ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЕМИНАРЫ

СЕРДОБОЛЬСКАЯ
МАРИЯ ЛЬВОВНА

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ГЕОРГИЕВСКУЮ ЕКАТЕРИНУ ПАВЛОВНУ

Оглавление

Семинар 1. Классическая вероятность.

Классическая вероятность.

Совокупность трех объектов вида $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством. Здесь Ω – множество всех исходов эксперимента,
$\omega \in \Omega$ – элементарный исход (когда мы проводим эксперимент, всегда реализуется только один элементарный исход),
$\mathcal{F}$ – система подмножеств множества Ω. Смысл этой системы в том, что она задают те подмножества Ω, к которым применимо P. P – правило:

$$A \in \mathcal{F} \xrightarrow{P} P(A) \tag{1.1}$$

Здесь $A \subset \Omega$.

Аргумент A называется событием, а $P(A)$ – вероятностью события.

Чтобы указанное вероятностное пространство удовлетворяло нашим представлениям о вероятности, нужно наделить $\mathcal{F}$ и P какими-то свойствами.

Классическая вероятность – это вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, в котором Ω – конечное множество, его элементы можно пронумеровать

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}, \quad 2 \leqslant N < \infty \tag{1.2}$$

а $\mathcal{F}$ – все подмножества в Ω, включая $\varnothing, \Omega$.

Зададим вероятность P. Запишем подмножества, составленное из элементарных исходов с некоторыми номерами

$$\forall A = \left\{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_M}\right\} \tag{1.3}$$

Тогда вероятность этого события равна

$$P(A) = \frac{M}{N}, \;\; M = 0, 1, \ldots, N \tag{1.4}$$

Если

$$M = 0 \;\Rightarrow\; A = \varnothing \;\Rightarrow\; P(A) = 0 \tag{1.5}$$

У данной конструкции есть следующее важное ***свойство***. Если рассмотреть одноэлементное множество, то вероятность

$$\forall \omega_i \quad P(\omega_i) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{1.6}$$

Здесь под $P(\omega_i)$ на самом деле подразумевается $P(\{\omega_i\})$ – вероятность от одноэлементного множества.

Это означает, что *все элементарные исходы равновероятны*. Отметим, что указанное свойство можно использовать и как определение классической вероятности (классическая вероятность – это такое вероятностное пространство, в котором все элементарные исходы равновероятны).

$$P(A) = \frac{M}{N}, \quad M = 0, 1, \ldots, N \tag{1.7}$$

Понятно, что для расчета конструкции (1.7) нужно посчитать количество элементов в множестве.

Элементы комбинаторики.

Большинство комбинаторных ситуаций сводятся к двум базисным случаям. Один из них – **выбор** m **объектов из** n. Пока не известны условия выбора, почитать число способов выбора нельзя. Существует две альтернативы:

1. Выбор с возражением (без возвращения) объекта назад в исходную совокупность.
2. Выбор с учетом порядка (без учета порядка) выбора.

Таким образом, у нас есть две альтернативы, то есть четыре варианта выбора. Запишем их в виде таблицы 4.

число способов	*с учетом порядка*	*без учета порядка*
с возвращением	n^m	C_{n+m-1}^{n-1}
без возвращения	A_n^m	C_n^m

Таблица 1: Варианты выбора.

Здесь

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad - \quad \textbf{число размещений} \tag{1.8}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \quad - \quad \textbf{число сочетаний} \tag{1.9}$$

Красным указан выбор по умолчанию (если в задаче ничего не сказано про способ выбора, то считаем, что выбор без возвращения и без учета порядка).

Следующая комбинаторная ситуация – **число способов разместить** m **объектов по** n **местам**. С одной стороны, нельзя сказать заранее, сколькими способами можно разместить объекты по n местам, пока мы не объясним, как эти объекты размещаются. С другой стороны, число способ размещения в точности соответствует числу способов выбора. Вместо того, чтобы размещать объекты, мы можем выбирать места, на которые мы будем помещать объекты. Таким образом, число способ размещения и число способов выбора – идентичные конструкции. При этом две указанные выше альтернативы можно переформулировать в терминах размещения. В случае размещения имеем

1. Размещение с повторением (без повторения) места.

2. Размещение различимых (неразличимых) объектов.

Пример. Пусть есть два объекта. Если эти объекты А и В различимы, то расположения AB и BA различные. Если же объекты неразличимы, то даже если мы поменяем их местами, два этих расположения считаются за одно.

Отметим, что таблица для числа способов размещения будет аналогична таблице способов выбора

число способов	*различимые*	*неразличимые*
с повторением	n^m	C_{n+m-1}^{n-1}
без повторения	A_n^m	C_n^m

Таблица 2: Варианты способов размещения.

Отметим, что здесь размещение по умолчанию – размещение различимых объектов с повторением.

Замечание. И выбор и размещение в последней строке можно осуществлять только если $n \geqslant m$, в противном случае ситуация не реализуется.

Задача 1.

Из колоды в 36 карт (9 достоинств × 4 масти). Наугад выбирают 2 карты Найти вероятность того, что обе карты – тузы.

Решение. Для решения любой задачи по классической вероятности нужно найти M и N. Зачастую N рассчитывать легче, поэтому начинать стоит с неё. В данном случае *общего числа исходов* речь идет о выборе двух объектов из 36. В задаче нет дополнительных указаний, поэтому будем считать, что выбор без повторений и без учета порядка, то есть

$$N = C_{36}^2 \tag{1.10}$$

Число благоприятных исходов соответствует ситуации, в которой обе карты выбраны из 4-х тузов, при этом все варианты выбора связаны с тем, что мы можем выбирать разные тузы.

$$M = C_4^2 \tag{1.11}$$

Поэтому вероятность

$$P = \frac{C_4^2}{C_{36}^2} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}}{\frac{36!}{34!2!}} = \frac{4\cdot 3}{36\cdot 35} \tag{1.12}$$

Замечание. Для расчета числа способов N и M всегда нужно использовать одну и ту же модель. Значит, если мы предполагаем, что N следует рассчитывать по схеме без учета порядка, то и M тоже нужно считать без учета порядка.

Задача 2.

Брошены две игральные кости. Рассмотрим два события:
A_6 = в сумме на верхних гранях выпало 6 очков,
A_7 = в сумме на верхних гранях выпало 7 очков.
Найти вероятности $P(A_6)$, $P(A_7)$.

Решение. Рассмотрим три способа решения данной задачи.
1. Зададим множество элементарных исходов. Представим элементарный исход в виде *неупорядоченной пары* $\omega = \{i, j\}$, $i, j = 1, \ldots, 6$, здесь i – количество очков, выпавших на одной кости, j – количество очков, выпавших на другой кости.

Мы считаем, что пара неупорядоченная, так как кости неразличимы. Отметим, что ситуация с бросанием костей – это типичная ситуация размещения. У нас есть два объекта (две кости), и каждый из них можно разместить в одном из двух положений. Таким образом, имеем *размещение двух объектов по шести местам*. Поэтому

$$N = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m} \Big|_{\substack{n=6 \\ m=2}} = C_7^2 = 21 \tag{1.13}$$

Отметим, что биномиальные коэффициенты симметричны.

Рассмотрим элементарные исходы, которые влекут событие A_6:

$$A_6 = \{\{1,5\}, \{2,4\}, \{3,3\}\} \tag{1.14}$$

Событие

$$A_7 = \{\{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}\} \tag{1.15}$$

Тогда вероятность

$$P(A_6) = P(A_7) = \frac{3}{21} \tag{1.16}$$

2. Изучим другой подход. Будем считать, что элементарный исход есть *упорядоченная пара* двух чисел

$$\omega = \langle i, j \rangle, \quad i, j = 1, \ldots, 6 \tag{1.17}$$

Поэтому имеем *размещение двух различимых объектов по шести местам*

$$N = 6^2 = 36 \tag{1.18}$$

Тогда события

$$A_6 = \Big\{ \langle 1,5\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 5,1\rangle \Big\} \tag{1.19}$$

$$A_7 = \Big\{ \langle 1,6\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 6,1\rangle \Big\} \tag{1.20}$$

Поэтому вероятности этих событий

$$P(A_6) = \frac{5}{36} < \frac{6}{36} = P(A_7) \tag{1.21}$$

3. Рассмотрим третью модель. Будем считать, что нам все равно, сколько очков выпало на каждой игральной кости, нас интересует только сумма. Поэтому выпишем вероятностное пространство в виде

$$\Omega = \{s_2, \ldots, s_{12}\} \tag{1.22}$$

где s_k =в сумме k очков, $k = 2, \ldots, 12$ Тогда число исходов равно

$$N = 11 \tag{1.23}$$

и вероятность равна

$$P(A_6) = P(A_7) = \frac{1}{11} \tag{1.24}$$

В такой модели есть 11 элементарных исходов, и каждое из событий влечет по одному элементарному исходу.

Выводы. Отметим, правильный ответ к данной задаче выбирается в соответствии с используемой точкой зрения. С математической точки зрения все три модели правильные. Каждая модель зависит от того, как мы задали множество элементарных исходов. Оно задается по определению. Однако, реальности соответствует только вторая модель – модель различимых костей. Объяснить это можно следующим образом: если мы покрасим кости и сделаем их различимыми, вероятность измениться не должна.

Замечание. В мире существуют объекты, которые принципиально неразличимы. Это *квантово-механические объекты*. Например, есть 2 частицы и 6 энергетических уровней. Мы заселяем эти энергетические уровни частицами. Тогда, если частицы различимы, то их заселение будет происходить по второй модели. Экспериментально нельзя выяснить, на каком из уровней какая именно частица находится. Однако, алгоритм заселения уровней определяет макроскопические свойства тела. Эксперимент показывает, что на самом деле в квантово-механическом случае частицы нельзя считать различимыми, и вероятность описывается по первой модели.

Таким образом, *все макроскопические объекты имеют статистическое поведение как различимые объекты* (вторая модель). *Неразличимость объектов проявляется только на квантово-механическом уровне*.

Семинар 2. Классическая вероятность. Часть 2.

Представление числа исходов в виде суммы.

Продолжим рассмотрение классической вероятности. Итак, наша основная цель – пересчитать количество элементов в множестве. Как мы отмечали ранее, пересчитать количество элементов можно, если комбинаторная ситуация укладывается в рамки каких-то стандартных конструкций. Обсудим, какие приемы существуют для подсчета количества исходов в данном конкретном множестве.

Первая идея подсчета количества элементарных исходов заключается в следующем. Пусть дано множество элементарных исходов. Разделим это множество на несколько маленьких подмножеств, посчитаем число исходов в каждом подмножестве, и сложим получившиеся результаты.

Задача 1.

Куб со стороной 10 см окрасили по поверхности, разделили на 10^3 кубиков со стороной 1 см, перемешали кубики, наугад выбрали один.

Какова вероятность того, что у этого кубика ровно одна окрашенная грань? Какова вероятность того, что у этого кубика хотя бы две окрашенные грани?

Решение. Итак, общее количество элементарных исходов $N = 1000$. Подсчитаем, сколько кубиков имеет 0,1,2,3 окрашенные грани. Начнем с более простого – случай трех окрашенных граней. Кубик имеет три окрашенные грани, если изначально он лежал в угле большого кубика. Углов 8, поэтому

$$M_3 = 8 \tag{2.1}$$

Теперь рассмотрим кубики, которые не имеют окрашенной грани. Неокрашенными будут те кубики, которые находились внутри большого куба. Значит, надо убрать верхний слой кубиков и посчитать только те кубики, которые остались внутри

$$M_0 = 8^3 = 512 \tag{2.2}$$

Кубики будут иметь две окрашенные грани, если они лежали на ребрах, но не на углах

$$M_2 = 12 \cdot 8 = 96 \tag{2.3}$$

Оставшиеся кубики будут с одной окрашенной гранью. Они лежат на гранях, но не на ребрах

$$M_1 = 6 \cdot 8^2 = 384 = N - M_0 - M_2 - M_3 \tag{2.4}$$

Для первого события (кубик с одной окрашенной гранью)

$$P(1) = \frac{M_1}{N} = 0.096 \tag{2.5}$$

Рассмотрим второе событие – у кубика хотя бы две окрашенные грани. Разобьем это событие на две части – кубик имеет две или три окрашенные грани. Тогда исходы, которые влекут указанное событие, разбиваются на две категории. Поэтому для второго события

$$P\,(\geqslant 2) = \frac{M_2 + M_3}{N} = 1 - \frac{M_1 + M_0}{N} = 0.104 \tag{2.6}$$

Идея решения основана на разбиении множества А на *не пересекающиеся* части $A_1, \ldots, A_s$ (то есть A_j не имеют общих элементарных исходов). Тогда вероятность события А выражается через количества исходов, влекущих каждой из составляющих А событий. Ищем эти M_j – число элементарных исходов, содержащихся в A_j. Тогда

$$P(A) = \frac{M_1 + \ldots + M_s}{N} = P(A_1) + \ldots + P(A_s) \tag{2.7}$$

Важно, чтобы A_j не пресекались и вместе исчерпывали событие A.

Другой подход – подсчет вероятности того, что искомое событие *не произошло*. Пусть $\overline{M}$ – число исходов, не влекущих A (влекущих $\overline{A}$ = ”не A”), тогда все множество элементарных исходов разбивается на две части

$$M + \overline{M} = N \tag{2.8}$$

Вероятность

$$P(A) = 1 - \frac{\overline{M}}{N} = 1 - P(\overline{A}) \tag{2.9}$$

Задача 2.

Из колоды в 36 карт (4 масти по 9 достоинств) наугад выбрали 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будет хотя бы одна карта пиковой масти?

Решение. Событие "хотя бы одна карта"довольно сложное – ему соответствует 2, 3 и т.д. карт. Поэтому стоит взять противоположное событие – "ни одной карты нет". Понятно, что общее количество исходов (выбор карт не ограничен дополнительными условиями, то есть мы считаем, что выбор без возвращения и без учёта порядка)

$$N = C_{36}^6 \tag{2.10}$$

Если A = есть хотя бы одна пиковая карта, то $\overline{A}$ = нет карт пиковой масти. Значит, 6 карт мы выбираем не из общей колоды, а из той колоды, в которой нет пиковых карт

$$\overline{M} = C_{27}^6 \tag{2.11}$$

потому что в колоде 27 непиковых карт. Тогда

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{C_{27}^6}{C_{36}^6} \approx 0.15 \tag{2.12}$$

Отсюда получаем

$$P(A) = 1 - \frac{\overline{M}}{N} = 1 - \frac{C_{27}^6}{C_{36}^6} \approx 0.85 \tag{2.13}$$

Если привязывать условие задачи к реальной игре в ”дурака”, то

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{27}^6}{C_{36}^6} \approx 0.18 \tag{2.14}$$

$$P(A) = 1 - \frac{\overline{M}}{N} = 1 - \frac{C_{27}^6}{C_{36}^6} \approx 0.82 \tag{2.15}$$

Представление числа исходов в виде произведения.

Рассмотрим приём представления числа исходов в виде произведения. Рассмотрим множество элементарных исходов. Изначально это множество никак не структурировано. Распределим элементы этого множества так, чтобы их было удобно посчитать. Разложим элементы в виде некоторой прямоугольной таблицы. Например, пусть после такого разложения мы получили 30 рядов, в каждом из которых 10 элементов. Тогда мы можем точно сказать, сколько всего элементов было в изначальном множестве. Аналогично можно представить множество не в виде прямоугольной таблицы, а в виде прямоугольного параллелепипеда. Например, в основании лежит прямоугольник из какого-то количества элементов, получаем некоторое количество таких слоев. Тогда исходное число элементов множества можно представить в виде произведения трех чисел.

Эту процедуру можно представить иначе. Разобьем исходное множество, например, на 30 подмножеств. Каждое из этих подмножеств разбиваем еще, например, на 2. И т.д. до тех, пока мы не получим какое-то количество подмножеств с одинаковым количеством элементов.

Задача 3.

Имеются n различных палочек. Каждая из них разламывается на две неодинаковые части, короткую и длинную. Получившиеся $2n$ обломков перемешивают и наугад склеивают попарно в новые n палочек. Найти вероятность того, что каждая из новых палочек склеена из длинного и короткого обломка.

Данная задача имеет некоторую биологическую основу, если вместо палочек положить цепочки хромосом. Под действием радиации эти цепочки хромосом разрываются. В первом приближении можно считать, что каждая хромосома разварится на две части. Однако эти части неравноправны. В каждой хромосоме присутствует некоторый участок (центромера), который делает эту хромосому жизнеспособной. После разрыва хромосомы могут рекомбинироваться, однако клетка будет жизнеспособной, только если в новой хромосоме будет жизнеспособный участок. Пусть длинная часть содержит центромеру, а короткая – нет. Значит, мы ищем вероятность того, что новая хромосома будет жизнеспособна.

Решение. Рассмотрим частный случай данной задачи. Попробуем малое $n = 3$. Исходные палочки представим в виде

$$(A + a) + (B + b) + (C + c) \tag{2.16}$$

Отметим, что нам неважно, в каком порядке мы учтываем обломки. После разламывания образовалось множество

$$\{A, B, C, a, b, c\} \tag{2.17}$$

После склеивания получаем (примеры):

$$\begin{aligned} &(a + c) + (C + b) + (B + A) \\ &(B + c) + (A + a) + (C + b) \\ &(B + b) + (A + C) + (c + a) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь только средний вариант удовлетворяет условию задачи и влечет наступление рассматриваемого события.

Найдем N, попробовав разложить все элементарные исходы "по кучкам". Понятно, что какой бы элементарный исход мы не рассматривали, в нем обязательно будет присутствовать палочка с одной фиксированной буквой (например, всегда есть палочка с А). Партнеры у этой буквы могут быть разные.

Искусственно для удобства введем "старшинство" букв как A, B, C, a, b, c. В любом элементарном исходе есть "старшая" палочка с частью А. Теперь будем подбирать партнера этой А и образуем "кучки" по признаку, какой партнер присоединен к А. В первую кучку сложим все исходы, в которых есть палочка $(A + B)$, во вторую – все исходы с $(A + C)$ и т.д. Всего получится 5 кучек.

Возьмем любую из этих пяти кучек, например, $(A + C)$. Теперь рассмотрим остальные варианты. В остальных палочках этой кучки обязательно есть следующая "старшая" палочка с буквой В. Подбираем её вторую часть: это a, b или c, то есть 3 варианта (A,B,C уже заняты).

Значит, каждая из пяти кучек разбивается на 3 по тому, что присоединено к следующему старшему партнеру. Итак, на первом уровне у нас пять "кучек" , каждую из которых мы разделили еще на 3. Сколько исходов лежит в каждой из этих 15-ти кучек? Возьмем вариант $(B + b)$, тогда последняя палочка $(c + a)$ собирается единственным образом и мы имеем исход

$$\omega = (A + C) + (B + b) + (c + a) \tag{2.19}$$

Тогда общее количество вариантов равно

$$N = 5 \cdot 3 \cdot 1 \tag{2.20}$$

Таким образом, мы представили элементарные исходы в виде прямоугольного параллелепипеда, у которого в основании лежит прямоугольник 5×3, а высота – 1.

Если исходно больше палочек (а не три), то сомножителей будет больше и представление всех исходов в виде параллелепипеда будет неудобным. Для это рассмотрим граф (рис. 2.1). Итак, есть некоторая исходная ситуация. Она начинает ветвится, из вершины нулевого уровня появляется несколько ветвей (это количество вариантов что-то поменять в элементарном исходе). Каждую из полученных вершин первого уровня мы разделяем на новые ветки. Из каждой новой вершины отходит одинаковое количество ветвей. В итоге конечное число ветвей равно полному количеству исходов. Видно, что на каждом уровне графа на рис. 2.1 из вершины выходит одинаковое количество ветвей к следующему уровню.

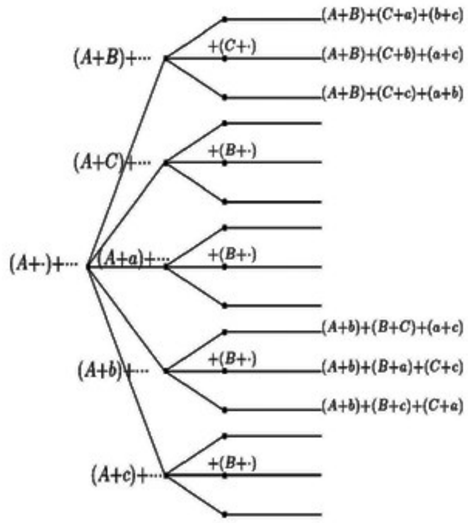

Рис. 2.1: Иллюстрация к объяснению.

Обобщим результат на случай произвольного n. Итак, известно, что изначально мы имеем $2n$ различных палочек. Значит, мы можем их пронумеровать. Отдельно пронумеруем длинные части (как старшие), а затем короткие. Возьмем самую старшую палочку и начнем подбирать к ней партнера. Это делается $(2n - 1)$ способом (всего $2n$ палочек, одну мы использовали). Далее мы откладываем два обломка, которые уже использовали и берем следующий по старшинству обломок и подбираем ему партнёра $(2n-3)$ способами (так как две части мы уже отложили, а один рассматриваем непосредственно). Далее аналогично получаем общее число элементарных исходов

$$N = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1 = (2n-1)!! \tag{2.21}$$

Рассчитаем число благоприятных исходов (к короткому подобран длинный). Пусть мы как-то упорядочили длинные и короткие обломки. Как бы мы не собирали новые палочки, обязательно будет палочка, в которой есть самая старшая буква. Тогда ей можно подобрать партнёра n способами (выбираем партнёра только из коротких обломков). Аналогично для палочки следующего старшинства подбираем партнёра $n-1$ способом (одна короткая палочка уже использована):

$$M = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n! \tag{2.22}$$

Ответ:

$$P = \frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{n}{2n-1}\cdot\frac{n-1}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1} \tag{2.23}$$

Задача 4.

Из колоды в 36 карт наугад выбирают три. Найти вероятность того, что это карты различных мастей.

Решение. Имеем общее число исходов

$$N = C_{36}^{2} \tag{2.24}$$

Очевидно, что в благоприятных исходах две карты одной масти ("двойка") и одна другой. Выясним, сколько вариантов такого набора. Структурируем кучу благоприятных исходов. Для M имеем

$$M = 4\cdot 3\cdot M_0 \tag{2.25}$$

где $4\cdot 3$ = число способов подобрать масти: каждому из 4-х способов выбрать "двойку" отвечают 3 способа выбрать карту другой масти, а M_0 = число способов проварьировать номиналы. То есть, сначала мы раскладываем все исходы на 4 кучки – в первой кучке будут две карты бубновой масти, во второй – пиковой масти и так далее. Далее мы рассматриваем каждую кучку по-отдельности. Разделим кучку по признаку масти третьей карты. Значит, каждую такую кучку мы разделили еще на три. Однако у каждой карты есть также достоинство, чему и соответствует M_0.

Когда считаем M_0, масти можно считать фиксированными, например, это две бубновые карты и одна пиковая:

$$M_0 = 9\cdot 8\cdot 9 \tag{2.26}$$

Значит, у нас 9 способов подобрать одну бубновую карту, 8 способов подобрать вторую бубновую карту и 9 способов подобрать пиковую карту. Но! этот ответ **неверный**. Мы увеличили количество исходов в два раза. Ранее мы посчитали общее число исходов, считая, что мы выбираем карты без учета порядка. Однако, в (2.26) мы выбираем бубновые карты с учетом порядка $A_9^2 = 9 \cdot 8$. На самом деле вместо этого должно быть $C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2}$.

Посмотрим на благоприятные исходы

$$\omega = \{Б, Б, П\} \tag{2.27}$$

Откуда берутся множители $9 \cdot 8$? Имеются 9 вариантов для Б, среди них есть вариант, например, бубновой семёрки Б = $Б_7$. Каждому из них отвечают 8 вариантов для Б, например, бубновой девятки Б = $Б_9$. Но также существует вариант: Б = $Б_9$ и Б = $Б_7$. Мы сочли их разными, а они дают один элементарный исход

$$\omega = \{Б_7, Б_9, П\} \tag{2.28}$$

Поэтому правильный ответ имеет вид

$$M_0 = C_9^2 \cdot 9 = \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 9 \tag{2.29}$$

Тогда

$$M = 4 \cdot 3 \cdot C_9^2 \cdot 9 \tag{2.30}$$

Отметим, что здесь нет множителя $\frac{1}{2}$, так как масти мы выбираем с учетом порядка (варианты 2 бубновая, 1 пиковая и 2 пиковые, 1 бубновая на самом деле дают разные результаты).

Тогда вероятность

$$P = \frac{M}{C_{36}^3} \tag{2.31}$$

Объяснение таблицы вероятностей.

Вернёмся к таблице 4.

число способов	*с учетом порядка*	*без учета порядка*
с возвращением	n^m	C_{n+m-1}^{n-1}
без возвращения	A_n^m	C_n^m

Таблица 3: Варианты выбора.

На идее, описанной выше, основаны числа, представленные в справочной таблице. Рассмотрим *размещение m различных предметов по n местам*. Если предметы различны, то их можно пронумеровать (можно отличить их друг от друга по какому-то признаку). Для первого предмета мы имеем n свободных мест, на которые можно его положить. Мы рассматриваем вариант *с возвращением*, значит, второй предмет мы можем положить на любое другое место или на то же, где уже лежит первый предмет. Значит, каждому из n вариантов положить первый предмет отвечает n вариантов положить второй предмет. Каждому из n^2 вариантов положить первый и второй предметы отвечает n вариантов положить третий предмет и т.д. В итоге получаем число вариантов

$$n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ раз}} \tag{2.32}$$

Пример: $n = 4$ места и $m = 2$ объекта A и B

$$\begin{array}{cccc}
\underline{|\substack{A\\B}|\;\;|\;\;|\;\;|} & \underline{|B|A|\;\;|\;\;|} & \underline{|B|\;\;|A|\;\;|} & \underline{|B|\;\;|\;\;|A|} \\
\underline{|A|B|\;\;|\;\;|} & \underline{|\;\;|\substack{A\\B}|\;\;|\;\;|} & \underline{|\;\;|B|A|\;\;|} & \underline{|\;\;|B|\;\;|A|} \\
\underline{|A|\;\;|B|\;\;|} & \underline{|\;\;|A|B|\;\;|} & \underline{|\;\;|\;\;|\substack{A\\B}|\;\;|} & \underline{|\;\;|\;\;|B|A|} \\
\underline{|A|\;\;|\;\;|B|} & \underline{|\;\;|A|\;\;|B|} & \underline{|\;\;|\;\;|A|B|} & \underline{|\;\;|\;\;|\;\;|\substack{A\\B}|}
\end{array}$$

Рис. 2.2: Размещение с возвращением с учетом порядка.

Количество размещений = $4 \cdot 4$.

Размещение m различных предметов по n местам без повторения места. Предметы различны, значит, их можно пронумеровать. Первый предмет можно положить n способами. Каждому из n способов положить первый предмет соответствует $n - 1$ способ положить второй предмет и далее аналогично

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n - (m-1)) \tag{2.33}$$

Пример: $n = 4$ места и $m = 2$ объекта A и B

$$\begin{array}{cccc}
\underline{|A|B|\;\;|\;\;|} & \underline{|B|A|\;\;|\;\;|} & \underline{|B|\;\;|A|\;\;|} & \underline{|B|\;\;|\;\;|A|} \\
\underline{|A|\;\;|B|\;\;|} & \underline{|\;\;|A|B|\;\;|} & \underline{|\;\;|B|A|\;\;|} & \underline{|\;\;|B|\;\;|A|} \\
\underline{|A|\;\;|\;\;|B|} & \underline{|\;\;|A|\;\;|B|} & \underline{|\;\;|\;\;|A|B|} & \underline{|\;\;|\;\;|B|A|}
\end{array}$$

Рис. 2.3: Размещение без возвращения с учетом порядка.

Количество размещений = $4 \cdot 3$ (начинается с n, а дальше идет столько множителей, чему равно m).

Семинар 3. Геометрическая вероятность.

Объяснение таблицы вероятностей.

Вернемся к объяснению таблицы вероятностей 4

число способов	*с учетом порядка*	*без учета порядка*
с возвращением	n^m	C_{n+m-1}^{n-1}
без возвращения	A_n^m	C_n^m

Таблица 4: Варианты выбора.

Выбор m объектов из n без возвращения без учета порядка выбора:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{A_n^m}{m!} \tag{3.1}$$

Объясним это указанное выражение. Заметим, что C_n^m меньше A_n^m в $m!$ раз.

Пример. $n = 4$, $m = 3$ Тогда мы имеем 4 объекта, из которых мы каким-то образом выбираем 3:

$$\{1,2,3,4\} \to \{\times,\times,\times\} \tag{3.2}$$

Учитываем порядок:

$$\langle 1,2,4\rangle \neq \langle 1,4,2\rangle \neq \langle 2,1,4\rangle \neq \langle 2,4,1\rangle \neq \langle 4,1,2\rangle \neq \langle 4,2,1\rangle \tag{3.3}$$

Всего $6 = 3!$ вариантов (количество перестановок трёх цифр).

Если же мы не учитываем порядок, то все эти шесть вариантов станут одним:

$$\langle 1,2,4\rangle = \langle 1,4,2\rangle = \langle 2,1,4\rangle = \langle 2,4,1\rangle = \langle 4,1,2\rangle = \langle 4,2,1\rangle = \{1,2,4\} \tag{3.4}$$

Получается, что каждые $6 = 3!$ исходов, которые мы раньше считали различными, теперь стали единым исходом. Понятно, что так будет происходить с любым способом выбора. Поэтому общее число исходов сократилось в $3!$ раза. В общем случае A_n^m вариантов с учетом порядка, $\frac{A_n^m}{m!} = C_n^m$ вариантов без учета порядка.

Теперь рассмотрим последнее число

$$C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m-1}^{n-1} \tag{3.5}$$

– *выбор без учета порядка с возвращением.*

Чтобы было понятнее, рассмотрим эту ситуацию не в терминах выбора, а в терминах размещения. Попробуем получить этот результат как в прошлом случае.

Пример: рассмотрим размещение $m = 3$ неразличимых объектов (этому соответствует отсутствие учёта порядка) по $n = 4$ местам.

Когда мы размещаем объекты, например, как на рис. 3.1, то это отвечает $3! = 6$ разным размещениям различимых объектов. Поясним это. Все шарики лежат в разных ящиках, что соответствует выбору без возвращения. Понятно, что когда шарики одинаковые, это один способ размещения. Но если мы начнем различать эти шарики, то возникнет 3! различных перестановок этих шариков.

Рис. 3.1: Иллюстрация к объяснению.

Когда мы размещаем объекты, например, как то это отвечает 3 разным размещениям различимых объектов. Здесь мы учитываем тот факт, что возможно размещение с возвращением.

Рис. 3.2: Иллюстрация к объяснению.

Когда мы размещаем объекты, например, как на рис. 3.3, то это отвечает 1 размещению различимых объектов.

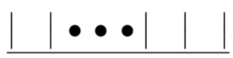

Рис. 3.3: Иллюстрация к объяснению.

Значит, в отличие от предыдущего случая, у нас не получается равномерной редукции способов размещения.

Идея: уберем нижнюю черту и зафиксируем крайние вертикальные палочки (рис. 3.4):

Рис. 3.4: Иллюстрация к объяснению.

Комбинации различаются взаимным расположением $n - 1$ внутренней палочки и m точек, то есть тем, на какие из $n - 1 + m$ возможных мест поставлены m точек (или, что то же самое, $n - 1$ внутренняя палочка). Поэтому

$$C^m_{n+m-1} = C^{n-1}_{n+m-1} \tag{3.6}$$

Примеры использования комбинаторики в физике.

Будем считать, что размещаемые объекты – это частицы, а ящики – энергетические состояния. Тогда получим модель, которая показывает, как эти частицы заселяют энергетические состояния. Тогда возникает понятие статистики частиц – механизм, по которому частицы занимают свои состояния.

Статистика Максвелла-Больцмана: размещение m классических (различимых) частиц по n энергетическим состояниям (n^m вариантов выбора).

Статистика Бозе-Эйнштейна: размещение m квантовых (неразличимых) частиц по n энергетическим состояниям (C_{n+m-1}^{n-1} вариантов).

Статистика Ферми-Дирака: размещение m квантовых (неразличимых) частиц по n энергетическим состояниями с запретом Паули (C_n^m вариантов).

Сам механизм размещения частиц определяет характеристики системы (поведение энтропии, полную энергию и т.д.). Более того, в статистике Бозе-Эйнштейна наблюдается Бозе-Эйнштейновский конденсат. Мы не запрещаем частицам находиться на любом уровне, поэтому система стремится к низшему энергетическому уровню, в результате чего на этом уровне оказывается большинство частиц.

Также комбинаторика используется для подсчета количество подмножеств $n-$элементного множества

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \tag{3.7}$$

Количество таких подмножеств равно

$$N = 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n \tag{3.8}$$

Этот ответ мы можем получить несколькими способами. Например, мы можем сказать, что есть n элементарных исходов, и каждый исход мы можем включить или не включить в подмножество. Тогда общее количество вариантов равно 2^n. Также мы можем использовать C_n^k – количество способов подобрать $k-$элементное подмножество.Чтобы найти, сколько всего вариантов собрать подмножества, нужно просуммировать эти C_n^k.

Замечание. Если выбор осуществляется без возвращения, то при подсчёте вероятности можно заменить модель, не учитывающую порядок выбора, на модель с порядком выбора, так как

$$P = \frac{M}{N} = \frac{M \cdot m!}{N \cdot m!} \tag{3.9}$$

Геометрическая вероятность.

Геометрическая вероятность – это вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, в котором

- каждый элементарный исход ω есть точка, а Ω – некоторое множество в $n-$мерном пространстве, причём его объем конечен

$$0 < V(\Omega) < \infty$$
$$V(\Omega) = \int\limits_{\Omega} dx \tag{3.10}$$

где интеграл $n-$кратный, а dx – элементарный объем в $n-$мерном пространстве.

- множество событий $\mathcal{F}$ есть множество подмножеств внутри области Ω, у которыз существует объем (возможно, равный нулю)
- вероятность определятся как
$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} \tag{3.11}$$

Мы можем за объем принимать массу. Тогда из (3.10) следует, что мы рассматриваем тело постоянной массы (нет весовой функции, значит, объем и различаются на постоянный множитель – плотность).

Для $n = 1$ мы пишем $L(\cdot)$ (длина), для $n = 2$ мы пишем $S(\cdot)$ (площадь).

Видно, что вероятность $P(A)$ не зависит от положения множества A в Ω (однородность относительно сдвигов) и вероятность одной точки (одного равного исхода) $P(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$. Значит, все элементарные исходы равновероятны, так как плотность однородна (нет предпочтительных элементарных исходов, вокруг которых что-то реализуется чаще, чем вокруг других).

Таким образом, для решения задач в рамках данной модели нужно будет рассчитывать геометрические размеры областей.

Алгоритм решения задач по геометрической вероятности.

Задачи по геометрической вероятности подвергаются алгоритмизации. Опишем некоторые аспекты данных задач.

Далее в задачах "точка брошена\выбрана **наугад** в области Ω"означает, что вероятность попадания в множество $A \subset \Omega$ подчиняется законам геометрической вероятности

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} \tag{3.12}$$

Два или несколько числовых параметров $x_1, \ldots, x_s$ выбираются **независимо** друг от друга из областей $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$, если для $A_1 \subset \Omega_1, \ldots, A_n \subset \Omega_s$

$$P\left(\{x_1 \in A_1\} \cap \ldots \cap \{x_s \in A_s\}\right) = P\left(x_1 \in A_1\right) \times \ldots \times P\left(x_s \in A_s\right) \tag{3.13}$$

то есть вероятность пересечения указанных событий равна произведению вероятностей отдельных событий.

Рекомендуемый алгоритм решения:

1. Найти описание случайного эксперимента и тот параметр, который выбирается *наугад*: это параметр есть ω, а множество Ω – это все возможные его значения.

   (a) Если «*точка выбирается наугад в области*», то ω = точка, Ω = область.

   (b) Если «*числовой параметр x выбирается наугад на отрезке* $[a, b]$», то точка $\omega = x$ и $\Omega = [a, b]$.

   (c) Если «*числовые параметры $x_1, \ldots, x_s$ выбираются наугад на отрезках* $[a_1, b_1], \ldots, [a_s, b_s]$», то множество элементарных исходов есть прямое произведение этих отрезков

   $$\Omega = [a_1, b_1] \otimes \ldots \otimes [a_s, b_s] \tag{3.14}$$

   то есть прямоугольник в случае $n = 2$, прямоугольный параллелепипед в случае $n = 3$ и т.д.

   Геометрия элементарного исхода привязывается к тому, что выбирается наугад!

2. Представить заданное событие как подобласть внутри построенного Ω, обычно ограниченную некими неравенствами для x_j.

3. Найти $V(\Omega)$ и $V(A)$ (или $S(\Omega)$ и $S(A)$, $L(\Omega)$ и $L(A)$ в зависимости от размерности ω) из «школьной» геометрии или интегрированием.

Задача 1.

Точку наугад бросают в круг радиуса $R = 1$. Найти вероятность того, что она попадёт во внутренний концентрический круг радиуса $r = \frac{1}{2}$.

Решение.

Точку бросают наугад в круг, значит Ω = внешний круг рис. 3.5 радиуса $R = 1$:

$$S(\Omega) = \pi R^1 \tag{3.15}$$

Множество исходов, влекущих указанное событие А, – внутренний круг (рис. 3.5),

$$S(A) = \pi r^2 \tag{3.16}$$

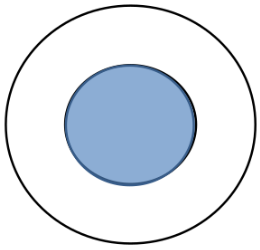

Рис. 3.5: Иллюстрация к объяснению.

Тогда

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{4} \tag{3.17}$$

Задача 2.

Точку выбирают случайным образом в круге радиуса $R = 1$ так, что её полярные координаты ρ, φ можно считать выбранными независимо друг от друга наугад из интервалов $[0, R]$ и $[0, 2\pi)$ соответственно. Найти вероятность того, что она попадёт во внутренний концентрический круг радиуса $r = \frac{1}{2}$.

Решение. Отметим, что в сравнении с предыдущей задачей, мы имеем другой случайный эксперимент. Поэтому для этих задач будут разные ответы.

В данном случае элементарный исход – это точка с двумя координатами

$$\omega = \langle \rho, \varphi \rangle \tag{3.18}$$

при этом с точки зрения Ω мы считаем, что это декартовы координаты.

Тогда множество элементарных исходов – это прямоугольник (рис. 3.6):

$$\Omega = \{\rho \in [0, R]\,, \varphi \in [0, 2\pi)\} \tag{3.19}$$

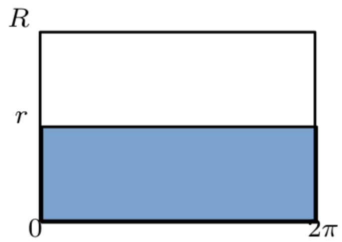

Рис. 3.6: Иллюстрация к объяснению.

То есть, ρ и φ стали декартовыми координатами элементарного исхода. Они меняются независимо друг от друга, поэтому в качестве Ω имеем декартово произведение отрезков (из условия независимости выбора).

Выделим множество (рассматриваемое событие)

$$A = \{\rho \in [0, r]\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi)\} \tag{3.20}$$

Тогда

$$P\left(A\right) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2\pi \cdot r}{2\pi \cdot R} = \frac{1}{2} \tag{3.21}$$

Задача 3.

Пассажир может уехать с остановки на любом из двух автобусов, № 1 или № 2. Он садится в первый из подошедших автобусов. Будем считать, что время ожидания автобуса № 1 выбирается наугад из отрезка $[0, 1]$, а время ожидания автобуса № 2 выбирается независимо от времени ожидания автобуса № 1 наугад из отрезка $[0, 2]$. Найти отношение вероятности того, что пассажир уедет на автобусе № 1, к вероятности того, что он уедет на автобусе № 2.

Решение. Пусть τ_1 и τ_2 – времена ожидания автобусов № 1 и № 2. Из условия задачи известно, что они выбираются наугад.

Тогда элементарный исход характеризуется двумя числовыми параметрами (рис. 3.7)

$$\omega = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \tag{3.22}$$

Тогда множество элементарных исходов – прямоугольник (рис. 3.7)

$$\Omega = \{\tau_1 \in [0,1], \tau_2 \in [0,2]\} \tag{3.23}$$

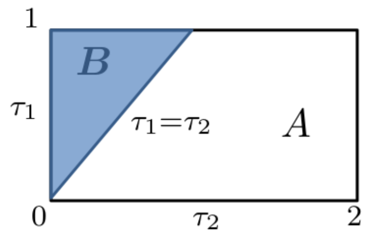

Рис. 3.7: Иллюстрация к объяснению.

Рассмотрим два события (они изображены на рис. 3.7)

$$\begin{aligned} A &= \{\tau_1 < \tau_2\} \\ B &= \{\tau_1 > \tau_2\} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Первое событие соответствует тому, что пассажир уехал на первом автобусе, а второе событие – на втором автобусе. Отметим, что

$$P(\tau_1 = \tau_2) = 0 \tag{3.25}$$

поэтому данное событие можно не рассматривать (вероятность попадания точки в точности на прямую, разделяющую эти области, равна нулю).

Найдём

$$P(B) = \frac{S(B)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 2} = \frac{1}{4} \tag{3.26}$$

и

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{S(\Omega) - S(B)}{S(\Omega)} = \frac{3}{4} \tag{3.27}$$

Здесь мы учли, что площадь A – дополнительная к площади B.

Итак, получаем, что пассажир будет уезжать на первом автобусе в три раза чаще, чем на втором

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{1} \tag{3.28}$$

Задача 4.

На плоскость, разрисованную параллельными линиями, отстоящими на расстояние $2d$ друг от друга, случайным образом бросают иглу длины $2l < 2d$. Найти вероятность того, что игла пересечёт линию. Из-за того, что игла короткая, она не может пересечь две линии.

Решение. Здесь не указано, что выбрано наугад, поэтому самостоятельно параметризуем случайный бросок иглы.

Введём ось x, перпендикулярную нарисованным прямым. Центр иглы обязательно попадает в полосу между двумя линиями (рис. 3.8, игла обозначена красным, ее центр – точкой), считаем, что уровень $x = 0$ отвечает середине этой полосы.

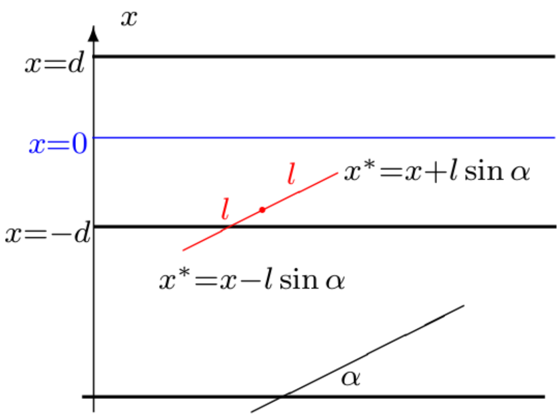

Рис. 3.8: Иллюстрация к объяснению.

Зададим элементарный исход параметрами x = координата центра иглы вдоль выбранной оси, α = угол между прямыми и прямой, вдоль которой лежит игла. Отсюда получаем множество допустимых значений x и α

$$\Omega = \{-d \leqslant x \leqslant d, 0 \leqslant \alpha < \pi\} \tag{3.29}$$

Мы считаем, что x и α выбираются наугад и независимо, соответственно, получаем площадь области как площадь прямоугольника (рис. 3.9)

$$S(\Omega) = 2d \cdot \pi \tag{3.30}$$

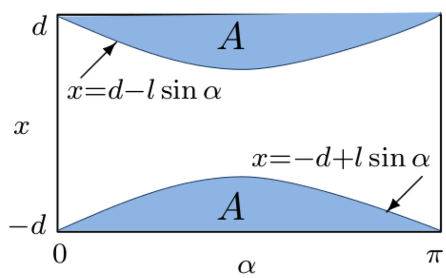

Рис. 3.9: Иллюстрация к объяснению.

Рассмотрим событие A = игла пересечёт линию и событие $\overline{A}$ = игла не пересечёт линию. Найдем координаты концов иглы и получим условие не попадания иглы на прямые:

$$\overline{A} \Leftrightarrow \begin{cases} x + l\sin\alpha < d \\ x - l\sin\alpha > -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < d - l\sin\alpha \\ x > -d + l\sin\alpha \end{cases} \tag{3.31}$$

Изобразим эти области на рис. 3.9 (незакрашенная фигура). Теперь нам нужно найти площадь закрашенной фигуры.

Найдем площадь интегрированием

$$S(A) = \iint\limits_{(x,\alpha)\in A} dx d\alpha = 2 \cdot \iint\limits_{\substack{0 \leqslant \alpha < \pi \\ -d < x < -d + l\sin\alpha}} dx d\alpha = 2 \cdot \int\limits_0^\pi l \sin\alpha d\alpha = 4l \tag{3.32}$$

Тогда

$$P(A) = \frac{4l}{2\pi d} = \frac{2l}{\pi d} \tag{3.33}$$

Семинар 4. Элементы теории множеств.

Задача 1 (геометрическая вероятность).

Палочка длины 1 ломается в месте, выбранном *наугад*. После этого более короткую часть выбрасывают, а длинную ломают в месте, выбранном *наугад* и снова отбрасывают более короткую часть. Найти вероятность того, что после второго разлома более длинный обломок будет иметь длину больше 1/2.

Решение. 1. Итак, рассматриваемый элементарный исход –

$$\omega = \langle x_1, x_2 \rangle \tag{4.1}$$

где x_1 и x_2 – координаты первого и второго разлома.

2. Определим множество всех возможных исходов в данной задаче. Значит, нам нужно определить диапазон координат x_1 и x_2. Понятно, что

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \tag{4.2}$$

для x_2 возможно два варианта:

- $x_1 > \frac{1}{2}$. Тогда $0 \leqslant x_2 \leqslant x_1$.
- $x_1 < \frac{1}{2}$. Тогда $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1$.

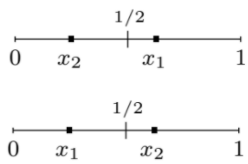

Рис. 4.1: Иллюстрация к объяснению.

Изобразим точку (4.1) на плоскости в декартовых координатах (рис. 4.2).

Таким образом, множество элементарных исходов состоит из двух частей. Отметим, что параметры элементарного исхода зависимы друг от друга.

3. Теперь нужно выразить через x_1 и x_2 событие, рассматриваемое в задаче. Рассмотрим область (закрашенная область на рис. 4.3)

$$\Omega_1 = \left\{ \frac{1}{2} < x_1 < 1, \;\; 0 < x_2 < x_1 \right\} \tag{4.3}$$

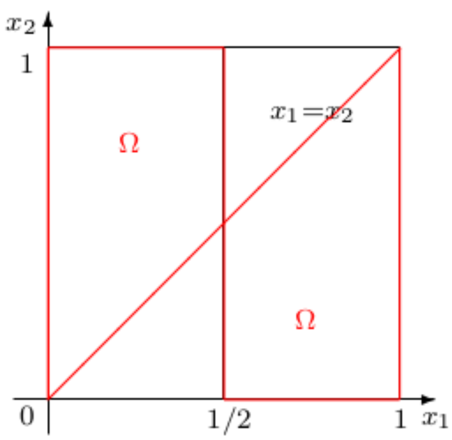

Рис. 4.2: Иллюстрация к объяснению.

Отметим, что здесь не так важно, какие неравенства мы пишем – строгие или нет, так как события $x_1 = a = const$ выполняются с вероятностью $P(x_1 = a) = 0$.

Итак, рассмотрим Ω_1. Здесь тоже возможно две ситуации для координат x_1 и x_2. Обозначим через ξ длину второго длинного обломка. Тогда

$$\xi = \begin{cases} x_2, & \text{если } x_2 > x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2, & \text{если } x_2 < x_1 - x_2 \end{cases} \tag{4.4}$$

Таким образом, мы задаём функцию от элементарного исхода

$$\xi = \xi(x_1, x_2) = \xi(\omega) \tag{4.5}$$

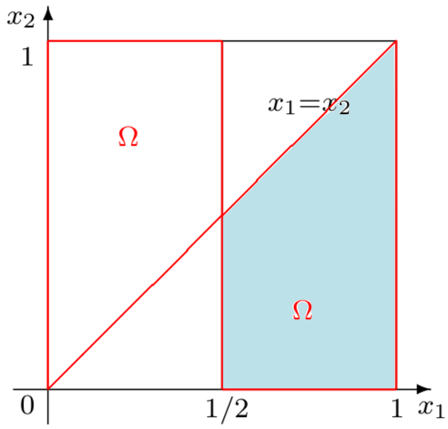

Рис. 4.3: Иллюстрация к объяснению.

Рассмотрим событие

$$A = \left\{\xi < \frac{1}{2}\right\} \tag{4.6}$$

Тогда, учитывая введенную переменную (4.4), можем переписать это событие в виде

$$A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_2 < \frac{1}{2}, & \text{если } 2x_2 > x_1 \\ x_1 - x_2 < \frac{1}{2}, & \text{если } 2x_2 < x_1 \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Теперь нужно нарисовать область A внутри Ω_1 и посчитать площади. Область, которую выделяет первое неравенство в (4.7), обозначим A_2, а для второго неравенства – A_2 (рис. 4.4). Тогда получаем, что событие A может быть представлено в виде суммы двух несовместных событий

$$A = A_1 + A_2 \tag{4.8}$$

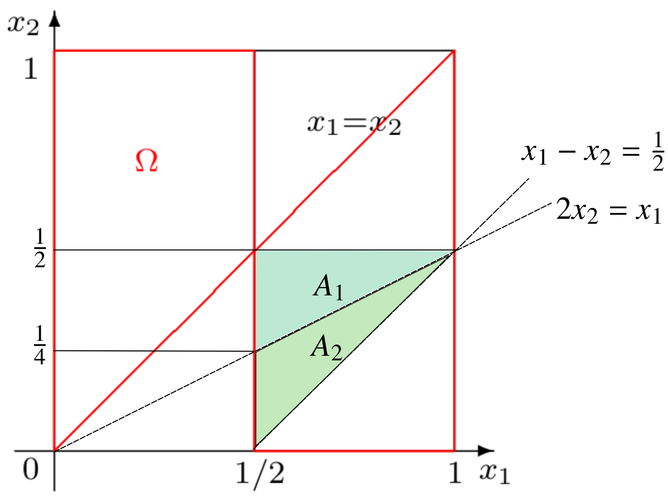

Рис. 4.4: Иллюстрация к объяснению.

Найдем площади этих подобластей

$$S(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \tag{4.9}$$

$$S(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \tag{4.10}$$

Тогда

$$S(A) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \tag{4.11}$$

Теперь найдем площадь Ω_1:

$$S(\Omega_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \tag{4.12}$$

Мы посчитали эту площадь как площадь всего прямоугольника минус площадь незакрашенного треугольника (рис. 4.3).

Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega_1)} = \frac{1}{3} \tag{4.13}$$

Отметим, что мы рассмотрели только половину задачи. для рассмотрения второй части задачи нам нужно рассмотреть вторую часть области $\Omega - \Omega_2$. В ней аналогично области A выделяется событие B. Эта задача симметричная рассмотренной, вероятность наступления события B будет равна $\frac{1}{2}$. Поэтому искомая вероятность останется равной $\frac{1}{2}$. Значит, если обозначить за C – полное рассматриваемое событие (A только его половина), то его вероятность

$$P(C) = \frac{2 \cdot S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2 \cdot S(A)}{2 \cdot S(\Omega_1)} = \frac{1}{3} \tag{4.14}$$

Отметим, что заданная выше функция от элементарного исхода ξ в сущности есть случайная величина. По сути мы нашли значение функции распределения этой случайной величины в точке $\frac{1}{2}$.

Теория множеств.

Соглашение: используем знак + вместо $\cap$, если объединяемые множества не пересекаются:

$$\text{если } A \cap B = \emptyset, \quad \text{то } A + B \equiv A \cup B \tag{4.15}$$

То есть, если у множеств A и B нет общих элементарных исходов, то вместо объединения можно писать знак +. Это сделано для того, чтобы аксиома счетной аддитивности вероятности имела удобный вид.

Далее мы рассмотрим некоторые задачи, решить которые можно не прибегая к изображению множеств, а используя только свойства операций над множествами.

Задача 2.

Пусть есть система "раздувающихся"множеств

$$\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset \Omega \tag{4.16}$$

Обозначим разность между двумя последовательными множествами

$$B_1 = A_1, \quad B_{k+1} = A_{k+1} \backslash A_k \overset{def}{=} A_{k+1} \cap \overline{A}_k \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.17}$$

Таким образом, по определению B_k определяется теми элементарными исходами, которые принадлежат A_k, но не принадлежат A_{k-1}. На рис. 4.5 B_k обозначено зеленым. При $k = 1$ получаем самое маленькое множество A_1.

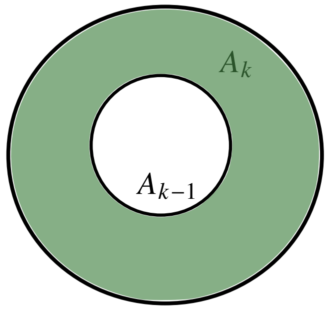

Рис. 4.5: Множество B_k.

Показать, что полученные множества не пересекаются

$$B_i \cap B_j = \varnothing \text{ при } k \neq j \tag{4.18}$$

и показать, что множество A_k можно представить в виде суммы непересекающихся множеств

$$A_{k+1} = A_k + B_{k+1} \tag{4.19}$$

Решение.

1. Рассмотрим два множества: B_i и B_j, $i, j = \overline{1, n}$. Операция пересечения коммутативна, поэтому нам неважно, какой номер больше. Поэтому, без ограничения общности можно считать, что $j > i$. По свойствам операций (если в цепочке все операции одинаковы, то множества при этих операциях можно переставлять в любом порядке)

$$B_i \cap B_j \overset{def}{=} \left(A_i \cap \overline{A}_{i-1}\right) \cap \left(A_j \cap \overline{A}_{j-1}\right) \tag{4.20}$$

Учтем, что так как $j > i$,

$$A_i \subset A_j \tag{4.21}$$

Это равносильно обратному включению для дополнений

$$\overline{A}_i \supset \overline{A}_j \tag{4.22}$$

Тогда

$$B_i \cap B_j = A_i \cap \overline{A}_{j-1} \cap \overline{A}_{i-1} \cap A_j \tag{4.23}$$

При этом

$$A_i \cap \overline{A}_{j-1} \subset A_j \cap \overline{A}_{j-1} \tag{4.24}$$

Отметим, что $j-1 \geqslant i$, поэтому

$$A_{j-1} \supset A_j \quad \Leftrightarrow \overline{A}_{j-1} \subset \overline{A}_j \tag{4.25}$$

$$B_k \cap B_j = A_j \cap \overline{A}_{k-1} \tag{4.26}$$

Отметим, что так как $k < j$, имеет место включение

$$\overline{A}_{k-1} \subset \overline{A}_j \tag{4.27}$$

Поэтому получаем некоторую монотонность включения, так как по пересечению включение сохраняется (переносим знак включения из (4.24) на (4.23))

$$B_i \cap B_j = A_i \cap \overline{A}_{j-1} \subset \underbrace{A_i \cap \overline{A}_i}_{=\varnothing} = \varnothing \tag{4.28}$$

Отсюда получаем

$$B_k \cap B_j = \varnothing \tag{4.29}$$

2. Докажем равенство суммы

$$A_{j+1} = B_{j+1} + A_j \tag{4.30}$$

Во-первых, обоснуем знак $'+'$, то есть докажем, что множества при знаке + не имеют общих элементарных исходов. Рассмотрим пересечение

$$B_{j+1} \cap A_j = \left(A_{j+1} \cap \overline{A}_j\right) \cap A_j = A_{j+1} \cap \underbrace{\left(\overline{A}_j \cap A_j\right)}_{=\varnothing} = A_{j+1} \cap \varnothing = \varnothing \tag{4.31}$$

Теперь покажем, что объединение A_j и B_{j+1} дает A_{j+1}. Воспользуемся дистрибутивным законом

$$B_{j+1} \cup A_j = \left(A_{j+1} \cap \overline{A}_j\right) \cap A_j = \underbrace{\left(A_{j+1} \cup A_j\right)}_{=A_{j+1},\ A_j \subset A_{j+1}} \cap \underbrace{\left(\overline{A}_j \cap A_j\right)}_{=\Omega} = A_{j+1} \cap \Omega = A_{j+1} \tag{4.32}$$

Задача 3.

Пусть множество элементарных исходов состоит из пяти элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, в нем два подмножества $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Найти алгебру подмножеств, содержащую A и B, и состоящую из 8 подмножеств.

Замечание. Отметим, что всего подмножеств у рассматриваемого множества 2^5 штук.

Решение. По определению $\mathcal{F}$ – **алгебра**, если выполнено два условия

- $A \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{F}$

то есть нам нужно найти систему подмножеств, из которой не выводят операции дополнения и объединения. Отметим, что из указанных свойств следует, что

$$\varnothing, \Omega \in \mathcal{F}, \quad A \cap B \in \mathcal{F}, \quad \text{и т.д.} \tag{4.33}$$

Действуем по определению: Ω и $\varnothing$ принадлежат любой алгебре, множества A, B – по условию. Далее включаем в $\mathcal{F}$ множества

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{4, 5\} \\ \overline{B} &= \{1, 2\} \end{aligned} \tag{4.34}$$

А также их объединение

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\} \tag{4.35}$$

Раз мы включаем некоторое новое множество, нам нужно включить также его дополнение (чтобы выполнялось определение алгебры):

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B = \{3\} \tag{4.36}$$

Замечаем, что на этом можно остановиться, мы получили алгебру

$$\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \varnothing, \{1, 2, 3, \}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{3\}\} \tag{4.37}$$

Можно проверить, что все парные объединения элементов $\mathcal{F}$ входят в $\mathcal{F}$, значит, мы действительно получили алгебру.

Отметим, что полученная алгебра является минимальной для указанного множества элементарных исходов и событий A и B.

Аксиомы вероятности.

(Непустая) система $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω называется ***сигма-алгеброй*** подмножеств, если

$$\begin{gathered} A \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathcal{F} \\ A, B \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{F} \end{gathered} \tag{4.38}$$

и наложено дополнительное условие на счетные объединения

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \tag{4.39}$$

Рассмотрим **аксиомы вероятности**:

- вероятность $P(\cdot)$ задана на сигма-алгебре $\mathcal{F}$
- вероятность неотрицательна: $P(A) \geqslant_0$ для любого события $A \in \mathcal{F}$
- имеет место счетная аддитивность вероятности: вероятность суммы несовместных событий $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} : A_i \neq A_j$ при $i \neq j$

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \tag{4.40}$$

- имеет место нормировка вероятности

$$P(\Omega) = 1 \tag{4.41}$$

Некоторые **следствия:**

- вероятность пустого множества
$$P(\varnothing) = 0 \tag{4.42}$$
- вероятность конечной суммы есть сумма вероятностей (свойство конечной аддитивности вероятности)

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \tag{4.43}$$

- Монотонность вероятности

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leqslant P(B) \tag{4.44}$$

- вероятность дополнения
$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) \tag{4.45}$$

Утверждение. Справедлива следующая формула

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{4.46}$$

Доказательство.

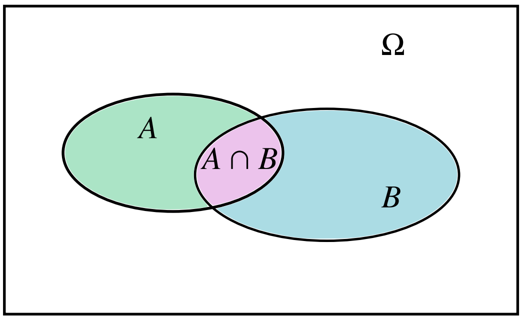

Рис. 4.6: Иллюстрация к объяснению.

Представим указанные множества на рис. 4.6. Отсюда видно, что объединение $A \cap B$ может быть представлено в виде трех непересекающихся множеств:

$$A \cup B = (A \backslash B) + (B \backslash A) + (A \cap B) \tag{4.47}$$

Это можно доказать более строго, используя свойства операций над множествами. Однако это также можно рассмотреть с другой точки зрения: событие $A \cup B$ – это событие, заключающееся в том, что произошло A или B. Это означает, что произошло A, но не произошло B, либо произошло B, но не произошло A, либо они произошли вместе. Отметим также, что каждое из множеств также распадается на части

$$A = (A \backslash B) + (A \cap B) \tag{4.48}$$

(A происходит тогда, когда происходит A, но не происходит B, либо когда оно происходит вместе с B).

$$B = (B \backslash A) + (A \cap B) \tag{4.49}$$

Тогда для вероятностей указанных множеств получаем

$$P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A) + P(A \cap B) \tag{4.50}$$

$$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B) \tag{4.51}$$

$$P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B) \tag{4.52}$$

Выразим из (4.51) $P(A \backslash B)$, а из (4.52) – $P(B \backslash A)$ и подставим эти выражения в (4.50). Получим

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \tag{4.53}$$

Утверждение доказано.

Замечание. Эту формулу можно обобщить на случай трех множеств. Изобразим три множества на рис. 4.7 и составим формулу для объединения множеств

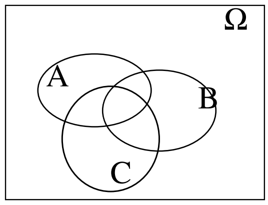

Рис. 4.7: Иллюстрация к замечанию.

$$P\left(A \cup B \cup C\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) + P\left(C\right) - P\left(A \cap B\right) - P\left(A \cap C\right) - P\left(B \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap C\right) \tag{4.54}$$

Применим рассмотренные свойства вероятности к алгебре изд предыдущей задачи.

Задача 4.

Пусть множество элементарных исходов имеет вид

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\} \tag{4.55}$$

Даны события

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{3, 4, 5\} \end{aligned} \tag{4.56}$$

причем их вероятности имеют вид

$$\begin{aligned} P\left(A\right) &= \tfrac{2}{5} \\ P\left(B\right) &= \tfrac{4}{5} \end{aligned} \tag{4.57}$$

Найти вероятности всех событий в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\mathcal{F}$ – алгебра подмножеств Ω:

$$\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \varnothing, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{3\}\} \tag{4.58}$$

Решение. Посчитаем вероятности каждого элемента алгебры

$$P\left(\varnothing\right) = \varnothing \tag{4.59}$$

$$P\left\{1, 2, 3, 4, 5\right\} = 1 \tag{4.60}$$

$$P\left\{1, 2, 3\right\} = \frac{2}{5} \tag{4.61}$$

$$P\left(3, 4, 5\right) = \frac{4}{5} \tag{4.62}$$

$$P\{4,5\} = P\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{5} \tag{4.63}$$

$$P\{1,2\} = P\left(\overline{B}\right) = \frac{1}{5} \tag{4.64}$$

$$P\{1,2,4,5\} = P\{1,2\} + P\{4,5\} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \tag{4.65}$$

$$P\{3\} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \tag{4.66}$$

Эту вероятность можно было посчитать иначе:

$$P\{3\} = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5} \tag{4.67}$$

Задача 5.

Доказать, что если

$$(A \cap B \cap C) \subset M \tag{4.68}$$

то

$$P(M) \geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2 \tag{4.69}$$

Решение. Так как есть включение, получаем, что имеет место (следствие монотонности вероятности)

$$P(M) \geqslant P(A \cap B \cap C) \tag{4.70}$$

Для вероятности пересечения трех множеств запишем

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A \cap B) + P(C) - \underbrace{P((A \cap B) \cup C)}_{<1} \geqslant P(A \cap B) + P(C) - 1 = \\ &= P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cup B)}_{\leqslant 1} + P(C) - 1 \geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Семинар 5. Распределения случайных величин.

Распределение случайной величины.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – некоторое вероятностное пространство. **Случайной величиной** (с. в.) на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называется функционал $\xi(\cdot) : \ \Omega \to \mathbb{R}$, такой что

$$\forall x \ \ \exists P\left(\xi < x\right) \overset{def}{=} F(x) \tag{5.1}$$

где $F(\cdot)$ – **функция распределения** случайной величины.

Замечание. Как правило, рассматриваемые случайные величины отождествляются с их функциями распределения.

Перед тем, как решать задачу, стоит провести исследование задачи.

1. Определить множество X значений случайной величины

   (a) если X ***конечно или счётно***:

   $$X = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad n \leqslant \infty \tag{5.2}$$

   то ξ имеет *дискретное распределение*, и мы ищем *закон распределения*

   $$P\left(\xi = x_k\right) = p_k, \quad k = \overline{1, n} \tag{5.3}$$

   Причем они подчиняются условию нормировки

   $$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \tag{5.4}$$

   (b) если X ***несчетно*** (отрезок, прямая и т.д.) или если мы не можем ничего сказать про множество X, то ищем функцию распределения

   $$F(x) = P\left(\xi < x\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

   При этом, если

   $$a \leqslant \xi(\omega) \leqslant b \quad \forall \omega \tag{5.6}$$

   то

   $$\begin{cases} F(x) = 0 \ \text{ при } \ x \leqslant a \\ F(x) = 1 \ \text{ при } \ x > b \end{cases} \tag{5.7}$$

   (неравенство $x \leqslant a$ нестрогое, так как учитываем непрерывность слева функции распределения).

2. В случае несчётного множества проверяем функцию распределения $F(\cdot)$ на непрерывность.

   (a) Если $F(\cdot)$ непрерывна $\forall x$, то ξ имеет *абсолютно непрерывное распределение*. Тогда ищем
   $$p(x) = F'(x) \tag{5.8}$$
   в тех точках, где существует производная $F'(x)$. Функция $p(\cdot)$ называется **плотностью вероятности**.

   (b) Если $F(\cdot)$ не непрерывна, то ответ – $F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 1.

В купейный вагон с 36 местами продали три билета. Пусть ξ = количество купе, в которые продан хотя бы один билет. Найти распределение случайной величины ξ.

Решение. Определим, какие значения может принимать данная случайная величина. Всего было продано три билета, поэтому ξ может принимать три значения

$$\xi = 1, 2, 3 \tag{5.9}$$

Таким образом, случайная величина имеет дискретное распределение, поэтому в качестве ответа на вопрос нам нужно найти

$$P(\xi = k) \overset{?}{=} p_k, \quad k = 1, 2, 3 \tag{5.10}$$

Отметим, что случайный эксперимент описывается классической вероятностью

$$p_k = \frac{M_k}{N} \tag{5.11}$$

где M_k – число исходов, которые влекут событие $\xi = k$, N – общее число исходов эксперимента.

Найдем количество выбрать 3 места из всех 36

$$N = C_{36}^3 \tag{5.12}$$

Теперь посчитаем число исходов, соответствующих событию "все в одном купе". Само купе можно выбрать 9-ю способами. В этом купе есть C_4^3 способов рассадить 3 человек на 4 места. Поэтому

$$M_1 = 9 \cdot C_4^3 \tag{5.13}$$

Теперь рассмотрим ситуацию, в которой два человека сидят в одном купе, а третий –

в каком-то другом купе. Первое купе можно выбрать 9-ю способами, а второе – 9-ю способами.

$$M_2 = 9 \cdot 8 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1 \tag{5.14}$$

Рассмотрим ситуацию, в которой все три человека сидя в разных купе. Здесь, в отличие от предыдущей ситуации, порядок выбора каждого купе не важен, поэтому количество вариантов выбора купе равно C_9^3, а не $9 \cdot 8 \cdot 7$. Для каждого купе число способов рассадить людей равно C_4^1

$$M_3 = C_9^3 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \tag{5.15}$$

Проверим, что выполняется равенство

$$M_1 + M_2 + M_3 = N \tag{5.16}$$

Задача 2.

Монету бросают до тех пор, пока она два раза подряд не выпадет одной стороной, после этого бросания прекращают. Пусть случайная величина ξ равна количеству бросаний. Найти распределение случайной величины ξ.

Решение. Отметим, что здесь мы имеем дело с дискретным множеством элементарных исходов, причем количество элементарных исходов счётно (теоретически монету можно бросать бесконечно долго). Счётное количество исходов гарантирует, что события не равновероятны (так как сумма всех элементарных исходов должна быть равна 1). Значит, мы не можем пользоваться моделью классической вероятности. Значит, модель нужно задать отдельно.

Считаем, что любой элементарный исход ω с n бросаниями имеет вероятность

$$P(\omega) = \frac{1}{2^n}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{5.17}$$

Это означает, что когда у нас фиксировано количество бросаний, получаем классическую вероятность: нас устраивает один результат из 2^n возможных. Если же n проходит множество всех натуральных чисел, начиная с 2, то получаем множество всех элементарных исходов.

На данном вероятностном пространстве зададим случайную величину ξ = число бросаний. Итак, нам нужно найти распределение этой случайной величины.

Определим, какие значения может принимать случайная величина. Понятно, что $\xi = 2, 3, \ldots$, то есть ξ принимает счётное количество значений. Поэтому нам нужно найти распределение в виде

$$P(\xi = k) = p_k, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{5.18}$$

Чтобы понять, как именно считать вероятности, рассмотрим некоторые конкретные случаи.

Рассмотрим случай $k = 2$. Понятно, что событие $\xi = 2$ влекут два элементарных исхода:

$$\omega = OO \quad \text{или} \quad \omega = PP \tag{5.19}$$

Итак, имеем два элементарных исхода, каждый из которых имеет вероятность $\frac{1}{2^2}$, поэтому

$$P(\xi = 2) = 2 \cdot \frac{1}{2^2} \tag{5.20}$$

Рассмотрим случай $k = 3$. Событие $\xi = 3$ влекут элементарные исходы

$$\omega = OPP \quad \text{или} \quad \omega = POO \tag{5.21}$$

Поэтому вероятность самого события

$$P(\xi = 3) = 2 \cdot \frac{1}{2^3} \tag{5.22}$$

Рассмотрим случай $k = 4$. Событие $\xi = 4$ влекут

$$\omega = OPOO \quad \text{или} \quad \omega = POPP \tag{5.23}$$

Поэтому

$$P(\xi = 4) = 2 \cdot \frac{1}{2^4} \tag{5.24}$$

Заметим, что элементарные исходы, которые влекут событие $\xi = k$, полностью определятся тем, с чего всё началось. Значит, событие $\xi = k$ влекут события вида

$$\left[\begin{array}{lll} \omega = POPO\ldots PP & \text{или} & \omega = POPO\ldots OO \\ \omega = OPOP\ldots OO & \text{при} & \omega = OPOP\ldots PP \end{array}\right. \tag{5.25}$$

В любом случае элементарный исход полностью определяется результатом первого бросания. Последние два бросания одинаковые: при четных k в конце две решки, при нечетных k в конце два орла.

Поэтому получаем вероятность события

$$P(\xi = k) = 2 \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k = 2, 3, \ldots, \infty \tag{5.26}$$

Проверим правильность ответа путем подсчёта суммы

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \tag{5.27}$$

Задача 3.

Скорость частицы массы m выбрана наугад из $[0, v_0]$. Задана случайная величина ξ = кинетическая энергия частицы. Найти распределение случайной величины ξ.

Решение. Итак, элементарный исход – это скорость

$$\omega = v \in [0, v_0] \tag{5.28}$$

Явный вид зависимости ξ от ω

$$\xi = \frac{mv^2}{2} \tag{5.29}$$

Скорость v выбирается наугад, значит, она может принимать любое значение на отрезке

$$0 \leqslant v \leqslant v_0 \tag{5.30}$$

Поэтому ξ может принимать любое значение на отрезке

$$0 \leqslant \xi \leqslant E_0 = \frac{mv_0^2}{2} \tag{5.31}$$

Значит, множество значений случайной величины ξ есть отрезок

$$\xi \in [0, E_0] \tag{5.32}$$

то есть несчетное множество. Значит, нужно искать функцию распределения. При этом за переделали указанного отрезка значения функции распределения известны

$$\begin{cases} F(x) = 0 \ \text{ при } \ x \leqslant 0 \\ F(x) = 1 \ \text{ при } \ x > E_0 \end{cases} \tag{5.33}$$

Теперь рассмотрим внутренние точки. Пусть $0 < x \leqslant E_0$. Тогда функция распределения

$$F(x) = P\left(\xi < x\right) = P\left(\frac{mv^2}{2} < x\right) = P\left(v < \sqrt{\frac{2x}{m}}\right) \tag{5.34}$$

Здесь мы выделяем те значения v, при которых выполнено неравенство (так как v – элементарный исход в рассматриваемой задаче). Отметим, преобразование неравенств в (5.34) должно быть равносильным. Нужно проверять такие переходы аккуратно

$$\frac{mv^2}{2} < x \quad \Leftrightarrow \quad v < \sqrt{\frac{2x}{m}} \tag{5.35}$$

Итак, у нас есть одномерное множество элементарных исходов, мы рассматриваем некоторые элементарные исходы из этого множества. Получаем модель герпетической вероятности (L – длина отрезка), поэтому

$$P\left(v < \sqrt{\frac{2m}{m}}\right) = \frac{L\left[0, \sqrt{\frac{2x}{m}}\right]}{L\left[0, v_0\right]} = \frac{1}{v_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{x} \tag{5.36}$$

Таким образом получаем функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{v_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{x}, & 0 < x \leqslant E_0 \\ 1, & x > E_0 \end{cases} \tag{5.37}$$

Видно, что функция распределения состоит из трех непрерывных частей. Рассмотрим точки сшивания:

$$F\left(0 - 0\right) = F\left(0 + 0\right) = 0 \tag{5.38}$$

то есть в нуле разрыва нет.

Рассмотрим вторую точку разрыва

$$F\left(\underbrace{E_0 + 0}\right) = F\left(E_0 - 0\right) \tag{5.39}$$

Понятно, что

$$F\left(E_0 + 0\right) = 1 \tag{5.40}$$

$$F\left(E_0 - 0\right) = \left.\sqrt{\frac{x}{E_0}}\right|_{x=E_0} = 1 \tag{5.41}$$

Значит, в точке $x = E_0$ разрыва также нет.

Итак, функция распределения непрерывна. Поэтому плотность вероятности равна

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0,\ x > E_0 \\ \frac{1}{\sqrt{E_0}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < E_0 \end{cases} \tag{5.42}$$

Отдельно исследуем точки сшивания. Изобразим график функции $p(x)$ на рис. 5.1. Отметим, что в точках $x = 0$ и $x = E_0$ плотность не определена, так как левое и правое предельное значения производной функции распределения для каждой точки не совпадают. Значит, в этих точках плотность вообще говоря не существует.

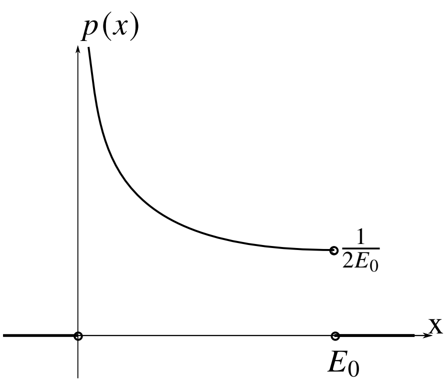

Рис. 5.1: Иллюстрация к объяснению.

Стоит проверить, что функция распределения лежит

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad \forall x \tag{5.43}$$

а также факт того, что $F(\cdot)$ не убывает, а плотность $p(x) \geqslant 0$.

Замечание. Отметим, что ранее мы получили, что функция распределения $F(\cdot)$ непрерывна. Однако этот факт можно было бы доказать другим способом. Отметим, что скачок функции распределения есть вероятность

$$F(x+0) - F(x) = P(\xi = x) \tag{5.44}$$

Имеет место равносильность событий

$$\xi = x \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2x}{m}} \tag{5.45}$$

Однако вероятность события $v = \sqrt{\frac{2x}{m}}$ равна нулю, так как в сущности мы рассматриваем событие: точку бросают на отрезок. Вероятность того, что эта точка попадет в конкретное число, равна нулю. Значит, вероятность события $\xi = x$ также равна нулю. Значит, у функции распределения нет скачка, она непрерывна.

Замечание. Также правильность ответов можно проверять из соображений размерности. Например, пусть x имеет размерность Дж. Плотность определятся условием

$$P(x \leqslant \xi < x + dx) = p(x)dx \tag{5.46}$$

Вероятность всегда безразмерна, так как это доля частного к общему. Размерность dx – Дж. Поэтому получаем, что размерность плотности – $\frac{1}{\text{Дж}}$.

Плотность вероятности всегда имеет размерность, обратную к размерности случайной величины.

Задача 4.

Скорость частицы меняется по следующему закону (рис. 5.2). Здесь τ_1 и τ_2 выбираются независимо наугад из $[0, 1]$. Пусть $l(t)$ = расстояние, на котором окажется частица к моменту времени t. Случайная величина задана через расстояние

$$\xi = l(2) \tag{5.47}$$

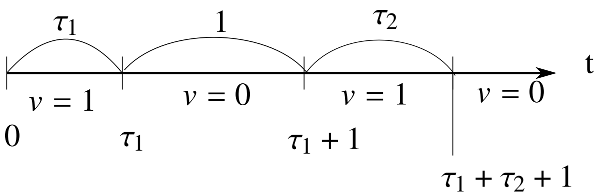

Рис. 5.2: Иллюстрация к объяснению.

Найти распределение случайной величины ξ.

Решение. Определим множество возможных значений ξ. Мы не можем сразу выразить множество значений ξ, кроме того, что

$$\xi \geqslant 0 \tag{5.48}$$

Верхнюю границу попробуем определить позже. Отметим, что расстояние, пройденной частицей, не дискретно. Значит, нам нужно найти функцию распределения. Из условия (5.48) получаем

$$F(x) = 0, \quad x \leqslant 0 \tag{5.49}$$

Найдем функцию распределения в других точках. Известно, что время наблюдения за частицей равно $\Delta t = 2$. Из этого промежутка Δt в промежутке $\Delta t_1 = 1$ частица точно покоилась, так как τ_1 и τ_2 выбираются из отрезка $[0, 1]$. Значит, точка τ_1 лежит до точки 1 (рис. 5.3), а точка $\tau_1 + 1$ – до точки 2. Из условия известно, что между этими точками частица покоилась. Этот отрезок мы и обозначим за Δt_1.

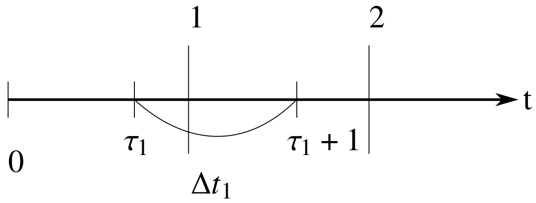

Рис. 5.3: Иллюстрация к объяснению.

Сколько времени частица двигалась? Итак, получаем, что в сумме частица двигалась в течение промежутка времени длины $\tau_1 + \tau_2$. При этом $\tau_1 + \tau_2$ может быть как больше 1, так и меньше 1. Обозначим промежуток времени, в течение которого частица двигалась за $\Delta\tau_2$. Итак, всего на оси времени частица двигалась в течение промежутка времени длины $\tau_1 + \tau_2$. Если эта величина $\tau_1 + \tau_2 > 1$, то все оставшееся время из промежутка Δt частица двигалась. Тогда получаем, что в течение $\Delta t_1 = 1$ частица покоилась, а в течение $\Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_1 = 1$ частица двигалась.

Если же $\tau_1 + \tau_2 < 1$, то частица остановилась в какой-то момент времени до момента

$t = 2$, значит, она двигалась в течение промежутка времени $\Delta t_2 = \tau_1 + \tau_2$. Итак

$$\begin{cases} \Delta t_2 = 1 \quad \text{если} \;\; \tau_1 + \tau_2 > 1 \\ \Delta t_1 = \tau_1 + \tau_2 \quad \text{если} \;\; \tau_1 + \tau_2 < 1 \end{cases} \tag{5.50}$$

Скорость частицы равна $v = 1$ (на промежутках, когда она движется), поэтому случайная величина (пройденное расстояние) равна

$$\xi = \begin{cases} 1, & \tau_1 + \tau_2 \geqslant 1 \\ \tau_1 + \tau_2, & \tau_1 + \tau_2 < 1 \end{cases} = min\,(1, \tau_1 + \tau_2) \tag{5.51}$$

Замечание. Этот же ответ можно было получить другим способом. Изобразим график траектории движения частицы на рис. 5.4. При этом возможно два случая расположения

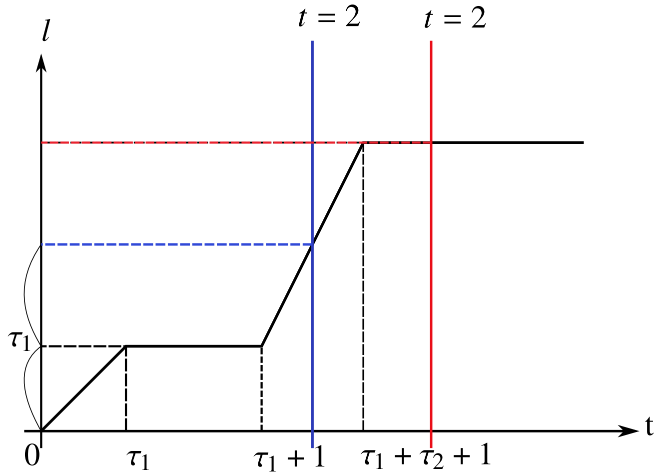

Рис. 5.4: Траектория движения частицы.

точки $t = 2$ относительно графика. Отсюда получаем два возможных значения для $l(2)$ (синяя и красная точки на оси ординат). В результате получаем

$$\xi = \begin{cases} \tau_1 + (2 - (\tau_1 + 1))\,, & 2 < \tau_1 + \tau_2 + 1 \\ \tau_1 + \tau_2, & 2 > \tau_1 + \tau_2 + 1 \end{cases} \tag{5.52}$$

Отсюда видно, каким является множество значений случайной величины:

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1 \tag{5.53}$$

Поэтому

$$F(x) = 1 \quad \text{при} \;\; x > 1 \tag{5.54}$$

Также ранее мы установили (5.49). Найдем функцию распределения в остальных точках отрезка.

Учтем, что вероятность некоторого события можно расписать в виде

$$P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) \tag{5.55}$$

Поэтому для функции распределения можно получить

$$\begin{gathered} P(\xi < x) = P(\xi < x, \tau_1 + \tau_2 \geqslant 1) + P(\xi < x, \tau_1 + \tau_2 < 1) = \\ \overset{1}{=} P(1 < x, \tau_1 + \tau_2 \geqslant 1) + P(\tau_1 + \tau_2 < x, \tau_1 + \tau_2 < 1) \overset{2}{=} 0 + P(\tau_1 + \tau_2 < x) = \\ \overset{3}{=} \frac{S(\Delta)}{S(\square)} = \frac{x^2}{2} \end{gathered} \tag{5.56}$$

Здесь
$\overset{1}{=}$ – подставляем явное выражение для случайной величины (5.52).
$\overset{2}{=}$ – здесь мы учитываем, что x – неслучайный параметр (событие неслучайно, оно или происходит всегда или никогда), при этом мы рассматриваем промежуток $0 < x \leqslant 1$. Значит, вероятность $P(1 < x) = 0$. Также учитываем тот факт, что $x < 1$, значит, неравенство $\tau_1 + \tau_2 < x$ влечет за собой неравенство $\tau_1 + \tau_2 < 1$.

$\overset{3}{=}$ – на множестве всех элементарных исходов выделяем множество τ_1 и τ_2, которые удовлетворяют условию

$$\tau_1 + \tau_2 < x$$

(рис. 5.5). Таким образом, вероятность равна отношению площади выделенной области к площади всего множества элементарных исходов.

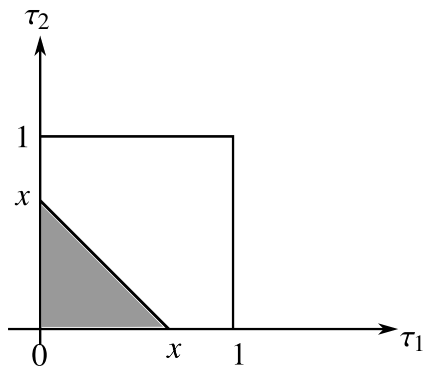

Рис. 5.5: Множество элементарных исходов.

Итак, получили функцию распределения. Учтём (5.56), (5.54) и (5.49) и построим её график (рис. 5.6).

Отметим, что в данном случае мы имеем так называемое *комбинированное (смешанное) распределение*. У этой функции есть ненулевая производная на сегменте $[0, 1]$, как у абсолютно непрерывного распределения, и также есть скачок, как в дискретном распределении.

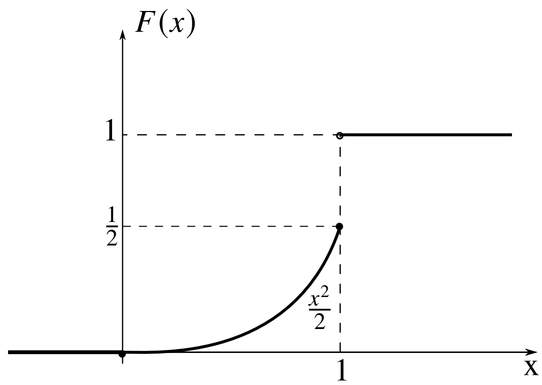

Рис. 5.6: Функция распределения.

Рассмотрим этот скачок поподробнее

$$F\left(1+0\right)-F\left(1\right)=\frac{1}{2}=P\left(\xi=1\right)=P\left(\tau_1+\tau_2\geqslant 1\right) \tag{5.57}$$

Семинар 6. Условная вероятность.

Условная вероятность.

Отметим, что задачи по условной вероятности зачастую имеют две возможные формулировки. В задаче может быть явно указано, что нужно найти вероятность некоторого события при условии, что произошло некоторое другое заданное событие. Однако такая формулировала присутствует не всегда. Иногда в задаче нет словосочетания "при условии". В этом случае описан случайный эксперимент, в результате которого образуется множество всех элементарных исходов. Далее присутствует фраза типа "в этом случайном эксперименте случилось какое-то случайное событие которое вообще говоря, могло и не случиться. Это и есть признак того, что речь идет о задаче на условную вероятность.

Условная вероятность выражается как отношение вероятности пересечения к вероятности условия

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \tag{6.1}$$

– вероятность события A при условии, что произошло B.

Условная вероятность – это доля тех случаев, когда произошло A среди тех случаев, когда произошло B.

Задача 1.

Письмо кладут в стол с вероятностью $p < 1$ (письма может не быть в ящике), причём с одной и той же вероятностью в любой из 4-х ящиков стола. Просмотрели 3 ящика и не нашли в них письмо. С какой вероятностью письмо находится в 4-м ящике ?

Решение. Отметим, что вторая часть формулировки задачи (просмотрели три ящика, письма в них нет) в сущности описывает случайное событие, которое вообще говоря может как произойти, так и не произойти. В условии же указано, что это событие достоверно произошло. Значит, все необходимые нам вероятности мы будем рассчитать при условии указанного события.

Формализуем условие задачи: введем обозначения. Пусть
A_k = письмо в $k-$ м ящике, $k = 1, 2, 3, 4$.
A_0 = письма нет в ящике
B = письма нет в верхних трех ящиках.

Таким образом, в данной задаче нам нужно найти вероятность вида $P(A_4|B)$.

Отметим, что указанные события A_k образуют всё множество исходов (все эти события несовместны и в сумме исчерпывают все возможные исходы случайного эксперимента).

Поэтому

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_0 = \Omega \tag{6.2}$$

Выразим событие B через эти элементарные исходы

$$B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 = A_4 + A_0 \tag{6.3}$$

По условию письмо может попасть в один из четырёх ящиков с равной вероятностью, поэтому

$$P\left(A_k\right) = \frac{p}{4}, \quad k = \overline{1,4} \tag{6.4}$$

Вероятность не попасть в ящик

$$P\left(A_0\right) = 1 - p \tag{6.5}$$

Подставим полученные выражения в формулу для условной вероятности

$$P\left(A_4 | B\right) = \frac{P\left(A_4 \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(A_4\right)}{P\left(B\right)} = \frac{\frac{p}{4}}{\frac{p}{4} + 1 - p} = \frac{p}{4 - 3p} \tag{6.6}$$

Во втором равенстве мы воспользовались тем, что событие A_4 влечет за собой событие B (если письмо в 4-м ящике, то его нет в первых трех). В сущности это аналогично тому, что A_4 содержится в B, что видно также из (6.3).

Отметим, что безусловная вероятность того, что письмо находится в четвертом ящике, равна $\frac{p}{4}$. Эту вероятность мы делим на вероятность $P\left(B\right) < 1$, поэтому условная вероятность в данном случае больше безусловной. Это есть следствие наличия дополнительной информации о том, что письма нет в первых трех ящиках.

Замечание. В задачах на условную вероятность бывает удобно пользоваться графическим подходом. это позволяет разобраться в том, что происходит в задаче и даже получить тот же ответ, но другим способом. Проиллюстрируем данный подход в рамках рассматриваемой задачи.

Изобразим все множество элементарных исходов Ω как квадрат со стороной 1 (рис. 6.1). Выделим в этом квадрате введенные выше события A_k. Причем сделаем так, чтобы площади каждого события равнялись вероятности данного события. Тогда событие B – это область событий A_0 и A_4 вместе взятых (на рис. 6.1 B закрашено).

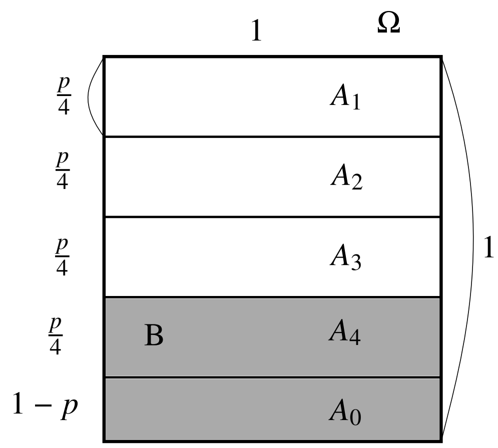

Рис. 6.1: Множество элементарных исходов.

Поэтому, если мы рассматриваем исход ”при условии B”, то все остальные события (кроме B) выбрасываются из рассмотрения (рис. 6.2). Значит, в условном вероятностном пространстве (рис. 6.2) множество элементарных исходов сократилось до множества B. Выделим в этом множестве множество благоприятных исходов (A_4 – закрашенная область).

Тогда ту же условную вероятность можно посчитать по принципам геометрической вероятности:

$$P\left(A_4|B\right) = \frac{S\left(C\right)}{P\left(B\right)} \tag{6.7}$$

Где C – это область, заштрихованная на рис. 6.2, а B – область, заштрихованная на рис. 6.1.

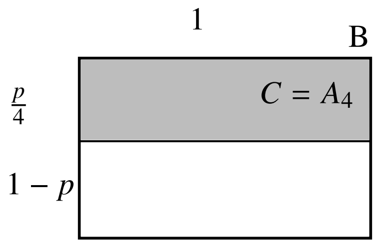

Рис. 6.2: Условное вероятностное пространство.

Эту формулу удобно использовать, когда сам случайный эксперимент состоит не из одного случайного выбора, а из нескольких последовательных случайных выборов. То есть сперва производится некоторый случайный выбор, строго после него – второй случайный выбор и так далее.

Формула полной вероятности.

Формула полной вероятности: если события B_i образуют всё Ω:

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega \tag{6.8}$$

где

$$B_i \cap B_j = \varnothing \quad \text{при} \;\; i \neq j, \;\; n \leqslant \infty \tag{6.9}$$

то для любого события A

$$\boxed{\forall A \quad P\left(A\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(A|B_k\right) P\left(B_k\right)} \tag{6.10}$$

Формула полной вероятности означает, что вероятность события A можно разложить в взвешенную сумму (6.10).

Задача 2.

Проводится следующая игра. Имеются 3 шкатулки, в одной приз, две другие пустые. Ведущему известно, где лежит приз.

1. Игрок откладывает в сторону одну шкатулку, не открывая её. После этого из оставшихся двух шкатулок ведущий совсем убирает из игры ту, в которой нет приза (если таковых две, то ведущий убирает, скажем, лежащую слева).

2. Игрок открывает либо "старую" шкатулку (которую он выбрал в первый раз), либо "новую" шкатулку.

Что выгоднее игроку: открыть отложенную вначале шкатулку или открыть ту, что осталась у ведущего?

Решение.

Отметим, что действия ведущего детерминированы, они не несут случайного характера. Случайным является только выбора игрока. Таким образом, игру можно рассмотреть в два этапа (рис. 6.3). На нулевом этапе было три шкатулки. На первом этапе игрок случайным образом выбирает одну из шкатулок, а из оставшихся двух ведущий детерминированным образом убирает одну. В итоге получаем два варианта: открываем старую шкатулку или новую.

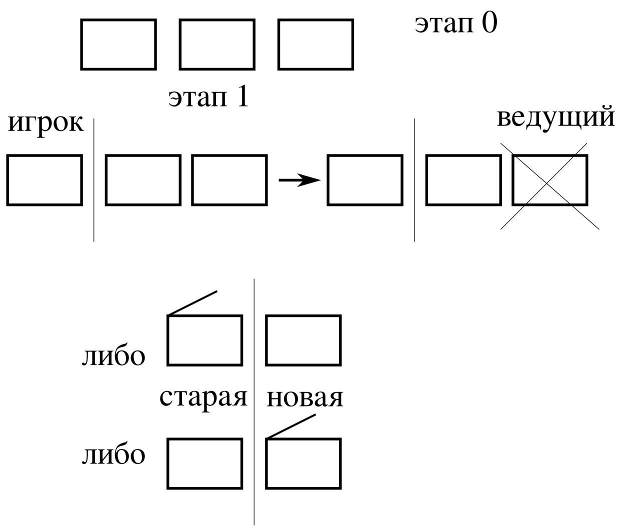

Рис. 6.3: Схема игры.

Введем обозначения для рассматриваемых событий
V_1 = на первом этапе игрок отметил шкатулку с призом
$\overline{V}_1$ = игрок отметил пустую шкатулку
V_2 = игрок в итоге выиграл приз

Итак, нас интересует безусловная вероятность события V_2 – в какой доле случаев игрок будет что-то выигрывать? При этом вне зависимости от того, что на самом деле означают указанные события, имеет место формула полной вероятности (так как события V_1 и $\overline{V_1}$ образуют полную группу событий)

$$P\left(V_2\right) = P\left(V_2|V_1\right) P\left(V_1\right) + P\left(V_2|\overline{V}_1\right) P\left(\overline{V}_1\right) \tag{6.11}$$

Разберем результаты каждой стратегии. Рассмотрим *первую стратегию*: в итоге игрок выбирает старую шкатулку (ту, которую он выбрал на нулевом этапе игры).

Видно, что вероятность того, что на нулевом этапе игрок выберет шкатулку с призом, равна

$$P\left(V_1\right) = \frac{1}{3} \tag{6.12}$$

Тогда

$$P\left(\overline{V}_1\right) = \frac{2}{3} \tag{6.13}$$

Теперь посчитаем условные вероятности. Найдем условную вероятность того, что в итоге игрок открывает старую шкатулку, при условии, что на нулевом этапе он выбрал шкатулку с призом

$$P\left(V_2|V_1\right) = 1 \tag{6.14}$$

Тогда, если изначальный выбор был ошибочен (то есть на нулевом этапе произошло событие $\overline{V_1}$)

$$P\left(V_2|\overline{V}_1\right) = 0 \tag{6.15}$$

Отсюда получаем вероятность результата

$$P\left(V_2\right) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \tag{6.16}$$

Теперь рассмотрим *вторую стратегию:* в конце игрок выбирает новую шкатулку.

Понятно, что в этом случае, если на нулевом этапе игрок выбирает шкатулку с выигрышем, то вероятность получить выигрыш в конце равна нулю

$$P\left(V_2|V_1\right) = 0 \tag{6.17}$$

Аналогично

$$P\left(V_2|\overline{V}_1\right) = 1 \tag{6.18}$$

Таким образом

$$P\left(V_2\right) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \tag{6.19}$$

Задача 3.

Урна с 5 белыми и 3 чёрными шарами. Из урны наугад выбирают 1 шар и возвращают обратно, добавляя 2 шара того же цвета, что выбранный. Затем вынимают 1 шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Замечание. Данная задача моделирует некоторые реальные процессы. Например, пусть событие вытащить черный шар – это отказ в работе некоторой системы. Как система реагирует на отказ? Задача моделирует следующую ситуацию. После того, как в системе произошел отказ, стали появляться другие разладки, то есть вероятность отказа стала увеличиваться.

Решение. Итак, здесь есть два этапа случайного выбора (в условии они подчеркнуты). Введем обозначения рассматриваемых событий
B_1 = в первый раз выбран белый шар
$\overline{B_1}$ = в первом этапе выбран черный шар
B_2 = на втором этапе выбран белый шар.

Итак, нам нужно найти вероятность того, что на втором этапе выбран белый шар, то есть вероятность $P(B_2)$.

Видно, что результаты первого этапа образуют полную группу, поэтому

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)\,P(B_1) + P\left(B_2|\overline{B}_1\right)P\left(\overline{B}_1\right) \tag{6.20}$$

Вероятность вынуть белый шар на первом этапе

$$P(B_1) = \frac{5}{8} \tag{6.21}$$

Тогда вероятность вынуть черный шар на первом этапе

$$P\left(\overline{B}_1\right) = \frac{3}{8} \tag{6.22}$$

Если произошло B_1 (выбрали белый шар), то ко второму этапу в урне $5 + 2$ белых (так как достали белый шар, его же вернули и добавлю ещё два белых) и 3 черных шаров. Поэтому при этом условии вероятность вынуть белый шар на втором этапе

$$P(B_2|B_1) = \frac{7}{10} \tag{6.23}$$

Аналогично, если произошло $\overline{B_1}$, то ко второму этапу в урне 5 белых и $3 + 2$ черных шаров. Поэтому

$$P\left(B_2|\overline{B}_1\right) = \frac{5}{10} \tag{6.24}$$

Таким образом, из (6.20) получаем

$$P(B_2) = \frac{7}{10}\cdot\frac{5}{8} + \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{8} \tag{6.25}$$

Замечание.
Если в урне N белых и M чёрных шаров и выбираются $n + m$ шаров, среди которых n белых, то количество вариантов такого выбора (каждому из количества способов C_N^n выбрать белые отвечает C_M^m количество способов выбрать черные шары)

$$C_N^n \cdot C_M^m \tag{6.26}$$

Вероятность такого выбора

$$\frac{C_N^n C_m^m}{C_{N+M}^{n+m}} \tag{6.27}$$

Формула Байеса.

Пусть имеется полная группа событий

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega \tag{6.28}$$

Тогда вероятность одного события из этой полной группы при условии события A равна

$$\boxed{P\left(B_k|A\right) = \frac{P\left(A|B_k\right)P\left(B_k\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A|B_j\right)P\left(B_j\right)}} \tag{6.29}$$

Если нам известны вероятности события A при некоторых условиях B_k, то мы можем найти вероятность, когда эти события поменялись местами.

Это может быть полезно в следующей ситуации. Например, пусть по условию задачи нужно найти вероятность $P\left(B|A\right)$, что кажется слишком сложной задачей. Возможно, в данной ситуации проще найти вероятность $P\left(A|B\right)$ и по формуле Байеса получить искомую вероятность.

Задача 4.

Доля неисправных деталей равна p. Аппарат проверяет каждую деталь. При этом аппарат принимает годную деталь за брак с вероятностью a и принимает брак за годную деталь с вероятностью b (вероятность ошибочных решений).

Аппарат признал деталь годной. Найти вероятность того, что на самом деле деталь бракованная.

Решение. Отметим, что в данном случае речь идет на задачу об условной вероятности (условие подчёркнуто). Значит, в ответе нам нужно найти условную вероятность.

Также отметим, что события происходят в два этапа. На первом этапе выбирается деталь, а на следующем этапе деталь суется в аппарат, в котором и принимается решение.

Обозначим

- Б – деталь является браком
- Г – деталь является годной
- $\widetilde{\text{Б}}$ – деталь признана браком
- $\widetilde{\Gamma}$ – деталь признана годной

Таким образом, нам нужно посчитать вероятность того, что деталь является бракованной при условии, что она была признана годной $P\left(\text{Б}|\widetilde{\Gamma}\right)$.

По условию задачи нам известны вероятности

$$p = P(\text{Б}) \tag{6.30}$$

и

$$1 - p = P(\text{Г}) \tag{6.31}$$

Вероятность принять деталь бракованной при условии, что на самом деле она годная, равна a по условию

$$a = P\left(\widetilde{\text{Б}}|\text{Г}\right) \tag{6.32}$$

Это доля деталей, признанных браком среди годных деталей.

Аналогично из условия имеем вероятность признать деталь годной при условии, что она – брак

$$b = P\left(\widetilde{\text{Г}}|\text{Б}\right) \tag{6.33}$$

Итак, нам нужно найти вероятность $P\left(\text{Б}|\widetilde{\text{Г}}\right)$, а нам даны обратные (по расположению событий) вероятности. Значит, нужно использовать формулу Байеса.

$$P\left(\text{Б}|\widetilde{\text{Г}}\right) = \frac{P\left(\widetilde{\text{Г}}|\text{Б}\right) P(\text{Б})}{P\left(\widetilde{\text{Г}}\right)} = \frac{\overbrace{P\left(\widetilde{\text{Г}}|\text{Б}\right)}^{=b} \overbrace{P(\text{Б})}^{=p}}{\underbrace{P\left(\widetilde{\text{Г}}|\text{Б}\right)}_{=b} \underbrace{P(\text{Б})}_{=p} + P\left(\widetilde{\text{Г}}|\text{Г}\right) \underbrace{P(\text{Г})}_{1-p}} \tag{6.34}$$

Здесь во втором равенстве мы воспользовались разложением по полной группе событий для $P\left(\widetilde{\text{Г}}\right)$ в знаменателе.

Итак, в формуле (6.34) осталась только одна неизвестная вероятность – вероятность принять правильное решение по поводу годной детали (вероятность принять деталь годной при условии, что она таковой и является). В сущности она равна частоте тех случаев, когда мы признали деталь годной среди случаев Г. Значит,

$$P\left(\widetilde{\text{Г}}|\text{Г}\right) = 1 - P\left(\widetilde{\text{Б}}|\text{Г}\right) = 1 - a \tag{6.35}$$

Таким образом, искомая вероятность

$$P\left(\text{Б}|\widetilde{\text{Г}}\right) = \frac{bp}{bp + (1-a)(1-p)} \tag{6.36}$$

Замечание.

Эту задачу можно решить графически. Пусть есть множество всех деталей (рис. 6.4) – квадрат со стороной 1. В них некоторую долю составляет брак (закрашено розовым).

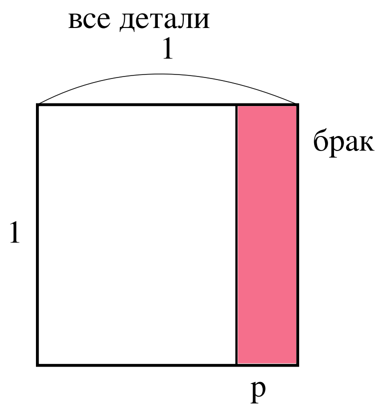

Рис. 6.4: Множество элементарных исходов.

Вероятность a – принять годную за брак (голубой). Аналогично b – принять брак за годную.

Произошло событие ”признано браком”, то есть событие $\widetilde{\text{Б}}$. Значит, все множество элементарных исходов мы редуцируем только к тем исходам, которые признаны браком. Значит, множество элементарных исходов редуцируется до множества ”голубая область + красная область”. Причем здесь красная область – это на самом деле брак, а голубая область – на самом деле годные. Значит, мы ищем вероятность на указанном множестве (красно-голубом) попасть в область годных деталей.

Тогда вероятность равна отношению площадей

$$P = \frac{S\left(\blacksquare\right)}{S\left(\blacksquare\blacksquare\right)} = \frac{(1-p)\cdot a}{(1-p)\cdot a + p\,(1-b)} = P\left(\widetilde{\text{Б}}|\Gamma\right) \tag{6.37}$$

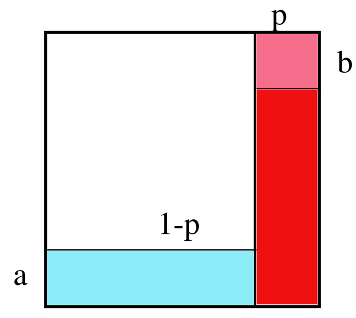

Рис. 6.5: Редуцированное множество элементарных исходов.

Семинар 7. Независимые испытания.

Независимые испытания.

Рассмотрим модель независимых испытаний. Будем говорить о многократных повторениях эксперимента, в котором множество элементарных исходов состоит только из двух исходов $\Omega_0 = \{Y, H\}$. Здесь исходы называются У = успехом, Н= неудачей.

Мы считаем, испытания (отдельные повторения этого эксперимента) независимы. При этом в одном испытании вероятности успеха и неудачи равны

$$\begin{aligned} P_0(Y) &= p \\ P_0(H) &= q \end{aligned} \tag{7.1}$$

Индекс 0 указывает на то, что мы говорим о вероятности одного единичного испытания. Далее мы будем рассматривать многократные повторения этого эксперимента.

Алгоритм решения задачи на независимые испытания.

1. В чем состоит одно испытание? Что будем считать успехом?
2. Сколько было испытаний по условию задачи? (n)
3. Сколько было успехов по условию задачи? (k)
4. Что случайно: n или k? Для ответа на этот вопрос бывает полезно рассмотреть событие, обратное сформулированному. То, что изменилось при такой инверсии, будет случайным.
   (a) Случайно k (число успехов).
   Тогда случайная величина ξ_n = число успехов ($n = fix$). Имеют место формулы:
   $$P(\xi_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{7.2}$$
   $$P(\xi_n > k) = \sum_{l=k+1}^{n} C_n^l p^l q^{n-l} \tag{7.3}$$
   $$P(\xi \leqslant k) = \sum_{l=0}^{k} C_n^l p^l q^{n-l} \tag{7.4}$$
   (b) Случайно число испытаний n (испытания проводятся до достижения $k-$ го успеха, $k = fix$)
   Случайная величина η_k = число испытаний
   $$P(\eta_k = n) = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}, \quad n = k, k+1, \ldots \tag{7.5}$$

Также справедливы следующие формулы

$$P(\eta_k > n) = \sum_{m=n+1}^{\infty} C_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k} \tag{7.6}$$

$$P(\eta_k \leqslant n) = \sum_{m=k}^{n} C_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k} \tag{7.7}$$

Задача 1.

В группе 20 студентов, в семестре 12 семинаров. Каждый студент приходит на любой семинар с вероятностью a. Найти вероятность того, что к концу семестра в группе будет не более двух ($\leqslant 2$) студентов, пропустивших более трех семинаров.

Решение. Итак, сперва надо понять, в чем здесь заключаются независимые испытания. Обозначим событие A = "к концу семестра в группе будет $\leqslant 2$ студентов, пропустивших больше 3-х семинаров".

Отсюда получаем, что событие, обратное A – это событие:

$\overline{A}$ = будет > 2 студентов, которые пропустили больше 3-х семинаров.

Итак, если берем событие, обратное к рассматриваемому, то получаем, что при инверсии меняется число студентов. Таким образом. каждое отдельное испытание – это один студент. Поэтому

1 испытание = 1 студент

Число испытаний $n = 20$

Относительно студента мы пересчитываем число пропусков. Далее будем считать, что *успех = пропустил больше трех семинаров*. Вероятность успеха равна p.

Неудача = пропустил $\leqslant 3$ семинаров. Вероятность неудачи q.

По условию задачи *число успехов* $\leqslant 2$.

Итак, мы получили, что каждое отдельно испытание – это отдельный студент. Более того, при переходе от основного события к дополнительному *меняется количество успехов*. Значит, именно количество успехов является случайной величиной. Это связано с тем, что общее количество студентов n фиксировано, но можно менять количество студентов, которые прогуливают пары.

Поэтому, по (7.4) получаем выражение для искомой вероятности

$$P = P(\xi_n \leqslant 2) = \sum_{k=0}^{2} C_n^k p^k q^{n-k} \tag{7.8}$$

Итак, нам нужно найти p – вероятность того, что один отдельный студент пропустил более трех семинаров.

$$p = P\,(\text{один студент пропустил } > 3 \text{ семинаров}) \tag{7.9}$$

Отметим, что семинаров было много, на каждый семинар студент либо приходил, либо не приходил. Значит, вероятность (7.9) по характеру такая же, как и вероятность (7.8). Однако теперь мы фиксируем одного студента, и начинаем перечислять относительно него семинары. Получаем схему независимых испытаний для каждого студента. Здесь число испытаний

$$n_1 \text{ испытаний} = (n_1 = 12) \text{ семинаров} \tag{7.10}$$

Тогда успех – это ситуация, в которой один студент пришел на семинар. По условию вероятность этого успеха

$$p_1 = P\,(\text{прийти на семинар}) = a \tag{7.11}$$

Тогда получаем случайную величину

$\widetilde{\xi}_{n_1}$ = число семинаров на которые пришел фиксированный студент.

Если студент пропустил более трех семинаров, значит, посетил он не более 9-ти семинаров

$$n_1 - \widetilde{\xi}_{n_1} > 3 \;\Leftrightarrow\; \widetilde{\xi}_{n_1} < n_1 - 3 = 9 \tag{7.12}$$

Тогда получаем

$$p = P\left(\widetilde{\xi}_{n_1} < 9\right) = \sum_{k_1=0}^{9} C_{n_1}^{k_1} a^{k_1} \,(1-a)^{n_1-k_1} \tag{7.13}$$

Отметим, что сама вероятность успеха внутри себя содержит биномиальную вероятность.

Нужно подставить (7.13) в (7.8) и получим окончательный ответ.

Задача 2.

Игра в настольный теннис идет до 21 очка. Игрок A выигрывает 1 очко у B с вероятностью a. Игрок B у A – с вероятностью b. При этом

$$a + b = 1 \tag{7.14}$$

Найти вероятность того, что счёт будет 21 : 13 в пользу A.

Решение. Понятно, что в данном случае единичное испытание – это розыгрыш одного очка.

1 испытание = розыгрыш 1 очка.

Будем считать успехом = выигрыш очка игроком A.

Из условия видно, что фиксировано количество успехов, а число испытаний будет меняться. Однако далее в задаче мы не будем использовать стандартные конструкции, а попытаемся понять смысл указанных ранее формул, основываясь на логике задачи.

Рассмотрим саму суть случайного эксперимента. Ясно, что элементарный исход это

$$\omega = \langle \omega_1, \dots \omega_n \rangle \tag{7.15}$$

где ω_i = результат $i-$ розыгрыша:

$$\omega_i = \left[\begin{array}{l} \text{выиграл } A \\ \text{выиграл B} \end{array} \right. \tag{7.16}$$

Здесь n = общее количество розыгрышей.

Итак, мы считаем, что результат $n-$ кратных повторений эксперимента – это цепочка из элементарных исходов единичных экспериментов, где ω_i – это то, что произошло в единичном испытании.

Будем считать, что вероятность элементарного исходов есть произведение вероятностей элементарных исходов в каждом отдельном акте эксперимента

$$P(\omega) = P_0(\omega_1) \cdot \ldots \cdot P_0(\omega_k) = a^k b^{n-k} \tag{7.17}$$

где k = количество выигрышей игрока A.

Событие $21:13$ – результат проведения 34 испытаний. Успехов же среди них было 21. Поэтому вероятность любого элементарного исхода, которое влечёт это событие можно получить по формуле (7.17)

$$\left\{ \begin{array}{c} n = 21 + 13 = 34 \\ k = 21 \end{array} \right. \Rightarrow P(\omega) = a^{21} b^{13} \tag{7.18}$$

Понятно, что рассматриваемое событие влечет не один элементарный исход. Его влекут элементарные исходы $\omega = \langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle$, в которых элементарный исход ω_n должен быть выигрышем А (иначе 21 очко А наберет раньше). Значит, ω_n – обязательно успех:

$$\omega_n = \text{У} \tag{7.19}$$

Среди оставшихся $\omega_k, \quad k = \overline{1, n-1}$ должно быть $21 - 1$ успехов, причём нам неважно, где конкретно они расположены. Поэтому эти все варианты дают столько вариантов элементарных исходов конечного события, сколько вариантов раскидать $k - 1 = 20$ успехов по $n - 1 = 33$ вариантам:

$$C_{n-1}^{k-1} = C_{33}^{20} \tag{7.20}$$

Отсюда получаем, что вероятность рассматриваемого события рассчитывается по формуле отрицательного биномиального распределения

$$P = C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} = C_{33}^{20} a^2 b^{13} \tag{7.21}$$

Обратные задачи.

Рассмотрим еще один класс задач, связанных с биномиальной вероятностью. Это так называемые обратные задачи. В этих задачах считается, что задана некоторая некоторая вероятность

$$P(n, p, k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{7.22}$$

и нужно найти n, p или k (или условия на эти значения).

Отметим, что биномиальная схема – это модель, по которой вычисляется частота успеха. Понятно, что если в схеме из n испытаний произошло k успехов, то частота успехов равна $\frac{k}{n}$. Частота – это оценка вероятности. Поэтому рассматриваемые задачи аналогичны тому, что мы провели эксперимент много раз, посчитали частоту и отождествили ее с вероятностью. После этого мы пытаемся понять, как устроено то, что происходит в эксперименте: сколько было испытаний, какова вероятность успеха, сколько было успехов. Такого рода обратные задачи – это способ проверки математической модели.

Задача 3.

В озере N рыб. Отлавливают M рыб, метят и отпускают. Через некоторое время снова отлавливают n рыб, считают количество меченых. При таком N вероятность встретить m меченых рыб среди n отловленных максимальна?

Решение. Поставленная задача – примитивный способ оценки численности биологической популяции. После выполнения условий задачи в качестве оценки количества рыб предлагается некоторая модель. Например, говорим, что количество рыб – это такое M, при котором вероятность того, что случилось, будет максимальной. Данная модель основана на идее о том, что если реализовалось какое-то событие, то оно скорее всего самое вероятное.

Итак, нам нужно максимизировать вероятность m успехов среди n испытаний

$$P = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{7.23}$$

Здесь p = вероятность меченой рыбы.

Из условия следует, что вероятность поймать меченую рыбу равна

$$p = \frac{M}{N} \tag{7.24}$$

Итак, нам нужно максимизировать вероятность (7.23) по p (формально по N) : $\max\limits_N P$. В (7.23) стоит произведение. Сделаем из произведения сумму, подействовав на вероятность логарифмом. Операция взятия максимума от вероятности эквивалентна операцию взятия максимума от логарифма этой вероятности: $\max\limits_N \ln P$. Найдем логарифм рассматриваемой вероятности

$$\ln P = \ln C_n^m + m \ln p + (n - m) \ln q \tag{7.25}$$

где

$$\begin{gathered} p = \tfrac{M}{N} \\ q = 1 - \tfrac{M}{N} \end{gathered} \tag{7.26}$$

Продифференцируем этот логарифм по N и приравняем производную нулю

$$\left.\frac{\partial \ln P}{\partial N}\right|_{n,m,M=fix} = \frac{\partial \ln P}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial N} = \left(\frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p}\right)\frac{\partial p}{\partial N} = 0 \tag{7.27}$$

Тогда получим

$$(1 - p)\, m = (n - m)\, p \tag{7.28}$$

Отсюда

$$m = np \tag{7.29}$$

Итак, мы получили, что вероятность успеха максимальна там, где вероятность успеха примерно равна частоте.

$$\underbrace{p = \frac{M}{N}}_{\text{вер-ть } Y} = \underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{частота } Y} \tag{7.30}$$

$$N = \frac{n}{m} M \tag{7.31}$$

Асимптотики биномиальной вероятности.

Асимптотика Пуассона: если n велико ($\gtrsim 30$) и p мало (так, что $\lambda = np$ не велико и не мало, то есть $0.5 \lesssim \lambda \lesssim 50$), то

$$P = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{7.32}$$

и имеет место равенство

$$P\left(\xi_n > k\right) \approx \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} \tag{7.33}$$

Отметим, что в верхнем пределе суммы формально должно стоять n, но так как n велико, а слагаемые быстро убывают, можно писать сумму до ∞.

Асимптотика Муавра-Лапласа: Если n велико ($n \gtrsim 30$), а p не велико и не мало ($p \approx \frac{1}{2}$), то

$$P\left(k_1 \leqslant \xi_n \leqslant k_2\right) \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{7.34}$$

Здесь

$$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}} \tag{7.35}$$

Отметим, что под знаком вероятности также могут стоять строгие неравенства.

Если же нам нужно посчитать вероятность события $\xi_n > k$, то в верхний предел интеграла нужно подставить ∞

$$P\left(\xi_n > k\right) \approx \int\limits_{x_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{7.36}$$

Аналогично для неравенства в обратную сторону (нижний предел равен бесконечности).

Итак, если p близко к нулю или к 1, применяется асимптотика Пуассона, а если где-то в середине, то асимптотика Муавра-Лапласа (рис. 7.1).

При этом

$$\lambda = np \tag{7.37}$$

– среднее количество успехов (математическое ожидание количества успехов).

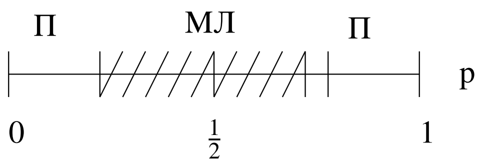

Рис. 7.1: Интервалы использования асимптотик.

Замечание. Если в условии задачи нужно найти среднее количество успехов, то скорее всего это задача на асимптотику Пуассона.

Задача 4.

Сколько изюмин в среднем должна содержать булочка, чтобы вероятность встретить хотя бы одну изюминку была больше 0.9.

Решение. Чтобы проверить, сколько изюмин в булочке, нужно разломить булочку на маленькие кусочки, сравнимые по размеру с изюминой, причем каждый кусочек содержит не более одной изюмины. Отсюда получаем, что вероятность успеха равна отношению объема изюмины к объему булочки

$$n \approx \frac{V_{\text{изюм}}}{V_{\text{булочки}}} \tag{7.38}$$

Успех = в маленьком кусочке обнаружена одна изюмина.

Итак, нам нужно найти вероятность вида

$$P = P\left(\xi_n \geqslant 1\right) = 1 - P\left(\xi_n < 1\right) = 1 - P\left(\xi_n = 0\right) \tag{7.39}$$

Понятно, что p достаточно мало (изюмин на булочку не очень много). Значит, можно воспользоваться асимптотикой Пуассона и получить

$$P\left(\xi_n = 0\right) \approx \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \tag{7.40}$$

Здесь λ = среднее количество изюмин (успехов) в одной булочке.

Получаем

$$1 - P\left(\xi_n = 0\right) \approx 1 - e^{-\lambda} > 0.9 \tag{7.41}$$

Отсюда

$$e^{-\lambda} < 0.1 \tag{7.42}$$

Итак, получаем выражение для среднего

$$\lambda > \ln 10 \tag{7.43}$$

Можно оценить λ

$$\lambda \geqslant 3 \tag{7.44}$$

Задача 5.

Театр имеет 2 одинаковых гардероба. Зритель выбирает гардероб наугад. В театр приходят $2n$ зрителей. При каком количестве мест в любом из гардеробов каждый зритель сдаст пальто с первой попытки будет больше 0.95? (*обратная задача*)

Решение. Эта задача из теории обслуживания. Пусть есть большое количество клиентов. Нужно так организовать работу компании, чтобы с достаточно большой вероятностью все запросы компании были удовлетворены.

Пусть в гардеробах по m мест.

Обозначим событие A = "зритель сдаст пальто с первой попытки".

Рассмотрим разные ситуации. Например, рассмотрим случай:

$$m \geqslant 2n \tag{7.45}$$

то есть в каждом гардеробе мест не меньше, чем мест всего для зрителей. Поэтому места хватит всем

$$P(A) = 1 \tag{7.46}$$

Теперь рассмотрим второй вариант:

$$m < n \tag{7.47}$$

Кому-то точно не хватит места. Поэтому

$$P(A) = 0 \tag{7.48}$$

Отсюда получаем, что вероятность будет отлична от нуля в случае $n \leqslant m < 2n$.

Семинар 8. Независимые испытания (продолжение).

Задача.

Театр имеет 2 одинаковых гардероба. Зритель выбирает гардероб наугад. В театр приходят $2n$ зрителей. Каждый зритель выбирает один из двух одинаковых гардеробов наугад. Найти минимальное количество мест в одном гардеробе, при котором вероятность того, каждый зритель сдаст пальто с первой попытки, больше 0.9.

Решение. Отметим, что это обратная задача: нам задана вероятность и нужно оценить некоторые параметры вероятностной модели.

Пусть в первом и втором гардеробе по m мест. Рассчитаем указанную в условии вероятностного и найдем связь между P и m.

Ранее мы сформулировали рассматриваемое событие как событие для случайной величины ξ_{2n} = количество зрителей в первом гардеробе. При этом, так как гардероб выбирается наугад,

$$p = q = \frac{1}{2} \tag{8.1}$$

Тогда интересующее нас событие (под знаком вероятности) в терминах ξ_{2n} формулируется следующим образом

$$\begin{cases} \xi_{2n} \leqslant m \\ 2n - \xi_{2n} \leqslant m \end{cases} \tag{8.2}$$

Первая строка отвечает за число зрителей, которые пришли в первый гардероб, а вторая строка – за второй гардероб (всем должно хватить места).

Случайная величина ξ_{2n} – это число успехов в серии из $2n$ испытаний, при этом вероятности успеха и неудачи равны. Успехом считаем обращение зрителя в первый гардероб.

Ранее мы установили, что естественно рассматривать случай

$$n \leqslant m \leqslant 2n \tag{8.3}$$

В противном случае вероятность будет равна 0 или 1.

Значит, нам нужно понять, какие m из диапазона (8.3) удовлетворяют условию

$$m: \quad P := P\left(2n - m \leqslant \xi_{2n} \leqslant m\right) > 0.9 \tag{8.4}$$

Далее будем считать, что театр достаточно большой, то есть зрителей довольно много. Тогда естественно применить асимптотику. При этом вероятность успеха p (8.1) находится ровно посередине возможного диапазона (см. рис. 7.1), поэтому будем использовать асимптотику

Муавра-Лапласа. Отсюда получаем

$$P \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \tag{8.5}$$

Если обозначить

$$\begin{cases} 2n - m = k_1 \\ m = k_2 \end{cases} \tag{8.6}$$

то пределы интеграла имеют вид

$$x_1 = \left. \frac{k_1 - 2np}{\sqrt{2n \cdot p \cdot q}} \right|_{p=q=\frac{1}{2}} = \frac{2n - m - n}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = \frac{n-m}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \tag{8.7}$$

$$x_2 = \left. \frac{k_2 - 2np}{\sqrt{2n \cdot p \cdot q}} \right|_{p=q=\frac{1}{2}} = \frac{m-n}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \tag{8.8}$$

Мы рассматриваем случай (8.3), то есть $m \geqslant n$, поэтому

$$x_2 = \frac{m-n}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = x \geqslant 0 \tag{8.9}$$

$$x_1 = \frac{n-m}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = -x \tag{8.10}$$

Таким образом, мы имеем симметричный пределы в интеграле. Это связано с тем, что предел x_1 определятся условием на случайную величину ξ_n, а предел x_2 – условием на дополнительную случайную величину (зрители обратились во второй гардероб). При этом задача у нас симметричная – можно обменять местами два гардероба.

Таким образом, получаем условие вида

$$P \approx \int\limits_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz > 0.9 \tag{8.11}$$

Понятно, что этот интеграл растет с ростом промежутка интегрирования, то есть с ростом x. Поэтому решением будет $x > x_0$, где x_0 можно найти из

$$x_0 : \int\limits_{-x_0}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} = 0.9 \tag{8.12}$$

Отсюда можно получить численное значение x_0

$$x_0 \approx 1.64 \tag{8.13}$$

Отсюда находим m_0 из уравнения (8.7)

$$m_0 = x_0\sqrt{\frac{n}{2}} + n \tag{8.14}$$

Отсюда видно, что при $n = m$ вероятность будет равна нулю.

Пусть $n = 200$. Тогда

$$m_0 = 10x_0 + 200 \tag{8.15}$$

Значит,

$$m \geqslant 200 + 17 = 217 \tag{8.16}$$

Отметим, что если число мест в гардеробе равно числу зрителей, то вероятность равна нулю. Если же увеличить число мест в гардеробе менее, чем на 10%, то вероятность становится уже больше 0.9. Это связано с тем, что функция, находящаяся под интегралом (8.11), очень быстро исчерпывает свою площадь – площадь очень быстро растет при увеличении интервала интегрирования.

Биномиальные испытания.

Биномиальные испытания – это многократные повторения одного и того же эксперимента, причем в каждом акте эксперимента может быть всего два исхода. Повторения мы считаем независимыми и одинаковыми.

Вводится случайная величина ξ_n = число успехов n испытаниях $n = fix$.

Распределение этой случной величины имеет вид

$$\boxed{P\left(\xi_n = k\right) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n} \tag{8.17}$$

– **биномиальное распределение**.

Это основное распр деление в схеме независимых биномиальных испытаний.

Также вводится случайная величина

η_k = число испытаний вплоть до $k-$ го успеха ($k = fix$)

Тогда распределение этой случайной величины

$$\boxed{P\left(\eta_k = n\right) = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}, \quad n = k, k+1, \ldots} \tag{8.18}$$

– отрицательное биномиальное распределение.

Между этими двумя распределениями существует связь. Для вероятностей, ассоциированных со случайной величиной ξ_n и для вероятностей, ассоциированных со случайной величиной η_k справедлива формула

$$\boxed{P\left(\xi_n < k\right) = P\left(\eta_k > n\right)} \tag{8.19}$$

для всех n и k, при которых указанные вероятности имеют смысл.

Распишем вероятности из выражения (8.19)

$$\boxed{\sum_{l=0}^{k-1} C_n^l p^l q^{n-l} = \sum_{m=n+1}^{\infty} C_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k}} \tag{8.20}$$

Отметим, что мы получили формулу, которая связывает биномиальные коэффициенты.

Выражение для вероятностей дополнительных событий имеет вид

$$\boxed{P\left(\xi_n \geqslant k\right) = P\left(\eta_k \leqslant n\right)} \tag{8.21}$$

Что эквивалентно

$$\boxed{\sum_{l=k}^{n} P\left(\xi_n = l\right) = \sum_{m=k}^{n} P\left(\eta_k = m\right)} \tag{8.22}$$

При этом

$$p\left(\xi_n \leqslant k\right) \neq p\left(\eta_k \geqslant n\right) \tag{8.23}$$

Отметим, что здесь нужно быть аккуратным относительно строгости и нестрогости неравенств. Дело в том, что мы рассматриваем дискретные случайные величины, и всякие отдельные значения индекса вносят в значение суммы ненулевые вклады.

Отметим также, что имеют место выражения для пропорциональности

$$P\left(\xi_n = k\right) \sim C_n^k \tag{8.24}$$

$$P\left(\eta_k = n\right) \sim C_{n-1}^{k-1} \tag{8.25}$$

C_n^k – это число способов раскидать k успехов по серии из n испытаний. C_{n-1}^{k-1} – число способов раскидать k успехов по серии из n испытаний, зафиксировав последний успех. Ясно, что (8.24) больше, чем (8.25). Поэтому на самом деле имеет место неравенство

$$p\left(\xi_n \leqslant k\right) > p\left(\eta_k \geqslant n\right) \tag{8.26}$$

Можно преобразовать это выражение в равенство

$$P\left(\xi_n \leqslant k\right) = P\left(\xi_n < k+1\right) \tag{8.27}$$

Асимптотика.

1. ***Асимптотика Пуассона:*** n велико, $p \approx 0$. Тогда

$$\sim 0.1 < \lambda = np \lesssim 100 \tag{8.28}$$

Тогда имеют место выражения для вероятности

$$\boxed{P(\xi_n = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}} \tag{8.29}$$

$$\boxed{P(\xi_n \geqslant k) = \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}} \tag{8.30}$$

2. ***Асимптотика Муавра-Лапласа:*** n велико, $p \approx \frac{1}{2}$, тогда имеет место *интегральная теорема Муавра-Лапласа*

$$\boxed{P(k_1 < \xi_n < k_2) \approx P(kq \leqslant \xi_n \leqslant k_2) \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz} \tag{8.31}$$

При этом можно пользоваться тем, что нестрогое неравенство можно записать как строгое

$$P(kq \leqslant \xi_n \leqslant k_2) = P(k_1 - 1 < \xi_n < k_2 + 1) \tag{8.32}$$

Здесь

$$x_l = \frac{k_l - np}{\sqrt{npq}}, \qquad l = 1, 2 \tag{8.33}$$

В случае односторонних неравенств

$$\boxed{P(\xi_n < k_2) \approx \int\limits_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz} \tag{8.34}$$

$$\boxed{P(\xi_n > k_1) \int\limits_{x_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz} \tag{8.35}$$

Для исследования возникающего здесь интеграла вводится функция.

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \quad -\infty < x < \infty \tag{8.36}$$

Эта функция называется **интегралом вероятности.**

График этой функции представлен на рис. 8.1.

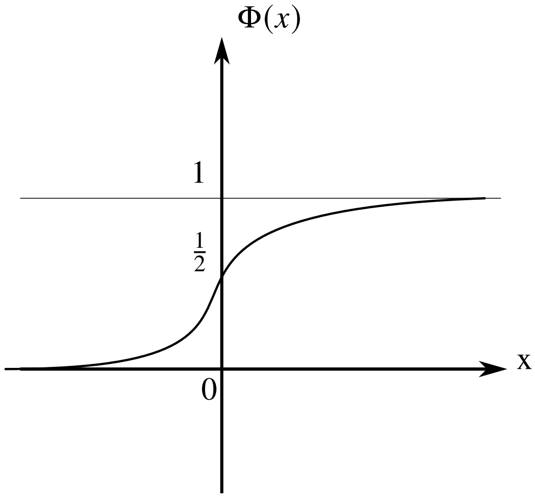

Рис. 8.1: Интеграл вероятности.

Однако удобнее интерпретировать эту функцию как площадь под графиком. Изобразим на рис. 8.2 график функции $\frac{1}{\sqrt{2pe^{-\frac{1}{2}z^2}}}$, которая находится под интегралом. Получаем гауссову кривую. Понятно, что тогда функция $\Phi(x)$ – это площадь, которая находится под графиком этой кривой вплоть до значения x. Отметим, что площадь под всей функций (не до момента x равна 1) равна 1. Более того, имеет место равенство (рис. 8.3)

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \quad \text{для} \quad x > 0 \qquad (8.37)$$

Это связано с тем, что площади под графиком левее $-x$ и правее x одинаковы и равны $\Phi(-x)$, так как график симметричен.

Таким образом, у нас есть формула для пересчета значений функции от положительных значений аргумента к отрицательным.

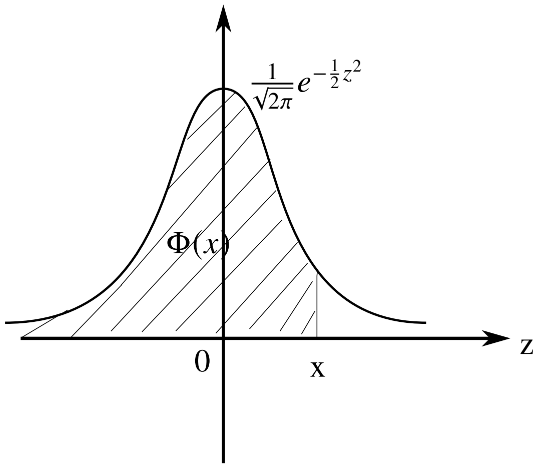

Рис. 8.2: Иллюстрация к объяснению.

Рис. 8.3: Иллюстрация к объяснению.

В этих терминах получаем, что интеграл в (8.31) можно представить как разность двух значений функции

$$P\left(k_1 \leqslant \xi_n \leqslant k_2\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right) \tag{8.38}$$

Семинар 9. Распределения функций от случайных величин.

Распределения функций от случайных величин.

Если $\xi: \quad \Omega \to \mathbb{R}$ – случайная величина и $Y \subset \mathbb{R}$ – некоторое множество на числовой прямой, то мы всегда можем рассчитать вероятность того, что значения этой случайной величины попадут в это множество

$$P(\xi \in Y) = \begin{cases} \sum\limits_{k:x_k \in Y} P(\xi = x_k) & (D) \\ \int\limits_Y p_\xi p_\xi(x)dx & (AH) \end{cases} = \int\limits_Y dF_\xi(x) \tag{9.1}$$

Отметим, что интеграл в правой части – интеграл Стильтьеса.

Если ξ – случайная величина, и есть некоторая функция

$$g(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{9.2}$$

то случайная величина

$$\eta = g(\xi) \tag{9.3}$$

имеет функцию распределения вида

$$F_\eta(y) \overset{def}{=} P(\eta < y) = P(g(\xi) < y) = \int\limits_{x:g(x)\in Y} dF_\xi(x), \quad y \in \mathbb{R} \tag{9.4}$$

При рассмотрении таких задач можно использовать те же конструкции, которые мы рассматривал в случае просто случайную величину. Например, когда мы ищем распределение случайной величины, сперва нужно определить множество значений этой случайно величины. Аналогично и здесь нужно найти множество значений случайной величины η. Здесь возникает следующая альтернатива

1. Либо что множество конечно или счётно, то η распределена дискретно.

$$\boxed{P(\eta = y_j) = \begin{cases} \sum\limits_{k:g(x_k)=y_j} P(\xi = x_k) & (D) \\ \int\limits_{x:g(x)=y_j} p_\xi(x)dx & (AH) \end{cases}} \tag{9.5}$$

   Здесь конструкция $p_\xi(x)dx$ определяет меру на числовой прямой, связанную со случайной величиной ξ. В сущности мы определяем размер множества $x: d(x) = y_j$ по этой мере.

2. Если множество значений случайной величины величины η не является конечным

или счётным, то считаем функцию распределения

$$\boxed{F_\eta(y) = \int\limits_{x:g(x)<y} p_\xi(x)dx, \quad y \in \mathbb{R}} \tag{9.6}$$

Эта функция должна быть задана в каждой точке!

Здесь возникает несколько вариантов.

(a) Если $F_\eta(y)$ непрерывна $\forall y \in \mathbb{R}$, то величина η распределена абсолютно непрерывна и мы ищем плотность распределения

$$\boxed{p_\eta(y) = F'_\eta(y)} \tag{9.7}$$

там, где $\exists F'_\eta(y)$.

(b) Если $F_\eta(\cdot)$ имеет и разрывы, и области, где $F'(x) \neq 0$, то ответ – это сама функция распределения в каждой точке $F_\eta(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Замечание. В случае решения задач нужно обращать внимание на следующие ситуации. Если имеет место решения уравнения, например

$$g(x) = y_j \tag{9.8}$$

то это уравнение нужно решить точно, то есть ищем <u>все</u> $x : g(x) = y_j$.

Если решаем неравенство вида

$$g(x) < y \tag{9.9}$$

то есть тоже нужно решать точно. Здесь нужно также учесть, что в интеграле

$$\int\limits_{x:g(x)<y} p_\xi(x)dx = \int\limits_D p_\xi(x)dx \tag{9.10}$$

вносят вклад только те значения x, для которых плотность отлична от нуля. Поэтому на самом деле область интегрирования

$$D = \left\{x : \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) < y \\ p_\xi(x) \neq 0 \end{array} \right. \right\} \tag{9.11}$$

Далее решение этого неравенства (9.11) нужно переписать в виде

$$x \in X(y) \tag{9.12}$$

тогда интеграл (9.10) приобретает вид

$$\int\limits_{x:g(x)<y} p_\xi(x)dx = \int\limits_{X(y)} p_\xi(x)dx \tag{9.13}$$

Отметим также, что условие (9.11) может также помочь в определении множества значений η. Например, если плотность $p_\xi(x) \equiv 0$ при $x \notin [a,b]$, то $a < \xi < b$ с вероятностью 1. Соответственно, это как-то влияет на $\eta(\xi)$.

Обозначения.

$$\boxed{\xi \in \mathbb{B}\,(n,p):\ P\,(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots,n \quad (p+q=1)} \tag{9.14}$$

– биномиальное распределение.

$$\boxed{\xi \in \mathbb{P}(\lambda) \quad P\,(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad 0 < \lambda = const < \infty} \tag{9.15}$$

– распределение Пуассона.

Буквы, которые написаны в скобках в (9.14) и (9.15) – это параметры распределения.

Введем обозначения для некоторых абсолютно-непрерывных распределений.

$$\xi \in \mathbb{U}\,[a,b] \tag{9.16}$$

–равномерное на $[a,b]$ **распределение**.

Плотность распределения

$$\boxed{p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x > b, x < a \end{cases}} \tag{9.17}$$

В точках a и b плотность не определена. Вообще говоря, в этих точках плотность можно доопределить.

График плотности распределения (9.17) придавлен на рис. 9.1. Как и для любой плотности, площадь под ее графиком равна 1. Отметим, что данное распределение описывает элементный исход в геометрической вероятности, если мы бросаем точку на отрезок. Вероятность

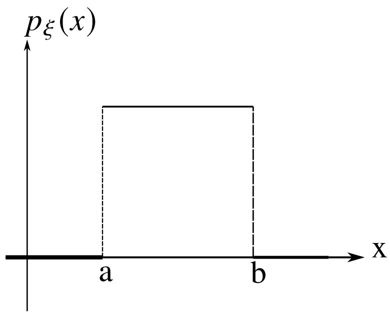

Рис. 9.1: Плотность равномерного распределения.

попадания в любую область зависит только от размера этой области.

Среди равномерных распределений мы будем выделять **стандартное** $\mathbb{U}\,[]0,1]$.

$$\xi \in \mathbb{E}(a), \quad a > 0 \tag{9.18}$$

– **экспоненциальное (показательное) распределение**.

Здесь плотность имеет вид

$$\boxed{p_\xi(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}} \tag{9.19}$$

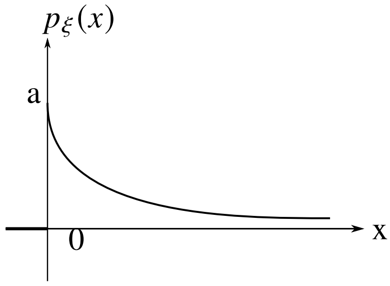

Рис. 9.2: Плотность экспоненциального распределения.

График плотности представлен на рис. 9.2. Отметим, что плотность не определена в нуле. Площадь под графиком равна 1.

Стандартное $\mathbb{E}(1)$.

Еще одно распределение обозначается

$$\xi \in \mathbb{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \tag{9.20}$$

– **нормальное (гауссово) распределение**.

Здесь

$$\begin{gathered} -\infty < \mu < \infty \\ \sigma^2 > 0 \\ \mu, \sigma = const \end{gathered} \tag{9.21}$$

– параметры распределения.

Гауссово распределение задается плотностью

$$\boxed{p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \tag{9.22}$$

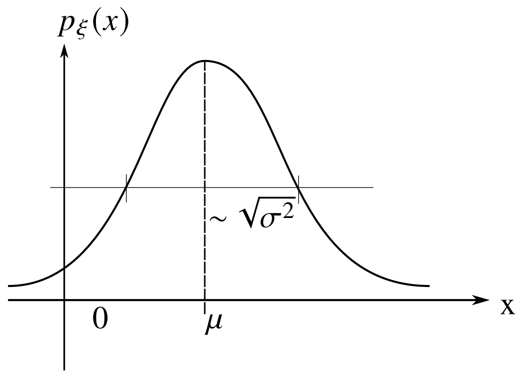

Рис. 9.3: Плотность гауссова распределения.

График плотности представлен на рис. 9.3. В сущности это гауссов колокольчик, причем параметр σ^2 определяет его ширину. Например, если мы на любой высоте возьмем между двумя точками графика, то оно будет пропорционально $\sqrt{\sigma^2}$. Значит, чем больше σ, тем шире будет график. Отметим, что площадь под графиком должна быть равна 1, поэтому если мы увеличиваем σ, то амплитуда плотности уменьшится.

Стандартное нормальное распределение $\mathbb{N}(0,1)$ имеет плотность

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{9.23}$$

Задача 1.

Пусть ξ = количество орлов при $2n$ бросаниях правильной монеты.

Зададим случайную величину η = модуль разности между количеством орлов и решек. Найти распределение случайной величины η.

Решение. Определим, как распределено ξ. Понятно, что ее распределение имеет вид

$$\xi \in \mathbb{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right) \tag{9.24}$$

так как монета правильная, значит, вероятность выпадения орла\ решки равна $\frac{1}{2}$.

Запишем выражение для случайной величины

$$\eta = |\xi - (2n - \xi)| = 2\,|n - \xi| \tag{9.25}$$

Определим значения этой случайной величины. Из биномиального распределения имеем множество значений для ξ

$$\xi = 0, 1, \ldots, 2n \tag{9.26}$$

Отсюда получаем множество значений для η

$$\eta = 0, 2, 4, \ldots, 2n \tag{9.27}$$

ξ распределена дискретно, значит, η тоже распр делена дискретно. Теперь нам нужно найти вероятность

$$P(\eta = 2m) = ? \text{ для } m = 0, 1, \ldots, n \tag{9.28}$$

Значит, нам нужно приравнять выражение для η (9.25) к $2m$ и решить полученное уравнение.

$$\text{при } m \neq 0 \;\; 2|\eta - \xi| = 2m \tag{9.29}$$

Получаем

$$\xi = n \pm m \tag{9.30}$$

Отсюда получаем вероятность как сумму вероятностей

$$P(\eta = 2m) = P(\xi = n + m) + P(\xi = n - m) = \frac{C_{2n}^{n+m} + C_{2n}^{n-m}}{2^{2n}} = 2 \cdot \frac{C_{2n}^{n+m}}{2^{2n}} \tag{9.31}$$

Теперь рассмотрим случай $m = 0$

$$m = 0: \quad 2|\eta - \xi| = 0 \tag{9.32}$$

Тогда

$$\xi = \eta \tag{9.33}$$

Отсюда

$$P(\eta = 0) = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \tag{9.34}$$

Отметим, что здесь нет непрерывной зависимости от m в нуле, выражение (9.34) нельзя получить из (9.31) формальной подстановкой $m = 0$.

Проверим дополнительно, что ξ не вылезает за диапазон своих возможных значений. В (9.30) стоит m, которое может меняться, значит, нужно проверить, что бывает при $m = \overline{0, n}$. Видно, что ξ действительно лежит в своем диапазоне значений для всех m.

Аналогичную проверку нужно сделать для биномиальных коэффициентов в ответе: возможна ситуация, в которой биномиальные коэффициенты не определены.

Задача 2.

Пусть случайная величина имеет стандартное нормальное распределение $\xi \in \mathbb{N}(0, 1)$, $\eta = \xi^2$. Найти распределение случайной величины η.

Решение. Выпишем плотность ξ

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty \tag{9.35}$$

Видно, что

$$p_\xi(x) \neq 0 \;\; \forall x \;\; \Rightarrow \;\; -\infty < \xi < \infty \;\; \Rightarrow \;\; \eta = \xi^2 \in [0, \infty) \tag{9.36}$$

это значит, что так как плотность определена во всех точках, случайная величина ξ может принимать любые значения. Это означает, что случайная величина η принимает значения из $[0, \infty)$.

Итак, случайная величина лежит в некотором диапазоне. Значит, слева от этого диапазона функция распределения равна нулю

$$F_\eta(y) = 0 \text{ при } y \leqslant 0 \tag{9.37}$$

поэтому

$$p_\xi(y) = F'_\xi(x) = 0 \text{ при } x < 0 \tag{9.38}$$

Пусть $y > 0$. Найдем функцию распределения по определению

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P\left(\xi^2 < y\right) = P(|\xi| < y) = P\left(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\right) =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{y}<x<\sqrt{y}} p_\xi(x)dx = \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 2\int\limits_{0}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad y > 0 \tag{9.39}$$

Переход от вероятности к интегралу – это просто контекстная замена. Интегралов при такой замене столько, сколько случайных величин стоит под знаком вероятности. В данном случае интеграл один. Область интегрирования – это аргумент вероятности после замены ξ на переменную интегрирования x. Далее мы воспользовались тем, что функция под интегралом четная.

Выражение (9.39) и есть ответ. Отметим, что функция распределения непрерывна. В нуле функция распределения равна 0, причем это значит, что в $x = 0$ полученная функция распределения сшивается непрерывным образом с полученным выше выражением (9.37). Это можно было понять и раньше. По определению ξ (величина распределена абсолютно непрерывно, поэтому каждое конкретное значение принимается с вероятностью 0)

$$P(\xi = x) = 0 \quad \forall x \tag{9.40}$$

поэтому

$$P(\eta = y) = P\left(\xi = \pm\sqrt{y}\right) = 0 \tag{9.41}$$

Теперь найдем плотность вероятности

$$p_\eta(y) = F'_\eta(y) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\Bigg|_{x^2=\sqrt{y}} \cdot \frac{d}{dy}\sqrt{y} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0 \tag{9.42}$$

Здесь мы воспользовались общей формулой дифференцирования интеграла по верхнему пределу.

Таким образом, плотность вероятности η имеет вид, представленный на рис. 9.4. Отметим, что при $y < 0$ плотность равна 0, а при $y > 0$ плотность неограниченно растет в нуле и имеет экспоненциальный спад в остальных точках.

Замечание. Случайная величина ξ^2 имеет свое название. η имеет распределение **хи-квадрат с 1 степенью свободы**. Степень свободы равна 1, так как здесь одна случайная величина.

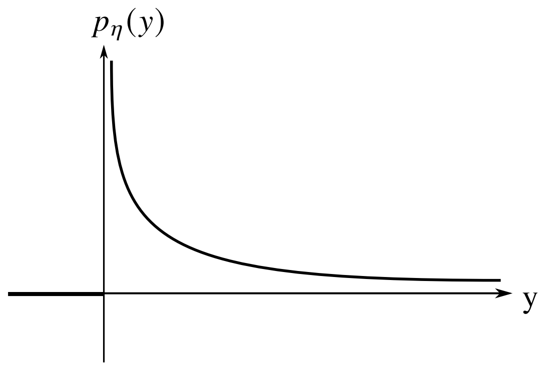

Рис. 9.4: Плотность распределения η.

Семинар 10. Распределение функций от случайных величин (продолжение).

Задача 1.

Рассмотрим случайную величину как функцию двух случайных величин

$$\eta = g\left(\xi_1, \xi_2\right) \tag{10.1}$$

Пусть ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины с функциями распределения $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)$. Рассмотрим случайные величины вида

$$\eta_* = min\left(\xi_1, \xi_2\right) \tag{10.2}$$

$$\eta^* = max\left(\xi_1, \xi_2\right) \tag{10.3}$$

Найти распределения случайных величин η_* и η^*.

Решение. Выразим функцию распределения η_* через известные функции распределения. Для этого перейдем к дополнительному событию

$$F_*(y) = P\left(\eta_* < y\right) = P\left(min\left(\xi_1, \xi_2\right) < y\right) = 1 - P\left(min\left(\xi_1, \xi_2\right) \geqslant y\right) \tag{10.4}$$

Заметим, что если выполняется

$$min\left(\xi_1, \xi_2\right) \geqslant y \tag{10.5}$$

то для каждой из случайных величин ξ_i верно

$$\begin{cases} \xi_1 \geqslant y \\ \xi_2 \geqslant y \end{cases} \tag{10.6}$$

Таким образом, события (10.5) и (10.6) равносильны. Значит, мы можем продолжить (10.4):

$$\begin{aligned} F_*(y) = 1 - P\left(\xi_1 \geqslant y_1, \xi_2 \geqslant y\right) = 1 - P\left(\xi_1 \geqslant y\right) \cdot P\left(\xi_2 \geqslant y\right) = \\ = 1 - \big(1 - F_1(y)\big)\big(1 - F_2(y)\big), \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{10.7}$$

Таким образом, если мы имеем дело с некоторой вероятностью, ассоциированной с некоторыми случайными величинами, мы можем с ней работать так же, как и с обычными случайными величинами.

Распишем функцию распределения случайной величины η^*

$$F^*(y) = P(\eta^* < y) = P(max(\xi_1, \xi_2) < y) = P(\xi_1 < y, \xi_2 < y) = F_1(y) \cdot F_2(y),\ y \in \mathbb{R} \tag{10.8}$$

Здесь мы воспользовались тем, что событие $max(\xi_1, \xi_2) < y$ равносильно событию $\xi_i < y,\ i = 1, 2$.

Понятно, что если случайных величин будет больше, чем две формулы будут аналогичными.

Таким образом, функция распределения максимума двух случайных величин есть произведение функций распределения.

Задача 2.

ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, имеющие дискретное распределение.

Пусть эти величины распределены по Пуассону

$$\begin{aligned} \xi_1 \in \mathbb{P}(\lambda_1) \\ \xi_2 \in \mathbb{P}(\lambda_2) \end{aligned} \tag{10.9}$$

Рассмотрим случайную величину

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 \tag{10.10}$$

Найти распределение случайной величины η.

Решение. По условию, ξ_1 распределена по Пуассону, то есть

$$P(\xi_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1},\quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.11}$$

Аналогично для ξ_2.

Таким образом, каждая случайная величина ξ_i принимает целые неотрицательные значения. Значит, η тоже принимает целые неотрицательные значения (если две случайные распределены дискретно, то любая функция от них тоже распределена дискретно) $\eta = 0, 1, \ldots$. Таким образом, нам нужно найти вероятность $P(\eta = m)$.

$$P(\eta = m) = \sum_{\substack{k,j \in \{0,1,\dots\} \\ k+j=m}} P(\xi_1 = k, \xi_2 = j) = \sum_{\substack{k,j \in \{0,1,\dots\} \\ k+j=m}} P\Big(\xi_1 = k, \xi_2 = \underbrace{m-k}_{=j\geqslant 0}\Big) \stackrel{1}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} P(\xi_1 = k) \cdot P(\xi_2 = m-k) \stackrel{2}{=} \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$\stackrel{3}{=} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{m-k} \stackrel{4}{=} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, \quad m = 0, 1, 2, \tag{10.12}$$

$\stackrel{1}{=}$ – здесь сумма стала одномерной. Теперь нам надо понять, в каких пределах ведется суммирование. Здесь мы учтем, что k принимает целые неотрицательные значения, но при этом $m-k$ тоже должно быть неотрицательно, так как $j \geqslant 0$. Это условие дает нам верхнюю границу суммирования.
$\stackrel{2}{=}$ – подставим в полученную формулу заданные вероятности
$\stackrel{3}{=}$ – приведем формулу к более удобному виду. Умножим и разделим всё выражение на $m!$, чтобы собрался биномиальный коэффициент
$\stackrel{4}{=}$ – под суммой получился бином Ньютона

Таким образом, мы получили, что сумма двух независимых пуассоновых распределений тоже есть пуансоново распределение:

$$\eta \in \mathbb{P}(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{10.13}$$

Задача 3.

Пусть ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, ξ_1 имеет поранюсь вероятности $p_\xi(\cdot)$, ξ_2 распределена дискретно.

Пусть ξ_1 имеет равномерное распределение

$$\xi_1 \in \mathbb{U}[0, 1] \tag{10.14}$$

А ξ_2 принимает два значения

$$P(\xi_2 = 0) = P(\xi_2 = 1) = \frac{1}{2} \tag{10.15}$$

Задана случайная величина вида

$$\eta = \xi_1 \cdot \xi_2 \tag{10.16}$$

Найти распределение случайной величины η.

Решение. Определим диапазон возможных значений η. Известно, что $0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1$, $\xi_2 = 0, 1$. Поэтому $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Понятно, что случайная величина не может быть распределена дискретно. Значит, нам нужно посчитать функцию распределения. Отсюда понятно, что

$$F_\eta(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \leqslant 0 \tag{10.17}$$

Здесь стоит нестрогое неравенство, потому что в 0 $\eta = 0$.

$$F_\eta(y) = 1 \quad \text{при} \quad y > 1 \tag{10.18}$$

Пусть $0 < y \leqslant 1$. Тогда функция распределения имеет вид

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\xi_1 \cdot \xi_2 < y) \tag{10.19}$$

У нас есть полная группа событий. У нас есть события $\{\xi_2 = 0\}$ и $\{\xi_2 = 1\}$. Эти события не пересекаются, так как ξ_2 не может принимать два значения. Вероятность этих событий в сумме дают 1

$$P(\xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 1) = 1 \tag{10.20}$$

Поэтому для этих событий можно воспользоваться формулой

$$P(A) = P(A \cap B_0) + P(A \cap B_1) \tag{10.21}$$

где

$$\begin{cases} B_0 \cap B_1 = \emptyset \\ P(B_1 + B_2) = 1 \end{cases} \tag{10.22}$$

Поэтому в качестве события А можно вязать события для η, а в качестве событий $B_{0,1}$ – события для ξ_2. Тогда функция распределения

$$\begin{aligned} F_\eta(y) = P(\xi_1 \cdot \xi_2 < y_1,\ \xi_2 = 0) + P(\xi_1 \cdot \xi_2 < y,\ \xi_2 = 1) = \\ = P(0 < y,\ \xi_2 = 0) + P(\xi_1 < y,\ \xi_2 = 1) \end{aligned} \tag{10.23}$$

Распишем вторую вероятность:

$$P(\xi_1 < y, \xi_2 = 1) = P(\xi_1 < y) P(\xi_2 = 1) = F_{\xi_1}(y) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \begin{cases} 0,\ y \leqslant 0 \\ y,\ 0 < y \leqslant 1 \\ 1,\ \ y > 1 \end{cases} \tag{10.24}$$

Распишем первую вероятность из (10.24). Для этого рассмотрим событие $\{0 < y\}$ имеет вероятность 0 или 1, так как вообще говоря это не случайное событие. Здесь y – аргумент функции F_η, причем он всегда больше нулю (мы рассматриваем область $0 < y < 1$). Поэтому

$$P\left(0 < y\right) = 1 \tag{10.25}$$

Следовательно, это событие не зависимо от события $\xi_2 = 0$. Значит,

$$P\left(0 < y, \xi_2 = 0\right) = P\left(0 < y\right) P\left(\xi_2 = 0\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \tag{10.26}$$

Итак, из (10.24) получаем

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, \quad y \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, \quad 0 < y \leqslant 1 \\ 1, \quad y > 1 \end{cases} \tag{10.27}$$

Изобразим график функции распределения на рис. 10.1 . Получаем кусочно-постоянную функцию, которая равна 0 в нуле.

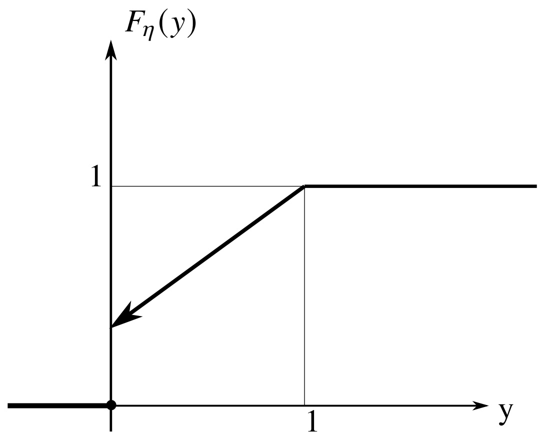

Рис. 10.1: Функция распределения η

Отметим, что здесь наблюдается скачок

$$F_\eta\left(0+0\right) = F_\eta(0) = \frac{1}{2} = P\left(\eta = 0\right) = P\left(\xi_1\xi_2 = 0\right) = P\left(\xi_2 = 0\right) = \frac{1}{2} \tag{10.28}$$

Здесь мы учли, что $\xi_1 = 0$ с вероятностью 0. Понятно, что остальные значения (например, y) η принимает с вероятностью 0, так как для этого нужно, чтобы $\xi_2 = 1$, а $\xi_1 = y$. При этом вероятность $P\left(\xi_1 = y\right) = 0$. Поэтому получаем, что во всех остальных точках функция непрерывна.

Задача 4.

ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины с плотностями вероятности $p_{\xi_1}(\cdot)$ и $p_{\xi_2}(\cdot)$. Пусть ξ_1 распределена равномерно: $\xi_1 \in \mathbb{U}\,[0, 1]$, а для ξ_2 плотность задана в явном виде

$$p_{\xi_2}(x) = 2x, \quad 0 < x < 1 \tag{10.29}$$

Найти распределение случайной величины вида

$$\eta = \xi_1 + \xi_2^2 \tag{10.30}$$

Решение. Определим множество возможных значений η. Учтем, что $0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1$ и $0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1$, так как

$$\int\limits_0^1 p_{\xi_2}(x)dx = P\left(0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1\right) = 1 \tag{10.31}$$

то есть вне интервала $[0, 1]$ плотность должна быть равна нулю, так как в противном случае не будет выполняться условие нормировки плотности.

Поэтому получаем, что $0 \leqslant \eta \leqslant 2$. Отсюда получаем

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \\ 1, & y > 2 \end{cases} \tag{10.32}$$

Пусть $0 < y < 2$. Найдем функцию распределения в этом интервале

$$F_\eta(y) = P\left(\eta < y\right) = O\left(\xi_1 + \xi_2^2 < y\right) \tag{10.33}$$

Есть несколько способов найти указанную вероятность.

Способ 1. Ищем эту вероятность "в лоб" , через двойной интеграл (*интегралов столько, сколько у нас случайных величин, под интегралом – совместная плотность от каких-то переменных интегрирования*)

$$P\left(\xi_1 + \xi_2^2 < y\right) = \iint\limits_{x_1 + x_2^2 < y} p_{\xi_1\xi_2}\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\substack{x_1 + x_2^2 < y \\ 0 < x_1, x_2 < 1}} 1 \cdot 2x_2 dx_1 dx_2 \tag{10.34}$$

Здесь нужно не забывать ограничения, наложенные на плотности (вне интервала $0 < x_1, x_2 < 1$ плотности равны нулю).

Сведем двойной интеграл к повторному. Для этого нужно нарисовать область интегрирования, если это возможно. Изобразим область интегрирования на рис. 10.2.

Понятно, что граница области – это $x_1 = y - x_2^2$. Это парабола, идущая из точки y вниз.

Отметим, что (10.35) – это *семейство интегралов зависимости от* y. Поэтому имеем и другой вариант области интегрирования (рис. 10.3).

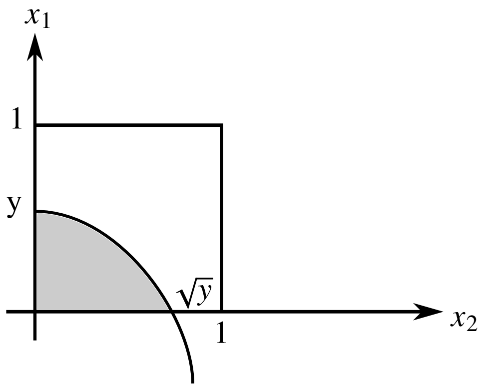

Рис. 10.2: Область интегрирования в случае $0 < y \leqslant 1$

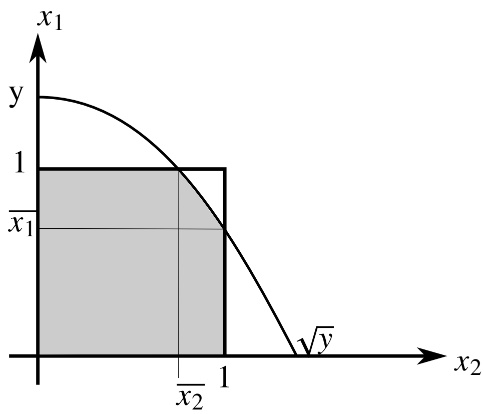

Рис. 10.3: Область интегрирования в случае $1 < y \leqslant 2$

Рис. 10.4: Зависимость сигнала от шума для данных.

Рассмотрим область $0 < y \leqslant 1$. Нам нужно посчитать интеграл по области под параболой на рис. 10.2. Интеграл – это в сущности сумма по непрерывному множеству точек. Мы берем каждую точку в рассматриваемой области, приписываем ей вес (который стоит под интегралом), и суммируем веса всех точек по всей области. Поэтому переход от двойного интеграла к повторному – это в сущности суммирование в определенном порядке. Например, можно замести всю область вертикальными прямыми, перечислить точки области по отрезку, а потом подвинуть этот отрезок по всей области. Аналогично можно сделать с горизонтальными отрезками. Рассмотрим первый случай. Будем сперва интегрировать по вертикальному отрезку. Это означает, что внутренний интеграл – по x_2, а внешний – по x_1 (сначала берем интеграл по вертикальному отрезку, то есть при фиксированном x_2) (первый интеграл в (10.36)). Видно, что если мы движемся по вертикальному отрезку, x_1 меняется в пределах $[0, y - x_2^2]$. Аналогично можно сделать при разбиении области на горизонтальные прямые (второй интеграл в (10.36))

$$I_1 = \int\limits_0^{\sqrt{y}} dx_2 \int\limits_0^{y-x_2^2} dx_1\ 1 \cdot 2x_2 = \int\limits_0^{y} dx_1 \int\limits_0^{\sqrt{y-x_1}} dx_2 1 \cdot 2x_2 \tag{10.35}$$

Теперь рассмотрим второй случай: $1 < y \leqslant 2$ (рис. 10.3). Посчитаем тот же интеграл в новой области двумя способами:

$$I_2 = \int dx_2 \int dx_1 2x_2 = \int dx_1 \int dx_2 \cdot 2x_2 \tag{10.36}$$

Отметим, что в случае вертикальных отрезков характер верхней границы будет различным (частично граница области проходит по горизонтальной прямой $x_1 = 1$, а частично – по параболе). Поэтому указанный интеграл нужно разбить на два. Для этого вводим точку пересечения отрезка с параболой $\overline{x_2}$ (рис. 10.3). Разобьём интеграл на два:

$$I_2 = I_{21} + I_{22} \tag{10.37}$$

Распишем часть интеграла в первой подобласти

$$I_{21} = \int\limits_0^{\overline{x_2}} dx_2 \int\limits_0^1 dx_1 2x_2 \tag{10.38}$$

Аналогично (в случае, когда верхняя граница – парабола)

$$I_{22} = \int\limits_{\overline{x_2}}^1 dx_2 \int\limits_0^{y-x_2^2} dx_1 2x_2 \tag{10.39}$$

Найдем точку пересечения прямой $x_1 = 1$ и параболы:

$$\overline{x_2} : \quad 1 = y - \overline{x_2} \tag{10.40}$$

Тогда получаем

$$\overline{x_2} = \sqrt{y-1} \tag{10.41}$$

Рассмотрим второй способ – интегрируем сначала по вертикальной прямой, а потом передвигаем прямую. Это означает, что внутренний интеграл будет по dx_1. Получаем аналогичную ситуацию: граница определена не однозначно, нужно разбить интеграл на два:

$$I_2 = \widetilde{I}_{21} + \widetilde{I}_{22} \tag{10.42}$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\widetilde{I}_{21} = \int\limits_0^{\overline{x_1}} dx_1 \int\limits_0^1 dx_2 2x_2 \tag{10.43}$$

Второй интеграл:

$$\widetilde{I}_{22} = \int\limits_{\overline{x_1}}^1 dx_1 \int\limits_0^{\sqrt{y-x_1}} dx_2 2x_2 \tag{10.44}$$

Где точка пересечения равна

$$\overline{x_1} = y - 1 \tag{10.45}$$

Второй способ. Найдем интеграл по криволинейному треугольнику, который не входит в область интегрирования (рис. 10.5) – $\overline{I}_2$.

Интеграл по прямоугольнику равен единице, поэтому получаем

$$I_2 = 1 - \overline{I_2} \tag{10.46}$$

Указанный интеграл также можно посчитать двумя способами:

$$\overline{I_2} = \int\limits_{\overline{x_1}}^{1} dx_1 \int\limits_{\sqrt{y-x_1}}^{1} dx_2 2x_2 = \int\limits_{\overline{x_2}}^{1} dx_2 \int\limits_{y-x_2^2}^{1} dx_1 2x_2 \tag{10.47}$$

Замечание. Переменные во внутреннем интеграле могут зависеть только от внешней переменной и от y – это должен быть определенный интеграл. При этом внешний интеграл имеет пределы, зависящие только от y.

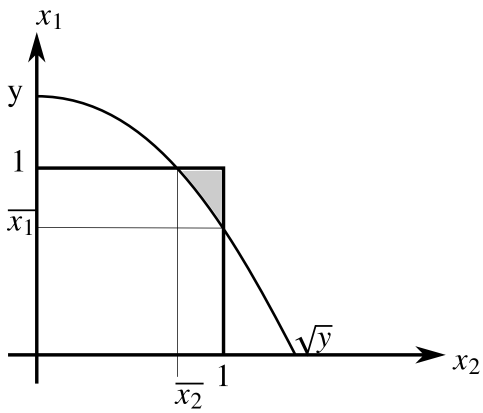

Рис. 10.5: Второй способ вычисления интеграла.

Задача 5.

Пусть x_1, ξ_2 – независимые случайные величины, распределенные стандартно нормально $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{N}(0,1)$. Зададим случайную величину **хи-квадрат**

$$\chi_2^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 \tag{10.48}$$

Найти плотность вероятности этой случайной величины.

Решение. Найдем область значений случайной величины χ_2^2. Известно, что $-\infty < \xi_1, \xi_2 < \infty$. Поэтому $\chi_2^2 \geqslant 0$. Поэтому функция распределения равна нулю вне этой области:

$$F_{\chi_2^2}(y) = 0, \quad y \leqslant 0 \tag{10.49}$$

Рассмотрим функцию распределения при $y > 0$

$$F_{\chi_2^2}(y) = P\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 < y\right) = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2<y} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2<y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint\limits_{r^2<y} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi e^{-\frac{r^2}{2}} \Bigg|_{\sqrt{y}}^{0} = 1 - e^{-\frac{y}{2}} \quad (10.50)$$

Итак, нам нужно посчитать указанный интеграл. Перейдем к полярным координатам (область интегрирования – круг на плоскости x_1, x_2):

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \end{aligned} \quad (10.51)$$

В результате получим (10.51).

Поэтому функция распределения имеет вид

$$F_{\chi_2^2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \end{cases} \quad (10.52)$$

Понятно, что функция распределения непрерывная в нуле, значит, ее плотность равна

$$p_{\chi_2^2}(y) = F'_{\chi_2^2}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \end{cases} \quad (10.53)$$

Отсюда получаем, что случайная величина имеет экспоненциальное распределение с параметром $\frac{1}{2}$

$$\chi_2^2 \in \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (10.54)$$

Семинар 11. Условные распределения.

Условные распределения.

Пусть ξ – случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и событие

$$B \in \mathcal{F}: \quad P(B) \neq 0 \tag{11.1}$$

Тогда можно определить условное распределение ξ при фиксированном B

$$F_{\xi}(x|B) \stackrel{def}{=} P(\xi < x|B), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{11.2}$$

– **условная функция распределения**.

Пример. Будем искать $F_{\xi}(x|\xi \geqslant 1) =?$, задана безусловная функция распределения $F_{\xi}(\cdot)$ (то есть этой функцией распределения определяется случайная величина, которая стоит за вертикальной чертой).

Воспользуемся формулой условной вероятности (вероятность совместного наступления двух событий делить на вероятность условия)

$$F_{\xi}(x|\xi \geqslant 1) = P(\xi < x|\xi \geqslant 1) = P\frac{(1 \leqslant \xi < x)}{P(\xi \geqslant 1)} = \frac{F_{\xi}(x) - F_{\xi}(1)}{1 - F_{\xi}(1)} \quad \text{для } x > 1 \tag{11.3}$$

Понятно, что при $x \leqslant 1$ имеем

$$P(\xi \geqslant 1, \xi < x) = 0 \tag{11.4}$$

так как под знаком вероятности стоят противоречивые неравенства. Поэтому получаем

$$F_{\xi}(x|\xi \geqslant 1) = 0 \text{ при } x \leqslant 1 \tag{11.5}$$

Замечание. Все последующие задачи требуют не столько расчета вероятности как таковой, а использование формул полной вероятности и Байеса.

Во всех задачах надо будет найти одно и то же: найти распределение одной случайной величины при фиксированной другой случайной величине

Задача 1.

Пусть ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, и распределены по Пуассону:

$$\begin{aligned} \xi_1 \in \mathbb{P}(\lambda_1) \\ \xi_2 \in \mathbb{P}(\lambda_2) \end{aligned} \tag{11.6}$$

Зададим случайную величину вида

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 \tag{11.7}$$

Найти распределение случайной величины ξ_1 при условии, что сумма фиксирована $\eta = n$.

Решение. Отметим, что данная задача может встречаться в реальной жизни. Например, пусть мы можем наблюдать только сумму случайных величин. При этом нас интересует, как ведет себя одно из слагаемых. Мы произвели наблюдение, получили результат: $\eta = n$. Тогда при этом условии мы можем что-то сказать о распределении ξ_1.

Пусть $n = fix \ \ (n \in \{0, 1, \ldots, n\})$. Тогда

$$\xi_1 + \xi_2 = n \tag{11.8}$$

отсюда получаем, что $\xi_1 \leqslant n$, то есть $\xi_1 = 0, 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, распределение случайной величины ξ_1 при условии $\eta = n$ разумно искать только для указанных значений ξ_1.

Распишем условную вероятность по определению и воспользуемся формулой Байеса

$$P\left(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n\right) = \frac{P\left(\xi_1 = k,\ \xi_1 + \xi_2 = n\right)}{P\left(\xi_1 + \xi_2 = n\right)} = \frac{P\left(\xi_1 + \xi_2 = n | \xi_1 = k\right) \cdot P\left(\xi_1 = k\right)}{P\left(\xi_1 + \xi_2 = n\right)} \tag{11.9}$$

Вероятность $P\left(\xi_1 = k\right)$ нам известна, так как она задана в условии задачи как пуассонова вероятность. Таким образом, нам нужно посчитать только условную вероятность $P\left(\xi_1 + \xi_2 = n | \xi_1 = k\right)$. Найдем её

$$P\left(\xi_1 + \xi_2 = n | \xi_1 = k\right) = P\left(k + \xi_2 = n | \xi_1 = k\right) = P\left(\xi_2 = n - k | \xi_1 = k\right) \overset{\text{нсв}}{=} P\left(\xi_2 = n - k\right) \tag{11.10}$$

Теперь воспользуемся формулой полной вероятности для того, чтобы найти знаменатель (11.9)

$$P\left(\xi_1 + \xi_2 = n\right) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\xi_1 + \xi_2 = n | \xi_1 = k\right) P\left(\xi_1 = k\right) = \frac{\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \tag{11.11}$$

Здесь мы учли, что нам известно, как распределена сумма двух независимых пуассоновых величин (см. прошлый семинар).

Подставим в (11.9) явные значения (11.10) и (11.11)

$$P\left(\xi_1 = k|\xi_1+\xi_2 = n\right) = \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\cancel{e^{-\lambda_2}} \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!}\cancel{e^{-\lambda_1}} \frac{1}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}} =$$
$$= C_n^k \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}}_{:=q=1-p} \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k}}_{:=p} = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{11.12}$$

Таким образом, условное распределение слагаемого – это биномиальное распределение с параметром p. Это следствие того, что пуассоново распределение – это предел биномиального.

Замечание. справедливо равенство условной вероятности безусловной вероятности

$$P\left(\xi_1+\xi_2 = n|\xi_1 = k\right) = P\left(\xi_2 = n-k\right) \tag{11.13}$$

Это равенство верно только потому, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы. Если бы данные случайные величины не были бы независимы, такое равенство неверно. В этом случае можно воспользоваться выражением

$$P\left(X|A\right) = P\left(X_A|A\right), \quad \text{где } \; X_A = X \cap A \tag{11.14}$$

И если X и A не являются независимыми случайными величинами, то можно воспользоваться формулой

$$\begin{gathered} P\left(X\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(X \cap A_k\right), \quad \text{если} \\ A_k \cap A_j = \emptyset \\ A_1 + \ldots + A_n = \Omega \end{gathered} \tag{11.15}$$

Задача 2.

Пусть ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, заданы их плотности $p_{\xi_1}(\cdot)$, $p_{\xi_2}(\cdot)$. Задаем случайную величину вида

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 \tag{11.16}$$

Найти условную плотность при фиксированной сумме $p_{\xi_1|\xi_1+\xi_2}(x|z)$, $x, z \in \mathbb{R}$.

Решение. Распишем условную плотность как отношение совместной плотности и плотности условия. Также воспользуемся аналогом формулы Байеса

$$p_{\xi_1|\xi_1+\xi_2}(x|z) = \frac{p_{\xi_1,\xi_1+\xi_2}(x,z)}{p_{\xi_1+\xi_2}(z)} = \frac{p_{\xi_1+\xi_2|\xi_1}(z|x)\, p_{\xi_1}(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1+\xi_2|\xi_1}(z|x) p_{\xi_1}(x) dx} \tag{11.17}$$

Видно, что полученное выражение определяется произведением $p_{\xi_1+\xi_2|\xi_1}(z|x)\, p_{\xi_1}(x)$, так как это произведение стоит и в числителе, и в знаменателе.

Найдем это произведение. Рассмотрим плотность $p_{\xi_1+\xi_2|\xi_1}(z|x)$. В этом случае сумма $\xi_1 + \xi_2$ лежит в малой окрестности точки z

$$\xi_1 + \xi_2 \approx z \tag{11.18}$$

а ξ_1 – в окрестности точки x

$$\xi_1 \approx x \tag{11.19}$$

Поэтому

$$\xi_2 \approx z - x \tag{11.20}$$

Нам хочется получить

$$p_{\xi_1+\xi_2|\xi_1}(z|x) = p_{\xi_2|\xi_1}(z - x|x) \overset{\text{нсв}}{=} p_{\xi_2}(z - x) \tag{11.21}$$

Здесь это равенство (11.21) верно. Однако, вообще говоря, она верна не всегда. Чтобы понять это, рассмотрим произведение $p_{\xi_1+\xi_2|\xi_1}(z,x)\, p_-\xi_1(x)$ как совместную плотность

$$p_{\xi_1+\xi_2|\xi_1}(z|x)\, p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_1,\xi_1+\xi_2}(x,z) \tag{11.22}$$

По определению совместная плотность равна

$$\begin{aligned} p_{\xi_1,\xi_1+\xi_2}(x,z) dx dz &\overset{def}{=} P\left(x \leqslant \xi_1 < x + dx,\ z \leqslant \xi_1 + \xi_2 < z + dz\right) = \\ &= \iint\limits_{\substack{x \leqslant x_1 < x + dx \\ z \leqslant x_1 + x_2 < z + dz}} p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) dx_1 dx_2 =: I \end{aligned} \tag{11.23}$$

Преобразуем этот интеграл так, чтобы в нем появилась структура $dxdz$. Для этого произведем замену переменных, чтобы упростить область интегрирования

$$\begin{matrix} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \end{matrix} \tag{11.24}$$

Тогда интеграл будет равен

$$I = \iint\limits_{\substack{x \leqslant y_1 < x+dx \\ z \leqslant y_2 < z+dz}} p_{\xi_1}(y_1)p_{\xi_2}(y_2 - y_1)\underbrace{J(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}_{=dx_1 dx_2} \tag{11.25}$$

где $J(y_1, y_2)$ – якобиан перехода:

$$J(y_1, y_2) = \frac{dx_1 dx_2}{dy_1 dy_2} \tag{11.26}$$

Найдем якобиан перехода в явном виде

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{11.27}$$

Таким образом, воспользовавшись теоремой о среднем, получим выражение для интеграла (11.23)

$$I = p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(z - x) \cdot 1 \cdot dxdz \tag{11.28}$$

Отсюда получаем

$$p_{\xi_1, \xi_1+\xi}(x, z) = p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(z - x) \tag{11.29}$$

Задача 3.

Рассмотрим аналогичную задачу, но с другой случайной вилочной η

$$\eta = \xi_1 \cdot \xi_2 \tag{11.30}$$

Нужно найти условную плотность $p_{\eta|\xi_1}(z|x)$.

Решение. Аналогично получаем

$$\begin{matrix} \eta = \xi_1 \cdot \xi_2 \approx z \\ \xi_1 \approx x \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \xi_2 \approx \frac{z}{x} \tag{11.31}$$

Пусть $\xi_1 \geqslant 0$ с вероятностью 1. Аналогично прошлой задаче произведем замену переменных для соответствующего интеграла

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_1 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{11.32}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= \tfrac{y_2}{y_1} \end{aligned} \tag{11.33}$$

Тогда $y_1 > 0$. Якобиан перехода

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cdot & \frac{1}{y_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1} \tag{11.34}$$

Тогда условная плотность равна

$$p_{\eta|\xi_1}(z|x) = p_{\xi_2}\left(\frac{z}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \tag{11.35}$$

В сущности замена переменных в данном случае эквивалентна выражению

$$\eta = \xi_1\xi_2\Big|_{\xi_1=x} = x\xi_2 \tag{11.36}$$

При этом мы в явном виде учитываем, что после замены переменных могут меняться элементарные плотности, на которые умножается плотность, чтобы получить вероятность.

Отметим, что плотность вероятности также можно найти через функцию распределения. То есть сначала можно найти

$$F_{\eta,\xi}(z,x) = P(\eta < z, \xi < x) \tag{11.37}$$

а потом плотность вероятности

$$p_{\eta,\xi}(z,x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \tag{11.38}$$

Семинар 12. Математические ожидания.

Математическое ожидание.

Для заданной случайной величины математическое ожидание – это число, заданное по правилу

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) = \begin{cases} \sum\limits_k x_k P\left(\xi = x_k\right) & (\text{Д}) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx & \text{АН} \end{cases} \tag{12.1}$$

Если $F_\xi(x)$:

$$\begin{gathered} \exists F'_\xi(x) \ \text{ для } \ x \in X \\ \exists x_k : \ P\left(\xi = x_k\right) = F_\xi\left(x_k + 0\right) - F_\xi(x_k) \neq 0 \end{gathered} \tag{12.2}$$

то есть речь идёт о **смешанном распределении**, то математическое ожидание рассчитывается как сумма указанных конструкций

$$M\xi = \sum_k x_k P\left(\xi = x_k\right) + \int_X x \cdot F'_\xi(x) dx \tag{12.3}$$

Смысл математического ожидания: математическое ожидание – это взвешенное среднее возможных значений случайной величины, причем веса каждого значения определяются вероятностями того, что ξ примет это значение.

Свойства математического ожидания.

Если задана некоторая случайная величина как функция от ξ: $\eta = g(\xi)$, то математическое ожидание можно вычислить по двум формулам:

$$M\eta \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y dF_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_\xi(x) \tag{12.4}$$

В первом случае мы усредняем саму величину η, если нам известна ее функция распределения. Во втором случае мы усредняем функцию от ξ, учитывая функцию распределения ξ.

Замечание. Отметим, что эта формула остается верной и в многомерном случае. В этом случае интеграл становится многомерным, x – многомерная величина, а dF_ξ – совместная функция распределения.

Дисперсия случайной величины

$$D\xi \overset{def}{=} M\left(\xi - M\xi\right)^2 = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2 \tag{12.5}$$

Ковариация

$$cov\left(\xi_1, \xi_2\right) \overset{def}{=} M\left(\xi_1 - M\xi_1\right)\left(\xi_2 - M\xi_2\right) = M\xi_1\xi_2 - M\xi_1 \cdot M\xi_2 \in \mathbb{R} \tag{12.6}$$

Нет никаких ограничений на значения коэффициента ковариации.

Характеристическая функция – это математическое ожидание вида

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi}, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{12.7}$$

В сущности это образ Фурье от распределения ξ. Характеристическая функция – очень удобный аппарат, с помощью которого можно рассчитывать разные характеристики распределения.

Основные свойства математического ожидания: *математическое ожидание линейно*

$$M\left(a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n + b\right) = a_1M\xi_1 + \ldots + a_nM\xi_n + b \tag{12.8}$$

Это верно для любых случайных величин при условии, что для них существуют математические ожидания.

Условие существования математического ожидания – это абсолютная сходимость соответствующих интегралов в определении математического ожидания.

Дисперсия суммы

$$D\left(a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n + b\right):$$

имеет вид

- в случае умножения

$$D\left(a\xi + b\right) = a^2D\xi \tag{12.9}$$

- в случае обычной суммы

$$D\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right) = \sum_{k=1}^{n} D_{\xi_k} + \sum_{k \neq j} cov\left(\xi_k, \xi_j\right) \tag{12.10}$$

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – **независимые** случайные величины, то *математическое ожидание* *произведения равно произведению математических ожиданий*

$$M\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n = M\xi_1 \cdot \ldots \cdot M\xi_n \tag{12.11}$$

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – **независимые случайные величины**, то *ковариация между ними равна нулю*

$$cov\left(\xi_1, \xi_2\right) = 0 \tag{12.12}$$

Тогда *дисперсия суммы равна сумме дисперсий*

$$D\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right) = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n \tag{12.13}$$

Задача 1.

Найти $M\xi, D\xi$ для пуассоновой случайной величины $\xi \in \mathbb{P}(\lambda)$.

Решение. Случайная величина – дискретная, значит нужно воспользоваться формулой для дискретного распределения:

$$M\xi = \sum_k x_k P\left(\xi = x_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \stackrel{1}{=} \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^{k-1} \cdot \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \stackrel{2}{=}$$
$$= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\left(\lambda^k\right)}{d\lambda} \cdot \frac{1}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \stackrel{3}{=} \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \tag{12.14}$$

$\stackrel{1}{=}$ – заметим, что мы можем суммировать не с нуля, а с единицы, так как $k = 0$ дает нулевой вклад в сумму. Учитывая это, выносим λ за знак суммы
$\stackrel{2}{=}$ – под знаком суммы собралась производная $\frac{d\left(\lambda^k\right)}{d\lambda}$
$\stackrel{3}{=}$ – если снова изменить сумму с $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ на $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$, ничего не изменится, так как слагаемое с $k = 0$ дает константу, которая не влияет на производную.

Найдем дисперсию случайной величины. Для этого найдем математическое ожидание квадрата

$$M\xi^2 = \sum_{\substack{\cancel{k=0} \\ k=1}}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k\left(k-1\right) + k\right] \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{\substack{\cancel{k=1} \\ k=2}}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=\lambda} =$$
$$= \lambda^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{=e^{\lambda}} \cdot e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda \tag{12.15}$$

Таким образом, дисперсия равна

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \tag{12.16}$$

Получили, что у пуассонова распределения и математическое ожидание, и дисперсия равны пуассоновому параметру.

Замечание. Пусть у нас есть некоторая биномиальная случайная величина – количество успехов, то при $n \to \infty$ и $np \to \lambda$ случайная величина по распределению сходится к пуасоновой случайной величине (***теорема Пуассона***)

$$\mathbb{B}\,(n, p) \ni \xi_n \underset{\substack{n \to \infty \\ np \to \lambda}}{\overset{d}{\longrightarrow}} \xi \in \mathbb{P}(\lambda) \tag{12.17}$$

Можно рассчитать математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по пуассону

$$\begin{gathered} M\xi_n = np \\ D\xi_n = npq \end{gathered} \tag{12.18}$$

Таким образом, получаем, что математическое ожидание ξ_n стремится к математическому ожиданию ξ

$$np = M\xi_n \underset{np \to \lambda}{\longrightarrow} M\xi = \lambda \tag{12.19}$$

В случае дисперсии получаем предельный переход

$$npq = np\,(1 - p) = np - np \cdot p \underset{\substack{np \to \lambda \\ p \to 0}}{\longrightarrow} \lambda \tag{12.20}$$

Таким образом,

$$D\xi_n \to D\xi \tag{12.21}$$

Таким образом, *предельный переход в теореме Пуассона гарантирует сходимость случайных величин не только в смысле распределений, но и в смысле математических ожиданий.*

Задача 2.

Найти $M\xi, D\xi$ для нормальной случайной величины $\xi \in \mathbb{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Решение. Воспользуемся определением математического ожидания для абсолютно непрерывной случайной величины. Учтем также, что плотность вероятности отлична от нуля на всей числовой прямой, а значит интеграл действительно будет от $-\infty$ до $+\infty$

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{c} z = \frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} \\ x = \mu + \sqrt{\sigma^2} z \\ dx = \sqrt{\sigma^2} dz \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\mu + \sqrt{\sigma^2} z\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \mu \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{=1} + \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{=0} = \mu \qquad (12.22)$$

Дисперсия по определению равна

$$D\xi = M\Big(\xi - \underbrace{M\xi}_{=\mu}\Big)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot p_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \cdot z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left(-z e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \sigma^2 \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{=1} = \sigma^2 \qquad (12.23)$$

Здесь мы воспользовались той же заменой, что и в (12.22), после чего взяли интеграл по частям.

Задача 3.

Пусть ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, распределенные равномерно на разных отрезках $\xi_1 \in \mathbb{U}[-1, 1]$, $\xi_2 \in \mathbb{U}[0, 1]$. Зададим две новые случайные величины

$$\begin{gathered} \eta_1 = \xi_1 \\ \eta_2 = \xi_1^2 + \xi_2 \end{gathered} \qquad (12.24)$$

Найти ковариацию $cov\,(\eta_1, \eta_2)$.

Решение. Распишем ковариацию в виде

$$cov\,(\eta_1, \eta_2) = M\eta_1\eta_2 - M\eta_1 \cdot M\eta_2 \qquad (12.25)$$

Найдем все математические ожидания из правой части (12.25).

$$M\eta_1 = M\xi_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi_1}(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot \frac{x}{2} dx = 0 \qquad (12.26)$$

Для расчета второго математического ожидания воспользуемся линейностью математического ожидания

$$M\eta_2 = M\left(\xi_1^2 + \xi_2\right) = M\xi_1^2 + M\xi_2 = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2}dx + \int\limits_{0}^{1} x \cdot 1dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \qquad (12.27)$$

Как и следовало ожидать, для равномерного распределения среднее значения равно серединке интервала.

Найдем последнее математическое ожидание

$$M\eta_1\eta_2 = M\xi_1\left(\xi_1^2 + \xi_2\right) = M\xi_1^3 + \underbrace{M\xi_1 \cdot M\xi_2}_{\text{н.с.в.}} = \int\limits_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{1}{2}dx + 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \qquad (12.28)$$

Таким образом, ковариация новых случайных величин равен нулю

$$cov\left(\eta_1, \eta_2\right) = 0 \qquad (12.29)$$

Замечание. Это пример показывает, что равенство нулю ковариации случайных величин не гарантирует независимости этих случайных величин.

Задача 4.

Пусть есть некий прибор. Время работы лампы до перегорания – случайная величина τ:

$$P\left(\tau \geqslant t + s | \tau \geqslant s\right) = P\left(\tau \geqslant t\right) \qquad \forall t, s > 0 \qquad (12.30)$$

Лампу заменяют, если либо она перегорела, либо в некий фиксированный момент времени $\tau = fix$. То есть, если лампа работала довольно долго, неважно, перегорела она или нет, ее надо заменить.

Пусть $\hat{\tau}$ – время работы лампы до замены (не до перегорания). Найти математическое ожидание $M\hat{\tau}$ – среднее время работы лампы до момента, когда её заменят.

Решение. Понятно, что

$$\hat{\tau} = min\left(\tau, T\right) \qquad (12.31)$$

Таким образом, чтобы найти математическое ожидание $\hat{\tau}$, нам нужно найти распределение τ. Однако нам не задано распределение τ, задано только условие на вероятность (12.30). Это условие означает следующее (совместная вероятность делить на вероятность условия)

$$P\left(\tau \geqslant t + s | \tau \geqslant s\right) = \frac{P\left(\tau \geqslant t + s, \tau \geqslant t\right)}{P\left(\tau \geqslant s\right)} = \frac{P\left(\tau \geqslant t + s\right)}{P\left(\tau \geqslant s\right)} = P\left(\tau \geqslant t\right) \qquad (12.32)$$

Здесь мы воспользовались тем, что событие $\tau \geqslant t$ является следствием события $\tau \geqslant t + s$. Последнее равенство следует из условия (12.30).

Введем функцию

$$\overline{F}(t) = P(\tau \geqslant t), \quad t > 0 \tag{12.33}$$

Это функция, дополнительная к функции распределения. Тогда, если в терминах функции $\overline{F}$ перепишем уравнение (12.30), получим

$$\overline{F}(t+s) = \overline{F}(s) \cdot \overline{F}(t) \tag{12.34}$$

Это функциональное уравнение – нужно найти не аргументы, а функции. В данном случае это уравнение имеет очевидное решение

$$\overline{F} = e^{-at}, \qquad a = const \tag{12.35}$$

В аргументе экспоненты стоит знак минус, так как

$$0 \leqslant \overline{F}(t) \leqslant 1 \ \forall t \quad \Rightarrow \quad a > 0 \tag{12.36}$$

Следовательно, функция распределения равна

$$F_\tau(t) = P(\tau < t) = 1 - \overline{F}(t) = 1 - e^{-at} \tag{12.37}$$

Поэтому плотность распределения случайной величины τ

$$p_\tau(t) = F'_\tau(t) = ae^{-at}, \quad t > 0 \tag{12.38}$$

Таким образом, условие (12.30) влечет экспоненциальное распределение случайной величины τ

$$\tau \in \mathbb{E}(a) \tag{12.39}$$

Параметр a мы отсюда определить не можем, это некоторая постоянная. Для определения параметра a нужно задать какие-то реперные точки.

Рассмотрим физический смысл условия (12.30). Рассмотрим событие, которое стоит в левой части равенства (12.30). Нам достоверно известно, что вплоть до монета времени s лампа горела (условие в левой части уравнения). Левое условие в правой части уравнения (12.30) ($\tau \geqslant t + s$) означает, что лампа дополнительно горела t единиц времени (рис. 12.1).

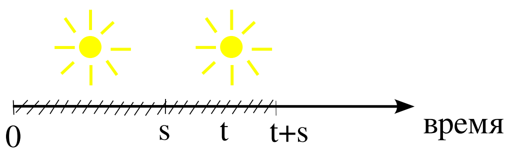

Рис. 12.1: События из левой части уравнения (12.30).

Теперь рассмотрим правую часть уравнения (12.30). Здесь рассматривается событие: лампа горела вплоть до момента времени t (рис. 12.2).

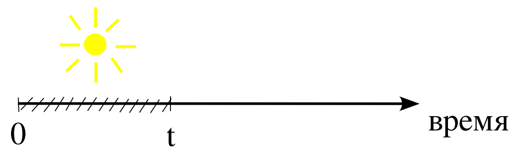

Рис. 12.2: Событие из правой части уравнения (12.30).

Равенство означает, что вероятности этих событий одинаковы. Смысл формулы (12.30) в том, что распределение случайной величины τ ничего не помнит. В первом случае оно не помнит, что лампа уже горела s единиц времени.

Итак,

$$\hat{\tau} = min\left(\tau, T\right), \quad 0 \leqslant \hat{\tau} \leqslant T \tag{12.40}$$

Найдем функцию распределения этой $\hat{\tau}$. Из определения (12.40) получаем

$$\begin{aligned} F_{\hat{\tau}}(t) &= 0, \quad t \leqslant 0 \\ F_{\hat{\tau}}(t) &= 1, \quad t > T \end{aligned} \tag{12.41}$$

Для $0 < t \leqslant T$ получаем функцию распределения

$$F_{\hat{\tau}} = P\left(min\left(\tau, T\right) < t\right) = P\left(\tau < t\right) = 1 - e^{-at} \tag{12.42}$$

Здесь мы учли, что событие $T < t$ никогда не происходит, так как мы рассматриваем $0 < t \leqslant T$.

График функции распределения (12.42) имеет вид рис. 12.3. Таким образом, случайная величина $\hat{\tau}$ имеет смешанное распределение, у неё есть участок с непрерывной производной, и есть скачок в точке t.

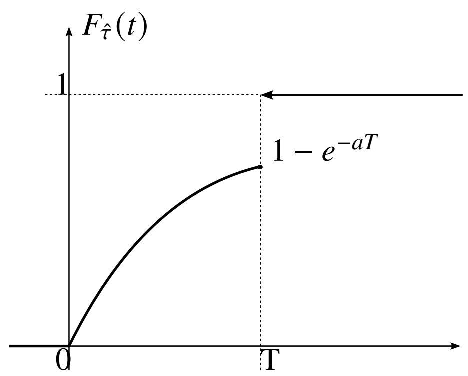

Рис. 12.3: Функция распределения.

Учтем, что плотность вероятности на участке непрерывной производной равна

$$F'_{\hat{\tau}}(t) = ae^{-at} \tag{12.43}$$

Найдем математическое ожидание случайной величины $\hat{\tau}$

$$M\hat{\tau} = T \cdot \left(1 - \left(1 - e^{-1T}\right)\right) + \int\limits_0^T te^{-at}adt = [u = at] =$$

$$= Te^{-aT} + \frac{1}{a}\left[-ue^{-u}\Big|_0^{aT} + \int\limits_0^{aT} e^{-u}du\right] = Ta^{-aT} - \frac{1}{a}aTe^{-aT} + \left(1 - e^{-aT}\right)\frac{1}{a} =$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - e^{-aT}\right) \tag{12.44}$$

Понятно, что в случае $T \to \infty$, то мы не будем менять лампу по причине старости:

$$\hat{\tau} = \tau \tag{12.45}$$

Тогда

$$M\tau = \frac{1}{a}, \quad \text{где } \tau \in \mathbb{E}(a) \tag{12.46}$$

На самом деле его можно было посчитать более аккуратно

$$M\tau = \int\limits_0^\infty te^{-at}dt \tag{12.47}$$

Замечание. Случайные величины – это модели некоторых физических характеристик, которые могут иметь размерность. В данном случае размерность $[\tau]$ = сек. Поэтому размерность математического ожидания $[M\tau]$ = сек. С другой стороны, в выражении (12.47) стоит плотность τ:

$$p_\tau(t) = ae^{-at}, \ \ t > 0 \tag{12.48}$$

Отсюда получаем, что размерность константы $[a] = \frac{1}{\text{сек}}$, так как в показателе экспоненты должна стоять безразмерная величина, а также потому, что плотность всегда имеет размерность, обратную размерности случайной случайной величины, так как плотность, умноженная на дифференциал ($p_\xi dt$) – это безразмерная вероятность.

Таким образом, полученное математическое ожидание (12.46) согласовано по размерности.

Замечание. Существует другой способ проверки ответа. Если $A \leqslant \xi \leqslant B$, то среднее значение умещается в диапазон значения случайной величины

$$A \leqslant M\xi \leqslant B \tag{12.49}$$

Задача 5.

Случайные величины $\nu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ таковы, что $\nu, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – независимые случайные величины.

ν принимает значения $1, 2, \ldots$, то есть это дискретная случайная величина. Задана случайная величина – сумма случайного числа случайных слагаемых

$$\xi = \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_k \tag{12.50}$$

Найти $M\xi, D\xi$.

Решение. По определению, математическое ожидание

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) \tag{12.51}$$

Ведено, что случайная величина ξ есть функция от всех α_k и от дискретной случайной величины ν. Если мы хотим рассчитать функцию распределения случайной величины, которая зависит от дискретной случайной величины, то всегда работает формула полной вероятности

$$F_\xi(x) = P\left(\xi < x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\xi < x \middle| \nu = n\right) P\left(\nu = n\right) \overset{1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k < x \middle| \nu = n\right) P\left(\nu = n\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < x \middle| \nu = n\right) P\left(\nu = n\right) \overset{2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\xi_n < x\right) P\left(\nu = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\xi_n}(x) \cdot P\left(\nu = n\right) \tag{12.52}$$

$\overset{1}{=}$ – воспользуемся тем, что событие $\nu = n$ достоверно наступило, значит, мы можем подставить $\nu = n$ в верхнюю границу предела
$\overset{2}{=}$ – воспользуемся тем, что случайные величины ν и α_k независимы.

Здесь

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tag{12.53}$$

Отсюда получаем, что

$$dF_\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} dF_{\xi_n}(x) \cdot P\left(\nu = n\right) \tag{12.54}$$

Поэтому математическое ожидание равно

$$dF_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi_n}(x)}_{=M\xi_n} \cdot P\left(\nu = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n \cdot P\left(\nu = n\right) \qquad (12.55)$$

Здесь мы воспользовались тем, что в данном случае сумму можно вынести за знак интеграла.

Таким образом, мы получили формулу, аналогичную формуле полной вероятности для математических ожиданий

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n P\left(\nu = n\right) \qquad (12.56)$$

Она будет работать всегда, если ξ – функция от дискретной случайной величины.

Семинар 13. Математическое ожидание (продолжение).

Продолжение задачи с прошлого семинара.

Вернёмся к задаче прошлого семинара. Мы рассматривали случайную величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \tag{13.1}$$

где $\nu, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – независимые случайные величины, $\forall n = 1, 2, \ldots, \nu = 1, 2, \ldots$.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Ранее мы получили формулу

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{M\xi_n}_{M(\xi|\nu=n)} \cdot P(\nu = n) \tag{13.2}$$

где

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tag{13.3}$$

Это аналог формулы полной вероятности для математического ожидания.

Аналогично

$$M\xi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2 \cdot P(\nu = n) \tag{13.4}$$

Таким образом, нам осталось посчитать $M\xi_n$ и $M\xi_n^2$.

Пусть

$$\begin{matrix} M\alpha_k = \mu \\ D\alpha_k = \sigma^2 \end{matrix}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13.5}$$

Тогда

$$M\xi_n = M\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} M\alpha_k = n\mu \tag{13.6}$$

Тогда, из (13.2) получаем математическое ожидание

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu \cdot P(\nu = n) = \mu \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(\nu = n) = \mu \cdot M\nu \tag{13.7}$$

Аналогично получаем

$$M\xi_n^2 = M\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right) = M\sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k\alpha_j = \sum_{k,j=1}^{n} M\alpha_k\alpha_j \tag{13.8}$$

Рассчитаем отдельные слагаемые из (13.8). Из независимости случайных величин получаем

$$M\alpha_k\alpha_j = M\alpha_k M\alpha_j = \mu^2 \text{ при } k \neq j \tag{13.9}$$

При $k = j$ нельзя считать, что α_k и α_j независимы. Поэтому в этом случае математическое ожидание надо посчитать отдельно через заданную дисперсию (13.5)

$$k = j: \quad M\alpha_k^2 = D\alpha_k + (M\alpha_k)^2 = \sigma^2 + \mu^2 \tag{13.10}$$

Тогда получаем

$$M\xi_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\mu^2 + \sum_{k\neq j}\mu^2} = n\sigma^2 + n^2\mu^2 \tag{13.11}$$

Здесь две выделенные суммы собираются в сумму по всем k и j.

Тогда получаем математическое ожидание

$$M\xi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sigma^2 + n^2\mu^2\right)P(\nu = n) = \sigma^2 \cdot M\nu + \mu^2 \cdot M\nu^2 \tag{13.12}$$

Посчитаем дисперсию

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sigma^2 \cdot M\nu + \mu^2 \cdot M\nu^2 - (\mu \cdot M\nu)^2 = \sigma^2 \cdot M\nu + \mu^2\left(M\nu^2 - (M\nu)^2\right) = \\ = \sigma^2 M\nu + \mu^2 D\nu \tag{13.13}$$

Обобщение.

Общий случай – рассмотрим ξ как функцию двух переменных

$$\xi = g(\alpha, \nu) \tag{13.14}$$

где ν принимает какие-то дискретные значения $\nu = y_1, y_2, \ldots$.

Тогда можно рассчитать математическое ожидание по формуле

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} M(\xi|\nu = y_n) \cdot P(\nu = y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\underbrace{\xi_n}_{=g(\alpha, y_n)} |\nu = y_n\right) \cdot P(\nu = y_n) \overset{\alpha,\nu \text{ н.с.в.}}{=} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n \cdot P(\nu = y_n) \tag{13.15}$$

Здесь мы также воспользовались тем, что α и ν. поэтому условные математические ожидания равны безусловным.

Эту формулу можно обобщить на случай, когда речь об интеграле, а не о сумме. Если существует плотность вероятности $\exists p_\nu(y)$, $y \in \mathbb{R}$, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} M\left(\xi_y | \nu = y\right) p_\nu(y) dy \overset{\alpha,\nu-\text{н.с.в.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} M\xi_y p_\nu(y) dy \tag{13.16}$$

Здесь

$$\xi_y = g\left(\alpha, y\right) \tag{13.17}$$

Эта формула называется **формулой последовательного усреднения.** То, что стоит в правой части равенства (13.16) – это среднее значение по распределению ν от математического ожидания $M\xi_n$, которое представляет собой некоторую функцию от y. Если мы задаем y, мы знаем, как устроена случайная величина (13.17) и можем посчитать ее математическое ожидание.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ