ДЛФ W_1 :

$$W_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \times \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Если одна из точек z_j, $j = 1, 2, 3$, равна ∞, то положим

$$W_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \frac{z - z_1}{z_3 - z_1}, \quad \text{или} \quad \frac{z_3 - z_2}{z - z_2}$$

при z_3, z_2 и z_1 равным ∞ соответственно. Тогда W_1 отображает z_1, z_2, z_3 в 0,∞,1 соответственно. Аналогично определим ДЛФ W_2, которая отображает w_1, w_2, w_3 в 0,∞,1 соответственно. Тогда ДЛФ $W = W_2^{-1} \circ W_1$ переводит z_1, z_2, z_3 в w_1, w_2, w_3 соответственно.

Проверим единственность W. Пусть $\tilde{W}$ такая ДЛФ, что $\tilde{W}(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$. Тогда ДЛФ $F := W_2 \circ \tilde{W} \circ W_1^{-1}$ имеет три неподвижные точки: 0,∞,1. Так как $F(\infty) = \infty$, то $F(z) = az + b$. Далее, так как $F(0) = 0$, то $b = 0$. Наконец, так как $F(1) = 1$, то $a = 1$. Таким образом $F(z) = z$, откуда $\tilde{W} = W_2^{-1} \circ W_1 = W$. ■

Следствие
ДЛФ W, переводящая три данные различные точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ в три данные различные точки $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ определяется соотношением

$$\frac{W(z) - w_1}{W(z) - w_2} \times \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \times \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} .. \tag{4.8}$$

В случае, когда одна из точек z_1, z_2, z_3 и/или одна из точек w_1, w_2, w_3 равна ∞ каждое выражение вида $(* - \infty)$ или $(\infty - *)$ в соотношении (4.8) должно быть заменено на 1. Формальное объяснение и обоснование этого см в Лемме 4.4.

Определение 4.3. Если $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ - произвольные различные точки, то выражение

$$[a, b, c, d] = \frac{\dfrac{d - a}{d - b}}{\dfrac{c - a}{c - b}} = \frac{d - a}{d - b}\frac{c - b}{c - a}$$

называется **ангармоническим** или **сложным отношением** точек a, b, c, d.

Следствие
Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ - различные точки, и пусть $W \in Möb$. Тогда

$$[a, b, c, d] = [W(a), W(b), W(c), W(d)] .$$

Упражнение 4.1

Проверить, что различные точки $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ лежат на одной обобщенной окружности $\Leftrightarrow [a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.

Пример ДЛО верхней полуплоскости на себя

Такое ДЛО существует, так как любую обобщенную окружность можно перевести в любую обобщенную окружность, симметричные точки сохраняются, поэтому нам необходимо найти ДЛО, которое сохраняет вещественную прямую.

Пусть $\mathbb{C}_+ = \{z : Im\ z > 0\}$, а $\mathbb{C}_- = \{z : Im\ z < 0\}$.
Найдем общий вид ДЛФ W, отображающих $\mathbb{C}_+$ на себя. Из Леммы 4.3 вытекает, что $W(\mathbb{C}_-) = \mathbb{C}_-$, но тогда $W(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$, где $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
По Лемме 4.4 функцию W можно однозначно определить задав три различные точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}_\infty$ и их образы $w_j = W(z_j) \in \mathbb{R}_\infty$, $j = 1, 2, 3$. В силу (4.8) функция $W(\cdot)$ имеет вид $W(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc \neq 0$. Далее, пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}_+$, т.е. $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$. Так как

$$Im\ W(z_0) = \frac{(ad-bc)y_0}{(cx_0+d)^2 + c^2y_0^2}\ ,$$

то $W(z_0) \in \mathbb{C}_+ \Leftrightarrow ad - bc > 0$, так как если это выражение отрицательное, то точка уйдет в нижнюю полуплоскость.

Пример ДЛО $\mathbb{C}_+$ на $\mathbb{D}$

Найдем теперь общий вид ДЛО W верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на единичный круг $\mathbb{D} = \{|w| = 1\}$. Так как $W(\mathbb{C}_+) = \mathbb{D}$, то найдется точка $a \in \mathbb{C}$, такая, что $W(a) = 0$. Тогда, по Лемме 4.3, $W(\overline{a}) = \infty$. Возьмем $z_1 \in \mathbb{C}_+$, $z_1 \neq a$, и положим $W(z_1) = w_1$. По формуле (4.8) получаем, что

$$\frac{W(z)}{w_1} = \frac{z-a}{z-\overline{a}} \times \frac{z_1-\overline{a}}{z_1-a}, \quad \text{т.е.} \quad W(z) = q \cdot \frac{z-a}{z-\overline{a}}$$

Так как $W(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{T}$, то при всех $z \in \mathbb{R}$ точки должны перейти на единичную окружность, т.е.

$$\left| q\frac{z-a}{z-\overline{a}} \right| = 1\ ,$$

а так как $|z-a| = |z-\overline{a}|$ при $z \in \mathbb{R}$ (расстояние от вещественной точки до пары сопряженных), то $|q| = 1$. Следовательно, существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $q = e^{i\alpha}$. Таким образом, любое ДЛО верхней полуплоскости на единичный круг имеет вид

$$W(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}}, \quad a \in \mathbb{C}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi)\ .$$

Упражнение 4.2

Показать, что любое ДЛО $W(z)$ круга $\mathbb{D}$ на себя имеет вид

$$W(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \ .$$

Пример ДЛО "круговой луночки" на полосу

Найдем какое-либо ДЛО области $D_1 = \{z : |z-i| > 1,\ |z-2i| < 2\}$ (такие области называются **круговыми луночками**) на полосу $D_2 = \{w : 0 < Im\ w < \frac{1}{2}\}$

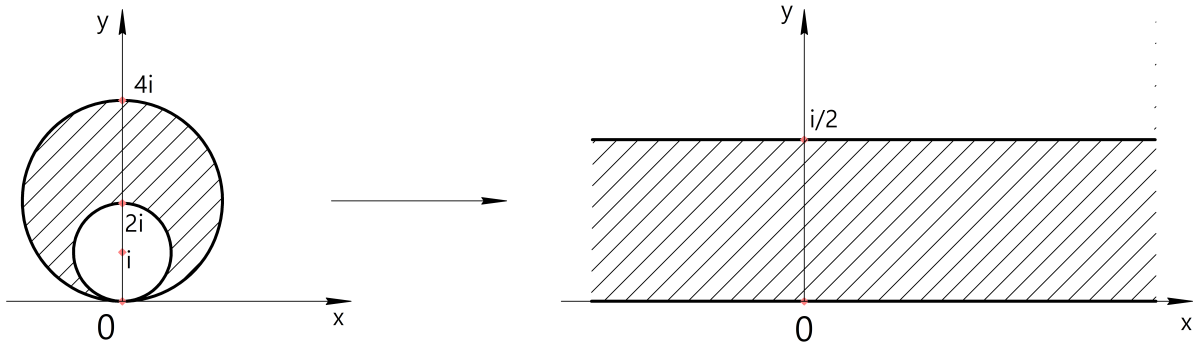

Рис. 4.2

Пусть $W(0) = \infty$. Так как точка 0 принадлежит обоим окружностям, ограничивающим D_1, то W отображает эти окружности в прямые. В силу того, что окружности $|z - i| = 1$ и $|z - 2i| = 2$ в точке $z = 0$ образуют нулевой угол, то их образами при отображении $z \to W(z)$ будут параллельные прямые. Далее, положим $W(2i) = 0$ и $W(4i) = \dfrac{i}{2}$.

Тогда окружности $|z - i| = 1$ и $|z - 2i| = 2$ перейдут в прямые $Im\ = 0$ и $Im\ w = \dfrac{1}{2}$ соответственно. Используя (4.8) легко получить, что $W(z) = \dfrac{iz + 2}{z}$.

Попробуем более простое рассуждение: применим отображение $z \to \dfrac{1}{z}$ и посмотрим, что из этого выйдет.
Окружность $|z - i| = 1$ перейдет в прямую, так как $0 \to \infty$. Эта прямая пройдет через точку $-\frac{i}{2}$ (так как эта прямая проходила через точку $2i$, значит на этой прямой будет лежать точка $\frac{1}{2i}$).
Аналогично, окружность $|z - 2i| = 2$ перейдет в прямую, проходящую через точку $-\frac{i}{4}$.
Далее, мнимая ось $i\mathbb{R}$ при отображении $z \to \frac{1}{z}$ перейдет в себя, так как $iy \to -\frac{i}{y}$ (y пробегает всю $\mathbb{R}$ ось, следовательно и $-\frac{1}{y}$ пробегает всю $\mathbb{R}$ ось).
Также мы знаем, что ДЛО конформно (сохраняет углы). Таким образом, при отображении мнимая ось остается на месте и получаются две прямые, перпендикулярные мнимой оси и проходящие через точки $-\frac{i}{2}$ и $-\frac{i}{4}$. Точка $3i$ при рассматриваемом отображении попадает между этими прямыми, значит мы попали в полосу между получившимися прямыми. Остается сделать сдвиг и расширить полосу.

Групповое свойство ДЛФ

Напомним, что $GL(2,\mathbb{C})$ - это группа всех невырожденных комплексных 2×2 матриц, а $SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) : det\ A = 1\}$.

Лемма 4.5
$M\ddot{o}b$ - это группа относительно операции композиции отображений. Группа $M\ddot{o}b$ изоморфна группе $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\}$

Легко проверяется, что композиция ДЛФ - это ДЛФ, а обратная функция к ДЛФ - это ДЛФ. Таким образом $M\ddot{o}b$ - это группа.

Рассмотрим отображение $\Phi : GL(2,\mathbb{C}) \to M\ddot{o}b$, определенное следующим образом:

$$\Phi : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to W(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Пусть $A_{1,2} \in GL(2,\mathbb{C})$ и $W_{1,2} = \Phi(A_{1,2})$. Тогда $\Phi(A_1A_2) = W_1(W_2(z))$ (соответствующие вычисления оставляются в качестве простого **упражнения**), т.е. Φ - это гомоморфизм $GL(2,\mathbb{C}) \to M\ddot{o}b$, причем $ker\ \Phi = \{ql : q \in \mathbb{C}^*\}$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ясно, что Φ можно рассматривать и как гомоморфизм $SL(2,\mathbb{C}) \to M\ddot{o}b$, а ядро последнего гомоморфизма равно $\{\pm 1\} \simeq Z_2$. По теореме о гомоморфизме

$$M\ddot{o}b \simeq GL(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}^* \simeq SL(2,\mathbb{C})/Z_2$$

Упражнение 4.3

1) Найти все сопряженные класса в группе $M\ddot{o}b$. Описать их в терминах неподвижных точек соответствующих ДЛО.

2) Доказать, что ДЛО T, имеющее единственную неподвижную точку $a \neq \infty$, удовлетворяют соотношению $\dfrac{1}{Tz-a} = \dfrac{1}{z-a} + b$, $b \in \mathbb{C}$.

3) Доказать, что ДЛО T, имеющее две неподвижные точки $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, удовлетворяют соотношению $\dfrac{Tz-a}{Tz-b} = q\dfrac{z-a}{z-b}$, $q \in \mathbb{C}$.

4) В условиях пунктов 2) и 3) выяснить, каким соотношениям удовлетворяет отображение T^n (степень означает n-кратную композицию отображений).

5) Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, t - вещественный параметр, $q > t$. Определим семейство ДЛО T_t так, что $\dfrac{T_t z - a}{T_t z - b} = q^t \dfrac{z-a}{z-b}$.
Доказать, что $\forall t$ точка $T_t w$ лежит на окружности, проходящей через точки a, b, w.

6) Найти ДЛО, переводящее эксцентрическое круговое кольцо в концентрическое.

Функция Жуковского

$$\mathscr{J}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Она названа в честь Н.Е. Жуковсого и имеет важные применения в теории крыла самолета. $\mathscr{J} \in H(\mathbb{C}^*)$, но $\mathscr{J}$ не голоморфна в 0 и ∞.

Функция $\mathscr{J}'(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right)$ обращается в ноль в ± 1, т.е. $\mathscr{J}$ локально конформна в $\mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}$.
Так как функция $g(z) = \dfrac{1}{\mathscr{J}(z^{-1})} = \dfrac{2z}{(z^2+1)}$ локально конформна в 0 (так как $g'(0) = 2$), то функция $\mathscr{J}$ локально конформна в ∞, а так как $\mathscr{J}(z) = \mathscr{J}(z^{-1})$, то $\mathscr{J}$ локально конформна и в 0. Итак, $\mathscr{J} \in Conf_0(\mathbb{C}_\infty \setminus \{\pm 1\})$.

Найдем, при каких условиях на область $D \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \{\pm 1\}$ функция $\mathscr{J}$ будет конформна в D. Для этого определим, для каких $z_1 \neq z_2$ выполнено $\mathscr{J}(z_1) = \mathscr{J}(z_2)$. Легко показать, что это выполнено, если $z_1 z_2 = 1$. Поэтому $\mathscr{J} \in Conf(D) \Leftrightarrow D$ **не содержит различных точек** z_1 **и** z_2 **с условием** $z_1 z_2 = 1$.

Такими областями являются, например, внутренность и внешность единичного круга $\mathbb{D}$ (так как все точки по модулю меньше или больше 1). Нетрудно проверить также, что верхняя полуплоскость $\mathbb{C}_+$ и нижняя полуплоскость $\mathbb{C}_-$ также не содержат точек z_1 и z_2, связанных соотношением $z_1 z_2 = 1$. Так как если $z_1 z_2 = 1$, то $z_1 = \dfrac{1}{z_2}$.
Запишем $z = x + iy$, тогда $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, и если $y > 0$, тогда $\dfrac{y}{x^2+y^2} > 0$, следовательно точка $\dfrac{1}{z}$ оказалась в нижней полуплоскости.
Поэтому, $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ также являются областями конформности функции Жуковского.

Чтобы наглядно представить себе отображение $z \to w = \mathscr{J}(z)$, выясним, во что оно переводит полярную координатную сетку. Пусть $z = re^{i\theta}$, и $w = \mathscr{J}(z)$. Тогда

$$w = u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\ .$$

Зафиксируем r: $r = r_0$, $r_0 > 1$. Образ кривой $|z| = r_0$ задается уравнением

$$\frac{u^2}{a_0^2} + \frac{v^2}{b_0^2} = 1, \quad \text{где} \quad a_0 = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \quad b_0 = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)\ .$$

Это уравнение эллипса с полуосями a_0 и $|b_0|$ и с центром в 0. Эллипс проходится однократно в положительном направлении, когда проходится окружность.
Если $r_0 < 1$, то мы получим тот же эллипс, но проходимый в обратную сторону. Это говорит об неоднолистности функции Жуковского всюду в плоскости, так, например, окружности с радиусами $\frac{1}{2}$ и 2 переходят в один и тот же эллипс, но проходятся в разных направлениях. На рисунке 4.3 одним цветом изображены окружности, которые отображаются в один эллипс, но проходятся в разных направлениях.

В общем случае:

- Если $r_0 \to 1$, то $a_0 \to 1$, а $b_0 \to 0$. Это отрезок $[-1, 1]$ с двумя "берегами" (верхняя половина окружности отображается на верхнюю часть отрезка, нижняя, соответственно, на нижнюю),
- Если $r_0 > 1$, то $b_0 > 0$. Это эллипсы, которые стягиваются к отрезку, при стремлении радиуса к 1, и которые проходятся в положительном направлении (против часовой стрелки),
- Если $r_0 < 1$, то $b_0 > 0$. Это эллипсы, которые стягиваются к отрезку, при стремлении радиуса к 1, и которые проходятся в отрицательном направлении (против часовой стрелки).

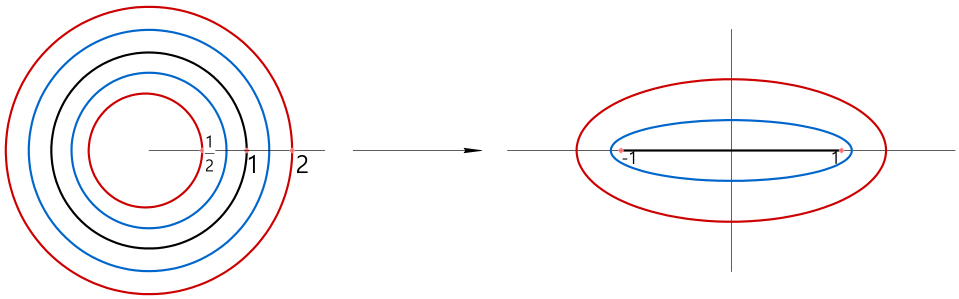

Рис. 4.3

Заметим наконец, что образом полуокружности $\{|z| = r_0, Im\ z > 0\}$ будет верхняя половина соответствующего эллипса при $r_0 > 1$ и нижняя половина этого эллипса при $r_0 < 1$. Аналогично, полуокружность $\{|z| = r_0, Im\ z < 0\}$ перейдет в нижнюю половину соответствующего эллипса при $r_0 > 1$ и в верхнюю половину этого эллипса при $r_0 < 1$.

Таким образом, $\mathscr{J} : \mathbb{D}_l \to \mathbb{C}_\infty \setminus [-1, 1]$ конформно. Круг $\mathbb{D}$ функция Жуковского также конформно отображает на $\mathbb{C}_\infty \setminus [-1, 1]$.

Далее рассмотрим верхнюю полуплоскость. Возьмем на верхней полуплоскости единичную окружность (половину окружности) и изобразим половины окружностей внутри единичной и вне единичной. Отображение остается тем же $z \to \mathscr{J}(z)$.

- Пусть $r_0 > 1$, $|z| = r_0$, а $\theta \in [0, \pi]$. Это верхняя половина эллипса, без точек пересечения с осью абсцисс (обозначена синим цветом на рис. 4.4),
- Пусть теперь $|z| = \dfrac{1}{r_0}$, $\theta \in [0, \pi]$ Это нижняя половина того же эллипса, так же без точек пересечения с осью абсцисс (обозначена красным цветом на рис. 4.4). Направления движения по обеим половинам эллипса так же показаны на рисунке.
- Точки единичной окружности $r_0 = 1$ переходят в горизонтальный отрезок $[-1, 1]$.

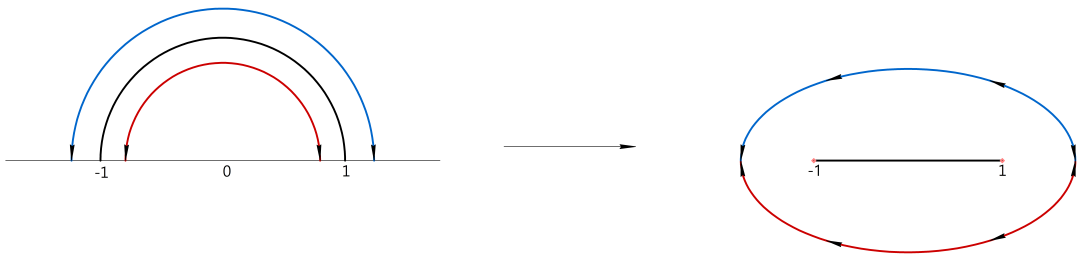

Рис. 4.4

В итоге мы получили, что $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ функцией Жуковского отображаются во множество $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$.

Упражнение 4.4
Найти образы лучей $\{arg(z) = \alpha\}$, $\alpha \in (-\pi, \pi]$ при отображении $z \to \mathscr{J}(z)$.

Приведем еще несколько примеров, связанных с функцией Жуковского:

- $\mathscr{J} : \{z : |z| < 1,\ Im\ z > 0\} \to \mathbb{C}_-$ конформно;

- $\mathscr{J} : \{z : |z| < 1,\ Im\ z < 0\} \to \mathbb{C}_+$ конформно;
- если $a, b \in (0,1)$, а $A = \mathscr{J}(a)$ и $B = \mathscr{J}(b)$, то $\mathscr{J} : \mathbb{D} \setminus ([-1,-a] \cup [b,1]) \to \mathbb{C} \setminus [-A,B]$, конформно (заметим, что отрезок $[-A,B]$ содержит $[-1,1]$).
- Пусть $T_0(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$. Тогда $T_0^{-1} = \dfrac{1+z}{1-z}$ и $\mathscr{J} = T_0^{-1} \circ z^2 \circ T_0$.

Проверка оставляется в качестве **упражнения.** Из этого легко вывести, в частности, все приведенные выше свойства отображения $z \to \mathscr{J}(z)$.

Пример, дающий интересную иллюстрацию свойств функции $\mathscr{J}$

Пусть $0 < b < 1$. Рассмотрим в $\mathbb{C}_\infty$ дугу Υ окружности, соединяющую точки -1 и 1 и проходящую через точку ib, и окружность с центром в точке ib и радиусом $R = \sqrt{1+b^2}$. Если α - угол $\angle(ib, 1, 0)$, то угол между касательной к дуге Υ в точке 1 и положительным направлением вещественной оси равен $\pi - 2\alpha$, а угол между касательной к $C(ib, R)$ в точке 1 и положительным направлением вещественной оси равен $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ (см. рис. 4.5).

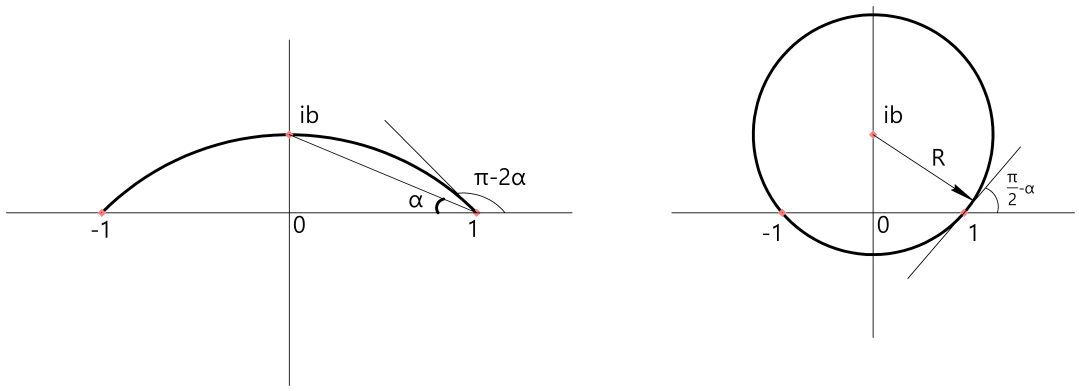

Рис. 4.5

Рассмотрим отображение $T_0(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$. Образом Υ при отображении $z \to T_0(z)$ будет луч, выходящий из начала координат под углом $\pi - 2\alpha$, так как:

- Точка 1 переходит в 0,
- Точка -1 переходит в ∞,
- Вещественная прямая при отображении $T_0(z)$ сохраняется.

Применим теперь отображение $T_0(z)$ к окружности. На этой окружности лежит точка -1, которая уйдет в бесконечность, поэтому эта окружность перейдет в прямую. Вещественная ось сохраняется, касательная в точке 1 была под углом $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$,

поэтому окружность переходит в прямую, образующую с вещественной осью угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Точка 0 переходит в -1, поэтому весь круг перейдет в полуплоскость, расположенную справа от прямой. Полученную область обозначим за $T_0(B)$.

Если теперь применить отображение $z \to z^2$ к $T_0(B)$, то мы в точности получим луч, который получался при применении отображения $T_0(z)$ к дуге Υ, так как возводя $\frac{\pi}{2} - \alpha$ мы получим $\pi - 2\alpha$, и функция z^2 конформна в любой полуплоскости, которая содержит 0.

Таким образом мы получили, что комбинация отображений $T_0^{-1} \circ z^2 \circ T_0$ переводит внутренность $C(ib, R)$ круга во внешность дуги Υ.

Заметим, что $T_0^{-1} \circ z^2 \circ T_0$ - в точности функция Жуковского.

Рассмотрим теперь более подробное изображение. Приведем пример преобразования полярной сетки координат во внешности круга $B(i, \sqrt{2})$ при отображении функцией $\mathscr{J}(z)$:

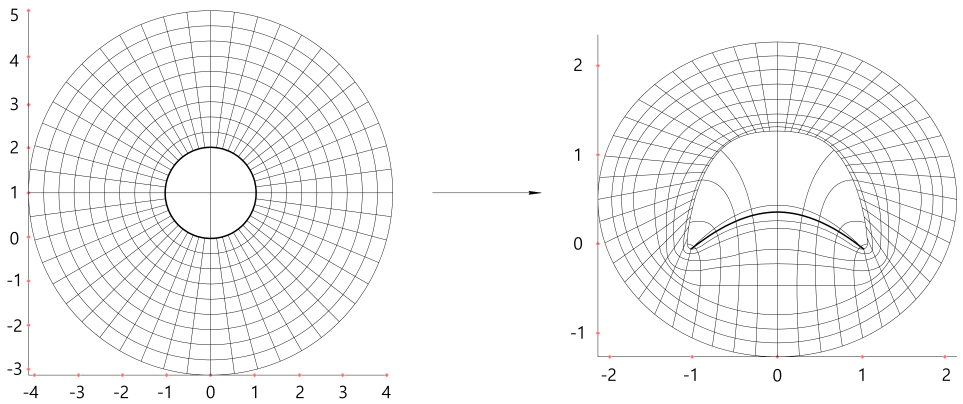

Рис. 4.6

Тригонометрические и гиперболические функции

Используя функции e^z и $\mathscr{J}(z)$ можно определить **тригонометрические и гиперболические функции** комплексного переменного. Для определения функций sin и cos мы воспользуемся формулой Муавра, согласно которой для любого $x \in \mathbb{R}$ справделиво равенство $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Из этого равенства вытекает,

что $\cos x = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ и $\sin x = \dfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Основываясь на двух последних равенствах, положим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,.$$

Заметим, что $\cos z = \mathscr{J}(e^{iz})$, а $\sin z = \mathscr{J}(-ie^{iz})$. Легко проверить, что $\sin, \cos \in H(\mathbb{C})$, причем $\cos' z = -\sin z$ и $\sin' z = \cos z$.

Упражнение 4.5
Найти, где функции $\sin(\cdot)$ и $\cos(\cdot)$ локально конформны, а также условия на область $D \subset \mathbb{C}$, при которых эти функции будут конформны в D.

Функции tg и ctg определяются также, как и в вещественном случае: $tg\ z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ и $ctg\ z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$. Отсыкание областей, в которых функции tg и ctg являются голоморфными, локально конформными, и конформными также оставляется в качестве **упражнения**.

Гиперболические функции sh, ch, th, cth комплексного переменного определяются следующим образом:

$$ch\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad sh\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad th\ z = \frac{sh\ z}{ch\ z}, \quad cth\ z = \frac{ch\ z}{sh\ z}\,.$$

Ясно, что $ch\ z = \cos(iz)$ и $sh\ z = -i\sin iz$, а из того, что $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ вытекает, что $ch^2 z - sh^2 z = 1$. Отыскание областей голоморфности, локальной конформности и конформности гиперболических функций также оставляется в качестве **упражнения**.

Естественность такого определения тригонометрических и гиперболических функций не вызывает сомнения. Более того, в определенном смысле такое определение этих функций является единственно возможным, но это мы сможем аккуратно сформулировать и обосновать позднее.

Задача нахождения конформных отображений заданных областей

Пусть даны области D и G в $\mathbb{C}_\infty$. Естественно спросить: **существует ли функция** $f \in H(D)$, конформная в D и такая, что $f(D) = G$?

В будущем мы докажем, что если D G **односвязны**, то ответ на этот вопрос **всегда утвердительный**. Если же D и G не являются односвязными, то ситуация окажется заметно сложнее, например, области $D = \{r_1 < |z - a| < R_1\}$ и

$G = \{r_2 < |w - b| < R_2\}$ окажутся конформно эквивалентными если и только если $\dfrac{R_1}{r_1} = \dfrac{R_2}{r_2}$.

Теория конформных отображений будет развита нами позднее.

5. Лекция 5. Элементарные функции. Степенные ряды

Элементарные функции (окончание)

- Завершая краткий обзор основных элементарных функций, приведем несколько иллюстраций соответствующих конформных отображений. Начнем с примера ДЛО единичного круга $\mathbb{D}$ на себя, переводящего точку 0 в точку $\frac{i}{2}$. Это отображение имеет вид $W_1(z) = \dfrac{2z+i}{2-iz}$. На рис. 5.1 приведен образ полярной координатной сетки в $\mathbb{D}$ при этом отображении:

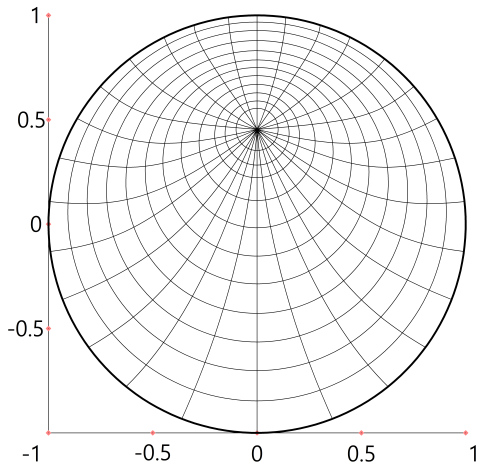

Рис. 5.1

- Рассмотрим теперь функцию $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \mathscr{J}(-ie^{iz})$.
Максимальными областями конформности функции $\sin z$, как несложно проверить, будут, например, $\tilde{\Pi}_{-\pi,\pi,+} = \{z : -\pi < Re\ z < \pi,\ Im\ z > 0\}$ или $\tilde{\Pi}_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} = \{z : -\dfrac{\pi}{2} < Re\ z < \dfrac{\pi}{2}\}$ (вертикальные полосы, в отличии от горизонтальных, обозначаемых символом $\tilde{\Pi}$).

  Образ (части) декартовой сетки при отображении области $\tilde{\Pi}_{-\pi,\pi,+}$ функцией $\sin z$ изображен на рис. 5.2.

  Образ (части) декартовой сетки при отображении области $\tilde{\Pi}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$ функцией $\sin z$ изображен на рис. 5.3.

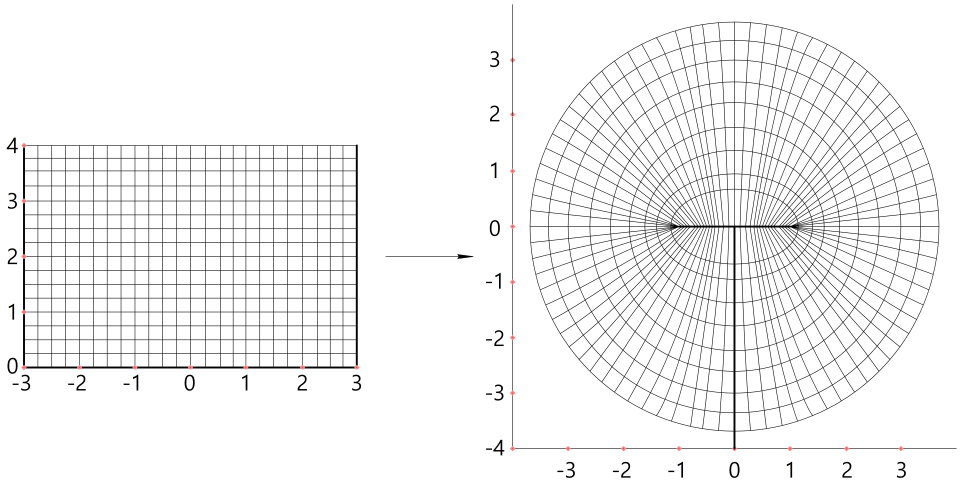

Рис. 5.2

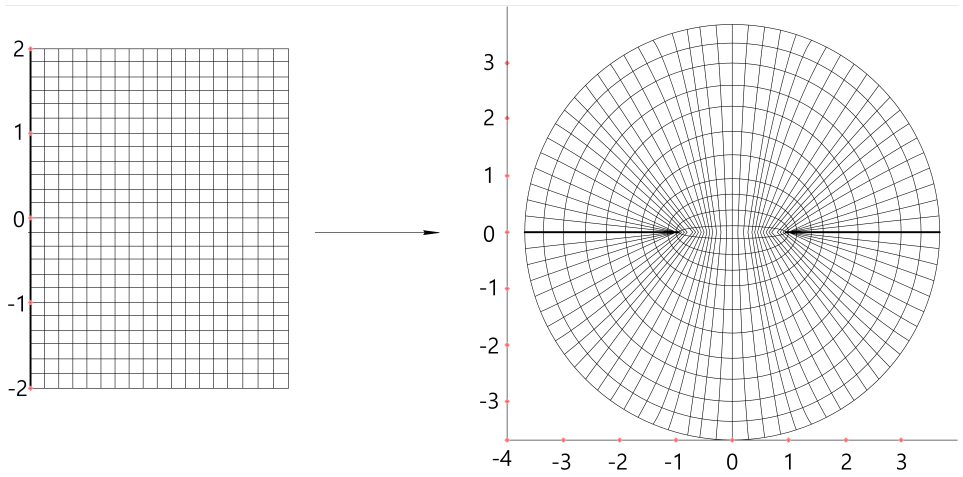

Рис. 5.3

Так как $\sin' z = \cos z$, а корни уравнения $\cos z = 0$ - это $\frac{\pi}{2}pik$, $k \in \mathbb{Z}$, то функция $\sin z$ локально конформна всюду в $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Проверка того факта, что области $\tilde{\Pi}_{-\pi,\pi,+}$ и $\tilde{\Pi}_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$ - это максимальные области конформности для $\sin z$ легко осуществляется исходя из соотношения $\sin z = \mathscr{J}(-ie^{iz})$.

В самом деле, равенство $\sin z' = \sin z''$ имеет место при выполнении одного из следующих двух условий: если $z' - z'' = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $e^{iz'} = e^{iz''}$. А если $z' + z'' = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то при $w' = ie^{iz'}$ и $w'' = ie^{iz''}$ получаем $w'w'' = 1$ и $\mathscr{J}(w') = \mathscr{J}(w'')$.

Числовые ряды

Несколько простых фактов про числовые ряды

Как и в вещественном случае **числовой ряд** - это формальная сумма $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$, где $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$.
Ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел S величин $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j$ при $n \to \infty$ (этот предел называется суммой ряда).

Очевидно, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$ сходится в том и только том случае, когда сходятся ряды $\sum\limits_{j=1}^{\infty} Re\ c_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} Im\ c_j$.

Совершенно аналогично вещественному случаю формулируется и доказывается **критерий Коши сходимости ряда**: ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$ сходится $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\left|\sum\limits_{j=n}^{n+m} c_j\right| < \varepsilon$ для всех натуральных $n > N$ и m.

Ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |c_j|$. Из критерия Коши немедленно вытекает, что абсолютная сходимость ряда влечет его сходимость.

Из критерия Коши также вытекает (как и в вещественном случае), что если ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$ сходится, то $c_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Упражнение 5.1
Пусть для последовательности комплексных чисел $\{c_n\}_{n \in N}$ выполнено одно из следующих условий:

1) найдутся $A \in \mathbb{R}_+$, $\rho \in (0,1)$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что $|c_n| < A\rho^n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $n > N$;

2) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right) = q < 1$;

3) найдутся $A \in \mathbb{R}+$, $p > 1$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что $|c_n| < An^{-p}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $n > N$.

Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится абсолютно.

Как и в вещественном случае показывается, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать в смысле произведения по Коши.

- Рассмотирм простой, но важный пример. Легко видеть, что $\forall z \in \mathbb{C}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ сходится абсолютно. Перемножая ряды, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (iy)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} \ ,$$

  откуда видно, что $e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

Пусть функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, определены на некотором множестве E.
Поточечная и **равномерная** сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ на E определяются совершенно аналогично вещественному случаю (как поточечная или, соответственно, равномерная сходимость последовательности функций $F_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$, $n \in \mathbb{N}$).

Нам потребуется следующее достаточное условие равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$: если существует сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ такой, что $q_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и для любой точки $z \in E$ и для всех индексов n, за исключением быть может конечного числа, выполнено $|f_n(z)| \leqslant q_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится на E равномерно.
Это достаточное условие равномерной сходимости функционального ряда называется **признаком сходимости Вейерштрасса**.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \ , , \tag{5.1}$$

где c_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, и a - некоторые комплексные числа.

- В качестве первого простого примера степенного ряда рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$. Частичные суммы F_n этого ряда легко находятся с использованием формулы суммы геометрической прогрессии:

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \ .$$

  Из этого представления легко видно, что $F_n(z) \to \dfrac{1}{1-z}$, $n \to \infty$, при всех $z \in \mathbb{D}$, причем эта сходимость равномерна на любом компакте $K \subset \mathbb{D}$ (проверка

оставляется в качестве **упражнения**).

Если же $z \notin \overline{\mathbb{D}}$, то общий член числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ не стремится к нулю и, следовательно, соответствующий ряд расходится.

- Как было показано выше, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ сходится к e^z при всех $z \in \mathbb{C}$, причем эта сходимость равномерная на любом компакте $K \subset \mathbb{C}$.

Предложение 5.1 (лемма Абеля)
Если ряд (5.1) сходится в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq a$, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно в любом замкнутом круге $\overline{B(a,r)}$ при $r < |z_0 - a|$.
Доказательство.
Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ сходится, то найдется $M > 0$ такое, что $|c_n(z_0-a)^n| \leqslant M$ для всех n. Пусть $r < |z_0 - a|$ и $z \in \overline{B(a,r)}$. Тогда $|z-a| < |z_0-a|$ и

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n|\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \leqslant M\left(\frac{r}{|z_0-a|}\right)^n .$$

Так как число $q := \dfrac{r}{|z_0-a|} < 1$, то ряд (5.1) всюду в $\overline{B(a,r)}$ оценивается сверху сходящейся геометрической прогрессией $M\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ и, следовательно, сходится равномерно на $\overline{B(a,r)}$ по признаку Вейерштрасса. ■

- Таким образом, естественными множествами сходимости степенных рядов являются круги, и возникает вопрос о наибольшем радиусе R круга $B(a,R)$, в котором ряд (5.1) сходится.

Предложение 5.2 (формула Коши-Адамара)
Пусть $R := \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|}}$.
Тогда ряд (5.1) сходится в круге $B(a,R)$, причем сходимость является равномерной на любом компактном подмножестве этого круга, и расходится при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a,R)}$.
Доказательство.
Рассмотрим случай $0 < R < \infty$ (случаи $R = 0$ и $R = \infty$ оставляются в качестве простого **упражнения**). Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|R^n} = 1 .$$

Отсюда вытекает, что $\forall\varepsilon > 0$ найдется $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n \geqslant N_0$ выполнено $|c_n|R^n < (1+\varepsilon)^n$. Пусть $K \subset B(a,R)$ - произвольный компакт и пусть $d = \max\limits_{z\in K}|z-a|$.

Выберем ε так, чтобы $q := \dfrac{(1+\varepsilon)d}{R} < 1$. Тогда, при всех $z \in K$,

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n|R^n\frac{|z-a|^n}{R^n} < (1+\varepsilon)^n\frac{d^n}{R^n} = q^n \ .$$

Так как $q < 1$, то ряд (5.1) сходится равномерно на K по признаку Вейерштрасса.

С другой стороны, $\forall\varepsilon > 0$ найдется последовательность $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $n_k \in \mathbb{N}$, такая, что $|c_{n_k}|R^{n_k} > (1-\varepsilon)^{n_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{B(a,R)}$. Выберем ε так, чтобы $q' := \dfrac{(1-\varepsilon|z-a|)}{R} > 1$. Тогда (проверка деталей оставляется в качестве **упражнения**)

$$|c_{n_k}||z-a|^{n_k} > (q')^{n_k} \ .$$

Так как $q' > 1$, то $(q')^{n_k} \to \infty$ при $k \to \infty$ и, следовательно, ряд (5.1) расходится в точке $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{B(a,R)}$, так как $c_{n_k}(z-a)^{n_k} \not\to 0$. ■

Определение 5.1. Число R, определенное в Предложении 5.2, называется **радиусом сходимости** ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, а круг $B(a,R)$ называется **кругом сходимости** этого ряда.

Покажем, что сумма степенного ряда является голоморфной функцией в круге сходимости этого ряда.

Предложение 5.3
Пусть R - радиус сходимости степенного ряда (5.1).
Обозначим через $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ сумму этого ряда. Тогда $f \in H(B(a,r))$, а комплексная производная этой функции равна $f'(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k(z-a)^{k-1}$.

Доказательство.
Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-a)^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(z-a)^n \ ,$$

где $c'_n = (n+1)c_{n+1}$ при $z \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. ряд, полученный почленным дифференцированием исходного). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|c'_n|} = \lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{(n+1)|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|c_{n+1}|} = \frac{1}{R} \ .$$

Таким образом, кругом сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k(z-a)^{k-1}$ является круг сходимости исходного ряда $B(a,R)$, и в этом круге определена функция $g(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k(z-a)^{k-1}$.

Эта функция, также как и исходная функция f, является непрерывной в круге $B(a,R)$. Проверим, что в любой точке $z \in B(a,R)$ существует комплексная производная $f'(z)$ функции f и $f'(z) = g(z)$.

При целом $n \geqslant 0$ обозначим $F_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_n(z-a)^n$ и $R_n(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Другими словами, F_n и R_n - это частичная сумма и остаток ряда в точке z.

Так как функция F_n при любом n является многочленом, то она голоморфна в любой точке z. Более того, $F_n'(z) \to g(z)$ для любого $z \in B(a,R)$ (так как F_n' является частичной суммой ряда, определяющего функцию g). Фиксируем произвольное $z_0 \in B(a,R)$ и $r \in \mathbb{R}$ такое, что $|z_0| < r < R$. Тогда для любого $z \in B(a,R)$ и для любого $n \geqslant 0$ имеем

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) =$$
$$= \left(\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0} - F_n'(z_0)\right) + (F_n'(z_0) - g(z_0)) + \frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\,.$$

Выберем и зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как z,$z_0 \in B(a,r)$, то

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k \frac{(z-a)^k - (z_0-a)^k}{z-z_0}\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k \sum_{j=0}^{k-1} (z-a)^{k-1-j}(z_0-a)^j\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} k|c_k|r^{k-1}$$

Так как последнее выражение представляет собой остаток сходящегося ряда, то найдется натуральное N_1 такое, что при всех $n > N_1$ выполнено

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} k|c_k|r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Далее, так как последовательность $F_n'(z_0)$ сходится к $g(z_0)$, то найдется натуральное N_2 такое, что при всех $n > N_2$ выполнено

$$|F_n'(z_0) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Пусть теперь $n > max\{N_1, N_2\}$. По определению комплексной производной функции F_n для рассматриваемого ε найдется $\delta > 0$ такое, что при всех z с условием $0 < |z-z_0| < \delta$ выполнено

$$\left|\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0} - F_n'(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Полученные неравенства показывают, что при всех $n > max\{N_1, N_2\}$ и при всех $z \in B'(z_0, \delta)$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0)\right| < \varepsilon \ .$$

Таким образом установлено, что в (произвольной) точке $z_0 \in B(a, R)$ существует комплексная производная функции f, равная g. Таким образом, требуемое утверждение полностью доказано. ■

Следствие

Пусть R - радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$, и пусть $f(z)$ - сумма этого ряда в круге $B(a, R)$. Тогда функция f является бесконечно дифференцируемой в круге $B(a, R)$ и все ее производные также являются голоморфными функциями в этом круге.

Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

сумма степенного ряда в его круге сходимости $B(a, R)$. Как следует из Предложения 5.3, $f \in H(B(a, R))$ и имеет место равенство

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-a)^{k-1} \ .$$

Далее, $f'(z) \in H(B(a, R))$ (снова как сумма степенного ряда в его круге сходимости), а ее производная вычисляется аналогично:

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-a)^{k-2} \ .$$

Этот процесс можно продолжать сколь угодно долго. В результате мы получим, что для любого натурального m функция $f^{(m)}$ (т.е. комплексная производная функции f порядка m) голоморфна в $B(a, R)$ и имеет вид:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-m+1)c_k(z-a)^{k-m} \ .$$

Из этой формулы вытекает, что $f^{(m)}(a) = m!c_m$, откуда

$$c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

и функция f представляется в виде следующего ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \ .$$

Ряд этого вида называется **рядом Тейлора** функции f. При $a = 0$ наряду с термином "ряд Тейлора" используют также термин **ряд Маклорена**.

Замечание
Заметим, что в данный момент мы получили утверждение о разложении в ряд Тейлора только для функций, являющихся суммами степенных рядов в их кругах сходимости. В дальнейшем мы увидим, что возможность локального представления степенными рядами является характеристическим свойством класса голоморфных функций.

Сделаем еще одно наблюдение о свойствах сумм степенных рядов, которое будет полезно в дальнейшем. Пусть ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

имеет круг сходимости $B(a, R)$. Рассмотрим ряд

$$F(z) = \tilde{c} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z-a)^{k+1} \ ,$$

где $\tilde{c} \in \mathbb{C}$. По формуле Коши-Адамара непосредственно проверяется, что круг сходимости этого ряда - это $B(a, R)$. Заметим, что $F \in H(B(a, R))$ и всюду в $B(a, R)$ выполнено равенство $F'(z) = f(z)$.

Функция F, обладающая указанным свойством называется **комплексной первообразной** f. Таким образом, всякая сумма степенного ряда имеет в круге сходимости этого ряда комплексную производную.

Определение 5.2. Скажем, что функция f, определенная в области $D \subset \mathbb{C}$ **локально представима в** D **степенным рядом**, если для любого круга $B(a, r) \subset D$ найдется степенной ряд вида (5.1) сходящийся к $f(z)$ в каждой точке $z \in B(a, r)$.

На самом деле, в этом определении более уместно говорить "представима степенными рядами" , подчеркивая тот факт, что соответствующие ряды отличаются для различных кругов. Но мы будем использовать термин, который представляется более удачным с литературной точки зрения. Более того, иногда мы будем пропускать слово "локально" , хотя его надо всегда иметь в виду.

Из установленных выше свойств степенных рядов вытекает, что всякая функция, локально представимая в некоторой области степенным рядом (рядами) голоморфна в этой области и, более того, бесконечно дифференцируема в ней.

Комментарий
Итак, у нас появился достаточно большой класс голоморфных функций - класс функций, представимых степенными рядами. Для дальнейшего изучения свойств голоморфных функций нам потребуется теория интегрирования функций комплексного переменного.

У нас возникает вопрос: что такое интегрирование функций комплексного переменного? Функции двух переменных на плоскости, поэтому есть два варианта: интегрирование по плоским множествам и интегрирование по одномерным объектам. Нам важно разобраться с интегрированием функций комплексного переменного по одномерным объектам, а именно по некоторым кривым.

Во многих случаях можно ограничиться интегрированием по достаточно гладким кривым. В нашем случае мы будем интегрировать непрерывные функции по спрямляемым путям.

Длина пути, спрямляемые пути и кривые

Пусть $\gamma : I \to \mathbb{C}$ - путь, заданный на отрезке $I = [d_0, d_1]$.

- Пусть $N \in \mathbb{N}$. Набор точек $T := \{t_0, t_1, \ldots, t_N\} \subset I$ с условием $d_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = d_1$ называется **разбиением отрезка** I.
  Величина $\delta_T = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N}(t_k - t_{k-1})$ называется **диаметром** разбиения T.

  Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ - разбиение отрезка I. Величина
  $$l(\gamma, T) := \sum_{j=1}^{N} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$
  представляет собой длину ломаной, которую мы будем называть вписанной в путь, с вершинами в точках $\gamma(t_j)$, $j = 1, \ldots, N$, лежащих на γ^*.

Определение 6.1
Величина $l(\gamma) := sup\ l(\gamma, T)$, где супремум берется по всевозможным разбиениям T отрезка I, называется **длиной** пути γ. Путь γ называется **спрямляемым**, если $l(\gamma) < +\infty$.

- Можно показать, что $l(\gamma) = \lim\limits_{T, \delta_T \to 0} l(\gamma, T)$.

- Если пути $\gamma_1 \approx \gamma_2$, то $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$. Следовательно, естественно определены **длина кривой** и свойство **спрямляемости кривой**.

Гладкие пути и кривые

Путь $\gamma(t) = \chi(t) + i\eta(t)$, заданный на отрезке $I = [d_0, d_1]$, называется **непрерывно дифференцируемым** (или **путем класса** C^1), если $\chi, \eta \in C^1(I)$.

Лемма 6.1
Если γ - это путь класса C^1, то γ спрямляем и имеет место формула для вычисления длины пути

$$l(\gamma) = \int\limits_{d_0}^{d_1} |\gamma'(t)|dt = \int\limits_{d_0}^{d_1} \sqrt{\chi'(t)^2 + \eta'(t)^2}dt \ .$$

Идея доказательства:
Пусть $T = \{d_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = d_1\}$ - разбиение I, а $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \dots, N$. Тогда запишем формулу для евклидовой длины ломаной

$$l(\gamma, T) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{(\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}))^2 + (\eta(t_k) - \eta(t_{k-1}))^2} \ ,$$

а $\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}) = \chi'(t'_k)\Delta_k$ и $\eta(t_k) - \eta(t_{k-1}) = \eta'(t''_k)\Delta_k$, где $t'_k, t''_k \in [t_{k-1}, t_k]$.
Т.е. $l(\gamma, T) = \sum\limits_{k=1}^{N} \sqrt{\chi'(t'_k)^2 + \eta'(t''_k)^2}\Delta_k$. Пусть

$$S(\gamma, T) - \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\chi'(t'_k)^2 + \eta'(t'_k)^2}\Delta_k \ .$$

Так как $|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leqslant |b - c|$ при $a, b, c \in \mathbb{R}$, то разность $l(\gamma, T) - S(\gamma, T)$ стремится к нулю при $\delta_T \to 0$.

- Путь γ класса C^1 называют **гладким**, если при всех $t \in I$ выполнено свойство $\gamma'(t) \neq 0$.

- Если путь γ обладает свойством, что I можно разбить на конечное число отрезков $I_1, \dots, I_N$ так, что все пути $\gamma|_{I_1}, \dots, \gamma|_{I_N}$ являются гладкими, то γ называется **кусочно-гладким**.

- Эквивалентность гладких путей определяется иначе, чем эквивалентность общих путей. Два гладких пути $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{C}$ называются **эквивалентными как гладкие пути**, если существует строго возрастающая непрерывно дифференцируемая функция $h : I_1 \to I_2$, имеющая непрерывно дифференцируемую обратную, такая, что $h(I_1) = I_2$ и $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$ при всех $t \in I_1$.

- **Гладкая кривая** - это класс гладких путей, эквивалентных в смысле предыдущего определения.

- Если γ_1 и γ_2 - гладкие жордановы пути, и если γ_1 и γ_2 эквивалентны как обычные пути, то они эквивалентны и как гладкие пути. Проверка этого факта оставляется в качестве **упражнения**.

Интеграл по кривой

Замечание
Пусть $\gamma : I \to \mathbb{C}$ - путь, определенный на отрезке $I = [d_0, d_1]$ и непрерывный на нем. **Носителем** пути называется ее образ в $\mathbb{C}$, т.е. $\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in [d_0, d_1]\}$. Неформально носитель можно назвать кривой, но у нас кривая - это класс эквивалентных путей.
Если пути эквиваленты, т.е. $\gamma_1 \approx \gamma_2$, то их носители совпадают, так как если пути эквивалентны, то существует строго возрастающая, непрерывная замена $\psi : I_1 \to I_2$ такая, что $\gamma_1(t) = \gamma_2(\psi(t))$ при $t \in I_1$.

Пусть функция $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ задана на носителе пути γ. Возьмем произвольное разбиение $T := \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка I и выберем произвольным образом точки $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ при $k = 1, \ldots, N$. Обозначим набор $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ символом ξ_T. Пусть

$$S(f, \gamma, T, \xi_T) := \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})).$$

Определение 6.2
Функция f называется **интегрируемой вдоль пути** γ, если существует конечный предел

$$\lim_{\delta_T \to 0} S(f, \gamma, T, \xi_T) := \int\limits_{\gamma} f(z)dz$$

Этот предел называется **интегралом** от f **вдоль** γ.

Комментарий
Существование предела в этом определении означает, что для любого $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $I = [d_0, d_1]$ с условием $\delta_T < \delta$ и для любого набора ξ_T, связанного с этим разбиением, выполнено

$$|S(f, \gamma, T, \xi_T) - \int\limits_{\gamma} f(z)dz| < \varepsilon.$$

- Наряду с $S(f,\gamma,T,\xi_T)$ рассматриваются еще и интегральные суммы

$$\tilde{S}(f,\gamma,T,\xi_T)=\sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k))|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|.$$

  Предел

$$\int\limits_{\gamma} f(z)|dz| = \lim_{\delta_T\to 0}\tilde{S}(f,\gamma,T,\xi_T),$$

  если он существует и конечен, называется **интегралом f вдоль γ по $|dz|$**.

- Разумеется, в общем случае $\int\limits_{\gamma} f(z)dz \neq \int\limits_{\gamma} f(z)|dz|$.

- Пусть $\gamma\approx\sigma$ - эквивалентные пути. Тогда для любой функции f, определенной на $\gamma^*=\sigma^*$, интегралы $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ и $\int\limits_{\sigma} f(z)dz$ существуют или нет одновременно. Аналогично, интегралы $\int\limits_{\gamma} f(z)|dz|$ и $\int\limits_{\sigma} f(z)|dz|$ существуют или нет одновременно.

- Если указанные интегралы существуют, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz=\int\limits_{\sigma} f(z)dz \quad \text{и} \quad \int\limits_{\gamma} f(z)|dz|=\int\limits_{\sigma} f(z)|dz|.$$

  Таким образом, корректно определены **интегралы от функции f вдоль кривой** $\Gamma=\{\gamma\}$, которые обозначаются $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ и $\int\limits_{\Gamma} f(z)|dz|$

Теорема 6.1
Если γ - спрямляемый путь с носителем γ^*, а функция $f\in C(\gamma^*)$, то интегралы $\int\limits_{\gamma} f\ dz$ и $\int\limits_{\gamma} f|dz|$ существуют.

Доказательство.
Предположим, что путь γ задан на отрезке $I=[d_0,d_1]$. Пусть $T=\{t_0,t_1,\dots,t_M\}$ и $T'=\{t'_0,t'_1,\dots,t'_N\}$ два разбиения отрезка I. Предположим, что $t_j\in T'$ при $j=1,\dots,M$. В таком случае говорят, что T' является измельчением T.

Выберем произвольным образом точки $\xi_j\in[t_{j-1},t_j]$, $j=1,\dots,M$, и $\xi'_k\in[t'_{k-1},t'_k]$, $k=1,\dots,N$. Эти наборы обозначим ξ_T и ξ'_T.
Проверим, что имеет место оценка

$$|S(f,\gamma,T,\xi_T)-S(f,\gamma,T',\xi'_T)|\leqslant\omega(\delta_T)l(\gamma), \tag{6.1}$$

где ω - модуль непрерывности функции $f(\gamma(t))$, непрерывной на I (таким образом $\omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$).

Комментарий

Пусть функция f определена и ограничена на множестве $E \subset \mathbb{C}$, а $\delta > 0$. **Модулем непрерывности** f на E называется величина $\omega_E(f,\delta) = sup\{|f(z) - f(w)| : z, w \in E, |z - w| \leqslant \delta\}$. По определению, равномерная непрерывность f на E означает, что $\omega_E(f,\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Заметим, что

$$\left|\sum_{j=1}^{M} f(\gamma(\xi_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) - \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi'_k))(\gamma(t'_k) - \gamma(t'_{j-k}))\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{M} \sum_{k:\ t'_k \in (t_{j-1}, t_j]} (f(\gamma(\xi_j)) - f(\gamma(\xi'_k)))(\gamma(t'_k) - \gamma(t'_{k-1})))\right| \leqslant \omega(\delta_T) l(\gamma)\ ,$$

так как $|\xi_j - \xi'_k|$ при всех k с условием $t'_k \in (t_{j-1}, t_j]$. Из этого вытекает, что если даны два разбиения $T^1 = \{t^1_0, t^1_1, \ldots, t^1_N\}$ и $T^2 = \{t^2_0, t^2_1, \ldots, t^2_M\}$ отрезка I и выбраны точки $\xi^1_k \in [t^1_{k-1}, t^1_k]$, $k = 1, \ldots, N$, $\xi^2_j \in [t^2_{j-1}, t^2_j]$, $j = 1, \ldots, M$, то

$$|S(f, \gamma, T^1, \xi^1_{T^1}) - S(f, \gamma, T^2, \xi^2_{T^2})| \leqslant (\omega(\delta_{T^1}) + \omega(\delta_{T^2}))l(\gamma).. \tag{6.2}$$

Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ - разбиение I на N равных частей, т.е. $t_k - t_{k-1} = \delta_T = \dfrac{d_1 - d_0}{N}$ при всех $k = 1, \ldots, N$. Пусть $\xi_k = t_k$, $k = 1, \ldots, N$. Так как последовательность $\{S_N = S(f, \gamma, T, \xi_T)\}_{N=1}^{\infty}$ интегральных сумм ограничена сверху величиной $\|f\|_{\gamma^*} l(\gamma)$, то найдется последовательность $\{N_m\}$, $N_m \to \infty$ при $m \to \infty$ такая, что последовательность $S_{N_m}(f, \gamma, T, \xi_T) \to A$ при $m \to \infty$. Из этого и (6.2) вытекает, что $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = A$.

Существование интеграла $\int\limits_{\gamma} f(z)|dz|$ доказывается аналогично. ■

В случае путей класса C^1 имеет место простая формула для вычисления интегралов $\int\limits_{\gamma} f\ dz$ и $\int\limits_{\gamma} f|dz|$, сводящая задачу к вычислению интегралов от вещественных функций.

Предложение 6.1

Пусть γ - путь класса C^1, заданный на $I = [d_0, d_1]$ и пусть $f \in C(\gamma^*)$. Тогда f интегрируема вдоль γ, причем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{d_0}^{d_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \quad \text{и} \quad \int\limits_{\gamma} f(z)|dz| = \int\limits_{d_0}^{d_1} f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Доказательство.
Пусть $\gamma(t) = \chi(t) + i\eta(t)$, причем $\chi, \eta \in C^1(I)$.
При $\delta > 0$ положим $\omega(\delta) := \omega_I(\chi'(t), \delta) + \omega_I(\eta'(t), \delta)$, так что $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Пусть $t \in [d_0, d_1]$, а $\theta > 0$ таково, что $[t, t+\theta] \subset [d_0, d_1]$. Тогда для всякого $t' \in [t, t+\theta]$ выполнено

$$|\gamma(t+\theta) - \gamma(t) - \gamma'(t')\theta| \leqslant \theta_\omega(\theta).. \tag{6.3}$$

В самом деле

$$\gamma(t+\theta) - \gamma(t) = \chi(t+\theta) - \chi(t) + i(\eta(t+\theta) - \eta(t)) = \chi'(t_1')\theta + i\eta'(t_2')\theta \ ,$$

при некоторых $t_1', t_2' \in [t, t+\theta]$ по теореме Лагранжа (примененной к вещественным функциям χ и η). Отсюда, для любого $t' \in [t, t+\theta]$, получаем:

$$|\gamma(t+\theta) - \gamma(t) - \gamma'(t')\theta| \leqslant |\chi'(t_1') - \chi'(t')|\theta + |\eta'(t_2') - \eta'(t')|\theta \leqslant \theta_\omega(\theta)$$

Выберем произвольное разбиение $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка I и точки $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ при $k = 1, \ldots, N$. Из (6.3) получаем

$$\left|S(f, \gamma, T, \xi_T) - \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k))\gamma'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} |f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) - f(\gamma(\xi_k))\gamma'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} |f(\gamma(\xi_k))|\omega(|t_k - t_{k-1}|)|t_k - t_{k-1}| \leqslant \|f\|_{\gamma^*}\omega(\delta_T)(d_1 - d_0) \to 0$$

при $\delta_T \to 0$. Так как путь γ класса C^1 спрямляем, то интеграл $\int\limits_\gamma f(z)dz$ существует (по Теореме 5.1). Из этого и из последней оценки вытекает, что существует интеграл $\int\limits_{d_0}^{d_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ и имеет место требуемое равенство. Второе равенство доказывается аналогично. ■

Операции над кривыми

Пусть Γ - кривая в $\mathbb{C}$, и пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ - путь, определяющий эту кривую. Возьмем отображение $\psi : t \to 1 - t$ и рассмотрим путь $\sigma = \gamma(\psi(t)) = \gamma(1-t)$ при $t \in [0,1]$. Тогда каждая точка носителя - это одновременно $\gamma(t)$ и $\sigma(1-t)$. Это означает, что мы идем по кривой с той же скоростью, но в обратную сторону. Пусть $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$ и $-\Gamma$ - кривая, определяемая γ^-.

- Кривая $-\Gamma$ называется кривой, **противоположной** (или **противоположно ориентированной**) по отношению к Γ.

- Пусть Γ_1 и Γ_2 две кривые, заданные путями $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$. Предположим, что конец кривой Γ_1 совпадает с началом Γ_2, т.е. $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Определим путь $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ так, что

$$\begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

  и зададим кривую Γ при помощи пути γ.

- Кривая Γ называется **суммой** кривых Γ_1 и Γ_2 (порядок слагаемых важен!) и обозначается $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

- Аналогично определяется сумма любого конечного числа кривых: $\Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n$. Здесь важно, чтобы при любом $k = 1, \ldots, n-1$ конец кривой Γ_k совпадал с началом Γ_{k+1}.

- Сумма кривых, не имеющих общих концов будет определена позднее в несколько иных терминах (см. понятие **цепи**).

Простейшие свойства интеграла вдоль кривой

- Пусть f_1 и f_2 интегрируемы вдоль кривой Γ, а $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} (a_1 f_1 + a_2 f_2) dz = a_1 \int\limits_{\Gamma} f_1 dz + a_2 \int\limits_{\Gamma} f_2 dz \ ,$$

$$\int\limits_{\Gamma} (a_1 f_1 + a_2 f_2) |dz| = a_1 \int\limits_{\Gamma} f_1 |dz| + a_2 \int\limits_{\Gamma} f_2 |dz| \ .$$

- Пусть f интегрируема вдоль кривых Γ_1 и Γ_2, причем конец Γ_1 совпадает с началом Γ_2. Тогда f интегрируема вдоль $\Gamma_1 + \Gamma_2$ и

$$\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} f \ dz = \int\limits_{\Gamma_1} f \ dz + \int\limits_{\Gamma_2} f \ dz \ ,$$

$$\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} f |dz| = \int\limits_{\Gamma_1} f |dz| + \int\limits_{\Gamma_2} f |dz|$$

- Функция f интегрируема (или не интегрируема) вдоль Γ и $-\Gamma$ одновременно. Если f интегрируема вдоль Γ, то

$$\int\limits_{-\Gamma} f\ dz = -\int\limits_{\Gamma} f\ dz\ , \quad \int\limits_{-\Gamma} f|dz| = \int\limits_{\Gamma} f|dz|\ .$$

- Пусть Γ - спрямляемая кривая, а f интегрируема вдоль Γ и ограничена на Γ^*. Тогда

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f\ dz\right| \leqslant l(\Gamma)\|f\|_{\Gamma^*}$$

- Пусть Γ - спрямляемая кривая. Пусть $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ - последовательность функций, $f_m \in C(\Gamma^*)$. Если $f_m \to f$ равномерно на Γ^* при $m \to \infty$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f_m dz \to \int\limits_{\Gamma} f\ dz, \quad m \to \infty.$$

- Пусть Γ - спрямляемая кривая, а $f \in C(\Gamma^*)$. Пусть $u = Re\ f$, а $v = Im\ f$, т.е. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда интегралы от функции f вдоль кривой Γ по dz и $|dz|$ выражаются через криволинейные интегралы первого и второго рода от функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\int\limits_{\gamma} f\ dz = \int\limits_{\gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{\gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy\ ,$$

$$\int\limits_{\gamma} f|dz| = \int\limits_{\gamma} u(x,y)ds + i\int\limits_{\gamma} v(x,y)ds\ ,$$

где $dz = dx + idy$, а ds - элемент длины на Γ.

6. Лекция 6. Интегрирование функций комплексного переменного

Комплексная первообразная

Пусть D - некоторая область в $\mathbb{C}$, а $f : D \to \mathbb{C}$ - некоторая функция. Напомним, что $H(D)$ - это класс всех голоморфных функций в D. **Определение 6.3** Функция $F \in H(D)$ такая, что $F' = f$, называется комплексной первообразной функции f в D.

Напомним, что если f - это сумма степенного ряда, то в его круге сходимости f имеет комплексную первообразную.

Пусть F - некоторая комплексная первообразная функции f в D. Тогда любая другая комплексная первообразная f в D имеет вид $F + c$, где $c \in \mathbb{C}$ - константа (это непосредственно вытекает из условий Коши-Римана).

Теорема 6.2
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, а $f \in C(D)$. Функция f имеет в D комплексную первообразную $\Leftrightarrow$ для любых двух (спрямляемых) кривых Γ и Υ в D, имеющих общее начало и конец, верно равенство

$$\int\limits_{\Gamma} f\ dz = \int\limits_{\Upsilon} f\ dz\ .$$

Доказательство.
$\boxed{\Rightarrow}$ Предположим, что f имеет в D комплексную первообразную F. Пусть $\gamma : [d_0, d_1] \to D$ - некоторый кусочно-гладкий путь с началом $a = \gamma(d_0)$ и концом $b = \gamma(d_1)$. Тогда:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{d_0}^{d_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int\limits_{d_0}^{d_1} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int\limits_{d_0}^{d_1} (F(\gamma(t))'dt = F(b) - F(a).$$

Таким образом, значение $\int \gamma f\ dz$ определяется разностью $F(b) - F(a)$ значений комплексной первообразной функции f в конечной и начальной точках пути интегрирования. В случае произвольных спрямляемых путей необходимо использовать аппроксимацию спрямляемой кривой подходящими ломанными.

Избавимся теперь от предположения кусочной гладкости пути. Пусть $\gamma : [d_0, d_1] \to D$ - спрямляемый путь. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f \in C(D)$, то найдется

такое $\delta > 0$, что если $z', z'' \in D$ и $|z' - z''| < \delta$, то $|f(z') - f(z'')| < \dfrac{\varepsilon}{3l(\gamma)}$.

Так как $\gamma \in C([d_0, d_1])$, то найдется такое $\nu > 0$, что если $t', t'' \in [d_0, d_1]$ и $|t' - t''| < \nu$, то $|\gamma(t') - \gamma(t'')| < \dfrac{\delta}{2}$.

Выберем разбиение $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[d_0, d_1]$ так, что $\delta_T < \nu$ и определим путь $\tilde{\gamma} : [d_0, d_1] \to D$ следующим образом:

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\gamma(t_k)\right),$$

при $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, N$. Другими словами, $\tilde{\gamma}^*$ - это ломанная с вершинами $\gamma(t_k)$, $k = 1, \ldots, N$. Так как $\delta_T < \nu$, то для любого $t \in [t_{k-1}, t_k]$ справедлива оценка

$$|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \leqslant |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| + \left|\frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right||\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)| \leqslant \delta \ .$$

Пусть $\xi_T = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ - некоторый набор "отмеченных" точек для разбиения T. Тогда

$$|S(f, \gamma, T, \xi_T) - S(f, \tilde{\gamma}, T, \xi_T)| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |f(\gamma(\xi_k)) - f(\tilde{\gamma}(\xi_k))||\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \ ,$$

$$\left|S(f, \gamma, T, \xi_T) - \int\limits_{\gamma} f \ dz\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left|S(f, \tilde{\gamma}, T, \xi_T) - \int\limits_{\tilde{\gamma}} f \ dz\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

где учтено, что $|\gamma(\xi_k) - \tilde{\gamma}(\xi_k)| \leqslant \delta$ и $\gamma(t_k) = \tilde{\gamma}(t_k)$ при $k = 0, 1, \ldots, N$. Отсюда, с учетом (6.1) получаем, что

$$\left|\int\limits_{\gamma} f \ dz - \int\limits_{\tilde{\gamma}} f \ dz\right| < \varepsilon.$$

Так как $\tilde{\gamma}$ - это кусочно-гладкий путь с началом в точке a и концом в точке b, то $\int\limits_{\tilde{\gamma}} f \ dz = F(b) - F(a)$. Но, так как ε произвольно, что и $\int\limits_{\gamma} f \ dz = F(b) - F(a)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\int\limits_{\gamma} f \ dz =$ не зависит от пути интегрирования, т.е. пусть для любых (спрямляемых) путей γ и σ в D (D может быть не односвязной) с общими началом и концом имеет место равенство $\int\limits_{\gamma} f \ dz = \int\limits_{\sigma} f \ dz$. Выберем и зафиксируем точку

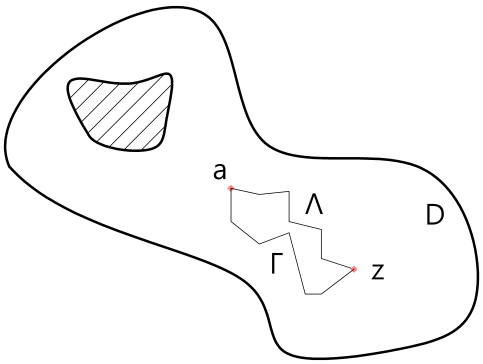

Рис. 6.1

$a \in D$ и для произвольной точки $z \in D$ рассмотрим ломанную Λ, соединяющую a и z в D. Мы знаем, что если выбрать любой другой путь Γ, соединяющий точки a и z, то интеграл от f по новому пути равен интегралу по Λ.
Тогда определим функцию

$$F(z) = \int\limits_{\Lambda} f \; d\zeta \; ,$$

которая (в силу предположения о независимости интеграла от пути интегрирования) зависит только от a и z.

Проверим, что $F \in H(D)$, а $F' = f$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как D - открыто, а $f \in C(D)$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $B(z, \delta) \subset D$ и $|f(z+w) - f(z)| < \varepsilon$ при $|w| < \delta$. Тогда (снова используя независимость интеграла от f от пути интегрирования) получаем, что

$$F(z+w) - F(z) = \int\limits_{[z,z+w]} f(\zeta) d\zeta \; ,$$

где $[z, z+w]$ - это отрезок, соединяющий точки z и $z+w$. Так как

$$\left| \frac{F(z+w) - F(z)}{w} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{w} \int\limits_{[z,z+2]} f(\zeta) d\zeta - \frac{f(z)}{w} \int\limits_{[z,z+2]} d\zeta \right| =$$

$$= \frac{1}{|w|} \left| \int\limits_{[z,z+2]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{|w|} \int\limits_{[z,z+2]} |f(\zeta) - f(z)||dz| \leqslant \frac{\varepsilon}{|w|} l([z, z+w]) < \varepsilon \; ,$$

то F имеет всюду в области D комплексную производную, равную f. Т.е. f имеет в D комплексную первообразную. ■

- В условиях Теоремы 6.2 кривая $L = \Gamma + (-\Upsilon)$ - это замкнутая кривая и если f имеет в области D комплексную первообразную, то $\int\limits_L f \; dz = 0$. Очевидно,

что аналогичное утверждение справедливо и для любой другой (спрямляемой) замкнутой кривой в D.

- Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$ и $a \in \mathbb{C}$. Так как функция $(z-a)^n$ имеет всюду в $\mathbb{C}$ комплексную первообразную $\dfrac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$, то для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ имеет место равенство $\int\limits_{\Gamma}(z-a)^n dz = 0$.

Пусть L - это замкнутая жорданова ломаная, состоящая из трех звеньев (**треугольник**), а $\Delta = D(L)$. Будем считать, что L задана при помощи такого пути, что соответствующий треугольник проходится начиная от одной из его вершин в направлении против часовой стрелки. Такой путь (и соответственную кривую) обозначим символом $\partial^+\Delta$ (смысл этого обозначения будет понятен позднее).

Предложение 6.2 (лемма Гурса)
Пусть D - область в $\mathbb{C}$ и $f \in H(D)$. Тогда для всякого треугольника $\Delta \Subset D$ выполнено $\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)dz = 0$.
Доказательство.
Фиксируем произвольный треугольник $\Delta \Subset D$. Построим последовательность вложенных треугольников $\{\Delta_j\}_{j=0}^{\infty}$ следующим образом. Пусть $\Delta_0 = \Delta$.

Положим
$$M_0 = \left|\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)dz\right|.$$
Разделим треугольник Δ_0 средними линиями на 4 треугольника $\Delta_{0,k}, k = 1,2,3,4$ (см. рис. 6.2).

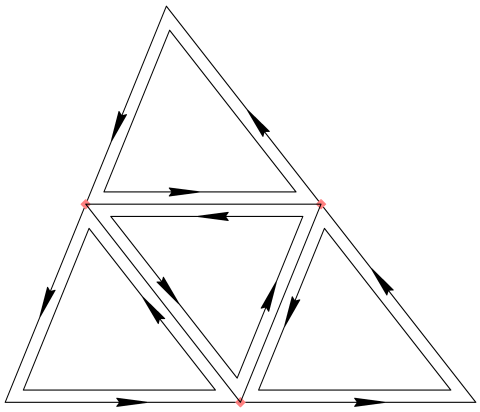

Рис. 6.2

Так как

$$\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\partial^+\Delta_{0,k}} f(z)dz$$

(интегралы от f по средним линиям исходного треугольника Δ_0 берутся дважды, в противоположных направлениях, и взаимно сокращаются), то среди треугольников $\Delta_{0,K}$, $k = 1, 2, 3, 4$, найдется такой треугольник (обозначим его Δ_1), что

$$M_1 := \left| \int\limits_{\partial^+\Delta_1} f(z)dz \right| \geqslant \frac{M_0}{4}.$$

На следующем шаге мы разделим средними линиями на 4 части треугольник Δ_1 и из получившихся треугольников Δ_1, k, $k = 1, 2, 3, 4$ выберем такой треугольник Δ_2, что

$$M_2 := \left| \int\limits_{\partial^+\Delta_2} f(z)dz \right| \geqslant \frac{M_1}{4}.$$

Продолжая построение по этой схеме, предположим, что треугольник Δ_j такой, что $\Delta_j \subset \Delta_{j-1} \subset \cdots \subset \Delta_1 \subset \Delta_0$ и

$$M_j := \left| \int\limits_{\partial^+\Delta_j} f(z)dz \right| \geqslant \frac{M_{j-1}}{4}$$

найден. Опять делим его средними линиями на 4 равных треугольника и выбираем один из них (обозначим его через Δ_{j+1}) так, что выполняется предыдущее неравенство с заменой j на $j+1$.

Построенная система треугольников обладает следующими свойствами:

$$l(\partial\Delta_j) = \frac{l(\partial(\Delta_0)}{2!} \quad \text{и} \quad M_j \geqslant \frac{M_0}{4^j},$$

а последовательность вложенных замкнутых треугольников $\{\overline{\Delta}_j\}_{j=0}^{\infty}$ имеет единственную общую точку $z_0 \in D$.

Первые три шага построения треугольников Δ_j (см. рис. 6.3).
Так как $f \in \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(z_0)$, то:

$$f(z) = p_1(z) + g(z, z_0)(z - z_0),$$

где $p_1(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$, а $g(z, z_0) \to 0$ при $z \to z_0$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется окрестность $U \subset D$ точки z_0 такая, что

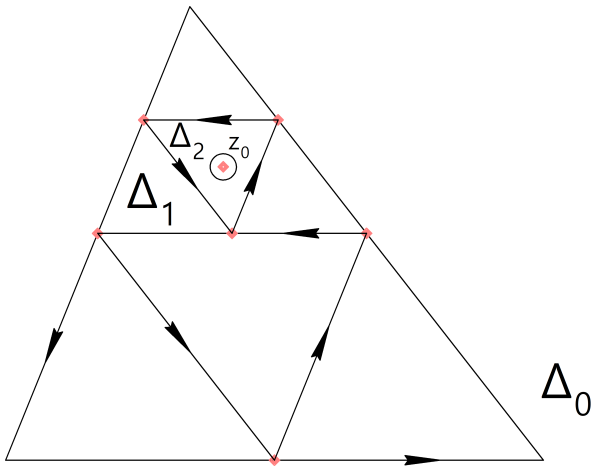

Рис. 6.3

$|g(z, z_0)| < \varepsilon$ при всех $z \in U$.

Начиная с некоторого индекса $j_0 \in \mathbb{N}$, все треугольники Δ_j при $j > j_0$ содержатся в U. Для таких индексов j имеет место оценка

$$\frac{M_0}{4^j} \leqslant \left| \int\limits_{\partial^+\Delta_j} f(z)dz \right| \leqslant \left| \int\limits_{\partial^+\Delta_j} p_1(z)dz \right| + \left| \int\limits_{\partial^+\Delta_j} g(z, z_0)(z - z_0)dz = 0 \right| \leqslant 0 + \varepsilon l(\partial\Delta_j)^2 = \varepsilon \frac{l(\partial\Delta_0)^2}{4^j}.$$

Окончательно получаем, что $M_0 \leqslant \varepsilon l(\partial\Delta_0)^2$, откуда $M_0 = 0$. ■

Замечание

В Теореме 6.1 утверждается, что если f имеет в области D комплексную первообразную, то $\int\limits_\Gamma f\ dz = 0$ для любой замкнутой спрямляемой кривой, в частности, для границы треугольника. Но если дана голоморфная функция $f \in H(D)$, то мы **не знаем**, имеет ли она комплексную первообразную. Поэтому нужна Л. Гурса, которая утверждает, что если $f \in H(D)$ и Δ - треугольник в D, то $\int\limits_{\partial^+\Delta} f\ dz = 0$.

Рассмотрим контрпример. Пусть $D = \mathbb{D} \setminus \{0\} = \{0 < |z| < 1\}$ - единичный круг без точки 0. Возьмем функцию $f = \dfrac{1}{z} \in H(D)$. Возьмем в этой области кривую $\gamma(t) = \dfrac{1}{2}e^{i\theta}$, где $\theta \in (0, 2\pi]$. Тогда

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}ie^{i\theta}d\theta}{\frac{1}{2}e^{i\theta}} = i\int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \neq 0$$

По Л. Гурса мы можем взять любой треугольник из нашей области, но треугольник, в котором лежит проколотая точка мы взять не можем, так как он компактно

как область не содержится в нашем круге.

Предложение 6.3 (усиленная лемма Гурса)
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, и пусть $a \in D$ - произвольная точка. Тогда для любой функции $f \in C(D) \cap H(D \setminus \{a\})$ и для любого треугольника $\Delta \subset D$ выполнено $\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)dz = 0$.

Доказательство.
Возможны три варианта расположения точки a относительно треугольника Δ. Если $a \notin \overline{\Delta}$, то мы оказываемся в условиях обычной леммы Гурса, из которой и следует требуемое утверждение.

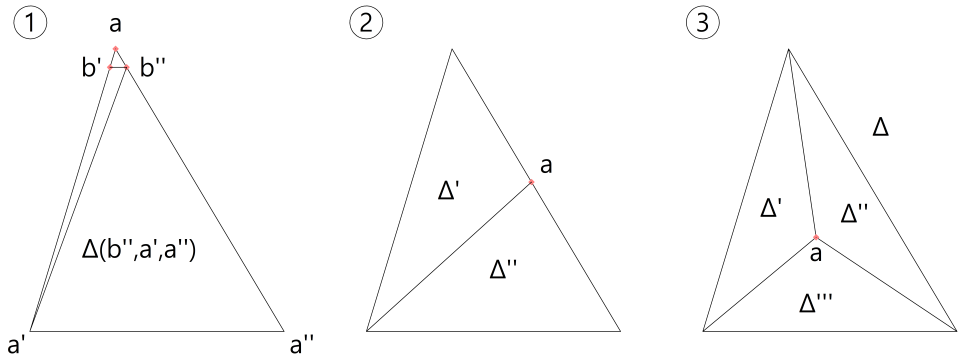

Рис. 6.4

Пусть теперь $a \in \partial\Delta$. В этом случае a может совпадать с одной из вершин Δ или лежать на его стороне.

1) Пусть a совпадает с одной из вершин Δ и пусть a' и a'' - оставшиеся вершины Δ. Выберем точки $b \in [a, a']$ и $b'' \in [a, a'']$, сколь угодно близкие к a. Обозначим через $\Delta(a, b', b'')$ треугольник с соответствующими вершинами. Нам потребуются также треугольники $\Delta(b', a', b'')$ и $\Delta(b'', a', a'')$. Заметим, что имеет место равенство

$$\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)dz = \int\limits_{\partial^+\Delta(a,b',b'')} f(z)dz + \int\limits_{\partial^+\Delta(b',a',b''} f(z)dz + \int\limits_{\partial^+\Delta(b'',a',a'')} f(z)dz$$

Второй и третий интегралы в правой части этого равенства равны нулю, так как функция f голоморфна в окрестности соответствующих треугольников (к ним применима обычная лемма Гурса). А первый интеграл можно сделать сколь угодно малым (в силу непрерывности f), выбирая точки b' и b'' подходящим образом.

2) Если точка a лежит на стороне треугольника Δ, но не является его вершиной, то проводя из противоположной к точке a вершины треугольника отрезок в

эту точку, треугольник Δ разрезается на два треугольника, скажем Δ' и Δ'', для которых точка a является одной из вершин. При этом

$$\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)dz = \int\limits_{\partial^+\Delta'} f(z)dz + \int\limits_{\partial^+\Delta''} f(z)dz$$

и задача сводится к ранее рассмотренному случаю.

3) Аналогично, если точка a лежит внутри треугольника Δ, то ее можно соединить отрезками со всеми вершинами этого треугольника. Таким образом, треугольник Δ разрезается на три треугольника Δ', Δ'' и Δ''', для каждого из которых точка a является вершиной. Снова получаем, что

$$\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)dz = \int\limits_{\partial^+\Delta'} f(z)dz + \int\limits_{\partial^+\Delta''} f(z)dz + \int\limits_{\partial^+\Delta'''} f(z)dz$$

и задача опять сводится к решенной ранее.

■

Теорема Коши для выпуклой области

Напомним, что область $D \subset \mathbb{C}$ называется **выпуклой**, если для любых двух точек $a, b \in D$ выполнено $[a, b] \subset D$.

Теорема 6.3 (теорема Коши для выпуклой области)
Пусть D - выпуклая область в $\mathbb{C}$, пусть $f \in H(D)$, а $\Gamma \subset D$ - замкнутая (спрямляемая) кривая. Тогда $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

Доказательство.
Здесь мы будем пользоваться Теоремой 6.1 и доказывать, что функция f имеет комплексную первообразную. Выберем и зафиксируем точку $a \in D$. Так как область D выпуклая, то для любой точки $z \in D$ выполнено $[a, z] \subset D$. Определим функцию

$$F = \int\limits_{[a,z]} f(z)dz \ .$$

Существует $\delta > 0$ такое, что $B(z, \delta) \subset D$ и $|f(z + w) - f(z)| < \varepsilon$ при $|w| < \delta$. Мы получили треугольник с вершинами в точках a, z и $z + w$, где $|w| < \delta$. Этот треугольник лежит в области, так как она выпуклая (выпуклая область односвязна),

треугольник - это жорданова кривая (у жордановой кривой оболочка - это область, которую кривая ограничивает), а также была лемма об оболочке, которая утверждала, что если у нас есть односвязная область и компакт, который лежит в этой области, то оболочка этого компакта тоже лежит в области. По совокупности этих утверждений мы находимся в условиях леммы Гурса. Поэтому мы получаем, что

$$F(z+w) - F(z) = \int\limits_{[z,z+w]} f(z)dz \ .$$

Аналогично тому, как соответствующее рассуждение было проведено в доказательстве Теоремы 6.1, получаем

$$\left|\frac{F(z+w)-F(z)}{w} - f(z)\right| < \varepsilon \ ,$$

откуда следует, что $F \in H(D)$ и $F' = f$, т.е. f имеет комплексную первообразную в D. По Теореме 6.1 из этого вытекает независимость интеграла по пути интегрирования и, следовательно, $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$. ■

Следствие
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, и пусть $f \in H(D)$. Тогда для любого круга $B(a,r) \subset D$ функция f имеет в $B(a,r)$ комплексную первообразную.

- Таким образом, вопрос о существовании **локальной** производной для голоморфной в области D функции f **всегда** имеет положительное решение. Но первообразная у f **во всей** D существует **не всегда**, как это будет видно из дальнейших конструкций.

- Из Теоремы 6.3 также вытекает что для любой $f \in H(B(a,r))$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, и для любых (спрямляемых) путей $\gamma_{1,2}$, $\gamma^*_{1,2}(a,r)$, с общими началом и концом, выполнено $\int\limits_{\gamma_1} f\ dz = \int\limits_{\gamma_2} f\ dz$.

Теорема Коши и интегральная формула Коши в простейших случаях

Напомним, что область $D \subset \mathbb{C}$ называется **выпуклой**, если для любых двух точек $a, b \in D$ выполнено $[a,b] \subset D$. В конце прошлой лекции был установлен следующий результат:

Теорема 6.3 (теорема Коши для выпуклой области)
Пусть D - выпуклая область в $\mathbb{C}$, пусть $f \in H(D)$, а $\Gamma \subset D$ - замкнутая (спрямляемая) кривая. Тогда $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

Напомним, что в основе доказательства этой теоремы лежала лемма Гурса (из равенства нулю интеграла от функции $f \in H(D)$ по границу любого треугольника в области D было доказано существование комплексной первообразной для f в D). Используя усиленную лемму Гурса (см. Предложение 6.3), Теорему 6.3 можно усилить.

Теорема 7.1 (усиленная теорема Коши для выпуклой области)
Пусть D - **выпуклая область** в $\mathbb{C}$, пусть $a \in D$, и пусть $f \in C(D) \cap H(D \setminus \{a\})$. Тогда для любой замкнутой (спрямляемой) кривой $\Gamma \subset D$ выполнено $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

- Доказательство Теоремы 7.1 вытекает из того факта, что функция $F(z) = \int\limits_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$, где $a \in D$ - произвольная фиксированная точка, определена всюду в D и является там комплексной первообразной для f (по сути дела доказательство аналогично доказательству Теоремы 6.3).

Имеет место следующее утверждение, в котором возникает интегральное представление голоморфных функций, известное как **интегральная формула Коши**. Пусть $B(a,r)$ - некоторый круг. Пусть путь $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ определен так, что $\sigma(t) = a + Re^{2\pi it}$. Ясно, что σ - это жорданов путь, а $\sigma^* = C(a,R) = \partial B(a,R)$. Пусть Υ - это кривая, заданная σ. Обозначим $\partial^+ B(a,R) = \Upsilon$ положительно ориентированную границу $B(a,R)$. Как и в случае с $\partial^+\Delta$ для треугольника Δ, смысл этого термина станет ясен позднее.

Предложение 7.1
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, пусть $f \in H(D)$, и пусть $B(a,R)$ - такой круг, что $\overline{B(a,R)} \subset D$. Тогда для любой точки $z \in B(a,R)$ выполнено

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(a,R)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Доказательство.
Зафиксируем $z \in B(a,R)$ и рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{при} \quad \zeta \neq z, \\ f'(z) \quad \text{при} \quad \zeta = z. \end{cases}$$

Заметим, что функция g непрерывна в области D, а также $g \in H(D \setminus \{z\})$. Таким образом, функция g удовлетворяет условию Теоремы 7.1 в круге $B(a, R+\delta)$ для некоторого $\delta > 0$ (который, очевидно, является выпуклой областью). Таким

образом,

$$0 = \int\limits_{\partial^+ B(a,R)} g(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\partial^+ B(a,R)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int\limits_{\partial^+ B(a,R)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \int\limits_{\partial^+ B(a,R)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \ .$$

Остается вычислить последний интеграл. Для этого заметим, что при $\zeta = \partial B(a,R)$ и $z \in B(a,R)$ выполнено $|z-a| < |\zeta - a|$ и

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\zeta - a)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-a)^{k-1}}{(\zeta - a)^k} \ .$$

Проинтегрируем почленно полученный (сходящийся) ряд перейдя к полярным координатам ($\zeta = Re^{i\theta}$): при $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{\partial^+ B(a,R)} \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^k} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^k e^{ik\theta}} = iR^{-(k-1)} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik(k-1)\theta} d\theta \ ,$$

откуда видно, что соответствующий интеграл равен $2\pi i$ при $k = 1$ и 0 при всех $k > 1$. ■

Замечания:

1) Тот факт, что $\int\limits_{\partial^+ B(a,R)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$ для любого $z \in B(a,R)$ впоследствии можно будет получить как тривиальное следствие теории индекса кривой относительно точки.

2) После того, как мы докажем интегральную теорему Коши в общем случае, нам станет доступно более простое доказательство интегральной формулы Коши: мы сможем сразу утверждать, что $\int\limits_{\partial^+ B(a,R)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\partial^+ B(z,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, где круг $B(z,r) \Subset B(a,R)$. Однако на данный момент мы не можем использовать этот прием, так как интегральная теорема Коши установлена нами только в выпуклых областях, а функция $\frac{1}{\zeta - z}$ голоморфна в области $B(a,R) \setminus \{z\}$, которая выпуклой, к сожалению, не является.

Локальное представление голоморфных функций степенными рядами

- Как было показано ранее, сумма степенного ряда является голоморфной функцией в круге сходимости этого ряда.
- Напомним, что функция f, заданная в области $D \subset \mathbb{C}$, локально представима в D степенным рядом, если для любого круга $B(a,r) \subset D$ найдется степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, сходящийся к f в этом круге.

Предложение 7.2
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, пусть (комплекснозначные) функции h и φ определены на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$. Предположим, что

1) $\varphi(E) \cap D = \emptyset$,
2) $M := \int\limits_E |h(\xi)| d\xi < \infty$,
3) Интеграл $f(z) = \int\limits_E \dfrac{h(\xi)d\xi}{\varphi(\xi) - z}$ существует при всех $z \in D$.

Тогда функция f локально представима в D степенным рядом.
Доказательство.
Пусть $B(a,r) \subset D$. Тогда при всех $z \in B(a,r)$ и $\xi \in E$ выполнено $\left|\dfrac{z-a}{\varphi(\xi)-a}\right| \leqslant \dfrac{|z-a|}{r} < 1$. Из этого следует, что при $z \in B(a,R)$ и $\xi \in E$ имеет место разложение

$$\frac{1}{\varphi(\xi)-z} = \frac{1}{(\varphi(\xi)-a)-(z-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\varphi(\xi)-a)^{n+1}},$$

причем сходимость равномерная на E при каждом $z \in B(a,r)$. Домножая правую и левую части полученного равенства на $h(\xi)$ и интегрируя по E получаем

$$f(z) = \int\limits_E \frac{h(\xi)d\xi}{\varphi(\xi)-z} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \int\limits_E \frac{h(\zeta)d\zeta}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}}.$$

Пусть $c_n = \int\limits_E \dfrac{h(\xi)d\xi}{(\varphi(\xi)-a)^{n+1}}$.

Так как $|c_n| \leqslant \dfrac{M}{r^{n+1}}$, то при $z \in B(a,r)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ сходится, коль скоро

$|c_n(z-a)^n|q^n$, при $q = \dfrac{|z-a|}{r} < 1$. ■

Из Предложений 7.1 и 7.2 вытекает возможность локального представления голоморфных функций степенными рядами.

Теорема 7.2
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, а $f \in H(D)$. Тогда f локально представима в D степенным рядом.

Доказательство.
Пусть $B(a,r) \subset D$. По интегральной формуле Коши (для кругов) получаем, что при всех $z \in B(a,r)$ выполнено

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(a,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \ .$$

Применим Предложение 6.4 для $E = [0, 2\pi]$, $\varphi(\xi) = a + re^{i\xi}$ и $h(\xi) = \dfrac{1}{2\pi} re^{i\xi} f(a + re^{i\xi}$. Получаем, что при $z \in B(a,r)$ выполнено

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \ .$$

где

$$c_n = \int\limits_E \frac{h(\xi)d\xi}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(a,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \ ,$$

причем соответствующий ряд сходится в $B(a,r)$ локально равномерно. ■

Следствие
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, а $f \in H(D)$. Тогда f бесконечно дифференцируема в D и $f^{(m)} \in H(D)$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

В самом деле, если $f \in H(D)$, то f локально представима в D степенным рядом. Тогда, как было доказано ранее, f' также локально представима в D степенным рядом, т.е. $f' \in H(D)$, и так далее.

Следующее утверждение объединяет несколько замечаний, связанных с только что полученным утверждением о локальной представимости голоморфной функции степенным рядом.

Предложение 7.3

1) Пусть $f \in H(B(a,R))$, пусть $r_1, r_2 \in (0,R)$ и $\Upsilon_j = \partial^+ B(a, r_j)$ при $j = 1, 2$. Тогда выполнены равенства

$$c_n(f,a) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon_1} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon_2} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ .$$

Величины $c_n(f,a)$ называются **коэффициентами Тейлора** функции f в точке a.

2) Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$, причем ряд сходится локально равномерно в некотором круге $B(a,R)$. Тогда $b_n = c_n(f,a)$

Заметим, что равенство интегралов в утверждении 1) мы пока не можем вывести из интегральной теоремы Коши, так как она нами доказана пока только для выпуклых областей (а функция $\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ голоморфна лишь в области $B(a,R) \setminus \{a\}$, которая не выпукла).

Доказательство.

Согласно Предложению 7.2 функция f представима в круге $B(a, r_1)$ рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{1,n}(z-a)^n$.

Как было доказано ранее, f бесконечно дифференцируема в $B(a,r_1)$ и $\forall m \in \mathbb{N}$ функция $f^{(M)}$ представима в $B(a,r_1)$ рядом

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} c_{1,n}(z-a)^{n-m}.$$

Отсюда видно, что $f^{(m)}(a) = m! c_{1,m}$. Равенство $f^{(m)}(a) = m! c_{2,m}$ доказывается абсолютно аналогично.

Для доказательства утверждения 2) равенство $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ нужно умножить на $\dfrac{1}{(z-a)^{k+1}}$ (при всех $k \in \mathbb{Z}_+$) и проинтегрировать по $\Upsilon = \partial^+ B(a,r)$ при некотором (произвольном) $r < R$. Так как $\int\limits_{\Upsilon} (z-a)^{-1} dz = 2\pi i$ и $\int\limits_{\Upsilon} (z-a)^m dz = 0$ при всех целых $m \neq -1$, то

$$c_k(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon} \frac{dz}{(z-a)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int\limits_{\Upsilon} \frac{dz}{(z-a)^{k+1-n}} = b_k$$

■

- Напомним, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(f,a)(z-a)^n$, где $c_n(f,a)$ - это **коэффициенты Тейлора** функции f в точке a, называется **рядом Тейлора** этой функции в данной точке.

Комментарий
У нас были комплексные степенные ряды $\sum c_n(z-a)^n$. Мы начали с того, что доказали, что суммы таких рядов голоморфны в кругах сходимости. После этого была цепочка утверждений про интегрируемость:

1) Существование комплексной производной эквивалентно тому, что интеграл по замкнутому пути равен нулю.

2) Если функция голоморфна, то интеграл по треугольнику равен нулю (лемма Гурса).

3) У голоморфной функции в выпуклой области существует комплексная первообразная, и интеграл по замкнутому пути равен нулю.

4) Голоморфная функция в любом круге внутри области, в которой функция голоморфна, может быть записана в виде $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^+ b(a,R)} \dfrac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$, $z \in B(a,R)$ (интегральная формула Коши)

5) Из интегральной формулы Коши мы получили локальное представление голоморфной функции степенным рядом вида $\sum c_n(z-a)^n$.

Ряды вида $\sum c_n(z-a)^n$ - это подкласс среди рядов вида $\sum d_{k,m}(x-x_0)^k(y-y_0)^m$. Функции, локально представимые рядами последнего вида, называются аналитическими.

Таким образом, голоморфные функции аналитичны, но не наоборот.

Предложение 7.4 (неравенства Коши для коэффициентов Тейлора)
Пусть $f \in H(B(a,R))$. Тогда при любом $r < R$ имеет место неравенство

$$|c_n(f,a)| \leqslant \frac{M_r(d)}{r^n}, \quad \text{где} \quad M_r(f) = \|f\|_{C(a,r)} = \max_{z \in C(a,r)} |f(z)|.$$

Напомним, что $C(a,r) = \partial B(a,r)$.

В самом деле, при $\Upsilon = \partial^+ B(a,r)$ имеем

$$|c_n(f,a)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Upsilon} \frac{|f(\zeta)|d\zeta|}{|\zeta - a|^{n+1}} \leqslant \frac{\|f\|_{C(a,r}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{rdt}{r^{n+1}} = \frac{M_r(f)}{r^n}\ .$$

Теорема 7.3 (теорема Лиувилля)
Пусть f - целая функция, т.е. $f \in H(\mathbb{C})$. Если f ограничена, т.е. если существует такая константа $M > 0$, что $\|f\| = \|f\|_{\mathbb{C}} \leqslant M$, то f постоянна.

Доказательство.
Разложим функцию f в ряд Тейлора в точке $a = 0$ и применим неравенства Коши. Пусть $c_n = c_n(f,0)$. Тогда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, а ряд сходится локально равномерно в $B(0,R)$ при всех $R > 0$ (так как f - целая функция). Тогда $\forall R > 0$ выполнено

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $R \to \infty$ и учитывая независимость c_n от R получаем, что $c_n = 0$ при всех $n > 0$. Таким образом, $f \equiv c_0$. ■

Следующее утверждение является обратным к лемме Гурса:

Теорема 7.4 (теорема Морера)
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, а $f \in C(D)$. Если для любого треугольника $\Delta \subset D$ выполнено $\int\limits_{\partial^+\Delta} f\ dz = 0$, то $f \in H(D)$.

Доказательство.
Пусть $B(a,r) \subset D$ - круг. Используя свойство, что $\int\limits_{\partial^+\Delta} f\ dz = 0$ для любого треугольника $\Delta \subset B(a,r)$, можно показать, что функция $F(z) = \int\limits_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$, где $z \in B(a,r)$, является комплексной первообразной для f в $B(a,r)$ (см. доказательство интегральной теоремы Коши для выпуклой области). Так как $F \in H(B(a,r))$ и $f = F'$, то $f \in H(B(a,r))$. А так как $B(a,r)$ - произвольный круг в D, то $f \in H(D)$. ■

Предложение 7.5 (лемма о среднем для голоморфных функций)
Пусть $R \in (0,+\infty)$, а $f \in H(\overline{B(a,R)})$. Тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a + Re_d^{i\theta}\theta\ .$$

Доказательство.
По интегральной формуле Коши (в круге):

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(a,R)} \frac{f(z)dz}{z-a} \ .$$

Остается вычислить последний интеграл, используя тот факт, что кривая $\Upsilon = \partial^+ B(a,R)$ задается путем $z(\theta) = a + Re^{i\theta}$ при $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\int\limits_{\Upsilon} \frac{f(z)dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta}} = i\int\limits_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})d\theta \ .$$

■

В качестве следствия из леммы о среднем мы можем получить одно из принципиально важных свойств голоморфных функций - принцип максимума модуля (см. далее). Заметим, что для доказательства этого утверждения нам достаточно только тех фактов, которые можно доказать в рамках теории голоморфных функций в круге.

Теорема 7.5 (принцип максимума модуля)
Пусть D - произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}$, а $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда для любого $a \in D$ выполнено

$$|f(a)| \leqslant \max_{z \in \partial D} |f(z)|.. \tag{7.1}$$

Если неравенство в (7.1) обращается в равенство в некоторой точке $a \in D$, то функция f постоянна в D.

Доказательство.
Так как $|f| \in C(\overline{D})$, а $\overline{D}$ - компакт, то $|f|$ достигает на $\overline{D}$ своего максимального значения. Т.е., нам достаточно установить, что если найдется $a \in D$ с условием $|f(a)| \geqslant \max\limits_{\partial D} |f(z)|$, то f постоянна в D.

Пусть такая точка a существует. Без ограничения общности можем считать, что $M = \max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)| = |f(a)|$. Положим $E = \{z \in D : |f(z)| = M\}$. Так как $a \in E$, то $E \neq \emptyset$.

Так как $f \in C(\overline{D})$, и в некоторой последовательности точек $|f(z)| = M$, эта последовательность сходится к некоторой точке в области D, то по непрерывности в предельной точке модуль функции тоже будет равен M. Таким образом множество E замкнуто в относительной топологии D.

Проверим, что E открыто в относительной топологии D. Пусть $b \in E$ и пусть $r > 0$ - достаточно мало (как минимум нам нужно, чтобы $B(b, r) \subset D$).

Проверим, что E открыто в относительной топологии D. Пусть $b \in E$ и пусть $r > 0$ - достаточно мало (как минимум нам нужно, чтобы $B(b, r) \subset D$). По теореме о среднем, $f(b) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(b + re^{i\theta})d\theta$. Так как $|f(z)| \leqslant M$ при $z \in D$, то

$$M = |f(b)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(b + re^{i\theta})|d\theta \leqslant M.$$

Таким образом $\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta = 2\pi M$, где функция $\varphi(\theta) = |f(b + re^{i\theta})|$, определенная на отрезке $[0, 2\pi]$, принимает вещественные значения и $0 \leqslant \varphi(\theta) \leqslant M$. Из этого вытекает, что $\varphi(\theta) \equiv M$. Так как приведенное рассуждение верно для любого достаточно малого $r > 0$, то $|f(z)| = M$ для всех z, лежащих в некоторой (круговой) окрестности точки b. Таким образом, множество E открыто в D.

Так как E - непустое, открытое и замкнутое (в относительной топологии) подмножество связного множества (области) D, то $E = D$ и, следовательно, $|f(z)| = M$ при всех $z \in D$,

Если $M = 0$, то $f \equiv 0$ в D. Пусть $M > 0$. Докажем, что $f' = 0$ всюду в D. Если, от противного, существует $w \in D$ с условием $f'(w) \neq 0$, то так как $f(z) = f(w) + f'(w)(z - w) + o(z - w)$ в окрестности w, то $|f(z)|$ не может быть постоянным. Таким образом, $f' \equiv 0$ в D, откуда f постоянна в D. ■

- Заметим, что утверждение принципа максимума модуля остается верным и в случае, когда D - область в $\mathbb{C}_\infty$, содержащая точку ∞.

Следствие (основная теорема алгебры)
Пусть $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ - произвольный многочлен комплексного переменного, $n \geqslant 1$, причем $a_n \neq 0$. Тогда P имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней с учетом их кратности.
Доказательство.
Нам достаточно показать, что P имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень. Пусть, от противного, $P(z) \neq 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда $f = \dfrac{1}{P} \in H(\mathbb{C})$. Так как $|p(z)| \to \infty$ при $z \to \infty$, мы получаем, что $|f(z)| \to 0$ при $z \to \infty$. Применяя принцип максимума модуля для f в кругах достаточно большого радиуса с центром в точке 0, получаем, что $f(0) = 0$, что невозможно. ■

Следствие (эквивалентные подходы к понятию голоморфности)
Пусть $a \in \mathbb{C}$ и функция f определена в окрестности $U(a)$ точки a. Следующие условия эквивалентны:

1) f **голоморфна** в точке a (т.е. $f \in \mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(B(a,r))$, $r > 0$;

2) f является **комплексно аналитической** в точке a, т.е. она представима в некотором круге $B(a,r)0$, $r > 0$, степенным рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$;

3) $f \in C(B(a,r))$, $r > 0$, и для любого треугольника $\Delta \subset B(a,r)$ выполнено $\int\limits_{\partial^+\Delta} f\, dz = 0$.

- Термин **комплексная аналитичность** отличается от общего термина **аналитичность**, который выражает возможность локального представления функции f степенным рядом вида $\sum\limits_{k,m=0}^{\infty} b_{k,m}(z-a)^k(\overline{z}-\overline{a})^m$.

7. Лекция 7. Индекс кривой относительно точки

Индекс кривой относительно точки

Напомним следующее свойство комплексного логарифма, которое будет существенно использоваться в последующих конструкциях.

Лемма 7.1
Пусть $a \in \mathbb{C}$, а B такой круг, что $a \notin B$. Тогда в B существует голоморфная ветвь $\ln_B(z-a)$ многозначной функции $\mathrm{Ln}(z-a)$, причем $\ln_B(z-a)$ является одной из комплексных первообразных для $\frac{1}{z-a}$ в B. В ситуации, когда из контекста ясно, о каком круге B идет речь, мы будем писать $\ln(z-a)$ вместо $\ln_B(z-a)$.

Определение 7.1
Пусть Γ - спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, и пусть $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. **Индексом** кривой Γ относительно точки a называется величина

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-a}.$$

- Требование спрямляемости кривой Γ в этом определении нужно для того, чтобы гарантировать существование интеграла. В дальнейшем определение индекса будет распространено на кривые общего вида.

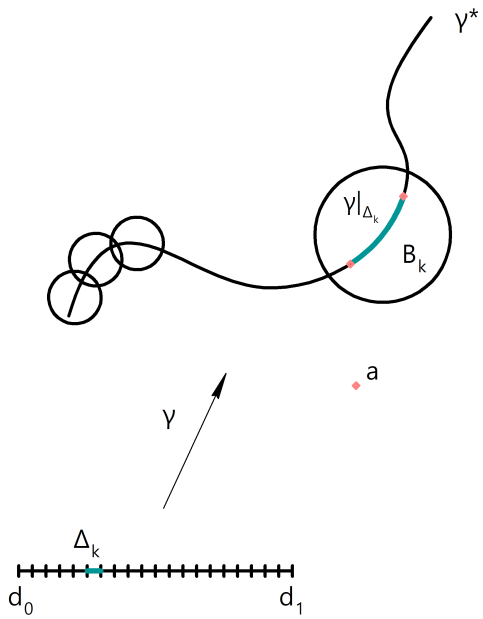

Рис. 7.1

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

- Пусть $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C}$ - некоторый путь, и пусть $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ - такое разбиение отрезка $[d_0, d_1]$, что при всех $k = 1, \ldots, N$ выполнено следующее: носитель γ_k^* пути $\gamma|_{l_k}$, где $l_k = [t_{k-1}, t_k]$, лежит в некотором круге B_k, не содержащем точку a. Такое разбиение T назовем (γ, a)-допустимым (см. рис. 7.1).

- Для пути $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C}$, для точки $a \in \mathbb{C}$ и для любого (γ, a)-допустимого разбиения T обозначим через $\lambda(\gamma, T)$ ломанную, равную сумме отрезков $[\gamma(t_{k-1}, \gamma(t_k)]$, $k = 1, \ldots, N$ (в дальнейшем мы часто будем обозначать символом $\lambda(\gamma, T)$ как указанный путь, так и его носитель).

Лемма 7.2
Пусть $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C}$ - спрямляемый путь, и пусть $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ - произвольное (γ, a)-допустимое разбиение отрезка $[d_0, d_1]$.
Пусть $\tilde{\gamma}_k$ - произвольная кусочно-гладкая кривая целиком лежащая в круге B_k (из определения (γ, a)-допустимого разбиения) с началом $\gamma(t_{k-1})$ и концом $\gamma(t_k)$. Пусть, наконец, $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \tilde{\gamma}_N$. Тогда

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \mathrm{Ind}(\tilde{\gamma}, a).$$

В частности, $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \mathrm{Ind}(\lambda(\gamma, T), a)$.

Доказательство.
Заметим, что $\dfrac{1}{z-a} \in H(B_k)$ при всех $k = 1, \ldots, N$, и эта функция имеет в каждом таком круге B_k комплексную первообразную $\ln_B(z-a)$. В силу критерия существования комплексной первообразной (Теорема 6.1) при всех $k = 1, \ldots, N$ выполнено равенство

$$\int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{\tilde{\gamma}_k} \frac{dz}{z-a},$$

откуда немедленно вытекает, что

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\tilde{\gamma}_k} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z-a} = \mathrm{Ind}(\tilde{\gamma}, a).$$

■

Из леммы 7.2 вытекает, что кривую Γ в определении индекса можно без ограничения общности считать кусочно-гладкой.

Забежим немного вперед: далее мы увидим, что понятие индекса можно распространить на произвольную кривую. Интеграл по этой кривой может не существовать, но даже отсутствие интеграла не помешает нам определить индекс. Пусть кривая неспрямляемая. Понятие допустимого разбиения от этого не пострадает. Значит, не пострадает ломанная и ее индекс, так как ломанная - кусочно-гладкая кривая и для нее интеграл определен. Тогда мы имеем лемму.

Лемма 7.4
Пусть $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C}$ - произвольный путь, и пусть $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Если разбиения T_1 и T_2 отрезка $[d_0, d_1]$ являются (γ, a)-допустимыми, то $\mathrm{Ind}(\lambda(\gamma, T_1), a) = \mathrm{Ind}(\lambda(\gamma, T_2), a)$.

С использованием леммы 7.4 мы можем определить индекс кривой относительно точки для самых общих кривых (вне зависимости от существования интеграла $\int\limits_\gamma (z-a)^{-1}dz$). В самом деле, мы можем определить индекс пути γ относительно точки a при помощи равенства

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) - \mathrm{Ind}(\lambda(\gamma, T), a),$$

где T - произвольное (γ, a)-допустимое разбиение. В силу леммы 7.2 для спрямляемого пути γ такое определение индекса эквивалентно первоначальному. Вернемся назад и рассмотрим важное свойство.

Лемма 7.3
Пусть Γ - замкнутая кусочно-гладкая кривая и $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Тогда функция $\psi(z) = \mathrm{Ind}(\Gamma, z)$, определенная при $z \in \Omega$, принимает только целые значения и постоянна во всех связных компонентах множества Ω. В неограниченной связной компоненте Ω_∞ множества Ω функция ψ обращается в ноль.

Доказательство.
Заметим, что множество Ω имеет ровно одну неограниченную компоненту. В самом деле, Γ^* - это компакт в $\mathbb{C}$. Следовательно, существует круг B такой, что $\Gamma^* \subset B$. Внешность круга B - это связное множество и оно лежит в одной из компонент Ω.

Выберем произвольную точку $z \in \Omega$. Рассмотрим путь $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C}$, задающий Γ. Тогда имеет место равенство

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{d_0}^{d_1} \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z},$$

интеграл в правой части которого нужно понимать как сумму интегралов по последовательным отрезкам, на которых γ - это функция класса C^1. Рассмотрим функцию $\varphi(t)$, определенную при $t \in [d_0, d_1]$ следующим образом

$$\varphi(t) = \exp\left(\int\limits_{d_0}^{t} \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z}\right).$$

Пусть $w \in \mathbb{C}$. Так как $w = 2\pi i m$ при некотором $m \in \mathbb{Z}$ в том и только том случае, когда $e^w = 1$, то для проверки равенства $\mathrm{Ind}(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ нам достаточно проверить, что $\varphi(d_1) = 1$.

Заметим, что при всех $t \in [d_0, d_1] \setminus E$, где E - некоторое конечное множество, имеет место равенство

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}, \tag{7.2}$$

которое проверяется непосредственным дифференцированием функции φ. Пусть $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ (эта ψ не имеет отношения к функции из формулировки леммы). Функция $\psi(t)$ непрерывна на $[d_0, d_1]$, а из (7.2) непосредственно вытекает, что $\psi'(t) = 0$ при всех $t \in [d_0, d_1] \setminus E$. Так как множество E конечно, то отсюда следует, что функция ψ постоянная на $[d_0, d_1]$. Так как $\varphi(d_0) = 1$, то

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(d_0) - z}.$$

Остается заметить, что $\gamma(d_1) = \gamma(d_0)$ так как кривая Γ является замкнутой. Таким образом, $\varphi(d_1) = 1$ и $\mathrm{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

Покажем теперь, что функция $f(z) = \mathrm{Ind}(\Gamma, z)$ голоморфная на множестве Ω, то есть покажем, что в любой точке в Ω f имеет комплексную производную. В самом деле, при $z \in \Omega$ имеем

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w - (z + \Delta z)} - \int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w - z}\right) = \int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{(w - (z - \Delta z))(w - z)},$$

а так как на Γ^* имеет место равномерная сходимость

$$\frac{1}{(w - z)(w - (z - \Delta z))} \to \frac{1}{(w - z)^2}$$

при $\Delta z \to 0$, то (надо перейти к пределу под знаком интеграла) функция f имеет в точке z комплексную производную $f'(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{(w - z)^2}$.

В любой связной компоненте множества Ω функция f голоморфная и принимает только целочисленные значения. Из этого тривиально вытекает, что эта функция постоянна в каждой такой области.

Так как $|\mathrm{Ind}(\gamma, z)| < 1$ при достаточно больших значениях $|z|$ (проверка этого факта оставляется в качестве упражнения), то в неограниченной компоненте Ω_∞ множества Ω функция $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ обращается в ноль. ■

Из леммы 7.2 вытекает, что утверждение леммы 7.3 останется верным для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ.

8. Лекция 8. Приращение аргумента вдоль пути (кривой)

Приращение аргумента вдоль пути (кривой)

Определим понятие приращения аргумента вдоль пути и свяжем это понятие с введенным ранее понятием индекса кривой относительно точки.

Напоминание
Если $F : E \to \mathbb{C}$ - многозначная функция, то **ветвью** функции F на множестве $E_1 \subset E$ называется любая (однозначная) функция $f : E_1 \to \mathbb{C}$ с условием $f(z) \in F(z)$ при всех $z \in E_1$. Если функция f непрерывна, то говорят о непрерывной ветви, если f голоморфна, то о голоморфной ветви и т.д.

Предложение 8.1
Пусть $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - путь. тогда многозначная функция $F(t) = \mathrm{Arg}(\gamma(t))$ имеет непрерывную ветвь $\varphi_0(t)$ на всем $[d_0, d_1]$.
Все непрерывные на $[d_0, d_1]$ ветви функции F имеют вид $\varphi_k(t) = \varphi_0(t) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство.
Пусть $\Omega_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и $\Omega_+ = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Предположим, что $\gamma^* \subset \Omega_-$. Тогда можно положить $\varphi_0(t) = \arg\gamma(t)$ на $[d_0, d_1]$ (главное значение arg).
Если выполнено $\gamma^* \subset \Omega_+$, то можно определить $\varphi_0(t) = \arg_{(0,2\pi)}\gamma(t)$, $t \in [d_0, d_1]$.
Непрерывность функции φ_0 на $[d_0, d_1]$ в этом случае непосредственно вытекает из определения $\arg z$ и его выражения через $\mathrm{Re}\, z$ и $\mathrm{Im}\, z$.

В общем случае разобьем отрезок параметра $I = [d_0, d_1]$ на N, $N \in \mathbb{N}$, равных последовательных отрезков $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ (где $d_0 = t_0$, $d_1 = t_N$ и $t_{j-1} < t_j$ при $j = 1, \ldots, N$) так, чтобы $(\gamma|_{I_j})^* \subset \Omega_+$ или $(\gamma|_{I_j})^* \subset \Omega_-$ для каждого $j = 1, \ldots, N$.

Для проверки существования такого разбиения заметим, что так как γ^* - это компакт в $\mathbb{C}$ и $0 \notin \gamma^*$, то $\rho = \mathrm{dist}(0, \gamma^*) > 0$. Из равномерной непрерывности функции γ на $[d_0, d_1]$ вытекает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \rho$ для любых $t_1, t_2 \in [d_0, d_1]$ с условием $|t_1 - t_2| < \varepsilon$. Остается найти натуральное N с условием $\frac{d_1 - d_0}{N} < \varepsilon$ и взять соответствующее разбиение $[d_0, d_1]$.

При $j = 1, \ldots, N$ пусть $\psi_j = \arg \circ \gamma|_{I_j}$ при $(\gamma|_{I_j})^* \subset \Omega_-$, и $\psi_j = \arg_{(0,2\pi)} \circ \gamma|_{I_j}$

при $(\gamma|_{I_j})^* \subset \Omega_+$.

Положим $\varphi_0(t) = \psi_1(t)$ при $t \in I_1$. Тогда $\psi_2(t_1) = \varphi_0(t_1) + 2\pi k_1$ для некоторого $k_1 \in \mathbb{Z}$.
Положим $\varphi_0(t) = \psi_2(t) - 2\pi k_1$ при $t \in I_2$. Тогда $\psi_3(t_2) = \varphi_0(t_2) + 2\pi k_2$ для некоторого $k_2 \in \mathbb{Z}$.
Положим $\varphi_0(t) = \psi_3(t) - 2\pi k_2$ при $t \in I_3$ и т.д.

По построению, функция $\varphi_0(t)$ непрерывна на $[d_0, d_1]$ и при всех $t \in [d_0, d_1]$ выполнено $\varphi_0(t) \in \mathrm{Arg}(\gamma(t))$, то есть φ_0 - непрерывная ветвь функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на $[d_0, d_1]$.

Пусть φ - другая непрерывная ветвь $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на $[d_0, d_1]$.
Тогда $\psi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi_0(t)}{2\pi} \in C([d_0, d_1])$ и функция ψ принимает во всех точках $[d_0, d_1]$ целочисленные значения. То есть $\psi(t) \equiv k$ на $[d_0, d_1]$, для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ и, следовательно, $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$. С другой стороны, очевидно, что все функции вида $\varphi_j = \varphi_0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, являются непрерывными ветвями функции $\mathrm{Arg}(\gamma(\cdot))$ на $[d_0, d_1]$. ■

Определение 8.1
Пусть $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - путь, а φ - какая-либо непрерывная на $[d_0, d_1]$ ветвь $\mathrm{Arg}(\gamma(\cdot))$. Величина $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z) = \varphi(d_1) - \varphi(d_0)$ называется **приращением (полярного) аргумента** вдоль γ.

- Из Предложения 8.1 следует, что величина $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z)$ определена корректно (она не зависит от выбора непрерывной ветви $\mathrm{Arg} \circ \gamma$).
- Если $\gamma \approx \sigma$, то $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z) = \Delta_\sigma \mathrm{Arg}(z)$. Таким образом корректно определено **приращение аргумента вдоль кривой**.
- Если Γ и Υ - кривые в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и конец Γ совпадает с началом Υ, то $\Delta_{\Gamma+\Upsilon} \mathrm{Arg}(z) = \Delta_\Gamma \mathrm{Arg}(z) + \Delta_\Upsilon \mathrm{Arg}(z)$ и $\Delta_{-\Gamma} \mathrm{Arg}(z) = -\Delta_\Gamma \mathrm{Arg}(z)$.

Предложение 8.2
Пусть $\gamma : [d_0, d_1] \to \mathbb{C}$ - замкнутый спрямляемый путь и пусть $a \notin \gamma^*$. Тогда $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma - a} \mathrm{Arg}(z)$.

Доказательство.
Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ - некоторое $(\gamma, a)-$допустимое разбиение отрезка $[d_0, d_1]$. При $k = 1, \ldots, N$ и $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ определим $\gamma_k := \gamma_{I_k}$. Так как $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_N$, то

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z - a} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z - a}.$$

В каждом круге B_k, $k = 1, \ldots, N$, из определения $(\gamma, a)-$допустимого разбиения, рассмотрим голоморфную ветвь $\ln_{B_k}(z-a)$ логарифма $\mathrm{Ln}(z-a)$. Так как $\ln_{B_k}(z-a)$ - это комплексная первообразная для $\frac{1}{z-a}$ в D_k и так как $\ln_{B_k}(z-a) = \ln|z-a| + i\arg_{B_k}(z-a)$, где $\arg_{B_k}(\cdot)$ - некоторая непрерывная ветвь функции $\mathrm{Arg}(z-a)$ в B_k, то

$$\int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a} = \ln\frac{|\gamma(t_k)-a|}{|\gamma(t_{k-1})-a|} + i(\arg_{B_k}(\gamma(t_k)-a) - \arg_{B_k}(\gamma(t_{k-1})-a)).$$

Заметим, что величина $\arg_{B_k}(\gamma(t_k)-a) - \arg_{B_k}(\gamma(t_{k-1})-a)$ не зависит от выбора $\arg_{B_k}(\cdot)$, так как они все отличаются на целое кратное 2π и сократятся в разности. Поэтому мы получаем приращение аргумента $\Delta_{\gamma_k - a}\mathrm{Arg}(z)$.

Следовательно, суммируя по $k = 1, \ldots, N$ правые и левые части предыдущего равенства, получаем, что все логарифмы модулей (они идут с чередующимися знаками) кроме первого и последнего сократятся, но так как кривая замкнута, то первый и последний логарифм тоже сократятся. Приращения аргументов сложатся и дадут приращение аргумента по всей кривой:

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-a} = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\gamma_k}\frac{dz}{z-a} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\Delta_{\gamma_k - a}\mathrm{Arg}(z) = \Delta_{\gamma - a}\mathrm{Arg}(z) = \Delta_{\gamma}\mathrm{Arg}(z-a),$$

с учетом $\gamma(d_0) = \gamma(d_1)$. ■

- С учетом Лемм 7.2 и 7.4 выражение индекса кривой через приращение аргумента сохраняется для любой (не обязательно спрямляемой) кривой. Если путь γ в Предложении 8.2 не является замкнутым, то
  $\mathrm{Im}\ \mathrm{Ind}(\gamma, a) = \Delta_{\gamma}\mathrm{Arg}(z-a)$, так как в Re части останутся два логарифма, которые не сократятся, а в Im части все равно получится приращение аргумента.

- Оказывается, в случае **замкнутой жордановой кривой** ее индекс относительно точки может быть вычислен непосредственно.

Лемма 8.1
Пусть Γ - замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$. Если $a \in D(\Gamma)$ (внутри кривой), то $\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = \pm 1$, а если $a \in D_{\epsilon}(\Gamma)$ (вне кривой), то $\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = 0$.

Комментарий
Мы не будем доказывать эту лемму, но чтобы понимать, почему это так, рассмотрим такую конструкцию.

Представим, что мы хотим доказать лемму жордана для ломанных. Как мы можем доказать наличие хотя-бы двух компонент в дополнении к ломанной? Расположим эту ломанную на плоскости так, чтобы, например, абсциссы всех вершин были разными. Дальше будем брать произвольную точку на плоскости, не лежащую на кривой, и проводить из нее вверх вертикальный луч. Так как у ломанной нет совпадающих абсцисс, то этот луч никогда не пересечет ломанную по ребру. Рассмотрим для примера треугольник:

- Если луч проходит не через вершину (точка может быть как снаружи так и внутри треугольника), то мы можем посчитать число пересечений.
- Если луч прошел через вершину, то мы можем этот луч немного сдвинуть вправо или влево. Тогда, если луч пересекал крайнюю вершину, то сдвинувшись в одну сторону пересечений не станет, в другую - одно пересечение локально перейдет в два пересечения.
  Если вершина не крайняя, то сдвигаясь влево или вправо число пересечений не изменится.

В результате, у каждой точки плоскости возникло или четное или нечетное число пересечений с ломанной. Так как это число не меняется при небольших сдвигах, то оно постоянно в каждой компоненте связности. Значит, у нас появились два класса точек: с четным и нечетным числом пересечений.

Теперь будем приписывать пересечениям разные знаки: если мы заходим в область, то приписываем $+1$, если мы выходим из области, то приписываем -1. Это означает, что для внешних точек остается 0, так как мы заходим в область и выходим из нее. Для внутренних точек при подсчете со знаками получается ± 1. Эту схему можно формально использовать для доказательство леммы.

Теперь мы можем для жордановых кривых, не глядя на гладкость, определить понятие ориентации. Мы помним, что индекс это приращение аргумента, а смена ориентации на кривой меняет знак приращения.

Итак, у нас есть жорданова область с границей, которая задается некоторым жордановым путем. На самом деле, у нас есть два пути, которые задают эту границу: один путь такой, у которого индекс равен 1 относительно внутренней точки, другой путь такой, у которого индекс равен -1, и они не эквивалентны. Тогда **положительно ориентированной границей** будем называть тот путь, индекс которого равен 1.

Цепи и циклы

Мы ввели понятие индекса как некоторую интегральную характеристику, затем связали его с понятием приращения аргумента.

Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$ - некоторый произвольный набор кривых в $\mathbb{C}$ и пусть $m_1, \dots, m_n$ - это некоторый набор целых чисел. Объект $\Sigma = m_1\Gamma_1 + \dots + m_n\Gamma_n$ (формальная сумма) будем называть **цепью**. Если все кривые Γ_k, $k = 1, \dots, n$, составляющие цепь Σ являются **замкнутыми**, то такая цепь называется **циклом**.

Формальная сумма, использованная в определении цепи (цикла) должна пониматься так, что для любой функции $f \in C\big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k^*\big)$ такой, что все интегралы $\int\limits_{\Gamma_k} f\ dz$ существуют, определен интеграл $\int\limits_{\Sigma} f\ dz = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \int\limits_{\Gamma_k} f\ dz$.

Если связать с каждой кривой Γ_k, $k = 1, \dots, n$, функционал на пространстве $C(\Gamma_k^*)$, действующий по правилу $f \to \int\limits_{\Gamma_k} f\ dz$, то цепь Σ можно понимать, как подходящую линейную комбинацию соответствующих функционалов.

Заметим, что цепь $\Sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k$ может быть представлена в виде суммы кривых не единственным образом:

1) Для произвольной кривой Υ можно определить формально говоря новую цепь $\Sigma + \Upsilon + (-\Upsilon)$, но функционал, определяющий такую цепь, будет совпадать с функционалом, определяющим Σ (интегралы по кривым $\pm\Upsilon$ сокращаются).

2) Любую кривую Γ_k, входящую в цепь Σ можно разбить в сумму последовательных кривых $\Gamma_k = \Gamma_{k,1} + \dots + \Gamma_{k,p}$ (начало $\Gamma_{k,j}$ совпадает с концом $\Gamma_{k,j-1}$ при $j = 2, \dots, p$). Функционал, определяющий цепь $\sum\limits_{s=1}^{k-1} m_s\Gamma_s + \sum\limits_{j=1}^{p} m_k\Gamma_{k,j} + \sum\limits_{s=k+1}^{n} m_s\Gamma_s$, совпадает с функционалом, определяющим исходную цепь Σ (сумма интегралов по кривым $\Gamma_{k,j}$, $j = 1, \dots, p$, дает интеграл по кривой Γ_k).

3) Если две кривые, скажем Γ_p и Γ_q, входящие в цепь Σ, таковы, что начало Γ_q совпадает с концом кривой Γ_p, то цепь Σ совпадает с цепью $\sum\limits_{k \neq p,q} \Gamma_k + \Upsilon$, где $\Upsilon = \Gamma_p + \Gamma_q$.

Возможны и другие неоднозначности в представлении цепи в виде суммы кривых.

Носитель цепи Σ - это множество $\Sigma^* = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k^*$.

Индекс цепи Σ относительно точки $a \notin \Sigma^*$ - это величина $\mathrm{Ind}(\Sigma, a) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \mathrm{Ind}(\Gamma_k, a)$.

Так как величины $\mathrm{Ind}(\Gamma_k, a)$ определены вне зависимости от существования интегралов $\int\limits_{\Gamma_k} (z-a)^{-1} dz$, то величина $\mathrm{Ind}(\Sigma, a)$ определена для цепи, состоящей из произвольных (не обязательно спрямляемых) кривых.

В комплексном анализе важную роль играют замкнутые кривые и циклы, обладающие следующим специальным свойством:

Определение 8.2 Пусть D - произвольная область в $\mathbb{C}$, а Γ - цикл в D (то есть $\Gamma^* \subset D$). Скажем, что Γ **гомологичен нулю относительно** D, если для любой точки $a \notin D$ выполнено $\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = 0$. Этот факт мы будем записывать следующим образом: $\Gamma \simeq 0 \pmod D$.

С использованием введенного понятия можно получить наиболее общий вариант интегральной теоремы Коши и утверждения об интегральной формуле Коши, которые были получены ранее лишь для выпуклых областей и кругов соответственно.

Теорема 8.1 (интегральная теорема Коши)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, $f \in H(D)$. Пусть Γ - такой цикл в D, что $\Gamma \simeq 0 \pmod D$. Тогда

1) Выполнено равенство $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

2) Для любой точки $a \in D \setminus \Gamma^*$ верно равенство

$$f(a)\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z-a}.$$

Доказательство.
Начнем доказательство со 2го пункта.
Рассмотрим функцию двух комплексных переменных

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}, & \text{при } z \neq w, \\ f'(w), & \text{при } z = w, \end{cases}$$

определенную на множестве $D \times D = \{(z,w) : \ z, w \in D\}$.

Функция g непрерывна. В самом деле, непрерывность g в любой точке $(z_0, w_0) \in D \times D$ с условием $z_0 \neq g_0$ очевидна. Проверим непрерывность g в точке (z_0, z_0),

$z_0 \in D$: так как $f \in H(D)$, то в некотором круге $B(z_0, r) \subset D$ выполнено $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Если $z, w \in B(z_0, r)$, то имеет место оценка

$$|g(z, w) - g(z_0, z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(z_0) \right| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} n|c_n|r^{n-1},$$

а ряд в правой части стремится к нулю при $r \to 0$.

Пусть $E = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0\}$. Заметим, что $\mathbb{C} \setminus D \subset E$ (так как $\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0$ при всех $z \notin D$). Таким образом, $D \cup E = \mathbb{C}$, но множество $D \cap E$ не является, в общем случае, пустым. Заметим также, что $\Omega_\epsilon(\Gamma) \subset E$ коль скоро $\mathrm{Ind}(\Gamma, w) = 0$ при всех $w \in \Omega_\epsilon(\Gamma)$.

Определим теперь функцию h следующим образом

$$h(z) = \begin{cases} \int\limits_{\Gamma} g(z, w)dw, & \text{при } z \in D, \\ \int\limits_{\Gamma} \dfrac{f(w)dw}{w - z}, & \text{при } z \in E, \end{cases}$$

и заметим, что при $z \in D \cap E$ оба выражения, определяющие $h(z)$, совпадают. Оказывается, что $h \in H(\mathbb{C})$. Проверим это.
Заметим, что при любом $w \in D$ функция $g(\cdot, w) \in C(D) \cap H(D \setminus \{w\})$. По усиленной лемме Гурса для любого треугольника $\Delta \subset D$ имеем $\int\limits_{\partial^+\Delta} g(z, w)dz = 0$. Тогда,

$$\int\limits_{\partial^+\Delta} h(z)dz = \int\limits_{\partial^+\Delta} dz \int\limits_{\Gamma} g(z, w)dw = \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\partial^+\Delta} g(z, w)dz = 0,$$

где возможность смены порядка интегрирования следует из непрерывности g. Из этого по теореме Мореры получаем, что $h \in H(D)$.
Проверим теперь, что $h \in H(E)$. Заметим, что существует такое открытое множество U, что $E \subset U$ и $h(z) = \int\limits_{\Gamma} \dfrac{f(w)dw}{w - z}$ при $z \in U$. Согласно Предложению 7.2 функция h локально представима в U степенным рядом. Из этого вытекает, что $h \in H(U)$. Следовательно, $h \in H(\mathbb{C})$.

Так как $\lim\limits_{z \to \infty} h(z) = \lim\limits_{z \to \infty} \int\limits_{\Gamma} \dfrac{f(w)dw}{w - z} = 0$, ($f$ голоморфна в D, а Γ компакт) то h ограничена в $\mathbb{C}$ и целая. Тогда (по теореме Лиувилля) h постоянна в $\mathbb{C}$ и $h \equiv 0$.

Так как $h(a) = 0$ при всех $a \in \mathbb{C}$, то при $a \in D \setminus \Gamma^*$ выполнено

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0,$$

из которого вытекает второе утверждение теоремы.

Для доказательства первого утверждения выберем и зафиксируем произвольную точку $w \in D \setminus \Gamma^*$ и рассмотрим вспомогательную функцию $f_1(z) = f(z)(z-w)$. Применяя к этой функции утверждение 2) получаем

$$0 = f_1(w)\mathrm{Ind}(\Gamma, w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)(z-w)dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)dz.$$

Таким образом, теорема полностью доказана. ■

Далее мы получим ряд важных и нужных частных случаев Теоремы 8.1. Эти утверждения будут получены при дополнительных предположениях о свойствах области D, или в ситуации, когда условие $\Gamma \simeq 0 \pmod D$ заменяется на условие другого типа.

Оказывается, что свойство циклов $\Gamma \simeq 0 \pmod D$ имеет важную связь со свойством односвязности: имеет место следующий **критерий односвязности области**.

Теорема 8.2
Пусть D - область в $\mathbb{C}$. Множество $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ связно (то есть область D односвязна) тогда и только тогда, когда для любого цикла Γ в D выполнено $\Gamma \simeq 0 \pmod D$.

Обозначим через $\Omega_\epsilon(\Gamma)$ неограниченную связную компоненту комплексного множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$.

Доказательство.
$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть множество $E := \mathbb{C}_\infty \setminus D$ связно и заметим, что $E \subset \Omega_\epsilon(\Gamma)$. Таким образом, любая точка $a \in E$ (то есть любая точка, не лежащая в D) принадлежит неограниченной связной компоненте дополнения к Γ^*. Величина $\mathrm{Ind}(\Gamma, a)$ постоянна в этой компоненте и равна там нулю (так как соответствующий факт имеет место для любой кривой, входящей в цикл Γ). Следовательно, $\Gamma \simeq 0 \pmod D$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $E := \mathbb{C}_\infty \setminus D$ не связно (то есть его можно разбить на две части). Построим цикл Υ в D такой, что $\Upsilon \not\simeq 0 \pmod D$. Так как E несвязно, то найдутся открытые множества W_1 и W_2 такие, что $W_1 \cap E \neq \emptyset$, $W_2 \cap E \neq \emptyset$, $E \subset W_1 \cup W_2$ и $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Так как E замкнуто, то $E_1 = W_1 \cap E$ и $E_2 = W_2 \cap E$ тоже замкнуты.

Пусть $\infty \in E_2$. Тогда множество E_1 ограничено и $\mathrm{dist}\{E_1, E_2\} > 0$.
Выберем δ так, чтобы $0 < \delta < \mathrm{dist}\{E_1, E_2\}$. Возьмем произвольную точку $a \in E_1$ и рассмотрим покрытие плоскости сеткой замкнутых квадратов со сторонами $\frac{\delta}{2}$,

параллельными координатным осям, и такой квадрат, что точка a является его центром. Пусть $Q_1, \ldots, Q_n$ - все квадраты из этого покрытия плоскости такие, что $E_1 \cap Q_j \neq \emptyset$. Пусть a - центр, скажем, Q_1. Рассмотрим цикл

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \partial^+ Q_j,$$

где символом $\partial^+ Q_j$ обозначается положительно ориентированная граница квадрата Q_j, то есть такая жорданова кривая σ с носителем ∂Q_j, для которой $\mathrm{Ind}(\sigma, a_j) = 1$ при $a_j \in Q_j^\circ$. Тогда, с учетом леммы 8.1 получаем

$$\mathrm{Ind}(\lambda, a) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}(\partial^+ Q_j, a) = \mathrm{Ind}(\partial^+ Q_1, a) = 1.$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что мы можем, не меняя цикл, сократить попарно общие стороны квадратов, так как в соседних квадратах одна общая сторона входит с разными знаками. Также можно выбросить квадраты, полностью лежащие в E_1. В итоге, останется цикл, полностью лежащий в D (см. рис. 8.1).

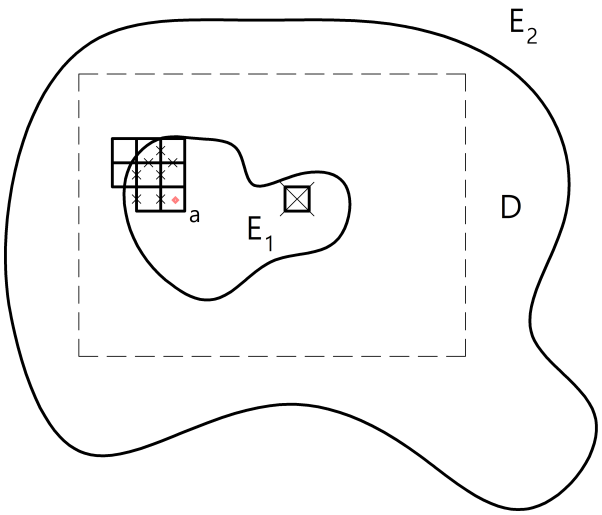

Рис 8.1

■

Отсюда мы можем получить интегральную теорему Коши в односвязной области.

Следствие (интегральная теорема Коши в односвязной области)
Пусть D - односвязная область и $f \in H(D)$. Тогда для любого (спрямляемого) цикла Γ в D выполнено $\int\limits_{\Gamma} f\ dz = 0$.

Следствие
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, пусть $F \in H(D)$ и пусть циклы Γ_1 и Γ_2 таковы, что $\Gamma_1 - \Gamma_2 \simeq 0 \pmod D$. Тогда $\int\limits_{\Gamma_1} f\ dz = \int\limits_{\Gamma_2} f\ dz$. Циклы Γ_1 и Γ_2 в этом случае называются **гомологичными относительно области** D (это записывается так: $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2 \pmod D$).

Следующий вариант интегральной теоремы Коши связан с понятием **гомотопии путей**. Пусть D - область в $\mathbb{C}$. Пусть $\gamma_0 : [0,1] \to D$ и $\gamma_1 : [0,1] \to D$ - пути. Будем считать, что γ_0 и γ_1 либо пути с общим началом и концом, либо замкнутые пути.

Неформально говоря, гомотопность путей в области D - это свойство, связанное с возможностью "непрерывной деформации" одного пути в другой, не выходя за пределы данной области D. Перейдем к формальному определению.

Определение 8.3

1) Пути γ_0 и γ_1 с общим началом и концом w_0 и w_1 гомотопны в области D, если найдется непрерывное отображение $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ такое, что $\gamma_0(s) = H(s,0)$ и $\gamma_1(s) = H(s,1)$ при всех $s \in [0,1]$, а также $H(0,t) = w_0$ и $H(1,t) = w_1$ при всех $t \in [0,1]$.

2) Замкнутые пути γ_0 и γ_1 гомотопны в области D, если существует непрерывное отображение $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ такое, что $\gamma_0(s) = H(s,0)$ и $\gamma_1(s) = H(s,1)$ при всех $s \in [0,1]$, а также $H(0,t) = H(1,t)$ при всех $t \in [0,1]$.

По сути это означает, что мы можем предъявить непрерывное по параметру семейство путей γ_s, $s \in [0,1]$, таких, что $\gamma_s(t) \in C([0,1] \times [0,1])$, и все $\gamma_s^* \subset D$.

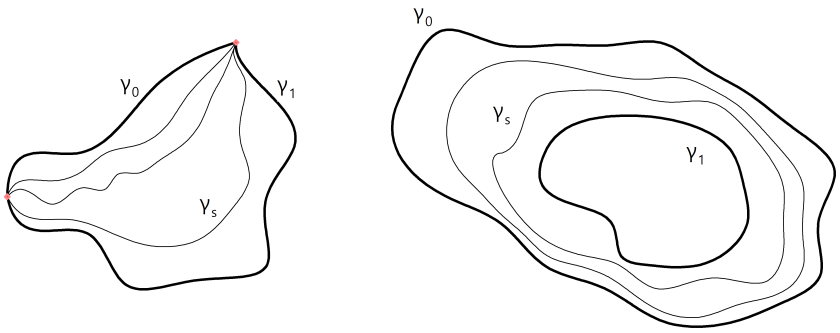

Рис 8.2 Гомотопные пути

Гомотопность путей γ_0 и γ_1 в области D будем обозначать символом $\gamma_0 \sim_D \gamma_1$. Из контекста всякий раз будет понятно, идет ли речь о гомотопии путей с общими

концами, или о гомотопии замкнутых путей. Приведем некоторые простые свойства гомотопии:

1) Эквивалентные пути гомотопны. Таким образом, понятие гомотопии определено не только для путей, но и для кривых.

2) Если γ - замкнутый путь и $\gamma \sim_D \sigma$, где σ - тривиальный (одноточечный) путь (то есть $\sigma : [0,1] \to \{z_0\}$), то говорят, что γ гомотопен 0 в D ($\gamma \sim_D 0$), и говорят, что γ стягиваем.

3) Пусть γ_1 и γ_2 - пути в D с общими концами. Легко проверить, что $\gamma_1 \sim_D \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 + (-\gamma_2) \sim_D 0$.

4) $\gamma_1 \sim_D \gamma_2$ - это отношение эквивалентности на множестве всех путей в D

Рассмотрим простой пример. Пусть D - выпуклая область. Тогда любые два пути $\gamma_0 : [0,1] \to D$ и $\gamma_1 : [0,1] \to D$ в D с общими началом и концом гомотопны в D. В самом деле, так как область D является выпуклой, то для любых значений $s, t \in [0,1]$ выполнено $(1-t)\gamma_0(s)+t\gamma_1(s) \in D$, так как это отрезок, соединяющий две точки $\gamma_0(s)$ и $\gamma_1(s)$, параметризованный отрезком $[0,1]$. Получается непрерывная функция двух переменных, а так как любой отрезок лежит в области, то любая такая точка лежит в области. Следовательно, отображение

$$H(s,t) = (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)$$

осуществляет гомотопию γ_0 в γ_1 в D. Аналогично проверяется, что любые два замкнутых пути γ_0 и γ_1 в (выпуклой области) D гомотопны в D.

Рассмотрим еще одно свойство гомотопии путей, которое мы будем неоднократно применять в будущем.

Предложение 8.3
Пусть V - проколотая окрестность точки $a \in \mathbb{C}$. Для любого замкнутого пути $\gamma : [0,1] \to V$ с условием $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0 \in V$ найдется единственное $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $\gamma \sim_V n\eta$, где

$$\eta(s) = a + (z_0 - a)e^{2\pi i s}, \quad s \in [0,1].$$

Другими словами, путь γ гомотопен в V окружности с центром в точке a, проходящей через точку z_0 и пройденную n раз.

Доказательство.
Покажем первым делом, что число $n \in \mathbb{Z}$ с указанным свойством существует. Пусть

$\theta = \arg(z_0 - a)$ (главное значение аргумента). Тогда путь $\eta_n := n\eta$ можно записать в виде

$$\eta_n(s) = a + |z_0 - a|e^{i(\theta + 2\pi n s)},$$

а путь γ в виде

$$\gamma(s) = a + |\gamma(s) - a|e^{i\varphi(s)},$$

где $s \in [0,1]$. Здесь $\varphi(s) = \arg(\gamma(s) - a)$ - это непрерывная вещественная функция, заданная на $[0,1]$, причем $\varphi(0) = \theta$. Так как $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$, то $\varphi(1) - \varphi(0) = 2\pi n$ (та же точка на плоскости) для некоторого целого n.

Если такое n существует, то гомотопию между путями η_n и γ можно записать как отображение $H : [0,1] \times [0,1] \to V$ (независимые выпуклые комбинации по модулям и аргументам):

$$H(s,t) = a + |z_0 - a|^t |\gamma(s) - a|^{1-t} e^{i(t(\theta + 2\pi n s) + (1-t)\varphi(s))},$$

при $s, t \in [0,1]$. Ясно, что H - это непрерывная функция на $[0,1] \times [0,1]$. При этом $H(s,0)$ - это путь $\eta_n(s)$, а $H(s,1)$ - это путь $\gamma(t)$ соответственно. При всех значениях $t \in [0,1]$ пути $H(s,t)$ являются замкнутыми, так как $H(0,t) = H(1,t) = z_0$. Таким образом, отображение H осуществляет гомотопию путей γ и η_n.

Предположим теперь, что существуют два целых числа, скажем n и m, такие, что $\gamma \sim_V \eta_n$ и $\gamma \sim_V \eta_m$. Тогда $n = \mathrm{Ind}(\eta_n, a)$, а $m = \mathrm{Ind}(\eta_m, a)$. Так как пути η_n и η_m гомотопны друг другу (это следует из того, что они оба гомотопны исходному пути γ), то согласно Лемме 8.2 (которую мы сейчас докажем), примененной к области V, выполнено $\mathrm{Ind}(\eta_n, a) = \mathrm{Ind}(\eta_m, a)$. Отсюда следует, что $n = m$. ■

Докажем, почему для гомотопных путей индексы совпадают. У нас есть теорема, которая дает несколько эквивалентных определений односвязности.

Теорема 8.3

- Область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна.
- D односвязна по Жордану, то есть для любой замкнутой жордановой кривой Γ в D выполнено $D(\Gamma) \subset D$.
- Для любого замкнутого пути γ в D выполнено: $\gamma \sim_D 0$.
- Для любых путей γ_1 и γ_2 в D с общим началом и концом выполнено: $\gamma_1 \sim_D \gamma_2$.

Полное доказательство Теоремы 8.3 средствами комплексного анализа мы сможем дать позднее, когда. в частности, докажем теорему Римана о конформном отображении. А сейчас мы приведем "аналитическое" доказательство необходимого нам

факта:

Лемма 8.2
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, а замкнутые пути $\gamma_0 : [0,1] \to D$ и $\gamma_1 : [0,1] \to D$ гомотопны в D ($\gamma_0 \sim_D \gamma_1$). Тогда для любой точки $a \notin D$ выполнено $\mathrm{Ind}(\gamma_0, a) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, a)$.

Доказательство.
Рассмотрим отображение $H : [0,1] \times [0,1] \to D$, осуществляющее гомотопию γ_0 и γ_1. При этом $H(s,0) = \gamma_0(s)$ и $H(s,1) = \gamma_1(s)$ при всех $s \in [0,1]$, а также $H(0,t) = H(1,t)$ при всех $t \in [0,1]$. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a - H(s,t)| > 2\varepsilon$$

при всех $s, t \in [0,1] \times [0,1]$. Так как функция H равномерно непрерывна, то найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|H(s,t) - H(s',t')| < \varepsilon$$

при всех значениях s, s', t, t' таких, что

$$|s - s'| + |t - t'| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Сформируем теперь семейство элементарных ломанных $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n : [0,1] \to D$ (идем по равномерной сетке на отрезках параметра и заменяем подходящие пути на близкие, в терминах оценок ε, ломанные):

$$\sigma_k(s) = H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)(ns - (j-1)) + H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(j - ns),$$

если $j - 1 < ns < j$ при $j = 1, \ldots, n$. Заметим, что при $s \in [0,1]$ и $k = 0, 1, \ldots, n$ имеет место неравенство

$$|\sigma_k(s) - H(s, kn^{-1})| < \varepsilon.$$

В частности, при $k = 0$ получаем, что $|\sigma_0(s) - \gamma_0(s)| < \varepsilon$, а при $k = n$, соответственно, получаем, что $|\sigma_n(s) - \gamma_1(s)| < \varepsilon$.

Заметим, что при всех $s \in [0,1]$ и $k = 0, 1, \ldots, n$ справедливо неравенство

$$|a - \sigma_k(s)| > \varepsilon,$$

но, с другой стороны, при всех таких s и k имеет место оценка

$$|\sigma_{k-1}(s) - \sigma_k(s)| < \varepsilon.$$

То есть, расстояние между парами путей не больше ε, а с другой стороны все эти ломанные не приближаются ближе чем на ε к точке a. Следовательно, расстояние между ломанными меньше, чем до той точки, относительно которой мы считаем индекс. В таком случае, при перемещении кривой так, чтобы расстояние до точки, относительно которой мы считаем индекс, оставалось больше ε, индекс не меняется. Рассмотрим отдельно доказательство этого факта.

Лемма 8.3
Пусть $\eta_0 : [0,1] \to \mathbb{C}$ и $\eta_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ - замкнутые пути и $a \in \mathbb{C}$ такая точка. что $|\eta_1(s) - \eta_0(s)| < |a - \eta_0(s)|$ при всех $s \in [0,1]$. Тогда $\mathrm{Ind}(\eta_1, a) = \mathrm{Ind}(\eta_0, a)$.

Доказательство.
Мы ограничимся случаем кусочно гладких путей. Так как $|\eta_1(s) - \eta_0(s)| < |a - \eta_0(s)|$ при $s \in [0,1]$, то $a \notin \eta_0^*$ и $a \notin \eta_1^*$. Тогда корректно определен путь

$$\eta := \frac{\eta_1 - a}{\eta_0 - a}.$$

Так как

$$\frac{\eta'(s)}{\eta(s)} = \frac{\eta_1'(s)}{\eta_1(s) - a} - \frac{\eta_0'(s)}{\eta_0(s) - a}, \tag{8.1}$$

и так как $|1 - \eta(s)| < 1$ при всех $s \in [0,1]$, то $\eta^* \in B(1,1)$. Из этого вытекает, что $\mathrm{Ind}(\eta, 0) = 0$ (так как весь путь лежит в правой полуплоскости и у него не может быть приращения аргумента). Для доказательства леммы остается проинтегрировать (8.1) по параметру s от 0 до 1. Так как (8.1) - логарифмическая производная, то после интегрирования получим разность логарифмов в начале и в конце. Логарифмы модулей сокращаются, потому что путь замкнутый, а аргументы дадут приращение аргумента, которое равно нулю. ■

Для завершения доказательства леммы 8.2 остается применить лемму 8.3 последовательно $n+2$ раза и получить, что $\mathrm{Ind}(\gamma_0, a) = \mathrm{Ind}(\sigma_0, a)$, $\mathrm{Ind}(\sigma_{k-1}, a) = \mathrm{Ind}(\sigma_k, a)$ при $k = 1, \ldots, n$ и, наконец, что $\mathrm{Ind}(\sigma_n, a) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, a)$. ■

Теперь перейдем к следствиям из интегральной теоремы Коши.

Следствие (теорема Коши для гомотопных путей)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область и $f \in H(D)$. Если Υ_1 и Υ_2 - (спрямляемые) пути в D, причем $\Upsilon_1 \sim_D \Upsilon_2$. Тогда $\int\limits_{\Upsilon_1} f\, dz = \int\limits_{\Upsilon_2} f\, dz$.

Следствие (интегральная теорема Коши для жордановых областей)
Пусть D - жорданова область со спрямляемой границей и $f \in H(\overline{D})$.

Тогда $\int\limits_{\partial^+ D} f\ dz = 0$ (так как индекс границы жордановой области относительно дополнения к ней равен 0).

Допустимые области

Распространим области более общего специального вида. Пусть $D_0, d_1, \ldots, D_m$, $m \in \mathbb{N}$, - набор жордановых областей со спрямляемыми границами, таких, что

1) $\overline{D}_j \subset D_0$ при всех $j = 1, \ldots, m$,

2) $\overline{D}_j \cap \overline{D}_k = \emptyset$ при всех $j \neq k$, $1 \leqslant j,\ k \leqslant m$.

Определим область $D = D_0 \setminus (\overline{D}_1 \cap \cdots \cap \overline{D}_m)$ и определим цикл
$\Gamma = \partial^+ D_0 - \partial^+ D_1 - \cdots - \partial^+ D_m$.

Область $D = D_0 \setminus (\overline{D}_1 \cap \cdots \cap \overline{D}_m)$, определенная выше, называется **допустимой областью** (Д.О.). На рис. 8.3 область D заштрихована.
Цикл $\Gamma = \partial^+ D_0 - \partial^+ D_1 - \cdots - \partial^+ D_m$ называется **положительно ориентированной границей** D и обозначается $\partial^+ D$.

Задать ориентацию можно следующим образом: $\forall a \in D\ \operatorname{Ind}(\partial^+ D, a) = 1$, или $\forall a \in \mathbb{C}_\infty \setminus D\ \operatorname{Ind}(\partial^+ D, a) = 0$, так как:

- Точка, лежащая вне D_0, является внешней для всех областей, поэтому индекс равен 0.
- Точка, которая лежит в D_k является внутренней для D_0 и D_k, а для остальных является внешней, поэтому получается снова 0.
- Наконец, точка, которая лежит в D, является внутренней только для D_0, поэтому индекс равен 1.

Для допустимых областей также работает теорема Коши.

Следствие (интегральная теорема Коши для Д.О.)
Пусть D - Д.О. и $f \in H(\overline{D})$. Тогда $\int\limits_{\partial^+ D} f\ dz = 0$.

На самом деле имеет место более общее утверждение, которое мы пока будем использовать при необходимости без доказательства, но обсудим идею доказательства.

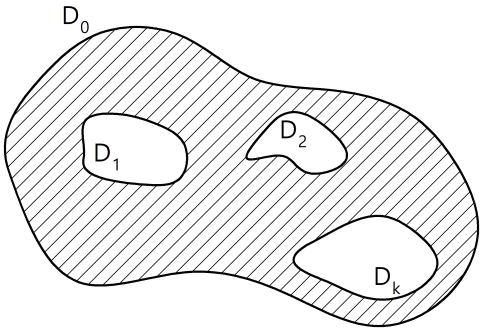

Рис 8.3 Допустимая область

Теорема 8.4 (усиленная интегральная теорема Коши для Д.О.)
Пусть D - Д.О. в $\mathbb{C}$, а $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда $\int\limits_{\partial^+ D} f\ dz = 0$.

Идея доказательства:
На первом шаге надо построить последовательность допустимых областей D_j, $j \in \mathbb{N}$, такую, что $D_j \Subset D_{j+1} \Subset D$ и $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j = D$. Далее, пользуясь непрерывностью функции f на множестве $\overline{D}$, надо доказать, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\partial^+ D_j} f\ dz = \int\limits_{\partial^+ D} f\ dz.$$

Здесь нужно обратить особое внимание на то, что ориентации границ областей D_j и D должны быть согласованы (если $a \in D_j$, то $\mathrm{Ind}(\partial^+ D_j, a) = \mathrm{Ind}(\partial^+ D, a)$). После этого остается применить обычную теорему Коши для допустимых областей.

Обсудим теперь общую интегральную формулу Коши для производных.

Предложение 9.1 (интегральная формула Коши)
Пусть D - допустимая область в $\mathbb{C}$ и $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ D} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ и } a \in D.$$

Доказательство.
При $n = 0$ формула была доказана для частного случая, когда D - круг. Теперь получим интегральную формулу Коши в общем случае.

При $n = 0$ достаточно использовать Теоремы 8.1 и 8.4 и простое вычисление: $\mathrm{Ind}(\partial^+ D, a) = \mathrm{Ind}(\partial^+ D_0, a) - \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}(\partial^+ D_k, a) = 1$.

Далее воспользуемся индукцией. Пусть требуемая формула справедлива для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем $a \in D$ и положим $d = \operatorname{dist}(a, \partial D)$. Путь Δz таково, что $0 < |\Delta z| < d$. Тогда

$$\frac{f(n)(a+\Delta z) - f^{(n)}(a)}{\Delta z} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ D} f(z) Q(a, z, \Delta z) dz,$$

где $Q(a, z, \Delta z) = \dfrac{1}{\Delta z}\left(\dfrac{1}{(z-a-\Delta z)^{n+1}} - \dfrac{1}{(z-a)^{n+1}}\right)$.

Проверим, что $Q(a, z, \Delta z) \to \dfrac{n+1}{(z-a)^{n+2}}$ при $\Delta z \to 0$ равномерно на ∂D. Это непосредственно вытекает из того, что

$$Q(a, z, \Delta z) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(z-a)^k (z-a-\Delta z)^{n-k+2}}.$$

Для завершения доказательства остается перейти к пределу под знаком интеграла.

■

Напоминание

Пусть D - область в $\mathbb{C}$. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, заданных в D, сходится к функции f **локально равномерно** в D (**равномерно внутри** D), если эта последовательность сходится к f равномерно на всяком компакте $K \subset D$.

Другими словами $f_n \to f$ локально равномерно в D, если $\|f - f_n\|_K \to 0$ при $n \to \infty$ для любого компакта $K \subset D$.

Теорема 9.1 (теорема Вейерштрасса)

Пусть D - область в $\mathbb{C}$, а последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in H(D)$, сходится локально равномерно в D к функции f. Тогда $f \in H(D)$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f^{(m)}$ локально равномерно в D.

Доказательство.

Так как f - это локально равномерный предел непрерывных функций, то $f \in C(D)$. Пусть $\Delta \subset D$ - произвольный треугольник. Тогда

$$\int\limits_{\partial^+ \Delta} f(z) dz = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\partial^+ \Delta} f_n(z) dz = 0,$$

так как $f_n \in H(D)$. По теореме Мореры это означает, что $f \in H(D)$.

Далее, для доказательства теоремы нам достаточно установить, что $\|f_n' - f'\|_{\overline{B}} \to 0$

при $n \to \infty$, где $B = B(a, r)$ - произвольный круг в D. Пусть $d > 0$ таково, что $\overline{B(a, r+d)} \subset D$. Воспользуемся интегральной формулой Коши для первой производной функций f_n и f в области $B(a, r+d)$. Если $z_0 \in \overline{B}$, то

$$|f_n'(z_0) - f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{C(a,r+d)} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z - z_0)^2} dz\right| \leqslant \frac{\|f_n - f\|_{C(a,r+d)}}{2\pi} \frac{2\pi(r+d)}{d^2} \to 0$$

при $n \to \infty$, так как $f_n \to f$ равномерно на $C(a, r+d) = \partial B(a, r+d)$. ■

9. Лекция 9. Нули голоморфных функций. Теорема единственности

На последней лекции мы закончили обсуждение всех следствий из интегральной теоремы Коши. Основным следствием стала интегральная формула Коши для производных, с помощью которой мы доказали теорему Вейерштрасса о локально равномерно сходящейся последовательности голоморфных функций.

Нули голоморфных функций. Теорема единственности

Пусть $a \in \mathbb{C}_\infty$ и f голоморфна на открытом множестве, содержащем a. Если $f(a) = 0$, то a называется **нулем** функции f.

Предложение 9.2
Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $r > 0$. Пусть $f \in H(B(a,r))$ и $f \not\equiv 0$ в $B(a,r)$. Если $f(a) = 0$, то найдутся $m \in \mathbb{N}$, $r' > 0$ и $g \in H(B(a,r'))$ такие, что $f(z) = (z-a)^m g(z)$, а $g(z) \neq 0$ при всех $z \in B(a,r')$.

Доказательство.
Функция f в $B(a,r)$ может быть представлена своим рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причем $c_0 = f(a) = 0$. Так как $f \not\equiv 0$, то найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $c_m \neq 0$, но $c_j = 0$ при всех $j < m$. Таким образом,

$$f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \sum_{n=m+2}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

при $z \in B(a,r)$. Рассмотрим функцию $g(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{m+n}(z-a)^n$. В силу формулы Коши-Адамара круг сходимости ряда, определяющего g, совпадает с кругом сходимости ряда для f. Таким образом, $g \in H(B(a,r))$ (как функция, представимая степенным рядом). Кроме того, $g(a) = c_m \neq 0$ и, по непрерывности, g не обращается в 0 в некотором круге $B(a,r') \subset B(a,r)$ при $r' < r$. А как было показано выше, $f(z) = (z-a)^m g(z)$ при всех $z \in B(a,r)$. ■

- Если голоморфная функция f имеет в точке a ноль, но если f не равна нулю в некоторой окрестности a, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad \text{но } f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Это вытекает из доказательства Предложения 9.2 с учетом того, что $f^{(n)}(a) = n!c_n(f,a)$.

- Число m, определенное выше, называется **порядком нуля** функции f в точке a.

Примеры

- Функции z и $\sin z$ имеют в точке $a = 0$ ноль первого порядка.
- Функции z^2 и $\cos(z) - 1$ имеют в точке $a = 0$ ноль второго порядка.
- Функция $6z - z^3 - 6\sin(z)$ имеет в начале координат ноль пятого порядка.

Следствие (изолированность нулей голоморфной функции)
Если функция f голоморфна в некоторой области D и $f(a) = 0$ в некоторой точке $a \in D$, то либо $f \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a, либо найдется такая окрестность $U \subset D$ точки a, что $f(z) \neq 0$ для всех $z \in U \setminus \{a\}$.

Пусть D - область в $\mathbb{C}$. Множество $E \subset D$ называется **множеством единственности** для класса $H(D)$, если для любых $f, h \in H(D)$ из равенства $f(z) = h(z)$ при всех $z \in E$ вытекает, что $f(z) = h(z)$ при всех $z \in D$ (другими словами, если $f|_E = h|_E$, то $f \equiv h$ в D).

В частности, если E - множество единственности для $H(D)$, а $f \in H(D)$ такова, что $f|_E = 0$, то $f \equiv 0$ в D.

Теорема 9.2 (теорема единственности для голоморфных функций)
Пусть D - область в $\mathbb{C}$ и пусть $E \subset D$ такое множество, что $E' \cap D \neq \emptyset$ (E' - множество предельных точек множества E). Тогда E является множеством единственности для $H(D)$.

Доказательство.
Напомним, что свойство $a \in E' \cap D$ означает, что $\forall \rho > 0$ множество $E \cap V(a,\rho)$ не пусто, где $V(a,\rho) := \{z : 0 < |z - a| < \rho\}$.

Пусть $Y = \{z \in D : f \equiv h$ в некоторой окрестности точки $z\}$. Другими словами, Y - это множество точек, в окрестностях которых функция $g = f - h \in H(G)$ тождественно равна нулю.
Проверим, что множество Y замкнуто в (о.т.) D. Пусть $w \in Y' \cap D$. Тогда $g(w) = 0$ по непрерывности и w является неизолированным нулем g, так как она предельная для множества точек, в окрестностях которых $g = 0$. Используя следствие

об изолированности нулей голоморфных функций получаем, что существует такая окрестность точки w, в которой $g \equiv 0$. Таким образом, $w \in Y$ и Y замкнуто в D. Пусть $a \in E' \cap D$. Аналогично предыдущему рассуждению проверяется, что $a \in Y$, откуда следует, что $Y \neq \emptyset$. Остается заметить, что Y открыто в (о.т.) D. Таким образом, Y - это непустое, открытое и замкнутое (в о.т.) подмножество области D. Следовательно, $Y = D$ и $f \equiv h$ в D. ■

- Из Теоремы 9.2 вытекает, что если D - область, а $f \in H(D)$, то f может иметь в D не более чем счетное множество нулей.

- В качестве упражнения проверьте какое условие Теоремы 9.1 не выполнено в следующей ситуации: функции $f_1(z) = z^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{z}\right)$ и $f_2(z) \equiv 0$ совпадают на множестве $E = \left\{\dfrac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$, имеющем предельную точку в $\mathbb{C}$, но $f_1 \not\equiv f_2$.

Упражнение 9.1
Пусть $f \in H(\mathbb{C})$ и для любого $a \in \mathbb{C}$ существует $n \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ такое, что $c_n(f, a) = 0$. Доказать, что f - это многочлен.

Из Теоремы 9.1 вытекает, что определения функций e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ и других стандартных элементарных функций были введены корректно: если мы требуем, чтобы эти функции совпадали с соответствующими вещественными функциями на $\mathbb{R}$, то теорема единственности не позволяет определить их как-то иначе.

Поведение степенного ряда на границе круга сходимости

Мы рассматривали степенной ряд и выяснили, что внутри круга сходимости - это голоморфная функция, вне круга сходимости ряд расходится. Но мы ничего не знали про то, как ведет себя степенной ряд на границе круга сходимости.

Сейчас мы дадим некоторые определения, которые вспомним позже, когда мы будем говорить про Вейерштрассов подход к аналитическому продолжению.

Правильные и особые точки для суммы степенного ряда

Пусть у нас есть круг сходимости $B(a, R)$ степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} c_n (z-a)^n$. Возьмем произвольную точку на границе $\zeta \in C(a, R)$. Возможны две ситуации:

1) Найдутся круг $B(\zeta, \rho_\zeta)$ и функция $\psi_\zeta \in H(B(\zeta, \rho_\zeta))$ такие, что $\rho_\zeta = \rho_\zeta(\zeta)$ и $\psi_\zeta = \psi_\zeta(\zeta)$, и на $B(a, R) \cap B(\zeta, \rho_\zeta)$ $f = \psi_\zeta$. Такую точку мы будем называть **правильной**.

2) Если точка не является правильной, то будем говорить, что точка **особая**.

Теперь вспомним теорему единственности. Понятно, что точки, расположенные близко к правильной, тоже правильные. А особые точки могут быть изолированными.

Пример
Рассмотрим в единичном круге функцию $\frac{1}{1-z}$. Любая точка на единичном круге кроме 1 будет правильной, так как эта функция голоморфна всюду в комплексной плоскости. Точка 1 для этой функции особая.

Что для нас означает понятие правильной точки? Функция, которая изначально была задана рядом в круге, распространяется на большее множество, то есть мы будем иметь функцию $\begin{cases} f(z), & z \in B(a,R) \\ \psi_\zeta(z), & z \in B(\zeta, \rho_\zeta) \end{cases}$, которую можно воспринимать как распространение исходной функции.

Комментарий
Это позволяет рассматривать следующие ситуации: у нас есть область, внутри которой лежит круг $B(a,r)$. В этом круге есть степенной ряд (это не обязательно круг сходимости). При некоторых условиях (которые мы изучим позднее) на этот ряд или область, мы, в некотором смысле, будем иметь достаточно информации, чтобы восстановить и область и функцию. В ряде ситуаций информации будет недостаточно.

Для начала нам необходимо понять как устроены точки на границе при известном радиусе сходимости. То есть понять, по какому радиусу мы можем сместиться за круг и распространить нашу функцию.

Лемма 9.1
Пусть $f \in H(B(a,R))$ и пусть любая точка окружности $C(a,R)$ является правильной для f. Тогда существуют $R' > R$ и $\tilde{f} \in H(B(a,R'))$ такие, что $f(z) = \tilde{f}(z)$ при $z \in B(a,R)$.

Доказательство.
Пусть $\zeta \in C(a,R)$. Так как ζ - правильная точка для f, то существуют $\rho_\zeta > 0$ и $\psi_\zeta \in H(B(\zeta,\rho_\zeta))$ такие, что $f(z) = \psi_\zeta(z)$ при всех $z \in B(a,R) \cap B(\zeta,\rho_\zeta)$.

Семейство кругов $\{B(\zeta,\rho_\zeta) : \zeta \in C(a,R)\}$ образует покрытие $C(a,R)$. Так как $C(a,R)$ - компакт, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие

$\{B_k : \ k = 1, \ldots, K\}$. Определим область $D := B(a, R) \cap \bigcap\limits_{k=1}^{K} B_k$ и функцию

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \in B(a, R), \\ \psi_\zeta(z), & z \in B(\zeta, \rho_\zeta) = B_k, \ k \in \{1, \ldots, K\}. \end{cases}$$

Так как все точки $\zeta \in C(a, R)$ правильные, то $f(z) = \psi_\zeta(z) = \tilde{f}(z)$ при $z \in B(a, R) \cap B(\zeta, \rho_\zeta)$. Пусть $\zeta_1, \zeta_2 \in C(a, R)$ таковы, что $U := B(\zeta_1, \rho_{\zeta_1}) \cap B(\zeta_2, \rho_{\zeta_2}) \neq \emptyset$. Тогда $U \cap B(a, R) \neq \emptyset$ и функции ψ_{ζ_1} и ψ_{ζ_2} совпадают на U. То есть (по теореме единственности) функция $\tilde{f}$ корректно определена и $\tilde{f} \in H(D)$.
Определим $R' = R + \frac{1}{2}\min r_k > R$, где r_k - радиус B_k, $k = 1, \ldots, K$, и заметим, что $\tilde{f} \in H(B(a, R'))$. ■

Следствие
На границе круга сходимости степенного ряда обязательно найдется особая точка его суммы.

Доказательство.
Пусть $B(a, R)$ - круг сходимости степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Тогда $f \in H(B(a, R))$. Если любая точка $\zeta \in C(a, R)$ является правильной для f, то (по предыдущей лемме) найдутся круг $B(a, R')$ с $R' > R$ и функция $\tilde{f} \in H(B(a, R'))$ такие, что $f(z) = \tilde{f}(z)$ при $z \in B(a, R)$. Разложим $\tilde{f}$ в ряд Тейлора с центром a:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n,$$

где $b_n = \dfrac{\tilde{f}^{(n)}(a)}{n!} = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n$.

Из этого следует, что радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n$ совпадают. Но, радиус сходимости первого ряда равен R, а радиус сходимости второго не меньше $R' > R$. Таким образом, на окружности $C(a, R)$ должна быть хотя бы одна особая точка для f. ■

Пусть $f \in H(B(a, r))$, $r > 0$, а R - радиус сходимости ряда Тейлора функции f в точке a. Тогда $R = r$ в том и только том случае, когда на окружности $C(a, r)$ есть особые точки f.

Рассмотрим несколько **примеров**:

- Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ имеет радиус сходимости $R = 1$ и представляет в круге $\mathbb{D}$ функцию $\frac{1}{1-z}$. Точка $\zeta = 1$ является особой для этой функции.

- Ряд $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ также имеет радиус сходимости $R = 1$. Покажем, что любая точка единичной окружности $\mathbb{T}$ является особой точкой для g. Заметим, что точка $\zeta = 1$ является особой для g. Это следует, например, из того, что при вещественных $x \to 1$ выполнено

  $$1 + x^2 + \cdots + x^{2^n} \to n + 1.$$

  Заметим, что $g(z) = 1 + z^2 + \cdots + z^{2^m} + g(z^{2^m})$ при $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим теперь точки $\omega_{2^m}^k$ при $k = 0, 1, \ldots, 2^m$ - корни степени 2^m из единицы. Так как при $z \to \omega_{2^m}^k$ по радиусу точка $z^{2^m} \to 1$ по вещественной оси, то все точки вида $\omega_{2^m}^k$ являются особыми для g.

  Множество $\{\omega_{2^m}^k : \ m \in \mathbb{Z}_+, \ k = 0, 1, \ldots, 2^m\}$ всюду плотно на $\mathbb{T}$ и состоит из особых точек для g. Следовательно, ни одна точка единичной окружности не может быть правильной точкой для g.

Пусть ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ имеет радиус сходимости R и $\zeta \in C(a, R)$.

Вопрос: как проверить, является ли точка ζ особой для f?

Выберем точку $w \in [a, \zeta]$ на радиусе круга $B(a, R)$, проведенного в точку ζ и разложим f в ряд Тейлора с центром в w:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n. \tag{9.1}$$

При этом $b_n = \dfrac{f^{(n)}(w)}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(k+n)!}{k!n!} c_{k+n} (w-a)^k$. Пусть R_w - это радиус сходимости получившегося ряда, то есть $R_w = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$. Ясно, что $R_w \geqslant R - |w-a|$ (то есть $R_w \geqslant \operatorname{dist}(w, C(a, R))$).

Заметим, что окружность $C(w, R_w)$ должна содержать особую точку для суммы ряда (9.1). Если $R_w = R - |w-a|$, то такой особой точкой может быть только ζ (все остальные точки $C(w, R_w)$ лежат в этом случае внутри круга $B(a, R)$). Таким образом, ζ в рассматриваемом случае является особой и для f. Если же $R_w > R - |w-a|$,

то ζ является правильной точкой для f по теореме единственности.

Используя введенные выше обозначения можно сформулировать следующий простой критерий правильной/особой точки:

Лемма 9.2 Пусть $B(a,R)$ - круг сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Точка $\zeta \in C(a,R)$ является особой для f, если $\forall w \in [a,\zeta)$ выполнено $R_W = R - |w-a|$. В противном случае ζ является правильной для f.

Теорема 9.3 (теорема Принсгейма)
Пусть $\alpha_n \geqslant 0$ и пусть ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ имеет радиус сходимости $R = 1$. Тогда точка $\zeta = 1$ является особой для f.

Доказательство.
Нам необходимо доказать, что если взять $x \in (0,1)$ и разложить функцию в ряд Тейлора в этой точке, то новый радиус сходимости $R_x = 1 - x$.

Пусть R_x - радиус сходимости ряда Тейлора функции f с центром в точке x, то есть

$$R_x = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|}}.$$

Пусть теперь $w \in \mathbb{D}$ и $|w| = x$. Так как $\alpha_n \geqslant 0$, то

$$\frac{|f^{(n)}(w)|}{n!} = |\alpha_n + (n+1)\alpha_{n+1}w + \ldots| \leqslant \alpha_n + (n+1)\alpha_{n+1}x + \cdots = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Таким образом, $R_w \geqslant R_x$. Но если $\zeta = 1$ - правильная точка, то $R_x > 1 - x$ и $\forall w$ выполнено $R_w \geqslant R_x > 1 - x = 1 - |w|$. То есть любая точка $\mathbb{T}$ является правильной, что невозможно (тогда $R = 1$ не радиус сходимости). ■

В качестве **задачи** предлагается проверить, останется ли утверждение теоремы Принсгейма верно для рядов с коэффициентами $\alpha_n \in \mathbb{C}$, удовлетворяющим условию $\operatorname{Re} \alpha_n \geqslant 0$.

Кроме того, имеет место утверждение, которое известно как **теорема Фабри**: если последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, $c_n \in \mathbb{C}$, такова, что $\lim \frac{c_n}{c_{n+1}} = 1$, а ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеет радиус сходимости $R = 1$, то точка $\zeta = 1$ будет особой для f.

Пример

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^{2^n}$. Легко видеть, что этот ряд имеет радиус сходимости $R = 1$. По теореме Принсгейма точка $\zeta = 1$ является особой точкой для суммы этого ряда. Как легко видеть, каждая точка вида $\zeta = \omega_{2^m}^k$, $m \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, 2^m - 1$, также будет особой для суммы этого ряда. Таким образом, любая точка окружности $\mathbb{T}$ - это особая точка суммы рассматриваемого ряда (вытекает из плотности корней из единицы). при это функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^{2^n}$ не только голоморфна в круге $\mathbb{D}$, но она бесконечно дифференцируема в $\overline{\mathbb{D}}$.

Предложение 9.3 (вторая теорема Абеля)
Пусть ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеет круг сходимости $B(0, R)$ и при некотором $z_0 = Re^{i\beta}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ сходится. Тогда $\lim\limits_{r \to R} f(re^{i\beta}) = f(z_0)$ (радиальный предел).

Доказательство.
Не ограничивая общности будем считать, что $R = 1$ и $z_0 = 1$, а $f(1) = 0$. Так как в круге $B(0, 1)$ сходится ряд $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, то можно рассмотреть функцию

$$g(z) = \frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \times \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n,$$

где $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_n$. Ясно, что радиус сходимости ряда для g равен 1. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$. Тогда $f(z) = (1-z)g(z)$ в $B(0, 1)$ и при $x \in (0, 1)$ выполнено

$$|f(x)| < (1-x)\left(M := \sum_{n=0}^{N} |S_n|\right) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = (1-x)M + \frac{\varepsilon}{2} x^{N+1},$$

и при $1 - \frac{\varepsilon}{2M} < x < 1$ получаем. что $|f(x)| < \varepsilon$. ■

Ряд Лорана

До сих пор мы работали с функциями голоморфными в кругах. Посмотрим теперь, что происходит в ситуациях, когда существуют изолированные точки, в которых функция теряет голоморфность.

Пусть $a \in \mathbb{C}$, $R > r \geqslant 0$, и пусть $V(a, r, R) = A(a, r, R)$ - это круговое кольцо $\{z : \ r < |z - a| < R\}$.

Предложение 10.1 (разложение в ряд Лорана)
Пусть $a \in \mathbb{C}$, $R > r \geqslant 0$, а $f \in H(V(a,r,R))$. При $n \in \mathbb{Z}$ пусть

$$c_n = c_n(f,a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,\rho)} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},$$

где $r < \rho < R$. Тогда ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

сходится в $V(a,r,R)$ локально равномерно и $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ при $z \in V(a,r,R)$.

Замечание
Интегралы, определяющие $c_n(f,a)$, не зависят от ρ в силу интегральной теоремы Коши так как окружности $C(a,\rho_1)$ и $C(a,\rho_2)$ при $0 < r < \rho_{1,2} < R$ гомотопны в $V(a,r,R)$.

Доказательство.
Выберем r' и R' так, что $r < r' < R' < R$. Пусть $z \in V(a,r',R') \subset V(a,r,R)$. Применим интегральную формулу Коши (кольцо - допустимая область)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ V(a,r'R')} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{C(a,R')} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{C(a,r')} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\Bigg),$$

где $\partial^+ V(a,r'R')$ - две окружности, где внешняя ориентированна положительно, а внутренняя отрицательно. При $\zeta \in C(a,R')$ имеем $|z-a| < |\zeta - a|$ и

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

причем соответствующий ряд сходится равномерно по ζ на $C(a,R')$. Аналогично, при $\zeta \in C(a,r')$ выполнено $|z-a| > |\zeta - a|$ и

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{z - a} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta - a}{z-a} - 1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - a)^k}{(z-a)^{k+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

где соответствующие ряды сходится равномерно по ζ на $C(a,r')$. Остается проинтегрировать почленно полученные разложения. ■

Определение 10.1
Пусть $a \in \mathbb{C}$, а $f \in H(V(a))$, где $V(a) = V(a,0,r)$ при $r > 0$. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f,a)(z-a)^n, \tag{10.1}$$

называется рядом Лорана функции f в точке a.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(f,a)(z-a)^n$, содержащий члены ряда (10.1) с неотрицательными степенями $(z-a)$, называется **правильной частью** ряда Лорана функции f в точке a.

Ряд $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n(f,a)(z-a)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}(f,a)}{(z-a)^n}$, содержащий члены ряда (10.1) с отрицательными степенями $(z-a)$, называется **главной частью** ряда Лорана функции f в точке a.

Выясним, как выглядит область сходимости ряда вида (10.1).

Предложение 10.2
Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $b_n \in \mathbb{C}$ (двухсторонняя последовательность чисел) при $n \in \mathbb{Z}$, а $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$ и $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|b_{-n}|}$. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n \tag{10.2}$$

сходится локально равномерно в кольце $V(a,r,R)$. При этом $f \in H(V(a,r,R))$ и $b_n = c_n(f,a)$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Главная часть ряда (10.2) расходится в круге $B(a,r)$, а правильная часть этого ряда расходится в $\mathbb{C} \setminus \overline{B(a,R)}$.

Доказательство.
В силу утверждения о формуле Коши-Адамара, круг $B(a,R)$ является кругом сходимости ряда $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$.

Сделаем замену переменных и рассмотрим ряд $f_2(z) = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} b_n(z-a)^n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{-k}w^k$, где $w = \frac{1}{z-a}$. Круг сходимости этого ряда - это $\{w : \ |w| < \frac{1}{r}\}$ (по формуле Коши-Адамара). А в плоскости $\mathbb{C}_z$ этот круг соответствует множеству $\mathbb{C} \setminus \overline{B(a,r)} = \{z : |z-a| > r\}$.

Итак, $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in H(B(a,R))$, а $f_2 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{B(a,r)})$. Тогда сумма $f_1 + f_2$ определена и голоморфна в $V(a,r,R)$.

Равенства $b_n = c_n(f,a)$ получаются умножением равенства (10.2) последовательно на выражения $(z-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, и интегрированием по произвольной окружности

$C(a,\rho)$ при $r<\rho<R$. ■

Следствие (неравенства Коши для коэффициентов Лорана)
В условиях Предложения 10.2 $\forall n\in\mathbb{Z}$ и $\forall\rho\in(r,R)$ выполнено

$$|c_n(f,a)|\leqslant\frac{\|f\|_{C(a,\rho)}}{\rho^n}.$$

Изолированные особые точки однозначного характера

Пусть, как и раньше, $V(a)$ - это проколотая окрестность точки $a\in\mathbb{C}_\infty$.

Определение 10.2 Пусть $a\in\mathbb{C}$ и $f\in H(V(a))$. Тогда a называется **изолированной особой точкой (однозначного характера)** для f (используются сокращения **ИОТ** или **ИОТОХ**).

Изолированная особая точка однозначного характера a функции f называется

1) **Устранимой особой точкой (УОТ)**, если $\exists\lim\limits_{z\to a}f(z)\in\mathbb{C}$.
2) **Полюсом**, если $\exists\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.
3) **Существенно особой точкой (СОТ)**, если $\nexists\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

Примеры:

- Функция $\dfrac{\sin(z)}{z}$ имеет в точке $a=0$ устранимую особенность.
- Функция $\dfrac{1}{z^2}$ имеет в точке $a=0$ полюс.
- Функция $e^{\frac{1}{z}}$ имеет в точке $a=0$ существенную особенность.
  В самом деле, пусть $x,y\in\mathbb{R}$. Тогда $e^{\frac{1}{x}}\to\infty$ при $x\to0+$, а $|e^{\frac{1}{iy}}|=1$, то есть $\nexists\lim\limits_{z\to0}e^{\frac{1}{z}}$.
- Для функции $\operatorname{ctg}(\frac{1}{z})$ точка $a=0$ не является изолированной особой точкой, так как в любой окрестности 0 существуют полюсы этой функции (точки $\frac{1}{\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$).
- Для функции $\frac{1}{\sqrt{z}}$ точка $a=0$ также не является ИОТОХ. Это связано с нарушением однозначности корня в окрестности 0 (ни для какого $\rho>0$ не существует голоморфной в $V(0,\rho)$ ветви $\sqrt{z}$).

Предложение 10.3 (описание устранимых особенностей)
Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, а $f \in H(V(a, \rho))$. Следующие условия эквивалентны:

1) Точка a - это устранимая особенность для f;

2) Функция f ограничена в $V(a, \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$;

3) Ряд Лорана функции f в точке a не содержит главной части, то есть $c_n(f, a) = 0$ при $n < 0$;

4) $\exists$ функция $h \in H(B(a, \rho))$ такая, что $f(z) = h(z)$ при $z \in V(a, \rho)$.

Доказательство.
Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из того, что f имеет в точке a конечный предел.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) вытекает из неравенств Коши для коэффициентов Лорана: пусть $|f(z)| \leqslant M$ при $z \in V(a, \varepsilon)$. Тогда $|c_{-n}(f, a)| \leqslant M\delta^n$ для любого $\delta(0, \varepsilon)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$.

Для доказательства импликации 3) $\Rightarrow$ 4) достаточно определить
$h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Импликация 4) $\Rightarrow$ 1) очевидна. ■

Условие 4) объясняет смысл термина "устранимая особая точка" - функцию f можно "исправить" в одной точке a и получить голоморфную в круге $B(a, \rho)$ функцию.

Предложение 10.4 (описание полюсов)
Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, а $f \in H(V(a, \rho))$. Точка a является полюсом для функции f в том и только том случае, когда существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что ряд Лорана функции f в точке a имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

то есть содержит лишь конечное число членов в главной части.

Доказательство.
$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть a - полюс f. Так как $f \in C(V(a))$ и $f(z) \to \infty$ при $z \to a$, то $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $f(z) \neq 0$ при $z \in V(a, \varepsilon)$. Тогда в $V(a, \varepsilon)$ определена функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ и $g \in H(V(a, \varepsilon))$. Так как $g(z) \to 0$ при $z \to a$, то g имеет в точке a УОТ.

Следовательно, существует $\tilde{g} \in H(B(a, \varepsilon))$ такая, что $\tilde{g}(a) = 0$ и $\tilde{g}(z) = g(z)$ при $z \in V(a, \varepsilon)$. Так как $\tilde{g}(a) = 0$, то существуют $m \in \mathbb{N}$ и $h \in H(B(a, \varepsilon))$ такие, что

$h(z) \neq 0$ при $z \in B(a, \delta)$ для некоторого $\delta < \varepsilon$, и $\tilde{g}(z) = (z-a)^m h(z)$ при $z \in B(a, \delta)$. Тогда, при $z \in V(a, \delta)$ получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m h(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n,$$

где $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n$ - ряд Тейлора в точке a для функции $\frac{1}{h}$, определенной и голоморфной в $B(a, \delta)$. Таким образом, главная часть ряда Лорана для f в полюсе a имеет конечное число членов.

$\boxed{\Leftarrow}$ Обратное утверждение очевидно: если функция f такова, что главная часть ее ряда Лорана в точке a удовлетворяет условию $c_{-m}(f, a) \neq 0$, но $c_{-n}(f, a) = 0$ при всех целых $n > m$, то $f(z) = (z-a)^{-m} g(z)$, где g определена и голоморфна в $U(a)$ и $g(a) \neq 0$. Но тогда $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \lim\limits_{z \to a} (z-a)^{-m} g(z) = \infty$. ■

Введем понятие **порядка полюса**. Пусть a - полюс функции f. Наименьшее число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $c_{-m}(f, a) \neq 0$, но $c_{-n}(f, a) = 0$ при всех $n > m$, называется **порядком полюса** функции f в точке a. Легко проверить, что порядок полюса функции f в точке a совпадает с порядком нуля функции $\frac{1}{f}$ в этой точке.

У голоморфной функции есть изолированные особые точки. Посмотрим, что может получится в качестве предела при стремлении к такой точке. В случае УОТ мы получим конкретное значение, в случае полюса мы получим бесконечность. А в случае СОТ получается следующее: так как предела не существует, то мы смотрим, что будет происходить, когда мы стремимся к этой точке по разным последовательностям. Оказывается, что в СОТ для голоморфной функции мы можем получить что угодно, то есть полное предельное множество (совокупность пределов по всевозможным последовательностям) тотально (совпадает со всей сферой). Это утверждение называется теоремой Сохоцкого.

Теорема 10.1 (теорема Сохоцкого)
Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, а $f \in H(V(a, \rho))$. Если точка a является СОТ для f, то для любого $w \in \mathbb{C}_\infty$ найдется последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $z_k \to a$ при $k \to \infty$ такая, что $f(z_k) \to w$ при $k \to \infty$.

Доказательство.
Пусть $w = \infty$. Если не существует последовательности $\{z_k\}$, $x_k \to a$, для которой $f(z_k) \to \infty$, то f ограничена в $B(a, \delta)$ при некотором $\delta > 0$. Но тогда a - УОТ, а не СОТ (Предложение 9.5).

Пусть теперь $w \in \mathbb{C}$. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует $z_\varepsilon \in V(a, \varepsilon)$ такое, что $f(z_\varepsilon) = w$, то $f(z_{\frac{1}{k}}) \to w$ при $k \to \infty$.

Пусть $\exists \rho > 0$ такое, что $f(z) \neq w$ при $z \in V(a, \rho)$. Тогда в $V(a, \rho)$ определена и голоморфна функция $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$. Если $\exists \lim\limits_{z \to a} g(z)$, то $\exists \lim\limits_{z \to a} f(z)$. Значит, g не может иметь в a ни УОТ, ни полюс. То есть g имеет в a СОТ, и существует последовательность (z_k) для которой $g(z_k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Но тогда $f(z_k) = w + \frac{1}{g(z_k)} \to w$ при $k \to \infty$. ■

Можно показать (это оставляется в качестве **задачи**), что если a - это предельная точка для последовательности полюсов (например, 0 для $\operatorname{ctg}(\frac{1}{z})$) функции f, то для таких f и a выполнено утверждение теоремы Сохоцкого.

Точка ∞ как особая точка

Пусть $r > 0$. Напомним, что $V(\infty, r) := \{z : \ |z| > \frac{1}{r}\}$, а $U(\infty, r) = V(\infty, r) \cap \{\infty\}$. Как обычно, $V(\infty) = V(\infty, \rho)$ и $U(\infty) = U(\infty, \rho)$ для некоторого $\rho > 0$.

- Если $f \in H(V(\infty))$, то ∞ называется ИОТ(ОХ) для f.
- Тип точки ∞ для f (УОТ, полюс или СОТ) определяется как тип точки $a = 0$ для $f_0(z) = f(\frac{1}{z})$. Это корректно, так как $f_0 \in H(V(0))$ и $a = 0$ ИОТ(ОЧ) для f_0. Например функция z^3 имеет в ∞ полюс третьего порядка, а функция $\exp(z)$ имеет в ∞ СОТ.
- Пусть $f \in H(V(\infty, r))$ при $r > 0$. Тогда f может быть разложена в кольце $V(\infty, r)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = h(z) + g(z).$$

Роль "положительных" и "отрицательных" степеней в ряде Лорана на ∞ меняется: $h(z) \in H(V(\infty, r))$ и h - это правильная часть ряда Лорана f на ∞, а $g(z)$ "отвечает" за характер особенности f на ∞ и является главной частью ряда Лорана f на ∞.

Напоминание
Функция класса $H(\mathbb{C})$ называется **целой**. Далее, функция называется **мероморфной** в области $D \subset \mathbb{C}_\infty$, если $F \in H(D \setminus S)$, а каждая точка $a \in S$ является полюсом для f.

Предложение 10.5
Если $f \in H(\mathbb{C})$, а ∞ - УОТ или полюс для f, то f - многочлен. Если функция f

мероморфна в $\mathbb{C}$, а ∞ - УОТ или полюс для f, то f - рациональная функция.

Доказательство.
Пусть $f \in H(\mathbb{C})$ и ∞ - УОТ или полюс для f. Пусть $P(z) = \sum\limits_{n=1}^{m} c_n z^n$ - главная часть ряда Лорана f на ∞. Тогда $g = f - P \in H(\mathbb{C})$ имеет УОТ на ∞. Это означает, что $g_0(z) = g(\frac{1}{z})$ имеет УОТ в точке $a = 0$ и, следовательно, ограничена в $V(0)$. Но тогда g ограничена в $V(\infty)$ и, окончательно, g ограничена всюду в $\mathbb{C}$. По теореме Лиувилля g постоянна, откуда f - это многочлен.

Второе утверждение доказывается аналогично. Надо рассмотреть не только главную часть P лорановского разложения f на ∞, но все главные части $R_j(z)$ лорановских разложений f в ее полюсах a_j при $j = 1, \ldots, N$ (их конечное число, так как они все изолированы). Остается заметить, что $f - P - (R_1 + \cdots + R_N)$ постоянна по теореме Лиувилля. ■

10. Лекция 10. Вычеты. Теорема Коши о вычетах для v.p.-интегралов

Вычеты

Определение 10.3
Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, а $f \in H(V(a,\rho))$. **Вычетом** функции f в точке a называется величина

$$\mathrm{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(a,\delta)} f(z)dz,$$

где $\delta \in (0,\rho)$.

Пусть $f \in H(V(\infty,\rho))$. **Вычетом в бесконечности** функции f называется величина

$$\mathrm{res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\partial^+ B(0,R)} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(0,R)} f(z)dz, \quad r > \frac{1}{\rho}.$$

Замечание
Так как $f \in V(a,\rho)$, то $res_a f$ не зависит от δ (в силу теоремы Коши об интеграле по гомотопным путям).

Теорема 10.2 (теорема Коши о вычетах)
Пусть D - допустимая область, $A := \{a_1, \ldots, a_n\} \subset D$, $n \in \mathbb{N}$, а
$f \in C(\overline{D} \setminus A) \cap H(D \setminus A)$. Тогда

$$\int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} res_{a_j} f.$$

Доказательство.
Выберем $\rho > 0$ так, что $B(a_j,\rho) \Subset D$, а множества $\overline{B(a_j,\rho)}$ при $j = 1, \ldots, n$ попарно не пересекаются. Область

$$G = D \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{B(a_j,\rho)}$$

является Д.О., $\partial^+ G = \partial^+ D - \sum\limits_{j=1}^{n} \partial^+ B(a_j, \rho)$, а $f \in C(\overline{G}) \cap H(G)$. Из интегральной теоремы Коши вытекает, что

$$0 = \int\limits_{\partial^+ G} f(z)dz = \int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\partial^+ B(a_j,\rho)} f(z)dz =$$

$$= \int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\partial^+ B(a_j,\rho)} f(z)dz = \int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz - 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}_{a_j} f.$$

■

Предложение 10.6 (теорема о полной сумме вычетов)
Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, и $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$. Тогда

$$\mathrm{res}_\infty f + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}_{a_j} f = 0.$$

Для доказательства этого утверждения нужно выбрать $R > 0$ так, что $A \subset B(0, R)$, и применить теорему Коши о вычетах для области $B(0, R)$.

Вычисление вычетов

Для того, чтобы использовать вычеты для подсчета интегралов, необходимо придумать способы считать сами вычеты.

Лемма 10.1 (связь вычетов и коэффициентов Лорана)

1) Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, а $f \in H(B(a, \rho))$. Тогда $\mathrm{res}_a f = c_{-1}(f, a)$.

2) Пусть $\rho > 0$, а $f \in H(V(\infty, \rho))$. Тогда $\mathrm{res}_\infty f = -c_{-1}(f, \infty)$.

Доказательство.
1) Пусть $a \in \mathbb{C}$ и пусть $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f, a)(z - a)^n$ - разложение f в ряд Лорана в точке a. Тогда

$$\mathrm{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(a,\delta)} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n(f, a)}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(a,\delta)} (z - a)^n dz = c_{-1}(f, a),$$

где $\delta \in (0, \rho)$, так как все интегралы в последней сумме равны нулю, кроме интеграла, соответствующего $n = -1$ (он равен $2\pi i$).

2) Если $f \in H(V(\infty, \rho))$, то разложение f в ряд Лорана на ∞ имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f, \infty) z^n$. Остается проинтегрировать этот ряд по $\partial B(0, R)$ при $R > \frac{1}{\rho}$ и

вспомнить, что $\text{res}_\infty f = -\int\limits_{\partial^+ B(0,R)} f(z)dz$. ■

Следствие
Если $a \in \mathbb{C}$ - УОТ для $f \in H(V(a))$, то $\text{res}_a f = 0$.

Это следствие не распространяется на $\text{res}_\infty f$: если точка ∞ является УОТ $f \in H(V(\infty))$, то может быть $\text{res}_\infty f \neq 0$. Например, $\text{res}_\infty g = -1 \neq 0$ при $g(z) = \frac{z}{z^2+1}$.

Лемма 10.2 (вычисление вычета в бесконечности)
Пусть $f \in H(V(\infty))$, а $F(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$. Тогда $\text{res}_\infty f = -\text{res}_0 F$.

Доказательство.
Пусть ρ и $R > 0$ таковы, что $f \in H(V(\infty, \rho))$, а $C(0,R) \subset V(\infty, \rho)$. Пусть $r = \frac{1}{R}$. Тогда $F \in H(V(0, \frac{1}{\rho}))$ и

$$\text{res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-C(0,R)} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} f(Re^{-i\theta})(-iRe^{-i\theta})d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right) \frac{d(re^{i\theta})}{r^2 e^{2i\theta}} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,r)} F(z)dz = -\text{res}_0 F.$$

■

Лемма 10.3 (вычисление вычета в полюсе)
Пусть $a \in \mathbb{C}$ - полюс порядка m для $f \in H(V(a))$. Тогда

$$\text{res}_a f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big((z-a)^m f(z) \Big).$$

Доказательство.
Пусть у нас есть $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} c_n(f,a)(z-a)^n$ - разложение f в ряд Лорана в точке a (так как мы говорим про полюс, то ряд Лорана содержит лишь конечное число членов). Нам необходимо найти коэффициент c_{-1}. Пусть $g(z) = (z-a)^m f(z)$. Тогда мы получим степенной ряд

$$g(z) = c_{-m}(f,a) + \cdots + c_{-1}(f,a)(z-a)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f,a)(z-a)^{m+k},$$

который является рядом Тейлора для $g(z)$ в точке a (после исправления возможной УОТ). Тот коэффициент, который мы хотим найти, это коэффициент при степени $m-1$. Тогда необходимо воспользоваться формулой для нахождения тейлоровских коэффициентов в терминах производной: взять $(m-1)$-ю производную в этой точке

и поделить на $(m-1)!$.
Мы вынуждены добавить предел в формулу, так как $(z-a)^m f(z)$ не является голоморфной в полной окрестности точки a. ■

Из этой леммы вытекает формула для вычисления вычетов в "просто устроенных" полюсах "малых" порядков.

Пусть $\varphi, \psi \in H(U(a))$, причем $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, но $\psi'(a) \neq 0$ (то есть ψ имеет в a нуль первого порядка). Тогда

$$\operatorname{res}_a \frac{\varphi}{\psi} = \lim_{z\to a}\left((z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right) = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Эта формула легко обобщается на случай, когда φ имеет в точке a ноль порядка m, а ψ - ноль порядка $m+1$. В этом случае

$$\operatorname{res}_a \frac{\varphi}{\psi} = \frac{(m+1)\varphi^{(m)})(a)}{\psi^{(m+1)}(a)}.$$

Упражнение 10.1

1) Получить формулу для вычисления $\operatorname{res}_a \dfrac{\varphi}{\psi^2}$, если $\varphi(a) \neq 0$, а ψ имеет в точке a ноль первого порядка.

2) Получить формулу для вычисления $\operatorname{res}_a \dfrac{\varphi}{\psi}$, если φ имеет в точке a ноль порядка m, а ψ - ноль порядка $m+2$.

3) Применив полученные формулы найти $\operatorname{res}_0 \dfrac{e^z}{z\sin(z)}$.

Лемма 10.4 (вычисление вычета композиции функций)
Пусть $a \in \mathbb{C}_\infty$ является для функции $g \in H(V(a))$ либо точкой голоморфности, причем $g'(a) \neq 0$, либо полюсом первого порядка.
Пусть h - это функция, обратная к g в некоторой окрестности точки $b = g(a)$. Если b ИОТ(ОХ) для функции $f \in H(V(b))$, то $\operatorname{res}_a(f \circ g) = \operatorname{res}_b(fh')$.

Доказательство.
Пусть $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\operatorname{res}_a(f\circ g) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^+ B(a,\rho)} f(g(z))dz = \Big| z = h(w) \Big| = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{g(\partial^+ B(a,\rho))^+} f(w)h'(w)dw,$$

где $\rho > 0$ выбрано так, что $C(a, \rho)$ лежит в той окрестности a, где голоморфна $f \circ g$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{g(\partial^+ B(a,\rho))^+} f(w)h'(w)dw = \operatorname{res}_b(fh').$$

Это вытекает из того, что контур $g(\partial^+ B(a, \rho))^+$ гомотопен $\partial^+ B(b, \delta)$ (одинаковый индекс относительно b) при некотором малом $\delta > 0$ (вытекает из локальной обратимости g в окрестности точки a). ■

Таким образом, мы получили инструмент для подсчета интегралов от функций с особыми точками по границе. Далее, у нас возникает вопрос: что делать, если у интегрируемой функции особенность на кривой интегрирования? Сюда также можно отнести вопрос: что делать, если кривая интегрирования не ограничена?

Теорема Коши о вычетах для v.p.-интегралов

- Пусть Γ - кусочно гладкая жорданова кривая в $\mathbb{C}$ (замкнутая или нет), или образ такой кривой под действием какого-либо ДЛО. Такие кривые будем называть **подходящими**.

- В качестве примера рассмотрим $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (с естественной положительной ориентацией, при которой отрезок [0,1] проходится от 0 к 1). Эту кривую можно получить, например, из окружности $\mathbb{T} = \partial^+ B(0, 1)$ при помощи ДЛО $z \to \frac{1}{z-i} - \frac{i}{2}$.

  Плохой областью для нас будет граница полосы, так как с точки зрения ДЛО граница полосы - это две касающиеся окружности, а это уже не жорданова кривая.

- Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \Gamma$ - конечное (возможно пустое) множество. При этом, если $\infty \in \Gamma$, то $\infty \in A$. Возьмем набор $\Delta := \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, $\delta_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. При малых $\delta^* = \max\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ множество $\Gamma_{A,\Delta} = \Gamma \setminus \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B(a_j, \delta_j)$ является цепью подходящих кривых.
  Пусть $f \in C(\Gamma \setminus A)$. Величина

  $$\text{v.p.} \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\delta^* \to 0} \int\limits_{\Gamma_{A,\Delta}} f(z)dz,$$

  если предел существует и конечен, называется **главным значением интеграла** от f вдоль Γ (аналогично для цепей подходящих кривых).

Допустим, у нас есть гладкая кривая следующего вида (см. рис. 10.1). В точке a_1 мы вырезаем круг радиуса δ_1, и нам не важно, на каком расстоянии находится точки пересечения кривой с кругом. Более того, нам неважно то, как ведет себя кривая внутри круга. В другой точке, например, в точке a_2, мы будем вырезать круг уже другого радиуса.

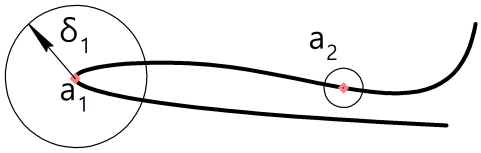

Рис 10.1

Рассмотрим пример, показывающий различие с определением интеграла в смысле главного значения в вещественном анализе. Рассмотрим интеграл

$$\text{v.p.} \int\limits_{\partial^+\Omega} \frac{dz}{z^2},$$

где $\Omega := (B(2,2) \setminus \overline{B(1,1)}) \cap \{z : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. На рис. 10.2 Ω - это область, ограниченная зеленым контуром.

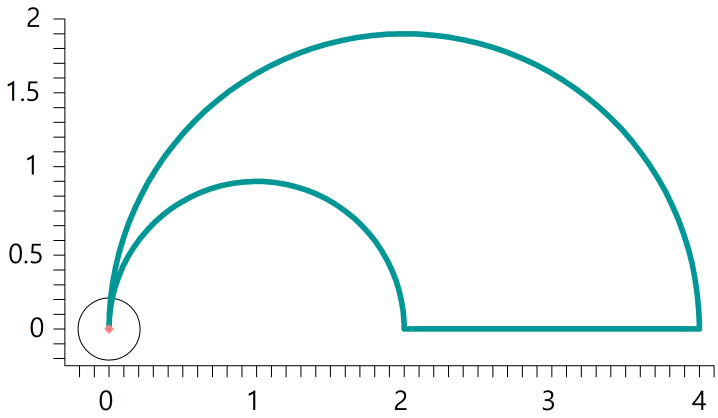

Рис 10.2

Заметим, что в начале координат граница области Ω имеет нулевой угол. Возьмем малое $\delta > 0$. Пусть $b_1, b_2 \in \partial\Omega$ - точки пересечения окрестности $C(0,\delta)$ с окружностями $C(1,1)$ и $C(2,2)$. Непосредственно вычисляется, что

$$b_1 = \frac{\delta}{2}(\delta + i\sqrt{4-\delta^2}), \quad \text{а} \quad b_2 = \frac{\delta}{4}(\delta + i\sqrt{16-\delta^2}).$$

Пусть $\Gamma = \partial^+\Omega$, $A = \{0\}$ и $\Delta = \{\delta\}$. Тогда $\Gamma_{A,\Delta} = \Upsilon_1 + [2,4] + \Upsilon_2$, где Υ_1 - это дуга окружности $C(1,1)$ от точки b_1 до точки 2, Υ_2 - это дуга окружности $C(2,2)$ от

точки 4 до точки b_2, а $[2,4]$ - это соответствующий отрезок вещественной прямой. Так как в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функция $\frac{1}{z^2}$ имеет комплексную первообразную, равную $-\frac{1}{z}$, то

$$\text{v.p.}\int\limits_{\partial^+\Omega}\frac{dz}{z^2}=\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{\Upsilon_1}\frac{dz}{z^2}+\int\limits_{[2,4]}\frac{dz}{z^2}+\int\limits_{\Upsilon_2}\frac{dz}{z^2}\right)=\frac{1}{4}+\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\sqrt{16-\delta^2}}{4\delta}-\frac{\sqrt{4-\delta^2}}{2\delta}\right)=\frac{1}{4}.$$

Пусть D - такая область в $\mathbb{C}$, что ∂D представляет собой цепь кривых, каждая из которых является замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой или ДЛО-образом такой кривой.

Кроме таких областей мы будем рассматривать их ДЛО-образы (в $\mathbb{C}_\infty$). Области указанного вида мы будем называть **подходящими**.

Основным (и наиболее важным) примером подходящей области является открытая верхняя полуплоскость $\mathbb{C}_+$.

Пример подходящей области приведен на рис. 10.3.

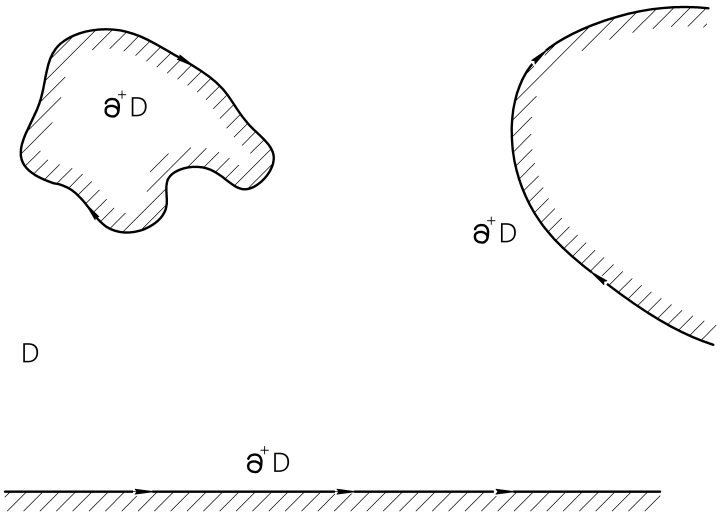

Рис 10.3

Фиксируем произвольную подходящую область D и точку $a\in\overline{D}$. При всех достаточно малых $\delta>0$ кривая $\gamma_D^+(a,\delta)=C(a,\delta)\cap\overline{D}$ представляет собой связную (ориентированную) дугу окружности (см. рис. 10.4):
Пусть при некотором $\rho>0$ на множестве $V(a,\rho)\cap\overline{D}$ (где D - подходящая область) задана непрерывная функция f. Выражение

$$\text{res}_{a;D}f=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\gamma_D^+(a,\delta)}f(z)dz,$$

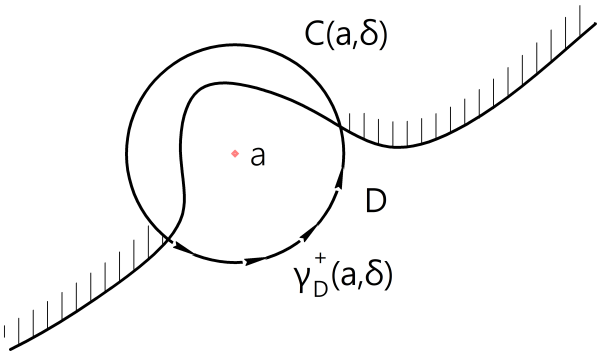

Рис 10.4

если предел существует и конечен, называется **(частичным) вычетом f в точке a относительно области D**.

Покажем, для чего нам нужны эти интегралы, а потом разберемся с тем, как их вычислять. Довольно просто формулируется аналог теоремы Коши о вычетах для интегралов в смысле главного значения.

Предложение 11.1 (теорема Коши о вычетах для v.p.-интегралов)
Пусть D - подходящая допустимая область, $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \overline{D}$ - некоторое (возможно пустое) множество, причем если $\infty \in \partial D$, то $\infty \in A$. Пусть $f \in H(D \setminus A) \cap C(\overline{D} \setminus A)$. Тогда

$$\text{v.p.} \int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{res}_{a_j;D} f.$$

При этом интеграл в смысле главного значения существует в том и только том случае, когда существуют все частичные вычеты, и в этом случае выполняется равенство.

Доказательство.
Положим $A_0 = A \cap \partial D$. Если $A_0 = \emptyset$ (при этом $\infty \notin \partial D$), то достаточно сослаться на стандартную теорему Коши о вычетах, так как точки внутри - ИОТ голоморфной функции.

Пусть теперь $A_0 \neq \emptyset$ (если $\infty \in \partial D$, то $\infty \in A_0$). Без ограничения общности будем считать, что $A_0 = \{a_1, \ldots, a_m\}$, где $m \leqslant n$. Для любого $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ с достаточно малым $\delta^* = \max\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ определим область

$$D_{A_0,\Delta} = D \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \overline{B(a_j, \delta_j)}.$$

Области D и $D_{A_0,\Delta}$ показаны на рис. 10.5 (первая область синим цветом, вторая

- красным). Внутри синие и красные линии совпадают. Видно, что дуги $\gamma_D^+(a_j, \delta_j)$ при $j = 1, \ldots, m$ и соответствующие дуги кривой $\partial^+ D_{A_0,\Delta}$ имеют противоположную ориентацию, так как центр лежит внутри окружности, но снаружи границы.

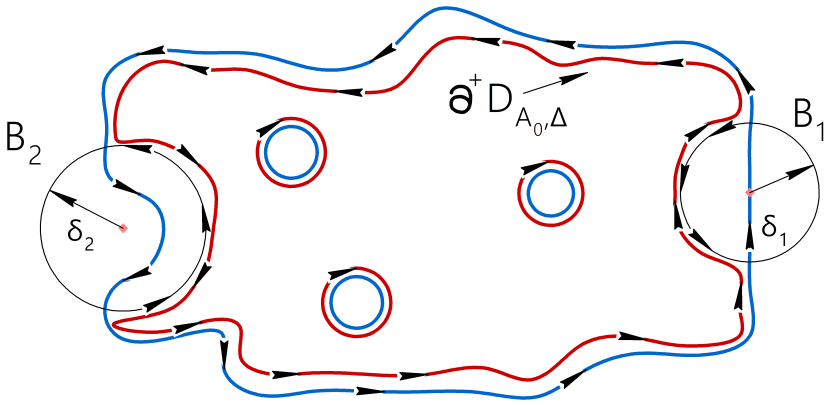

Рис 10.5

Для функции f в области $D_{A_0,\Delta}$ применима стандартная теорема Коши о вычетах:

$$\int\limits_{\partial^+ D_{A_0,\Delta}} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma^+_{A_0,\Delta}} f(z)dz - \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\gamma_D^+(a_j,\delta_j)} f(z)dz = \sum_{k=m+1}^{n} \operatorname{res}_{a_k} f,$$

где $\Gamma^+ = \partial^+ D$. Остается δ^* устремить к 0. ■

Разберемся теперь с тем, как считать частичные вычеты:

- Если $a \in D$, а $f \in H(V(a))$, то $\operatorname{res}_{a;D} f = \operatorname{res}_a f$, так как при $\delta \to 0$ $\gamma_D^+(a, \delta)$ в какой-то момент станет полной окружностью.
- Пусть (1) $a \neq \infty$, а $f(z) = o((z-a)^{-1})$ при $z \in \overline{D}$, $z \to a$, или (2) $a = \infty$, а $f(z) = o(z^{-1})$ при $z \in \overline{D}$, $z \to \infty$. Тогда $\operatorname{res}_{a;D} f = 0$, так как мы интегрируем по дуге малого радиуса δ функцию, которая убывает быстрее.

Лемма 11.1
Пусть D - подходящая область, $a \in \partial D \cap \mathbb{C}$ - полюс 1-го порядка функции f. Пусть θ_a - величина внутреннего угла области D в точке a. Тогда $\operatorname{res}_{a;D} f = \dfrac{\theta_a}{2\pi} \operatorname{res}_a f$.

Напоминание
Если a - точка гладкости, то в этой точке есть касательная и внутренний угол равен π.

Если точка a угловая, то формально в этой точке есть правая и левая касательные. Угол между этими касательными - внутренний угол θ_a области в точке a.

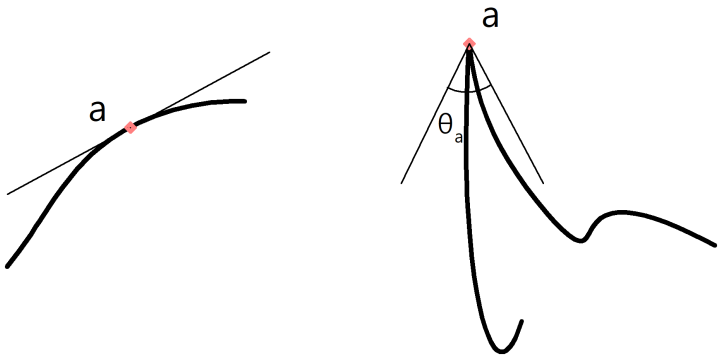

Рис 10.6 Внутренний угол области

Доказательство.
Напомним, что ∂D в окрестности a - это кусочно-гладкая дуга. При малых $\delta > 0$ кривую $\gamma_D^+(a,\delta)$ можно параметризовать следующим образом: $z(t) = a + \delta e^{it}$ при $t \in [\alpha(\delta), \beta(\delta)]$, где $\alpha(\delta) < \beta(\delta) < \alpha(\delta) + 2\pi$, причем $\beta(\delta) - \alpha(\delta) \to \theta_a$ при $\delta \to 0$.

У функции f есть полюс 1-го порядка, тогда ее ряд Лорана начинается с c_{-1}: $f(z) = \sum\limits_{n=-1}^{+\infty} c_n(z-a)^n$. При этом $c_{-1} = \mathrm{res}_a f$. Тогда

$$\mathrm{res}_{a;G} f = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\alpha(\delta)}^{\beta(\delta)}\left(\frac{c_{-1}}{\delta e^{it}} + O(1)\right) i\delta e^{it} dt = c_{-1}\frac{\theta_a}{2\pi} = \frac{\theta_a}{2\pi}\mathrm{res}_a f.$$

■

Задача: пусть $a \in \mathbb{R}$ - полюс функции f порядка больше 1, тогда $\mathrm{res}_{a,\mathbb{C}_+} f$ существует $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана функции f в $V(a)$ содержит только нечетные степени $(z-a)$. При этом $\mathrm{res}_{a,\mathbb{C}_+} = \frac{1}{2}\mathrm{res}_a f$.

Следующее утверждение также можно рассматривать как свойство частичного вычета относительно области.

Лемма 11.2 (лемма Жордана)
Пусть $R_0 > 0$ и функция f определена и непрерывна на множестве $\{z : \mathrm{Im}\ z \geqslant 0,\ |z| > R_0\}$. При $R > R_0$ положим $M(R) := \|f\|_{C_R^+}$, где $C_R^+ = \{Re^{it} : t \in [0,\pi]\}$. Предположим, что $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ так, что $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$. Тогда для любого $\lambda > 0$ выполнено

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R^+} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0.$$

Другими словами, в указанных условиях $\operatorname{res}_{\infty;\mathbb{C}_+}(f(z)e^{i\lambda z}) = 0$.

Доказательство.
Заметим, что

$$\left|\int\limits_{C_R^+} f(z)e^{i\lambda z}dz\right| \leqslant \left|\int\limits_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{-\lambda R\sin\theta + i\lambda R\cos\theta} iRe^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int\limits_0^\pi RM(R)e^{-\lambda R\sin\theta}d\theta.$$

Так как при $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ выполнено $\sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}$, то

$$\int\limits_0^\pi Re^{-\lambda R\sin\theta}d\theta = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\lambda R\sin\theta}d\theta \leqslant 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-2\lambda R\frac{\theta}{\pi}}d\theta = \pi\int\limits_0^R e^{\lambda t}dt = \frac{\pi}{\lambda}(1-e^{-\lambda R}),$$

где сделана замена переменных $t = \dfrac{2R\theta}{\pi}$. Мы получили что-то ограниченное, домноженное на $M(R)$, который стремится к 0. Положительность λ важна, так как степень экспоненты в последнем выражении отрицательная, значит экспонента убывает. Из этой оценки непосредственно вытекает требуемый результат. ■

Замечание
В условиях леммы Жордана аналогично доказывается, что $\operatorname{res}_{\infty,\mathbb{C}_-}(f(z)e^{-i\lambda z}) = 0$.

Примеры вычисления v.p.-интегралов

Теорема Коши о вычетах для v.p.-интегралов и приведенные выше способы вычисления частичных вычетов позволяют решать большой круг задач по вычислению конкретных интегралов.

Первый пример:
Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos(2x))}{x^2(x^2+1)}dx.$$

Положим $D := \mathbb{C}_+$, $f(z) := \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2(z^2+1)}$ и рассмотрим

$$J = \text{v.p.}\int\limits_{\partial_\infty^+\mathbb{C}_+} f(z)dz$$

так, что $I = \mathrm{Re}\ J$, причем заметим, что интеграл I абсолютно сходится.

В сделанных выше обозначениях $A = \{a_1 = 0, a_2 = \infty, a_3 = i\}$. Так как a_1 и a_3 - полюсы первого порядка функции f, то

$$J = 2\pi i(\mathrm{res}_{0;\mathbb{C}_+} f + \mathrm{res}_{i;\mathbb{C}_+} f + \mathrm{res}_{\infty;\mathbb{C}_+} f) = 2\pi i(\frac{1}{2}\mathrm{res}_0 f + \mathrm{res}_i f),$$

где использована лемма жордана (согласно которой $\mathrm{res}_{\infty;\mathbb{C}_+} f = 0$). Посчитаем вычет функции f в точке i:

$$\frac{1 - e^{2iz}}{z^2(z^2+1)} = \frac{1 - e^{2iz}}{z^2(z+i)(z-i)}.$$

Тогда определим $\varphi = \dfrac{1 - e^{2iz}}{z^2(z+i)}$, а $\psi = \dfrac{1}{z-i}$. $\psi' = 1$, поэтому

$$\mathrm{res}_i \frac{1 - e^{2iz}}{z^2(z+i)(z-i)} = \frac{1 - e^{-2}}{-2i}.$$

Чтобы посчитать вычет в нуле, необходимо посчитать следующий предел (по формуле из леммы 10.3):

$$\mathrm{res}_0 f = \lim_{z \to 0} \frac{1 - e^{2iz}}{z} \frac{1}{z^2+1}.$$

В итоге мы получим, что $J = \pi(1 + e^{-2})$ и $I = J$.

Второй пример:
Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \sin(x))dx}{x^3}.$$

Пусть (снова) $D = \mathbb{C}_+$, а $f(z) = \dfrac{iz - e^{iz}}{z^3}$. Тогда (абсолютно сходящийся) интеграл I равен $\mathrm{Im}\ J$, где

$$J = \text{v.p.} \int\limits_{\partial_\infty^+ \mathbb{C}_+} f(z)dz$$

Снова применяем теорему о вычетах для v.p.-интегралов, методы вычисления частичных вычетов и лемму Жордана при $A = \{a_1 = 0, a_2 = \infty\}$ и находим, что $J = 2\pi i \frac{1}{2}\mathrm{res}_0 f = \frac{\pi i}{2}$. Таким образом $I = \frac{\pi}{2}$.

Остановимся мы в этой лекции на вычислении v.p.-интегралов вида

$$I = \text{v.p.} \int\limits_0^{+\infty} (\ln(x))^m x^\alpha R(x)dx,$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in (-1, 1)$, а $R(x)$ - четная рациональная функция.

Мы хотим такую функцию интегрировать по полуоси. Начнем с логарифма. Необходимо определить его на вещественном луче. Это значит, что мы должны взять голоморфную ветвь логарифма, с разрезом не по вещественному лучу. Из-за четности $R(x)$ мы хотим, чтобы логарифм был определен еще и в симметричных точках, то есть логарифм должен быть определен и на положительном и на отрицательном вещественных лучах.

Из предыдущих примеров мы понимаем, что интегрировать придется по каким-то полуплоскостям. Возьмем разрез из нуля, направленный по отрицательной мнимой полуоси $-i\mathbb{R}_+$. Тогда $\ln_*(z) = \ln|z| + i\arg_* z$, где $\arg_* z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, так как мы формально можем брать любые ветви аргумента (не обязательно главные). Тогда возьмем функцию $z_*^\alpha = e^{\alpha \ln_*(z)}$, которая определена там же, где и логарифм. В частности, обе функции определены в $\mathbb{C}_+$ (0 на границе - особая точка).

Попробуем теперь применить к нашей функции в верхней полуплоскости теорему о вычетах для интегралов в смысле главного значения (это может и не получится). Тогда у нас возникает

$$\text{v.p.} \int\limits_{\partial^+\mathbb{C}_+} f\ dz \boxed{=}$$

Поймем теперь как устроен этот интеграл. По положительно ориентированной границе $\mathbb{C}_+$ мы идем от $-\infty$ до $+\infty$. Рассмотрим отдельно интегралы от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$. На правой полуоси $\arg_* x = 0$, поэтому $\ln_*(x) = \ln(x)$. Во втором интеграле напишем y вместо x. Тогда

$$\boxed{=} \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} (\ln(x))^m x^\alpha R(x) dx}_{=I} + \int\limits_{-\infty}^0 (\ln_*(y))^m y_*^\alpha R(y) dy \boxed{=}$$

Сделаем замену $y = -x$ и поменяем направление интегрирования. Тогда знак $+$ перед интегралом останется. Функция $R(-x) = R(x)$, так как она четная по условию. Так как $x < 0$, то аргумент равен π. Тогда $\ln_*(-x) = \ln(x) + \pi i$. Так как $z_*^\alpha = e^{\alpha \ln_*(z)}$, то в итоге мы получим:

$$\boxed{=} I + \int\limits_0^{+\infty} (\ln(x) + \pi i)^m x^\alpha e^{\pi\alpha i} R(x) dx.$$

У нас получилась некоторая рекуррентная формула, а в свою очередь, интеграл в смысле главного значения, стоящий в начале цепочки преобразований, равен сумме вычетов, которую мы умеем считать.

Разберем метод вычисления похожего интеграла в смысле главного значения

$$I = \text{v.p.} \int\limits_0^{+\infty} (\ln(x))^m x^\alpha R(x) dx,$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in (-1, 1)$, но $R(x)$ - рациональная функция общего вида (в отличии от предыдущего случая, R уже не предполагается четной).

Как и раньше выберем ветвь логарифма $\ln_*(z) = \ln|z| + i\arg_*(z)$ с условием $\arg_*(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ и выберем соответствующую ветвь $z_*^\alpha = e^{\alpha \ln_*(z)}$. Далее, рассмотрим ветвь логарифма $\ln_{**}(z) = \ln|z| + i\arg_{**}(z)$, определяемую условием $\arg_{**}(z) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$, то есть ветвь в $\mathbb{C}$ с разрезом по положительной мнимой полуоси $i\mathbb{R}_+$. Это означает, что вдоль отрицательной вещественной полуоси $\ln_* = \ln_{**}$, так как у них общие аргументы. Вдоль положительной аргументы отличаются на 2π. Далее, положим $z_{**}^\alpha = e^{\alpha \ln_{**}(z)}$.

Определим $k = m$ при $\alpha \neq 0$ и $k = m + 1$ при $\alpha = 0$. Рассмотрим функцию $f_1(z) = (\ln_*(z))^k z_*^\alpha R(z)$ в области $D_1 = \{z : \ 0 < \arg(z) < \beta\}$ при некотором $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ и функцию $f_2 = (\ln_{**}(z))^k z_{**}^\alpha R(z)$ в области $D_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$. Необходимо проверить, что для функций f_1 и f_2 в областях D_1 и D_2 соответственно выполнены условия теоремы о вычетах для v.p.-интегралов.

Заметим, что функции f_1 и f_2 и их варианты при меньших значениях k устроены так, что интегралы от них по $\mathbb{R}_+$ и $e^{i\beta}\mathbb{R}_+$ связаны рекуррентными соотношениями.

11. Лекция 11. Принцип аргумента и его следствия

Логарифмический вычет

Прежде чем перейти к принципу аргумента, разберемся с некоторой технической конструкцией, которая называется логарифмическим вычетом.

Напоминание
Выражение $\frac{f'}{f}$ - это логарифмическая производная f (то есть производная логарифма функции f, если она существует).

$U(a)$ и $V(a)$ - это окрестность и проколотая окрестность точки a соответственно.

Величина $\operatorname{res}_a \dfrac{f'}{f}$ (если она определена для данных f и $a \in \mathbb{C}$) называется **логарифмическим вычетом** функции f в точке a и обозначается $\log \operatorname{res}(f, a)$.

Пусть $a \in \mathbb{C}$, а $f \in H(U(a))$, и пусть a - ноль f порядка n, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, существует $g \in H(U(a))$ такая, что $f(z) = (z-a)^n g(z)$ при $z \in U(a)$ и $g(a) \neq 0$. В этом случае

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h(z)}{z-a},$$

где $h(z) = \dfrac{ng(z) + (z-a)g'(z)}{g(z)}$, причем $h \in H(U(a))$ и $h(a) = n$. Следовательно, в данном случае $\exists \log\ \operatorname{res}_a f = n$.

Пусть $a \in \mathbb{C}$, а $f \in H(V(a))$ и a - это полюс порядка n, $n \in \mathbb{N}$, для f. Тогда функция $F = \frac{1}{f}$ имеет в точка a ноль порядка n. Так как $\frac{f'}{f} = -\frac{F'}{F}$, то, с учетом предыдущего вычисления получаем, что и в этом случае $\exists \log \operatorname{res}_a f = -n$.

Тот факт, что логарифмический вычет в полюсе функции f равен порядку этого полюса, взятому с обратным знаком, можно получить и непосредственным вычислением. Для этого нужно представить f в $V(a)$ в виде $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$, где $g \in H(U(a))$ и $g(a) \neq 0$.

Итак, если $f \in H(V(a))$ и a - ноль или полюс для f, то $\frac{f'}{f}$ определена в $V(a)$ и a полюс 1-го порядка для $\frac{f'}{f}$. Доказательство оставляется в качестве **упражнения**. Верно и обратное: если $f \in H(V(a))$ и a - полюс 1-го порядка для $\frac{f'}{f}$, то a - ноль

или полюс для f.

Пусть D - область в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathfrak{z}(f, D)$ и $\mathfrak{p}(f, D)$ - число нулей и полюсов функции f в D (с учетом кратности).

Предложение 13.1 (лемма о логарифмических вычетах)
Пусть D - Д.О. со спрямляемой границей $A = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset D$, $N \in \mathbb{N}$, пусть $f \in H(\overline{D} \setminus A)$ и пусть $a_1, \ldots, a_N$ - полюсы f (других особенностей нет). Пусть также $f \neq 0$ на ∂D. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathfrak{z}(f, D) - \mathfrak{p}(f, D).$$

Доказательство.
Пусть $B = \{b_1, \ldots, b_M\}$, $m \in \mathbb{N}$, - множество всех нулей f в D, и пусть $Y = A \cup B$. Заметим, что $g = \frac{f'}{f} \in H(\overline{D} \setminus Y)$. Как было показано выше, точки a_n, $n = 1, \ldots, N$, и b_m, $m = 1, \ldots, M$ - это полюса первого порядка для g. Обозначив через $k_1, \ldots, k_N$ порядки полюсов $a_1, \ldots, a_N$ функции f, а через $k'_1, \ldots, k'_M$ - порядки ее нулей $b_1, \ldots, b_m$ и применив теорему Коши о вычетах получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{w \in Y} \operatorname{res}_w \frac{f'}{f} = \sum_{w \in Y} \log \operatorname{res}_w f = \sum_{m=1}^{M} k'_m - \sum_{n=1}^{N} k_n = \mathfrak{z}(f, G) - \mathfrak{p}(f, G).$$

■

Обозначения
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, $f \in H(D \setminus S)$, где S - множество ИОТ для f. Тогда $S = \mathcal{RS}(f, D) \cup \mathcal{S}_\infty(f, D) \cup \mathcal{ES}(f, D)$, где $\mathcal{RS}$, $\mathcal{S}_\infty$ и $\mathcal{ES}$ - это множества УОТ, полюсов и СОТ f, соответственно. Для функции $f : D \to \mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{Z}(f, D)$ множество ее нулей в D, то есть $\mathcal{Z}(f, D) = \{z \in D : \ f(z) = 0\}$.

Напомним, что функция f называется мероморфной в области $D \subset \mathbb{C}_\infty$, если $f \in H(D \setminus S)$ и $S = \mathcal{S}_\infty(f, D)$. Обозначим через $H_\sharp(D)$ класс мероморфных функций в D и $H_\sharp(\overline{D}) = \{f : \ f \in H_\sharp(U_f), U_f = U_f^\circ \supset \overline{D}\}$.

Принцип аргумента

Примем некоторые соглашения. Пусть f определена на множестве E. Пишем "$f \neq 0$ на E" , если f не имеет нулей на E, "$f \neq \infty$ на E" , если f не имеет полюсов на E, и "$f \neq 0, \infty$ на E" , если f не имеет на E ни того, ни другого.

Напоминание
Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ - путь. Рассмотрим многозначную функцию $\mathrm{Arg}\ \gamma(t)$. Утверждается, что эта функция распадается над $[0,1]$ на непрерывные ветви $\{\varphi_j\}$, где $\varphi_j \in C([0,1])$ и $\varphi_j(t) \in \mathrm{Arg}\ \gamma(t)$. Более того, $\mathrm{Arg}\ \gamma(t) = \{\varphi_j(t), j = 1, \dots\}$ и $\varphi_j - \varphi_k \equiv 2\pi m$ (это была лемма, которую мы доказывали, когда связывали понятия индекса и приращения аргумента).

Если взять теперь $\varphi_j(1) - \varphi_j(0)$, то понятно, что эта величина не зависит от индекса j. Эту разность мы и называем приращением вдоль пути γ аргумента z. Аргументы совпадают для эквивалентных путей, поэтому мы можем говорить про приращение вдоль кривой.

Теперь пусть Γ - кривая (заданная путем $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$), а $f \in C(\Gamma^*)$ и $f \neq 0$ на Γ^*. Величина $\Delta_\Gamma \mathrm{Arg}\ f := \Delta_\Upsilon \mathrm{Arg}\ z$, где кривая Υ задается путем $f(\gamma(t)),\ t \in [0,1]$, называется **приращением аргумента** f вдоль Γ (заметим, что $0 \notin \Upsilon^*$).

Принцип аргумента, наводящее соображение.
Пусть D - жорданова область с кусочно-гладкой границей, а $f \in H_\sharp(\overline{D})$ и $f \neq 0, \infty$ на ∂D (то есть f голоморфна в окрестности ∂D). Тогда $f(\partial D)$ - это замкнутая кривая в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Предположим, что ∂D задается при помощи кусочно-гладкого пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Тогда $f(\partial^+ D)$ - это кусочно-гладкая кривая (так как f голоморфна в окрестности ∂D), которая задается при помощи пути $f \circ \gamma$ и

$$\mathfrak{z}(f, D) - \mathfrak{p}(f, D) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{f \circ \gamma} \mathrm{Arg}\ z.$$

То есть $\mathfrak{z}(f, D) - \mathfrak{p}(f, D) = \dfrac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \mathrm{Arg}\ f$.

Напоминание
Напомним конструкцию **допустимой области (Д.О.)**, возникшую в связи с интегральной теоремой Коши. Речь идет об областях вида

$$D = D_0 \setminus \left(\overline{D_1} \cup \dots \cup \overline{D_M} \right),$$

где $M \in \mathbb{N}$, а D_0 и D_m, $m = 1, \ldots, M$ - такие жордановы области, что $\overline{D_m} \subset D_0$ и $\overline{D_m} \cap \overline{D_{m'}} = \emptyset$ при $m \neq m'$. Число M называется рангом области D. По определению,

$$\partial^+ D = \partial^+ D_0 - \sum_{m=1}^{M} \partial^+ D_m.$$

Далее, если $f \in C(\partial D)$ и $f \neq 0$ на ∂D, то определена величина

$$\Delta_{\partial^+ D} \mathrm{Arg}\ f = \Delta_{\partial^+ D_0} \mathrm{Arg}\ f - \sum_{m=1}^{M} \Delta_{\partial^+ G_m} \mathrm{Arg}\ f.$$

Если D - Д.О. ранга M, а $f \in H_\sharp(\overline{G})$, то найдется Д.О. G такая, что ранг G также равен M, и выполнено $\overline{D} \subset G$ и $f \in H_\sharp(G)$.

Теорема 13.1 (принцип аргумента)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - Д.О., $f \in H_\sharp(\overline{D})$ и $f \neq 0, \infty$ на ∂D. Тогда

$$\mathfrak{z}(f, D) - \mathfrak{p}(f, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \mathrm{Arg}\ f. \tag{13.1}$$

Для доказательства принципа аргумента достаточно доказать следующее утверждение.

Предложение 13.2
Пусть Γ - замкнутая спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, U - некоторая окрестность Γ^*. Пусть $f \in H(U)$ и $f \neq 0$ на Γ^*. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \mathrm{Arg}\ f.$$

Доказательство.
Заметим, что $\frac{f'}{f} \in H(W)$, где W - некоторая окрестность Γ^*.
Положим $\Omega_1 = \mathbb{C} \backslash (-\mathbb{R}_+)$, $\Omega_2 = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$. При $w \in \Omega_1$ положим $\ln_{(1)} w = \ln |w| + i \arg_{(1)} w$, где $\arg_{(1)} w \in (-\pi, \pi)$, а при $w \in \Omega_2$ положим $\ln_{(2)} w = \ln |w| + i \arg_{(2)} w$, где $\arg_{(2)} w \in (0, 2\pi)$.
Пусть $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ - пусть, задающий Γ и пусть $\sigma(t) := f(\gamma(t))$, $t \in [0, 1]$. Найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что разбиение отрезка $[0, 1]$ на N последовательных равных частей $[0, 1] - l_1 + \cdots + l_N$ обладает следующим свойством: для каждого n, $1 \leqslant n \leqslant N$ путь $\sigma_n := \sigma|_{l_n}$ удовлетворяет условию $\sigma_n^* \subset W_n$, где $W_n = \Omega_1$ или $W_n = \Omega_2$. Зафиксируем соответствующий выбор W_n.

Так как $f \in C(U)$, для каждого рассматриваемого n найдется окрестность $U_n \subset U$

компакта γ_n^* (где $\gamma_n = \gamma|_{l_n}$, а $\sigma_n = f(\gamma_n)$) такая, что $f(U_n) \subset W_n$. При $z \in U_n$ положим

$$\ln_{(n)} f(z) = \ln_{(s)} f(z)$$

если $W_n = \Omega_s$, $s = 1, 2$. Тогда $\ln_{(n)} f \in H(U_n)$ и $(\ln_{(n)} f)' = \frac{f'}{f}$. Если $l_n = [t_{n-1}, t_n]$, то

$$\int\limits_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \ln_{(n)} f(z)\Big|_{\gamma(t_{n-1})}^{\gamma(t_n)} = \ln|f(z)|\Big|_{\gamma(t_{n-1})}^{\gamma(t_n)} + i\Delta_{\gamma_n}\mathrm{Arg}\ f.$$

Остается просуммировать эти равенства по n от 1 до N и заметить, что первые слагаемые взаимно сократятся, так как $\gamma(t_0) = \gamma(0) = \gamma(1) = \gamma(t_N)$ в силу замкнутости Γ. Приращения аргумента сложатся, и мы получим приращение аргумента вдоль всей Γ. ■

В дальнейшем нам потребуется еще одна простая техническая лемма.

Лемма 13.1 (о приращении аргумента функции, мало отличающейся от единицы)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - Д.О., $h \in C(\partial D)$, и пусть $\|h\|_{\partial D} = \max\limits_{z \in \partial D} |h(z)| < 1$. Тогда

$$\Delta_{\partial^+ D}\mathrm{Arg}(1 + h) = 0.$$

Доказательство.
Достаточно установить следующий факт: если Γ - замкнутая жорданова кривая, а $h \in C(\Gamma^*)$ такова, что $\|h\|_{\Gamma^*} < 1$, то $\Delta_{\Gamma^+}\mathrm{Arg}(1 + h) = 0$.

Заметим, что $\Delta_{\Gamma^+}\mathrm{Arg}(1 + h) = \Delta_{\Upsilon^+}\mathrm{Arg}\ z$, где кривая Υ задана при помощи пути $\sigma(t) = 1 + h(\gamma(t))$, $t \in [0, 1]$, где $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ - путь, задающий Γ. Так как $|h(\gamma(t))| < 1$ при $t \in [0, 1]$, то Υ^* лежит в круге с центром в точке 1 радиуса $\delta < 1$, то есть целиком лежит в (открытой) правой полуплоскости $\{\mathrm{Re}\ z > 0\}$. Из этого следует, что в качестве непрерывной ветви многозначной функции $\mathrm{Arg}(\sigma(t))$, $t \in [0, 1]$, можно взять функцию $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$, определенную следующим образом

$$\alpha(t) = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(\sigma(t))}{\mathrm{Re}(\sigma(t))}.$$

При этом $\alpha(t) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и, так как $\sigma(0) = \sigma(1)$, то ясно, что $\alpha(1) - \alpha(0) = 0$. То есть $\Delta_{\Upsilon^+}\mathrm{Arg}\ z = 0$. ■

На самом деле, принцип аргумента верен в более общей ситуации:

Теорема 13.2 (усиленный принцип аргумента)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - Д.О., функция $f \in H_\sharp(D) \cap C(\overline{D} \setminus \mathcal{S}_\infty(f, D))$ и $f \neq 0$ на ∂D. Тогда

$$\mathfrak{z}(f, D) - \mathfrak{p}(f, D) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\mathrm{Arg}\ f.$$

Предложение 13.3 (теорема Руше)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - Д.О. Пусть $f, g \in C(\overline{D}) \cap H(D)$, причем $|g(z)| < |f(z)|$ всюду на ∂D. Тогда $\mathfrak{z}(f, D) = \mathfrak{z}(f + g, D)$.

Доказательство.
Заметим, что $f \neq 0$ на ∂D (в противном случае возникала бы ситуация, когда $|g(z)| < 0$). Положим $h := \frac{g}{f}$, так что $|h(z)| < 1$ при $z \in \partial D$. Тогда, по принципу аргумента

$$\mathfrak{z}(f + g, D) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\mathrm{Arg}(f + g) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\mathrm{Arg}\ f + \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\mathrm{Arg}(1 + h) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\mathrm{Arg}\ f = \mathfrak{z}(f, D),$$

так как $\Delta_{\partial^+ D}\mathrm{Arg}(1 + h) = 0$ по лемме о приращении аргумента функции, мало отличающейся от единицы. ■

Теорема 13.3 (принцип сохранения области (П.С.О))
Если D - область в $\mathbb{C}$, а $f \in H(D)$ и $f \neq \mathrm{Const}$, то $G = f(D)$ является областью.

Доказательство.
Связность G очевидна (из линейной связности D и непрерывности f вытекает линейная связность G).

Докажем открытость G. Фиксируем $w_0 \in G$ и $z_0 \in D$, $f(z_0) = w_0$. Голоморфная функция $f_1(z) = f(z) - w_0 \neq \mathrm{Const}$, следовательно z_0 - ее изолированный ноль. Найдется $\delta > 0$ такое, что $\overline{B(z_0, \delta)} \subset D$ и $f_1(z) \neq 0$ на $C(z_0, \delta)$, так что $\varepsilon := \min\limits_{z \in C(z_0, \delta)} |f_1(z)| > 0$ (то есть на $C(z_0, \delta)$ $|f_1(z)| > \varepsilon$).

Проверим, что $B(w_0, \varepsilon) \subset G$. Действительно, пусть $|w - w_0| < \varepsilon$. По теореме Руше, примененной к области $B = B(z_0, \delta)$ и к функциям f_1 и $g_1 \equiv w_0 - w$, находим (для этих функций на $C(z_0, \delta)$ выполнено $|g_1(z)| < |f_1(z)|$), что $\mathfrak{z}(f - w, B) = \mathfrak{z}(f_1 + g_1, B) = \mathfrak{z}(f_1, B) \geqslant 1$.

Таким образом, для любого $w \in D(w_0, \varepsilon)$ существует хотя бы одна точка $a \in B(z_0, \delta)$ такая, что $f(a) = w$, то есть $B(w_0, \varepsilon) \subset G$. ■

Следствие
Пусть D - область в $\mathbb{C}_\infty$ и функция f конформна в D. Тогда $G = f(D)$ - область, а f - гомеоморфизм D и G.

Предложение 13.4 (обратный принцип соответствия границ)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - жорданова область, $\Gamma = \partial D$, а функция $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ такова, что f взаимно-однозначна на Γ. Тогда f взаимно-однозначно отображает D на $G = \mathrm{Int}(f(\Gamma))$ (внутренность образа границы).

Доказательство.
Так как Γ - это замкнутая жорданова кривая, и функция $f \in C(\Gamma)$ взаимно-однозначна на Γ, то $\Upsilon = f(\Gamma)$ - это замкнутая жорданова кривая (если Γ задана при помощи пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, то Υ задается при помощи пути σ, $\sigma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0,1]$). Пусть $G = \mathrm{Int}(\Upsilon)$ - область, ограниченная кривой Υ^* (то есть ограниченная компонента множества $\mathbb{C}_\infty \setminus \Upsilon^*$ по теореме Жордана). Возьмем $b \in \mathbb{C} \setminus \Upsilon^*$. Так как $f - b \neq 0$ на Γ (так как Γ взаимно-однозначно отображается в Υ), то по принципу аргумента получаем, что при $b \in G$

$$\mathfrak{z}(f-b, D) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D}\mathrm{Arg}(f-b) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ G}\mathrm{Arg}(w-b) = 1.$$

Последнее равенство имеет место в силу обсуждавшегося ранее дополнения к теореме Жордана об индексе жордановой кривой (± 1 в зависимости от ориентации кривой, а в левой части равенства стоит число нулей, которое не может быть отрицательным). ■

Новое доказательство принципа максимума модуля.
Принцип аргумента и принцип сохранения области позволяют дать новое доказательство принципа максимума модуля для голоморфных функций.

Нам нужно доказать следующее утверждение: пусть D - область в $\mathbb{C}$, а функция $f \in H(D)$ такова, что $|f|$ имеет в точке $z_0 \in D$ локальный максимум. Тогда f постоянна в D.

Лемма Шварца и ее следствия

Пусть $\mathscr{B} := \{f \in H(\mathbb{D} : \ |f(z) \leqslant 1 \text{ при } |z| < 1\}$.

Предложение 14.1 (лемма Шварца)
Пусть $f \in \mathscr{B}$ и $f(0) = 0$. Тогда $|f(z)| \leqslant |z|$ при всех $z \in \mathbb{D}$ и $|f'(0)| \leqslant 1$. Если любое из этих равенств выполняется хотя бы в одной точке $z_0 \in \mathbb{D}$, то $f(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
Определим $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ и положим $f(0) = f'(0)$. Таким образом, $g \in H(\mathbb{D})$. Возьмем $z \in \mathbb{D}$ и выберем R, $0 < R < 1$, так, что $|z| < R$. Для произвольного $r \in (R, 1)$ для функции g в круге $B(0, r)$ выполнен принцип максимума модуля: $|g(w)| \leqslant \max\limits_{|\zeta|=r} |g(\zeta)|$. Таким образом,

$$\frac{|f(z)|}{|z|} = |g(z)| \leqslant \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Переходя к пределу при $r \to 1-$ получаем, что $|f(z)| \leqslant |z|$, что и требовалось. Если $|f(z_0)| = |z_0|$ при $z_0 \in \mathbb{D}$, то $|g(z_0)| = 1$. Но тогда, про принципу максимума, $g \equiv c$, $|c| = 1$. Утверждение про $f'(0)$ доказывается аналогично. ■

Упражнение
Вывести лемму Шварца из неравенств Коши для коэффициентов Тейлора.

Замечания
Вариант леммы Шварца в круге $B(a, R)$: пусть $f \in H(B(a, R))$, $|f(z)| \leqslant M$ при $z \in B(a, R)$ и $f(a) = 0$, то $|f(z)| \leqslant MR^{-1}|z - a|$ при всех $z \in B(a, R)$.

Задача: вывести теорему Лиувилля из леммы Шварца.

Пусть в условиях классической леммы Шварца известно, что f имеет в 0 ноль порядка m. Тогда аналогично доказывается, что всюду в круге $\mathbb{D}$ выполнено неравенство $|f(z)| \leqslant |z|^m$, а в случае, если это неравенство обращается в равенство во внутренней точке единичного круга, то $f = e^{i\alpha}z^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Введем инвариантную форму леммы Шварца: попробуем отказаться от условия, что $f(0) = 0$. То есть поймем, какую оценку можно написать на функцию и ее производную, если функция голоморфна в круге и ограничена там единицей.

Предложение 14.2 (лемма Шварца-Пика - инвариантная форма леммы Шварца)
Пусть $f \in \mathscr{B}$. Тогда

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z - w}{1 - \overline{w}z}\right|, \quad z \neq w,\ z, w \in \mathbb{D}.$$

Кроме того, $|f'(z)| \leqslant \dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ при $z \in \mathbb{D}$. Любре из этих неравенств обращается в равенство во внутренних точках круга $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда f - это ДЛО круга $\mathbb{D}$ на себя.

Доказательство.

Для доказательства фиксируем $w \in \mathbb{D}$ и возьмем ДЛО $\varphi(z) = \dfrac{z+w}{1+\overline{w}z}$ и $\psi(z) = \dfrac{z-f(w)}{1-\overline{f(w)}z}$ (оба ДЛО, как и f, переводят круг в себя). Функция $g = \psi \circ f \circ \varphi$ лежит в классе $\mathscr{B}$ и $g(0) = 0$. По лемме Шварца $|g(z) \leqslant |z|$ при $z \in \mathbb{D}$ и $|g'(0)| \leqslant 1$. Оставшиеся вычисления оставляются в качестве **упражнения**. ■

Задача

Показать, что если $f \in \mathscr{B}$, то при всех $z \in \mathbb{D}$ выполнено

$$|f(z)| \leqslant \frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|}.$$

Предложение 14.3 (следствие леммы Шварца: общий вид конформных автоморфизмов единичного круга)

Пусть f - это конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на себя. Тогда

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

где $a \in \mathbb{D}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

По условию, $f \in \mathscr{B}$. Так как f - это взаимно-однозначное отображение $\mathbb{D}$ на себя, то найдется $a \in \mathbb{D}$ такое, что $f(a) = 0$. Пусть $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ - это ДЛО круга $\mathbb{D}$ на себя такое, что $\varphi_a(a) = 0$. Заметим, что $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$. То есть φ_{-a} - это конформный (дробно-линейный) автоморфизм круга $\mathbb{D}$ такой, что $\varphi_{-a}(0) = a$. Таким образом, отображение $h = f \circ \varphi_{-a}$ - это отображение класса $\mathscr{B}$ и $h(0) = 0$. По лемме Шварца, $|h(z)| \leqslant |z|$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Так как h - это взаимно-однозначное отображение круга на себя, то верно и неравенство $|h^{-1}(z)| \leqslant |z|$, откуда $|z| \leqslant |h(z)| \leqslant |z|$, то есть $h(z) = e^{i\alpha}z$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ по лемме Шварца. Остается вспомнить, что h - это композиция произвольного автоморфизма круга и ДЛО. ■

Предложение 14.4 (лемма Бореля-Каратеодори)

Пусть $f \in H(\overline{B}(0,R))$, пусть $M(r) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ и $A(r) = \max\limits_{|z|=r}\operatorname{Re} f(z)$. Тогда при

$0 < r < R$ выполнено

$$M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}|f(0)| + \frac{2r}{R-r}A(R).$$

Доказательство.
Без ограничения общности считаем, что f - непостоянная функция. Пусть $f(0) = 0$. В этом случае $A(R) > A(0) = 0$ (проверка - **упражнение**). Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)} \in H(\overline{B}(0,R)), \quad g(0) = 0.$$

Проверка того, что знаменатель не обращается в ноль оставляется в качестве упражнения (можно доказать используя аналог леммы о среднем для $\mathrm{Re}\ f$). Далее, пусть $f = u + iv$. Тогда $|g(z)|^2 = g(z)\overline{g(z)} = \dfrac{u^2+v^2}{(2A(R)-u)^2+v^2}$, откуда $|g(z)| \leqslant 1$ при $z \in B(0,R)$. По лемме Шварца имеет место неравенство $|g(z)| \leqslant \frac{|z|}{R}$, то есть $|z| = r$ выполнено $|g(z)| \leqslant \frac{r}{R}$. Тогда

$$|f(z) = \left|\frac{2A(R)g(z)}{1+g(z)}\right| \leqslant \frac{2A(R)r}{R(1-\frac{r}{R})} = \frac{2A(R)r}{R-r}.$$

В случае, когда $f(0) \neq 0$ вместо функции f рассмотрим функцию $h(z) = f(z) - f(0)$. Для этой функции выполнено неравенство

$$|h(z)| \leqslant \frac{2r}{R-r}A_h(R) \leqslant \frac{2r}{R-r}(A(R) + |f(0)|),$$

из которого требуемое утверждение вытекает непосредственно. ■

Доказательство малой теоремы Пикара для целых функций контролируемого роста

Напомним, что функция $f \in H(\mathbb{C})$ называется целой. Имеет место классический результат:

Теорема 14.1 (малая теорема Пикара)
Пусть f - целая функция, и пусть f не является постоянной. Тогда f принимает в $\mathbb{C}$ все значения, за исключением, быть может, одного.

Мы докажем эту теорему для одного весьма широкого специального класса целых функций используя лемму Бореля-Каратеодори.

- **Функция "итерированный логарифм"** . Пусть $n \in \mathbb{N}$. При $t > 0$ определим $\log_{(1)} t = \log$ t и $\log_{(n+1)} t = \log \log_{(n)} t$.

- **Класс** $H_{(n)}(\mathbb{C})$ определим как класс всех целых функций, для которых

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log_{(n)} M_f(r)}{\log r} < \infty,$$

где $M_f(r)$ - максимум модуля функции на окружности радиуса r.

Класс $H_{(1)}(\mathbb{C})$ состоит из функций f, для которых $|f(z)||z|^p$, $p > 0$. Аналогично доказательству теоремы Лиувилля можно показать, что $H_{(1)}(\mathbb{C}) = \mathcal{P}$ (класс многочленов). Класс $H_{(2)}(\mathbb{C})$ хорошо известен в теории целых функций: это класс целых функций конечного порядка.

- **Определим класс** $\tilde{H}(\mathbb{C}) := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_{(n)}(\mathbb{C})$. Этот класс уместно называть классом целых функций обобщенного порядка, не выше итерированного экспоненциального.

Доказательство малой теоремы Пикара для функций класса $\tilde{H}(\mathbb{C})$.
Доказательство проведем по индукции. Как отмечено выше, если $f \in H_{(1)}(\mathbb{C})$, то f - многочлен. В этом случае для любого $a \in \mathbb{C}$ уравнение $f(z) = a$ имеет в $\mathbb{C}$ корни (их столько, какова степень многочлена f). То есть функции класса $H_{(1)}(\mathbb{C})$ принимают все значения из $\mathbb{C}$.

Предположим, что уже доказано утверждение о том, что функции класса $H_{(n)}(\mathbb{C})$ при $n = N$ принимают все значения кроме, быть может, одного, и докажем, что соответствующий факт верен и при $n = N + 1$.
Пусть $f \in H_{(N+1)}(\mathbb{C})$ и пусть $f(z) \neq a$ при некотором $a \in \mathbb{C}$. Переходя, если надо, от f к $f - a$ можно считать, что $a = 0$.
Итак, пусть $f(z) \neq 0$ в $\mathbb{C}$. Тогда найдется $g \in H(\mathbb{C})$ такая, что $f = \exp(g)$. Это вытекает из следующей леммы, **доказательство которой оставляется в качестве обязательной задачи**.

Лемма 14.1
Пусть D - односвязная область в $\mathbb{C}$, пусть $f \in H(D)$, и пусть $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда существует функция $g \in H(D)$ такая, что $f = \exp(g)$, а также для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, существует функция $h \in H(D)$ такая, что $f = h^m$.

Так как $f = e^g$, то $|f(z)| = e^{\operatorname{Re} g(z)}$ и $M_f(r) = \exp(A_g(r))$, откуда $\log_{(N)} A_g(r) = \log_{(N+1)} M_f(r)$. Из определения $H_{(N+1)}(\mathbb{C})$ получаем

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log_{(N)} A_g(r)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log_{(N+1)} M_f(r)}{\log r} < \infty.$$

Наша цель - доказать, что $g \in H_{(N)}(\mathbb{C})$. Для этого используем лемму Бореля-Каратеодори. Согласно лемме для любых $R > 0$ и $r < R$ выполнено неравенство

$$M_g(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}|g(0)| + \frac{2r}{R-r}A_g(R).$$

Из этого неравенства (достаточно взять $R = 2r$) вытекает, что

$$M_g(r) \leqslant 2A_g(2r) + 3|g(0)|.$$

Так как $A_g(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ (иначе функция g будет постоянной: **упражнение)**, то найдется $r_0 > 0$ такое, что $M_g(r) \leqslant 3A_g(2r)$ при $r > r_0$. Но тогда

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log_{(N)} M_g(r)}{\log r} \leqslant \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log_{(N)} 3A_g(2r)}{\log r} < \infty,$$

то есть $g \in H(\mathbb{C})$. Функция g, по предположению индукции, принимает все значения из $\mathbb{C}$, кроме, быть может, одного. Пусть $w \in \mathbb{C}$. Тогда g принимает все значения из $\{w + 2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$, кроме, быть может, одного. Значит f принимает значение e^w, причем бесконечное число раз. То есть f принимает все значения из $\mathbb{C}$, кроме 0. Остается вернуться к произвольному $a \neq 0$ (и функции $f - a$).

12. Лекция 12. Однолистные функции

В прошлой лекции мы обсудили лемму Шварца и извлекли из нее некоторые основные свойства. Далее, мы займемся однолистными функциями. Основная задача в этом разделе - разобраться с теоремой Римана. Но прежде чем мы перейдем к этой теореме, разберемся с общим понятием однолистности.

Однолистные функции

Определение 15.1
Пусть $a \in \mathbb{C}$, а $f \in H(a)$ (то есть $f \in H(B(a,r))$ при некотором $r > 0$). Функция f называется **однолистной** в a, если существует $\delta > 0$ такое, что f взаимно-однозначна в $B(a,\delta)$.
Обозначение: $f \in \mathscr{U}(a)$.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область. Функция $f \in H(D)$ называется **локально однолистной** в D, если она однолистна в каждой точке области D; функция f называется **однолистной** в D, если она взаимно-однозначна в D.
Обозначения: $\mathscr{U}_l(D)$, $\mathscr{U}(D)$, соответственно.

Предложение 15.1 (критерии однолистности)

1) Пусть $a \in \mathbb{C}$, а $f \in H(a)$. Тогда $f \in \mathscr{U}(a) \Leftrightarrow f'(a) \neq 0$.

2) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, а $f \in H(D)$. Тогда $f \in \mathscr{U}(D) \Leftrightarrow f$ конформна в D. Более того, если $f \in \mathscr{U}(D)$, то f - это конформный изоморфизм D на $f(D)$.

Доказательство.
Достаточно доказать 1-е утверждение (2-е вытекает из него и критерия конформности).
$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f \in H(B(a,r))$, при некотором $r > 0$, и $f'(a) \neq 0$. Так как $f' \in H(B(a,r))$ и $f'(a) \neq 0$, то найдется $\rho \in (0,r)$ такое, что $|f'(z) - f'(a)| < \frac{1}{2}|f'(a)|$ при $z \in B(a,\rho)$. Тогда $\forall z_1, z_2 \in B(a,\rho)$, $z_1 \neq z_2$ имеем

$$f(z_2) - f(z_1) = \int\limits_l f'(w)dw = \int\limits_l (f'(w) - f'(a))dw + f'(a)(z_2 - z_1),$$

где $l = [z_1, z_2]$. Отсюда вытекает, что

$$|f(z_2) - f(z_1) - f'(a)(z_2 - z_1)| \leqslant \int\limits_l |f'(w) - f'(a)||dw| < \frac{|f'(a)|}{2}|z_2 - z_1|.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $f(z_1) \neq f(z_2)$ (иначе возникло бы неравенство $1 < \frac{1}{2}$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $a \in \mathbb{C}$, а $f \in H(B(a,r))$, $r > 0$, но $f'(a) = 0$. Докажем неоднолистность f в точке a. пусть $f(z) \not\equiv f(a)$ в $B(a,r)$. Тогда найдутся $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. и $g \in H(B(a,r))$ такие, что $g(a) \neq 0$ и $f(z) - f(a) = (z-a)^n g(z)$. Далее, найдется $\delta > 0$ такое, что $g(z) \neq 0$ при $z \in \overline{B(a,\delta)}$. По Лемме 14.1 найдется $g_1 \in H(B(a,\delta))$ такая, что $g(z) = (g_1(z))^n$. Заметим, что $g_1(a) \neq 0$ и функция $h_1(z) = (z-a)g_1(z)$ обладает свойствами: $h_1(a) = 0$ и $h_1'(a) = g_1(a) \neq 0$. Из последнего свойства, в частности, следует, что найдется $\rho < \delta$ такое, что h_1 взаимно-однозначна в $B(a,\rho)$. Наконец, $f(z) = (h_1(z))^n$.

По принципу сохранения области $f(B(a,\rho))$ содержит некоторый круг $B(0,t)$, $t > 0$. Пусть $w_1, w_2 \in B(0,t)$ и $w_1^n = w_2^n$. Тогда $w_j = h_1(z_j)$ для некоторых $z_1 \in B(a,\rho)$ и $z_2 \in B(a,\rho)$, причем $z_2 \neq z_1$. Так как $f(z_1) = w_1^n = w_2^n = f(z_2)$, то f не однолистна в g. ■

Определение
Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $f \in H(a)$. Говорят, что f **локально обратима** в точке a, если существуют $U = U(a)$ и $\tilde{U} = U(f(a))$, а также $g \in H(\tilde{U})$ такие, что $g(f(z)) = z$ для всех $z \in U$.

Утверждение
$f \in H(a)$ локально обратима в точке $a \Leftrightarrow f'(a) \neq 0$.

В самом деле, если $f'(a) = 0$, то локальной обратимости в точке a нет (см. конец доказательства предыдущего приложения). Пусть теперь $f'(a) \neq 0$. При доказательстве критерия однолистности было показано, что найдется $\delta > 0$ такое, что f однолистна в $U = B(a,\delta)$. Пусть $\tilde{U} = U(f(a)) \subset f(U)$. Так как f - гомеоморфизм U на $f(U)$, то, по теореме об обратной функции в $\tilde{U}$ существует $f^{-1} \in H(\tilde{U})$.

Достаточные условия однолистности

Следующее утверждение было доказано ранее как одно из следствий принципа аргумента (см. Предложение 13.4).

Обратный принцип соответствия границ
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - жорданова область, $\Gamma = \partial D$, и пусть $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ такова, что f взаимно-однозначна на Γ. Тогда $f \in \mathscr{U}(D)$ и f отображает D конформно на область $\mathrm{Int}(f(\Gamma))$.

Предложение 15.2 (условие однолистности)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - выпуклая область, а $f \in H(D)$ такова, что $\mathrm{Re}\ f'(z) > 0$ при всех $z \in D$. Тогда $f \in \mathscr{U}(D)$.

Доказательство.
Пусть $a, b \in D$ и $a \neq b$. Так как D выпукла, то $[a, b] \subset G$. Тогда

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(\zeta)d\zeta = \int\limits_{[a,b]} f'(\zeta)d\zeta = (b-a)\int\limits_0^1 f'(a + (b-a)t)dt.$$

Так как $\mathrm{Re}\ f'(\zeta) > 0$ при всех $\zeta \in G$, то

$$\mathrm{Re}\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \int\limits_0^1 \mathrm{Re}\ f'(a + (b-a)t)dt > 0.$$

Таким образом, $f(a) \neq f(b)$, то есть $f \in \mathscr{U}(G)$. ■

Замечание
Легко выводится, что если $f \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ такова, что $\mathrm{Re}\ f'(z) > 0$ при всех $z \in \mathbb{D}$, то область $f(\mathbb{D})$ будет жордановой. Для этого необходимо показать, что на границе нет точке самопересечения.
В самом деле, если $a, b \in \mathbb{T}$ и $a \neq b$, то интегрируя f' по отрезку $[a, b]$ (для него $(a, b) \in \mathbb{D}$), получаем, что $f(a) \neq f(b)$, как и в предыдущем утверждении.

Обратный принцип соответствия границ и условие однолистности - основные достаточные условия, которые можно применять не только для задач теории однолистных функций, но и для поиска однолистных функций в пространствах функций, определенных в терминах других свойств и в других задачах.

Теорема Гурвица и ее следствия

Попробуем понять, как свойство однолистности соотносится с нашей стандартной топологией в пространстве голоморфных функций (выдерживает или не выдерживает локальную сходимость).

Предложение 15.3 (теорема Гурвица)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, $a \in D$, и пусть $f_n \in H(D)$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $f_n \to f$ локально равномерно в D при $n \to \infty$. Если f не постоянна в D и $f(a) = 0$, то для любого

$r > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > N$ выполнено $\mathfrak{z}(f_n, B(a,r)) > 0$.

Доказательство.
Так как $f(a) = 0$, но $f \not\equiv 0$ в D, то найдется $\delta < \min\{r, \operatorname{dist}(a, \partial D)\}$ такое, что $\rho = \min\limits_{z \in C(a,\delta)} |f(z)| > 0$. Так как $f_n \to f$ равномерно на компакте $C(a,\delta)$, то найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N$ выполнено $|f_n(z) - f(z)| < \rho$ при $z \in C(a,\delta)$.
Остается применить теорему Руше в круге $D(a,\delta)$ к паре функций f и $g := f_n - f$. Так как при $z \in C(a,\delta)$ выполнено $|f(z)| \geqslant \rho$, а $|g(z)| < \rho$, то

$$\mathfrak{z}(f_n, B(a,\delta)) = \mathfrak{z}(f+g, B(a,\delta)) = \mathfrak{z}(f, B(a,\delta)) \geqslant 1.$$

Итак, f_n при $n > N$ имеет в $B(a,\delta) \subset B(a,r)$ хотя бы один ноль. ■

Замечание
Фактически при доказательстве теоремы Гурвица установлен более сильный факт. Пусть D, f_n и f такие же, как в этой теореме, и пусть $f \not\equiv 0$ в D. Пусть $B = B(a,R)$ такой круг, что $\overline{B} \subset D$ и $f(z) \neq 0$ при $z \in C(a,R)$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ выполнено $\mathfrak{z}(f_n, B) = \mathfrak{z}(f, B)$.

Предложение 15.4
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, а $f_n \in \mathscr{U}(D)$, $n \in \mathbb{N}$. Если $f_n \to f$ локально равномерно в D при $n \to \infty$, то либо $f \in \mathscr{U}(D)$, либо f постоянна.

Доказательство.
По теореме Вейерштрасса $f \in H(D)$. Предположим, что f не постоянна, но и не однолистна в D, то есть найдутся $z_1, z_2 \in D$ такие, что $z_1 \neq z_2$, но $f(z_1) = f(z_2)$. Пусть $g_n := f_n - f_n(z_1)$ и $g := f - f(z_1)$. Тогда $g_n \to g$ локально равномерно в D. Пусть $r = \frac{1}{2}|z_1 - z_2| > 0$. Так как $g(z_2) = f(z_2) - f(z_1) = 0$, то (в силу теоремы Гурвица) при всех достаточно больших n найдутся точки $z_n \in D \cap B(z_2, r)$ (то есть $z_n \neq z_1$) с условием $g_n(z_n) = f_n(z_n) - f_n(z_1) = 0$. Но равенство $f_n(z_n) = f_n(z_1)$ противоречит однолистности f_n в D. ■

Предложение 15.5
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, $f \in \mathscr{U}(D)$, а $f_n \in H(D)$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $f_n \to f$ локально равномерно в D при $n \to \infty$. Тогда для любого круга B, $\overline{B} \subset D$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $f_n \in \mathscr{U}(B)$ при всех $n > N$.

Задача. Доказать Предложение 15.5.

Конформные автоморфизмы $\mathbb{D}, \mathbb{C}$ и $\mathbb{C}_\infty$

Мы разобрались с некоторыми основными понятиями, связанными с однолистными функциями. Теперь перейдем к конформным отображениям. Главная задача для нас - понять, какие области на какие можно отображать. Вопрос конформной эквивалентности областей связан с их группами конформных автоморфизмов.

- Пусть D_1 и D_2 - области в $\mathbb{C}_\infty$. Пусть $\mathrm{Conf}(D_1, D_2)$ - это совокупность **конформных изоморфизмов** областей D_1 и D_2, то есть совокупность всех функций $f \in \mathscr{U}(D_1)$ таких, что $f(D_1) = D_2$.
- Если D - область в $\mathbb{C}_\infty$, то $\mathrm{CAut}(D) := \mathrm{Conf}(D, D)$ - это совокупность **конформных автоморфизмов** области D (другими словами, совокупность конформных автоморфизмов области D на себя).
- $\mathrm{CAut}(D)$ является группой относительно композиции отображений.
- Если выбран $f_0 \in \mathrm{Conf}(D_1, D_2)$, то для любого $f \in \mathrm{Conf}(D_1, D_2)$ имеет место представление $f = f_0\varphi_1$ или $f = \varphi_2 \circ f_0$, где $\varphi_1 \in \mathrm{CAut}(D_1)$, а $\varphi_2 \in \mathrm{CAut}(D_2)$.

Выясним, как устроены группы $\mathrm{CAut}(\mathbb{D})$, $\mathrm{CAut}(\mathbb{C})$ и $\mathrm{CAut}(\mathbb{C}_\infty)$.

- Согласно Предложению 14.2
$$\mathrm{CAut}(\mathbb{D}) = \left\{ z \to e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} : \ a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset M\ddot{o}b.$$
Заметим, что $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{CAut}(\mathbb{D}) = 3$.
- Группа $\mathrm{CAut}(\mathbb{C}_\infty)$. Конформное отображение сферы на себя - взаимно-однозначное отображение сферы на себя с ровно одной точкой, переходящей в бесконечность. Пусть $f \in \mathrm{CAut}(\mathbb{C}_\infty)$ и пусть $f(a) = \infty$ при некотором (единственном) $a \in \mathbb{C}_\infty$. Тогда $f \in H(\mathbb{C}_\infty \setminus \{a\})$ голоморфна и имеет в точке a полюс. Проверим, что порядок этого полюса равен 1. В самом деле, функция $g = \frac{1}{f}$ (доопределенная в точке a по непрерывности) голоморфна в окрестности точки a и $g(a) = 0$. Если порядок нуля g в точке a больше 1, то $g = \frac{1}{f}$ (а вместе с ней и f) не будет однолистной в проколотой окрестности a, а это противоречие. Итак, функция f имеет в точке a полюс первого порядка. Таким образом, функция f мероморфна в $\mathbb{C}_\infty$ и имеет единственную особенность - полюс первого порядка в точке a. Применяя теорему Лиувилля получаем, что $f(z) = \frac{w_0}{z-a} + w_1$ при $a \neq \infty$ и $f(z) = w_1 z + w_0$ при $a = \infty$. То есть $f \in M\ddot{o}b$ и $\mathrm{CAut}(\mathbb{C}_\infty) \subset M\ddot{o}b$. Обратное включение очевидно. Итак,
$$\mathrm{Caut}(\mathbb{C}_\infty) = \left\{ z \to \frac{az+b}{cz+d} : \ a, b, c, d \in \mathbb{C}, \ ad - bc \neq 0 \right\} = M\ddot{o}b$$
и $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{CAut}(\mathbb{C}_\infty) = 6$.

- Группа $\mathrm{CAut}(\mathbb{C})$. Это вычисление можно свести к предыдущему. Пусть $f \in \mathrm{CAut}(\mathbb{C})$. Тогда f можно продолжить до $f^* \in \mathrm{CAut}(\mathbb{C}_\infty)$ полагая $f^*(z) = f(z)$ при $z \in \mathbb{C}$ и $f^*(\infty) = \infty$. Проверка необходимых деталей оставляется в качестве **упражнения**.
  Так как $f^* \in \mathrm{CAut}(\mathbb{C}_\infty)$ и $f^*(\infty) = \infty$, а мы знаем, что отображение, переводящее сферу в себя и сохраняющее бесконечность - линейное, то $f^*(z) = w_1 z + w_1$. Окончательно получаем, что

  $$\mathrm{CAut}(\mathbb{C}) = \{z \to az + b : \ a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} \subset M\ddot{o}b$$

  и $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{CAut}(\mathbb{C}) = 4$.

- Так как размерности групп $\mathrm{CAut}(\mathbb{D})$, $\mathrm{CAut}(\mathbb{C})$ и $\mathrm{CAut}(\mathbb{C}_\infty)$ различны, то эти группы не изоморфны. Следовательно, области $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}_\infty$ **не являются конформно изоморфными**.

Заметим, что все три области односвязны, и $\partial_\infty \mathbb{C}_\infty = \emptyset$, $\partial_\infty \mathbb{C} = \{\infty\}$, а $\partial_\infty \mathbb{D} = \mathbb{T}$ (состоит более чем из одной точки).

Теорема Римана, конформный радиус

Теперь перейдем к одной из центральных теорем в комплексном анализе.

Теорема 15.1 (теорема Римана)
Пусть D - односвязная область в $\mathbb{C}$ такая, что ∂D состоит более чем из одной точки. Тогда существует такая однолистная (голоморфная) в области D функция f, что f отображает D конформно на единичный круг $\mathbb{D}$, то есть $f(D) = \mathbb{D}$.

Более того, для любой точки $a \in D$ и для любого числа $\theta \in [0, 2\pi)$ однолистная функция f в D такая, что $f(D) = \mathbb{D}$, а $f(a) = 0$ и $\arg f'(a) = \theta$, единственна.

Из теоремы Римана вытекает, что для любой односвязной области D в $\mathbb{C}$ с нетривиальной границей (более двух точек) и для любого $a \in D$ существует единственная функция $f_a \in \mathscr{U}(D)$ такая, что $f_a(a) = 0$ и $f_a'(a) = 1$. При этом $f_a(D) = D(0, R)$ при некотором $R > 0$. Ясно, что $f_a(z) = \frac{f(z)}{f'(a)}$, где f взята из теоремы Римана (при $\theta = 0$).

Число

$$R = R(D, a) = \frac{1}{f'(a)}$$

называется **конформным радиусом** области D в точке a.

Замечание
В условии теоремы Римана важна односвязность области. Позже мы обсудим поведение конформного отображения на границе и проверим, что если мы будем работать с простым классом неодносвязных областей, например, с классом круговых колец, то оказывается, что пара круговых колец может быть конформно эквивалентна тогда и только тогда, когда у них совпадают отношения радиусов. То есть в неодносвязном случае уже возникают какие-то метрические условия.

Подготовка к доказательству теоремы Римана

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, а $\mathscr{F} = \{f : \ D \to \mathbb{C}\} \subset C(D)$ - семейство функций, непрерывных в области D.

Определение 15.2

1) Семейство $\mathscr{F}$ называется **локально равномерно ограниченным** в D, если для любого компакта $K \subset D$ существует константа $M > 0$ такая, что $\|f\|_K \leqslant M$ для любой функции $f \in \mathscr{F}$.

2) Семейство $\mathscr{F}$ называется **локально равностепенно непрерывным** в D, если для любого компакта $K \subset D$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых точек $z_1, z_2 \in K$ с условием $|z_1 - z_2| < \delta$ для любой функции $f \in \mathscr{F}$ выполнено $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

В случае, когда семейство $\mathscr{F}$ состоит из голоморфных функций, то эти два свойства оказываются связанными друг с другом.

Предложение 15.6
Пусть D - область в $\mathbb{C}$, и пусть $\mathscr{F} \subset H(D)$ - семейство голоморфных функций в D. Если $\mathscr{F}$ локально равномерно ограничено в D, то $\mathscr{F}$ локально равностепенно непрерывно в D.

Доказательство.
Пусть $d = \min\{1, \operatorname{dist}(K, \partial D)\}$, так что $d > 0$. При $0 < \rho < d$ определим компакт $K_\rho := \overline{\bigcup\limits_{z \in K} B(z, \rho)}$, так что $K_\rho \subset D$. Так как $\mathscr{F}$ - локально равномерно ограниченное в D семейство функций, то найдется $M > 0$ такое, что $\|f\|_{K_{d/2}} \leqslant M$ при всех $f \in \mathscr{F}$.

При $w \in K_{d/4}$ оценим $|f'(w)|$, пользуясь интегральной формулой Коши для про-

изводных. Так как $\overline{B(w, \frac{d}{4})} \subset K_{d/2}$, то

$$|f'(w)| = \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{C(w,\frac{d}{4}} \frac{f(z)dz}{(z-w)^2}\right| \leqslant \frac{M}{2\pi}\frac{2\pi\frac{d}{4}}{(\frac{d}{4})^2} = \frac{4M}{d} = M'.$$

Таким образом, $\mathscr{F}' = \{f' : \ f \in \mathscr{F}\}$ - это локально равномерно ограниченное в D семейство функций.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\{\frac{d}{4}, \frac{\varepsilon}{M'}\}$. Тогда при $z_1, z_2 \in K$ с условием $|z_1 - z_2| < \delta$ получаем, что $[z_1, z_2] \subset K_{d/4}$ и, применяя формулу Ньютона-Лейбница окончательно находим, что для любой функции $f \in \mathscr{F}$ выполнено

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int\limits_{[z_1,z_2]} f'(z)dz\right| < M'\delta \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, Предложение 15.6 доказано. ■

Пусть $\mathscr{F} \subset H(D)$ - семейство голоморфных функций в области $D \subset \mathbb{C}$.

Определение 15.3

1) Семейство $\mathscr{F}$ называется **компактным** в D, если из любой последовательности функций (f_n), $f_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся локально равномерно в области D (предельная функция такой подпоследовательности голоморфна в D, но не обязательно содержится в семействе $\mathscr{F}$).

2) Семейство $\mathscr{F}$ называется **компактным в себе** в D, если предел любой сходящейся подпоследовательности из предыдущего пункта является функцией семейства $\mathscr{F}$.

Теорема 15.2 (теорема Монтеля)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, а $\mathscr{F} \subset H(D)$ - семейство голоморфных функций в D. Если $\mathscr{F}$ локально равномерно ограничено, то оно компактно в D.

Доказательство этой теоремы мы приведем на следующей лекции. Сейчас разберемся немного подробнее с теоремой Римана.

Мы хотим отобразить некоторую односвязную область с нетривиальной границей на единичный круг. Нас интересуют какие-то функции f, про которые мы знаем, что $f \in \mathscr{U}(D)$, $|f(z)| \leqslant 1$ при $z \in D$, и что есть точка a, которая переходит в ноль, то есть $f(a) = 0$. И также нас интересовала положительность производной $f'(a) > 0$. Допустим, мы нашли такие функции, то есть возникло семейство функций.

- Это семейство локально равномерно ограниченных функций, в силу свойства $|f(z)| \leqslant 1$.
- Теорема Монтеля говорит нам о том, что это семейство будет компактным, поэтому, когда мы начнем выбирать из него какие-то подпоследовательности, то они будут сходиться к голоморфным функциям.
- Функции однолистные. Теорема Гурвица говорит о том, что функции могут сходиться либо к однолистным либо к константам.
- Условие $f'(a) > 0$ говорит теперь о том, что мы будем сходиться к однолистным функциям из этого семейства.

Дальше воспользуемся некоторым приемом. Мы проверим, что отображение f переходит в $f'(a)$ - это линейный непрерывный функционал на нашем семействе, который достигает на семействе максимума. А дальше, мы от противного проверим, что если образом под действием максимума является не весь круг, то не выходя из семейства можно будет еще увеличить производную. Это будет означать, что экстремальная функция для нашего функционала и будет давать отображение на весь круг, что в совокупности с указанными условиями дает конформное отображение.

13. Лекция 13. Конформные отображения

Теорема Римана, конформный радиус

Продолжим подготовку к доказательству теоремы Римана. В последний раз мы остановились на теореме Монтеля.

Теорема 15.2 (теорема Монтеля)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - область, а $\mathscr{F} \subset H(D)$ - семейство голоморфных функций в D. Если $\mathscr{F}$ локально равномерно ограничено, то оно компактно в D.

По Предложению 15.6 семейство $\mathscr{F}$ локально равностепенно непрерывно. Далее можно применить теорему Арцела (в подходящей формулировке). Однако для замкнутости и полноты изложения мы приведем доказательство теоремы Монтеля.

Начнем со следующей технической леммы.

Лемма 15.1
Пусть $E \subset D$ - некоторое всюду плотное множество и пусть последовательность (f_n), $f_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$ такова, что f_n сходится поточечно в каждой точке E. Тогда f_n сходится в D локально равномерно.

Доказательство.
Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольный компакт $K \subset D$. Пусть $\rho = \min\{1, \frac{1}{2}\mathrm{dist}(L, \partial D)\}$. Так как семейство $\mathscr{F}$ локально равностепенно непрерывно в D, то найдется $\delta = \delta(\varepsilon, \rho)$ такое, что для всех $z_1, z_2 \in K$ с условием $|z_1 - z_2| < \delta$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon$.

Положим $r = \min\{\frac{1}{2}\delta, \rho\}$. Пусть $B_1, \ldots, B_J$ - конечное подпокрытие компакта K, выбранное из покрытия компакта K кругами $B(w, r)$, $w \in K$ (такое подпокрытие существует в силу компактности K). Так как $B_j \subset K_\rho$ $\left(K_\rho := \overline{\bigcup\limits_{z \in K} B(z, \rho)}\right)$ для любого $j = 1, \ldots, J$, то $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon$ при всех $z_1, z_2 \in B_j$, $j = 1 \ldots, J$, и при всех $n \in \mathbb{N}$.

Для каждого $j = 1, \ldots, J$ выберем $a_j \in E \cap B_j$ (это возможно так как E всюду плотно в G). Так как последовательность $(f_n(a_j))$ сходится, то найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $n, m > N$ выполнено $|f_n(a_j) - f_m(a_j)| < \varepsilon$ при всех $j = 1, \ldots, J$.

Возьмем теперь произвольное $z \in K$ и найдем $j = 1, \ldots, J$ такое, что $z \in B_j$.

Тогда для любых $n, m > N$ выполнено

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant |f_n(z) - f_n(a_j)| + |f_m(z) - f_m(a_j)| + |f_n(a_j) - f_m(a_j)| < 3\varepsilon.$$

Таким образом (по критерию Коши) последовательность (f_n) сходится равномерно на K. Лемма 15.1 доказана. ■

Доказательство. (теорема Монтеля)
Пусть $A = (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap D$, где $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ - комплексные точки с рациональными вещественными и мнимыми частями. Ясно, что A счетно и всюду плотно в D. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_j, \dots\}$.

Пусть (f_n) - произвольная последовательность функций из семейства $\mathscr{F}$. Выделим из нее подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке A. Так как (числовая) последовательность $(f_n(a_1))$ ограничена (это следует из равномерной ограниченности $\mathscr{F}$ на $\{a_1\}$), то из (f_n) можно выделить подпоследовательность $(f_{1,k} := f_{n_k})$ так, что $(f_{1,n}(a_1))$ сходится.
Так как последовательность $(f_{1,n}(a_2))$ также ограничена, то из $(f_{1,n})$ можно выделить подпоследовательность $(f_{2,k} := f_{1,n_k})$ так, что $(f_{2,n}(a_2))$ сходится.
Продолжая аналогичным образом, получим последовательности $(f_{p,n})$ при $p \in \mathbb{N}$ такие, что $(f_{p+1,n})$ является подпоследовательностью $(f_{p,n})$ при всех $p \in \mathbb{N}$, и для любого $p \in \mathbb{N}$ $(f_{p,n}(a_l))$ сходится для любого $l = 1, \dots, p$. Если теперь определить последовательность $(f_{n,n})$, то она будет подпоследовательностью (f_n) и все ее члены начиная с k-го сходятся в точках $a_1, \dots, a_k$. Остается применить Лемму 15.1. ■

Функционалы на семействах голоморфных функций

Пусть $\mathscr{F} \subset H(D)$ - семейство голоморфных функций в области $D \subset \mathbb{C}$.

Определение 15.4 Функционал $\Phi : \mathscr{F} \to \mathbb{C}$ называется **непрерывным** на семействе $\mathscr{F}$, если для любой последовательности (f_n), $f_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящейся локально равномерно в D к $f \in \mathscr{F}$ выполнено $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ при $n \to \infty$.

Например, функционал $f \to f^{(m)}$ (значение производной в фиксированной точке), $m \in \mathbb{N}$, непрерывен на $H(D)$.

Лемма 15.2
Пусть $\mathscr{F} \in H(D)$ - компактное в себе семейство голоморфных функций в области

$D \subset \mathbb{C}$. Если Φ - непрерывный функционал на $\mathscr{F}$, то $|\Phi|$ ограничен на $\mathscr{F}$ и существует $f_0 \in \mathscr{F}$ такая, что $|\Phi(f)| \leqslant |\Phi(f_0)|$ при всех $f \in \mathscr{F}$.

Доказательство.
Пусть $M := \sup\{|\Phi(f)| : \ f \in \mathscr{F}\}$ (возможно, что $M = \infty$). Тогда найдется последовательность (f_n), $f_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$ такая, что $|\Phi(f_n)| \to M$ при $n \to \infty$. Так как $\mathscr{F}$ компактно в себе в D, то найдется подпоследовательности $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ и функция $f_0 \in \mathscr{F}$ такие, что $f_{n_k} \to f_0$ локально равномерно в D при $k \to \infty$. Так как Φ непрерывен, то $|\Phi(f_{n_k})| \to |\Phi(f_0)|$ при $k \to \infty$. Следовательно, $M = |\Phi(f_0)|$. Таким образом, $M < \infty$ и $|\Phi|$ достигает своей верхней грани на функции f_0. ■

Доказательство теоремы Римана

Доказательство.
Будем считать, что $\theta = 0$. Определим семейство функций

$$\mathscr{F} = \{g : \ g \in \mathscr{U}(D), \ |g(z)| \leqslant 1 \text{ при } z \in D \text{ и } g(a) = 0\}$$

и заметим, что если интересующее нас конформное отображение области D на $\mathbb{D}$ существует, то оно принадлежит этому семейству.

Проверим, что $\mathscr{F} \neq \emptyset$. Так как ∂D состоит не менее, чем из двух точек (условие теоремы), то существуют точки $w^*, w^{**} \in \mathbb{C} \setminus D$ такие, что $w^* \neq w^{**}$. Следовательно, в D существуют голоморфные ветви F^* и F^{**} функций $\sqrt{z - w^*}$ и $\sqrt{z - w^{**}}$ соответственно (см. Лемму 14.1). Определим $g_1 := \frac{F^*}{F^{**}}$ и $g_2 := -g_1$. Заметим, что $g_1, g_2 \in \mathscr{U}(D)$. В самом деле, если $g_1(z_1) = g_1(z_2)$, то $\dfrac{z_1 - w^*}{z_1 - w^{**}} = \dfrac{z_2 - w^*}{z_2 - w^{**}}$, откуда $z_1 = z_2$. Для g_2 проверка аналогична.
Далее, заметим, что $g_1(D) \cap g_2(D) = \emptyset$. Этот факт проверяется аналогично проверке однолистности g_1 и g_2.
Пусть $B(w_0, r) \subset g_2(D)$. При $z \in D$ определим функцию

$$g_0(z) = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{g_1(z) - w_0} - \frac{1}{g_1(a) - w_0}\right).$$

Ясно, что $g_0 \in \mathscr{U}(D)$ (как композиция однолистной функции и ДЛФ), $g_0(a) = 0$ и, так как $\operatorname{dist}(w_0, g_1(D)) > r$ ($g_1(D) \cap g_2(D) = \emptyset$, а $B(w_0, r) \subset g_2(D)$), то $|g_0(z)| \leqslant 1$. То есть $g_0 \in \mathscr{F}$.

Определим теперь семейство функций

$$\mathscr{F}_0 = \{f \in \mathscr{F} : \ f'(a) \geqslant |g_0'(a)|\}.$$

Заметим, что при $f \in \mathscr{F}_0$ величина $f'(a)$ вещественна и $e^{i\alpha} g_0 \in \mathscr{F}_0$ при $\alpha = -\arg g_0'(a)$.

Проверим, что $\mathscr{F}_0$ компактно в себе в D. Так как $\mathscr{F}_0$ локально равномерно ограничено в D, то оно компактно в D по теореме Монтеля. Пусть (f_n), $f_n \in \mathscr{F}_0$, $n \in \mathbb{N}$ - некоторая последовательность. Переходя если нужно, к подпоследовательности, предположим, что $f_n \to f_0$ локально равномерно в D. По теореме Вейерштрасса $f_0 \in H(D)$. Далее, $f_0'(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(a) \geqslant |g_0'(a)|$. Таким образом, f_0 не постоянна в D и, следовательно, по теореме Гурвица, $f_0 \in \mathscr{U}(D)$. Наконец, $|f_0(z)| \leqslant 1$ при всех $z \in D$. Таким образом, $f_0 \in \mathscr{F}_0$.

Определим функционал $\Phi : \mathscr{F}_0 \to \mathbb{R}_+$

$$\Phi(h) = h'(a), \quad h \in \mathscr{F}_0$$

По теореме Вейерштрасса Φ непрерывен на $\mathscr{F}_0$. Таким образом, существует $f \in \mathscr{F}_0$ такая, что $f'(a) = \Phi(f) = \max\limits_{h\in\mathscr{F}_0} \Phi(h) = \max\limits_{h\in\mathscr{F}_0} h'(a)$. Для завершения доказательства существования конформного отображения D на $\mathbb{D}$ нам остается доказать, что $f(D) = \mathbb{D}$.

Пусть $\mathbb{D} \setminus f(D) \neq \emptyset$ и $b \in \mathbb{D} \setminus f(D)$. При этом $b \neq 0$. Рассмотрим ДЛФ $\psi_b(w) = \dfrac{w-b}{1-\bar{b}w} \in \mathrm{CAut}(\mathbb{D})$ для которой $\psi_b(b) = 0$, и определим $\varphi_0 := \psi_b \circ f$. Заметим, что $\varphi_0(z) \neq 0$ при $z \in D$. В силу Леммы 14.1 в D существует голоморфная ветвь φ_1 функции $\sqrt{\varphi_0(z)}$. Непосредственно проверяется, что $\varphi_1 \in \mathscr{U}(D)$, что $\varphi_1(D) \subset \mathbb{D}$, а $\varphi_1(a) = F(-b)$ так, что $|\varphi_1(a)| = \sqrt{|b|}$.
Так как $(\varphi_1(z))^2 = \psi_b(f(z))$, следовательно $2\varphi_1'(z)\varphi_1(z) = \psi_b'(f(z))f'(z)$. Продифференцируем ψ_b:

$$\psi_b'(w) = \left(\frac{w-b}{1-\bar{b}w}\right)' = \frac{(1-\bar{b}w) + \bar{b}(w-b)}{(1-\bar{b}w)^2} = \frac{1-|b|^2}{(1-\bar{b}w)^2}.$$

Тогда, подставив точку a, мы получим, что

$$2\varphi_1'(a)\varphi_1(a) = \frac{1-|b|^2}{(1-\bar{b}\underbrace{f(a)}_{=0})^2} f'(a) \Rightarrow \varphi_1'(a) = \frac{f'(a)(1-|b|^2)}{2F(-b)}.$$

Далее, пусть $c := \varphi_1(a)$ и

$$\varphi_2(z) := \psi_c(\varphi_1(z)) = \frac{\varphi_1(z) - \varphi_1(a)}{1 - \overline{\varphi_1(a)}\varphi_1(z)}.$$

По построению, $\varphi_2 \in \mathscr{U}(D)$, $\varphi_2(a) = 0$ и $\varphi_2(z) \in \mathbb{D}$ при $z \in D$.
Прямое вычисление показывает, что

$$\varphi_2'(a) = \frac{\varphi_1'(a)}{1 - |\varphi_1(a)|^2} = \frac{f'(a)(1 - |b|^2)}{2F(-b)(1 - |b|)} \neq 0.$$

То есть функция $\varphi_3(z) = e^{i\beta}\varphi_2(z) \in \mathscr{F}_0$ при $b = -\arg\, \varphi_2'(a)$ и

$$\varphi_3'(a) = \frac{f'(a)(1 + |b|)}{2\sqrt{|b|}} > f'(a).$$

Таким образом, функция f не экстремальна для функционала $h \to h'(a)$ на $\mathscr{F}_0$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения о существовании конформного отображения D на $\mathbb{D}$ с условиями нормировки $f(a) = 0$ и $\arg\, f'(a) = 0$.

Остается проверить единственность такого отображения. Пусть f_1 и f_2 - два отображения D на $\mathbb{D}$ с требуемой нормировкой. Определим функцию $h(z) = f_1(f_2^{-1}(z))$, при $z \in \mathbb{D}$. Функция $h \in H(\mathbb{D})$, причем $h(0) = f_1(f_2^{-1}(0)) = f_1(a) = 0$ и $|h(z)| \leqslant 1$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Из леммы Шварца вытекает, что $|h(z)| \leqslant |z|$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Это означает, что при всех $z \in D$ выполнено $|f_1(z)| \leqslant |f_2(z)|$. Повторяя это рассуждение для функций $\tilde{h}(z) = f_2(f_1^{-1}(z))$ получаем обратное неравенство $|f_2(z)| \leqslant |f_1(z)|$ при всех $z \in D$.

Рассмотрим теперь функцию $f^*(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ при $z \in D$. Так как $f_2(z) \neq 0$ при $z \in D \setminus \{a\}$ (в силу однолистности f_2), так как $f_1(a) = 0$, и так как f_1 и f_2 имеют в точке a нули первого порядка (также в силу однолистности), то $f^* \in H(G)$. При этом $|f^*(z)| = 1$ для всех $z \in D$, то есть f^* постоянна в D и $f^* = e^{i\sigma}$ при некотором $\sigma \in [0, 2\pi)$.

Так как $f_1(z) = e^{i\sigma} f_2(z)$, то $f_1'(a) = e^{i\sigma} f_2'(a)$, откуда $\sigma = 0$ и, окончательно, $f_1(z) = f_2(z)$. ■

Принцип симметрии Римана-Шварца

Пусть $D \subset \mathbb{C}_\infty$ - область, $E \subset D$, а $h : E \to \mathbb{C}$. если существует $f \in H(D)$, $f|_E = h$, то скажем, что f - **голоморфное продолжение** h с E на D. Из теоремы единственности вытекает, что если $E' \cap D \neq \emptyset$, то h может иметь не более одного голоморфного продолжения на D.

Теорема 15.3 (принцип симметрии Римана-Шварца)
Пусть D и W - области в $\mathbb{C}_\infty$. Предположим, что ∂D и ∂W содержат дуги γ и σ обобщенных окружностей Γ и Σ соответственно (γ и σ непусты, открыты и связны в Γ и Σ соответственно), причем D и W расположены по одну сторону от Γ и Σ соответственно.

Пусть множества $\tilde{D} = D \cup \gamma \cup D^*$ и $\tilde{W} = W \cup \sigma \cup W^*$, где D^* и W^* - это области, симметричные D и W относительно Γ и Σ соответственно. Наконец, пусть $f \in \mathrm{Conf}(D, W)$, причем $f \in C(D \cup \gamma)$ и f гомеоморфно отображает γ на σ. Тогда существует $\tilde{f} \in \mathrm{Conf}(\tilde{D}, \tilde{W})$ такая, что $\tilde{f}|_D = f$. Более того, точки, симметричные относительно Γ, переходят при отображении $z \to \tilde{f}(z)$ в точки, симметричные относительно Σ (в частности, $\tilde{f}(D^*) = W^*$). Указанная $\tilde{f}$ единственна.

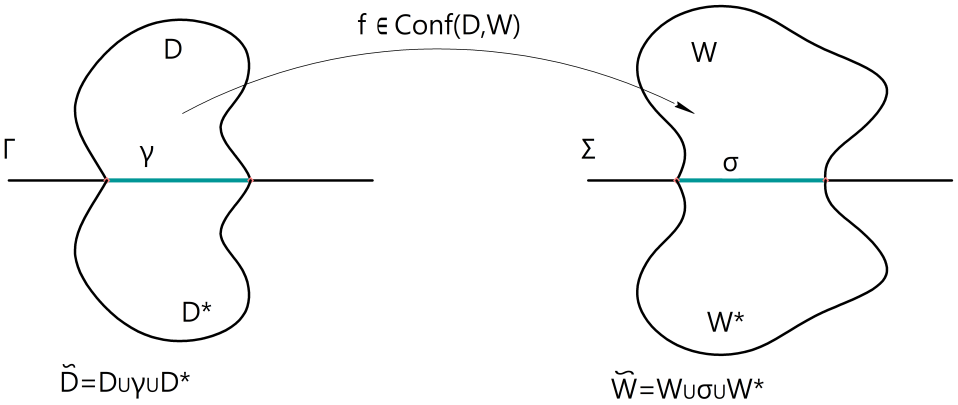

Рис 13.1 Принцип симметрии Римана-Шварца

Доказательство.
Существует ДЛФ φ с условиями $\varphi(\gamma) \subset \mathbb{R}$ и $\varphi(D) \subset \mathbb{C}_+$. Аналогично, существует ДЛФ ψ с условиями: $\psi(\sigma) \subset \mathbb{R}$ и $\psi(W) \subset \mathbb{C}_+$. Пусть $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, так, что $h \in \mathrm{Conf}(\varphi(D), \psi(W))$. Если мы найдем соответствующее продолжение $\tilde{h} \in \mathrm{Conf}(\varphi(\tilde{D}), \psi(\tilde{W}))$ для h, то нужное продолжение $\tilde{f}$ для f можно получить в виде $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ \tilde{h} \circ \varphi$. Таким образом, без потери общности мы можем считать, что $\Gamma = \Sigma = \mathbb{R}_\infty$.

Считаем, что γ и σ - не вся прямая. Симметрия - переход точки в сопряженную. Пусть $z \in D^*$, тогда определим $\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$, так как мы хотим получить голоморфную функцию. Тогда мы имеем такую картину: $z \to \overline{z} \to \zeta \to \overline{\zeta}$, где $\overline{\zeta}$ - образ точки z.

Проверим, что функция $\tilde{f}(z)$ голоморфна в D и D^*.
Для D^* возьмем в этой области произвольный кружок и разложим в нем функцию

в ряд Тейлора. Разложение будет таким же, как в кружке с центром в симметричной точке (в области D), но с комплексно сопряженными коэффициентами. Так как функция в D представляется степенным рядом, то значит и в D^*. Значит функция голоморфна.

Когда точка стремится к γ в D, то симметричная точка в D^* также стремится к γ. Так как $f \in C(D \cup \gamma)$, то значит, что $\tilde{f}(z) \in C(\tilde{D})$.

Для проверки голоморфности на γ необходимо применить теорему Морера. Пусть Δ - произвольный треугольник в $\tilde{D}$. Если $\gamma \cap \Delta = \emptyset$, то есть Δ лежит или в D или в D^*, то интеграл по треугольнику равен 0 в силу голоморфности.

Пусть теперь $\gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Тогда разобьем треугольник Δ на три фигуры: трапецию K_δ, образованную отрезками, параллельными γ и лежащими на расстоянии δ от $\mathbb{R}$, треугольник X_δ и четырехугольник Y_δ, полученные "вырезанием" K_δ из треугольника Δ.

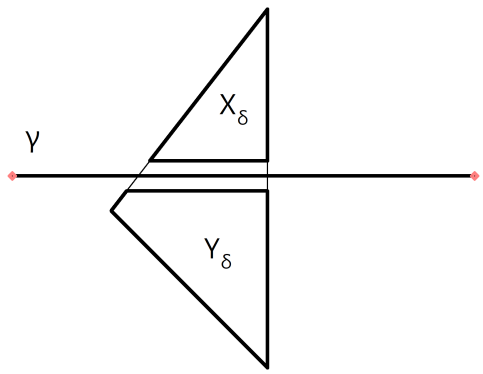

Рис 13.2

Так как

$$\int\limits_{\partial^+ X_\delta} \tilde{f}(z)dz = \int\limits_{\partial^+ Y_\delta} \tilde{f}(z)dz = 0 \text{ (т. Коши) и } \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\partial^+ K_\delta} \tilde{f}(z)dz = 0$$

в силу непрерывности f, то $\int\limits_{\partial^+ \Delta} \tilde{f}(z)dz = 0$ и при $\Delta \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Итак, $\tilde{f} \in H(\tilde{D})$.

Проверим однолистность $\tilde{f}$ в $\tilde{D}$. Пусть $\tilde{f}(z_1) = \tilde{f}(z_2)$. Если $z_1, z_2 \in D$, то из $f(z_1) = f(z_2)$ сразу вытекает, что $z_1 = z_2$. Если $z_1, z_2 \in D^*$, то равенство $\tilde{f}(z_1) = \tilde{f}(z_2)$ означает, что $\overline{f(\overline{z_1})} = \overline{f(\overline{z_2})}$. То есть $f(\overline{z_1}) = f(\overline{z_2})$ и так как $\overline{z_1}, \overline{z_2} \in D$, то $z_1 = z_2$. Пусть $z_1 \in D$, а $z_2 \in D^*$. Тогда $f(z_1) = \overline{f(\overline{z_2})}$. Но это невозможно, так как $f(z_1) \in W$, а $\overline{f(\overline{z_2})} \in W^*$.

Проверим, что $\tilde{f}(D^*) = W^*$. Если $w \in W^*$, то $w^* = \overline{w} \in W$ и $w^* = f(z)$ при некотором $z \in D$. Но тогда, при $z^* = \overline{z} \in D^*$ получаем $\tilde{f}(z^*) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{w^*} = w$. Таким образом, $\tilde{f} \in \mathrm{Conf}(\tilde{D}, \tilde{W})$. ■

Пример

Пусть наша область - $\mathbb{C}$ с вырезанным не симметричным крестом (см. рис. 13.3) с условиями: $a, b, c > 0$ и $c > b$. Обозначим вырез за K, тогда мы получили область $\mathbb{C} \setminus K$. Рассмотрим отображение $\mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}_+$.

Очевидно, что у нашей области симметрия относительно мнимой оси. Сделаем условный разрез по всей мнимой оси и будем рассматривать только правую половину области, в которой лежит точка a. И попробуем отобразить получившуюся область в первый квадрант так, чтобы продолжение разреза по мнимой оси попало на мнимую часть, а отрезки $[-ic, ib]$ и $[0, a]$ перешли в вещественную часть (синяя штрихованная и бирюзовая прямые соответственно на рис 13.3). Если мы найдем такое конформное отображение f, непрерывное на продолжении разреза и взаимнооднозначно отображающее штрихованные части, то в результате объединения W и W^* мы получим $\mathbb{C}_+$.

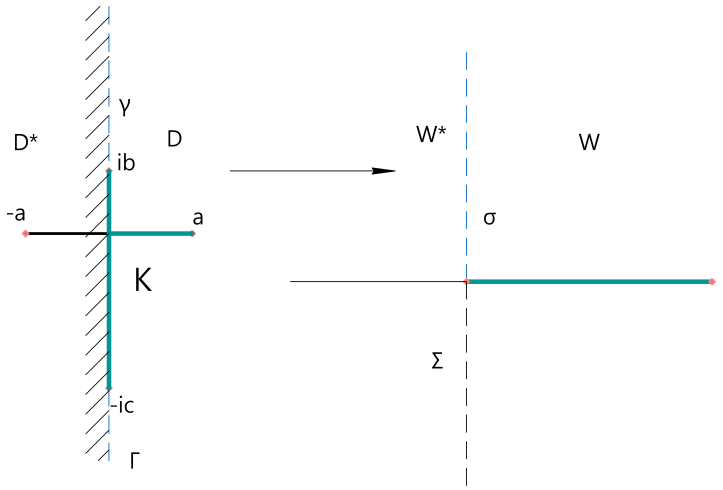

Рис 13.3

В результате объединения W и W^* мы получим $\mathbb{C}_+$. Чтобы получить отображение из D в W, на первом шаге повернем D умножением на i. Далее, если мы применим отображение $\sqrt[4]{z^2 + a^2}$, то мы получим угол с пунктирными разрезами на продолжении. Это не совсем, то что нам необходимо. Поэтому попробуем сначала применить отображение $\sqrt{z^2 + a^2}$. Тогда мы получим плоскость с отрезком $[-A, B]$ и разрезом. Это почти то, что нам необходимо, так как при применении к области W отображение z^2 мы получим, что пунктирный луч перейдет на отрицательную вещественную полуось. Соответственно, нам необходимо перевести $-A$ в 0, а B в

∞, поэтому применим отображение $-\dfrac{z+A}{z-B}$.

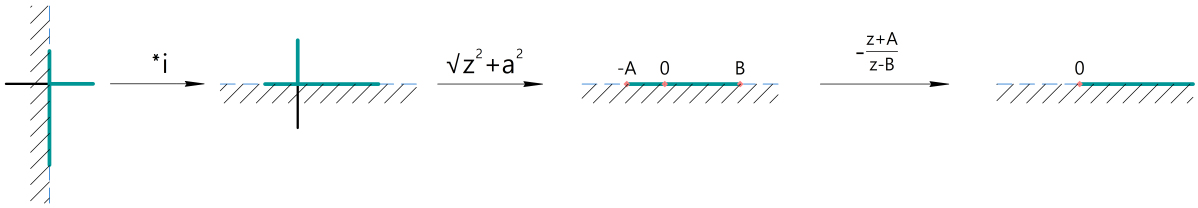

Рис 13.4

Применяя к последней области отображение $\sqrt{z}$, мы получим необходимую область W. Далее, применив принцип симметрии, мы получим то, что хотели.

Локально связные множества

Пусть G - односвязная область в $\mathbb{C}_\infty$, и пусть $f \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D}, G)$ - конформное отображение $\mathbb{D}$ на G.
Возникает вопрос: при каких условиях f можно непрерывно продолжить в $\overline{\mathbb{D}}$ и при каких условиях такое продолжение окажется еще и инъективным на $\overline{\mathbb{D}}$?

Определение 15.5
Замкнутое множество $E \subset \mathbb{C}$ называется **локально связным**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых точек $z_1, z_2 \in E$ с условием $|z_1 - z_2| < \delta$ существует непустое связное компактное множество $Y \subset E$ с условиями $z_1, z_2 \in Y$ и $\operatorname{diam} Y < \varepsilon$.

Непрерывный образ локально связного множества - это снова локально связное множество. Следовательно, любая кривая - это локально связное множество. Приведем три простых примера:

1) Любая жорданова область имеет локально связную границу.

2) Область $\mathbb{D} \setminus [0,1)$ также имеет локально связную границу $\mathbb{T} \cup [0,1]$, хотя и не является жордановой.

3) Если
$$G := \{z = x + iy : \ |x| < 1, \ 0 < y < 1\} \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{i}{n}, 1 + \frac{i}{n}\right],$$
то ∂G не локально связна (точки 0 и $\frac{i}{n}$ нельзя соединить следуя по ∂G множеством с диаметром меньше 1).

Теоремы Каратеодори

Теорема Каратеодори о непрерывном продолжении

Теорема 15.4 (теорема Каратеодори)
Пусть f отображает $\mathbb{D}$ конформно на ограниченную область G. Следующие условия эквивалентны:

1) f имеет непрерывное продолжение в $\overline{\mathbb{D}}$.

2) Множество ∂G является кривой.

3) Множество ∂G локально связно.

4) Множество $\mathbb{C} \setminus G$ локально связно.

Напомним, что утверждение 2) этой теоремы означает, что найдется путь $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ такой, что $\partial G = [\gamma] = \{\gamma(t) : \ t \in [0,1]\}$.

Утверждение 2) $\Rightarrow$ 1) означает, что если ∂G можно задать какой-либо замкнутой кривой (возможно, с самопересечениями), то ее можно задать при помощи "конформной параметризации" $\partial G = \{f(\zeta) \ \zeta \in \mathbb{T}\}$.

Теорема Каратеодори о гомеоморфном продолжении

Определение 15.6 Пусть E - связное и локально связное множество, и пусть $a \in E$. Точка a называется **точкой разреза** множества E, если множество $E \setminus \{a\}$ уже не является связным.

Например, замкнутая жорданова кривая не имеет точек разреза, а любая внутренняя (то есть не концевая) точка любой жордановой дуги является является точкой разреза для этой дуги. Граница K области $\mathbb{D} \setminus [0,1]$ устроена так, что все точки $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ - это не точки разреза, а точки $(0,1]$ - это точки разреза для K.

Теорема 15.5 (теорема Каратеодори) Пусть $G \subset \mathbb{C}$ - ограниченная область, а $f \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D}, G)$. Следующие условия эквивалентны:

1) f имеет непрерывное и инъективное продолжение в $\overline{\mathbb{D}}$.

2) ∂G - жорданова кривая.

3) ∂G локально связна и не имеет точек разреза.

На самом деле, мы можем доказать более сильное утверждение.

Пусть K_1 и K_2 - два кольца, у которых радиусы внутренних окружностей равны r_1 и r_2 соответственно, а радиусы внешних равны R_1 и R_2 соответственно. Если $f \in \mathrm{Conf}(K_1, K_2)$, то f непрерывно и взаимно-однозначно продолжается до гомеоморфизма таких колец.

С помощью этого утверждения мы можем сделать интересное наблюдение. Попробуем к нашим кольцам применить принцип симметрии. Граница кольца содержит обобщенную окружность. Симметричная относительно внутренности кольца область - это тоже кольцо, у которого радиус внутренней окружности стал меньше, а радиус внешней - больше. По принципу симметрии мы можем продолжить наши кольца на симметричные. В итоге, мы можем продолжить f до $\mathrm{Conf}(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$. Далее, мы можем f продолжить до отображения сферы на себя с сохранением 0 и ∞: az; либо до отображения сферы на себя, которое будет переставлять местами 0 и ∞: $\frac{a}{z}$. Эти отображения - повороты и растяжения, которые сохраняют отношения радиусов кольца $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$. То есть для существования между кольцами конформного отображения, необходимо, чтобы отношения радиусов у них совпадали.

Следствие (граничное условие нормировки для конформных отображений)
Пусть G и B - жордановы области, пусть точки $z_{1,2,3} \subset \partial G$ и $w_{1,2,3} \subset \partial B$ имеют одинаковый "циклический порядок" . Тогда $\exists! f \in \mathrm{Conf}(G, B)$ с условиями $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$.

Доказательство.
Пусть $h \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D}, G)$ и $g \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D}, B)$. Тогда $h, g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ и инъективны. Пусть $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ (то есть ψ - это ДЛФ) такое, что $\psi(h^{-1}(z_j)) = g^{-1}(w_j)$, $j = 1, 2, 3$. Тогда $f = g \circ \psi \circ h^{-1}$ - это требуемое отображение G на B.
Если f_1 - другое такое отображение с требуемой нормировкой, то функция $\psi^{-1} \circ g^{-1} \circ f_1 \circ h$ отображает $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$ (то есть является ДЛФ) и имеет три неподвижные граничные точки. Таким образом $\psi^{-1} \circ g^{-1} \circ f_1 \circ h \equiv z$ и $f_1 = f$. ■

Следствие
Пусть G - жорданова область, а $f \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D}, G)$. Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$.

В самом деле, пусть $f^* \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D}^*, G^*)$, где $\mathbb{D}^* = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$ и $G^* = \mathrm{Ext}(\partial G) \cup \{\infty\}$. Тогда $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, $f^* \in C(\overline{\mathbb{D}^*})$ и эти функции инъективны. При $\zeta \in \mathbb{T}$ положим $\varphi(\zeta) = (f^*)^{-1}(f(\zeta))$. Тогда φ - гомеоморфизм $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$. Остается определить искомое

продолжение f следующим образом: при $r > 1$ и $\zeta \in \mathbb{T}$ пусть $f(r\zeta) := f^*(r\varphi(\zeta))$. Тогда f будет гомеоморфизмом $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$.

Следствие (теорема Шёнфлиса)
Пусть Γ и Υ - жордановы кривые, а $f : \Gamma \to \Upsilon$ - непрерывное биективное отображение. Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Пусть $G = \mathrm{Int}(\Gamma)$, $B = \mathrm{Int}(\Upsilon)$, $h \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D}, G)$ и $g \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D}, B)$. Как показано выше, h и g могут быть продолжены до гомеоморфизмов $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$. Пусть $\varphi = g^{-1} \circ f \circ h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$. При $z = r\zeta$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\zeta \in \mathbb{T}$ определим $\tilde{\varphi}(z) = r\varphi(\zeta)$. Тогда $g \circ \tilde{\varphi} \circ h^{-1}$ - это искомое продолжение.

В завершении этого раздела докажем еще одно полезное достаточное условие однолистности.

Лемма 15.3
Пусть $B \subset \mathbb{C}_\infty$ - область, а $f \in H(B)$. Пусть G - жорданова область и $\Gamma = \partial G$. Если $f(z) \to \Gamma$ при $z \to \partial B$, то $f(B) = G$. Более того, если f принимает в B какое-то значение из G ровно один раз (с учетом кратности), то f инъективна, а область B односвязна.

Доказательство.
Уточним, что условие $f(z) \to \Gamma$ при $z \to \partial B$ в этой лемме означает, что если (z_n) - последовательность точек в B, а предельные точки этой последовательности лежат на ∂B, то все предельные точки последовательности $f(z_n)$ лежат на Γ.

Для доказательства Леммы 15.3 покажем, что $\partial f(B) \subset \Gamma$. Если $w \in \partial f(B)$ (случай $w = \infty$ не исключается), то найдется последовательность (z_n), $z_n \in B$, такая, что $f(z_n) \to w$ и $z_n \to \zeta \in \overline{B}$. Если $\zeta \in B$, то f отображает окрестность ζ на некоторую окрестность $w = f(\zeta)$, а это противоречит тому, что $w \in \partial f(B)$. Следовательно, $\zeta \in \partial B$ и, из условия леммы, $w \in \Gamma$.

По теореме Жордана $\mathbb{C}_\infty \backslash \Gamma$ имеет единственную компоненту G^* с условием $\infty \in G^*$. Если $f(B) \not\subset G$, то G^* пересекает как $f(B)$, так и $\mathbb{C}_\infty \setminus f(B)$ (так как $\infty \notin f(B)$). Но тогда G^* пересекает $\partial f(B) \subset \Gamma = \partial G^*$, что невозможно. Тогда $f(B) \subset G$ и, так как $\partial B \subset \Gamma$, то $f(B) = G$.

Пусть $\tilde{B} = \{z \in B : \ f'(z) \neq 0, f(z) \neq f(z') \text{ при } z' \in B,\ z' \neq z\}$. По условию существует $a \in G$, для которого найдется единственное $z_a \in B$ с условием $f(z_a) = a$ и $f'(z_a) \neq 0$. Таким образом $z_a \in \tilde{B} \neq \emptyset$.

Докажем, что $B = \tilde{B}$. Пусть $B \neq \tilde{B}$. Так как B - область, то $\exists z_0 \in B \cap \partial\tilde{B}$ и (z_n), $z_n \in B \setminus \tilde{B}$, $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$. Так как $z_n \notin \tilde{B}$, то $\exists w_n \neq z_n$, $f(z_n) = f(w_n)$. Можно считать, что $w_n \to w_0 \in \overline{B}$. Так как $f(w_n) = f(z_n) \to f(z_0) \in G$, то $w_0 \in B$.

Пусть $z_0 \neq w_0$. Тогда f принимает все значения из окрестности $f(w_0) = f(z_0) \in G$ как в окрестности $z_0 \in B$, так и в окрестности $w_0 \in B$. Тогда свойство $z_0 \in \partial\tilde{B}$ невозможно.

Если $z_0 = w_0$, то $f'(z_0) = 0$. В этом случае можно показать, что для любого z из достаточно маленькой окрестности z_0 найдется $z' \neq z$ также лежащее в окрестности z_0 такое, что $f(z) = f(z')$ (или z - ноль функции f порядка выше, чем 2). Таким образом, свойство $z_0 \in \partial\tilde{B}$ снова невозможно. ■

14. Лекция 14. Конформные отображения. Часть 2

Теория аналитического продолжения по Вейерштрассу

Определение 22.1
Пусть D и G - области в $\mathbb{C}$ такие, что $D \cap G$ непусто и связно. Функция $g \in H(G)$ называется **непосредственным аналитическим продолжением** функции $f \in H(D)$, если $f = g$ на $D \cap G$.
Пока мы не рассматриваем ситуации, когда области пересекаются по нескольким компонентам.

Пусть D и G - области в $\mathbb{C}$, а $f \in H(D)$ и $g \in H(G)$. Говорят, что функция g является **аналитическим продолжением f по цепочке областей**, если выполнены следующие два условия:

1) Существует (конечный) набор областей $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ в $\mathbb{C}$ такой, что $\Omega_1 = D$, $\Omega_N = G$ и $\Omega_n \cap \Omega_{n+1}$ непусто и связно $\forall n = 1, \ldots, N-1$.

2) Существует набор функций $f_1, \ldots, f_N$, $f_n \in H(\Omega_n)$ при $n = 1, \ldots, N$, такой, что $f_1 = f$, $f_N = g$, а $f_n = f_{n+1}$ на $\Omega_n \cap \Omega_{n+1}$, $n = 1, \ldots, N-1$.

Аналитическое продолжение возможно не всегда. В качестве примера мы рассматривали ряд $\sum z^{2^n}$, у которого все точки на границе единичного круга особые.

Наиболее удобно применять это понятие в случае, когда все области Ω_n, $n = 1, \ldots, N$ - это круги. Именно в таком контексте понятия аналитического продолжения по цепочке было предложено в свое время Вейерштрассом. В случае непосредственного аналитического продолжения несколько более уместно говорить о непосредственном голоморфном продолжении, но мы будем придерживаться традиционной терминологии.

Определение 22.2
Аналитическим элементом (далее **элементом**) называется пара $F = (B, f)$, где $B = B(a, R)$ - некоторый круг, а $f \in H(B)$. Точка a называется центром элемента F а число R - его радиусом. Элемент F называется **каноническим**, если круг B совпадает с кругом сходимости ряда Тейлора для f в точке a.

Например, элементом является пара $(B(1,1), \ln z)$, где $\ln z$ - это главное значение

логарифма, определенное в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_\pi$, то есть $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ при $\arg z \in (-\pi, \pi)$. Так как $\ln z' = \frac{1}{z}$ в $B(1,1)$, то

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

Так как радиус сходимости этого ряда равен 1, то рассматриваемый элемент является каноническим.

Определение 22.3
Элемент $F_1 = (B_1, f_1)$ называется **непосредственным аналитическим продолжением** (далее, сокращенно, **Н.А.П** или **НАП**) элемента $F_0 = (B_0, f_0)$, если $B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$ и $f_0 = f_1$ на $B_0 \cap B_1$.

Если F_0 и F_1 - канонические элементы с общим центром a, и если F_1 является НАП F_0, то $F_0 = F_1$. Это непосредственно вытекает из теоремы единственности и из утверждения о единственности разложения функции в ряд Тейлора.

Предложение 22.1 (простейшие свойства НАП)

1) Пусть $F_0 = (B_0, f_0)$ и $F_1 = (B_1, f_1)$ - элементы, причем центр a_1 элемента F_1 лежит в круге B_0. Тогда для любого $z \in B_1$ выполнено

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_0^{(n)}(a_1)}{n!}(z-a_1)^n.$$

   Верно и обратное: если $a_1 \in B_0$ - произвольная точка, B_1 - круг сходимости указанного ряда, то элемент $F_1 = (B_1, f_1)$ является НАП F_0.

   С подобным приемом мы сталкивались, когда пытались выяснить тип точки (правильная или особая) на границе круга сходимости.

2) Пусть элементы $F_j = (B_j, f_j)$ при $j = 1, 2, 3$ таковы, что F_2 - это НАП F_1, а F_3 - это НАП F_2. Пусть, также, $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$. Тогда F_3 - это НАП F_1.

Первое утверждение непосредственно вытекает из утверждения о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора, а второе - из теоремы единственности для голоморфных функций.

Пример

Рассмотрим в круге $B(1,1)$ элемент $F_0 = (B(1,1), \sqrt{z_{(0)}})$, где $\sqrt{z_{(0)}} = \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{i\arg z}{2}}$, $\arg z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. F_0 - канонический элемент.

Далее, возьмем единичную окружность с центром в 0 и в точках $\pm i$ и -1 также расположим единичные окружности.

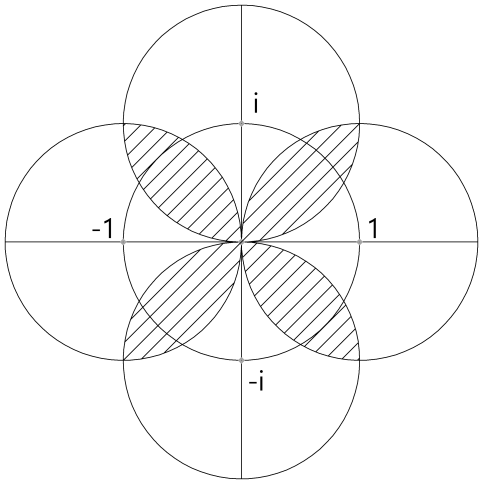

Рис 14.1

Тогда возникнут элементы:

- $F_1 = (B(i,1), \sqrt{z_{(1)}})$, где $\sqrt{z_{(1)}} = \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{i\arg_{(1)} z}{2}}$, $\arg z \in (0, \pi)$.
- $F_2 = (B(-1,1), \sqrt{z_{(2)}})$, где $\sqrt{z_{(2)}} = \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{i\arg_{(2)} z}{2}}$, $\arg z \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.
- $F_3 = (B(-i,1), \sqrt{z_{(3)}})$, где $\sqrt{z_{(3)}} = \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{i\arg_{(3)} z}{2}}$, $\arg z \in (\pi, 2\pi)$.
- $F_4 = (B(1,1), \sqrt{z_{(4)}})$, где $\sqrt{z_{(4)}} = \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{i\arg_{(4)} z}{2}}$, $\arg z \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$.

Рассмотрим элементы F_0 и F_1. На пересечении кругов этих элементов оба аргумента принимают значения $(0, \frac{\pi}{2})$. Тогда F_1 - НАП F_0.
Далее, рассмотрим F_1 и F_2. Оба аргумента принимают значения от $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Значит F_2 - НАП F_1.
Также F_3 - НАП F_2 и F_4 - НАП F_3.
Элементы F_4 и F_0 имеют одинаковые круги, но $f_4 = -f_0$.

Другая важная конструкция, связанная с продолжением элементов - это **продолжение канонических элементов вдоль пути**.

Определение 22.4
Пусть $I = [0,1]$, а $\gamma : I \to \mathbb{C}$ - некоторый путь. Предположим, что задано семейство $F_t = (B_t, f_t)$, $t \in I$, канонических элементов, где $B_t = B(a_t, R_t)$. Семейство $\{F_t : \ t \in I\}$ называется **аналитическим продолжением** элемента F_0 **вдоль пути** γ, если выполнены следующие условия:

1) $a_t = \gamma(t)$ и $R_t > 0$ при всех $t \in I$.

2) $\forall t \in I$ найдется связная окрестность $U_t \subset I$ такая, что $\forall \xi \in U_t$ выполнено $\gamma(\xi) \in B_t$ и F_ξ является НАП F_t.

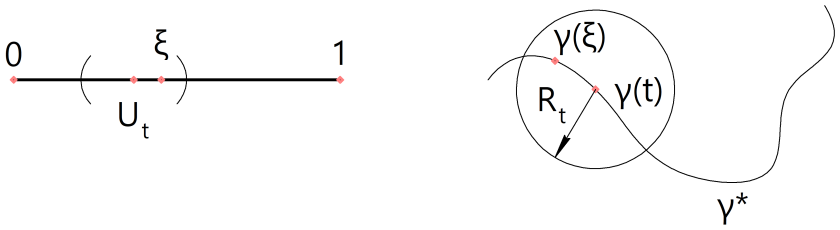

Рис 14.2 Аналитическое продолжение вдоль пути

Как будет видно из дальнейшего изучения свойств аналитического продолжения, требование, что все элементы в данном определении являются каноническими, существенно.

Лемма 22.1
В условиях предыдущего определения либо $R_t \equiv \infty$, либо R_t - непрерывная функция на $I = [0, 1]$.

Доказательство.
Пусть $R_t = \infty$ для некоторого $t \in I$. Тогда, в силу свойства 1) НАП, для любого $\xi \in U_t$ также будет выполнено $R_\xi = \infty$. Далее можно рассмотреть множество $\{t \in I : \ R_t = \infty\}$. С учетом сделанного замечания легко показать, что это множество непусто, открыто и замкнуто в I, откуда вытекает, что это множество совпадает с I.

Пусть теперь $R_t \neq \infty$ при $t \in I$. В этом случае для любого $\xi \in U(t)$ окружности ∂B_t и ∂B_ξ имеют непустое пересечение. В самом деле, если это не так, то один из двух кругов B_t или B_ξ компактно содержится в другом. А это невозможно по первому свойству НАП. Пусть $w \in \partial B_t \cap \partial B_\xi$. Неравенство треугольника для треугольника с вершинами $\gamma(t)$, $\gamma(\xi)$ и w и сторонами длиной $|[\gamma(t), w]| = R_t$, $|[w, \gamma(\xi)]| = R_\xi$ и $|[\gamma(t), \gamma(x)]| = |\gamma(t) - \gamma(\xi)|$, соответственно, дает

$$|R_t - R_\xi| \leqslant |\gamma(t) - \gamma(\xi)|.$$

Осталось использовать непрерывность γ. ■

Предложение 22.2
Пусть семейства $\{F_t, \ t \in I\}$ и $\{\tilde{F}_t, \ t \in I\}$ реализуют аналитическое продолжение некоторого (канонического) элемента $F_0 = \tilde{F}_0$ вдоль некоторого пути $\gamma : I \to \mathbb{C}$.

Тогда $F_1 = F_2$.

Доказательство.
Рассмотрим множество $E = \{t \in I : \ F_t = \tilde{F}_t\} \subset I$. Это множество непусто, так как $0 \in E$. Далее, множество E открыто в относительной топологии I, так как для любого $t \in E$ в силу свойства 1) НАП выполнено $U_t \cap \tilde{U}_t \subset E$. Проверим, что E замкнуто в относительной топологии I. Пусть t - некоторая предельная точка E, $t \in I$. В пересечении окрестностей $U_t \cap \tilde{U}_t$ найдется точка $\xi \in E$. Канонические элементы F_t и $\tilde{F}_t$ являются НАП элементов F_ξ и $\tilde{F}_\xi = F_\xi$ и, кроме того, элементы F_t и $\tilde{F}_t$ имеют общий центр $\gamma(t)$. Тогда, по сделанному выше замечанию, $F_t = \tilde{F}_t$ и $t \in E$. Итак, $E = I$ как непустое, открытое и замкнутое подмножество связного множества. ■

Предложение 22.3

1) Пусть семейство канонических элементов $\{F_t : \ t \in I\}$ реализует аналитическое продолжение некоторого начального элемента F_0 вдоль некоторого пути $\gamma : I \to \mathbb{C}$. Тогда найдется набор точек $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = 1$ такой, что элемент F_1 совпадает с продолжением элемента F_0 по цепочке F_{t_n}, $n = 0, \ldots, N$.

2) Пусть канонический элемент F_1 является аналитическим продолжением канонического элемента F_0 по цепочке $\Phi_1 = F_0, \Phi_2, \ldots, \Phi_{N-1}, \Phi_N = F_1$. Пусть $\gamma : I \to \mathbb{C}$ - ломаная, последовательно соединяющая центры элементов $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$. Тогда существует семейство элементов $\{\Psi_t : \ t \in I\}$, $\Psi_0 = F_0$, которое реализует аналитическое продолжение F_0 вдоль γ и $\Psi_1 = F_1$.

Доказательство.
Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $R_t \geqslant \varepsilon$ при всех $t \in I$. В силу равномерной непрерывности γ на I найдется $\delta > 0$ такое, что $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon$ при $|s - t| < \delta$, $s, t \in I$. Рассмотрим покрытие отрезка I открытыми множествами $W_t := U_t \cap (t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2})$ и выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $W_{t_1}, \ldots, W_{t_N}$ при $t_1 < \cdots < t_N$, $n \in \mathbb{N}$. Положим также $t_0 = 0$ и $t_{N+1} = 1$. Тогда $|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| < \varepsilon$ при $n = 1, \ldots, N+1$ и элемент F_{t_n} является НАП $F_{t_n - 1}$ по определению продолжения вдоль пути. Таким образом установлено первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения достаточно рассмотреть случай, когда элемент F_1 является НАП элемента F_0. В этом случае γ^* - это отрезок, соединяющий центры элементов F_0 и F_1. Для построения семейства $\{\Psi_t\}$ достаточно последовательно разлагать функцию f_0 из элемента F_0 в ряд Тейлора с центром в точках отрезка, соединяющего центры F_0 и F_1. Проверка деталей оставляется в качестве **упражнения**. ■

Теорема 22.1 (о продолжении по гомотопным путям)
Пусть $\gamma_0 : I \to \mathbb{C}$ и $\gamma_1 : I \to \mathbb{C}$ - два пути с общими концами $a = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ и $b = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, гомотопные друг другу в $\mathbb{C}$. Пусть $\gamma : I \times I \to \mathbb{C}$ - соответствующая гомотопия. Пусть задан некоторый канонический элемент $F = (B, f)$ с центром в точке a и пусть этот элемент допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути $\gamma(s, \cdot) : \ I \to \mathbb{C}$ при $s \in I$. Пусть семейство канонических элементов $\{F_{s,t} : \ t \in I\}$ осуществляет аналитическое продолжение элемента F вдоль пути γ_s, $\gamma_s(t) = \gamma(s, t)$. Тогда $F_{0,1} = F_{1,1}$.

Доказательство.
Возьмем $\sigma \in I$. Заметим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $R_{\sigma,t} > \varepsilon$ при всех $t \in I$. Так как γ равномерно непрерывна на $I \times I$, то найдется окрестность $U \subset I$ точки σ такая, что при $s \in U$ выполнено

$$\max_{t \in I} |\gamma(\sigma, t) - \gamma(s, t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Покажем, что для всех $s \in U$ результат аналитического продолжения исходного элемента F вдоль пути γ_s совпадает с результатом продолжения этого элемента вдоль пути γ_σ.

При $s \in U$ и $t \in I$ определим элементы $\Phi_{s,t}$ следующим образом. Пусть центр $\Phi_{s,t}$ - это точка $\gamma(s, t)$, а функция $\varphi_{s,t}$ этого элемента определяется так:

$$\varphi_{s,t}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{\sigma,t}^{(n)}(\gamma(s, t))}{n!}(z - \gamma(s, t))^n.$$

Покажем, что для любого $s \in U$ семейство элементов $\Phi_{s,t}$ реализует аналитическое продолжение исходного элемента $F = \Phi_{s,0}$ вдоль пути γ_s. Из этого и их утверждения о единственности аналитического продолжения канонического элемента вдоль пути будет следовать, что элемент $F_{s,1}$ совпадает с элементом $\Phi_{s,1}$, который, в свою очередь, совпадает с $F_{\sigma,1}$.

Пользуясь равномерной непрерывностью γ_σ на I выберем $\delta > 0$ так, что при $|t' - t''| < \delta$ выполнено неравенство $|\gamma(\sigma, t') - \gamma(\sigma, t'')| < \frac{\varepsilon}{4}$. При $t \in I$ положим $\Omega_t = U_t \cap (t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2})$. Заметим, что при $\xi \in \Omega_t$ точка $\gamma(\sigma, \xi)$ принадлежит кругам четырех элементов $F_{\sigma,t}$, $F_{\sigma,\xi}$, $F_{s,t}$ и $F_{s,\xi}$, так как радиусы этих кругов велики (не меньше ε по сравнению с расстоянием между их центрами (не больше $\frac{\varepsilon}{2}$ для самого большого из них расстояния между $\gamma(s, \xi)$ и $\gamma(\sigma, t)$). Заметим также, что пересечение любых трех из этих кругов не пусто.

Заметим, что элемент $F_{\sigma,\xi}$ является НАП $F_{\sigma,t}$ по выбору окрестности U_t. Далее, элемент $\Phi_{s,t}$ является НАП $F_{\sigma,t}$ по определению семейства $\Phi_{*,*}$. Применяя свойство 2) НАП к этим элементам получаем, что $\Phi_{s,t}$ является НАП $F_{\sigma,\xi}$. Но $F_{\sigma,\xi}$ - это НАП $\Phi_{s,\xi}$. Снова применяя свойство 2) получаем, что $\Phi_{s,\xi}$ является НАП $\Phi_{s,t}$, причем последнее выполнено для всех $\xi \in \Omega_t$. Таким образом, требуемое свойство семейства Φ доказано.

Остается заметить, что результат продолжения исходного элемента F вдоль путей γ_s - это всюду определенная (в силу условия продолжимости вдоль всех путей) и локально постоянная величина на I. Последнее мы доказали не используя условия возможности продолжения вдоль всех путей, а построив продолжение вдоль близких путей непосредственно. Таким образом, результат продолжения F по всему семейству путей γ_s не зависит от s. ■

Теорема 22.2 (о монодромии)
Пусть D - односвязная область в $\mathbb{C}$ и пусть $F = (B, f)$ - канонический элемент с центром в точке $a \in D$. Предположим, что F допускает аналитическое продолжение по любым путям $\gamma \subset D$ с началом в точке a. Тогда для любой точки $b \in D$ продолжение F вдоль любого пути $\gamma \subset D$ с началом в точке a и концом в точке b не зависит от этого пути и дает один и тот же элемент $\tilde{F}$ с центром в точке b. Таким образом, продолжение исходного элемента F вдоль всевозможных путей в области D задает функцию $\Phi \in H(D)$.
В окрестности произвольной точки $b \in D$ функция Φ задается рядом Тейлора элемента $\tilde{F}$ с центром в этой точке, полученного как продолжение исходного элемента F вдоль произвольного пути $\gamma \subset D$, идущего из точки a в точку b. Функция Φ - это аналитическое продолжение f из B в D.

Для нас очень важно свойство продолжения вдоль любого пути. Рассмотрим снова пример с элементом $(B(1,1), \sqrt{z_{(0)}})$. Пусть $\sqrt{z_{(0)}} = f$. Заметим, что f обладает свойством $f^2 = z$. Мы можем в круге нашего элемента продифференцировать это равенство. Тогда мы получим, что $2ff' = 1$, то есть $f' = \frac{1}{2f}$. Из последнего равенства видно, что если $z \to 0$, то $f' \to \infty$. Это значит, что продолжения вдоль пути, проходящего через 0, не может быть, так как если бы продолжение было возможно, то мы могли бы разложить функцию в ряд, и производная была бы голоморфной, а у нее возникает особенность.

Рассмотрим теперь семейство таких путей: возьмем окружности, проходящие через точку 1, центры которых лежат на вещественной прямой. Это семейство гомотопных путей в $\mathbb{C}$. Продолжение по окружности, лежащей внутри $B(1,1)$ ничего не поменяет, так как мы просто перераскладываем функцию в пределах круга $B(1,1)$.

А продолжая по кругам, которые пересекают $B(1,1)$, но не лежат полностью в нем, мы получим функцию $-f$.

Тогда не выполняется условие продолжения вдоль любого пути, так как есть круг, который пересекает точку 0, по которому продолжить нельзя.

Заметим, что при доказательстве теоремы о продолжении по гомотопным путям было фактически доказано следующее полезное утверждение.

Предложение 23.1 (лемма о продолжении по близким путям)
Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ - некоторый путь, и пусть аналитический элемент $F = (B, f)$ продолжается вдоль пути γ. Определим величину $R_\gamma = \min\limits_{t\in[0,1]} R_{\gamma,t}$, где $R_{\gamma,t}$ - радиус элемента $F_{\gamma,t}$ из семейства, осуществляющего продолжение F вдоль γ и предположим, что $R_\gamma < +\infty$ (как было показано выше, $R_\gamma > 0$).

Пусть задан путь $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ такой, что $\sigma(0) = \gamma(0)$, $\sigma(1) = \gamma(0)$ и

$$\|\gamma - \sigma\|_{[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} |\gamma(t) - \sigma(t)| < R_\gamma.$$

Тогда элемент F продолжается вдоль σ и результаты продолжения F вдоль γ и σ совпадают.

Сделаем еще одно замечание относительно величины R_γ, введенной в предыдущем предложении. Пусть семейство элементов $F_t = (B_t, f_t)$ осуществляет продолжение элемента $F = F_0$ вдоль пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Тогда в качестве окрестности U_t из определения аналитического продолжения вдоль пути можно взять такую окрестность W точки t, что для любого $\xi \in W$ выполнено $\gamma(t) \in B(\gamma(\xi), R_\xi)$.

Пример
Попробуем написать продолжение в явном виде. Рассмотрим элемент $(B(1,1), \ln z_{(0)})$. Вспомним, что основной логарифм - это $\ln z_{(0)} = \ln|z| + i\arg z$, $\arg z \in (-\pi, \pi)$.
Для начала попробуем понять вдоль каких путей этот элемент продолжается. Так как производная равна $\frac{1}{z}$, то мы не можем продолжить вдоль путей, проходящих через ноль. Возьмем путь γ, выходящий из 1 и не проходящий через 0. У нас была лемма о том, что вдоль такого пути существует непрерывная ветвь φ многозначной функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$. Мы доказывали, что вдоль любого пути, не проходящего через ноль, эта многозначная функция распадается на непрерывные функции (ветви), любые две из которых отличаются на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Оказывается, что продолжение можно написать явно. Возьмем точку $\gamma(t)$ и возьмем круг с центром в точке $\gamma(t)$, проходящий через 0.

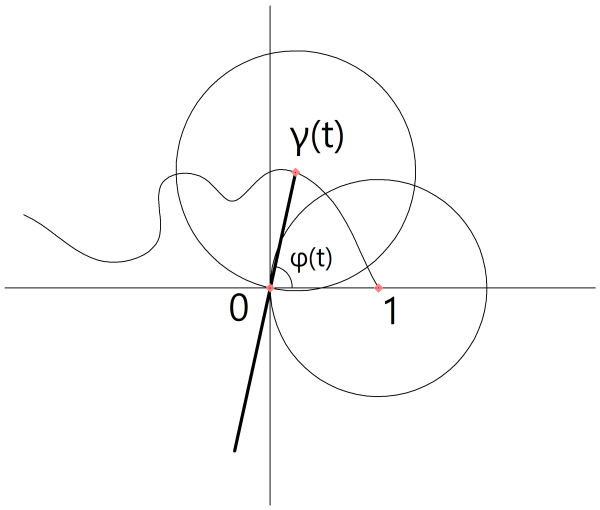

Рис 14.3

В этом круге мы хотим брать $\ln z_{(\varphi(t))} = \ln|z| + i\arg_{(\varphi(t))} z$, $\arg_{(\varphi(t))} z \in (\varphi(t) - \pi, \varphi(t) + \pi)$. При близких t эти элементы являются непосредственным продолжением друг друга. И такие элементы существуют на всем пути. Обозначим семейство

$$L_{\gamma,t} = (B_{\gamma,t}, l_{\gamma,t}(z)),$$

где $B_{\gamma,t} = B(\gamma(t), |\gamma(t)|)$ и $l_{\gamma,t}(z) = \ln_{(\varphi(t))}(z)$.

Предложение 23.2 (о продолжении первообразного элемента)
Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ - некоторый путь, пусть $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$, и пусть $U_\varepsilon = U_\varepsilon(\gamma^*) = \cup_{t\in[0,1]} B(\gamma(t), \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.

Пусть $h \in H(U_\varepsilon)$ и пусть f - первообразная для h в круге $B(a, \varepsilon)$ с условием $f(a) = 0$. Пусть, наконец, F_0 - канонический элемент, определяемый функцией f в точке a.

Тогда F_0 продолжается вдоль γ и для семейства $\{F_{\gamma,t}, t \in [0,1]\}$, осуществляющего это продолжение, выполнено $R_\gamma \geqslant \varepsilon$.

Элемент F_0 естественно называть **первообразным каноническим элементом для** h в точке a.

Доказательство.
Предположим в начале, что путь γ - спрямляем. Для каждого $t \in [0,1]$ при $z \in B(\gamma(t), \varepsilon)$ определим

$$f_{\gamma,t}(z) = \int\limits_{\gamma_t} h(\zeta)d\zeta = \int\limits_{[\gamma(t),z]} h(\zeta)d\zeta, \tag{23.1}$$

где $\gamma_t = \gamma|_{[0,t]}$. Ясно, что $f_{\gamma,t} \in H(B(\gamma(t),\varepsilon))$ и $f'_{\gamma,t} = h$ в $B(\gamma(t),\varepsilon)$. Определим элемент $F_{\gamma,t}$ как канонический элемент с центром γ_t, заданный функцией $f_{\gamma,t}$, то есть $F_{\gamma,t} = (B(\gamma(t), R_{\gamma,t}), f_{\gamma,t})$ и ясно, что $R_{\gamma,t} \geqslant \varepsilon$.

Докажем, что семейство $\{F_{\gamma,t}, t \in [0,1]\}$ осуществляет продолжение элемента F_0 вдоль γ. При этом, для рассматриваемого семейства выполнено $R_\gamma \geqslant \varepsilon$.

Фиксируем $t \in [0,1]$. В силу непрерывности γ, существует $\delta > 0$ такое, что $\forall \xi \in U_\delta(t)$ выполнено $|\gamma(\xi) - \gamma(t)| < \varepsilon$. Докажем, что эту окрестность $U_\delta(t)$ можно взять в качестве окрестности U_t из определения аналитического продолжения вдоль пути для семейства $\{F_{\gamma,t}\}$. Для этого достаточно показать, что $\forall \xi \in U_\delta(t)$ найдется круг D_ξ с центром в точке $\gamma(\xi)$ такой, что $D_\xi \subset B_\xi \cap B_t$ и $f_{\gamma,\xi} = f_{\gamma,t}$ в D_ξ.

Поскольку $|\gamma(\xi) - \gamma(t)| < \varepsilon$, то существует круг с центром $\gamma(t)$, лежащий внутри $B(\gamma(\xi),\varepsilon) \cap B(\gamma(t),\varepsilon)$. Обозначим его D_ξ. В таком случае для всех $z \in D_\xi$ имеем:

$$f_{\gamma,t} = \int\limits_{\gamma_t} h\ d\zeta + \int\limits_{[\gamma(t),z]} h\ d\zeta,$$

$$f_{\gamma,\xi} = \int\limits_{\gamma_t} h\ d\zeta + \int\limits_{\gamma_{t,\xi}} h\ d\zeta + \int\limits_{[\gamma(\xi),z]} h\ d\xi,$$

где $\gamma_{t,\xi} = \gamma|_{[t,\xi]}$. Так как в D_ξ выполнено $f'_{\gamma,\xi} = f'_{\gamma.t} = h$ и так как $f_{\gamma,\xi}(\gamma(t)) = f_{\gamma,t}(\gamma(t))$ (по интегральной теореме Коши в круге $B(\gamma(t),\varepsilon)$), то $F_{\gamma,\xi}$ является НАП $F_{\gamma,t}$ и таким образом доказано, что семейство $\{F_{\gamma,t}\}$ осуществляет аналитическое продолжение элемента F_0 вдоль γ. ■

Предложение 23.4 (теорема о продолжении сложного элемента)
Пусть $F_a = (B_a, f_a)$ - канонический элемент с центром a, который продолжается вдоль пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, и пусть $\{F_t\}$, $F_t = (B_t, f_t)$ при $B_t = B(\gamma(t), R_t)$, - семейство, осуществляющее указанное продолжение. Определим путь

$$\Gamma(t) = f_t(\gamma(t)), \quad t \in [0,1].$$

Пусть элемент $G_A = (B_A, g_A)$ с центром $A = \Gamma(0)$ аналитически продолжается вдоль пути Γ, и пусть $\{G_t\}$, $G_t = (\tilde{B}_t, g_t)$, $\tilde{B}_t = B(\Gamma(t), \tilde{R}_t)$, - это семейство, осуществляющее соответствующее продолжение.

Тогда элемент $H_a = E_a(g_A \circ f_a)$ (элемент функции в точке) продолжается вдоль пути γ, причем семейство, осуществляющее это продолжение имеет вид $\{H_t\}$, $H_t = E_{\gamma(t)}(g_t \circ f_t)$ при $t \in [0,1]$.

Доказательство.
Надо установить, что Γ - это путь, и проверить, что семейство $\{H_t\}$ канонических элементов удовлетворяет условиям определения продолжения вдоль пути.
Фиксируем $t \in [0,1]$. Найдется сколь угодно малое $\delta > 0$ и связная открытая окрестность $U_{t,1}$ (зависящая от δ) такие, что при всех $\xi \in U_{t,1}$ выполняются следующие свойства:

1) $B_0 = B(z_0, \delta) \subset B_t$, где $z_0 = \gamma(t)$.

2) $\gamma(\xi) \in B_0$ и F_ξ является НАП F_t, откуда $f_\xi = f_t$ всюду в B_0.

Следовательно, для всех $\xi \in U_{t,1}$ выполнено $\Gamma(\xi) = f_\xi(\gamma(\xi)) = f_t(\gamma(\xi))$ и, значит, Γ непрерывна в окрестности точки t. А значит, Γ - путь на $[0,1]$.

Аналогично, найдется $\varepsilon > 0$ и связная окрестность $U_{t,2}$ такие, что при всех $\xi \in U_{t,2}$ выполняются следующие свойства:

3) $\tilde{B}_0 = B(w_0, \varepsilon) \subset \tilde{B}_t$, где $w_0 = \Gamma(t) = f_t(z_0)$.

4) $\Gamma(\xi) \in \tilde{B}_0$ и G_ξ является НАП G_t, откуда $g_\xi = g_t$ всюду в $\tilde{B}_0$.

Фиксируем указанное ε и выберем (фиксируем) столь малое δ, чтобы дополнительно выполнялось включение $f_t(B_0) \subset \tilde{B}_0$, то есть чтобы функция $h(z) = g_t \circ f_t(z)$ была голоморфна в B_0. Из этих свойств получаем, что при всех $\xi \in U_{t,1} \cap U_{t,2}$ выполнено $h(z) = g_\xi \circ f_\xi(z)$ в B_0 и, следовательно, H_ξ является НАП H_t. ■

15. Лекция 15. Конформные отображения. Часть 3

Теория аналитического продолжения по Вейерштрассу

На прошлой лекции мы рассмотрели Предложение 23.2 (о продолжении первообразного элемента) и доказали его, считая, что путь γ - спрямляемый.

Предложение 23.2 (о продолжении первообразного элемента)
Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ - некоторый путь, пусть $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$, и пусть $U_\varepsilon = U_\varepsilon(\gamma^*) = \cup_{t\in[0,1]} B(\gamma(t), \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.

Пусть $h \in H(U_\varepsilon)$ и пусть f - первообразная для h в круге $B(a, \varepsilon)$ с условием $f(a) = 0$. Пусть, наконец, F_0 - канонический элемент, определяемый функцией f в точке a.

Тогда F_0 продолжается вдоль γ и для семейства $\{F_{\gamma,t}, t \in [0,1]\}$, осуществляющего это продолжение, выполнено $R_\gamma \geqslant \varepsilon$.

Покажем теперь, что условие спрямляемости пути γ в доказательстве можно отбросить.

Доказательство.
Заметим, что это условие было нужно для обоснования возможности интегрирования h по γ. Построим вписанную в путь ломанную $\lambda : [0,1] \to \mathbb{C}$ (то есть $\lambda(0) = \gamma(0)$, $\lambda(1) = \gamma(1)$, а все вершины λ лежат на γ^*) для которой верно $\|\gamma - \lambda\|_{[0,1]} < \frac{\varepsilon}{3}$ (это возможно в силу равномерной непрерывности γ на $[0,1]$).

Путь λ спрямляем, $h \in H(U_{2\varepsilon/3}(\lambda^*))$, поэтому по доказанному выше элемент F_0 продолжается вдоль λ. Пусть $\{F_{\lambda,t}\}$ - семейство, осуществляющее указанное продолжение. Тогда $R_\lambda \geqslant \frac{2\varepsilon}{3}$. В силу утверждения о продолжении по близким путям элемент F_0 продолжается и вдоль γ и ясно, что для соответствующего семейства элементов $\{F_{\gamma,t}\}$ будет выполнено $R_\gamma \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Заметим, что $f'_{\gamma,t} = h$ в $B(\gamma(t), \frac{\varepsilon}{3})$. В самом деле, $f'_{\lambda,t} = h$, а функция $f_{\gamma,t}$ - это разложение $f_{\lambda,t}$ в ряд Тейлора с центром в точке $\gamma(t) \in B(\lambda(t), \frac{2\varepsilon}{3})$. По теореме единственности функция $f_{\gamma,t}$ должна быть голоморфна по крайней мере в $B(\gamma(t), \varepsilon)$, где голоморфна ее производная h. Из этого вытекает, что $R_\gamma \geqslant \varepsilon$. ■

Пример: продолжение $\operatorname{arctg} z$.
Пусть A_0 - канонический элемент с центром в 0, определяемый главным значением $\operatorname{arctg} z$.

$$\operatorname{arctg} z' = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i}.$$

Эта функция голоморфна в $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$. Тогда если взять любой путь γ, не проходящий через эти точки, то мы можем воспользоваться утверждением о продолжении первообразного элемента. Возьмем на γ точку $\gamma(t)$. Чтобы понять, как устроен такой элемент, необходимо посчитать следующее выражение

$$\int\limits_{\gamma_t} \frac{d\zeta}{\zeta^2+1} + \int\limits_{[\gamma(t),z]} \frac{d\zeta}{\zeta^2+1}.$$

Кругом нашего элемента будет $B_{\gamma,t} = (\gamma(t), \min(\gamma(t)-i, \gamma(t)+i)$. Но чтобы явно выписать элемент, необходимо посчитать записанный выше интеграл. И используя утверждение о продолжении первообразного элемента мы можем понять, по каким путям результат продолжения одинаковый, а по каким нет. Результат интегрирования зависит от того, сколько раз и в каком направлении наш путь обходит точки $\pm i$. Так как мы можем любой путь γ представить в виде суммы некоторого пути, у которого начало и конец совпадают с γ, с нулевым индексом относительно точек $\pm i$, и некоторого числа циклов относительно точек $\pm i$. Тогда если мы захотим посчитать интеграл, то мы можем посчитать интеграл по пути с нулевым индексом относительно $\pm i$ и прибавить или вычесть некоторое количество вычетов нашей функции в точках $\pm i$.

Этим способом мы можем обрабатывать большое количество функций, у которых производная рациональная.

Пример
Рассмотрим функцию $\ln(\sqrt{z} + \mathscr{J}) = f$ в круге $B(1,1)$, где $\mathscr{J} = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ - функция Жуковского. Тогда

$$h = f' = \frac{1}{\sqrt{z}\,\mathscr{J}(z)}\left(\frac{\mathscr{J}(z)}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z}\,\mathscr{J}'(z)\right) = \frac{1}{2z} + \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} = \frac{3z^2-1}{2z(z^2+1)}.$$

Это рациональная функция, у которой есть 3 полюса: $0, \pm i$. Посчитаем вычеты в этих точках: $\operatorname{res}_0 h = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{res}_i h = 1$, $\operatorname{res}_{-i} h = 1$. Этот набор вычетов показывает нам, как устроено продолжение. Пусть наш путь выходит из точки 1. Если путь делает однократный оборот вокруг точки i или $-i$, то мы прибавляем $2\pi i$ умноженное на вычет в этой точке. Если путь делает оборот вокруг точки 0, то мы вычитаем πi. Это означает, что оборот вокруг точки 0 будет давать нам совершенно другие элементы.

То есть утверждение о продолжении первообразного элемента дает простой способ понять, как устроены "проблемные" точки, через которые продолжать нельзя.

Пример
Рассмотрим еще один пример, но воспользуемся в этот раз утверждением о продолжении сложного элемента, которое мы разбирали на прошлой лекции.

Пусть $\Phi = \cos(\frac{\pi}{2+\sqrt[3]{z}})$. Возьмем функцию $h(z) = \cos(\frac{\pi}{2+\sqrt[3]{z_{(0)}}})$. Тогда $h \in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_\pi)$. В качестве исходного элемента Φ возьмем $E_1(h)$.

Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ такой путь, что $\gamma(0) = 1$. Семейство, осуществляющее продолжение элемента $F_0 = E_1(\sqrt[3]{z_{(0)}})$ вдоль γ имеет вид $\{F_t\}$ при $F_t = (B(\gamma(t), |\gamma(t)|), f_t)$, где $f_t(z) = \sqrt[3]{|z|}\dfrac{\exp(i\arg_{(\varphi(t))}(z))}{3}$, а φ - это непрерывная ветвь $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на $[0,1]$, $\varphi(0) = 0$. Пусть $\Gamma(t) = f_t(\gamma(t))$, $t \in [0,1]$.

Элемент $G_0 = E_1(\cos(\frac{\pi}{2+w}))$ продолжается вдоль Γ, если и только если Γ не проходит через точку -2. Пусть $\{G_t\}$, $G_t = (B(\Gamma(t)), |\Gamma(t) + 2|), g_t)$ - семейство, осуществляющее продолжение G_0 вдоль Γ, то есть $G_t = E_{\Gamma(t)}(\cos(\frac{\pi}{2+w}))$.

По теореме о продолжении сложного элемента, элемент $H_0 = E_1(h)$ продолжается вдоль указанных выше γ, при помощи семейства $\{H_t\}$, где $H_t = E_{\gamma(t)}(g_t \circ f_t)$ при $t \in [0,1]$.

Полная аналитическая функция

Определение 23.1
Пусть $a \in \mathbb{C}$, F_a - некоторый фиксированный канонический элемент. **Полной аналитической функцией (П.А.Ф.)**, определяемой F_a, называется совокупность Φ всех канонических элементов, полученных из F_a аналитическим продолжением по всем путям в $\mathbb{C}$ с началом в точке a, по которым такое продолжение возможно. Через D_Φ обозначается объединение кругов всех элементов из Φ, а определенное так множество D_Φ называется **областью определения П.А.Ф.** Φ.

- П.А.Ф. Φ определяется любым своим элементом.
- Множество D_Φ действительно является областью. В самом деле, по определению, для любой точки $b \in D_\Phi$ найдется элемент $F_b \in \Phi$ - канонический элемент с центром b.

Предложение 23.3 (теорема Пуанкаре-Вольтерра)
Если Φ - П.А.Ф., $b \in D_\Phi$, то число элементов из Φ с центром в точке b не более чем счетно.

Доказательство.
Фиксируем $b \in D_\Phi$ и некоторый элемент $F_b \in \Phi$ с центром в точке b. Все другие элементы $\tilde{F}_b \in \Phi$ с центром b получаются из F_b продолжением по замкнутым путям с началом и концом b.

Пусть $\tilde{F}_b$ получен из F_b с помощью продолжения вдоль пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Пусть $R_\gamma > 0$, где R_γ определен для какого-либо семейства, осуществляющего указанное продолжение. Найдется ломаная $\lambda : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\lambda(0) = \lambda(1) = b$, такая, что $\|\gamma - \lambda\|_{[0,1]} < R_\gamma$ и все вершины λ, отличные от точки b, имеют рациональные координаты. В силу утверждения о продолжении по близким путям результаты продолжения F_b по γ и λ совпадают. Остается заметить, что совокупность всех возможных ломанных с началом и концом b и остальными вершинами в точках с (обеими) рациональными координатами не более чем счетна. ■

Пример: П.А.Ф. $\mathrm{Ln}(z - w)$, $w \in \mathbb{C}$.
Пусть $\mathbb{C}^*_w = \mathbb{C} \setminus \{w\}$. Для $a \in \mathbb{C}^*_w$ определим базовый элемент $L_{w,a}$ как канонический элемент в точке a, заданный функцией

$$l_{w,a}(z) = \ln_{(\alpha)} z = \ln|z - w| + \arg(\alpha) z - w$$

при $\alpha = \arg a - w$.

Для произвольного пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*_w$, $\gamma(0) = a$, пусть, как раньше, $\varphi(t)$ - непрерывная ветвь $\mathrm{Arg}(\gamma(t) - w)$ на $[0,1]$, для которой $\varphi(0) = \arg(a - w) \in (-\pi, \pi]$. Продолжение элемента $L_{w,a}$ вдоль γ, как это было показано раньше, осуществляется при помощи семейства $\{L_{w,\gamma,t}\}$ с центрами $\gamma(t)$, радиусами $R_{w,\gamma,t} = |\gamma(t) - w|$, и функциями $l_{w,\gamma,t}(z) = \ln_{(\varphi(t))}(z)$. Ясно, что $R_\gamma = \min\limits_{t \in [0,1]} |\gamma(t) - w|$.

В частности, из элемента $L_{w,a}$ можно получить все элементы $L_{w,b}$, $b \neq w$. Если же путь γ проходит через точку w, то продолжения вдоль этого пути элемента $L_{w,a}$ не существует (это связано с тем, что $l'_{w,\gamma,t}(z) = \frac{1}{z-w} \to \infty$ при $z \to w$).

Получаем, что для каждой точки $b \neq w$ множество всех различных элементов с центром b в рассматриваемой П.А.Ф. имеет вид $\{L^k_{w,b} = L_{w,b} + 2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$. При этом, если $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*_w$ такой путь, что $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, то результатом продолжения $L^k_{w,b}$ вдоль γ является элемент $L^k_{w,b} + 2\pi i \mathrm{Ind}_w(\gamma)$.
Таким образом описана П.А.Ф. $\mathrm{Ln}(z - w)$ с областью определения $\mathbb{C}^*_w$.

Пример: П.А.Ф. z^p, $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
Эта П.А.Ф с областью определения $\mathbb{C}^*$ строится на базе описанного выше аналитического продолжения элемента P_a^p с центром a, радиусом $|a|$ и функцией $\mathfrak{p}_{a,t}^p = \exp(pl_{0,a}(z))$. Продолжение этого элемента вдоль пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$, $\gamma(0) = a$, осуществляется семейством элементов $\{P_{\gamma,t}^p\}$, где $P_{\gamma,t}^p$ имеет центр $\gamma(t)$, радиус $|\gamma(t)|$ и функцию $\mathfrak{p}_{\gamma,t}^p = \exp(pl_{0,\gamma,t}(z))$. Поскольку экспонента - целая функция, окрестности U_t из определения продолжения вдоль пути для семейства $\{P_{\gamma,t}^p\}$ можно брать такие же, как для $\{L_{0,\gamma,t}\}$. Аналогично предыдущему примеру, из элемента P_a^p можно получить все элементы P_b^p при $b \neq 0$.

Пусть дан элемент P_b^p и пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ такой путь, что $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Положим $N := \mathrm{Ind}_0(\gamma)$. Тогда результатом продолжения элемента P_b^p вдоль γ является элемент $P_b^p e^{2\pi i p N}$, то есть функция элемента P_b^p умножается на постоянную $e^{2\pi i p N}$, а круг не меняется. При $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ число разных элементов рассматриваемой П.А.Ф. над каждой точкой $b \neq 0$ будет конечным, а при $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ - бесконечным (счетным).

Рассмотрим подробнее случай $p = \frac{1}{n}$ при $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Представим $N = \mathrm{Ind}_0(\gamma)$ в виде $N = kn + q$, $k \in \mathbb{Z}$, а $q \in \{0, \ldots, n-1\}$. Тогда

$$e^{2\pi i p N} = e^{2\pi i k} e^{2\pi i (\frac{q}{n})} \in \sqrt[n]{1}.$$

Следовательно, над каждой точкой $b \neq 0$ есть ровно n различных элементов из П.А.Ф. $z^{\frac{1}{n}}$, соответствующих различным значениям q.

Определение 23.2
Пусть Φ - П.А.Ф., D_Φ - ее область определения, а $D_1 \subset D_\Phi$ - некоторая область. Пусть $F_b \in \Phi$ - элемент с центром в точке $b \in D_1$, который **продолжается вдоль любого пути** γ_b в D_1 с началом в точке b. Совокупность различных элементов, полученных в результате всех таких продолжения. обозначим через Φ_1. Будем говорить, что Φ_1 - (многозначная в общем случае) **аналитическая ветвь** Φ над D_1, определяемая элементом F_b.

В указанных в этом определении условиях число $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ элементов из Φ_1 с центром в каждой из точек $c \in D_1$ одно и тоже.

Определение 23.3
Пусть, в условиях предыдущего определения, $D_2 \subset D_1$ - еще одна область, и пусть $f \in H(D_2)$ такова, что $\forall c \in D_2$ элемент $E_c(f)$ принадлежит Φ_1. Тогда говорят, что f - это **голоморфная** (а, следовательно, однозначная) **ветвь аналитической ветви** Φ_1 в D_2.

То есть у П.А.Ф., как у совокупности всех элементов, могут выделяться многозначные ветви, которые имеют такое свойство: все элементы продолжаются друг в друга.

Посмотрим на примеры, которые мы разбирали.
Логарифм в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ является своей единственной аналитической ветвью.

Также мы разбирали пример $\ln(\sqrt{z} + \mathscr{J})$. Возьмем в качестве области проколотую окрестность точки i. Начнем продолжать элемент в этой окрестности по всевозможным путям. Если путь не обошел в этой окрестности точку i, то мы вернулись туда же. Если мы обходим точку, то мы сдвигаемся на кратное $2\pi i$. Но у всей П.А.Ф., которую мы строили из этого элемента, с центром в этой точке есть еще элементы, которые отличаются от исходного на πi. Поэтому в проколотой окрестности точки i у нашей функции две многозначные аналитические ветви, одна из которых соответствует четным сдвигам, а другая - нечетным. Такая же картина будет в окрестности точки $-i$.
В окрестности точки 0 мы можем сдвигаться на πi, поэтому там одна аналитическая ветвь.
Представим теперь, что будет в окрестности бесконечно удаленной точки. Однократный обход бесконечно удаленной точки - это однократный обход 0 и $\pm i$. Следовательно, мы получаем сдвиг на $3\pi i$. Значит, в проколотой окрестности бесконечности (внешность бесконечного круга) у нас три разные многозначные ветви.

Определение 23.4
Пусть Φ, Φ_1, D_Φ и D_1 - такие, как в предыдущих определениях.
Пусть $D_2 \subset D_1$ - некоторая область. Пусть $\{f_j\}_{j \in J}$ - семейство различных функций в D_2, обладающее следующими свойствами:

1) $\forall j \in J$ функция f_j - это голоморфная ветвь для Φ_1 в D_2.

2) $\forall c \in D_2$ и $\forall F_c \in \Phi_1$ найдется $j \in J$ с условием $F_c = E_c(f_j)$.

Тогда говорят, что Φ_1 **распадается над** D_2 **на голоморфные ветви** $\{f_j\}_{j \in J}$.

Определение 23.5
Пусть Φ и D_Φ - такие, как раньше. Пусть $D_1 = B'(a, \delta) \subset D_\Phi$ (точка a может как принадлежать D_Φ, так и не принадлежать). Пусть $b \in D_1$, $F_b \in \Phi$, и пусть Φ_1 - аналитическая ветвь Φ над D_1, определяемая F_b (напомним, что F_b продолжается вдоль любого пути в D_1 с началом в точке b). Возможны три случая:

1) После одного обхода точки a (по пути в D_1) элемент F_b переходит в себя. Из теоремы о монодромии, примененной в двух односвязных областях (получен-

ных из D_1 с помощью разрезов по двум разным радиусам, не проходящим через b), найдется функция $f_1 \in H(D_1)$, определяющая Φ_1 (то есть Φ_1, распадающаяся на одну голоморфную ветвь f_1 над D_1, является однозначной над D_1).
Следовательно, $\forall c \in D_1$ единственный элемент $F_c \in \Phi_1$ также при обходе вокруг a переходит в себя.

В этом случае говорят, что a является **изолированной особой точкой однозначного характера для** Φ_1. Она классифицируется также, как для F_1 - голоморфной функции в проколотой окрестности a (устранимая особая точка, полюс, или существенно особая точка).

2) Найдется $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ такое, что элемент F_b после $1, \ldots, n-1$ обходов в D_1 точки a переходит в элемент, отличный от F_b, а после n обходов переходит в F_b (то же самое будет верно и для любого другого элемента Φ_1 с центром в любой точке из D_1). Тогда говорят, что a - это **точка ветвления порядка** n для Φ_1 (или, другими словами, что Φ_1 имеет над точкой a ветвление порядка n).

3) При любом натуральном числе обходов вокруг a в D_1 элемент F_b не переходит в себя, тогда говорят, что a - это **точка ветвления бесконечного порядка** (**логарифическое ветвление**).

Снова вернемся к примеру $\ln(\sqrt{z} + \mathscr{J})$. В нуле наша П.А.Ф. является своей аналитической ветвью и имеет там логарифмическое ветвление. Над точками $\pm i$ функция распадается на две аналитические многозначные ветви, каждая из которых имеет логарифмическое ветвление. Над точкой ∞ возникают три разные аналитические ветви, каждая из которых имеет логарифмическое ветвление.

У нас был еще один пример: $\cos(\frac{\pi}{2+\sqrt[3]{z}})$. Точка 0 - точка ветвления 3-го порядка из-за $\sqrt[3]{z}$. Точка -8 устроена таким образом: в проколотой окрестности точки -8 наша функция распадается на голоморфные ветви, две ветви имеют устранимую особенность (на самом деле, ветви голоморфны), а третья ветвь имеет полюс.

Введем понятие **описания П.А.Ф.**. Мы должны найти начальный элемент, то есть точку и канонический элемент в этой точке. Далее, мы должны описать вдоль каких путей этот элемент продолжается. Мы должны выписать продолжение по всем таким путям. В каждой точке (куда мы можем продолжить) необходимо выписать совокупность всех элементов, центр которых лежит в соответствующей точке, и понять, сколько таких элементов. Далее, необходимо определить область существования нашей функции, особые точки и их характер. Совокупность этих данных - описание П.А.Ф.

Действия с П.А.Ф.

Мы привыкли иметь возможность производить алгебраические операции, дифференцирование и композицию. В случае с П.А.Ф. необходимо быть аккуратнее. Пусть в некоторой области заданы (область лежит в области существования каждой из этих функций) две П.А.Ф. Если построить элемент производной или элемент суммы и попробовать применить к нему процесс аналитического продолжения, то мы не получим П.А.Ф. производной или суммы, а получим просто множество канонических элементов.

Пусть в области D заданы две П.А.Ф. Φ и Ψ. Пусть $F = (B, f)$ и $G = (U, g)$ - элементы с центром $a \in D$ из Φ и Ψ, соответственно. Тогда элементы $E_a(f')$, $E_a(f+g)$, $E_a(fg)$ допускают продолжение по всем путям в D. Таким образом, определены (множества канонических элементов) Φ', $\Phi + \Psi$ и $\Phi\Psi$. Эти множества могут определять соответствующие П.А.Ф., а могут распадаться на несколько разных П.А.Ф. Так, $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ определяет две П.А.Ф.: $2\sqrt{z}$ и 0, а выражение $i\mathrm{Ln}\ z + \mathrm{Ln}\ z$ - определяет счетное число П.А.Ф. в $\mathbb{C}^*$.

Композиция П.А.Ф. определяется при помощи утверждения о продолжении сложного элемента. Например, композиция $w^2 \circ \sqrt[4]{z}$ - это П.А.Ф. $\sqrt{z}$. При этом указанная композиция не равна произведению $\sqrt[4]{z}\sqrt[4]{z}$, которая дает две П.А.Ф. $\sqrt{z}$ и $i\sqrt{z}$.

Напомним, что если D - односвязная область в $\mathbb{C}$, $f \in H(D)$ и $f(D) \subset \mathbb{C}^*$, то найдутся функции $g, h \in H(D)$ такие, что $f = g^2$ и $f = \exp(h)$ (вместо g^2 можно рассмотреть g^n при любом фиксированном натуральном $n \geqslant 2$).

В самом деле, композиция $\sqrt{w} \circ f$ по теореме о продолжении сложного элемента и по теореме о монодромии распадается над D на однозначные ветви. Для любой такой ветви g выполнено $g^2 = f$.
Аналогично, композиция $\mathrm{Ln}\ w \circ f$ также распадается над D на однозначные ветви и для любой такой ветви h выполнено $\exp(h) = f$.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ