ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

СУПЕРСИММЕТРИЯ

СТЕПАНЬЯНЦ
КОНСТАНТИН ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ГОЛОВКО ПОЛИНУ ВАЛЕРЬЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Вводная лекция: обозначения и полезные формулы

Суперсимметрия – некая симметрия, перемешивающая между собой бозонные и фермионные поля, одно из наиболее выдающихся открытий квантовой теории поля предыдущего столетия. Основной аппарат суперсимметрии, о котором пойдёт речь в курсе, был разработан не первооткрывателями, а уже другими учеными в семидесятых годах двадцатого века. Суперсимметричные теории оказались интересными, поскольку в них наблюдалось существенное улучшение ультрафиолетового поведения, стало меньше ультрафиолетовых расходимостей.

В 1991 году обнаружилось, что суперсимметрия имеет непосредственное отношение к физике элементарных частиц. Как известно, есть стандартная модель, теория, основанная на группе $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Калибровочная группа представляет собой прямое произведение трех сомножителей, для каждой группы есть своя константа связи (e_3, e_2, e_1 - измеряются в эксперименте). При анализе квантовых чисел полей стандартной модели были выявлены некоторые закономерности: стандартная модель может являться остатком более широкой симметрии. Например:

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \in SU(5)$$

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \in SO(10)$$

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \in E_6$$

Если группы являются простыми, то для них существует только одна константа связи. Существование симметрии подразумевает условия, которым должны удовлетворять константы связи стандартной модели:

$$\begin{cases} e_3 = e_2 \\ sin^2\theta_W = \dfrac{3}{8} \end{cases} \tag{1.1}$$

θ_W – угол Вайнберга.

Перепишем удобным образом.

$$\begin{cases} \alpha_3 \equiv \dfrac{e_3^2}{4\pi} \\ \alpha_2 \equiv \dfrac{e_2^2}{4\pi} \\ \alpha_1 \equiv \dfrac{5}{3}\dfrac{e_1^2}{4\pi} \end{cases} \tag{1.2}$$

Тогда условие объединения констант связи:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \tag{1.3}$$

Эти величины можно найти в соответствующих таблицах и понять, что условие не выполняется. Это константы только в классической теории поля, а в квантовой - они зависят от энергии. Можно схематично изобразить на графике.

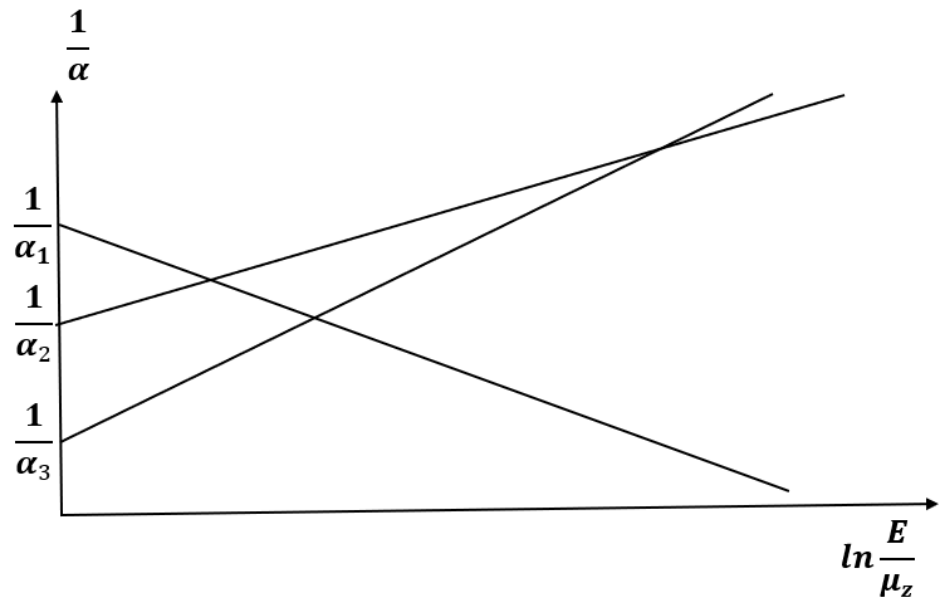

Рис. 1.1. Схематичное изображение констант связи. Стандартная модель

Самое главное - с одной стороны они стремятся в одну сторону, а с другой оказывается, что они образуют треугольник. В 1991 году оказалось, что эта проблема может быть решена, если перейти от обычной к суперсимметричной версии стандартной модели. Наклон прямых меняется, все линии теперь сходятся в одну точку $E \sim 10^{16}$ ГэВ. Это и есть косвенное доказательство существования суперсимметрии.

Выяснилось, что суперсимметрия позволяет решить стандартные проблема стандартной модели (например, проблему иерархий). К массе бозона Хиггса есть квантовые поправки, они расходятся квадратично. Таких расходимостей нет в суперсимметрии, тут они расходятся логарифмично.

$$\frac{\alpha}{\pi} ln\frac{10^{16}\text{ГэВ}}{10^{2}\text{ГэВ}} \tag{1.4}$$

Размерный множитель порядка массы бозона Хиггса. Есть важный открытый вопрос о том, как нарушается суперсимметрия.

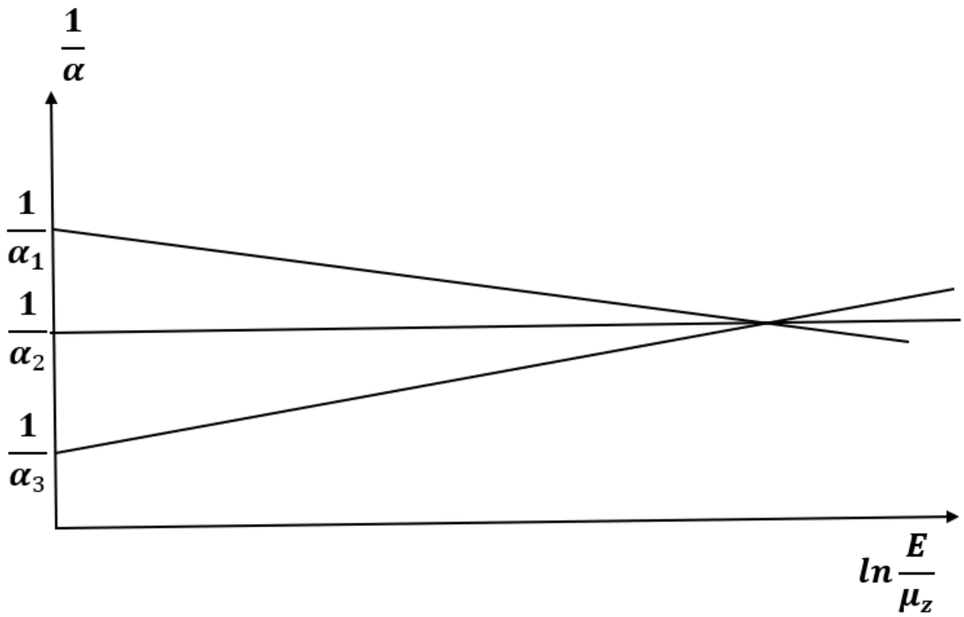

Рис. 1.2. Схематичное изображение констант связи. Суперсимметрия

Глава I. Некоторые сведения о спинорах и γ-матрицах

Суперсимметрия – преобразования, перемешивающие бозонные и фермионные поля, поэтому необходимы спиноры и γ-матрицы. Как и в курсе классической теории поля, в рамках данного курса работаем в пространстве с сигнатурой (+ - - -). Будем использовать обозначение γ^μ для гамма-матрицы, причем индекс μ пробегает значения от нуля до трех, а также они удовлетворяют условию:

$$\gamma^\mu, \gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu} \cdot 1_4 \tag{1.5}$$

$\eta^{\mu\nu}$ – метрика Минковского. Гамма-матрицы имеют размерность 4×4.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & 6^i \\ -6^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

Каждый блок имеет размерность 2×2. Матрицы удовлетворяют полезному условию:

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \tag{1.8}$$

Полезно определить матрицы, которые будут часто использоваться:

$$\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = -\gamma^{\nu\mu} \tag{1.9}$$

$$\gamma^{ij} = -i\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} 6_k & 0 \\ 0 & 6_k \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

$$\gamma^{0i} = \begin{pmatrix} -6^i & 0 \\ 0 & 6^i \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Введем еще одну матрицу:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Данная матрица антикоммутирует со всеми гамма-матрицами:

$$\gamma^\mu, \gamma_5 = 0 \tag{1.13}$$

$$(\gamma_5)^2 = 1 \tag{1.14}$$

Еще одно полезное соотношение:

$$tr(\gamma^\mu, \gamma^\nu, \gamma^\alpha, \gamma^\beta, \gamma_5) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{1.15}$$

Как и раньше, в наших обозначениях:

$$\varepsilon^{0123} = +1 \tag{1.16}$$

Введем матрицу зарядового сопряжения:

$$C = i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Основные свойства этой матрицы:

1.

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T \tag{1.18}$$

2.

$$C^{-1} = C^T = -C \tag{1.19}$$

С помощью гамма-матриц построим некоторый базис в пространстве матриц 4×4, который необходим для технических преобразований. Рассмотрим матрицы $1, \gamma_5, \gamma^\mu$, $\gamma^\mu\gamma_5, \gamma^{\mu\nu}$. Посчитаем число этих матриц: $1+1+4+4+\dfrac{4\cdot 3}{2} = 16 = 4\times 4$. То есть, число матриц равно размерности пространства матриц 4×4. Нужно только убедиться, что матрицы являются линейно независимыми. Идея: нужно убедиться, что они являются ортогональными.

$$(A,B)\equiv tr(AB) \tag{1.20}$$

Из ортогональности будет следовать линейная независимость. Значит эти 16 матриц будут образовывать базис в пространстве 4×4. Тогда присутствует соотношение полноты:

$$\sum_n |n><n| = 1 \tag{1.21}$$

Подразумевается, что базис ортонормированный.

$$\delta_a^b\delta_c^d + (\gamma_5)_a^b(\gamma_5)_c^d + (\gamma^\mu)_a^b(\gamma_\mu)_c^d - (\gamma^\mu\gamma_5)_a^b(\gamma_\mu\gamma_5)_c^d - \frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu})_a^b(\gamma_{\mu\nu})_c^d = 4\delta_a^d\delta_c^b \tag{1.22}$$

Эту формулу можно проверить путем умножения на $|m>$. Тогда:

$$\sum_n |n><n|m>=|m>, |m>=|m> -\textbf{верно} \tag{1.23}$$

Зафиксируем индексы c и d. Индексы a и b пробегают значения от 1 до 4. Проверим, почему возник знак «-». Умножим скалярно выражение на $(\gamma^\nu\gamma_5)_b^a$. Тогда:

$$\begin{gathered} tr(\gamma^\nu\gamma_5)\delta_c^d + tr(\gamma^\nu\gamma_5\gamma_5)(\gamma_5)_c^d + tr(\gamma^\nu\gamma_5\gamma^\mu)(\gamma_\mu)_c^d - \\ -tr(\gamma^\nu\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5)(\gamma_\mu\gamma_5)_c^d - \frac{1}{2}tr(\gamma^\nu\gamma_5\gamma^{\alpha\beta})_c^d = 4(\gamma^\nu\gamma_5)_c^d \end{gathered} \tag{1.24}$$

След нечетного числа гамма-матриц равен нулю, поэтому некоторые слагаемые можно сократить. С учетом этого перепишем уравнение:

$$-tr(\gamma^\nu\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5)(\gamma_\mu\gamma_5)_c^d - \frac{1}{2}tr(\gamma^\nu\gamma_5\gamma^{\alpha\beta})_c^d = 4(\gamma^\nu\gamma_5)_c^d \tag{1.25}$$

Отдельно посчитаем выражение:

$$tr(\gamma^\nu\gamma_5\gamma^\mu\gamma^5) = -tr(\gamma^\nu\gamma^\mu) = -4\eta^{\mu\nu} = 4\eta^{\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_5)_c^d \tag{1.26}$$

Левая часть получилась равной правой. Однако это еще не доказательство, а лишь его часть. Тождество носит название тождество Фирца:

$$\delta_a^b\delta_c^d + (\gamma_5)_a^b(\gamma_5)_c^d + (\gamma^\mu)_a^b(\gamma_\mu)_c^d - (\gamma^\mu\gamma_5)_a^b(\gamma_\mu\gamma_5)_c^d - \frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu})_a^b(\gamma_{\mu\nu})_c^d = 4\delta_a^d\delta_c^b \tag{1.27}$$

Постепенно перейдём к спинорам. Спинор – некий столбец из 4 компонент.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

При преобразованиях группы Лоренца спинор будет меняться по правилу преобразования спинора:

$$exp(\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu})\Psi \tag{1.29}$$

$\alpha_{\mu\nu}$ – параметры группы Лоренца, причем закон преобразования вектора будет иметь вид:

$$V_\mu \Longrightarrow exp(\alpha)_\mu^\nu V_\nu \tag{1.30}$$

$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ – антикоммутирующие переменные, что означает:

$$\Psi_a \cdot \Psi_b = -\Psi_b \cdot \Psi_a \tag{1.31}$$

В курсе классической теории поля определили дираковский сопряженный спинор:

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^+ \gamma^0 \tag{1.32}$$

В каком-то смысле это аналог копмлексно сопряженного скалярного поля. Аналогом вещественного скалярного поля так называемый является майорановский спинор, он удовлетворяет условию:

$$\bar{\Psi} = \Psi^T C \tag{1.33}$$

Это условие является лоренц инвариантным. В явном виде майорановский спинор записывается следующим образом:

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^T C = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\Psi_3^*, \Psi_4^*, \Psi_1^*, \Psi_2^*) \tag{1.34}$$

$$\Psi^T C = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (\Psi_2, -\Psi_1, -\Psi_4, \Psi_3) \tag{1.35}$$

Приравниваем эти две величины:

$$\begin{cases} \Psi_3^* = \Psi_2 \\ \Psi_4^* = -\Psi_1 \\ \Psi_1^* = -\Psi_4 \\ \Psi_2^* = \Psi_3 \end{cases} \tag{1.36}$$

Учтем комплексное сопряжение:

$$\begin{cases} \Psi_3^* = \Psi_2 \\ \Psi_4^* = -\Psi_1 \end{cases} \tag{1.37}$$

Из этих равенств очевидно, что майорановский спинор записывается в виде:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_2^* \\ -\Psi_1^* \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

Видим, что независимых компонент в два раза меньше по сравнению с дираковским спинором.

Рассмотрим некоторые полезные тождества для майорановских спиноров. Если Ψ, ξ - майорановские, то

$$\bar{\Psi}\xi = \bar{\xi}\Psi \tag{1.39}$$

$$\bar{\Psi}\gamma_5\xi = \bar{\xi}\gamma_5\Psi \tag{1.40}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\xi = -\bar{\xi}\gamma^\mu\Psi \tag{1.41}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\xi = \bar{\xi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi \tag{1.42}$$

$$\bar{\Psi}\gamma_5\xi = \bar{\xi}\gamma_5\Psi \tag{1.43}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^{\mu\nu}\xi = -\bar{\xi}\gamma^{\mu\nu}\Psi \tag{1.44}$$

Эти тождества позволяют переставлять майораноские спиноры.

Начнем с доказательства первого тождества:

$$\bar{\Psi}\xi = \Psi^T c\xi = (\Psi^T C\xi)^T = -\xi^T C^T\Psi = \xi^T C\Psi = \bar{\xi}\Psi \tag{1.45}$$

Докажем третье тождество:

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\xi = (\Psi^T C\gamma^\mu\xi)^T = -\xi^T C\cdot C^{-1}(\gamma^\mu)^T C^T\Psi = \bar{\xi}C^{-1}(\gamma^\mu)^T C\Psi = -\bar{\xi}\gamma^\mu\Psi \tag{1.46}$$

Остальное доказывается аналогично.

Если $\mathbf{\Psi}$ – майорановский, то

$$\begin{cases} \bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi = 0 \\ \bar{\Psi}\gamma^{\mu\nu}\Psi = 0 \end{cases} \tag{1.47}$$

Нетривиальные комбинации:

$$\begin{cases} \bar{\Psi}\Psi \\ \bar{\Psi}\gamma_5\Psi \\ \bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\Psi \end{cases} \tag{1.48}$$

Любая билинейная комбинация компонент спиноров может быть разложена по нетривиальным комбинациям.

$$\Psi_a \cdot \Psi_b = -\Psi_b \cdot \Psi_a \tag{1.49}$$

$$\delta_a^b \delta_c^d + (\gamma_5)_a^b (\gamma_5)_c^d + (\gamma^{\mu})_a^b (\gamma_{\mu})_c^d - (\gamma^{\mu}\gamma_5)_a^b (\gamma_{\mu}\gamma_5)_c^d - \frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu})_a^b (\gamma_{\mu\nu})_c^d = 4\delta_a^d \delta_c^b \tag{1.50}$$

Домножим последнюю формулу на $\dfrac{1}{4}\Psi_d\bar{\Psi}^c$.

$$\Psi_a\bar{\Psi}^b = \delta_a^b \frac{1}{4}\Psi_c\bar{\Psi}^c + (\gamma_5)_a^b \frac{1}{4}\Psi_d(\gamma_5)_c^d\bar{\Psi}^c + (\gamma^{\mu})_a^b(\gamma_{\mu})_c^d\frac{1}{4}\Psi_d\bar{\Psi}^c -$$
$$-(\gamma^{\mu})_a^b(\gamma_{\mu})_c^d\frac{1}{4}\Psi_d\bar{\Psi}^c - \frac{1}{4}(\gamma^{\mu}\gamma_5)_a^b(\gamma_{\mu}\gamma_5)_c^d\Psi_d\bar{\Psi}^c - \frac{1}{8}(\gamma^{\mu\nu})_a^b(\gamma_{\mu\nu})_c^d\Psi_d\bar{\Psi}^c \tag{1.51}$$

$$\Psi_c\bar{\Psi}^c = -\bar{\Psi}^c\Psi_c = -\bar{\Psi}\Psi \tag{1.52}$$

$$\Psi_d(\gamma_{\mu\nu})_c^d\bar{\Psi}^c = -\bar{\Psi}\gamma_{\mu\nu}\Psi = 0 \tag{1.53}$$

Занулим тривиальные выражения:

$$\Psi_a\bar{\Psi}^b = \delta_a^b\frac{1}{4}\Psi_c\bar{\Psi}^c + (\gamma_5)_a^b\frac{1}{4}\Psi_d(\gamma_5)_c^d\bar{\Psi}^c - \frac{1}{4}(\gamma^{\mu}\gamma_5)_a^b(\gamma_{\mu}\gamma_5)_c^d\Psi_d\bar{\Psi}^c \tag{1.54}$$

Тогда:

$$\Psi\bar{\Psi}^b = -\frac{1}{4}\delta_a^b\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}(\gamma_5)_a^b\bar{\Psi}\gamma_5\Psi + \frac{1}{4}(\gamma^{\mu}\gamma_5)_a^b\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\Psi \tag{1.55}$$

Для майорановских спиноров:

$$\bar{\Psi} = \Psi^T C \tag{1.56}$$

$$\bar{\Psi}^b = \Psi_d C^{db}| \cdot C_{be}(\textbf{матрица зарядового сопряжения}) \tag{1.57}$$

$$\bar{\Psi}^b C_{be} = -\Psi_e \tag{1.58}$$

$$\Psi_a\Psi_e = \frac{1}{4}C_{ae}\bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{4}(\gamma_5 C)\bar{\Psi}\gamma_5\Psi - \frac{1}{4}(\gamma^{\mu}\gamma_5 C)_{ae}\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\Psi \tag{1.59}$$

Можно посчитать независимые величины: индексы пробегают 4 значения, есть симметрия по a и e.

$$C_4^2 = 6 = 1+1+4 \tag{1.60}$$

Фактически, разложили величину по базисным комбинациям.

Сколько будет нетривиальных комбинаций в выражении $\Psi_a\Psi_b\Psi_c$? Ответ:

$$C_4^3 = 4 \tag{1.61}$$

Можно свести к другим четырем базисным комбинациям, а именно к величине $\Psi_d(\bar{\Psi}\Psi)$.

Сколько независимых величин $\Psi_a\Psi_b\Psi_c\Psi_d$? Ответ:

$$C_4^4 = 1 \tag{1.62}$$

Если индекс встречается дважды, то ответ будет «0». Это сводится к величине $(\bar{\Psi}\Psi)^2$.

При произведении пяти компонент: $\Psi_a\Psi_b\Psi_c\Psi_d\Psi_e = 0$. Максимальная степень - 4. В силу антикоммутации при степени выше ничего не будет наблюдаться.

Дираковские спиноры и их свойства

Вернемся к дираковским спинорам. Пусть Ψ, ξ – дираковские спиноры. Для них существуют полезные формулы. Важно, что по определению

$$(\Psi_a\Psi_b)^* \equiv +\Psi_b^*\Psi_a^* \tag{1.63}$$

Если эта формула верна, то

$$(\bar{\Psi}\xi)^* = (\bar{\Psi}\gamma^0\xi)^+ = \xi^+\gamma^0\Psi = \bar{\xi}\Psi \tag{1.64}$$

$$(\bar{\Psi}\gamma_5\xi)^* = -\bar{\xi}\gamma_5\Psi \tag{1.65}$$

$$(\bar{\Psi}\gamma^\mu\xi)^* = +\bar{\xi}\gamma^\mu\Psi \tag{1.66}$$

$$(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\xi)^* = \bar{\xi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi \tag{1.67}$$

$$(\bar{\Psi}\gamma^{\mu\nu}\xi)^* = -\bar{\xi}\gamma^{\mu\nu}\Psi \tag{1.68}$$

Для майорановских спиноров в частном случае можно выражения переставить местами:

$$(\bar{\Psi}\xi)^* = (\bar{\Psi}\gamma^0\xi)^+ = \bar{\Psi}\xi\ (Re) \tag{1.69}$$

$$(\bar{\Psi}\gamma_5\xi)^* = -\bar{\Psi}\gamma_5\xi\ (\textbf{чисто мнимое}) \tag{1.70}$$

$$(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\xi)^* = -\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\xi \,(\textbf{чисто мнимое}) \tag{1.71}$$

$$(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\xi)^* = \bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\xi \,(Re) \tag{1.72}$$

$$(\bar{\Psi}\gamma^{\mu\nu}\xi)^* = \bar{\Psi}\gamma^{\mu\nu}\xi \,(Re) \tag{1.73}$$

Вспомним Лагранжиан дираковского поля:

$$L = i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{1.74}$$

Функция Лагранжа должна быть вещественной, поэтому $(\bar{\Psi}\Psi)$ – вещественное.

$$(\bar{\Psi}\Psi)^* = \bar{\Psi}\Psi \in Re \tag{1.75}$$

$$(\Psi_a\Psi_b)^* = +\Psi_b^*\Psi_a^* \tag{1.76}$$

$$(i\bar{\Psi}\partial_{\mu}\Psi)^* = i\partial_{\mu}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \tag{1.77}$$

Проинтегрируем по частям:

$$(i\bar{\Psi}\partial_{\mu}\Psi)^* = i\bar{\Psi}\partial^{\mu}\Psi \tag{1.78}$$

Вейлевские (киральные) спиноры

Перейдем к вейлевским (киральным) спинорам. По определеню:

$$\gamma_5\Psi_R = \Psi_R \tag{1.79}$$

$$\gamma_5\Psi_L = -\Psi_L \tag{1.80}$$

Ψ_R – правый спинор, Ψ_L – левый спинор. Если есть дираковский спинор, то на его основе можно построить левый или правый спинор, применяя определенный проектор, например:

$$\Psi_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi \tag{1.81}$$

$$\Psi_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi \tag{1.82}$$

Сам дираковский спинор можно представить в виде:

$$\Psi = \Psi_R + \Psi_L \tag{1.83}$$

В наших обозначениях γ_5 - матрица 4x4:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.84}$$

Тогда

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi \tag{1.85}$$

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.86}$$

Между спинорами определенной киральности и майорановскими существует соответствие.

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_2^* \\ -\Psi_1^* \end{pmatrix} \tag{1.87}$$

Применяем левый проектор и абсолютно однозначно переходим в Ψ_L.

Тождество Фирца

Рассмотрим тождество, записанное для майорановских спиноров:

$$\Psi\bar{\Psi}^b = -\frac{1}{4}\delta_a^b\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}(\gamma_5)_a^b\bar{\Psi}\gamma_5\Psi + \frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma_5)_a^b\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi \tag{1.88}$$

Домножим эту формулу на выражение $(1+\gamma_5)_c^a(1+\gamma_5)_b^d$.

$$[(1+\gamma_5)\Psi]_c \cdot [\bar{\Psi}(1+\gamma_5)]^d = -\frac{1}{4}[(1+\gamma_5)^2]\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}[(1+\gamma_5)\gamma_5(1+\gamma_5)]_c^d +$$

$$+\frac{1}{4}[(1+\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5(1+\gamma_5)]_a^b \cdot \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi \tag{1.89}$$

Упростим выражение:

$$[(1+\gamma_5)\Psi]_c \cdot [\bar{\Psi}(1+\gamma_5)]^d = -\frac{1}{4}[(1+\gamma_5)^2]\bar{\Psi}\Psi -$$

$$-\frac{1}{4}[(1+\gamma_5)(1+\gamma_5)]_c^d + \frac{1}{4}[\gamma^\mu(1-\gamma_5)^2]_a^b \cdot \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi \tag{1.90}$$

$$[(1+\gamma_5)\Psi]_c \cdot [\bar{\Psi}(1+\gamma_5)]^d = -\frac{1}{4}[(1+\gamma_5)^2]\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}[(1+\gamma_5)(1+\gamma_5)]_c^d \tag{1.91}$$

Уберем квадратные скобки и снова упростим:

$$(1+\gamma_5)\Psi_c\bar{\Psi}(1+\gamma_5)^d = -\frac{1}{2}(1+\gamma_5)_c^d\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{2}(1+\gamma_5)_c^d\bar{\Psi}\gamma_5\Psi \tag{1.92}$$

Тождество Фирца:

$$(1+\gamma_5)\Psi_a\bar{\Psi}(1+\gamma_5)^b = -\frac{1}{2}(1+\gamma_5)_a^b\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi \tag{1.93}$$

Аналогичное тождество имеет вид:

$$(1-\gamma_5)\Psi_a\bar{\Psi}(1-\gamma_5)^b = -\frac{1}{2}(1-\gamma_5)_a^b\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi \tag{1.94}$$

Лекция 2. Алгебра суперсимметрии: безмассовые и массивные представления

Глава II. Алгебра в суперсимметрии и ее представления

Начнем с некоторых математических конструкций, далее будем строить функции Лагранжа и изучать их свойства.

Алгебра суперсимметрии

Алгебра суперсимметрии – расширение алгебры Пуанкаре (генераторы трансляции и генераторы Лоренцевых поворотов). Генераторы трансляций:

$$P_\mu = i\partial_\mu \tag{2.1}$$

Генераторы лоренцевых поворотов:

$$M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu \tag{2.2}$$

Коммутационные соотношения:

$$\begin{cases} [P_\mu, P_\nu] = 0, \\ [P_\mu, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\mu\alpha}P_\beta - \eta_{\mu\beta}P_\alpha) \end{cases} \tag{2.3}$$

Для моментов:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha} + \eta_{\mu\beta}M_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta}) \tag{2.4}$$

Алгебра суперсимметрии не является алгеброй Ли, это так называемая Z_2 градуированная алгебра, добавляются Q_{ia} (майорановские спиноры), где $i = \overline{1,N}$, a – спинорный индекс, пробегает значения от 1 до 4. Так как возникли новые генераторы, необходимо написать коммутационные соотношения. Тут для двух нечетных элементов вместо коммутационного соотношения пишется антикоммутационное соотношение.

Из каких соображений можно написать соотношения для операторов суперзарядов Q_{ia}? Для этого нужно добиться того, чтобы выполнялось тождество Якоби для Z_2 градуированных алгебр. Для того чтобы это тождество выполнялось, нужно чтобы антикоммутационные соотношения были жестко заданы. Запишем простейший вариант.

$$[Q_{ia}, P_\mu] = 0 \tag{2.5}$$

Для заряда и момента соотношение задается также жестко:

$$[Q_{ia}, M_{\mu\nu}] = \frac{i}{2}(\gamma^{\mu\nu}Q_i)_a \tag{2.6}$$

Последнее соотношение антикоммутационное (без центральных зарядов, простейший вариант):

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu \tag{2.7}$$

Эти 6 соотношений составляют алгебру. Матрица $(\gamma^\mu C)$ должна быть симметричной. Также должно выполняться условие:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T \tag{2.8}$$

Домножим слева и справа равенство на C. Учтем еще, что $C^T = -C$. Тогда:

$$\gamma^\mu C = -C\gamma^{\mu T} = C^T\gamma^{\mu T} = (\gamma^\mu C)^T \tag{2.9}$$

Это можно также записать в виде:

$$(\gamma^\mu C)_{ab} = (\gamma^\mu C)_{ba} \tag{2.10}$$

Из генераторов можно построить оператор Каземира, который будем коммутировать со всеми генераторами из алгебры суперсимметрии. Оператор Каземира:

$$P_\mu^2 \equiv \eta^{\mu\nu}P_\mu P_\nu \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} [P_\mu^2, P_\nu] = 0, \\ [P_{mu}^2, Q_{ia}] = 0, \\ [P_\mu^2, M_{\alpha\beta}] = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

В связи с наличием оператора Каземира представления алгебры суперсимметрии делятся на две группы.

$$P_\mu^2 = P_0^2 - \vec{P}^2 = m^2 \tag{2.13}$$

Представления алгебры суперсимметрии:

1. Безмассовые ($m^2 = 0$)
2. Массивные ($m^2 \neq 0$)

Безмассовые представления алгебры суперсимметрии

При действии на соответствующее состояние оператор Каземира имеет собственное состояние равное нулю.

$$P_\mu^2 = m^2 = 0 \tag{2.14}$$

Перейдем в систему отсчета, где оператор имеет наиболее простой вид. Выберем так, чтобы $P^\mu = (E, 0, 0, E)$. В безмассовом случае состояние характеризуется величиной спиральности.

$$\frac{1}{E}(\vec{P}\vec{J}) = J_3 = M_{12} \tag{2.15}$$

$$J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{ij} \tag{2.16}$$

Рассмотрим состояние, которое является собственным вектором оператора спиральности.

$$M_{12}|E,\lambda >= \lambda|E,\lambda > \tag{2.17}$$

Подействуем на это состояние оператором суперзаряда. Будет ли иметь состояние $Q_{ia}|E,\lambda$ иметь спиральность?

$$M_{12}Q_{ia}|E,\lambda >= Q_{ia}M_{12}\lambda|E,\lambda > +[M_{12}, Q_{ia}]|E,\lambda > \tag{2.18}$$

Знаем, что состояние $|E,\lambda >$ по построению – собственный вектор оператора спиральности, тогда:

$$M_{12}Q_{ia}|E,\lambda >= \lambda \cdot Q_{ia}|E,\lambda > -\frac{i}{2}(\gamma^{12}Q_i)_a|E,\lambda > \tag{2.19}$$

$$\gamma^{12} = -i\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Подставим явный вид матрицы в предыдущее соотношение.

$$M_{12}\begin{pmatrix}Q_{i1}\\ Q_{i2}\\ Q_{i3}\\ Q_{i4}\end{pmatrix}|E,\lambda >= \begin{pmatrix}\lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda+\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{i1}\\ Q_{i2}\\ Q_{i3}\\ Q_{i4}\end{pmatrix}|E,\lambda > \tag{2.21}$$

$Q_{ia}|E,\lambda>$ – снова собственные вектора спиральности. Действие оператора суперзаряда переводит бозонное состояние в фермионное (и наоборот).

Рассмотрим коммутационное соотношение двух суперзарядов.

$$\{Q_{ia},Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^{\mu}C)_{ab}P_{\mu} \tag{2.22}$$

Выбрали систему отсчета, в которой $P^{\mu} = (E,0,0,E)$. Тогда:

$$\{Q_{ia},Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}E(\gamma^0 C - \gamma^3 C)_{ab} \tag{2.23}$$

Матрицу $(\gamma^0 C - \gamma^3 C)$ можно легко вычислить помощью формул с предыдущей лекции.

$$\{Q_{ia},Q_{jb}\} = 4\delta_{ij}E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Единственный нетривиальный коммутатор:

$$Q_{ia},Q_{jb} = 4\delta_{ij}E \tag{2.25}$$

Вспомним, что Q_i – майорановский спинор, который имел вид

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_2^* \\ -\Psi_1^* \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Поэтому

$$Q_i \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_2^+ \\ -Q_1^+ \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Знаем, что

$$\{Q_{i1},Q_{j4}\} = 0 \tag{2.28}$$

Отсюда следует, что

$$Q_{i1},Q_{i1}^+ = 0 \tag{2.29}$$

$$0 = < E,\lambda| = Q_{i1},Q_{i1}^+|E,\lambda> = < E,\lambda|Q_{i1},Q_{i1}^+|E,\lambda> + < E,\lambda|Q_{i1}^+Q_{i1}|E,\lambda> \tag{2.30}$$

Отметим, что

$$< E,\lambda|Q_{i1},Q_{i1}^{+}|E,\lambda >\geqslant 0 \tag{2.31}$$

$$< E,\lambda|Q_{i1}^{+}Q_{i1}|E,\lambda >\geqslant 0 \tag{2.32}$$

Это может быть только, если

$$Q_{i1}|E,\lambda >= 0 \tag{2.33}$$

$$Q_{i1}^{+}|E,\lambda >= 0 \tag{2.34}$$

$$Q_{i4}|E,\lambda >= 0 \tag{2.35}$$

Введем некоторые новые операторы.

$$q_i \equiv \frac{1}{2\sqrt{E}}Q_{i3} \tag{2.36}$$

$$q_i^{+} \equiv \frac{1}{2\sqrt{E}}Q_{i2} \tag{2.37}$$

$$q_i,q_j^{+} = \delta_{ij} \tag{2.38}$$

$$q_i,q_j = 0 \tag{2.39}$$

$$q_i^{+},q_j^{+} = 0 \tag{2.40}$$

Последние соотношение – алгебра Клиффорда.

Нас будут интересовать конечномерные представления, поэтому будем предполагать, что существует максимальное значение спиральности, обозначим его за λ_0. Тогда:

$$q_i^{+}|E,\lambda_0 >= 0 \tag{2.41}$$

СОСТОЯНИЕ	λ	КОЛИЧЕСТВО
$\lvert E,\lambda_0 >$	λ_0	$1 = C_N^0$
$q_i\lvert E,\lambda_0 >$	$\lambda_0 - \frac{1}{2}$	N
$q_iq_j\lvert E,\lambda_0 >$	$\lambda_0 - 1$	$\frac{N(N-1)}{2} = C_N^2$
$q_{i1}q_{i2}...q_{iN}\lvert E,\lambda_0 >$	$\lambda_0 - \frac{N}{2}$	$C_N^N = 1$

Получается, что

$$\begin{cases} \lambda_{max} = \lambda_0 \\ \lambda_{\min} = \lambda_0 - \dfrac{N}{2} \end{cases} \tag{2.42}$$

Число состояний дается числом сочетаний.

Теорема о равенстве фермионных и бозонных степеней свободы

Можно доказать теорему о равенстве фермионных и бозонных степеней свободы. Пусть для определенности λ_0 – целое. Вычислим разность между числом бозонных и числом фермионных состояний:

$$n_{\mathbf{Б}} - n_{\mathbf{Ф}} = (C_N^0 - C_N^2 + \ldots) - (C_N^1 + C_N^3 + \ldots) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k C_N^k = (1-1)^N = 0 \tag{2.43}$$

Это означает, что

$$n_{\mathbf{Б}} = n_{\mathbf{Ф}} \tag{2.44}$$

Каждое из чисел можно посчитать по отдельности. Теперь посчитаем сумму:

$$n_{\mathbf{Б}} + n_{\mathbf{Ф}} = \sum_{k=0}^{N} C_N^k = (1+1)^N = 2^N \tag{2.45}$$

$$n_{\mathbf{Б}} = n_{\mathbf{Ф}} = \frac{1}{2} \cdot 2^N = 2^{N-1} \tag{2.46}$$

Примеры

Рассмотрим случай $\lambda_0 = \dfrac{1}{2}$, $N = 1$. Если $N = 1$, то суперсимметрия называется нерасширенной. Если же $N > 1$, то суперсимметрия называется расширенной.

λ	1	0
$n_{\mathbf{сост}}$	1	1

Никакой реальной теории эта таблица соответствовать не может.

$$\begin{array}{c|c|c} \lambda & 1 & 0 \\ \hline n_{\mathbf{сост}} & 1 & 1 \end{array} + \begin{array}{c|c|c} \lambda & 0 & \text{-1} \\ \hline n_{\mathbf{сост}} & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ \hline n_{\mathbf{сост}} & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Это так называемая модель Весса-Зумино.

Можно рассмотреть аналогично следующий случай. Пусть $\lambda_0 = 1$, $N = 1$. Тогда соответсвующее таблицы будут иметь вид:

$$\begin{array}{c|c|c} \lambda & 1 & 1 \\ \hline n_{\mathbf{сост}} & 1 & 1 \end{array} + \begin{array}{c|c|c} \lambda & \text{- 1} & \text{-1} \\ \hline n_{\mathbf{сост}} & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & \text{- 1} \\ \hline n_{\mathbf{сост}} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Получаем симметричную теорию Янга-Миллса.

Еще один случай. Пусть $\lambda_0 = 1$, $N = 4$. В таком случае $\lambda_{min} = 1 - 4/2 = 1$. Тогда соответсвующее таблицы будут иметь вид:

λ	1	1	0	-1	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	4	6	4	1

Эта таблица CPT-самосопряженная, содержит 4 майорановских спинора. Это так называемая $N = 4$ теория Янга-Миллса. В ней отсутствуют ультрафиолетовые расходимости. Данная теория максимально расширена.

Можно взять $\lambda_0 = 2$, $N = 1$. Тогда теория будет:

λ	2	3
$n_{\textbf{сост}}$	1	1

+

λ	-3	-2
$n_{\textbf{сост}}$	1	1

Можно рассмотреть случай $\lambda_0 = 2$, $N = 8$. Тогда $\lambda_{min} = 2 - 8 = -2$. Для этого случая табличка имеет вид:

λ	2	3	1	1	0	-1	-1	-3	-2
$n_{\textbf{сост}}$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Это максимально расширенная теория гравитации.

Массивные представления алгебры суперсимметрии

Многое в массивном случае похоже на безмассовый случай. Рассмотрим отличия:

$$P_\mu^2 = m^2 \neq 0 \tag{2.47}$$

Выберем систему отсчета, в которой $P^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Такая система отсчета инвариантна относительно группы SO3. Из курса квантовой механики:

$$\vec{J}^2 | J, J_3 >= J(J+1) | J, J_3 > \tag{2.48}$$

$$\hat{J}_3 | J, J_3 >= J_3 | J, J_3 > \tag{2.49}$$

$$J_3 = M_{12} \tag{2.50}$$

Действие суперзаряда приводит к изменению величины:

$$M_{12}Q_{ia}|J_3>=M_{12}\begin{pmatrix}Q_{i1}\\Q_{i2}\\Q_{i3}\\Q_{i4}\end{pmatrix}|J_3>=\begin{pmatrix}J_3-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&J_3+\frac{1}{2}&0&0\\0&0&J_3-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&J_3+\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{i1}\\Q_{i2}\\Q_{i3}\\Q_{i4}\end{pmatrix}|J_3> \tag{2.51}$$

Бозонные состояния снова переводятся в фермионные, как и наоборот (как и в случае в безмассовым случае). Отличия будут в антикоммутаторе.

$$\{Q_{ia},Q_{jb}\}=-2\delta_{ij}(\gamma^{\mu}C)_{ab}P_{\mu}=-2\delta_{ij}m(\gamma^{0}C)_{ab}=2m\delta_{ij}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} \tag{2.52}$$

Отсюда видно два нетривиальных случая.

$$\{Q_{i1},Q_{j4}\}=-2\delta_{ij} \tag{2.53}$$

$$\{Q_{i2},Q_{j3}\}=2\delta_{ij} \tag{2.54}$$

В массивном случае операторы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда строятся другим способом.

$$q_I\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2m}}Q_{I3} & \text{если } I=\overline{1,N}\\ \dfrac{i}{\sqrt{2m}}Q_{I-N} & \text{если } I=\overline{N+1,2N}\end{cases} \tag{2.55}$$

$$q_I^+\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2m}}Q_{I2} & \text{если } I=\overline{1,N}\\ \dfrac{i}{\sqrt{2m}}Q_{(I-N)4} & \text{если } I=\overline{N+1,2N}\end{cases} \tag{2.56}$$

q_I уменьшают J_3 на $\frac{1}{2}$. q_I^+ увеличивают J_3 на $\frac{1}{2}$. Нормировочные множители подобраны так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\{q_I,q_J^+\}=\delta_{IJ} \tag{2.57}$$

$$\{q_I,q_J\}=0 \tag{2.58}$$

$$\{q_I^+,q_J^+\}=0 \tag{2.59}$$

Майорановский спинор записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i2}^{+} \\ -Q_{i1}^{+} \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

Нас будут интересовать конечномерные представления. Пусть J_0 – это максимальное значение J_3. Тогда

$$q_I^{+}|J_0>=0 \tag{2.61}$$

$$q_I|J_0>=J_3=J_0-\frac{1}{2} \tag{2.62}$$

СОСТОЯНИЕ	J_3	ЧИСЛО СОСТОЯНИЙ
$\|J_0>$	$J_3=J_0$	$1=C_N^0$
$q_I\|J_0>$	$J_3=J_0-\frac{1}{2}$	$2N$
$q_Iq_J\|J_0>$	$J_3=J_0-1$	C_{2N}^2
$q_{I_1}...q_{I_{2N}}\|J_0>$	$J_3=J_0-N$	$C_{2N}^{2N}=1$

Теорема о равенстве числа бозонных и фермионных степеней свободы по прежнему имеет место:

$$n_{\text{Б}}-n_{\Phi}=\sum_{k=0}^{2N}(-1)^k C_{2N}^k=(1-1)^N=0 \tag{2.63}$$

$$n_{\text{Б}}+n_{\Phi}=\sum_{k=0}^{2N}C_{2N}^k=(1+1)^{2N}=2^{2N} \tag{2.64}$$

Это означает, что

$$n_{\text{Б}}=n_{\Phi}=2^{2N-1} \tag{2.65}$$

Важное отличие от безмассового случая:

$$(J_3)_{min}=J_0-N=-(J_3)_{max}=-J_0 \tag{2.66}$$

Это в свою очередь означает, что

$$J_0=\frac{N}{2} \tag{2.67}$$

Мы говорили о значениях J_3, но остался вопрос о количестве значений числа J. Заполним соотвтествующую таблицу. Причем сверху булут значения N.

$\frac{N}{J}$	1	2	3	4
0	2	5	14	42
1/2	1	4	14	48
1		1	6	27
3/2			1	8
2				1

Знаем, что

$$J_3 = -\overline{J, J} \tag{2.68}$$

$$C_1^2 = 2, J_3 = 1 \tag{2.69}$$

Если $N = 2$, то $J_0 = 1$. Этому состоянию соотвтетсует $J_3 = -1, 0, 1$. Для $J_3 = J_0 - \frac{1}{2}$ число состояний будет $C_4^1 = 4$.

Если же $J_3 = J_0 - 1 = 0$, тогда число состояний $C_4^2 = 6$. И так далее.

Лекция 3. Суперсимметричные теории

Глава III. Построение суперсимметричных теорий с использованием суперпространства

Понятие о суперпространстве

Цель – сформулировать некий формализм, который позволит глядя на действие понимать, что оно инвариантно относительно преобразований суперсимметрии. Другими словами, нужно сделать суперсимметрию явной. Начнем изучать соответствующие методы. Пусть есть поле $\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x+a)$. Разложим в ряд Тейлора:

$$\varphi(x) \longrightarrow \phi(x+a) = \varphi(x) + \frac{1}{1!}a^{\mu}\partial_{\mu}\varphi(x) + \frac{1}{2!}a^{\mu}a^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi(x) + ... =$$

$$= \exp(a^{\mu}\partial_{\mu})\varphi(x) = exp(-ia^{\mu}P_{\mu})\varphi(x) \tag{3.1}$$

Итак, оператор импульса является генератором трансляций:

$$\varphi(x^{\mu}+a^{\mu}) = \exp(a^{\mu}\partial_{\mu})\varphi(x) = \exp(-ia^{\mu}P_{\mu})\varphi(x), \tag{3.2}$$

где $P_{\mu} = i\partial_{\mu}$ – генераторы трансляций.

Можно ли построить аналогичное представление для операторов суперзаряда? Вопрос нетривиальный, потому что суперзаряд является грассманово нечетным. Рассмотрим суперпространство, по определению координатами которого являются $(x^{\mu}\theta_i)$, $i = \overline{1,N}$. Причем $\mu = 0,1,2,3$. Здесь θ_i – это набор из N майорановских антикоммутирующих спиноров. θ_i – грассманово нечетные.

Суперполями называются функции, заданные на суперпространстве $\phi = \phi(x,\theta_i)$.

Рассмотрим величину $\bar{\theta} = \theta^T C$. Для нее

$$\bar{\theta}^a = \theta_b C^{ba} \tag{3.3}$$

Попробуем построить операторы суперзаряда Q_i. Можно попробовать взять

$$Q_{ia} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_i^a} \tag{3.4}$$

по аналогии с P_{μ}. Хорошая ли эта идея? На самом деле, нет. Вообще говоря, для операторов суперзаряда пишется следующее соотношение:

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^{\mu}C)_{ab}P_{\mu}. \tag{3.5}$$

Антикомутатор:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}_{ia}}, \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}_{jb}} \right\} = 0. \tag{3.6}$$

Операторы суперзаряда можно модифицировать путем добавления слагаемого:

$$Q_{ia} = i\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i^a} - (\gamma^\mu \theta_i)_a \partial_\mu. \tag{3.7}$$

Тогда антикоммутационное соотношение будет выполнено.

Посчитаем антикоммутатор двух супер зарядов:

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = i\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i} - (\gamma\theta_i)_a \partial_\mu \tag{3.8}$$

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = \left\{ i\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i^a} - (\gamma^\mu \theta_i)_a \partial_\mu, i\frac{\partial}{\bar{\theta}_j^b} - (\gamma^\nu \theta_j)_b \partial_\nu \right\} =$$

$$= \left[-i(\gamma^\mu)_a^d \left\{ \theta_{id}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b} \right\} - i(\gamma^\nu)_b^d \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^a}, \theta_{id} \right\} \right] \partial_\mu. \tag{3.9}$$

Необходимо посчитать антикомутатор:

$$\left\{ \theta_{id}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b} \right\} \ \phi(x,\theta) \tag{3.10}$$

В дальнейшем функции которые зависят от x и θ будут называться супер полями. Следовательно, суперполя – это функции заданные на суперпространстве.

$$\left\{ \theta_{id}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b} \right\} \ \phi(x,\theta) = \theta_{id}\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b}\phi + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b}(\theta_{id}\phi) = \theta_{id}\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\theta}_j^b} + \frac{\partial \theta_{id}}{\partial \bar{\theta}_j^b}\phi - \theta_{id}\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\theta}_j^b}. \tag{3.11}$$

Первое и третье слагаемое взаимноуничтожаются и получается следующее выражение:

$$\left\{ \theta_{id}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b} \right\} \ \phi(x,\theta) = \frac{\partial \theta_{id}}{\partial \bar{\theta}_j^b}\phi \tag{3.12}$$

Для выполнения дифференцирования вспомним, что θ_i – майорановские спиноры:

$$\bar{\theta} = \theta^T C \tag{3.13}$$

$$\theta^T = -\bar{\theta} C^{-1} \tag{3.14}$$

$$\theta = C\bar{\theta}^T \tag{3.15}$$

Поэтому

$$\left\{ \theta_{id}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b} \right\} = \frac{\partial \theta_{id}}{\partial \bar{\theta}_j^b} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b}(C_{da}\bar{\theta}_i^a) = C_{da}\delta_b^a \delta_{ij} = C_{db}\delta_{ij} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \theta_{id}}{\partial \bar{\theta}^b_j} = C_{da}\delta_{ij} \tag{3.17}$$

Как следствие,

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -i(\gamma^\nu)_a^d C_{db}\delta_{ij}\partial_\mu - i(\gamma^\mu)_b^d C_{da}\delta_{ij}\partial_\mu =$$

$$= -i(\gamma^\mu C)_{ab}\delta_{ij}\partial_\mu - i(\gamma^\mu C)_{ba}\delta_{ij}\partial_\mu \tag{3.18}$$

$$\left[(\gamma^\mu C)^T = \gamma^\mu C\right] = -2i(\gamma^\mu C)_{ab}\delta_{ij}\delta_\mu = \left[P_\mu = i\delta_\mu\right] = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu \tag{3.19}$$

Мы приняли во внимание раннее доказанную симметрию матрицы $(\gamma^\mu C)$:

$$(\gamma^\mu C)_{ab} = (\gamma^\mu C)_{ba} \tag{3.20}$$

То есть получилось правильное КС.

При этом

$$\{Q_{ia}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^b_i}\} = \{i\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^a_i} - (\gamma^\mu \theta_i)_a\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^b_j}\} = -\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}\partial_\mu \neq 0 \tag{3.21}$$

Это неудобно. Хорошо бы иметь объект, который коммутирует с суперзарядом. Обычная производная по θ не инвариантна при преобразованиях суперсимметрии. Однако можно определить так называемую суперсимметричную ковариантную производную, которая коммутирует с суперзарядом:

$$D_{ia} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^a_i} - i(\gamma^\mu \theta_i)_a\partial_\mu \tag{3.22}$$

Тогда

$$\{Q_{ia}, D_{jb}\} = \{i\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^a_i} - (\gamma^\mu \theta_i)_a\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^b_j} - i(\gamma^\nu \theta_j)_b\partial_\nu\} =$$

$$= -\{(\gamma^\mu \theta_i)_a\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^b_j}\} + \{\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^a_i}, (\gamma^\mu \theta_j)_b\partial_\mu\} = 0 \tag{3.23}$$

При этом

$$\{D_{ia}, D_{jb}\} = -2i\{\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^a_i}, (\gamma^\mu \theta_j)_b\partial_\mu\} = -2i\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_a b\partial_\mu \tag{3.24}$$

Последнее выражение показывает, что ковариантные производные не антикоммутируют.

Несложно убедиться, что ковариантная производная удовлетворяет правилу Лейбница:

$$D_{ia}(AB) = D_{ia}A \cdot B + (-1)^{P_A} A D_{ia} B \tag{3.25}$$

$(-1)^{P_A}$ – грассманова четность. $P_A = 0\,(mod 2)$, если A коммутирующая (грассманова четная). $P_A = 1\,(mod 2)$, если A антикоммутирующая (грассманова нечетная). Можно сообразить, что все коммутационные и антикоммутационные соотношения алгебры суперсимметрии можно записать в терминах A, B.

$$[A,B\} \equiv AB-(-1)^{P_A P_B}BA \tag{3.26}$$

С помощью этого определения можно записать Z_2-градуированное тождество Якоби.

$N=1$ киральное скалярное суперполе

Суперполе – некая функция x^μ, θ_i, как было определено выше. $N=1$ – нерасширенная суперсимметрия, когда индекс i может принимать только одно значение. Далее не будем писать эти индексы. Скалярное суперполе – суперполе, не имеющее индексов по отношению к группе Лоренца. Тогда

$$\begin{cases} \theta_i \longrightarrow \theta \\ Q_i \longrightarrow Q = i\dfrac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - (\gamma^\mu\theta)\partial_\mu \\ D_i \longrightarrow D = \dfrac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i(\gamma^\mu\theta)\partial_\mu \end{cases} \tag{3.27}$$

Ковариантная производная позволяет накладывать связи, инвариантные относительно преобразований суперсимметрии, самой известной из которых является условие киральности:

$$(1-\gamma_5)D\phi = 0 \Leftrightarrow (1-\gamma_5)_a^b D_b\phi = 0 \tag{3.28}$$

Действительно, при преобразованиях суперсимметрии

$$\phi \longrightarrow exp(-\bar{\varepsilon}Q)\phi \tag{3.29}$$

Тогда если $(1-\gamma_5)D\phi = 0$, то

$$(1-\gamma_5)D\phi' = (1-\gamma_5)D[exp(-i\bar{\varepsilon}Q)\phi] = exp(-i\bar{\varepsilon}Q)(1-\gamma_5)D\phi = 0 \tag{3.30}$$

где $\varepsilon \neq \varepsilon$ – антикоммутирующий майорановский спинор - параметр суперсимметричных преобразований.

Как решить условие киральности? Можно разложить $\phi(x,\theta)$ по компонентам,

$$\phi(x,\theta) = \varphi_1(x) + \bar{\theta}\Phi_1(x) + (\bar{\theta}\theta)\varphi_2(x) + (\bar{\theta}\gamma_5\theta)\varphi_3(x) +$$

$$+\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\varphi_\mu(x) + \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\Phi_2(x) + (\bar{\theta}\theta)\varphi_4(x) \tag{3.31}$$

подействовать ковариантной производной и приравнять результат к нулю. Но можно понять, как устроен результат более простым способом. Заметим, что:

$$(1-\gamma_5)D_a[(1+\gamma_5)\theta_b] = (1-\gamma_5)_a^c \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^c}(1+\gamma_5)_b^d\theta_d =$$

$$= (1-\gamma_5)_a^c(1+\gamma_5)_b^d \cdot C_{dc} = [(1+\gamma_5)C(1-\gamma_5)]_{ba} = 0 \tag{3.32}$$

поскольку $C = i\gamma^0\gamma^2$ – произведение четного числа γ-матриц.

Кроме того, определим величину

$$y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{3.33}$$

$$(y^\mu)^* = x^\mu - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{3.34}$$

Тогда

$$(1-\gamma_5)D_a y^\mu = (1-\gamma_5)_a^b(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b} - i(\gamma^\nu\theta)_b\partial_\nu)(x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta) =$$

$$= -i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\theta_a + \frac{i}{2}(1-\gamma_5)_a^b\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b}\cdot(\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta) \tag{3.35}$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b}(\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta) = \gamma^\mu\gamma_5\theta_b + \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b}(\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta) =$$

$$= \gamma^\mu\gamma_5\theta_b + \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b}(\bar{\theta}\gamma_{\mu_{\gamma_5\theta)=2\gamma^\mu\gamma_5\theta_b}} \tag{3.36}$$

– все дифференцируется также как x^2. Но $\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b}(\bar{\theta}\gamma^\mu\theta) = 0$. Поэтому:

$$(1-\gamma_5)D_a y^\mu = -i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\theta_a + i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5\theta_a = 0 \tag{3.37}$$

$\Longrightarrow (1+\gamma_5)D_a$ дает 0 при действии y^μ и $(1+\gamma_5)\theta$. Как следствие:

$$(1-\gamma_5)D_a\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = 0 \tag{3.38}$$

Можно доказать, что функция $\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta)$ является наиболее общим решением условия киральности. При этом

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

Отсюда следует, что любая 3-я степень равна нулю. Вторые степени тождеством Фирца сводятся к $\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta$, так как

$$(1+\gamma_5)\theta_a \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)^b = -\frac{1}{2}(1+\gamma_5)_a^b \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \tag{3.40}$$

Поэтому

$$\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Phi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu) \tag{3.41}$$

где φ, f – комплексные скаляры, а Φ – майорановский спинор. Из такого суперполя можно будет построить модель, инвариантную относительно преобразований суперсимметрии.

Лекция 4. N=1 киральное скалярное суперполе и построение явно суперсимметричных действий

Глава III. Построение суперсимметричных теорий с использованием суперпространства. Продолжение

N=1 киральное скалярное суперполе. Продолжение

Суперпространство – пространство, в котором координатами являются обычные (θ^μ), а также вспомогательные θ. Мы рассмотрели случай одной антикоммутирующей вспомогательной координаты θ в случае $N = 1$. Также помним, что

$$\bar{\theta} = \theta^T C \tag{4.1}$$

Суперсимметрию можно сделать явной, то есть можно найти способ построения действий, глядя на которые можно понять, инвариантны ли они. Будем пытаться понять, как с помощью суперпространства можно строить некие инвариантные относительно преобразований суперсимметрии теории. Далее приведем самые простые конкретные примеры таких теорий. Функции, которые заданы на суперпространстве, называются суперполями. Скалярное суперполе, как уже было выяснено, не содержит Лоренцевых индексов:

$$\phi(x^\mu, \theta) \tag{4.2}$$

Киральность означает удовлетворение условию:

$$(1-\gamma_5)D_a\phi = 0, \tag{4.3}$$

где D – это суперсимметричная ковариантная производная, которая записывается следующим образом:

$$D_a = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^a} - i(\gamma^\mu \theta)_a \partial_\mu \tag{4.4}$$

Ковариантная производная грассманова нечетная. Также для нее было показано, что:

$$\{D_a, Q_b\} = 0 \tag{4.5}$$

Киральные координаты:

$$y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{4.6}$$

Решение условия киральности:

$$\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) \tag{4.7}$$

Дальше начинается разложение по величине $(1+\gamma_5)\theta$. Максимальная степень разложения - вторая. Разложение будет иметь вид:

$$\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Phi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu) \tag{4.8}$$

Договорилсь, что Φ – майорановский спинор.

Познакомимся с явным видом преобразований суперсимметрии. Запишем их для компонентных полей, которые входят в киральное скалярное суперполе.

$$\phi \longrightarrow \exp(-i\bar{\varepsilon}Q)\phi, \tag{4.9}$$

причем

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon^T C,\, \varepsilon \neq \varepsilon(x) \tag{4.10}$$

Без гравитации суперсимметрия является глобальной суперсимметрией. Оператор суперзаряда явном виде:

$$Q_a = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^a} - (\gamma^\mu\theta)_a\partial_\mu, \tag{4.11}$$

где $\partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Будем рассматривать бесконечно малые преобразования суперсимметрии (ограничимся линейными слагаемыми по ε).

$$\phi \longrightarrow \exp(-i\bar{\varepsilon}Q)\phi \simeq (1-i\bar{\varepsilon}Q)\phi \equiv \phi' \tag{4.12}$$

Введем новую величину – изменение суперполя при преобразовании суперсимметрии:

$$\delta\phi = -\bar{\varepsilon}Q\phi, \tag{4.13}$$

где $Q = i\dfrac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu\theta\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$. Далее необходимо выполнить алгебраические действия. Вообще говоря, производная по θ будет действовать на y внутри полей.

$$y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{4.14}$$

Перейдём от набора переменных x^μ,θ к координатам $(\theta,y^\mu)\,(\theta=\theta')$:

$$Q_a = i\frac{\partial\bar{\theta}^{b\prime}}{\partial\bar{\theta}^a}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{b\prime}} + i\frac{y^\mu}{\partial\bar{\theta}^a}\cdot\frac{\partial}{\partial y^\mu} - (\gamma^\mu\theta)_a\cdot(\frac{\partial\bar{\theta}^{b\prime}}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{b\prime}} + \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}) \tag{4.15}$$

Замечаем, что $\theta = \theta'$ и сокращаем некоторые слагаемые:

$$Q_a = i\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\frac{\partial}{\partial\bar\theta}(\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta)\frac{\partial}{\partial y^\mu}\cdot\frac{i}{2} - (\gamma^\mu\theta)\frac{\partial}{\partial y^\mu} = i\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - \gamma^\mu\gamma_5\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu} - \gamma^\mu\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu} = \tag{4.16}$$

$$= i\frac{\partial}{\bar\theta^{a\prime}} - (\gamma^\mu\gamma_5\theta)\frac{\partial}{\partial y^\mu} - (\gamma^\mu\theta_a)\frac{\partial}{\partial y^\mu}$$

Поэтому выражение для суперзаряда может быть переписано следующим образом (y^μ, θ – независимые переменные):

$$Q_a = i\frac{\partial}{\partial\bar\theta^a} - \gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\frac{\partial}{\partial y^\mu} \tag{4.17}$$

Перейдем к нахождению преобразований суперсимметрии. Речь идет о бесконечно малых преобразованиях.

$$\delta\phi = -i\bar\varepsilon Q\phi \tag{4.18}$$

Распишем и опустим свертку по спинорному индексу:

$$\delta\phi = (\bar\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu})(\phi(y) + \bar\theta(1+\gamma_5)\Phi(y) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y)) \tag{4.19}$$

Тогда:

$$\begin{gathered}\delta\phi = -i\bar\varepsilon(i\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - \gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu})(\varphi(y)+\\ +\bar\theta(1+\gamma_5)\Phi(y) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y)) = (\bar\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu})(\varphi(y)\\ +\bar\theta(1+\gamma_5)\Phi(y) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y)) = \bar\varepsilon(1+\gamma_5)\Phi(y) + \bar\varepsilon(1+\gamma_5)\theta f(y) +\\ +i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y^\mu} + i\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\frac{\partial\Phi}{\partial y^\mu}\end{gathered} \tag{4.20}$$

по теореме Фирца:

$$\begin{gathered}\bar\varepsilon(1+\gamma_5)\Phi(y)\bar\Phi(y) + \bar\theta(1+\gamma_5)\varepsilon f(y) - i\bar\theta(1+\gamma_5)\gamma^\mu\varepsilon\partial_\mu\varphi(y) -\\ -\frac{i}{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Phi(y)\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\theta = -\frac{i}{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Phi(y)\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\theta =\\ = \delta\varphi(y) + \bar\theta(1+\gamma_5)\delta\Phi(y) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\delta f(y)\end{gathered} \tag{4.21}$$

Преобразования суперсимметрии, перемешивающие бозонные и фермионные поля:

$$\Longrightarrow \begin{cases}\delta\varphi(x) = \bar\varepsilon(1+\gamma_5)\Phi(x)\\ \delta[(1+\gamma_5)\Phi(x)] = (1+\gamma_5)[\varepsilon\cdot f(x) - i\gamma^\mu\varepsilon\cdot\partial_\mu\varphi(x)]\\ \delta f(x) = -i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Phi\end{cases} \tag{4.22}$$

Не хватает построения только инвариантного действия. Следующая задача – избавиться от $(1+\gamma_5)$.

Для того чтобы убрать проектор $(1+\gamma_5)$ в законе преобразования спинорного суперполя, рассмотрим величину

$$\phi^* = (\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Phi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y))^* \tag{4.23}$$

принимая во внимание, что

$$(y^\mu)^* = (x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta)^* = x^\mu - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{4.24}$$

$$\Longrightarrow \phi^* = \varphi^*(y^*) + \bar{\theta}(1=\gamma_5)\Phi(y^*) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^*(y^*) \tag{4.25}$$

Видно, что ϕ^* отличаются от ϕ заменой

$$\begin{cases} \varphi \longrightarrow \varphi^* \\ f \longrightarrow f^* \\ \gamma_5 \longrightarrow -\gamma_5 \end{cases} \tag{4.26}$$

Поэтому ϕ^* является антикиральным суперполем.

$$(1+\gamma_5)D\phi^* \tag{4.27}$$

Полностью аналогично случаю ϕ, применяя к ϕ^* оператор $-i\bar{\varepsilon}Q$, получаем, что

$$\begin{cases} \delta\varphi^* = \bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\Phi \\ \delta[(1-\gamma_5)\Phi] = (1-\gamma_5)[\varepsilon f^* - i\gamma^\mu\varepsilon\partial_\mu\varphi^*] \\ \delta f^* = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\Psi \end{cases} \tag{4.28}$$

Первое и третье равенства отличаются просто на комплексное сопряжение от предыдущих. Но теперь можно получить

$$\begin{gathered} \delta\Psi = \frac{1}{2}\delta[(1\gamma_5)\Phi] + \frac{1}{2}\delta[(1+\gamma_5)\Psi] = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)[(Ref - iImf)\varepsilon - \\ -i\gamma^\mu(\partial_\mu Re\varphi - i\partial_\mu Im\varphi)\varepsilon] + \frac{1}{2}(1+\gamma_5)[(Ref + iImf)\varepsilon - i\gamma^\mu(\partial_\mu Re\varphi + \\ + i\partial_\mu Im\varphi)\varepsilon] = (Ref + i\gamma_5 Imf)\varepsilon - i(\partial_\mu Re\varphi + i\gamma_5\partial_\mu Im\varphi)\gamma^\mu\varepsilon \end{gathered} \tag{4.29}$$

То есть, окончательно получаем законы суперсимметричных преобразований компонентных полей в виде

$$\begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\Phi \\ \delta\Psi = (Ref + i\gamma_5 Imf)\varepsilon - i(\partial_\mu Re\varphi + i\gamma_5\partial_\mu Im\varphi)\gamma^\mu\varepsilon \\ \delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi \end{cases} \tag{4.30}$$

Видно, что бозоны переходят в фермионы и обратно. Параметр преобразований – антикоммутирующий майорановский спинор $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$. Без гравитации суперсимметрия является глобальной симметрией.

Построение явно суперсимметричных действий

Пусть есть некоторое киральное суперполе Φ, которое удовлетворяет условию:

$$(1-\gamma_5)D_a\Phi = 0 \tag{4.31}$$

$$\Phi(y,\theta) = \varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Phi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y) \tag{4.32}$$

Тогда при преобразованиях суперсимметрии

$$\delta f = -\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi = \partial_\mu(-i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\Psi) \tag{4.33}$$

– старшая компонента кирального суперполя сдвигается на полную производную.

Поэтому с точностью до поверхностных членов Re и SUSY-инвариантным выражением будет

$$S_1 = 2\int d^4x(f+f^*) \tag{4.34}$$

При этом выражения движения не меняются. Запишем это выражение в более красивом и удобном виде через само суперполе. Необходимо выделить f-компоненту. Пусть α – грассманова переменная, любая антикоммутирующая величина. При этом:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\{\alpha,\alpha\} = 0 \tag{4.35}$$

Тогда по определению положим:

$$\int d\alpha \cdot 1 = 0 \tag{4.36}$$

$$d\alpha \cdot \alpha = 1 \tag{4.37}$$

$$d\alpha = \frac{\partial}{\partial\alpha} \tag{4.38}$$

С помощью аналогичного интегрирования можно выделить f из $\mathbf{\Phi}$:

$$\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta = \theta^T C(1+\gamma_5)\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{pmatrix} =$$

$$= (\theta_2,-\theta_1,-\theta_4,\theta_3)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2\theta_3\\ 2\theta_4\end{pmatrix} = -2\theta_4\theta_3 + 2\theta_3\theta_4 = 4\theta_3\theta_4 \tag{4.39}$$

Эту величину можно убрать с помощью интегрирования.

$$\int d^2\theta = \int d\theta_4 d\theta_3 \tag{4.40}$$

действительно,

$$d^2\theta\cdot 1 = 0 \tag{4.41}$$

$$d^2\theta\theta_3 = \int d^2\theta\theta_4 = 0 \tag{4.42}$$

$$\int d^2\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta = \int d\theta_4 d\theta_3\cdot 4\theta_3\theta_4 = 4\int d\theta_4\theta_4 = 4 \tag{4.43}$$

Эту величину можно записать в виде

$$\int d^2\theta\bar{\theta} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \tag{4.44}$$

поскольку тогда

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}[\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta] = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\cdot 2(1+\gamma_5)\theta$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\cdot 2(1+\gamma_5)\theta = \frac{\partial}{\partial\theta_a}(1+\gamma_5)_a^b\theta_b = tr(1+\gamma_5) = 4 - \textbf{верно} \tag{4.45}$$

Таким образом, все свойства выполняются и мы имеем равенство:

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \tag{4.46}$$

Остальные равенства также очевидно выполняются. Рассмотрим величину

$$\int d^4x d^2\theta\Phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) \tag{4.47}$$

Разложим выражение в окрестности точки x:

$$y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{4.48}$$

$$\begin{gathered}\int d^4xd^2\theta\Phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \\ \int d^4xd^2\theta\{\Phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta)+\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\Phi(x^\alpha,(1+\gamma_5)\theta)+ \\ +\frac{1}{2!}\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\alpha\gamma_5\theta\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\beta\gamma_5\theta\partial_\alpha\partial_\beta\Phi(x^\mu,(1+\gamma_5)\theta)\}\end{gathered} \tag{4.49}$$

Максимальная степень θ - четверка, поэтому сумма конечна. Два последних слагаемых – интегралы от 4 дивергенций, поэтому их можно отбросить.

$$\int d^4xd^2\theta\Phi(y^\mu \longrightarrow x^\mu,(1+\gamma_5)\theta) =^4 xd^2\theta\{\varphi(x)+\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Phi(x)+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x)\} \tag{4.50}$$

Можно использовать те формулы, которые уже были записаны.

$$\int d^4xd^2\theta\Phi(x^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \frac{1}{2}\cdot 4\int d^4xf(x) = 2\int d^4xf(x) \tag{4.51}$$

Действие записывается в виде:

$$S_1 = \int d^4xd^2\theta\Phi + \textbf{к.с.} \tag{4.52}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть антикиральное поле

$$\Phi^*(y^*,\theta) = \varphi^*(y^*)+\bar{\theta}(1-\gamma_5)\Phi(y^*)+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^*(y^*) \tag{4.53}$$

В этом случае необходимо рассмотреть величину

$$\begin{gathered}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta = \theta^TC(1-\gamma_5)\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \\ = (\theta_2,-\theta_1,-\theta_4,\theta_3)\begin{pmatrix}2\theta_1\\ 2\theta_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 2\theta_2\theta_1 - 2\theta_1\theta_2 = 4\theta_2\theta_1\end{gathered} \tag{4.54}$$

Эту величину можно убрать интегрированием

$$\int d^2\bar{\theta} \equiv \int d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \tag{4.55}$$

под действием которого

$$\int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta = \int d\theta_1 d\theta_2 \cdot 4\theta_2\theta_1 = 4 \tag{4.56}$$

Тогда аналогично случаю кирального суперполя

$$\int d^4xd^2\phi^* = \int d^4x[2f^* + \textbf{п. производные}] \tag{4.57}$$

Поэтому с точностью до интегралов от полных производных суперсимметричный инвариант может быть записан в виде

$$S_1 = 2\int d^4x(f+f^*) = \int d^4xd^2\theta\phi + \int d^4xd^2\bar{\theta}\phi^* = \int d^4xd^2\theta\phi + \textbf{к.с.} \tag{4.58}$$

где ϕ – произвольное киральное суперполе, которое по определению удовлетворяет условию:

$$(1-\gamma_5)D\phi = 0 \tag{4.59}$$

Суперсимметричный инвариант:

$$S_1 = \int d^4xd^2\theta\Phi + \textbf{к.с.} = \int d^4xd^2\theta\Phi + \int d^4xd^2\bar{\theta}\Phi^* \tag{4.60}$$

$\int d^4xd^2\theta$ – интеграл по киральному суперпространству. Эта структура указывает на инвариантность преобразований суперсимметрии. В реальности таких инвариантов два, построим второй. Для этого нужно рассмотреть вещественное ($N=1$) скалярное суперполе.

Еще один инвариант может быть построен исходя из Re скалярного суперполя $V = V(x^\mu, \theta)$, причем

$$V(x^\mu,\theta) = V^*(x^\mu,\theta) \tag{4.61}$$

Легко понять, что его старшая компонента (коэффициент при $(\bar{\theta}\theta)^2$) будет при суперсимметричных преобразованиях сдвигаться на полную производную:

$$V(x,\theta) = ... + \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2D(x) \tag{4.62}$$

где $\lambda(x)$ – некоторый майорановский спинор (в силу условий вещественности), $D(x) \in \boldsymbol{Re}$ в силу Re суперполя $V(x,\theta)$. Вскоре увидим, что

$$S_2 \equiv 2\int d^4xD(x) \tag{4.63}$$

Лекция 5. Построение суперсимметричных теорий с использованием суперпространства и простейший вариант модели Весса-Зумино

Глава III. Построение суперсимметричных теорий с использованием суперпространства. Продолжение

Построение явно суперсимметричных действий. Продолжение

Мы уже начали изучать построение суперсимметричных Лагранжианов. Первый из суперсимметичных инвариантов Φ получался следующим образом:

$$(1-\gamma_5)D_a\Phi = 0 \tag{5.1}$$

Выяснили, что старшая компонента (коэффициент при большей степени θ) при суперсимметричных преобразованиях сдвигается на полную производную. Для записи ввели интегрирование по антикоммутирующим переменным, получили действие в виде:

$$S_1 = \int d^4x d^2\theta \Phi + \textbf{к.с.} \tag{5.2}$$

Есть и второй суперсимметричный инвариант. Для его построения необходимо вещественное скалярное суперполе V. Условие вещественности:

$$V^* = V(x,\theta) \tag{5.3}$$

Антикоммутриующий майорановский спинор необходим, чтобы сделать суперсимметрию явной. Разложим $V(x,\theta)$:

$$V(x,\theta) = ... + (\theta\bar\theta)\cdot\bar\theta\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D(x) \tag{5.4}$$

$\lambda(x)$ – майорановский спинор, $D(x)$ – вещественное скалярное поле.

Старшая компонента при преобразованиях суперсимметрии сдвигается на полную производную. Докажем это.

Изменение суперполя при бесконечно малых преобразованиях суперсимметрии:

$$\delta = -i\bar\varepsilon QV \tag{5.5}$$

Оператор суперзаряда представляет собой величину:

$$Q = i\frac{\partial}{\partial\theta} - (\gamma^\mu\theta)\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{5.6}$$

$$\delta V = (\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\bar{\varepsilon}\theta\partial_\mu)[... + (\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x)] \tag{5.7}$$

В случае скалярного кирального суперполя данное выражение интерпретируется следующим образом:

$$\delta V = ... + (\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\delta\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\delta D(x) \tag{5.8}$$

$$\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\delta D(x) = i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta\cdot\bar{\theta}\partial_\mu\lambda(x)\cdot(\bar{\theta}\theta) \tag{5.9}$$

Будем использовать тождество Фирца:

$$\theta\cdot\bar{\theta} = -\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta) - \frac{1}{4}\gamma_5\cdot\bar{\theta}\gamma_5\theta + \frac{1}{4}\gamma^\nu\gamma_5\cdot\bar{\theta}\bar{\theta}\gamma_\nu\gamma_5\theta \tag{5.10}$$

Будет выполняться комбинация:

$$\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma_5\theta = 0 \tag{5.11}$$

А также:

$$\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta = 0 \tag{5.12}$$

Тогда:

$$\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\delta D(x) = -\frac{i}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda(x) \tag{5.13}$$

Окончательно для $\delta D(x)$:

$$\delta D(x) = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda(x) = \partial_\mu[-i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\lambda(x)] \tag{5.14}$$

Получили четырехдивергенцию или же полную производную. В качестве второго инварианта можно рассмотреть выражение:

$$S_2 \equiv 2\int d^4x D(x) \tag{5.15}$$

$D(x)$ – вещественная величины. Подынтегральное выражение сдвигается на полную производную при преобразованиях суперсимметрии. Удобно действие переписать в другом виде.

$$\delta V = ... + (\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\delta\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\delta D(x) \tag{5.16}$$

Задача – выделить $D(x)$. Можно использовать интегрирование по антикоммутриующим переменным. Вспомним:

$$\begin{cases} \int d\alpha \cdot 1 = 0 \\ \int d\alpha \cdot \alpha = 1 \\ \int d\alpha = \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \end{cases} \tag{5.17}$$

Прежде всего, вычислим выражение $(\bar{\theta}\theta)^2$.

$$(\bar{\theta}\theta)^2 = (\theta^T C\theta)^2 = [(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}]^2 =$$

$$= [(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\begin{pmatrix} -\theta_2 \\ \theta_1 \\ \theta_4 \\ -\theta_3 \end{pmatrix}]^2 = [-\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1 + \theta_3\theta_4 - \theta_4\theta_3]^2 \tag{5.18}$$

$$S_2 = 2\int d^4x D(x) \tag{5.19}$$

$$(\bar{\theta}\theta)^2 = [2\theta_2\theta_1 + 2\theta_3\theta_4]^2 = 8\theta_2\theta_1\theta_3\theta_4 \tag{5.20}$$

Применим четыре интегрирования по антикоммутирующим переменным. Определим величину:

$$\int d^4\theta \equiv \int d^2\bar{\theta} = \int d\theta_4 d\theta_3 \int d\theta_1 d\theta_2 \tag{5.21}$$

$$(\bar{\theta}\theta)^2 = \theta_2\theta_1\theta_3\theta_4 \tag{5.22}$$

$$\int d^4\theta(\bar{\theta}\theta)^2 = \int d\theta_4 d\theta_3 d\theta_1 d\theta_2 \cdot 8\theta_2\theta_1\theta_3\theta_4 \tag{5.23}$$

$$\int d^4\theta(\bar{\theta}\theta)^2 = 8\int d\theta_4 d\theta_3 d\theta_1 \theta_1\theta_3\theta_4 = ... = 8 \tag{5.24}$$

Очевидно, что при действии такого интеграла на любую степень меньше четырех:

$$\int d^4(\theta)^\alpha = 0,\ \alpha = 0,1,2,3. \tag{5.25}$$

$$\int d^4\theta V(x,\theta) = \frac{1}{4}\int d^4\theta(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) = 2\int d^4x D(x) = \tag{5.26}$$

$$S_2 = 2\int d^4x D(x) = \int d^4x d^4\theta V(x,\theta) \tag{5.27}$$

$$\int d^4\theta V(x) = 2D(x) \tag{5.28}$$

Получили второй инвариант.

Можно доказать, что

$$\int d^4\theta = \frac{1}{8}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})^2 \tag{5.29}$$

Проверим для этого, что

$$8 = \int d^4\theta(\bar{\theta}\theta)^2 \tag{5.30}$$

$$\int d^4\theta(\bar{\theta}\theta)^2 = \frac{1}{8}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})^2(\bar{\theta}\theta)^2$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})^2\frac{\partial}{\partial\theta_a}[4\theta_a(\bar{\theta}\theta)] = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})^2\cdot[\delta_a^a(\bar{\theta}\theta)+2\theta_a\bar{\theta}^a] = \tag{5.31}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})(4(\bar{\theta}\theta)-2(\bar{\theta}\theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta_a}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^a}(\bar{\theta}\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_a}\cdot 2\theta_a = 2\delta_a^a = 8$$

Можем взять сумму:

$$S = S_1 + S_2 = \int d^4x d^4\theta V(x,\theta) + [\int d^4x d^2\theta \Phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) + \textbf{к.с.}] \tag{5.32}$$

Причем $V^* = V, (1-\gamma_5)D_a\Phi = 0$. Действия, инвариантные относительно преобразований суперсимметрии, представляются таким образом.

Глава IV. Модель Весса-Зумино

Простейший вариант модели Весса-Зумино

Рассмотрим киральное скалярное суперполе, удовлетворяющее условию

$$(1-\gamma_5)D_a\phi = 0 \tag{5.33}$$

Исходя из него построим вещественное скалярное поле следующим образом:

$$V \equiv \frac{1}{4}\phi^*\phi \tag{5.34}$$

В простейшем случае положим:

$$\Phi = 0 \tag{5.35}$$

Очевидно, что такая величина будет являться вещественной.

$$V^* = (\frac{1}{4}\phi^*\phi) = \frac{1}{4}\phi^*\phi = V \tag{5.36}$$

В качестве действия в суперполевой формулировке возьмем величину:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^*\phi \tag{5.37}$$

Необходимо записать действие в терминах компонентных полей.

Вспомним, как разложить киральное скалярное суперполе по компонентам.

$$\phi = \phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) \tag{5.38}$$

Вспомним также определение y^μ:

$$y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{5.39}$$

Максимальная степень $1+\gamma_5$ – двойка, поэтому:

$$\phi = \phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu) \tag{5.40}$$

В этом выражении нужно взять интеграл по антикоммутирующей переменной θ. Первая неприятность – зависимость ϕ от y. Нужно киральное скалярное суперполе записать в терминах x. Попробуем это сделать. Суперполевая версия действия:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^*\phi \tag{5.41}$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора в окрестности x. Из-за присутствия антикоммутриющих переменных не может получиться высокая степень, поэтому будем получать конечные суммы.

$$\phi = \phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\partial_\mu\varphi(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) \tag{5.42}$$

Это максимальная степень, высшие будут равны нулю. Продолжим:

$$\begin{gathered}\phi = \phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\partial_\mu\varphi(x) + \\ + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(x) + \\ + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial_\mu f(x)\end{gathered} \tag{5.43}$$

Это выражение, безусловно, можно упростить. Заметим, что есть слагаемые, которые имеют четвертую степень по θ. Любое такое слагаемое должно сводится к комбинации $(\bar{\theta}\theta)^2$ с каким-то коэффициентом. Рассмотрим слагаемое

$$\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta = C^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)^2 \tag{5.44}$$

Применим к данной конструкции интеграл:

$$\int d^4\theta C^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)^2 = 8C^{\mu\nu} \tag{5.45}$$

С другой стороны:

$$\int d^4\theta C^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)^2 = \int d^4\theta\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta = \frac{1}{8}(\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})[\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta] \tag{5.46}$$

Вычислим это выражение:

$$8C^{\mu\nu} = \frac{1}{8}(\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})\frac{\partial}{\partial\theta_a}[2(\gamma^\mu\gamma_5\theta)_a\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta + 2\cdot(\gamma^\nu\gamma_5\theta)_a\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta] \tag{5.47}$$

Остановимся подробнее:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_a}(\gamma^\mu\gamma_5\theta)_a = \frac{\partial}{\partial\theta_a}(\gamma^\mu\gamma_5)_a^b\theta_b = (\gamma^\mu\gamma_5) = tr(\gamma^\mu\gamma_5) = 0 \tag{5.48}$$

Получили нуль, поскольку след нечетного числа гамма-матриц равняется нулю.

$$\begin{gathered}8C^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial}\bar{\theta})[(\gamma^\mu\gamma_5\theta)_a\cdot 2(\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5)^a + \\ +(\mu\leftrightarrow\nu)] = -\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial}\bar{\theta})[\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5\theta + (\mu\leftrightarrow\nu)] = \\ = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial}\bar{\theta})(\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma^\mu\theta + \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma^\nu\theta) = [\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}]\end{gathered} \tag{5.49}$$

Окончательно получим:

$$8C^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}(\bar{\theta}\theta) = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\theta_a}\cdot 2\theta_a = 8\eta^{\mu\nu} \tag{5.50}$$

Значит искомая величина полностью совпадает с метрическим тензором:

$$C^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \tag{5.51}$$

Другими словами, справедливо тождество:

$$\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta = C^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)^2 = \eta^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)^2 \tag{5.52}$$

Скоро это тождество поможет упростить слагаемое.

Домашнее задание: доказать справедливость тожеств

$$\begin{cases}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 = -(\bar{\theta}\theta)^2 \\ \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma_5\theta = 0 \\ \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0 \\ \bar{\theta}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0\end{cases} \tag{5.53}$$

Любое слагаемое третьей степени по θ должно сводиться к некоторому коэффициенту C, в частности:

$$\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta = C\cdot\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5^\mu$$

(5.54)

Домножим на $\gamma^\nu\gamma_5\theta$:

$$\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta = C\cdot\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\gamma^\nu\gamma_5\theta =$$

$$= C(\bar\theta\theta)\cdot(-1)\bar\theta\gamma^\mu\gamma^\nu\theta = -C\cdot(\bar\theta\theta)\bar\theta(\eta^{\mu\nu}+\gamma^{\mu\nu})\theta \tag{5.55}$$

На первой лекции было доказано, что

$$\bar\theta\gamma^{\mu\nu}\theta = 0 \tag{5.56}$$

Поэтому:

$$\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta = -C(\bar\theta\theta)^2\eta^{\mu\nu} \tag{5.57}$$

Таким образом нашли значение C:

$$C = -1 \tag{5.58}$$

Выпишем отдельно полученные полезные тождества:

$$\begin{cases}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta = \eta^{\mu\nu}(\bar\theta\theta)^2\\ \bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta = -(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\end{cases} \tag{5.59}$$

Тогда можно записать:

$$\phi(x^\mu,\theta) = \varphi(x)+\bar\theta(1+\gamma_5)\Psi(x)+\frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(x)+$$

$$+\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\varphi(x)-\frac{i}{2}(\bar\theta\theta)\bar\theta\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi(x)-\frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial^2\varphi \tag{5.60}$$

Теперь выражение записано не в терминах y, а в терминах x.

Теперь получим ϕ^*. Применим операцию комплексного сопряжения

$$\phi^* = \varphi(x)+\bar\theta(1-\gamma_5)\Psi(x)+\frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta f^*(x)+\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\varphi^*(x)-$$

$$-\frac{i}{2}(\bar\theta\theta)\bar\theta\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\Psi(x)-\frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial^2\varphi^* \tag{5.61}$$

Осталось перемножить последние уравнения и вычислить интеграл по антикоммутирующей переменной – посчитать 36 слагаемых. Однако есть два упрощающих обстоятельсва: все степени по θ выше четвертой равны нулю, их можно сразу отбросить, а также все степени меньше четвертой также зануляются.

$$S = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\{\varphi^*(-\frac{1}{8})(\bar{\theta}\theta)^2\partial^2\varphi + \bar{\Psi}(1-\gamma_5)\theta\cdot(-\frac{i}{2})\bar{\theta}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi\cdot(\bar{\theta}\theta)+$$
$$+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^*\cdot\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f - \frac{i}{2}\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\varphi^*\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\partial_\nu\varphi+ \tag{5.62}$$
$$+\bar{\theta}\theta\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\theta\cdot(-\frac{i}{2})\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\Psi - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial^2\varphi^*\cdot\varphi\}$$

Остается взять интеграл по антикоммутирующим переменным. Заметим, что в некоторых слагаемых

$$\int d^4\theta(\bar{\theta}\theta)^2 = 8 \tag{5.63}$$

$$S = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^*\phi = \int d^4xd^4\theta\frac{1}{4}\{(\bar{\theta}\theta)^2[-\frac{1}{8}\varphi^*\partial^2\varphi - \frac{1}{8}\partial^2\varphi^*\cdot\varphi + \frac{1}{4}\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + (\frac{1}{4}+\frac{1}{4})f^*f]-$$
$$-\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2[-\frac{i}{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi - \frac{i}{2}\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\Psi]\} = \tag{5.64}$$
$$= \int d^4x\{-\frac{1}{4}\varphi^*\partial^2\varphi - \frac{1}{4}\partial^2\varphi^*\cdot\varphi + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + f^*f + \frac{i}{4}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)^2\gamma^\mu\Psi\frac{i}{4}\bar{\Psi}(1+\gamma_5)^2\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\}$$

Для спинорных слагаемых вспомнили тождество Фирца:

$$\theta\cdot\bar{\theta} = -\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta) - \frac{1}{4}\gamma_5\cdot\bar{\theta}\gamma_5\theta + \frac{1}{4}\gamma^\nu\gamma_5\cdot\bar{\theta}\bar{\theta}\gamma_\nu\gamma_5\theta \tag{5.65}$$

В итоге для действия получаем с точностью до интегралов от полных производных:

$$S = \int d^4x\{\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}) + f^*f + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\} =$$
$$= \int d^4x\{\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + f^*f + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\} \tag{5.66}$$

Таким образом, сначала написали суперсимметричное действие, записанное в суперполях. В такой форме записи инвариантность относительно преобразований суперсимметрии является явной. Далее записали в терминах компонентных полей. Получили безмассовое комплексное поле, нечто похожее на электродинамику (однако с майорановских спинором), а также скалярное поле, входящее квадратично.

Лекция 6. Простейший вариант модели Весса-Зумино

Глава IV. Модель Весса-Зумино. Продолжение

Простейший вариант модели Весса-Зумино. Продолжение

Уже начато изучение способа построения суперсимметричных инвариантных Лагранжианов, то есть существует способ сделать суперсимметрию явной. Для этого используется так называемый формализм суперпространство. Координаты суперпространства (x^μ, θ), рассматривается случай $N = 1$. Функции на суперпространстве называются суперполями.

Первый способ построения инварианта:

$$(1-\gamma_5)D_a\Phi = 0 \tag{6.1}$$

$$\Phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu) \tag{6.2}$$

Старшая компонента скалярного кирального суперполя при преобразованиях суперсимметрии меняется на полную производную:

$$\delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi = \partial_\mu[-i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\Psi] \tag{6.3}$$

$$\varepsilon \neq \varepsilon(x) \tag{6.4}$$

Получили, что

$$S_1 = 2\int d^4x(f + f^*) \tag{6.5}$$

Этот инвариант можно записать используя интегрирование по антикоммутирующим переменным.

$$\int d\alpha \cdot 1 = 0 \tag{6.6}$$

$$d\alpha \cdot \alpha = 1 \tag{6.7}$$

$$d\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tag{6.8}$$

$$\int d^2\theta \equiv \int d\theta_4 d\theta_3 = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \tag{6.9}$$

$$d^2\theta\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta = 4 \tag{6.10}$$

$$d^2\theta(1+\gamma_5)\theta_a = 0 \tag{6.11}$$

$$d^2\theta \cdot 1 = 0 \tag{6.12}$$

Эти свойства позволяют переписать выражение в более красивом виде:

$$S_1 = 2\int d^4x(f+f^*) = \int d^4xd^2\theta\Phi + \textbf{к.с.} \tag{6.13}$$

Можно аналогичным образом представить комплексно сопряженные слагаемые:

$$\int d^4xd^2\theta\Phi + \textbf{к.с.} = \int d^4xd^2\theta\Phi + \int d^4xd^2\bar{\theta}\Phi^* \tag{6.14}$$

Причем:

$$\int d^2\bar{\theta} \equiv \int d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \tag{6.15}$$

$$d^2\bar{\theta}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta = 4 \tag{6.16}$$

$$d^2\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta_a = 0 \tag{6.17}$$

Так мы получили первый инвариант. Это не единственный способ построения инвариантных действий. Рассмотрим второй инвариант. Возьмем вещественное суперполе $V(x,\theta)$. Условие вещественности:

$$V = V^* \tag{6.18}$$

$$V(x,\theta) = ... + (\theta\bar{\theta})\cdot\bar{\theta}\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) \tag{6.19}$$

$\lambda(x)$ – майорановский спинор (для того, чтобы поле получилось вещественным), $D(x)$ – вещественный скаляр, который при преобразованиях суперсимметрии сдвигается на полную производную.

$$Q_a = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^a} - (\gamma^\mu\theta)_a\partial_\mu \tag{6.20}$$

$$\delta V = -i\bar{\varepsilon}QV = (\varepsilon\frac{\bar{\partial}}{\partial}\theta + i\varepsilon\bar{\gamma}^\mu\theta\frac{\partial}{\partial x^\mu})\cdot(... + \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\lambda + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)D) =$$

$$= ... + \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\delta\lambda + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\delta D \tag{6.21}$$

Рассмотрим подробнее слагаемое δD.

$$\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\delta D = (\bar{\theta}\theta)\cdot i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta\cdot\bar{\theta}\partial_\mu\lambda \tag{6.22}$$

Применим тождество Фирца

$$\theta\cdot\bar{\theta} = -\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta) - \frac{1}{4}\gamma_5\cdot\bar{\theta}\gamma_5\theta + \frac{1}{4}\gamma^\nu\gamma_5\cdot\bar{\theta}\bar{\theta}\gamma_\nu\gamma_5\theta \tag{6.23}$$

Позже докажем соотношения

$$\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma_5 = 0 \tag{6.24}$$

$$\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta = 0 \tag{6.25}$$

Тогда:

$$\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\delta D = (\bar{\theta}\theta)\cdot i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\theta\cdot\bar{\theta}\partial_{\mu}\lambda = -\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\cdot i\bar{\theta}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\lambda \tag{6.26}$$

Используем то, что спинор θ является майорановским.

$$(\bar{\theta}\theta)^2 = (\theta^T C\theta)^2 = [(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4)\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{pmatrix}]^2 =$$

$$= [(\theta_2,-\theta_1,-\theta_4,\theta_3)\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{pmatrix}]^2 = [\theta_2\theta_1-\theta_1\theta_2-\theta_4\theta_3+\theta_3\theta_4]^2 = [2\theta_2\theta_1+2\theta_3\theta_4]^2 = 8\theta_2\theta_1\theta_3\theta_4 \tag{6.27}$$

Достаточно очевидно определить, с помощью какого оператора можно удалить эту величину.

$$\int d^4\theta \equiv \int d\theta_4 d\theta_3 d\theta_1 d\theta_2 \tag{6.28}$$

$$d^4\theta(\bar{\theta}\theta)^2 = 8 \tag{6.29}$$

Действие на степень, меньшую 4, будет давать нуль.

$$\int d^4\theta(\theta)^{\alpha} = 0,\ \alpha = 0,1,2,3 \tag{6.30}$$

Проведем проверку:

$$\frac{1}{8}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})^2\frac{\partial}{\partial\theta_a}\cdot[4\theta_a(\bar{\theta}\theta)] = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})^2\cdot[\delta^a_a(\bar{\theta}\theta)+2\theta_a\bar{\theta}^a] =$$

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})(4(\bar{\theta}\theta)-2(\bar{\theta}\theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta_a}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^a}(\bar{\theta}\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_a}\cdot 2\theta_a = 2\delta^a_a = 4\cdot 2 = 8 \tag{6.31}$$

Рассмотрим величину

$$\int d^4x d^4\theta V(x,\theta) = \int d^4x d^4\theta(...+(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\lambda(x)+\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x)) =$$

$$= 8\cdot\frac{1}{4}\int d^4x D(x) = 2\int d^4x D(x) = S_2 \tag{6.32}$$

Остается сложить два инварианта, чтобы получить основной результат.

$$S = S_1+S_2 = \int d^4x d^4\theta V + (\int d^4x d^2\theta\Phi + \textbf{к.с.}) \tag{6.33}$$

Причем:

$$\begin{cases} V^* = V \\ (1-\gamma_5)D_a\Phi = 0 \end{cases} \tag{6.34}$$

Перейдем к рассмотрению модели Весса-Зумино, а именно ее простейший вариант. Построим модель, инвариантную относительно преобразований суперсимметрии.

$$(1-\gamma_5)D_a\phi = 0 \tag{6.35}$$

$$\phi = \phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu) \tag{6.36}$$

Выберем поле V в виде:

Лекция 7. Модель Весса-Зумино: простейший вариант и усложненный массой и взаимодействием

Глава IV. Модель Весса-Зумино. Продолжение

Модель Весса-Зумино с массой и взаимодействием. Продолжение

В простейшем случае записывали действие

$$S = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+\phi \tag{7.1}$$

Уже начали рассматривать обобщение модели Весса-Зумино с массой и взаимодействием:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+\phi + (\int d^4xd^2\theta(\frac{1}{4}m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3) + \textbf{к.с.}) \tag{7.2}$$

Вспомним про размерности:

$$\begin{cases} [m] = m \\ [\lambda] = 1 \end{cases} \tag{7.3}$$

Будем учитывать определение суперпотенциала:

$$(\frac{1}{4}m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3) = \Phi \tag{7.4}$$

Суперполе удовлетворяет условию:

$$(1-\gamma_5)D_a\phi = 0 \tag{7.5}$$

Разложение в ряд:

$$\begin{cases} \phi(y^\mu,(1-\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\Psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu) \\ y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta \end{cases} \tag{7.6}$$

Нужно в терминах компонентных полей завершить вычисление.

$$\int d^4xd^2\theta\Phi(y^\mu,(1-\gamma_5)\theta) = \int d^4xd^2\theta\Phi(y^\mu \longrightarrow x^\mu,(1-\gamma_5)\theta) \tag{7.7}$$

Вспомним важные соотношения для вычисления интеграла.

$$\begin{cases} \int d^2\theta 1 = 0 \\ \int d^2\theta(1+\gamma_5)\theta_a = 0 \\ \int d^2\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\theta = 4 \end{cases} \tag{7.8}$$

Начнем со слагаемого, содержащего массу.

$$\frac{1}{4}\int d^4xd^2\theta m\phi^2 = \frac{m}{4}\int d^4xd^2\theta(\varphi(x)+\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(x)+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x))^2 \qquad (7.9)$$

Произошла замена, и мы избавились от коммутирующих спиноров. При раскрытии квадрата все степени, начиная с третьей, сократятся. Любые степени, меньше второй, будут ликвидированы из-за интегрирования по θ.

$$\frac{1}{4}\int d^4xd^2\theta m\phi^2 = \frac{m}{4}\int d^4xd^2\theta\{\varphi f\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta+\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi\} \qquad (7.10)$$

Вспомним про тождество Фирца, согласно которому:

$$Bar\Psi(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi = -\frac{i}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot(1+\gamma_5) \qquad (7.11)$$

Тогда выражение можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{4}\int d^4xd^2\theta m\phi^2 = \frac{m}{4}\int d^4xd^2\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\{\varphi\cdot f-\frac{1}{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi\} =$$

$$= m\int d^4x\{\varphi f-\frac{1}{2}\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi\} \qquad (7.12)$$

В последнем переходе было учтено, что

$$d^2\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta = 4 \qquad (7.13)$$

Окончательно запишем:

$$\frac{1}{4}\int d^4xd^2\theta m\phi^2+\textbf{к.с.} = m\int d^4x\{\varphi f-\frac{1}{2}\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi+\varphi^*f^*-\frac{1}{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi\} =$$

$$= md^4x\{\varphi f+\varphi^*f^*-\bar{\Psi}\Psi\} \qquad (7.14)$$

Аналогичным образом вычислим второе слагаемое:

$$\frac{1}{6}\lambda\int d^4xd^2\theta\phi^3 = \frac{\lambda}{6}\int d^4xd^2\theta(\varphi(x)+\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(x)+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot f(x))^3 =$$

$$= \frac{\lambda}{6}\int d^4xd^2\theta\{3\cdot\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\varphi^2f+3\varphi\cdot\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\theta\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi\} \qquad (7.15)$$

Снова применяем тождество Фирца:

$$(1+\gamma_5)\theta\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi = -\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot(1+\gamma_5) \qquad (7.16)$$

Тогда

$$\frac{1}{6}\lambda\int d^4xd^2\theta\phi^3 = \frac{\lambda}{4}\int d^4xd^2\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\{\varphi^2f-\varphi\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi\} =$$

$$\lambda \int d^4x\{\varphi^2 f - \varphi\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi\} \tag{7.17}$$

Можно добавить комплексно сопряженные слагаемые и записать результат:

$$\frac{1}{6}\lambda \int d^4x d^2\theta \phi^3 + \textbf{к.с.} = \lambda \int d^4x\{\varphi^2 f + \varphi^{*2} f^* - \varphi\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi - \varphi^*\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi\} \tag{7.18}$$

В терминах компонентных полей:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+\phi + (\int d^4x d^2\theta(\frac{1}{4}m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3) + \textbf{к.с.}) =$$

$$= \int d^4x\{\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + f^*f + m\varphi f + m\varphi^* f^* - m\bar{\Psi}\Psi + \lambda f\varphi^2 + \tag{7.19}$$

$$+\lambda f^*\varphi^{*2} - \lambda\varphi\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi - \lambda\varphi^*\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi\}$$

Здесь присутствует вспомогательное поле f, которое квадратично. Попробуем записать уравнения движения для f^*:

$$f^* : 0 = f + m\varphi^* + \lambda\varphi^{*2} \tag{7.20}$$

Теперь для f:

$$f : 0 = f^* + m\varphi + \lambda\varphi^2 \tag{7.21}$$

Есть общий алгоритм, позволяющий исключать вспомогательные поля. Опишем его. Пусть есть функция Лагранжа, которая содержит вспомогательные поля, которые устроены так:

$$L \longleftarrow \frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j + x_i B_i \tag{7.22}$$

x_i – какое-то количество вспомогательных полей, A_{ij} – симметричная матрица.

$$\begin{cases} A_{ij} = A_{ji} \\ A = A^T \end{cases} \tag{7.23}$$

Любое комплексное поле может быть представлено как два вещественных.

$$L \longleftarrow \frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j + x_i B_i = \frac{1}{2}x^T A x + X^T B \tag{7.24}$$

Запишем в этом случае уравнение для вспомогательного поля x. При дифференцировании по x_i получаем:

$$\begin{cases} 0 = A_{ij}x_j + B_i \\ 0 = Ax + B \\ x = -A^{-1}B \end{cases} \tag{7.25}$$

$$L \longleftarrow \frac{1}{2}x^T A x + X^T B = \frac{1}{2}(A^{-1}B)^T A(A^{-1}B) - (A^{-1}B)^T B \tag{7.26}$$

Используем свойство:

$$(A^{-1})^T = A^{-1} \tag{7.27}$$

Тогда

$$dfrac12(A^{-1}B)^T A(A^{-1}B) - (A^{-1}B)^T B = \frac{1}{2}B^T A^{-1}B - B^T A^{-1}B = -\frac{1}{2}B^T A^{-1}B \tag{7.28}$$

Вклад линейных слагаемых отличается от вклада квадратичных слагаемых на значение «-2». Это работает для любой теории, содержащей вспомогательные поля.

$$-\frac{1}{2}B^T A^{-1}B = \frac{1}{2}x_j A_{ij} x_j \tag{7.29}$$

Алгоритм по исключению вспомогательных полей: зачеркнуть линейные члены, перед квадратичными изменить знак на противоположный, подставить в полученное выражение уравнение движения. Такой же результат получим, если зачеркнем квадратичные слагаемые, а линейные поделим пополам. Так можно просто исключить вспомогательные поля. Попробуем проделать этот алгоритм.

$$\begin{cases} 0 = f + m\varphi^* + \lambda\varphi^{*2} \\ 0 = f^* + m\varphi + \lambda\varphi^2 \end{cases} \tag{7.30}$$

Убираем линейные по вспомогательным полям слагаемые:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+\phi + (\int d^4x d^2\theta (\frac{1}{4}m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3) + \textbf{к.с.}) = \int d^4x\{\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + f^*f -$$

$$-m\bar{\Psi}\Psi - \lambda\varphi\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi - \lambda\varphi^*\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi\} \tag{7.31}$$

Теперь меняем знак перед квадратичными слагаемыми (в нашем случае это слагаемое f^*f):

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+\phi + (\int d^4x d^2\theta (\frac{1}{4}m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3) + \textbf{к.с.}) =$$

$$= \int d^4x\{\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - f^*f - m\bar{\Psi}\Psi - \lambda\varphi\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi - \lambda\varphi^*\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi\} \tag{7.32}$$

$$f^*f = |f|^2 = |f^*|^2 = |m\varphi + \lambda\varphi^2|^2 \tag{7.33}$$

Действие без вспомогательных полей:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+\phi + (\int d^4x d^2\theta (\frac{1}{4}m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3) + \textbf{к.с.}) =$$

$$= \int d^4x \{\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - |m\varphi + \lambda\varphi^2|^2 - m\bar{\Psi}\Psi - \lambda\varphi^*\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi\} \quad (7.34)$$

Если $\lambda = 0$:

$$|m\varphi + \lambda\varphi^2|^2 = -m^2\varphi^*\varphi \quad (7.35)$$

Рассмотрим потенциал скалярных полей, он положительно определен (получается из алгебры суперсимметрии):

$$V(\varphi) = |m\varphi + \lambda\varphi^2|^2 \geqslant 0 \quad (7.36)$$

Это удобно при построении реалистичных моделей. Этот потенциал получился при исключении вспомогательных полей. Он имеет четвертую степени (перенормируемые теории). Константа связи для ϕ^4 связана с Юкавскими слагаемыми.

Инвариантность действия относительно преобразований суперсимметрии может быть проверена явно. Мы исключили вспомогательное поле, значит при проверке инвариантности нужно подставить не $f = 0$, а значение $f = -m\varphi^* - \lambda\varphi^{*2}$.

Глава V. N=1 суперсимметричные калибровочные теории

Вспомним, как вводятся калибровочные теории. Начинаем с функции Лагранжа вида

$$L = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - V(\varphi, \varphi^+) \quad (7.37)$$

Она инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\begin{cases} \varphi \longrightarrow \omega\varphi \\ \varphi^+ \longrightarrow \varphi^+\omega^{-1} \\ \omega^+ = \omega^{-1} \\ \omega \in G \end{cases} \quad (7.38)$$

Преобразования являются глобальными, то есть

$$\omega \neq \omega(x) \quad (7.39)$$

Очевидно, что

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \ldots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

Такая теория инвариантна относительно глобальных преобразований, но не является инвариантной относительно локальных преобразованиях.

$$\partial_\mu \varphi \longrightarrow \partial_\mu(\omega\varphi) = \partial_\mu \omega\varphi + \omega\partial_\mu \varphi \tag{7.41}$$

Здесь слагаемое $\partial_\mu \omega\varphi$ нарушает инвариантность функции Лагранжа относительно локальных преобразований. В теорию нужно добавить калибровочное поле. Перейдем к функции Лагранжа, в которой обычные производные заменяются ковариантными.

$$L = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - V(\varphi, \varphi^+) \longrightarrow D_\mu \varphi^+ D^\mu \varphi - V(\varphi, \varphi^+), \tag{7.42}$$

где $D_\mu \varphi \equiv \partial_\mu \varphi + iA_\mu \varphi$. Калибровочная группа компактна, алгебра Ли будет состоять из эрмитовых матриц.

$$A_\mu^+ = A_\mu \tag{7.43}$$

Теперь локальные калибровочные преобразования выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi \longrightarrow \omega(x)\varphi \\ \varphi^+ \longrightarrow \varphi^+ \omega^{-1}(x) \\ A_\mu \longrightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} - i\omega\partial_\mu \omega^{-1} \end{cases} \tag{7.44}$$

Ковариантная производная будет меняться так же, как и поле, на которое она действует.

$$D_\mu \varphi \longrightarrow \partial_\mu \varphi + iA_\mu \varphi \longrightarrow \partial_\mu \varphi' + iA'_\mu \varphi' = \partial_\mu(\omega\varphi) + i(\omega A_\mu \omega^{-1} - i\omega\partial_\mu \omega^{-1})\omega\varphi =$$

$$\partial_\mu \omega\varphi + \omega\partial_\mu \varphi + i\omega A_\mu \varphi - \partial_\mu \omega\varphi = \omega D_\mu \varphi \tag{7.45}$$

Учли, что

$$0 = \partial_\mu 1 = \partial_\mu(\omega\omega^{-1}) = \partial_\mu \omega \cdot \omega^{-1} + \omega\partial_\mu \omega^{-1} \tag{7.46}$$

Выражение для ковариантной производной φ^+:

$$D_\mu \varphi^+ = (\partial_\mu + iA_\mu \varphi)^+ = \partial_\mu \varphi^+ - i\varphi^+ A_\mu \tag{7.47}$$

Функция Лагранжа еще не подходит для калибровочной теории, нужно добавить слагаемое. Для этого нужно определить тензор поля. В неабелевом случае:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \tag{7.48}$$

Тогда в Лагранжиан нужно добавить слагаемое

$$L = D_\mu \varphi^+ D^\mu \varphi - V(\varphi, \varphi^+) - \frac{1}{2e^2} tr(F_{\mu\nu}^2) \tag{7.49}$$

e – константа связи. Разложение по эрмитовым генераторам выглядит так:

$$A_\mu = eA_\mu^A t^A \tag{7.50}$$

$$(t^A)^+ = t^A \tag{7.51}$$

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB} \tag{7.52}$$

Тензор поля:

$$F_{\mu\nu} = eF_{\mu\nu}^A t^A \tag{7.53}$$

Тогда:

$$-\frac{1}{2e^2} tr(F_{\mu\nu}^2) = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^A)^2 \tag{7.54}$$

Получили сходство с коэффициентом в свободном электромагнитным поле.

Если поле φ лежит в некотором представлении калибровочной группы, отличном от фундаментального, то

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + iA_\mu \varphi \tag{7.55}$$

Калибровочное поле раскладывается по генераторам представления, в котором лежит это поле.

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ieA_\mu^A T^A \varphi \tag{7.56}$$

Все эти шаги следует проделать для суперсимметричных теорий.

$$L = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - V(\varphi, \varphi^+) \tag{7.57}$$

Если потенциал убрать из рассмотрения, то есть

$$L = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi \tag{7.58}$$

то суперсимметричным обобщением будет являться простейший вариант модели Весса-Зумино.

Калибровочный инвариант модели Весса-Зумино

Рассмотрим столбец киральных скалярных суперполей.

$$\phi = \begin{cases} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \ldots \\ \phi_n \end{cases} \tag{7.59}$$

Выполняется условие

$$(1-\gamma_5)D_a\phi = 0 \tag{7.60}$$

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+\phi = \int d^4x\{\partial_\mu\phi^+\partial^\mu\varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + f^+f\} \tag{7.61}$$

Очевидно, что эта теория инвариантна относительно глобальных калибровочных преобразований.

$$\begin{cases} \varphi \longrightarrow \omega\varphi \\ \varphi^+ \longrightarrow \varphi^+\omega^{-1} \\ \omega^+ = \omega^{-1} \\ \omega \in G \end{cases} \tag{7.62}$$

где

$$\omega \neq \omega(x) \tag{7.63}$$

Группа G является компактной.

$$\phi^+\phi \longrightarrow \phi^+\omega^{-1}\cdot\omega\phi = \phi^+\phi = inv \tag{7.64}$$

Калибровочного поля нет, поэтому локальной инвариантности наблюдаться не будет. Проверим это. Пусть теперь есть зависимость ω от x:

$$\omega = \omega(x) \tag{7.65}$$

Помним про условие связи

$$(1-\gamma_5)D_a\phi = 0 \tag{7.66}$$

Оно не должно нарушаться. Но теперь

$$\phi \longrightarrow \omega(x)\phi \equiv \phi' \tag{7.67}$$

$$(1-\gamma_5)D_a\phi' = (1-\gamma_5)D_a(\omega(x)\phi) \tag{7.68}$$

Киральное скалярное суперполе зависит от y.

$$y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{7.69}$$

Тогда:

$$(1-\gamma_5)D_a(\omega(x)\phi) = [(1-\gamma_5)D_a\omega]\cdot\phi \neq 0 \tag{7.70}$$

Видно, что условие связи нарушается, значит такое преобразование неверное.

Пусть теперь

$$\omega = \omega(y) \tag{7.71}$$

$$(1-\gamma_5)D_a\phi' = (1-\gamma_5)D_a(\omega(y)\phi)[(1-\gamma_5)D_a\omega]\cdot\phi = 0 \tag{7.72}$$

Условие связи не нарушается. Но остается ли действие инвариантным? Проверим это.

$$\phi^+\phi \longrightarrow \phi^+\omega^{-1}(y^{\mu*})\omega(y^\mu)\phi \neq \phi^+\phi \tag{7.73}$$

$$y^{\mu*} = x^\mu - \frac{i'}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{7.74}$$

Значит, локальной инвариантности в суперполях нет (как и в компонентах).

Попытаемся добиться теории, имеющую локальную инвариантность. Нужно добавить калибровочное суперполе. Рассмотрим суперполе, удовлетворяющее условию эрмитовости.

$$V(x,\theta)^+ = V(x,\theta) = eV^At^A \tag{7.75}$$

Разложение по степеням θ от нулевой до четверой будет выглядеть не так, как записывалось раньше:

$$V(x,\theta) = C(x) + i\bar{\theta}\gamma_5\xi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\cdot K(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta H(x) - \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5 A_\mu(x) +$$

$$+\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\xi(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2(D(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C(x)) \tag{7.76}$$

$A_\mu(x)$ – калибровочное поле Янга-Миллса. Нужно построить теорию, которая будет инвариантна относительно преобразований суперсимметрии, а также относительно локальных калибровочных преобразований. Воспользуемся уже готовым результатом и попытаемся его понять.

Калибровочное инвариантное обобщение модели Весса-Зумино имеет вид:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta\phi^+ e^{2V}\phi \tag{7.77}$$

Проверим сперва суперсимметрию.

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V}\phi = \int d^4x d^4\theta V, \tag{7.78}$$

причем

$$V = \frac{1}{4}\phi^+ e^{2V}\phi \tag{7.79}$$

$$V^* = V^+ = (\frac{1}{4}\phi^+ e^{2V}\phi) = \frac{1}{4}\phi^+ e^{2V^*}\phi = \frac{1}{2}\phi^+ e^{2V}\phi = V \tag{7.80}$$

Необходимая связь выполняется. В такой форме суперсимметрия очевидна. Запишем локальные калибровочные преобразования.

$$\begin{cases} \phi \longrightarrow e^{i\Lambda}\phi \\ \phi^+ \longrightarrow \phi^+ e^{-i\Lambda^+} \\ e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} \end{cases} \tag{7.81}$$

Причем

$$\begin{cases} (1-\gamma_5)D_a\Lambda = 0 \\ \Lambda = e\Lambda^A T^A \end{cases} \tag{7.82}$$

Сначала проверяем выполнение условий связи:

$$(1-\gamma_5)D_a\phi' = (1-\gamma_5)D_a(e^{i\Lambda}\phi) = 0 \tag{7.83}$$

Эрмитовость:

$$(e^{2v\prime})^+ = (e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda})^+ = e^{i\Lambda^+} e^{2V^+} e^{-i\Lambda} = e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} = e^{2V\prime} \tag{7.84}$$

Отсюда следует, что

$$V^{+\prime} = V' \tag{7.85}$$

Сохраняется ли локальная калибровочная инвариантность? Проверим это.

$$\phi^+ e^{2V}\phi \longrightarrow \phi^+ e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} e^{i\Lambda} e^{2V} e^{i\Lambda}\phi = \phi^+ e^{2V}\phi = inv \tag{7.86}$$

Локальная инвариантность сохраняется.

Лекция 8. N=1 суперсимметричные калибровочные теории. Абелев случай. Неабелев случай

Глава V. N=1 суперсимметричные калибровочные теории

Калибровочный инвариант модели Весса-Зумино. Абелев случай

Продолжим изучать инвариантное калибровочное обобщение модели Весса-Зумино. Исходили из теории, которая является обобщением простой модели

$$\int d^4x \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi \tag{8.1}$$

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+ \phi = \int d^4x \{\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + f^+ f\} \tag{8.2}$$

При этом выполняется условие

$$(1-\gamma_5)D_a\phi = 0 \tag{8.3}$$

Следующий шаг – это переход от инвариантной относительно глобальных преобразований теории к локальной инвариантности.

$$\int d^4x D_\mu \varphi^+ D^\mu \varphi \tag{8.4}$$

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + iA_\mu \varphi \tag{8.5}$$

Аналог калибровочного поля – скалярное поле, удовлетворяющее условию

$$V(x^\mu, \theta)^+ = V = eV^A T^A \tag{8.6}$$

Выражение для суперсимметричного аналога действия выглядит пока не так привычно:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi \tag{8.7}$$

Это действие инвариантно относительно преобразований

$$\begin{cases} \phi \longrightarrow e^{i\Lambda}\phi \\ \phi^+ \longrightarrow \phi^+ e^{-i\Lambda^+} \\ e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} \end{cases} \tag{8.8}$$

Нужно понять, какая связь между обычными калибровочными преобразованями и записанными выше. Λ – произвольное киральное суперполе, оно удовлетворяет условию

$$(1-\gamma_5)D_a\Lambda = 0 \tag{8.9}$$

Также оно раскладывается по генераторам

$$\Lambda = e\Lambda^A T^A \tag{8.10}$$

Внутри этого суперполя много параметров, а вид преобразований не похож на преобразования Янг-Миллсовского поля.

Можно ли соединить $e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda}$ в одну экспоненту? На самом деле, так делать нельзя, поскольку каждый из множителей является матрицей. Однако есть исключение – абелева калибровочная группа, поскольку тогда матрицы будут просто числами. Установим связь в абелевом случае.

Рассмотрим вначале аблев случай из соображений простоты. Тогда можно соединить экспоненты в одну:

$$e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^*+2V-i\Lambda} \tag{8.11}$$

Или же

$$V \longrightarrow V + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda) \tag{8.12}$$

Разложение по степеням θ:

$$V(x,\theta) = C(x) + i\bar\theta\gamma_5\xi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta\theta\cdot K(x) + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma_5\theta H(x) - \frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5 A_\mu(x) +$$

$$+\frac{1}{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\xi(x) + i\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\bar\theta\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2(D(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C(x)) \tag{8.13}$$

Разложение по компонентам в абелевом случае:

$$(1-\gamma_5)D_a\Lambda = 0 \tag{8.14}$$

Значит

$$\Lambda(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \alpha(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\beta(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\gamma(y^\mu) \tag{8.15}$$

$$y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{8.16}$$

Нужно разложить y в окрестности x.

$$\Lambda = \alpha(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\beta(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\gamma(x) + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\alpha(x) -$$

$$-\frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)\partial_{\mu}\beta(x)-\frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_{\mu}^2\alpha(x) \tag{8.17}$$

$$V \longrightarrow V+\frac{i}{2}(\Lambda^*-\Lambda) \tag{8.18}$$

$$\Lambda^* = \alpha^*(x)+\bar{\theta}(1-\gamma_5)\beta(x)+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta\gamma^*(x)-$$

$$-\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta\partial_{\mu}\alpha^*(x)-\frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\partial_{\mu}\beta(x)-\frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_{\mu}^2\alpha^*(x) \tag{8.19}$$

β – майорановский спинор. Рассмотрим формулу

$$V \longrightarrow V+\frac{i}{2}(\Lambda^*-\Lambda) \tag{8.20}$$

для слагаемых, которые не содержат θ.

$$C \longrightarrow C+\frac{i}{2}(\alpha^*-\alpha) \tag{8.21}$$

$$\alpha^*-\alpha = 2Im\alpha \tag{8.22}$$

Тогда

$$C \longrightarrow C+\frac{i}{2}(\alpha^*-\alpha) = C+\frac{i}{2}(-2i)Im\alpha = C+Im\alpha \tag{8.23}$$

Теперь рассмотрим слагаемые первой степени по θ.

$$i\gamma_5\xi \longrightarrow i\gamma_5\xi+\frac{i}{2}\cdot(-2)\gamma_5\beta|\cdot(-i\gamma_5) \tag{8.24}$$

Тогда

$$\xi \longrightarrow \xi-\beta \tag{8.25}$$

Далее запишем закон преобразования для $K(x)$.

$$K \longrightarrow K+\frac{i}{2}(\gamma^*+\gamma) = K+\frac{i}{2}\cdot(-2i)Im\gamma \tag{8.26}$$

Значит

$$K \longrightarrow K+Im\gamma \tag{8.27}$$

Теперь выражение для H:

$$iH \longrightarrow iH+\frac{i}{2}(-\gamma^*-\gamma)|\cdot -i \tag{8.28}$$

Тогда

$$H \longrightarrow H-Re\gamma \tag{8.29}$$

$$-\frac{1}{2}A_{\mu} \longleftarrow -\frac{1}{2}A_{\mu}+\frac{i}{2}(-\frac{i}{2}\partial_{\mu}\alpha^*-\frac{i}{2}\partial_{\mu}\alpha) \tag{8.30}$$

Тогда

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu Re\alpha \tag{8.31}$$

Теперь рассмотрим коэффициент по третьей степени θ:

$$\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma_5\partial_P\mu\xi + i\sqrt{2}\gamma_5\lambda \longrightarrow \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\xi' + i\sqrt{2}\gamma_5\lambda' = \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\xi + i\sqrt{2}\gamma_5\lambda +$$

$$+\frac{i}{2}(+i)\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\beta = i\sqrt{2}\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu(\xi-\beta) = i\sqrt{2}\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma_5\xi' \tag{8.32}$$

При таких преобразованиях получаем

$$\lambda \longrightarrow \lambda = \lambda' \tag{8.33}$$

Рассмотрим слагаемые четвертой степени по θ.

$$D - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C \longrightarrow D - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C + \frac{i}{2}(-\frac{1}{2}\partial_\mu^2\alpha^* + \frac{1}{2}\partial_\mu^2\alpha) =$$

$$= D - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 Im\alpha = D - \frac{1}{2}\partial_\mu^2(C + Im\alpha) = D' - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C' \tag{8.34}$$

$$D \longrightarrow D = D' \tag{8.35}$$

Итак:

$$\begin{cases} \xi \longrightarrow \xi - \beta = \xi' \\ K \longrightarrow K + Im\gamma = K' \\ H \longrightarrow H - Re\gamma = H' \\ A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu Re\alpha = A'_\mu \\ \lambda \longrightarrow \lambda = \lambda' \\ D \longrightarrow D = D' \end{cases} \tag{8.36}$$

При калибровочных преобразованиях часть полей просто сдвигается. Отсюда можно заключить, что можно выбрать параметры калибровочного преобразования так, чтобы занулить измененные (штрихованные) поля. Можно сильно упростить выражение для V с помощью правильного выбора преобразований. Однако A_μ, λ, D упростить нельзя. Можно выбрать калибровку (калибровку Весса-Зумино), в которой $C' = \xi' = K' = H' = 0$. Выражение для калибровочного суперполя в калибровке Весса-Зумино:

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D(x) \tag{8.37}$$

$D(x)$ – вспомогательное поле, аналог поля f. Незафиксированным осталась вещественная часть α.

$$V \longrightarrow V + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda), \tag{8.38}$$

где $\Lambda = Re\alpha(y^\mu)$. Пусть

$$a(x) = Re\alpha \in Re \tag{8.39}$$

Тогда

$$\Lambda = Re\alpha(y^\mu) = a(y^\mu) \tag{8.40}$$

При таких калибровочных преобразованиях получаем абелев закон калибровочного преобразования:

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu a \\ \lambda \longrightarrow \lambda \\ D \longrightarrow D \end{cases} \tag{8.41}$$

Получили остаточные калибровочные преобразования в калибровке Весса-Зумино. Далее необходимо будет рассмотреть неабелев случай.

Калибровочный инвариант модели Весса-Зумино. Неабелев случай

Для неабелева случая получаем разложение:

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) = eV^A T^A \tag{8.42}$$

Калибровочное преобразование в неабелевом случае:

$$e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} \tag{8.43}$$

$$\Lambda = a(y^\mu) \tag{8.44}$$

$$a(x) = ea^A(x)T^A,\ a^A(x) \in Re \tag{8.45}$$

В калибровке Весса-Зумино:

$$(e^{2V}) = 1 + 2V + \frac{1}{2!}(2V)^2 + \ldots \tag{8.46}$$

Максимальная ненулевая степень по θ – четвертая степень. Пятая, шестая и так далее – нулевые. Поэтому:

$$(e^{2V}) = 1 + 2V + (2V)^2 = 1 - \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + 2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) +$$

$$+2(-\frac{1}{2})^2\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta A_\mu \tag{8.47}$$

Уже было доказано тождество:

$$\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta A_\mu = \eta^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)^2 \tag{8.48}$$

Тогда

$$(e^{2V}) = 1+2V+(2V)^2 = 1-\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x)+$$

$$+2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x)+\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(D(x)+A_\mu^2) \tag{8.49}$$

Перейдем к следующему слагаемому.

$$e^{-i\Lambda} = e^{-ia(y)} \tag{8.50}$$

Можно разложить в окрестности x :

$$e^{-i\Lambda} = e^{-ia(y)} = e^{-ia(x)}+\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu e^{-ia(x)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\partial_\mu\partial_\nu e^{-ia(x)} \tag{8.51}$$

$$a^A(x)\in Re \tag{8.52}$$

$$\begin{cases}\omega^{-1}\equiv e^{-ia(x)} = e^{-iea^A(x)T^A}\in G\\ \omega\equiv e^{ia(x)}\end{cases} \tag{8.53}$$

Тогда

$$e^{-i\Lambda} = \omega^{-1}(x)+\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\omega^{-1}(x)-\frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\omega^{-1}(x) \tag{8.54}$$

Модифицируем для удобства выражение для $e^{-i\Lambda}$:

$$e^{i\Lambda^+} = e^{ia(y^*)} = e^{ia(x)}-\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu e^{ia(x)}+\frac{(-1)^2}{2}\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\partial_\mu\partial_\nu e^{ia(x)} \tag{8.55}$$

Использовали, что

$$y^{\mu *} = x^\mu-\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{8.56}$$

Тогда

$$e^{i\Lambda^+} = \omega(x)-\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\omega(x)-\frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\omega(x) \tag{8.57}$$

$$e^{2V}\longrightarrow e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda} \tag{8.58}$$

Распишем это подробнее, сохраняя нужный порядок:

$$1-\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu+2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda+\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(D+A_\mu^2)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow[\omega-\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\alpha\gamma_5\theta\partial_\alpha\omega-\frac{1}{8}\cdot(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\alpha^2\omega][1-\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu+ \tag{8.59}$$

$$+2i\sqrt{2}\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda+\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(D+A_\mu^2)]\cdot[\omega^{-1}+\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\beta\gamma_5\theta\partial_\beta\omega^{01}-\frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\beta^2\omega^{-1}]$$

Осталось перемножить и сравнить левую и правую части:

$$1\longrightarrow\omega\cdot1\cdot\omega^{-1}=1 \tag{8.60}$$

По структуре левые и правые части похожи.

Сравним коэффициенты при различных структурах. Самое простое – структуры третьей степени по θ:

$$\lambda\longrightarrow\omega\lambda\omega^{-1} \tag{8.61}$$

Получили закон преобразования калибровочного поля в присоединенном представлении. То есть, λ – суперпартнер калибровочного поля. Рассмотрим A_μ :

$$-A_\mu\longrightarrow\omega(-A_\mu)\omega^{-1}-\frac{i}{2}\partial_\mu\omega\cdot\omega^{-1}+\frac{i}{2}\omega\partial_\mu\omega^{-1} \tag{8.62}$$

Домножим это выражение на -1 и вспомним тождество из классической теории поля, благодаря которому вклад двух слагаемых получается одинаковым.

$$0=\partial_\mu 1=\partial_\mu(\omega\omega^{-1})=\partial_\mu\omega\cdot\omega^{-1}+\omega\partial_\mu\omega^{-1} \tag{8.63}$$

С учетом этого получим:

$$A_\mu\longrightarrow\omega A_\mu\omega^{-1}-i\omega\partial_\mu\omega^{-1} \tag{8.64}$$

Получили чистое калибровочное преобразования Янга-Миллса с необходимыми коэффициентами.

Перейдем к коэффициентам перед θ^4:

$$\frac{1}{2}(D+A_\mu^2)\longrightarrow\frac{1}{2}(D'+A_\mu^2{}')=\frac{1}{2}\omega(D+A_\mu^2)\omega^{-1}-\frac{1}{8}\partial_\mu^2\omega\cdot\omega^{-1}-\frac{1}{8}\omega\partial_\mu^2\omega^{-1}+$$

$$+\frac{1}{4}\partial_\mu\omega\partial^\mu\omega^{-1}+\frac{i}{2}\partial_\mu\omega A^\mu\omega^{-1}-\frac{i}{2}\omega A_\mu\partial^\mu\omega^{-1} \tag{8.65}$$

Применили тождество:

$$\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta=\eta^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)^2 \tag{8.66}$$

$$0=\partial_\mu^2 1=\partial_\mu^2(\omega\cdot\omega^{-1})=\partial_\mu^2\omega\omega^{-1}+2\partial_\mu\omega\cdot\partial^\mu\omega^{-1}+\omega\partial_\mu^2\omega^{-1} \tag{8.67}$$

Если выразить вторые производные через первые:

$$\frac{1}{2}(D'+A_\mu^2{}')=\frac{1}{2}\omega D\omega^{-1}+\frac{1}{2}\omega A_\mu^2\omega^{-1}+\frac{1}{2}\partial_\mu\omega\cdot\partial^\mu\omega^{-1}+$$

$$+\frac{i}{2}\partial_\mu \omega A^\mu \omega^{-1} - \frac{i}{2}\omega A_\mu \partial^\mu \omega^{-1} \tag{8.68}$$

Вспомним выражение для A'_μ :

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} - i\omega\partial_\mu \omega^{-1} = \omega A_\mu \omega^{-1} + i\partial_\mu \omega \cdot \omega^{-1} \tag{8.69}$$

$$\frac{1}{2}(A'_\mu)^2 = \frac{1}{2}(\omega A_\mu \omega^{-1} + i\partial_\mu \omega \cdot \omega^{-1})(\omega A_\mu \omega^{-1} - i\omega\partial_\mu \omega^{-1}) \tag{8.70}$$

Можно сократить ω.

$$\frac{1}{2}(A'_\mu)^2 = \omega A_\mu^2 \omega^{-1} - \frac{i}{2}\omega A_\mu \partial^\mu \omega^{-1} + \frac{i}{2}\partial_\mu \omega A^\mu \omega^{-1} + \frac{1}{2}\partial_\mu \omega \cdot \partial^\mu \omega^{-1} \tag{8.71}$$

Тогда:

$$\frac{1}{2}(D' + A_\mu^2{}') = \frac{1}{2}\omega D\omega^{-1} + \frac{1}{2}\omega A_\mu^2 \omega^{-1} + \frac{1}{2}\partial_\mu \omega \cdot \partial^\mu \omega^{-1} + \frac{i}{2}\partial_\mu \omega A^\mu \omega^{-1} -$$

$$-\frac{i}{2}\omega A_\mu \partial^\mu \omega^{-1} = \frac{1}{2}\omega D\omega^{-1} + \frac{1}{2}(A'_\mu)^2 \tag{8.72}$$

Окончательно получаем закон калибровочного преобразования для D, который соответствует присоединённому представлению:

$$D' = \omega D\omega^{-1} \tag{8.73}$$

Видим, что остаточные калибровочные преобразования в неабелевом случае в калибровке Весса-Зумино сводятся к следующим преобразованиям:

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} - i\omega\partial_\mu \omega^{-1} \\ \lambda \longrightarrow \omega\lambda\omega^{-1} \\ D \longrightarrow \omega D\omega^{-1} \end{cases} \tag{8.74}$$

Для полей, входящих в калибровочное суперполе, остаточные калибровочные преобразования выглядят так.

Помимо калибровочного поля в модели

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+ \phi \tag{8.75}$$

есть еще и киральное поле, которое преобразуется следующем образом:

$$\phi \longrightarrow e^{i\Lambda}\phi \tag{8.76}$$

$$\phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\Psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu) \tag{8.77}$$

Теперь при остаточных калибровочных преобразованиях:

$$e^{i\Lambda} \longrightarrow e^{ia(y^{\mu})} \tag{8.78}$$

$$\varphi(y) \longrightarrow e^{ia(y)}\varphi(y) \tag{8.79}$$

Значит

$$\varphi(x) \longrightarrow e^{ia(x)}\varphi(x) = \omega(x)\varphi(x) \tag{8.80}$$

Аналогично для Ψ:

$$(1+\gamma_5)\Psi(x) \longrightarrow \omega(x)(1+\gamma_5)\Psi(x) \tag{8.81}$$

Для $f(x)$:

$$f(x) \longrightarrow \omega(x)f(x) \tag{8.82}$$

При локальных калибровочных преобразованиях скалярное поле менялось ровно так же. То есть, получили, что все это компоненты меняются стандартным образом, а D, λ по присоединенному представлению. Разумные калибровочные преобразования видны, нужно лишь убедиться, что получится калибровочная инвариантная величина.

Лекция 9. N=1 суперсимметричные калибровочные теории. Преобразования суперсимметрии в калибровке Весса-Зумино

Глава V. N=1 суперсимметричные калибровочные теории. Продолжение

Калибровочный инвариант модели Весса-Зумино. Неабелев случай. Продолжение

Уже изучили калибовочное инвариантное обобщение модели Весса-Зумино. Выяснили, что действие этой модели имеет вид:

$$S=\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi \tag{9.1}$$

Причем ϕ – киральное скалярное суперполе (набор скалярных киральных суперполей), удовлетворяющее условию

$$(1-\gamma_5)D_a\phi=0 \tag{9.2}$$

V – эрмитовое скалярное суперполе. Условие:

$$V(x,\theta)^+=V(x,\theta) \tag{9.3}$$

В неабелевом случае раскладывается по генераторам:

$$V(x,\theta)^+=V(x,\theta)=eV^A(x,\theta)T^A \tag{9.4}$$

Инвариантным относительное преобразований суперсимметрии является выражение

$$S=\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi \tag{9.5}$$

Суперсимметрия является явной благодаря введению антикоммутирующего спинора θ. Кроме того, действие инвариантно относительно калибровочных преобразований. Поля, входящие в действие преобразуются следующим образом:

$$\begin{cases}\phi\longrightarrow e^{i\Lambda}\\ \phi^+\longrightarrow\phi^+e^{-i\Lambda^+}\\ e^{2V}\longrightarrow e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda}\end{cases} \tag{9.6}$$

Причем

$$\begin{cases} (1-\gamma_5)D_a\Lambda = 0 \\ \Lambda = e\Lambda^A T^A \end{cases} \tag{9.7}$$

Инвариантность действия относительно этих преобразований легко проверить.

$$S = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi \longrightarrow \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{-i\Lambda^+}e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda}e^{i\Lambda}\phi =$$

$$= \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi \tag{9.8}$$

Действие инвариантно относительно преобразований суперсимметрии и относительно калибровочных преобразований.

Калибровочное суперполе в калибровке Весса-Зумино имеет вид:

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) \tag{9.9}$$

λ, D также раскладываются по генераторам. Разложение компонентных полей имеет вид:

$$\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu) \tag{9.10}$$

$$y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{9.11}$$

Коэффициенты разложения – компонентные поля. В калибровке Весса-Зумино есть остаточная инвариантность, которая в реальности совпадает с привычной калибровочной инвариантностью.

Перейдем к вычислению выражения. Во-первых, разобьем действие на две части.

$$S = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+\phi + \frac{1}{4}d^4xd^4\theta\phi^+(e^{2V}-1)\phi \equiv S_0 + S_1 \tag{9.12}$$

$$S_0 = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+\phi = \int d^4x\{\partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu + f^+f\} \tag{9.13}$$

Задача – вычисление S_1. В калибровке Весса-Зумино $e^{2V}-1$ начинает раскладываться по степеням θ начиная с θ^2:

$$e^{2V}-1 = -\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + 2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(D(x) + A_\mu^2(x)) \tag{9.14}$$

При умножении на ϕ не все слагаемые окажутся существенными.

Перейдем к вычислению величины S_1:

$$S_1 = \frac{1}{4}d^4xd^4\theta\phi^+(e^{2V}-1)\phi \tag{9.15}$$

В калибровке Весса-Зумино:

$$e^{2V} - 1 = (1 + 2V + 2V^2) - 1 = 2V + 2V^2 =$$
$$= -\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(D + A_\mu^2) \tag{9.16}$$

В это выражение входят поля ϕ, ϕ^+, необходимо знать выражения в терминах x:

$$\phi = \varphi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\varphi(x) -$$
$$\frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi(x) - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\varphi(x) \tag{9.17}$$

Аналогичное выражение для ϕ^+ (получено с помощью эрмитового сопряжения):

$$\phi^+ = \varphi(x) + \bar{\Psi}(1-\gamma_5)\theta + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^+(x) -$$
$$-\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\varphi^+(x) - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\Psi^T(x) - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2 f^+(x) \tag{9.18}$$

Все степени θ выше пятой (включительно) равны нулю. Интеграл по $d^4\theta$ нетривиально действует только на 4 степень.

$$\int d^4\theta^\alpha = 0, 0 \leqslant \alpha \leqslant 3 \tag{9.19}$$

Оставим только нетривиальные слагаемые.

$$S_1 = \frac{1}{4}d^4xd^4\theta\phi^+(e^{2V}-1)\phi = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta(\varphi^+\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\theta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\alpha\gamma_5\theta\partial_\alpha\varphi^+)\cdot$$
$$\cdot(-\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(D + A_\mu^2)(\bar{\theta}\theta)^2)\cdot \tag{9.20}$$
$$\cdot(\varphi + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\beta\gamma_5\theta\partial_\beta\varphi)$$

Использовали полезные тождества:

$$\begin{cases} \int d^4\theta(\bar{\theta}\theta)^2 = 8 \\ \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0 \\ \bar{\theta}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0 \end{cases} \tag{9.21}$$

Необходимо выделить слагаемые с 4 степенью по θ:

$$S_1 = \frac{1}{4}d^4xd^4\theta\phi^+(e^{2V}-1)\phi = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\{\varphi^+\frac{1}{2}(D + A_\mu^2)\varphi(\bar{\theta}\theta)^2 +$$
$$+\frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu\varphi^+A^\mu\varphi - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)^2\varphi^+A_\mu\partial^\mu\varphi - \bar{\Psi}(1-\gamma_5)\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi + \tag{9.22}$$

$$+\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\theta\cdot 2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda\cdot\varphi+\varphi^+\cdot 2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\lambda}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi\}$$

Причем $\bar{\lambda}$ раскладывается по генераторам:

$$\bar{\lambda}\equiv e\bar{\lambda}^A T^A \tag{9.23}$$

Теперь нужно вычислить интеграл по антикоммутирующим переменным. Любая квадратичная комбинация с помощью тождества Фирца может быть сведена к трехбазисным комбинациям:

$$\theta\cdot\bar{\theta}=-\frac{1}{4}\cdot 1\cdot(\bar{\theta}\theta)-\frac{1}{4}\gamma_5\cdot\bar{\theta}\gamma_5\theta+\frac{1}{4}(\gamma^\nu\gamma_5)\cdot\bar{\theta}\gamma_\nu\gamma_5\theta \tag{9.24}$$

Оставшиеся слагаемые могут быть с помощью этого тождества сведены к более простым структурам.

$$(\bar{\theta}\theta)\cdot\theta\cdot\bar{\theta}=-\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\cdot 1 \tag{9.25}$$

$$\theta\cdot\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta=\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma_5)\cdot(\bar{\theta}\theta)^2 \tag{9.26}$$

Используя эти формулы можно переписать выражение для действия так, чтобы везде присутствовала только комбинация четвертой степени по θ:

$$S_1=\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta(\bar{\theta}\theta)^2\{\frac{1}{2}\varphi^+(D+A_\mu^2)\varphi+\frac{i}{2}\partial_\mu\varphi^+A^\mu\varphi-\frac{i}{2}\varphi^+A_\mu\partial^\mu\varphi-$$

$$-\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\cdot\frac{1}{4}\gamma^\mu\gamma_5 A_\mu(1+\gamma_5)\Psi-\frac{1}{4}\cdot 2i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\cdot\varphi-\frac{1}{4}\cdot 2i\sqrt{2}\varphi^+\bar{\lambda}\gamma_5(1+\gamma_5)\Psi\} \tag{9.27}$$

$$S_1=\int d^4x\{i\partial_\mu\varphi^+A^\mu\varphi-i\cdot\varphi^+A_\mu\partial^\mu\varphi+\varphi^+(A_\mu^2+D)\varphi-\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\Psi+$$

$$+i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi-i\sqrt{2}\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi\} \tag{9.28}$$

Здесь были использованы упрощения:

$$\begin{cases}\gamma_5(1+\gamma_5)=1+\gamma_5\\(1-\gamma_5)\gamma^\mu(1+\gamma_5)=(1-\gamma_5)^2\gamma^\mu=2(1-\gamma_5)\gamma^\mu\end{cases} \tag{9.29}$$

Запишем простейший вариант модели Весса-Зумино:

$$S_0=\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+\phi=\int d^4x\{\partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi+i\bar{\Psi}\gamma^\mu+f^+f\} \tag{9.30}$$

$$S=\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+\phi+\frac{1}{4}d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi=S_0+S_1=\int d^4x\{\partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi+$$

$$+i\partial_\mu\varphi^+A^\mu\varphi-i\varphi^+A_\mu\partial^\mu\varphi+\varphi^+A_\mu^2\varphi+\varphi^+D\varphi+f^+f+i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi- \tag{9.31}$$

$$-\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\Psi+i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi-i\sqrt{2}\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi$$

Получили действие в терминах компонентных полей, однако в некрасивом виде.

Ковариантная производная:

$$D_\mu\varphi=\partial_\mu\varphi+iA_\mu\varphi \tag{9.32}$$

$$D_\mu\varphi^+=\partial_\mu\varphi^+-i\varphi^+A_\mu \tag{9.33}$$

Тогда

$$\begin{aligned}D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi&=(\partial_\mu\varphi^+-i\varphi^+A_\mu)(\partial^\mu\varphi+iA_\mu\varphi)=\\&=\partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi-i\varphi^+A_\mu\partial^\mu\varphi+i\partial_\mu\varphi^+A_\mu\varphi+\varphi^+A_\mu\varphi\end{aligned} \tag{9.34}$$

Выражение для действия существенно упрощается:

$$\begin{aligned}S=\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+\phi+\frac{1}{4}d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi=S_0+S_1=\int d^4x\{D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi+\varphi^+D\varphi+\\+f^+f+i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi-\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\Psi+i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi-i\sqrt{2}\varphi^+\bar{\lambda}\}\end{aligned} \tag{9.35}$$

$$D_\mu\Psi=\partial_\mu\Psi+iA_\mu\Psi \tag{9.36}$$

Добавим к действию величину $-i\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$. Это выражение может быть представлены в виде четырехдивергенции:

$$-i\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi=-\frac{i}{2}\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi) \tag{9.37}$$

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi-\frac{i}{2}\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi)-\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\Psi=i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi+iA_\mu\Psi) \tag{9.38}$$

В этом выражении встретилась ковариантная производная $(\partial_\mu\Psi+iA_\mu\Psi)=D_\mu\Psi$. В слагаемых с A_μ содержится ковариантная производная. Тогда:

$$\begin{aligned}S=\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+\phi+\frac{1}{4}d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi=S_0+S_1=\int d^4x\{D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi+\\+\varphi^+D\varphi+f^+f+i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\Psi+i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi-i\sqrt{2}\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi\}\end{aligned} \tag{9.39}$$

Получили основной строительный блок для нахождения суперсимметричных теорий. Возникли некоторые добавки, необходимые для преобразований суперсимметрии. Должны быть еще слагаемые со спинорами.

$$\bar{\Psi}_R=[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi]^+\gamma^0=\Psi^+\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^)=\Psi^+\gamma^)\frac{1}{2}(1-\gamma_5)=\bar{\Psi}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)=(\bar{\Psi})_L \tag{9.40}$$

Осталось разобраться, что делать с линейно входящим D. К этому действую необходимо добавить аналог действия для Янга-Миллса.

Задача – понять, относительно каких преобразований действие инвариантно. Заметим, что локальная калибровочная инвариантность соответствует остаточным калибровочным преобразованиям в калибровке Весса-Зумино. Выглядит она следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi \longrightarrow \omega\varphi \\ \varphi^+ \longrightarrow \varphi^+\omega^{-1} \\ (1+\gamma_5)\Psi \longrightarrow \omega(1+\gamma_5)\Psi \\ f \longrightarrow \omega f \\ f^+ \longrightarrow f^+\omega^{-1} \\ \bar{\Psi}(1-\gamma_5) \longrightarrow \bar{\Psi}(1-\gamma_5)\omega^{-1} \end{cases} \tag{9.41}$$

В состав калибровочного мультиплета входят следующие преобразованные величины:

$$\begin{cases} D \longrightarrow \omega D\omega^{-1} \\ \lambda \longrightarrow \omega\lambda\omega^{-1} \\ A_\mu \longrightarrow \omega A_\mu\omega^{-1} - i\omega\partial_\mu\omega^{-1} \end{cases} \tag{9.42}$$

Ковариантные производные будут меняться так, как поля, на которые они действуют:

$$\begin{cases} D_\mu\varphi \longrightarrow \omega D_\mu\varphi \\ (1+\gamma_5)D_\mu\Psi \longrightarrow \omega(1+\gamma_5)D_\mu\Psi \end{cases} \tag{9.43}$$

Рассмотрим одно из слагаемых подробнее:

$$\varphi^+ D\varphi \longrightarrow \varphi^+\omega^{-1}\omega D\omega^{-1}\omega\varphi = inv \tag{9.44}$$

Остаточная калибровочная инвариантность легко видна в терминах компонентных полей. Однако интересны именно преобразования суперсимметрии.

Преобразования суперсимметрии в калибровке Весса-Зумино

Для компонент кирального скалярного поля уже были записаны преобразования. Оператор суперзаряда выглядел так:

$$Q = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - (\gamma^\mu\theta)\partial_\mu \tag{9.45}$$

$$\delta\phi = -i\bar{\varepsilon}Q\phi = \delta\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\delta\Psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\delta f(y) \tag{9.46}$$

Самое простое предположение – для компонент калибровочного суперполя будут аналогичные преобразования.

$$\delta V = -i\bar{\varepsilon}QV = \delta C(x) + \dots \tag{9.47}$$

На самом деле, в явном виде V множество компонентных полей. Большинство из них нефизичны. Будет ли работать эта процедура в калибровке Весса-Зумино? Проверим.

Для начала запишем V в калибровке Весса-Зумино:

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) \tag{9.48}$$

Попробуем применить рассмотренную выше процедуру:

$$\delta V = -i\bar{\varepsilon}QV = (\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta\partial_\mu)(-\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + \dots) = -\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + \dots \tag{9.49}$$

Появилось несоответствие. Должно было получиться выражение $-\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\delta A_\mu + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\delta\lambda + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\delta D$. Однако оно не получается, так как выходит первая степень по θ. Калибровка Весса-Зумино не является суперсимметрично инвариантной.

Идея такая:

$$\delta = \delta_{SUSY} + \delta_{gange} \tag{9.50}$$

$$e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda} \simeq (1+i\Lambda^+)e^{2V}(1-i\Lambda) \simeq e^{2V} + i\Lambda^+e^{2V} - ie^{2V}\Lambda \tag{9.51}$$

Изменение экспоненты при калибровочном преобразовании:

$$\delta_{gange}e^{2V} = i\Lambda^+e^{2V} - ie^{2V}\Lambda \tag{9.52}$$

С этой величиной работать проще, чем с самим полем V. Изменение экспоненты при суперсимметричном преобразовании:

$$\delta_{SUSY}e^{2V} = -i\bar{\varepsilon}Qe^{2V} \tag{9.53}$$

При этом e^{2V} в калибровке Весса=Зумино:

$$e^{2V} = 1 - \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(D + A_\mu^2) \tag{9.54}$$

$$\delta_{SUSY}e^{2V} = -i\bar{\varepsilon}Q(e^{2V}) = (\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta\partial_\mu)(1 - \bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta A_\nu +$$

$$+2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(D + A_\mu^2)) \tag{9.55}$$

Вычислить выражение – домашнее задание. Ответ запишем:

$$\delta_{SUSY}e^{2V} = -2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta A_{\mu} + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda - i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta\bar{\varepsilon}\lambda + i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta\bar{\varepsilon}\gamma_{\mu}\lambda +$$
$$+2\bar{\varepsilon}\theta\cdot(\bar{\theta}\theta)(D+A_{\mu}^2) + i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta(\bar{\theta}\theta)\partial_{\mu}A_{\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5\partial_{\mu}\lambda(\bar{\theta}\theta)^2 \tag{9.56}$$

По ходу нужно будет использовать тождество Фирца. Из результата видно, что его форма отличается от изменения выражения e^{2V}.

$$\delta_{gange}e^{2V} = i\Lambda^{+}e^{2V} - ie^{2V}\Lambda \tag{9.57}$$

Нужно сделать так, чтобы калибровочное преобразования восстанавливало бы калибровку Весса-Зумино. Киральное суперполе будет иметь следующую форму:

$$\Lambda(y^{\mu},(1+\gamma_5)\theta) = i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)\theta A_{\mu}(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda(y) \tag{9.58}$$

Параметры калибровочного преобразования связаны с величиной ε.

В качестве домашнего задания необходимо подставить $\Lambda(y^{\mu},(1+\gamma_5)\theta)$ и e^{2V} в выражение. Запишем результат:

$$\delta_{gange}e^{2V} = 2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta A_{\mu} - i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda + i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta\cdot\bar{\varepsilon}\lambda - i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta\cdot(\partial_{\nu}A_{\mu} - i[A_{\mu},A_{\nu}]) -$$
$$-2\bar{\varepsilon}\theta\cdot\bar{\theta}\theta\cdot A_{\mu}^2 - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2(A_{\mu}\cdot\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda + \bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda A_{\mu}) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\cdot\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5[A_{\mu},\lambda] \tag{9.59}$$

Вычислим полное изменение и сравним с изменением компонентных полей.

$$\delta e^{2V} = i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta\bar{\varepsilon}\gamma_{\mu}\lambda + 2\bar{\theta}\varepsilon\cdot(\bar{\theta}\theta)D + i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta(\bar{\theta}\theta)F_{\mu\nu} -$$
$$-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2(A_{\mu}\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda + \bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda A_{\mu}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5 D_{\mu}\lambda = -\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta\delta A_{\mu} + \tag{9.60}$$
$$+2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\delta\lambda + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(\delta D + A_{\mu}\delta A^{\mu} + \delta A_{\mu}\cdot A^{\mu})$$

Использовали то, что:

$$\partial_{\nu} - i[A_{\mu},A_{\nu}] - \partial_{\mu}A_{\nu} = -F_{\mu\nu} \tag{9.61}$$

$$\partial_{\mu}\lambda + i[A_{\mu},\lambda] = D_{\mu}\lambda \tag{9.62}$$

$$\delta A_{\mu}^2 = \delta(A_{\mu}A^{\mu}) = A_{\mu}\delta A^{\mu} + \delta A_{\mu}A^{\mu} \tag{9.63}$$

Осталось сравнить эти выражения.

Лекция 10. Преобразования суперсимметрии в калибровке Весса-Зумино и суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля

Глава V. N=1 суперсимметричные калибровочные теории. Продолжение

Преобразования суперсимметрии в калибровке Весса-Зумино. Продолжение

Были получены преобразования суперсимметрии в калибровке Весса-Зумино. Они складываются из преобразований суперсимметрии, которые генерируются оператором суперзаряда, а также из калибровочных преобразований, которые восстанавливают калибровку Весса-Зумино. Под действием этих преобразований изменение e^{2V} записывается следующим образом:

$$\delta e^{2V} = i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta\bar{\varepsilon}\gamma_{\mu}\lambda + 2\bar{\theta}\varepsilon\cdot(\bar{\theta}\theta)D + i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta(\bar{\theta}\theta)F_{\mu\nu} -$$
$$-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2(A_{\mu}\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda + \bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda A_{\mu}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5 D_{\mu}\lambda = -\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta\delta A_{\mu} + \tag{10.1}$$
$$+2i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\delta\lambda + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(\delta D + A_{\mu}\delta A^{\mu} + \delta A_{\mu}\cdot A^{\mu})$$

$$\delta A_{\mu}^2 = \delta(A_{\mu}A^{\mu}) = A_{\mu}\delta A^{\mu} + \delta A_{\mu}A^{\mu} \tag{10.2}$$

Начнем с вычисления выражения изменения A_{μ}. Нужно сравнить коэффициенты при квадратичной комбинации θ.

$$\delta A_{\mu} = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}\gamma_{\mu}\lambda \tag{10.3}$$

Сравним слагаемые, которые являются коэффициентами при θ^2.

$$\delta D + A_{\mu}\delta A^{\mu} + \delta A_{\mu}A^{\mu} = -i\sqrt{2}(A_{\mu}\bar{\varepsilon}\lambda + \bar{\varepsilon}\lambda A^{\mu}) + \sqrt{2}\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5 D_{\mu}\lambda \tag{10.4}$$

Используем формулу для изменения A_{μ} и подставим его в предыдущее, тогда можно сократить некоторые слагаемые.

$$\delta D = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5 D_{\mu}\lambda \tag{10.5}$$

λ – коэффициент при слагаемых третьего порядка по θ.

$$2i\cdot\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\bar\theta\gamma_5\delta\lambda = 2(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\varepsilon\cdot D + ... \tag{10.6}$$

Используем выражение

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu} \tag{10.7}$$

Тогда:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{10.8}$$

Используем это для выражения для λ:

$$2i\cdot\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\bar\theta\gamma_5\delta\lambda = 2(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\varepsilon\cdot D + i\bar\varepsilon\gamma^{\mu\nu}\gamma_5\theta(\bar\theta\theta)F_{\mu\nu} \tag{10.9}$$

В этом выражении нужно переставить местами майорановские спиноры.

$$\gamma^{\mu\nu}\gamma_5 \sim \varepsilon^{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta} \tag{10.10}$$

Значит, перестановка осуществляется со знаком минус:

$$i\bar\varepsilon\gamma^{\mu\nu}\gamma_5\theta = -\bar\theta\gamma^{\mu\nu}\gamma_5\varepsilon \tag{10.11}$$

Тогда:

$$2i\sqrt{2}\gamma_5\delta\lambda = 2\varepsilon\cdot D - i\gamma^{\mu\nu}\gamma_5\varepsilon F_{\mu\nu}|\cdot(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\gamma_5) \tag{10.12}$$

Окончательно получаем:

$$\delta\lambda = -\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon\cdot D - \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\varepsilon \tag{10.13}$$

Преобразования суперсимметрии в калибровке Весса-Зумино:

$$\begin{cases} \delta A_\mu = -i\sqrt{2}\bar\varepsilon\gamma_\mu\lambda \\ \delta\lambda = -\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon\cdot D - \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\varepsilon \\ \delta D = \sqrt{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma_5 D_\mu\lambda \end{cases} \tag{10.14}$$

Получим преобразования суперсимметрии для компонент кирального суперполя.

$$\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\Psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu) \tag{10.15}$$

Уже получили выражение для $\delta_{SUSY}\varphi$:

$$\delta_{SUSY}\varphi = \bar\varepsilon(1+\gamma_5)\Psi \tag{10.16}$$

$$\delta_{SUSY}[(1+\gamma_5)\Psi] = (1+\gamma_5)[\varepsilon f - i\gamma^\mu \varepsilon \partial_\mu \varphi] \tag{10.17}$$

$$\delta_{SUSU} f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu \Psi \tag{10.18}$$

Теперь нужны калибровочные преобразования. С точностью до линейного порядка по λ калибровочное преобразование будет иметь вид:

$$\phi \longrightarrow e^{i\Lambda}\phi = (1+i\Lambda)\phi \tag{10.19}$$

Тогда:

$$\begin{gathered}\delta\phi = i\Lambda\phi = i(i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda(y))\cdot(\varphi(y)+ \\ +\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)) = -\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu \varphi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\cdot \\ \cdot(1+\gamma_5)\theta\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)A_\mu\Psi(y) - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi(y) = \\ = \delta_{gange}\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\delta_{gange}\Psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\delta_{gange} f(y)\end{gathered} \tag{10.20}$$

Использовали тождество Фирца:

$$(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot(1+\gamma_5) \tag{10.21}$$

Получаем компенсирующие калибровочные преобразования для соответствующих компонент:

$$\begin{cases}\delta_{gange}\varphi = 0 \\ \delta_{gange}[(1+\gamma_5)\Psi] = (1+\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu \varphi \\ \delta_{gange} f = \bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)A_\mu\Psi - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi\end{cases} \tag{10.22}$$

Теперь можем изменить полное изменение полей.

$$\delta = \delta_{SUSY} + \delta_{gange} \tag{10.23}$$

Тогда:

$$\begin{cases}\delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\Psi \\ \delta[(1+\gamma_5)\Psi] = (1+\gamma_5)[\varepsilon f - i\gamma^\mu\varepsilon D_\mu\varphi] \\ \delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)D_\mu\Psi - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi\end{cases} \tag{10.24}$$

Получили преобразования суперсимметрии в калибровке Весса-Зумино. Использование суперполевого формализма позволяет не проверять инвариантность довольно сложных преобразований, а также понять многие тонкости.

Построили суперсимметричный аналог выражения

$$\int d^4xD_\mu\varphi^+D^\mu\varphi \sim \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi \tag{10.25}$$

Теперь нужно повторить симметричный аналог выражений

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \sim ? \tag{10.26}$$

$$-\frac{1}{4}\int d^4x(F^A_{\mu\nu})^2 = -\frac{1}{2e^2}tr\int d^4xF^2_{\mu\nu} \sim ? \tag{10.27}$$

Суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] = eF^A_{\mu\nu}t^A \tag{10.28}$$

Аналогом будет некий вейлевский спинор, выражение для которого записывается в следующем виде:

$$W_a \equiv \frac{1}{32}\bar{D}(1+\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_ae^{2V}] = \frac{1}{32}\bar{D}^e(1=\gamma_5)_e^fD_f[e^{-2V}(1+\gamma_5)_a^bD_be^{2V}] \tag{10.29}$$

$$\bar{D}^a \equiv D_bC^{ba} \tag{10.30}$$

Рассмотрим свойства этого выражения.

1. Этот спинор является правым.

$$(1-\gamma_5)_a^bW_b = 0 \tag{10.31}$$

$$(1-\gamma_5)_a^b\frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)_b^cD_ce^{2V}] =$$
$$= \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}(1-\gamma_5)(1+\gamma_5)D_a] = 0 \tag{10.32}$$

Поскольку

$$(1-\gamma_5)(1+\gamma_5) = 0 \tag{10.33}$$

2. W_a – киральное суперполе.

$$(1-\gamma_5)D_aW_b = 0 \tag{10.34}$$

Рассмотрим более простой пример:

$$(1-\gamma_5)\theta_a\cdot\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta = (1-\gamma_5)\theta_a\cdot\theta_b\cdot C^{bd}(1-\gamma_5)\theta_d =$$

$$= \frac{1}{2}C^{bd}(1-\gamma_5)\theta_a \cdot (1-\gamma_5)\theta_b(1-\gamma_5)\theta_d = 0 \tag{10.35}$$

Поскольку:

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.36}$$

Вместо θ запишем ковариантную производную. Нужно проверить, будет ли выполняться условие

$$(1-\gamma_5)D_a \cdot \bar{D}(1-\gamma_5)D = 0 \tag{10.37}$$

Ковариантная производная:

$$D_a = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^a} - i(\gamma^\mu \theta)_a \partial_\mu \tag{10.38}$$

Знаем, что

$$\{\theta_a, \theta_b\} = 0 \tag{10.39}$$

Однако D_a и D_b не антикоммутируют.

$$\{D_a, D_b\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab} i\partial_\mu \tag{10.40}$$

$$\{(1-\gamma_5)\theta_a, (1-\gamma_5)\theta_b\} = 0 \tag{10.41}$$

Попробуем вычислить то же самое для ковариантных производных:

$$\begin{gathered}\{(1-\gamma_5)D_a, (1-\gamma_5)\Delta_b\} = (1-\gamma_5)_a^c(1-\gamma_5)_b^d\{D_c, D_d\} = (1-\gamma_5)_a^c - (1-\gamma_5)_b^d - \\ -(-2i)(\gamma^\mu C)_{cd}\partial_\mu = [C = i\gamma^0\gamma^2] = -2i[(1-\gamma_5)\gamma^\mu C(1-\gamma_5)]_{ab}\partial_\mu = \\ = -2i[\gamma^\mu C(1+\gamma_5)(1-\gamma_5)]_{ab}\partial_\mu = 0\end{gathered} \tag{10.42}$$

Левые с правыми не будут антикоммутировать, но это использоваться не будет. Таким образом, возникает еще одно полезное свойство:

$$(1-\gamma_5)D_a \cdot \bar{D}(1-\gamma_5)D = 0 \tag{10.43}$$

Тогда W_a – киральное суперполе.

3. Обычный Янг-Миллс:

$$A_\mu \longrightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} - i\omega\partial_\mu\omega^{-1} \sim e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda}e^{2V}e^{-i\Lambda} \tag{10.44}$$

Аналог:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \omega F_{\mu\nu}\omega^{-1} \sim ? \tag{10.45}$$

$$e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda} \tag{10.46}$$

$$e^{-2V} \longrightarrow e^{i\Lambda}e^{-2V}e^{-i\Lambda^+} \tag{10.47}$$

$$W_a = \frac{1}{32}\bar{D}(1+\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}] = \frac{1}{32}\bar{D}^e(1-\gamma_5)_e^f D_f \cdot$$

$$\cdot[e^{-2V}(1+\gamma_5)_a^b D_b e^{2V}] \longrightarrow \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{i\Lambda}e^{-2V}e^{-i\Lambda^+}(1+\gamma_5)D_a(e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda})] \tag{10.48}$$

Знаем, что Λ – киральное суперполе.

$$(1-\gamma_5)D_a\Lambda = 0 \tag{10.49}$$

$$(1+\gamma_5)D_a\Lambda^+ = 0 \tag{10.50}$$

Любая аналитическая функция кирального поля киральна.

$$(1+\gamma_5)D_a e^{i\Lambda^+} = 0 \tag{10.51}$$

$$(1-\gamma_5)D_a e^{i\Lambda} = 0 \tag{10.52}$$

Тогда:

$$\begin{gathered}W_a = \frac{1}{32}\bar{D}^e(1+\gamma_5)_e^f D_f[e^{-2V}(1+\gamma_5)_a^b D_b e^{2V}] \longrightarrow e^{i\Lambda}\frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D\cdot \\ \cdot[e^{-2V}[(1+\gamma_5)D_a e^{2V}]e^{-i\Lambda} + e^{-2V}e^{2V}(1+\gamma_5)D_a e^{-i\Lambda}] = \\ = e^{i\Lambda}\frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}]e^{-i\Lambda} + \\ + e^{i\Lambda}\frac{1}{32}\bar{D}^b(1-\gamma_5)D_b(1+\gamma_5)D_a e^{-i\Lambda} + e^{i\Lambda}\frac{1}{32}\bar{D}^b(1+\gamma_5)D_a(1-\gamma_5)D_b e^{-i\Lambda}\end{gathered} \tag{10.53}$$

Преобразуем выражение:

$$W_a \longrightarrow e^{i\Lambda}W_a e^{-i\Lambda} + \frac{1}{32}e^{i\Lambda}\bar{D}^b\{(1-\gamma_5)D_b,(1+\gamma_5)D_a\}e^{-i\Lambda} \tag{10.54}$$

Посчитаем коммутатор. Знаем, что он не равен нулю.

$$\begin{gathered}\{(1-\gamma_5)D_b,(1+\gamma_5)D_a\} = (1-\gamma_5)_b^c(1+\gamma_5)_a^d\{D_c,D_d\} = (1-\gamma_5)_b^c(1-\gamma_5)_a^d\cdot \\ \cdot(-2i)(\gamma^\mu C)_{cd}\partial_\mu = [(1-\gamma_5)\gamma^\mu C(1+\gamma_5)]_{ba}(-2i)\partial_\mu = [(1-\gamma_5)^2 = 2(1-\gamma_5)] = \\ = -4i[(1-\gamma_5)\gamma^\mu C]_{ba}\partial_\mu\end{gathered} \tag{10.55}$$

Подставим это выражение:

$$W_a \longrightarrow e^{i\Lambda}W_a e^{-i\Lambda} - \frac{i}{8}e^{i\Lambda}\bar{D}^b[(1-\gamma_5)\gamma^\mu C]_{ba}\partial_\mu e^{-i\Lambda} =$$

$$= e^{i\Lambda}W_a e^{-i\Lambda} - \frac{i}{8}e^{i\Lambda}\partial_\mu[\bar{D}(1-\gamma_5)\gamma^\mu C]_a e^{-i\Lambda} \tag{10.56}$$

Заметим, что:

$$[\bar{D}(1-\gamma_5)\gamma^\mu C]_a = [(\bar{D}(1-\gamma_5)\gamma^\mu C)^T]_a = C^T\gamma^{\mu T}(1-\gamma_5)C^T D =$$

$$= -C\gamma^{\mu T}C^{-1}(1-\gamma_5)D = \gamma^\mu(1-\gamma_5)D_a \tag{10.57}$$

Тогда закон калибровочного преобразования выглядит следующим образом:

$$W_a \longrightarrow e^{i\Lambda}W_a e^{-i\Lambda} - \frac{i}{8}e^{i\Lambda}\partial_\mu[\gamma^\mu(1-\gamma_5)D]_a e^{-i\Lambda} = e^{i\Lambda}W_a e^{-i\Lambda} \tag{10.58}$$

При таком преобразовании киральность не нарушается.

$$(1-\gamma_5)D_a(e^{i\Lambda}W_a e^{-i\Lambda}) = 0 \tag{10.59}$$

Необходимо вычислить W_a в терминах компонентных полей для связи с тензором напряженности $F_{\mu\nu}$. Это вычисление будет разбито на части. Вычисление будет проводиться в калибровке Весса-Зумино.

$$W_a = \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}] \tag{10.60}$$

В наших обозначениях:

$$(1-\gamma_5)D_a = (1-\gamma_5)_b^a D^b \tag{10.61}$$

В калибровке Весса-Зумино:

$$e^{-2V}D_b e^{2V} = (1-2V+2V^2)D_b(1+2V+2V^2) =$$

$$= (1-2V+2V^2)(2D_bV + 2VD_bV + 2D_bV\cdot V) \tag{10.62}$$

$$V_{\mathbf{ВЗ}} = -\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + .. \tag{10.63}$$

$$e^{-2V}D_b e^{2V} = 2D_bV + 2VD_bV + 2D_bV\cdot V - 4VD_bV \tag{10.64}$$

Тогда окончательно получим выражение:

$$e^{-2V}D_b e^{2V} = 2D_bV + 2D_bV\cdot V - 2V\cdot D_bV = 2(D_bV + [D_bV, V]) \tag{10.65}$$

С учетом последнего слагаемого можно записать:

$$\frac{1}{2}e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V} = (1+\gamma_5)_a^b(D_bV + [D_bV, V]) \tag{10.66}$$

Знаем выражение для ковариантной производной:

$$D_b = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b} - i(\gamma^\mu\theta)_b\partial_\mu \tag{10.67}$$

В качестве домашнего задания необходимо применить ее к V в калибровке Весса-Зумино. Выражение для V также известно.

$$V = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D \tag{10.68}$$

Запишем результат:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V} = (1+\gamma_5)_a^b(D_bV + [D_bV, V]) = (1+\gamma_5)\{\gamma^\mu\theta_a A_\mu + \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\lambda_a\cdot\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta + \gamma^\mu\lambda_a\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta + \theta_a(\bar{\theta}\theta)(D - \frac{i}{2}\partial_\mu A^\mu) - \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a(\bar{\theta}\theta)(\partial_\mu A_\nu + \\ -\frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a(\bar{\theta}\theta)(\partial_\mu A_\nu + i[A_\mu, A_\nu]) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\gamma^\mu(\partial_\mu\lambda_a + 2i[A_\mu, \lambda_a])\}\end{gathered} \tag{10.69}$$

Следующий шаг.

$$W_a = \frac{1}{16}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}\cdot\frac{1}{2}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}] \tag{10.70}$$

Нужно подействовать оператором на квадратную скобку. Для этого потребуются некоторые тождества, которые позволят легко применять оператор.

Лекция 11. Суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля и N=1 суперсимметричная теория Янга-Миллса

Глава V. N=1 суперсимметричные калибровочные теории. Продолжение

Суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля

Продолжаем изучать суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля. В случае Янга-Миллса он записывается следующим образом:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \tag{11.1}$$

Его суперсимметричный аналог записывается так:

$$W_a(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) \equiv \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}] \tag{11.2}$$

Это правый спинор.

Киральные координаты:

$$y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{11.3}$$

Закон преобразования:

$$W_a(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) \equiv \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}] \longrightarrow e^{i\Lambda}W_a e^{-i\Lambda} \tag{11.4}$$

Причем киральное суперполе является параметром этих преобразований:

$$(1-\gamma_5)D_a\Lambda = 0 \tag{11.5}$$

Разложение по генераторам калибровочной группы:

$$\Lambda = e\Lambda^A t^A \tag{11.6}$$

Для того, чтобы убедиться в том, что W_a – аналог, необходимо произвести вычисление в терминах компонентных полей. В калибровке Весса-Зумино:

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) \tag{11.7}$$

Задача заключается в вычислении величины W_a в данной калибровке. Уже вычислили конечную сумму:

$$\frac{1}{2}e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V} = (1+\gamma_5)D_a V - [V,(1+\gamma_5)D_a V] \tag{11.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V} &= (1+\gamma_5)\{\gamma^\mu\theta_a A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}}\lambda_a\bar\theta(1-\gamma_5)\theta+ \\ &+\gamma^\mu\lambda_a\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta + \theta_a(\bar\theta\theta)(D-\frac{i}{2}\partial_\mu A_\mu)- \\ -\frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a\cdot\bar\theta\theta(\partial_\mu A_\nu + i[A_\mu,A_\nu]) &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(\bar\theta\theta)^2\gamma^\mu(\partial_\mu\lambda_a + 2i[A_\mu,\lambda_a])\}\end{aligned} \tag{11.9}$$

Осталось применить к величине в скобках оператор $\frac{1}{16}\bar D(1-\gamma_5)D$.

Суперсимметричная ковариантная производная:

$$D_a = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^a} - i(\gamma^\mu\theta)_a\partial_\mu \tag{11.10}$$

Необходим прием, упрощающий вычисления. Потребуется явное выражение для оператора:

$$\bar D(1-\gamma_5)D \equiv D_a C^{ab}(1-\gamma_5)D_b = C^{ab}(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^a} - i(\gamma^\mu\theta)_a\partial_\mu)(1-\gamma_5)(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^b} - i(\gamma^\nu\theta)_b\partial_\nu) \tag{11.11}$$

Уже вычисляли:

$$C^{ab}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^a} = C^{ab}\cdot\frac{\partial}{\bar\theta^a}\frac{\partial}{\partial\theta_c} = C^{ab}C_{ab}\frac{\partial}{\partial\theta_c} = -\frac{\partial}{\partial\theta_b} \tag{11.12}$$

Это так, поскольку:

$$C^{ab}C_{ab} = (C^2)^b_c = -\delta^b_c \tag{11.13}$$

Аналогично для второго произведения (C – антисимметричная матрица):

$$\begin{aligned}C^{ab}(\gamma^\mu\theta)_a &= -(C\gamma^\mu\theta)^b = -[(C\gamma^\mu\theta)T]^b = \\ &= (\theta^T\gamma^{\mu T}C)^b = (\theta^T C^{-1}\gamma^{\mu T}C)^b = -(\bar\theta\gamma^\mu)^b\end{aligned} \tag{11.14}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\bar D(1-\gamma_5)D &= (-\frac{\partial}{\partial\theta_{b\,i}}(\bar\theta\gamma^\mu)^b\partial_\mu)(1-\gamma_5)(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^b} - i(\gamma^\nu\theta)_b\partial_\nu) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\bar\theta\gamma^\mu(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\partial_\mu + \\ &+ i\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\gamma^\nu\theta\partial_\nu + \bar\theta\gamma^\mu(1-\gamma_5)\gamma^\nu\theta\partial_\mu\partial_\nu\end{aligned} \tag{11.15}$$

Вспомним, что

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu = (\gamma^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu})\partial_\mu\partial_\nu = \partial^2_\mu \tag{11.16}$$

Тогда:

$$\bar{\theta}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\gamma^\nu\theta\partial_\mu\partial_\nu = \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial_\mu^2 \tag{11.17}$$

$$[\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\theta] = tr[(1-\gamma_5)\gamma^\nu] = 0 \tag{11.18}$$

Рассмотрим и упросим выражение

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\gamma^\nu\theta = \frac{\partial}{\partial\theta_a}[(1-\gamma_5)\gamma^\nu\theta]_a = -[(1-\gamma_5)\gamma^\nu\theta]_a\cdot\frac{\partial\bar{\theta}^b}{\partial\theta_a}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b} = \\ = [\bar{\theta} = \theta^T C,\, \bar{\theta}^b = \theta_a C^{ab}] = -[(1-\gamma_5)\gamma^\nu\theta]_a C^{ab}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b} = [C(1-\gamma_5)\gamma^\nu\theta]^b\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b} = \\ = [(C(1-\gamma_5)\gamma^\nu\theta)^T]^b\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b} = [\theta^T\cdot C\cdot C^{-1}\gamma^{\nu T}(1-\gamma_5)C^T]^b\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b} = \\ = \bar{\theta}\gamma^\nu(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\end{gathered} \tag{11.19}$$

Теперь окончательно можем записать ответ для оператора $\bar{D}(1-\gamma_5)D$:

$$\bar{D}(1-\gamma_5)D = -\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + 2i\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\partial_\mu + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial_\mu^2 \tag{11.20}$$

Все киральные выражения являются функцией y^μ и $(1+\gamma_5)\theta$.

$$y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \tag{11.21}$$

Запишем ряд важных тожеств.

1.
$$\bar{D}(1-\gamma_5)D\varphi(x) = \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial_\mu^2\varphi(y) \tag{11.22}$$

2.
$$\bar{D}(1-\gamma_5)D[\theta_a\varphi(x)] = -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(y) \tag{11.23}$$

3.
$$\bar{D}(1-\gamma_5)D[\bar{\theta}\theta\varphi(x)] = -8\varphi(y) \tag{11.24}$$

4.
$$\bar{D}(1-\gamma_5)D[\bar{\theta}\gamma_5\theta\varphi(x)] = 8\varphi(y) \tag{11.25}$$

5.
$$\bar{D}(1-\gamma_5)D[\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\varphi(x)] = 4i\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial^\nu\varphi(y) \tag{11.26}$$

6.
$$\bar{D}(1-\gamma_5)D[\theta_a(\bar{\theta}\theta)\varphi(x)] = -4(1+\gamma_5)\theta_a\varphi(y) \tag{11.27}$$

7.

$$\bar{D}(1-\gamma_5)D[(\bar{\theta}\theta)^2\varphi(x)] = -8\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\varphi(y) \tag{11.28}$$

Все, что стоит справа, удовлетворяет условию киральности. Докажем самое иллюстративное из этих тождеств.

$$\bar{D}(1-\gamma_5)D[\bar{\theta}\theta\varphi(x)] = -8\varphi(y) \tag{11.29}$$

$$\begin{gathered}\bar{D}(1-\gamma_5)D[\bar{\theta}\theta\varphi(x)] = [\bar{D}(1-\gamma_5)D = -\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + 2i\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\partial_\mu + \\ +\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial_\mu^2][\bar{\theta}\theta\varphi(x)] = -\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\cdot 2\theta\varphi(x) + 2i\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\cdot 2\theta\partial_\mu\varphi(x) + \\ +(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\varphi(x) = -8\varphi(x) - 4i\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\varphi(x) + (\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\varphi(x) = -8\varphi(y)\end{gathered} \tag{11.30}$$

Использовали известное выражение:

$$\bar{\theta}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\theta = 0 \tag{11.31}$$

$$tr(1-\gamma_5) = 0 \tag{11.32}$$

Проверим последнее равенство, для этого разложим $\varphi(y)$ в окрестности точки x:

$$\begin{gathered}-8\varphi(y) = -8\varphi(x) - 8\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\varphi(x) + (-8)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot \\ \cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) = -8\varphi(x) - 4i\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\varphi(x) + (\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\varphi(x)\end{gathered} \tag{11.33}$$

Таким образом, получили верное равенство и доказали третье тождество. Теперь все готово для вычисления W_a.

$$\begin{gathered}W_a = \frac{1}{16}\bar{D}(1-\gamma_5)D[\frac{1}{2}e^{-2V}(1-\gamma_5)De^{2V}] \longrightarrow \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\{-i\sqrt{2}\lambda_a(y) - \theta_a D(y) + \\ +\frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a F_{\mu\nu}(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\gamma^\mu\partial_\mu\lambda_a(y)\}\end{gathered} \tag{11.34}$$

Киральность выражения очевидна.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \tag{11.35}$$

$$D_\mu\lambda = \partial_\mu\lambda + i[A_\mu, \lambda] \tag{11.36}$$

Видим, что внутри суперполя действительно присутствует $F_{\mu\nu}$. При остаточных калибровочных преобразованиях поля преобразовывались следующим образом:

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} - i\omega\partial_\mu \omega^{-1} \\ \lambda \longrightarrow \omega\lambda\omega^{-1} \\ D \longrightarrow \omega D\omega^{-1} \\ F_{\mu\nu} \longrightarrow \omega F_{\mu\nu}\omega^{-1} \\ D_\mu\lambda \longrightarrow \omega D_\mu \lambda\omega^{-1} \end{cases} \tag{11.37}$$

Все компоненты W_a одинаковым образом меняются под действием остаточной инвариантности.

$$e^{i\Lambda} \longrightarrow \omega(y) \tag{11.38}$$

Значит, есть согласование с результатом, полученным ранее.

$$W_a \longrightarrow e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda} \tag{11.39}$$

N=1 суперсиммеричная теория Янга-Миллса (SYM)

Предстоит построить суперсимметричный аналог теории Янга-Миллса. Вне суперсимметрии имеем выражение:

$$S = \int d^4x(-\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2) = -\frac{1}{2e^2} tr \int d^4x F^2_{\mu\nu}, \tag{11.40}$$

где $F_{\mu\nu} = eF^A_{\mu\nu}t^A$. Генераторы нормированы условием:

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB} \tag{11.41}$$

Действие квадратично по тензору поля, также очевидна калибровочная инвариантность.

Начнем с Лоренц-инвариатности. Из спиноров можно построить выражение $\bar{\Psi}\Psi$ (скаляр по отношению к группе Лоренца), однако в данном случае оно не подойдет из-за возникновения правого проектора.

$$\Psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi \tag{11.42}$$

$$\bar{\Psi}_R = \Psi^+_R \cdot \gamma^0 = \Psi^+\gamma^0 \frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \bar{\Psi}\frac{1}{2}(1-\gamma_5) = (\bar{\Psi})_L \tag{11.43}$$

Поэтому

$$\bar{\Psi}_R\Psi_R = \bar{\Psi}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi = 0 \tag{11.44}$$

Нулевой результат получается из соображений киральности.

В классической теории поля было доказано:

$$\Psi \longrightarrow exp(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu})\Psi \tag{11.45}$$

$$\Psi^C \longrightarrow exp(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu})\Psi^C \tag{11.46}$$

Значит скаляром будет и величина $\bar{\Psi^C}\Psi$.

$$\bar{\Psi^C} \equiv \Psi^T C,\, \bar{\Psi^C}\Psi = \Psi^T C\Psi \tag{11.47}$$

$$\Psi_R^T C\Psi_R = \Psi^T\frac{1}{2}(1+\gamma_5)C\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi \tag{11.48}$$

$$C = i\gamma^0\gamma^2 \tag{11.49}$$

Между проекторами стоит четное чисто гамма-матриц, значит выражение ненулевое.

Величина, инвариантная относительно группы Лоренца, будет иметь вид:

$$W^T CW = W_a C^{ab} W_b \tag{11.50}$$

Теперь задача получить суперсимметрию. Есть два способа построения суперсимметричных Лагранжианов:

$$\int d^4xd^4\theta V + (\int d^4xd^2\theta\Phi + \textbf{к.с.}) \tag{11.51}$$

W – киральное суперполе, значит любая функция от W также киральна.

$$W^T CW = W_a C^{ab} W_b \longrightarrow \Phi \tag{11.52}$$

Следующее приближение:

$$Re : \int d^4xd^2\theta W_a C^{ab} W_b \tag{11.53}$$

Это выражение не подходит в качестве действия, поскольку W – элемент алгебры Ли, значит произведение выше является матрицей. Действие Янга-Миллса:

$$S_{\text{ЯМ}} = -\frac{1}{2e^2} tr\int d^4xF_{\mu\nu}^2 \tag{11.54}$$

Значит, необходим след и константа связи с нужным коэффициентом. Допишем необходимый коэффициент:

$$S = \frac{1}{2e^2} Re\, tr\int d^4xd^2\theta W_a C^{ab} W_b \tag{11.55}$$

Получили действие $N = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса.

Эта теория должна быть калибровочно инвариантной. Убедимся, что есть инвариантность относительно калибровочных преобразований. При калибровочных преобразованиях:

$$W_a \longrightarrow e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda} \tag{11.56}$$

$$tr(W_a C^{ab} W_b) \longrightarrow tr(e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda} C^{ab} e^{i\Lambda} W_b e^{-i\Lambda}) = tr(W_a C^{ab} W_b) = inv \tag{11.57}$$

Действие имеет все необходимые инвариантности.

Необходимо вычислить выражение $W_a C^{ab}$.

$$(1+\gamma_5)\lambda_a \cdot C^{ab} = -[C(1+\gamma_5)\lambda]^b = -[C(1+\gamma_5)\lambda)^T]^b =$$

$$= [\lambda^T(1+\gamma_5)C]^b = [\lambda^T C(1+\gamma_5)\bar{\lambda}]^b \tag{11.58}$$

Тогда

$$W_a C^{ab} = [\{-i\sqrt{2}\bar{\lambda}(y) - \bar{\theta}D(y) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(y) + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta D_\mu \bar{\lambda}\gamma^\mu\}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)]^b \tag{11.59}$$

Использовали следующие выражения:

$$(1+\gamma_5)\gamma^{\mu\nu}\theta_a \cdot C^{ab} = -(C(1+\gamma_5)\gamma^{\mu\nu}\theta)^b =$$

$$[\theta^T(\gamma^{\mu\nu})^T(1+\gamma_5)C]^b = [\bar{\theta}C^{-1}T(\gamma^{\mu\nu})^T C(1+\gamma_5)]^b \tag{11.60}$$

$$C^{-1}T(\gamma^{\mu\nu})^T C = \frac{1}{2}C^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)^T C = \frac{1}{2}C^{-1}(\gamma^{\nu T} C C^{-1}\gamma^{\mu T} -$$

$$-(\mu \longleftrightarrow \nu)C = \frac{1}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu) = -\gamma^{\mu\nu} = -\bar{\theta}\gamma^{\mu\nu}(1+\gamma_5)^b \tag{11.61}$$

Для вычисления последнего слагаемого в фигурных скобках:

$$(1+\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu \lambda_a \cdot C^{ab} = -[C(1+\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu \lambda]^b =$$

$$= (D_\mu \lambda^T C \cdot C^{-1}\gamma^{\mu T}(1+\gamma_5)C)^b = (D_\mu \bar{\lambda}(-\gamma^\mu)(1+\gamma_5)^b \tag{11.62}$$

Необходимо избавиться от вспомогательного спинора θ, который делает суперсимметрию явной.

$$\int d^4x d^2\theta \Phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) \longrightarrow \int d^4x d^2\theta \Phi(y^\mu \longrightarrow x^\mu, (1+\gamma_5)\theta) \tag{11.63}$$

Уравнения движения будут получаться такими же. То есть, можно произвести замену $y^\mu \longrightarrow x^\mu$. Второй важный факт – формально мы можем записать:

$$[(1+\gamma_5)\theta]^3 = 0 \tag{11.64}$$

Это верно, поскольку есть только две антикоммутирующие компоненты.

$$\int d^2\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta = 4 \tag{11.65}$$

Интересуют только слагаемые второй степени по $\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta$, поскольку все высшие и низшие будут равняться нулю.

$$S_{N=1\,SYM} = \frac{1}{2e^2} Re\,tr \int d^4 d^2\theta \{-i\sqrt{2}\bar{\lambda}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)(-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\gamma^\mu D_\mu \lambda -$$
$$-\bar{\theta}D^2\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\theta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\frac{i}{2}\gamma^{\alpha\beta}\theta F_{\alpha\beta} + \tag{11.66}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta D_\mu \bar{\lambda}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1+\gamma_5)(-i\sqrt{2})\lambda\}$$

Воспользовались свойствами:

$$[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)]^2 = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \tag{11.67}$$

$$\bar{\theta}\gamma^{\mu\nu}\theta = 0 \tag{11.68}$$

$$\bar{\theta}\gamma^{\mu\nu}\gamma_5\theta \sim \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\theta}\gamma_{\alpha\beta}\theta = 0 \tag{11.69}$$

Вычислим интеграл. Для этого рассмотрим важную формулу:

$$\bar{\theta}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}(1+\gamma_5)\theta = \bar{\theta}[\frac{1}{4}tr(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}(1+\gamma_5)) + \frac{1}{4}\gamma_5 tr)\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}(1+\gamma_5)\gamma_5) -$$
$$-\frac{1}{8}\gamma^6\rho \cdot tr(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}(1+\gamma_5)\gamma^6\rho)]\theta = \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\frac{1}{4}tr(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}(1+\gamma_5)) = \tag{11.70}$$
$$= \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta[-\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}]$$

Можно сократить одно из слагаемых:

$$\bar{\theta}\gamma^6\rho\theta = 0 \tag{11.71}$$

След четырех гамма-матриц – хорошо известное выражение:

$$tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}) \tag{11.72}$$

$$\int d^2\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta = 4 \tag{11.73}$$

Продолжим вычислять действие в калибровке Весса-Зумино:

$$S = \frac{1}{2e^2} Re\,tr \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b = \frac{2}{e^2} Re\,tr \int d^4x \{\frac{i}{2}\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu \lambda + \frac{1}{2}D^2 +$$

$$+\frac{1}{8}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}[-\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}-i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}]-\frac{i}{2}D_\mu\bar{\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\lambda\} = \tag{11.74}$$

$$=\frac{2}{e^2}Re\,tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2-\frac{i}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}D^2+i\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda-\frac{i}{2}\partial_\mu(\bar{\lambda}\gamma^\mu\gamma_5\lambda\}$$

Уже учтено, что:

$$D_\mu\bar{\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\lambda=-\bar{\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma_5)D_\mu\lambda+\partial_\mu(\bar{\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\lambda) \tag{11.75}$$

$$tr(\bar{\lambda}\gamma^\mu\gamma_5\lambda)=\bar{\lambda}^A\gamma^\mu\gamma_5\lambda^A\frac{e^2}{2} \tag{11.76}$$

Это выражение является калибровочно инвариантным. Осталось только вычислить вещественную часть.

$$trF_{\mu\nu}^2=\frac{e^2}{2}(F_{\mu\nu}^A)^2\,F_{\mu\nu}^A\in Re \tag{11.77}$$

$$tr(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})=\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu tr(A_\nu F_{\alpha\beta}-\frac{2i}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta) \tag{11.78}$$

В простейшем варианте действие в терминах компонентных полей будет выглядеть следующим образом:

$$S=\frac{1}{2e^2}Re\,tr\int d^4xd^2\theta W_aC^{ab}W_b=\frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+i\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda+\frac{1}{2}D^2\} \tag{11.79}$$

λ – суперпартнер калибровочного поля или калибрино. Теперь вычислим след:

$$S=\int d^4x\{-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^A)^2+i\bar{\lambda}^A\gamma^\mu D_\mu\lambda^A+\frac{1}{2}(D^A)^2\} \tag{11.80}$$

$i\bar{\lambda}^A\gamma^\mu D_\mu\lambda^A+\frac{1}{2}(D^A)^2$ дают инвариантность относительно преобразований суперсимметрии, а именно:

$$\begin{cases}\delta A_\mu=-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda\\ \delta D=\sqrt{2}\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5D_\mu\lambda\\ \delta\lambda=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu}-\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon D\end{cases} \tag{11.81}$$

В качестве домашнего задания: проверить инвариантность действия относительно преобразований суперсимметрии. Стоит обратить внимание:

$$\sim\bar{\lambda}\gamma^\mu[A_\mu,\lambda]\longrightarrow\bar{\lambda}\gamma^\mu[\delta A_\mu,\lambda]\sim\lambda^3 \tag{11.82}$$

Других источников, пропорциональных λ^3 нет, поэтому оно должно оказаться равным нулю. Нужно также доказать тождество:

$$0=(C\gamma^\mu)^{ab}(C\gamma_\mu)^{cd}+(C\gamma^\mu)^{ac}(C\gamma_\mu)^{db}+(C\gamma^\mu)^{ad}(C\gamma_\mu)^{bc} \tag{11.83}$$

Стоит разложить правую часть по базису

$$C_{ba}, (\gamma_5 C)_{ba}, (\gamma^\nu C)_{ba}, (\gamma^\nu \gamma_5 C)_{ba}, (\gamma^{\alpha\beta} C)_{ba} \tag{11.84}$$

Тогда все коэффициенты разложения окажутся равными нулю.

Лекция 12. Суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля и N=1 суперсимметричная теория Янга-Миллса

Глава V. N=1 суперсимметричные калибровочные теории. Продолжение

N=1 суперсиммеричная квантовая хромодинамика (КХД)

КХД – теория Янга-Миллса с дираковскими фермионами. При этом будем считать, что есть калибровочная группа G, а дираковские фермионы находятся в некотором представлении этой группы $\Psi \in R$.

В несуперсимметричном случае действие такой теории описывается выражением:

$$S = \int d^4x\{-\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2 + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi\} \tag{12.1}$$

Вспомним, что дираковский спинор имеет четыре комплексные компоненты (у каждой из которых две комплексные). Ψ строится из $\mathbf{\Psi} \longleftarrow \phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\mathbf{\Psi}(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)$ и $\tilde{\mathbf{\Psi}} \longleftarrow \tilde{\phi}(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \tilde{\varphi}(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\tilde{\mathbf{\Psi}}(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \tilde{f}(y)$.

Любой дираковский спинор можно представить как сумму правой и левой частей:

$$\Psi = \Psi_R + \Psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi \tag{12.2}$$

Возьмем зарядовое сопряжение:

$$(\Psi_L)^C = (\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi)^C = -\gamma^0 C\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi^* = [C = i\gamma^0\gamma^2] =$$

$$= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)[-\gamma^0 C\Psi^*] = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi^C = (\Psi^C)_R \tag{12.3}$$

Вспомним, что по определению:

$$\bar{\Psi}^C = \Psi^T C = (\Psi^C)^+\gamma^0 \tag{12.4}$$

Отсюда

$$\Psi^C = -\gamma^0 C\Psi^* \tag{12.5}$$

Эту формулу использовали выше.

$$\Psi \in R,\, \Psi_R \in R,\, \Psi_L \in R,\, (\Psi_L)^C \in \bar{R} \tag{12.6}$$

Поэтому:

$$\begin{cases} \Psi \longleftarrow \phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(y) + \dfrac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y) \in R \\ \\ \tilde{\Psi} \longleftarrow \tilde{\phi}(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \tilde{\varphi}(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\tilde{\Psi}(y) + \dfrac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \tilde{f}(y) \in \bar{R} \end{cases} \tag{12.7}$$

В качестве исходной точки берем два киральных скалярных суперполя в R и $\bar{R}$.

Запишем действие $N = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса в терминах суперполей.

$$S = \frac{1}{2e^2} Re\, tr \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4}\int d^4x d^2\theta(\phi^+ e^{2V}\phi +$$
$$+\tilde{\phi}^+ e^{-2V^T}\tilde{\phi}) + (\frac{1}{2}m\int d^4x d^2\theta \tilde{\phi}^T\phi + \textbf{к.с.}) \tag{12.8}$$

Вспомним обозначения. Для C^{ab}:

$$V = eV^A t^A \tag{12.9}$$

Нормировка генераторов фундаментального представления:

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB} \tag{12.10}$$

Для e^{2V}:

$$V = eV^A T^A \tag{12.11}$$

Если есть поле, которое преобразуется по представлению R:

$$R:\, \varphi \longrightarrow \omega\varphi = e^\alpha \varphi \simeq (1+\alpha)\varphi \tag{12.12}$$

Для сопряженного представления:

$$\bar{R}:\, \varphi^* \longrightarrow \omega^*\varphi^* = (\omega^{-1})^T\varphi^* = e^{-\alpha^T}\varphi^* \simeq (1-\alpha^T)\varphi^* \tag{12.13}$$

Группа компактна, значит выполняется условие

$$\omega^+ = \omega^{-1} \tag{12.14}$$

Генераторы в представлении $\bar{R}$ связаны с представлением R знаком и транспонированием:

$$T^A_{\bar{R}} = -(T^A_R)^T \tag{12.15}$$

КХД – калибровочная теория, значит необходимо проверить калибровочную инвариантность. Суперсимметрия и Лоренц-симметрия здесь очевидны.

$$\begin{cases} \phi \longrightarrow e^{i\Lambda}\phi, \, \Lambda = e\Lambda^A T^A \\ \tilde{\phi} \longrightarrow e^{-i\Lambda^T}\tilde{\phi} \\ e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda} \end{cases} \tag{12.16}$$

Отсюда можно записать ряд тривиальных следствий:

$$\begin{cases} W_a \longrightarrow e^{i\Lambda}W_a e^{-i\Lambda} \\ e^{-2V} \longrightarrow e^{i\Lambda}e^{-2V}e^{-i\Lambda^+} \end{cases} \tag{12.17}$$

Наиболее интересным является выражение:

$$e^{-2V^T} \longrightarrow e^{-i\Lambda^*}e^{-2V^T}e^{i\Lambda^T} \tag{12.18}$$

Начнем проверять калибровочную инвариантность.

$$\phi^+ e^{2V}\phi \longrightarrow \phi^+ e^{-i\Lambda^+}e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda}e^{i\Lambda}\phi = inv \tag{12.19}$$

$$\tilde{\phi}^+ e^{-2V^T}\tilde{\phi} \longrightarrow \tilde{\phi}^+ e^{i\Lambda^*}e^{-i\Lambda^*}e^{-2v^T}e^{i\Lambda^T}e^{-i\Lambda^T}\tilde{\phi} = \tilde{\phi}^+ e^{-2V^T}\tilde{\phi} = inv \tag{12.20}$$

$$\tilde{\phi}^T\phi \longrightarrow \tilde{\phi}^T e^{-i\Lambda}\cdot e^{i\Lambda}\phi = \tilde{\phi}^T\phi = inv \tag{12.21}$$

Действие является калибровочно инвариатным. Должно выполняться известное условие киральности:

$$(1-\gamma_5)D_a\Lambda = 0 \tag{12.22}$$

Действие необходимо написать в терминах компонентных полей. Будем пользоваться полученными ранее результатами. Однако еще не вычислялось массовое слагаемое.

$$\int d^4x d^2\theta \Phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) \longrightarrow \int d^4x d^2\theta \Phi(y^\mu \longrightarrow x^\mu, (1+\gamma_5)\theta) \tag{12.23}$$

$$\int d^2\theta \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta = 4 \tag{12.24}$$

Тогда можно вычислить массовое слагаемое:

$$\frac{1}{2}m\int d^4xd^2\theta\tilde{\phi}^T\phi \longrightarrow \frac{1}{2}m\int d^4xd^2\theta(\tilde{\varphi}^T(x)+\bar{\tilde{\Psi}}(x)(1+\gamma_5)\theta+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\tilde{f}^T(x))\cdot$$
$$\cdot(\varphi(x)+\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi(x)+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x)) = \frac{1}{2}m\int d^4xd^2\theta\{\tilde{\varphi}^T f\cdot\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta+ \tag{12.25}$$
$$+\tilde{f}^T\varphi\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta+\bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi\}$$

Воспользуемся тождеством Фирца для вычисления последнего слагаемого:

$$(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\Psi = -\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot(1+\gamma_5) \tag{12.26}$$

Тогда:

$$\frac{1}{2}m\int d^4xd^2\theta\tilde{\phi}^T\phi \longrightarrow \int d^4xm(\tilde{\varphi}^T f+\tilde{f}^T\varphi-\bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)\Psi) \tag{12.27}$$

Можно сразу же написать комплексно сопряженные слагаемые:

$$\textbf{к.с.} = \int d^4xm(\tilde{\varphi}^+ f^*+\tilde{f}^+\varphi^*-\bar{\tilde{\Psi}}(1-\gamma_5)\Psi) \tag{12.28}$$

При сложении получится выражение $-2\bar{\tilde{\Psi}}\Psi m$.

Все готово для того, чтобы записать действие в терминах компонентных поле:

$$S = \frac{1}{2e^2}Re\,tr\int d^4xd^2\theta W_a C^{ab}W_b+\frac{1}{4}\int d^4xd^2\theta(\phi^+e^{2V}\phi+\tilde{\phi}^+e^{-2V^T}\tilde{\phi})+$$
$$+(\frac{1}{2}m\int d^4xd^2\theta\tilde{\phi}^T\phi+\textbf{к.с.}) = \int d^4x\{-\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2+i\bar{\lambda}^A\gamma^\mu D_\mu\lambda^A+\frac{1}{2}(D^A)^2+D_\mu\varphi^++$$
$$+D^\mu\varphi+i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\Psi+f^+f+\varphi^+D\varphi+i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi-i\sqrt{2}\varphi^+\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi+ \tag{12.29}$$
$$+D_\mu\tilde{\varphi}^+D^\mu\tilde{\varphi}+i\bar{\tilde{\Psi}}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\tilde{\Psi}+\tilde{f}^+\tilde{f}-\tilde{\varphi}^+D\tilde{\varphi}-i\sqrt{2}\bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)\lambda^T\tilde{\varphi}+$$
$$+i\sqrt{2}\tilde{\varphi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\Psi}+m(\tilde{\varphi}^T f+\tilde{f}^T\varphi+\tilde{\varphi}^+f^*+\tilde{f}^+\varphi^*-2\bar{\tilde{\Psi}}\Psi)\}$$

Получили действие в терминах компонентных полей. Видно, что это действие в будущем нужно будет преобразовывать. Для этого нужно все это записать в терминах дираковского спинора и исключить компонентные поля.

Введем нужные обозначения:

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi+iA_\mu\varphi \tag{12.30}$$

Причем $A_\mu = eA^A_\mu T^A$.

$$D_\mu\tilde{\varphi} = \partial_\mu\tilde{\varphi}-iA^T_\mu\tilde{\varphi} \tag{12.31}$$

$$D_\mu[(1+\gamma_5)\Psi] = (1+\gamma_5)(\partial_\mu\Psi + iA_\mu\Psi) \tag{12.32}$$

$$D_\mu[(1+\gamma_5)\tilde{\Psi}] = (1+\gamma_5)(\partial_\mu\tilde{\Psi} - iA_\mu^T\tilde{\Psi}) \tag{12.33}$$

$$D_\mu\lambda = \partial_\mu\lambda + i[A_\mu,\lambda] = eD_\mu\lambda^A\cdot t^A \tag{12.34}$$

Первая цель – построить дираковский спинор и построить в терминах дираковского спинора действие. Для начала запишем определение дираковского спинора:

$$\Psi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\gamma_5)\Psi + (1-\gamma_5)\tilde{\Psi}] \tag{12.35}$$

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^+\gamma^0 \tag{12.36}$$

$$\bar{\Psi} = \Psi^+\gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\gamma_5)\Psi + (1-\gamma_5)\tilde{\Psi}]^+\gamma^0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi^+(1+\gamma_5) + \tilde{\Psi}^+(1-\gamma_5)]\gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi^+\gamma^0(1-\gamma_5) + \tilde{\Psi}^+\gamma^0(1+\gamma_5)] \tag{12.37}$$

Тогда получаем:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{\Psi}(1-\gamma_5) + \bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)] \tag{12.38}$$

Зарядово сопряженный спинор:

$$\Psi^C = -\gamma^0 C\Psi^* = -\gamma^0 C\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\gamma_5)\Psi^* + (1-\gamma_5)\tilde{\Psi}^*] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[(1-\gamma_5)(-\gamma^0 C\Psi^*) + (1+\gamma_5)(-\gamma^0 C\tilde{\Psi}^*)] \tag{12.39}$$

$$\Psi^C = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\gamma_5)\Psi + (1+\gamma_5)\tilde{\Psi}] \tag{12.40}$$

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\gamma_5)\Psi + (1-\gamma_5)\tilde{\Psi}] \tag{12.41}$$

Рассмотрим правый:

$$\Psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\gamma_5)\Psi \tag{12.42}$$

Это выражение входило в ϕ. Другое выражение:

$$(\Psi^C)_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\gamma_5)\tilde{\Psi} \tag{12.43}$$

А это выражение входило в $\tilde{\phi}$.

Нужно понять, имеет ли это действие отношение к КХД. Прежде всего вспомним вид дираковского Лагранжиана:

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{12.44}$$

Вычислим величину $\bar{\Psi}\Psi$:

$$\bar{\Psi}\Psi = \frac{1}{2}[\bar{\Psi}(1-\gamma_5) + \bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)][(1+\gamma_5)\Psi + (1-\gamma_5)\tilde{\Psi}] =$$

$$= \bar{\Psi}(1-\gamma_5)\tilde{\Psi} + \bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)\Psi = 2\bar{\tilde{\Psi}}\Psi \tag{12.45}$$

Окончательное выражение:

$$S = \int d^4x\{-\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2 + i\bar{\lambda}^A\gamma^\mu D_\mu\lambda^A + \frac{1}{2}(D^A)^2 + D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi + i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\Psi +$$

$$+f^+f + \varphi^+D\varphi + i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\sqrt{2}\varphi^+\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi + D_\mu\tilde{\varphi}^+D^\mu\tilde{\varphi} + \tag{12.46}$$

$$+i\bar{\tilde{\Psi}}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\tilde{\Psi} + \tilde{f}^+\tilde{f} - \tilde{\varphi}^+D\tilde{\varphi} - i\sqrt{2}\bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)\lambda^T\tilde{\varphi} + i\sqrt{2}\tilde{\varphi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\Psi} +$$

$$+m(\tilde{\varphi}^Tf + \tilde{f}^T\varphi + \tilde{\varphi}^+f^* + \tilde{f}^+\varphi^* - \bar{\Psi}\Psi)\}$$

Кинетический член дираковского поля:

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi = \frac{i}{2}[\bar{\Psi}(1-\gamma_5) + \bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)]\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)[(1+\gamma_5)\Psi + (1-\gamma_5)\tilde{\Psi}] =$$

$$= i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\Psi + i\bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\tilde{\Psi} \tag{12.47}$$

Интересует последнее слагаемое. Заметим, что есть два типа слагаемых: с производными и без них.

$$i\bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\Psi} = i\bar{\tilde{\Psi}}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\Psi} + 2i\bar{\tilde{\Psi}}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\Psi} \tag{12.48}$$

Добавка – это четырехдивергенция:

$$2i\bar{\tilde{\Psi}}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\Psi} = \partial_\mu(i\bar{\tilde{\Psi}}\gamma_5\gamma^\mu\tilde{\Psi}) \tag{12.49}$$

Любая четырехдивергенция никак не влияет на уравнения Лагранжа и может быть отброшена. Осталось разобраться со слагаемыми с A_μ.

$$-\bar{\tilde{\Psi}}(1+\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\tilde{\Psi} = -(\tilde{\Psi}^TC(1+\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\tilde{\Psi})^T = +\tilde{\Psi}^TA^T_\mu C\cdot C^{-1}\gamma^{\mu T}(1+\gamma_5)C^T\tilde{\Psi} =$$

$$= -\bar{\tilde{\Psi}}A^T_\mu C^{-1}\gamma^{\mu T}C(1+\gamma_5)\tilde{\Psi} = \bar{\tilde{\Psi}}\gamma^\mu A^T_\mu(1+\gamma_5)\tilde{\Psi} = iBar\tilde{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu(-i)A^T_\mu\tilde{\Psi} \tag{12.50}$$

Было учтено, что

$$C^{-1}\gamma^{\mu T}C = -\gamma^\mu \tag{12.51}$$

$$i\bar{\tilde{\Psi}}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\tilde{\Psi} = i\bar{\tilde{\Psi}}(1-\gamma_5)\gamma^\mu(\partial_\mu\tilde{\Psi} - iA^T_\mu\tilde{\Psi}) \tag{12.52}$$

Получили:

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi = i\bar{\mathbf{\Psi}}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\mathbf{\Psi} + i\bar{\tilde{\mathbf{\Psi}}}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\tilde{\mathbf{\Psi}} + \textbf{четырехдивергенция} \quad (12.53)$$

Тогда для действия на данном промежуточном этапе имеем:

$$S = \int d^4x\{-\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2 + i\bar{\lambda}^A\gamma^\mu D_\mu\lambda^A + \frac{1}{2}(D^A)^2 + D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi + f^+f +$$
$$+\varphi^+D\varphi + i\sqrt{2}\bar{\mathbf{\Psi}}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\sqrt{2}\varphi^+\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\mathbf{\Psi} + D_\mu\tilde{\varphi}^+D^\mu\tilde{\varphi} + i\bar{\tilde{\mathbf{\Psi}}}(1- \quad (12.54)$$
$$-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\tilde{\mathbf{\Psi}} + \tilde{f}^+\tilde{f} - \tilde{\varphi}^+D\tilde{\varphi} - i\sqrt{2}\bar{\tilde{\mathbf{\Psi}}}(1+\gamma_5)\lambda^T\tilde{\varphi} + i\sqrt{2}\tilde{\varphi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\mathbf{\Psi}}+$$
$$+m(\tilde{\varphi}^Tf + \tilde{f}^T\varphi + \tilde{\varphi}^+f^* + \tilde{f}^+\varphi^* - \bar{\Psi}\Psi)\}$$

Пока что остались майорановские спиноры, слагаемые с ними нужно также заменить.

$$(1+\gamma_5)\Psi = \sqrt{2}(1+\gamma_5)\mathbf{\Psi} \quad (12.55)$$

$$\bar{\Psi}(1-\gamma_5) = \sqrt{2}\bar{\mathbf{\Psi}}(1-\gamma_5) \quad (12.56)$$

Рассмотрим следующую величину и запишем в явном виде индексы калибровочной группы

$$i\sqrt{2}\tilde{\varphi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\mathbf{\Psi}} = i\sqrt{2}\tilde{\varphi}^*_ie\bar{\lambda}^A(T^{AT})^i_j(1+\gamma_5)\tilde{\mathbf{\Psi}}^j = i\sqrt{2}\bar{\tilde{\mathbf{\Psi}}}^j(1+$$
$$+\gamma_5)e\lambda^A(T^A)^i_j\tilde{\varphi}^*_i\bar{\tilde{\mathbf{\Psi}}}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^* = i\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^* \quad (12.57)$$

$$-i\sqrt{2}\bar{\tilde{\mathbf{\Psi}}}(1-\gamma_5)\lambda^T\tilde{\varphi} = -i\sqrt{2}\tilde{\varphi}^T\lambda^T(1-\gamma_5)\tilde{\mathbf{\Psi}} = -i\tilde{\varphi}^T\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi \quad (12.58)$$

Окончательно получаем действие, записанное в терминах дираковского спинора:

$$S = \int d^4x\{-\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2 + i\bar{\lambda}^A\gamma^\mu D_\mu\lambda^A + \frac{1}{2}(D^A)^2 + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + D_\mu\varphi+$$
$$+D^\mu\varphi + D_\mu\tilde{\varphi}^+D^\mu\tilde{\varphi} + f^+f + \tilde{f}^+\tilde{f} + \varphi^+D\varphi - \tilde{\varphi}^+D^T\tilde{\varphi} + m(\tilde{\varphi}f + \tilde{f}^T\varphi + \tilde{\varphi}^+f^*+ \quad (12.59)$$
$$+\tilde{f}^+\varphi^*) + +i\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\varphi - i\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi - i\tilde{\varphi}^T\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi + i\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^*\}$$

Остается исключить из действия вспомогательные поля. Исключим для начала поле f. Запишем соответствующее уравнение движения:

$$0 = f^+ + m\tilde{\varphi}^T \quad (12.60)$$

Для f^+:

$$0 = f + m\tilde{\varphi}^* \quad (12.61)$$

Для $\tilde{f}$:

$$0 = \tilde{f}^{+} + m\varphi^{T} \tag{12.62}$$

Для $\tilde{f}^{+}$:

$$0 = \tilde{f} + m\varphi^{*} \tag{12.63}$$

Например:

$$f^{+} f = (-m)^2 \tilde{\varphi}^T \tilde{\varphi}^* = m^2 \tilde{\varphi}^+ \tilde{\varphi} \tag{12.64}$$

Тогда возникают массовые слагаемые для скаляров. Точно так же исключаются слагаемые с D.

$$\varphi^* D\varphi - \tilde{\varphi}^+ D^T \tilde{\varphi} = \varphi^+ \cdot eD^A T^A \varphi - \tilde{\varphi}^T eD^A T^A \tilde{\varphi}^* \tag{12.65}$$

Тогда уравнение движения:

$$0 = D^A + e(\varphi^+ T^A \varphi - \tilde{\varphi}^T T^A \tilde{\varphi}^*) \tag{12.66}$$

Выражение для действия будет иметь вид:

$$S = \int d^4x \{ -\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2 + i\bar{\lambda}^A \gamma^\mu D_\mu \lambda^A + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + D_\mu \varphi^+ D_\mu \varphi^+ D^\mu \varphi +$$

$$+ D_\mu \tilde{\varphi}^+ D^\mu \tilde{\varphi} - m^2 \varphi^+ \varphi - m^2 \tilde{\varphi}^+ \tilde{\varphi} - \frac{e^2}{2}(\varphi^+ T^A \varphi - \tilde{\varphi}^T T^A \tilde{\varphi}^*)^2 + i\bar{\Psi}(1- \tag{12.67}$$

$$- \gamma_5)\lambda\varphi - i\varphi^+ \bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi - i\tilde{\varphi}^T \bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi_i \bar{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^* \}$$

Потенциал скалярных полей

$$V(\varphi, \tilde{\varphi}) = m^2 \varphi^+ \varphi + m^2 \tilde{\varphi}^+ \tilde{\varphi} + \frac{e^2}{2}(\varphi^+ T^A \varphi - \tilde{\varphi}^T T^A \tilde{\varphi}^*)^2 \geqslant 0 \tag{12.68}$$

получается при исключении вспомогательных полей. Это характерная особенность суперсимметричных теорий.

$$(\varphi^+ T^A \varphi)^* = (\varphi^+ T^A \varphi)^+ = \varphi^+ T^{A+} \varphi = \varphi^+ T^A \varphi \in Re \tag{12.69}$$

Масштаб нарушения суперсимметрии выше, чем масштаб нарушения электрослабой симметрии, поэтому рассмотренная модель нереалистична.

Лекция 13. N=2 суперсимметричная теория Янга-Миллса

Глава VI. Калибровочные теории с расширенной суперсимметрией

N – количество операторов суперзаряда. Если $N = 1$, то это нерасширенная теория суперсимметрии, именно такие теории рассматривались ранее.

N=2 суперсимметричная теория Янга-Миллса

По сути, число суперзарядов – количество различных преобразований суперсимметрии, относительно которых есть инвариантность. Попробуем понять, какие идеи лежат в основе построения $N = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса. Нужно вернуться в раздел, посвящённый алгебре суперсимметрии.

$$N = 2,\, \lambda_0 = 1,\, \lambda_{min} = \lambda_0 - \frac{N}{2} = 1 - \frac{2}{2} = 0 \tag{13.1}$$

λ	1	1	0
$n_{\textbf{сост}}$	1	2	1

\+

λ	0	-1	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	2	1

В результате получаем:

λ	1	1	0	-1	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	2	2	2	1

Можно продолжить равенство и переписать таблицу:

λ	1	1	0	-1	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	1	0	1	1

\+

λ	1	0	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	2	1

Далее можно понять, что это уже известные нам теории. Исходя из этого, теорию нужно строить из модели Весса-Зумино и $N = 1$ SYM с полями A_μ, φ.

$$\begin{cases} \delta A_\mu = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_1\gamma_\mu\lambda \\ \delta\lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon D \\ \delta D = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\gamma_5 D_\mu\lambda \end{cases} \tag{13.2}$$

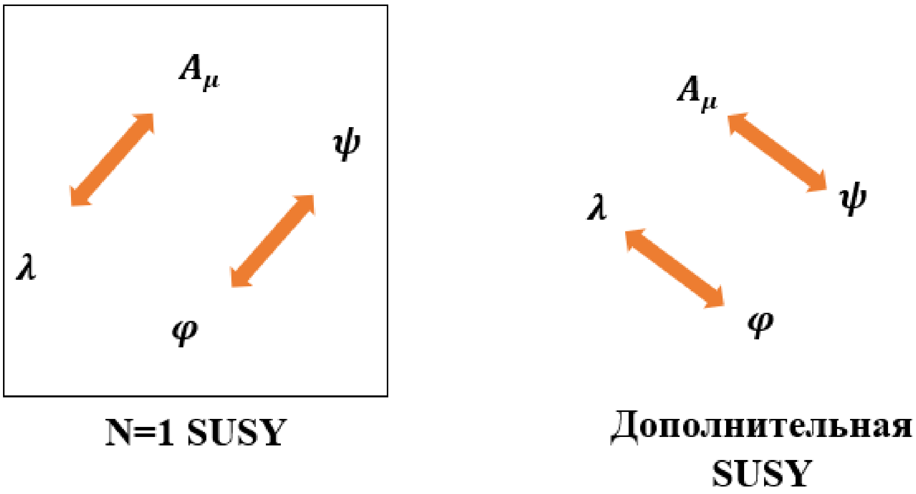

Рис. 13.1. Действие двух суперсимметрий друг с другом: ε_1 и ε_2

$$\begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}_1(1+\gamma_5)\Psi \\ \delta[(1+\gamma_5)\Psi] = (1+\gamma_5)[f\cdot\varepsilon - iD_\mu\varphi\gamma^\mu\varepsilon] \\ \delta f = -i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu(1+\gamma_5)D_\mu\Psi - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_1\cdot(1-\gamma_5)\lambda\cdot\varphi \end{cases} \tag{13.3}$$

Видно, что A_μ и λ при глобальных калибровочных преобразованиях меняются по присоединенному представлению, а φ и Ψ должны лежать в одном и том же представлении калибровочной группы. Значит, что для существования второй суперсимметрии нужно, чтобы φ и Ψ лежали в присоединенном представлении.

$$\delta A^A_\mu = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_1\gamma_\mu\lambda^A \tag{13.4}$$

$$\delta A^A_\mu = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\Psi^A \tag{13.5}$$

A пробегает значения от единицы до размерности калибровочной группы. Будет ли здесь масса? Мы уже поняли, что массы суперпартнеров одинаковы, если суперсимметрия спонтанно не нарушена. Значит масса λ нулевая. Отсюда и масса Ψ нулевая. По сути, можно записать:

$$N = 2(SYM) = N = 1(SYM) + \textbf{ВЗ без массы} \tag{13.6}$$

Действия нам уже известны, осталось их лишь сложить. Однако есть обстоятельство, на которое нужно будет обратить внимание. Для $N = 1(SYM)$:

$$S = \frac{1}{2e^2}Retr\int d^4xd^2\theta W_a C^{ab} W_b \tag{13.7}$$

Калибровочное суперполе раскладывается по генераторам фундаментального представления:

$$V(x,\theta) = eV^A(x,\theta)t^A \tag{13.8}$$

В частности это означает:

$$\begin{cases} A_\mu = eA^A_\mu t^A \\ \lambda = e\lambda^A t^A \end{cases} \tag{13.9}$$

Для модели Весса-Зумино действие имеет вид:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V}\phi \tag{13.10}$$

Нас интересует калибровочная инвариантность. Здесь

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix} \tag{13.11}$$

Для $Adj : n = dimG$. Это означает:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \dots \\ \Psi_n \end{pmatrix} \tag{13.12}$$

От такого столбца нужно перейти к разложению по генераторам:

$$\Psi = e\Psi^A t^A \tag{13.13}$$

Запишем сначала обозначения в виде столбца.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix} \in Adj, n = dimG \tag{13.14}$$

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu + iA_\mu\varphi \tag{13.15}$$

$$D_\mu \varphi_B = \partial_\mu \varphi_B + ieA^A_\mu (T^A_{Adj})_{BC}\varphi_C \tag{13.16}$$

$$(T^A_{Adj})_{BC} = -if^{ABC} \tag{13.17}$$

$$D_\mu \varphi_B = \partial_\mu \varphi_B + eA^A_\mu f^{ABC}\varphi_C \tag{13.18}$$

Переставим индексы:

$$D_\mu \varphi_A = \partial_\mu \varphi_A - eA^B_\mu \varphi_C f^{ABC} \tag{13.19}$$

Теперь рассмотрим аналог в системе обозначений

$$\varphi = e\varphi^A t^A \in Adj \tag{13.20}$$

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i[A_\mu, \varphi] \tag{13.21}$$

$$e(D_\mu \varphi)_A t^A = e\partial_\mu \varphi_A t^A + i[eA^B_\mu t^B, e\varphi^C t^C] = e\partial_\mu \varphi_A t^A +$$

$$+ie^2 A^B_\mu \varphi^C \cdot if^{ABC} t^A = et^A(\partial_\mu \varphi_A - eA^B_\mu \varphi^C \cdot f^{ABC}) \tag{13.22}$$

Воспользовались соотношением:

$$[t^B, t^C] = if^{ABC} t^A \tag{13.23}$$

В итоге получаем точно такое же выражение:

$$D_\mu \varphi_A = \partial_\mu \varphi_A - eA^B_\mu f^{ABC}\varphi_C \tag{13.24}$$

Была величина

$$e^{2V} \cdot \phi = (1 + \frac{1}{1!}2V + \frac{1}{2!}(2V)^2 + ...)\phi \tag{13.25}$$

То, что было умножением становится коммутатором, значит

$$\phi + \frac{1}{1!}[2V, \phi] + \frac{1}{2!}[2V, [2V, \phi]] + ... = e^{2V}\phi e^{-2V} \tag{13.26}$$

Рассмотрим еще одну величину

$$\varphi^+ \varphi = \sum_{A=1}^{dimG} \varphi^{*A} \cdot \varphi^A = \varphi^{*A}\varphi^A \tag{13.27}$$

Этой величине соответствует выражение

$$tr(\varphi^+ \varphi) = tr(e\varphi^{*A} t^A \cdot e\varphi^B t^B) = \frac{e^2}{2}\varphi^{*A}\varphi^B \delta^{AB} = \frac{e^2}{2}\varphi^{*A}\varphi^A \tag{13.28}$$

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB} \tag{13.29}$$

Разница оказалась в наличии множителя $\dfrac{e^2}{2}$.

Рассмотрим еще одну величину:

$$\phi^+ e^{2V}\phi \tag{13.30}$$

С другой стороны, она записывается следующим образом:

$$\frac{2}{e^2}tr(\phi^+ e^{2V}\phi e^{-2V}) \tag{13.31}$$

Итак:

$$S(N=2(SYM)=N=1(SYM)+\textbf{ВЗ без Adj})=\frac{1}{2e^2}Retr\int d^4xd^2\theta W_aC^{ab}W_b+$$

$$+\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi=\frac{1}{2e^2}Retr\int d^4xd^2\theta W_aC^{ab}W_b+\frac{1}{2e^2}tr\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi e^{-2V} \tag{13.32}$$

Явной является только $N=1$ суперсимметрия. Есть техника, которая позволяет сделать две суперсимметрии явными. Но мы пойдем другим путем: запишем действие в терминах компонентных полей. Перед этим необходимо убедиться в калибровочной инвариантности.

$$e^{2V}\longrightarrow e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{i\Lambda} \tag{13.33}$$

$$(1-\gamma_5)D_a\Lambda=0 \tag{13.34}$$

$$\Lambda=e\Lambda^At^A \tag{13.35}$$

Разложение по фундаментальному представлению:

$$\phi=e\phi^At^A \tag{13.36}$$

С учетом перехода к другим обозначениям:

$$\phi\longrightarrow e^{i\Lambda}\phi e^{-i\Lambda} \tag{13.37}$$

$$W_a\longrightarrow e^{i\Lambda}W_ae^{-i\Lambda} \tag{13.38}$$

Так выглядят калибровочные преобразования. Проверим калибровочную инвариантность:

$$tr(W_aW_b)\longrightarrow tr(e^{i\Lambda}W_ae^{-i\Lambda}\cdot e^{i\Lambda}W_be^{-i\Lambda})=tr(W_aW_b)=inv \tag{13.39}$$

Теперь следующая часть.

$$tr(\phi^+e^{2V}\phi e^{-2V})\longrightarrow tr(e^{i\Lambda^+}\phi^+e^{-i\Lambda^+}e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda}\cdot e^{i\Lambda}\phi e^{-i\Lambda}\cdot e^{i\Lambda}e^{2V}e^{-i\Lambda^+}=$$

$$= tr(\phi^+ e^{2V}\phi e^{-2V}) = inv \tag{13.40}$$

Убедились, что действие инвариантно относительно калибровочных преобразований. Явными являются калибровочная симметрия и $N = 1$ симметрия.

Действие нужно привести к привычной записи. В калибровке Весса-Зумино:

$$S(N = 2(SYM) = N = 1(SYM) + \textbf{ВЗ без Adj}) =$$

$$= \frac{1}{2e^2} Retr\int d^4xd^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} tr\int d^4xd^4\theta\phi^+ e^{2V}\phi e^{-2V} = \frac{2}{e^2} tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}+ \tag{13.41}$$

$$+i\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2 + D_\mu\varphi^+ D^\mu\varphi + i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\Psi + f^+f + \varphi^+[D,\varphi]+ \tag{13.42}$$

$$+i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)[\lambda,\varphi] - i\sqrt{2}\varphi^+\{\bar{\lambda},(1+\gamma_5)\Psi\}\}$$

Записали действие в терминах компонентных полей.

Поясним некоторые соотношения, используемые выше. Укажем, чему равна ковариантная производная:

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + i[A_\mu,\varphi] \tag{13.43}$$

$$D_\mu\varphi^+ = \partial_\mu\varphi^+ + i[A_\mu,\varphi^+] \tag{13.44}$$

$$D_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi + i[A_\mu,\Psi] \tag{13.45}$$

Разберем антикоммутатор:

$$\{\bar{\lambda},(1+\gamma_5)\Psi\} \equiv \bar{\lambda}^a(1+\gamma_5)\Psi_a + (1+\gamma_5)\Psi_a\cdot\bar{\lambda}^a = e\bar{\lambda}^{Aa}t^A(1+\gamma_5)e\Psi^B_a t^B+$$

$$+(1+\gamma_5)e\Psi^B_a t^B\cdot\bar{\lambda}^{Aa}t^A = e^2\bar{\lambda}^A(1+\gamma_5)\Psi^B(t^At^B - t^Bt^A) \tag{13.46}$$

Все можно переписать через структурные константы:

$$\{\bar{\lambda},(1+\gamma_5)\Psi\} = ie^2\bar{\lambda}^A(1+\gamma_5)\Psi^B f^{ABC}t^C =$$

$$= ie^2\bar{\Psi}^B(1+\gamma_5)\lambda^A f^{ABC}t^C = -ie^2\bar{\Psi}^A(1+\gamma_5)\lambda^B f^{ABC}t^C = -\{\bar{\Psi},(1+\gamma_5)\lambda\} \tag{13.47}$$

Следующая цель – записать действие так, чтобы спиноры λ и Ψ входили в него симметричным образом.

$$tr(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu D_\mu\Psi) = tr(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi + i[A_\mu,\Psi]) = \frac{1}{2}\partial_\mu tr(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi)+$$

$$+tr(e\bar{\Psi}^At^A\cdot\gamma_5\gamma^\mu[eA^B_\mu t^B, e\Psi^Ct^C]) = ie^3\bar{\Psi}^A\gamma_5\gamma^\mu\Psi^C A^B_\mu tr(t^A\cdot if^{ABC}t^D) = \tag{13.48}$$

$$= -\frac{e^3}{2}f^{ABC}\bar{\Psi}^A\gamma_5\gamma^\mu\Psi^C A^B_\mu = 0$$

Первое слагаемое может быть отброшено как четырехдивергенция. Можно сообразить, что майорановские спиноры могут быть переставлены местами и свернуты. Получили симметрию между λ и Ψ.

$$\frac{2}{e^2}tr(i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)[\lambda,\varphi]) = \frac{2}{e^2}i\sqrt{2}tr(e\bar{\Psi}^A t^A(1-\gamma_5)[e\lambda^B t^B, e\varphi^C t^C] = -\sqrt{2}f^{ABC}\cdot e\bar{\Psi}^A(1-\gamma_5)\lambda^B\varphi^C \tag{13.49}$$

Аналогично:

$$\frac{2}{e^2}tr(-i\sqrt{2}\varphi^+\{\bar{\lambda},(1+\gamma_5)\Psi\}) = \\ = \sqrt{2}f^{ABC}\varphi^{*A}\bar{\lambda}^B(1+\gamma_5)\Psi^C \tag{13.50}$$

$$\frac{2}{e^2}tr(i\sqrt{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)[\lambda,\varphi]) = -\sqrt{2}f^{ABC}\cdot e\bar{\Psi}^A(1-\gamma_5)\lambda^B\varphi^C = \\ = \frac{2}{e^2}tr(i\sqrt{2}\{\bar{\Psi},(1-\gamma_5)\lambda\}) = -\frac{2}{e^2}tr(i\sqrt{2}\varphi\{\bar{\lambda},(1-\gamma_5)\Psi\}) \tag{13.51}$$

Отличие на знак связано с иной расстановкой индексов.

Перепишем действие:

$$S = \frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2 + D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu + f^+f + \\ +\varphi^+[D,\varphi] - i\sqrt{2}\varphi\{\bar{\lambda},(1-\gamma_5)\Psi\} - i\sqrt{2}\varphi^+\{\lambda,(1+\gamma_5)\Psi\}\} \tag{13.52}$$

Симметрия пока еще не видна. Сделаем так, чтобы она стала явной. Введем новые обозначения:

$$\begin{cases}\Psi_2 \equiv \lambda \\ \Psi_2 \equiv \Psi\end{cases} \tag{13.53}$$

Тогда:

$$+i\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu = i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i,\ i = 1,2 \tag{13.54}$$

Происходят вращения:

$$\begin{pmatrix}\lambda \\ \Psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix} \tag{13.55}$$

α – вещественный числовой параметр. Тогда:

$$S = \frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i + \frac{1}{2}D^2 + D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi + f^+f + \\ +\varphi^+[D,\varphi] - i\sqrt{2}\varphi\{\bar{\lambda},(1-\gamma_5)\Psi\} - i\sqrt{2}\varphi^+\{\lambda,(1+\gamma_5)\Psi\}\} \tag{13.56}$$

$$\{\bar{\lambda},(1-\gamma_5)\Psi\} = \{\bar{\Psi},(1+\gamma_5)\lambda\} = \frac{1}{2}(\{\bar{\lambda},(1-\gamma_5)\Psi\} -$$

$$-\{\bar{\Psi},(1-\gamma_5)\lambda\})=\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\{\bar{\Psi}_i,(1-\gamma_5)\Psi_j\} \tag{13.57}$$

Тогда действие:

$$S=\frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}+i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i+\frac{1}{2}D^2+D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi+f^+f+$$

$$+\varphi^+[D,\varphi]-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi\{\bar{\lambda},(1-\gamma_5)\Psi\}-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi^+\{\lambda,(1+\gamma_5)\Psi\}\} \tag{13.58}$$

Теперь инвариантность относительно группы $SO(2)$ очевидна. Вторая суперсимметрия следует из симметрии λ и Ψ. При $\alpha=\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \Psi\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \Psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi\\ -\lambda\end{pmatrix} \tag{13.59}$$

Выражения для изменений:

$$\delta A^A_\mu=-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_1\gamma_\mu-\lambda^A-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\Psi^A=-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_i\gamma_\mu\Psi^A_i \tag{13.60}$$

$$\delta\Psi^A_i=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon_iF^A_{\mu\nu}-\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon_iD^A-\varepsilon_{ij}(Ref^A+i\gamma_5Imf^A)\varepsilon_j+$$

$$+i\varepsilon_{ij}(ReD_\mu\varphi^A+i\gamma_5ImD_\mu\varphi^A)\gamma^\mu\varepsilon_j \tag{13.61}$$

$$\delta D^A=\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_i\gamma^\mu\gamma_5D_\mu\Psi^A_i \tag{13.62}$$

$$\delta\varphi^A=\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_i(1+\gamma_5)\Psi^A_j \tag{13.63}$$

$$\delta f^A=-i\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_i\gamma^\mu(1+\gamma_5)D_\mu\Psi^A_j-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_i(1-\gamma_5)[\Psi_i\varphi]^A \tag{13.64}$$

Получили преобразования суперсимметрии и действие, которое еще необходимо упростить. Для этого необходимо исключить вспомогательные поля: f и D. Уравнение движения:

$$f=0 \tag{13.65}$$

$$tr(\varphi^+[D,\varphi])=tr(D[\varphi,\varphi^+]) \tag{13.66}$$

Поэтому

$$0=D+[\varphi,\varphi^+] \tag{13.67}$$

Выражение для действия модифицируется:

$$S=\frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}+i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i+D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi-\frac{1}{2}[\varphi,\varphi^+]^2-$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi\{\bar{\lambda},(1-\gamma_5)\Psi\}-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi^+\{\lambda,(1+\gamma_5)\Psi\}\} \tag{13.68}$$

Разложим φ на вещественную и мнимую части:

$$\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(P+iS) = e\varphi^A t^A \tag{13.69}$$

$$\varphi^A = \frac{1}{\sqrt{2}}(P^A+iS^A) \tag{13.70}$$

Причем $P^A, S^A \in Re$. Перепишем действие в терминах P и S.

$$tr(D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi) = tr[D_\mu(P-iS)D^\mu(P+iS)] = \frac{1}{2}tr((D_\mu P)^2+(D_\mu S)^2) \tag{13.71}$$

Тогда:

$$S = \frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i\frac{1}{2}tr((D_\mu P)^2+(D_\mu S)^2) - \frac{1}{2}[\varphi,\varphi^+]^2-$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi\{\bar{\lambda},(1-\gamma_5)\Psi\} - \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi^+\{\lambda,(1+\gamma_5)\Psi\}\} \tag{13.72}$$

$$[\varphi,\varphi^+] = \frac{1}{2}[P+iS,P-iS] = \frac{1}{2}(i[S,P]-i[P,S]) = -i[P,S] \tag{13.73}$$

Снова перепишем действие:

$$S = \frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i\frac{1}{2}tr((D_\mu P)^2+(D_\mu S)^2) + \frac{1}{2}[P,S]^2-$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi\{\bar{\lambda},(1-\gamma_5)\Psi\} - \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi^+\{\lambda,(1+\gamma_5)\Psi\}\} \tag{13.74}$$

Выпишем Юкавские слагаемые:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\{\bar{\Psi}_i,(1-\gamma_5)\Psi_j\}\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi^+\{\bar{\Psi}_i,(1+\gamma_5)\Psi_j\} = \frac{1}{2}(P+iS)\{\bar{\Psi}_i,(1-\gamma_5)\Psi_j\}+$$

$$+\frac{1}{2}(P-iS)\{\bar{\Psi}_i(1+\gamma_5)\Psi_j\} = P\{\bar{\Psi}_i,\Psi_j\} - iS\{\bar{\Psi}_i,\gamma_5\Psi_j\} \tag{13.75}$$

Последнее слагаемое нужно домножить на $-i\varepsilon_{ij}$.

Тогда получим выражение для действия:

$$S = \frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i\frac{1}{2}tr((D_\mu P)^2+(D_\mu S)^2)+$$

$$+\frac{1}{2}[P,S]^2 - i\varepsilon_{ij}P\{\bar{\Psi}_i,\Psi_j\} - iS\{\bar{\Psi}_i,\gamma_5\Psi_j\}\} \tag{13.76}$$

Инвариантность относительно группы $SO(2)$ очевидна.

Выпишем потенциал для скалярных полей и убедимся в том, что он является положительно определенным.

$$V(P,S) = -\frac{2}{e^2}tr\frac{1}{2}[P,S]^2 = -\frac{1}{e^2}tr([eP^Bt^B,eS^Ct^C]^2) = -\frac{1}{e^2}e^4tr((P^BS^Cif^{ABC}t^A)^2) =$$

$$= e^2 P^B S^C f^{ABC} P^E S^F F^{EFD} tr(t^A t^D) = \frac{e^2}{2}(f^{ABC} P^B S^C)^2 \tag{13.77}$$

Потенциал положительно определен. У него есть так называемое плоское направление, то есть направление, в котором он не растет.

$$V(P, S = P) = \frac{e^2}{2}(f^{ABC} P^B P^C)^2 = 0 \tag{13.78}$$

Лекция 14. N=2 гипермультиплет и суперсимметричные теории с материей. N=4 суперсимметричная теория Янга-Миллса

Глава VI. Калибровочные теории с расширенной суперсимметрией. Продолжение

Уже изучили теорию с двумя суперсимметриями. В этот раз постараемся понять, можно ли организовать взаимодействие $N = 2$ суперсимметричной теории с полями материи.

N=2 гипермультиплет

Рассмотрим вначале теорию без калибровочных полей. В разделе, посвящённом алгебре суперсимметрии, уже были таблицы, например:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}, N = 2, \lambda_{min} = \lambda_0 - \frac{N}{2} = -\frac{1}{2} \tag{14.1}$$

Тогда

λ	1/2	0	-1/2
$n_{\textbf{сост}}$	2	4	2

В нижней строчке числа сочетания умножены на два. Такая таблица соответствует двум моделям Весса-Зумино. Есть два майорановских спинора Ψ_1, Ψ_2. Четыре степени свободы с нулевым спином могут быть интерпретированы как комплексные скаляры $\varphi_{1,2}$.

Пусть есть два скалярных киральных суперполя.

$$(1-\gamma_5)D_a\phi_{1,2} = 0 \tag{14.2}$$

$$\begin{cases} \phi_1 \in R \\ \phi_2 \in \bar{R} \end{cases} \tag{14.3}$$

Действие в массивном случае:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4d^4\theta(\phi_1^+\phi_1 + \phi_2^+\phi_2) + [\frac{1}{2}m\int d^4xd^2\theta\phi_2^T\phi_1 + \textbf{к.с.}] \tag{14.4}$$

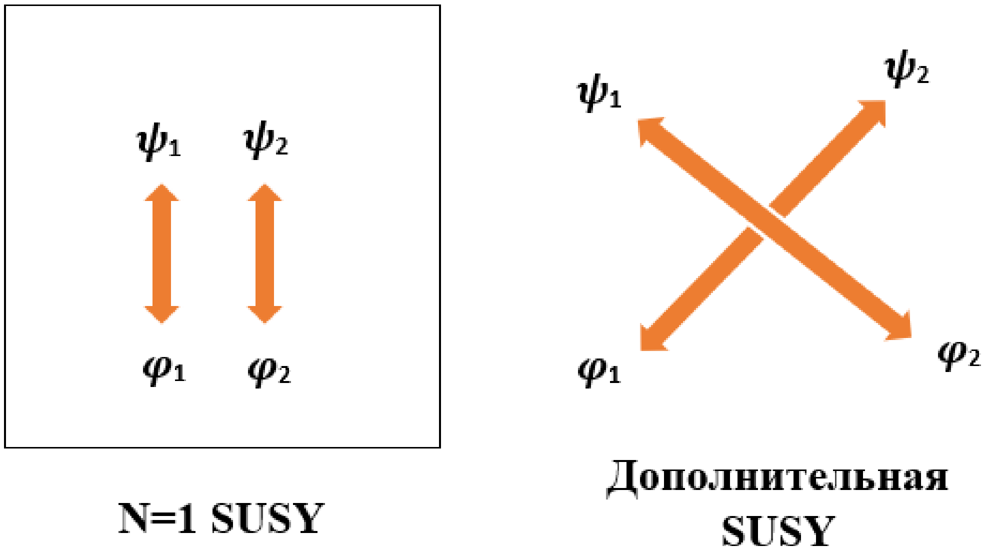

Рис. 14.1. Действие двух суперсимметрий друг с другом, перемешивание полей

Нужно убедиться в наличии глобальной калибровочной инвариантности.

$$\begin{cases} \phi_1 \longrightarrow \omega\phi_1 \\ \phi_2 \longrightarrow \omega^*\phi_2 = (\omega^{-1})^T\phi_2 \\ \omega \neq \omega(x) \\ \omega^+ = \omega^{-1} \\ \phi_1^+\phi_1 \longrightarrow \phi_1^+\omega^+\omega\phi_1 = \phi_1^+\phi_1 = inv \\ \phi_2^+\phi_2 \longrightarrow \phi_2^+\omega^T(\omega^{-1})^T\phi_2 = \phi_2^+\phi_2 = inv \\ \phi_2^T\phi_1 \longrightarrow \phi_2^T\omega^{-1}\omega\phi_1 = \phi_2^T\phi_1 = inv \end{cases} \tag{14.5}$$

Действие в терминах компонентных полей:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4d^4\theta(\phi_1^+\phi_1 + \phi_2^+\phi_2) + [\frac{1}{2}m\int d^4xd^2\theta\phi_2^T\phi_1 + \textbf{к.с.}] =$$

$$= \int d^4x\{\partial_\mu\varphi_1^+\partial^\mu\varphi_1 + i\bar{\Psi}_1\gamma^\mu\Psi_1 + f_1^+f_1 + \partial_\mu\varphi_2^+\partial^\mu\varphi_2 + \tag{14.6}$$

$$+i\bar{\Psi}_2\gamma^\mu\Psi_2 + f_2^+f_2 + m\varphi_2^Tf_1 + mf_2^T\varphi_1 + m\varphi_2^+f_1^* + mf_2^+\varphi_1^* - 2m\bar{\Psi}_2\Psi_1\}$$

По крайней мере одна суперсимметрия является явной (очевидной). Запишем преобразования:

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = \bar{\varepsilon}_1(1+\gamma_5)\Psi_1 \\ \delta[(1+\gamma_5)\Psi_1] = (1+\gamma_5)[\varepsilon_1 f_1 - i\gamma^\mu\partial_\mu\varphi_1\varepsilon_1] \\ \delta f_1 = -i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi_1 \\ \delta\varphi_2 = \bar{\varepsilon}_1(1+\gamma_5)\Psi_2 \\ \delta[(1+\gamma_5)\Psi_2] = (1+\gamma_5)[\varepsilon_1 f_2 - i\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\varphi_2] \\ \delta f_2 = -i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\Psi_2 \end{cases} \tag{14.7}$$

$N = 2$ суперсимметрия получается из Z_2 инвариантности, меняющей местами спиноры. Нужно при этом учитывать, что φ_1 и $(1+\gamma_5)\Psi_2$ лежат в разных представлениях калибровочной группы. Попробуем записать преобразования второй суперсимметрии:

$$\delta\varphi_1 = \bar{\varepsilon}_2(1+\gamma_5)\Psi_2 \tag{14.8}$$

Однако

$$\begin{cases} \phi_1 \in R \\ \phi_2 \in \bar{R} \end{cases} \tag{14.9}$$

$$\begin{cases} (1+\gamma_5)\Psi_1, \varphi_1 \in R \\ (1+\gamma_5)\Psi_2, \varphi_2 \in \bar{R} \end{cases} \tag{14.10}$$

Значит, нужна какая-то модификация:

$$\delta\varphi_1^* = \bar{\varepsilon}_2(1+\gamma_5)\Psi_2 \tag{14.11}$$

Берем комплексное сопряжение:

$$\delta\varphi_1 = \bar{\varepsilon}_2(1-\gamma_5)\Psi_2 \tag{14.12}$$

Отсюда очевидно, что нужно сделать преобразование:

$$\begin{cases} \Psi_1 \longleftrightarrow \Psi_2 \\ \varphi_1 \longleftrightarrow \varphi_1^* \\ \varphi_2 \longleftrightarrow \varphi^* \\ f_1 \longleftrightarrow f_1^* \\ f_2 \longleftrightarrow f_2^* \end{cases} \tag{14.13}$$

Такая замена оставляет действие инвариантным. Запишем соответствующие преобразования и теорию, инвариантную относительно двух суперсимметрий.

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = \bar{\varepsilon}_2(1-\gamma_5)\Psi_2 \\ \delta[(1+\gamma_5)\Psi_1] = (1+\gamma_5)[\varepsilon_2 f_2^* - i\gamma^\mu\partial_\mu\varphi_2^*\varepsilon_2] \\ \delta f_1 = -i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\Psi_2 \\ \delta\varphi_2 = \bar{\varepsilon}_2(1-\gamma_5)\Psi_1 \\ \delta[(1+\gamma_5)\Psi_2] = (1+\gamma_5)[\varepsilon_2 f_2^* - i\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\varphi_1^*] \\ \delta f_2 = -i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\Psi_1 \end{cases} \tag{14.14}$$

Получилась простая теория, которая инварианта относительно преобразований суперсимметрии. В каждой формуле все слагаемые одинаково меняются при калибровочных преобразованиях. $N=2$ гипермультиплет – это совокупность скаляров и спиноров, образующих $N=2$ суперсимметричную теорию. Это самый простой вариант, но наиболее интересен вариант с калибровочными полями.

N=2 суперсимметричные калибровочные теории с полями материи

Необходимо организовать взаимодействие $N=2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с гипермультиплетом, рассмотренным ранее. $N=2$ суперсимметрияная теория Янга-Миллса:

$$S_{N=2(SYM)} = \frac{1}{2e^2}Retr\int d^4xd^2\theta W_a C^{ab}W_b + \frac{1}{2e^2}tr\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi e^{-2V} \tag{14.15}$$

Добавим гипермультиплет.

$$S_{N=2(SYM)} = \frac{1}{2e^2}Retr\int d^4xd^2\theta W_a C^{ab}W_b + \frac{1}{2e^2}tr\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi e^{-2V} +$$
$$+\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta(\phi_1^+e^{2V}\phi_1 + \phi_2^+e^{-2V^T}\phi_2) + [\int d^4xd^2\theta\frac{1}{2}m\phi_2^T\phi_1 + \text{к.с.}] \tag{14.16}$$

где $V = eV^AT^A$, T^A – генераторы R. Теория будет инварианта только относительного одного преобразования суперсимметрии. В чем же дело? Если посмотреть на $(\phi_1^+e^{2V}\phi_1 + \phi_2^+e^{-2V^T}\phi_2)$, то можно заметить Юкавское слагаемое $-i\sqrt{2}\varphi_1^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi_1$. В действие нужно добавить слагаемое, которое сделает симметрию между λ и Ψ:

$$S_{N=2(SYM)} = \frac{1}{2e^2}Retr\int d^4xd^2\theta W_a C^{ab}W_b + \frac{1}{2e^2}tr\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi e^{-2V} +$$

$$+\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta(\phi_1^+e^{2V}\phi_1+\phi_2^+e^{-2V^T}\phi_2)+[\int d^4xd^2\theta(\frac{1}{2}m\phi_2^T\phi_1+C\cdot\phi_2^T\phi\phi_1)+\text{к.с.}] \quad (14.17)$$

C – безразмерная постоянная, необходимость введения будет видна позже, также будет найдено ее численное значение. $N=1$ суперсимметрия очевидна. Убедимся, что действие является калибровочно инвариантным. Напишем вид соответствующих преобразований. Локальная калибровочная инвариантность записывается в терминах суперполей:

$$\begin{cases} e^{2V}\longrightarrow e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda} \\ \phi\longrightarrow e^{i\Lambda}\phi e^{-i\Lambda} \\ \phi_1\longrightarrow e^{i\Lambda}\phi_1 \\ \phi_2\longrightarrow e^{-i\Lambda^T}\phi_2 \end{cases} \quad (14.18)$$

Проверка инвариантности нетривиального слагаемого:

$$\phi_2^T\phi\phi_1\longrightarrow\phi_2^Te^{-i\Lambda}\cdot e^{i\Lambda}\phi e^{-i\Lambda}e^{i\Lambda}\phi_1=inv \quad (14.19)$$

Данная теория действительно является калибровочно инвариантной.

Остается написать, чему равна постоянная C. Нужно провести вычисление в терминах компонентных полей. Вспомним, что можно записать

$$\int d^4xd^2\theta\Phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta)=\int d^4xd^2\theta\Phi(y^\mu\longrightarrow x^\mu,(1+\gamma_5)\theta) \quad (14.20)$$

$$\int d^4xd^2\theta\phi_2^T\phi\phi_1=\int d^4xd^2\theta\{\varphi_2^T(x)\bar\Psi_2(1+\gamma_5)\theta+\frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f_2^T\}\cdot\{\varphi+\bar\theta(1+\gamma_5)\Psi+$$
$$+\frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f\}\cdot\{\varphi_1+\bar\theta(1+\gamma_5)\Psi_1+\frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f_1\}=2\int d^4x\{f_2^T\varphi\varphi_1+ \quad (14.21)$$
$$+\varphi_2^Tf\varphi_1+\varphi_2^T\varphi f_1+\bar\Psi_2(1+\gamma_5)\varphi\Psi_1-\varphi_2^T\bar\Psi(1+\gamma_5)\Psi_1-\bar\Psi_2(1+\gamma_5)\Psi\varphi_1\}$$

Интегралы подобного типа вычисляются таким образом:

$$\int d^2\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\theta=4 \quad (14.22)$$

Также необходимо воспользоваться тождеством Фирца:

$$(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)=-\frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta(1+\gamma_5) \quad (14.23)$$

$$C\cdot\int d^4xd^2\theta\phi_2^T\phi\phi_1=2C\int d^4x\{f_2^T\varphi\varphi_1+\varphi_2^Tf\varphi_1+\varphi_2^T\varphi f_1-$$
$$-\bar\Psi_2(1+\gamma_5)\varphi\Psi_1-\varphi_2^T\bar\Psi(1+\gamma_5)\Psi_1-\bar\Psi_2(1+\gamma_5)\Psi\varphi_1\} \quad (14.24)$$

Следующий шаг – определить константу C. Для этого нужно сравнить слагаемые, содержащие спиноры λ и Ψ.

$$e^{2V} : -i\sqrt{2}\varphi_1^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi_1 \tag{14.25}$$

Можно заметить, что

$$C \equiv \pm\frac{i}{\sqrt{2}} \tag{14.26}$$

Разницы в выборе знака в реальности нет, пусть в наших обозначениях:

$$C \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} \tag{14.27}$$

Тогда:

$$S = \frac{1}{2e^2}Retr\int d^4xd^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2}tr\int d^4xd^4\theta\phi^+e^{2V}\phi e^{-2V} + \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\cdot$$

$$\cdot(\phi_1^+e^{2V}\phi_1 + \phi_2^+e^{-2V^T}\phi_2) + [\int d^4xd^2\theta(\frac{1}{2}m\phi_2^T\phi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\phi_2^T\phi\phi_1) + \textbf{к.с.}] \tag{14.28}$$

Запишем в терминах компонентных полей:

$$S = \frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2 + D_\mu\varphi^+D^\mu\varphi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi + f^+f +$$

$$+\varphi^+[D,\varphi] + i\sqrt{2}\varphi\{\bar{\Psi},(1-\gamma_5)\lambda\} - i\sqrt{2}\varphi^+\{\bar{\lambda},(1+\gamma_5)\Psi\}\} + \int d^4x\{D_\mu\varphi_1^+D^\mu\varphi_1 +$$

$$+i\bar{\Psi}_1(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\Psi_1 + f^+f + \varphi_1^+D\varphi_1 + i\sqrt{2}\bar{\Psi}_1(1-\gamma_5)\lambda\varphi_1 - i\sqrt{2}\varphi_1^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi_1 +$$

$$+D_\mu\varphi_2^+D^\mu\varphi_2 + i\bar{\Psi}_2(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\Psi_2 + f_2^+f_2 - \varphi_2^+D^T\varphi_2 - i\sqrt{2}\bar{\Psi}_2(1-\gamma_5)\lambda^T\varphi_2 + \tag{14.29}$$

$$+i\sqrt{2}\varphi_2^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\Psi_2 + m(\varphi_2^Tf_1 + f_2^T\varphi_1 + \varphi_2^+f_1^* + f_2^+\varphi_1^* - 2\bar{\Psi}_2\Psi_1) + i\sqrt{2}(\varphi_2^T\varphi f_1 +$$

$$+\varphi_2^Tf\varphi_1 + f_2^T\varphi\varphi_1 - \bar{\Psi}_2\varphi(1+\gamma_5)\Psi_1 - \bar{\Psi}_2(1+\gamma_5)\Psi\varphi_1 - \varphi_2^T\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi_1) -$$

$$-i\sqrt{2}(f_1^+\varphi^+\varphi_2^* + \varphi_1^+f\varphi_2^* + \varphi_1^+\varphi^+f_2^* - \bar{\Psi}_1(1+\gamma_5)\varphi^+\Psi_2 -$$

$$-\varphi_1^+\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi_2 - \bar{\Psi}_1(1-\gamma_5)\Psi\varphi_2^*)\}$$

Действие обладает $N=2$ суперсимметрией. Для окончательной записи данного выражения нужно исключить вспомогательные поля на уравнениях движения.

N=4 суперсимметричная теория Янга-Миллса

N=4 суперсимметричная теория Янга-Миллса знаменита тем, что во всех порядках теории возмущений отсутствует ультрафиолетовые расходимости, то есть она не противоречит квантовой теории поля. Попробуем понять, как строить такую теорию.

$$\lambda_0 = 1, N = 4, \lambda_{min} = \lambda_0 - \frac{N}{2} = -1 \tag{14.30}$$

Тогда

λ	1	1	0	-1	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	4	6	4	1

Удобно представить эту таблицу двумя различными способами:

λ	1	1	0	-1	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	4	6	4	1

=

λ	1	1	0	-1	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	1	0	1	1

+3

λ	-1	0	1
$n_{\textbf{сост}}$	1	2	1

Первая табличка в сумме соответствует $N = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, а вторая – $N = 2$ гипермультиплет (три модели Весса-Зумино).

λ	1	1	0	-1	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	4	6	4	1

=

λ	1	1	0	-1	-1
$n_{\textbf{сост}}$	1	2	2	2	1

+

λ	-1	0	1
$n_{\textbf{сост}}$	2	4	2

Каждая из 4 суперсимметрий перемешивает A_μ со своими спинорами. Очевидно, что это возможно только если все поля материи лежат в присоединенном представлении.

Теорию с четырьмя суперсимметриями следует искать среди теорий с двумя суперсимметриями:

$$N = 2SYM + \textbf{гипермультиплет} \tag{14.31}$$

$$S_{N=2} = \frac{1}{2e^2} Re\,tr \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} tr \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi e^{-2V} +$$

$$+\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta (\phi_1^+ e^{2V}\phi_1 + \phi_2^+ e^{-2V^T}\phi_2) + [\int d^4x d^2\theta (\frac{1}{2} m \phi_2^T \phi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_2^T \phi \phi_1) + \textbf{к.с.}] \tag{14.32}$$

Для начала нужно убрать массовое слагаемое $\frac{1}{2} m\phi_2^T \phi_1$. Затем нужно $\phi_1 \in Adj, \phi_2 \in Adj$. Генераторы присоединенного представления:

$$(T^A_{Adj})_{BC} = -if^{ABC} \tag{14.33}$$

$$(T^A_{\bar{Adj}})_{BC} = -(T^A_{Adj})_{CB} = -(if^{ABC}) = -iF^{ABC} = (T^A_{Adj})_{BC} \tag{14.34}$$

Представления совпадают, значит черта над Adj не нужна. Необходимо сделать следующий переход:

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{1,2} \\ \dots \\ \phi_{1,n} \end{pmatrix} \longrightarrow \phi_1 = e\phi_1^A t^A \tag{14.35}$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_{2,1} \\ \phi_{2,2} \\ \dots \\ \phi_{2,n} \end{pmatrix} \longrightarrow \phi_2 = e\phi_2^A t^A \tag{14.36}$$

Здесь $n = dimG$ для Adj. Тогда действие может быть записано так:

$$S_{N=4} = \frac{1}{2e^2} Retr \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} tr \int d^4x d^4\theta (\phi^+ e^{2V} \phi e^{-2V} +$$
$$+ \phi_2^+ e^{2V} \phi_2 e^{-2V}) + \frac{2}{e^2} tr \int d^4x d^2\theta \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \phi_2 [\phi, \phi_1] + \textbf{к.с.} \tag{14.37}$$

Лекция 15. N=4 суперсимметричная теория Янга-Миллса

Глава VI. Калибровочные теории с расширенной суперсимметрией. Продолжение

N=4 суперсимметричная теория Янга-Миллса. Продолжение

Начали изучать одну из наиболее интересных суперсимметричных моделей – частный случай теории с $N = 2$ симметрией, а именно $N = 4$ суперсимметричную теорию Янга-Миллса. В терминах $N = 1$ суперполей действие выглядит следующим образом:

$$S_{N=4} = \frac{1}{2e^2} Retr \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} tr \int d^4x d^4\theta (\phi^+ e^{2V} \phi e^{-2V} +$$

$$+\phi_2^+ e^{2V} \phi_2 e^{-2V}) + \frac{2}{e^2} tr \int d^4x d^2\theta \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \phi_2 [\phi, \phi_1] + \textbf{к.с.} \tag{15.1}$$

Сделаем простейшую модификацию: $\phi \longrightarrow \phi_3$. Введем суперполе

$$(1-\gamma_5) D_a \phi_i = 0, \; i = 1,2,3 \tag{15.2}$$

$$\phi_i \equiv e \phi_i^A t^A \tag{15.3}$$

Тогда:

$$S_{N=4} = \frac{1}{2e^2} Retr \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} tr \int d^4x d^4\theta (\phi_i^+ e^{2V} \phi_i e^{-2V} +$$

$$+ \frac{i}{3\sqrt{2}e} tr \int d^4x d^2\theta \varepsilon_{ijk} \phi_i [\phi_j, \phi_k] + \textbf{к.с.} \tag{15.4}$$

Последнее слагаемое можно написать в виде, где очевидна SO(3) симметрия.

$$tr(\phi_i[\phi_j, \phi_k]) = tr([\phi_i, \phi_j]\phi_k) = tr([\phi_k, \phi_i]\phi_j) \tag{15.5}$$

Знак не меняется, так как

$$\varepsilon_{231} = \varepsilon_{123} = 1 \tag{15.6}$$

Есть явная $N = 1$ суперсимметрия.

Цель – увидеть, что действие инвариантно относительно четырех суперсимметрий. Одна суперсимметрия заведомо есть, нужно убедиться в инвариантности относительно SO(4) (перемешивает спинорные поля).

Запишем действие в терминах компонентных полей.

$$S = \frac{2}{e^2} tr \int d^4x \{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda} D_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 + D_\mu \varphi_i^+ D^\mu \varphi_i + i\bar{\Psi}_i \gamma^\mu D_\mu \Psi_i + f_i^+ + f_i +$$

$$+ \varphi_i^+ [D, \varphi_i] + i\sqrt{2} \varphi_i \{ \bar{\Psi}_i, (1-\gamma_5)\lambda \} - i\sqrt{2} \varphi_i^+ \{ \bar{\lambda}, (1+\gamma_5)\Psi_i \} + \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} f_i [\varphi_j, \varphi_k] - \tag{15.7}$$

$$\frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i \{ \bar{\Psi}_j, (1+\gamma_5)\Psi_k + \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} f_i^+ [\varphi_j^+, \varphi_k^+] - \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i^+ \{ \bar{\Psi}_j, (1-\gamma_5)\Psi_k \} \}$$

$$\phi = \varphi(y) + \bar{\theta}(1-\gamma_5)\Psi(y) + \frac{1}{2} \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y) \tag{15.8}$$

Тождество Фирца:

$$(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5) = -\frac{1}{2}(1+\gamma_5) \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \tag{15.9}$$

Следующий шаг – исключение вспомогательных полей. У нас есть два вспомогательных поля: D и f. Исключим первое поле.

$$tr(\varphi_i^+ [D, \varphi_i]) = tr(D, [\varphi_i, \varphi_i^+]) \tag{15.10}$$

$$0 = D + [\varphi_i, \varphi_i^+] \tag{15.11}$$

Тогда:

$$S = \frac{2}{e^2} tr \int d^4x \{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda} D_\mu \lambda + D_\mu \varphi_i^+ D^\mu \varphi_i + i\bar{\Psi}_i \gamma^\mu D_\mu \Psi_i - \frac{1}{2} [\varphi_i, \varphi_i^+]^2$$

$$+ i\sqrt{2} \varphi_i \{ \bar{\Psi}_i, (1-\gamma_5)\lambda \} - i\sqrt{2} \varphi_i^+ \{ \bar{\lambda}, (1+\gamma_5)\Psi_i \} + \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} f_i [\varphi_j, \varphi_k] - \tag{15.12}$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i \{ \bar{\Psi}_j, (1+\gamma_5)\Psi_k + \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} f_i^+ [\varphi_j^+, \varphi_k^+] - \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i^+ \{ \bar{\Psi}_j, (1-\gamma_5)\Psi_k \} \}$$

Осталось вспомогательное поле f. Запишем уравнения движения.

$$0 = f_i^+ + \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} [\varphi_j, \varphi_k] \tag{15.13}$$

$$0 = f_i + \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} [\varphi_j^+, \varphi_k^+] \tag{15.14}$$

Необходимо вычислить $-f_i^+ f_i$:

$$-f_i^+ f_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} [\varphi_j, \varphi_k] \varepsilon_{imn} [\varphi_m^+, \varphi_n^+] = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) \frac{1}{2} [\varphi_j, \varphi_k][\varphi_m^+, \varphi_n^+] \tag{15.15}$$

$$S = \frac{2}{e^2} tr \int d^4x \{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda} D_\mu \lambda + i\bar{\Psi}_i \gamma^\mu D_\mu \Psi_i + D_\mu \varphi_i^+ D^\mu \varphi_i + [\varphi_j, \varphi_k] - [\varphi_i^+, \varphi_j^+] -$$

$$-\frac{1}{2}[\varphi_i,\varphi_i^+]^2+i\sqrt{2}\varphi_i\{\bar{\Psi}_i,(1-\gamma_5)\lambda\}-i\sqrt{2}\varphi_i^+\{\bar{\lambda},(1+\gamma_5)\Psi_i\}+\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}f_i[\varphi_j,\varphi_k]- \tag{15.16}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\varphi_i\{\bar{\Psi}_j,(1+\gamma_5)\Psi_k-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\varphi_i^+\{\bar{\Psi}_j,(1-\gamma_5)\Psi_k\}\}$$

В этом действии есть явная SO(3) симметрия.

Следующий шаг – необходимо убедиться в SO(4) инвариантности. Сделаем вспомогательную процедуру – перепишем поля φ.

$$\varphi_i=e\varphi_i^At^A\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(P_{ii}S_i) \tag{15.17}$$

$$\varphi_i^A=\frac{1}{\sqrt{2}}(P_i^A+iS_i^A) \tag{15.18}$$

P_i^A,S_i^A – вещественные.

$$tr(D_\mu\varphi_i^+D^\mu\varphi_i)=\frac{1}{2}tr(D_\mu(P_i^A-iS_i^A)\cdot D^\mu(P_i^A+iS_i^A))=\frac{1}{2}(D_\mu P_i)^2+\frac{1}{2}(D_\mu S_i)^2 \tag{15.19}$$

Добавим это в действие:

$$S=\frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+i\bar{\lambda}D_\mu\lambda+i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i+\frac{1}{2}(D_\mu P_i)^2+\frac{1}{2}(D_\mu S_i)^2+[\varphi_j,\varphi_k][\varphi_i^+,\varphi_j^+]-$$

$$-\frac{1}{2}[\varphi_i,\varphi_i^+]^2+i\sqrt{2}\varphi_i\{\bar{\Psi}_i,(1-\gamma_5)\lambda\}-i\sqrt{2}\varphi_i^+\{\bar{\lambda},(1+\gamma_5)\Psi_i\}+\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}f_i[\varphi_j,\varphi_k]- \tag{15.20}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\varphi_i\{\bar{\Psi}_j,(1+\gamma_5)\Psi_k-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\varphi_i^+\{\bar{\Psi}_j,(1-\gamma_5)\Psi_k\}\}$$

$$tr[i\sqrt{2}\varphi_i\{\bar{\Psi}_i,(1+\gamma_5)\lambda\}+i\sqrt{2}\varphi_i^+\{\bar{\Psi}_i,(1+\gamma_5)\lambda\}] \tag{15.21}$$

$$\varphi_i^+=(e\varphi_i^At^A)^+=e\varphi_i^{*A}t^A=\frac{1}{\sqrt{2}}(P_i-iS_i) \tag{15.22}$$

С помощью этой формулы преобразуем след:

$$tr[i\sqrt{2}\varphi_i\{\bar{\Psi}_i,(1+\gamma_5)\lambda\}+i\sqrt{2}\varphi_i^+\{\bar{\Psi}_i,(1+\gamma_5)\lambda\}]=tr[i(P_i+iS_i)\{\bar{\Psi}_i,(1-\gamma_5)\lambda\}+$$

$$+i(P_i-iS_i)\{\bar{\Psi}_i,(1+\gamma_5)\lambda\}]=tr[2iP_i\{\bar{\Psi}_i,\lambda\}+2S_i\{\bar{\Psi}_i,\gamma_5\lambda\}] \tag{15.23}$$

Добавим это в действие:

$$S=\frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+i\bar{\lambda}D_\mu\lambda+i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i+\frac{1}{2}(D_\mu P_i)^2+\frac{1}{2}(D_\mu S_i)^2+$$

$$+[\varphi_j,\varphi_k][\varphi_i^+,\varphi_j^+]-\frac{1}{2}[\varphi_i,\varphi_i^+]^2+2iP_i\{\bar{\Psi}_i,\lambda\}+2S_i\{\bar{\Psi}_i,\gamma_5\lambda\}- \tag{15.24}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\varphi_i\{\bar{\Psi}_j,(1+\gamma_5)\Psi_k-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\varphi_i^+\{\bar{\Psi}_j,(1-\gamma_5)\Psi_k\}\}$$

Есть еще два юкавских слагаемых. Рассмотрим их.

$$tr[\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\frac{1}{\sqrt{2}}(P_{ii}S_i)\{\bar{\Psi}_j,(1+\gamma_5)\Psi_k\}-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\frac{1}{\sqrt{2}}(P_i-iS_i)\{\bar{\Psi}_j(1-\gamma_5)\Psi_k\}]=$$

$$=tr[-iP_i\{\bar{\Psi}_j,\Psi_k\}\varepsilon_{ijk}+S_i\{\bar{\Psi}_j,\gamma_5\Psi_k\}\varepsilon_{ijk}] \tag{15.25}$$

Добавим это в действие:

$$S=\frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}+i\bar{\lambda}D_\mu\lambda+i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i+\frac{1}{2}(D_\mu P_i)^2+\frac{1}{2}(D_\mu S_i)^2+$$

$$+[\varphi_j,\varphi_k][\varphi_i^+,\varphi_j^+]-\frac{1}{2}[\varphi_i,\varphi_i^+]^2+2iP_i\{\bar{\Psi}_i,\lambda\}+2S_i\{\bar{\Psi}_i,\gamma_5\lambda\}- \tag{15.26}$$

$$-i\varepsilon_{ijk}P_i\bar{\Psi}_j,\Psi_k\}+\varepsilon_{ijk}S_i\{\bar{\Psi}_j,\gamma_5\Psi_k\}\}$$

Остались потенциалы для скаляров. Они преобразуются наиболее сложно.

$$tr\{-dfrac12[\varphi_i,\varphi_i^+]^2+[\varphi_i,\varphi_j][\varphi_i^+,\varphi_j^+]\}=tr\{\frac{1}{2}[P_i,S_i]^2+\frac{1}{4}([P_i,P_j]-[S_i,S_j])^2+$$

$$+\frac{1}{4}([P_i,S_j]-[P_j,S_i])^2\}=tr\{\frac{1}{2}[P_i,S_i]^2+\frac{1}{4}[P_i,P_j]^2-\frac{1}{2}[P_i,P_j][S_i,S_j]+ \tag{15.27}$$

$$+\frac{1}{4}[S_i,S_j]^2+\frac{1}{2}[P_i,S_j]^2-\frac{1}{2}[P_i,S_j][P_j,S_i]\}$$

Первое слагаемое:

$$[\varphi_i,\varphi_i^+]=\frac{1}{2}[P_i+iS_i,P_i-iS_i]=-i[P_i,S_i] \tag{15.28}$$

Второе слагаемое:

$$[\varphi_i,\varphi_j]=\frac{1}{2}[P_i+iS_i,P_j+iS_j]=\frac{1}{2}([P_i,P_j]-[S_i,S_j])+\frac{i}{2}([P_i,S_j]-[P_j,S_i]) \tag{15.29}$$

Нужно преобразовать последнее слагаемое. Для этого нужно использовать известную формулу:

$$tr([A,B]C)=tr(A[B,C]) \tag{15.30}$$

$$-\frac{1}{2}[P_i,S_j][P_j,S_i]=-\frac{1}{2}tr(P_i[S_j[P_j,S_i]])=\frac{1}{2}tr(P_i[P_j[S_i,S_j]]+$$

$$+P_i[S_i[S_j,P_j]])=\frac{1}{2}tr([P_i,P_j][S_i,S_j]-[P_i,S_i]^2) \tag{15.31}$$

С учетом преобразований перепишем действие:

$$S=\frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}+i\bar{\lambda}D_\mu\lambda+i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu D_\mu\Psi_i+\frac{1}{2}(D_\mu P_i)^2+\frac{1}{2}(D_\mu S_i)^2+\frac{1}{2}[P_i,P_j]^2+$$

$$+\frac{1}{4}[S_i,S_j]^2+\frac{1}{2}[P_i,S_j]^2+2iP_i\{\bar{\Psi}_i,\lambda\}+2S_i\{\bar{\Psi}_i,\gamma_5\lambda\}-i\varepsilon_{ijk}P_i\bar{\Psi}_j,\Psi_k\}+\varepsilon_{ijk}S_i\{\bar{\Psi}_j,\gamma_5\Psi_k\}\} \tag{15.32}$$

Нужно подтвердить инвариантность относительно группы SO(4). Введем майорановский спинор:

$$\Psi_I = \begin{cases} \Psi_i, I = 1,2,3 \\ \lambda, I = 4 \end{cases} \tag{15.33}$$

Тогда:

$$S = \frac{2}{e^2} tr \int d^4x \{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda} D_\mu \lambda + i\bar{\Psi}_I \gamma^\mu D_\mu \Psi_I + \frac{1}{2}(D_\mu P_i)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu S_i)^2 + \frac{1}{2}[P_i, P_j]^2 +$$

$$+\frac{1}{4}[S_i, S_j]^2 + \frac{1}{2}[P_i, S_j]^2 + 2iP_i\{\bar{\Psi}_i, \lambda\} + 2S_i\{\bar{\Psi}_i, \gamma_5\lambda\} - i\varepsilon_{ijk}P_i\bar{\Psi}_j, \Psi_k\} + \varepsilon_{ijk}S_i\{\bar{\Psi}_j, \gamma_5\Psi_k\}\} \tag{15.34}$$

С остальным сложнее, у скаляров индекс пробегает значения от 1 до 3. Можно ли их представить как SO(4) тензоры? Оказывается, можно.

$$P_{IJ} = \begin{cases} \varepsilon_{ijk} P_k, I = i, J = j = 1,2,3 \\ -P_i, J = 4 \end{cases} \tag{15.35}$$

$$S_I J = \begin{cases} \varepsilon_{ijk} S_k \, I = i, J = j = 1,2,3 \\ S_i, J = 4 \end{cases} \tag{15.36}$$

Эти величины являются тензорами. Это эквивалентно следующим условиям:

$$S_{IJ} = \frac{1}{2}\varepsilon_{IJKL} S_{KL} \tag{15.37}$$

$$S_{IJ} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{IJKL} P_{KL} \tag{15.38}$$

Разница только в знаках. Докажем это условие самодуальности для S_{IJ}.

$$S_{i4} = S_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{i4kl} S_{kl} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{klm} S_m = \delta_{im} S_m = S_i \tag{15.39}$$

Для P_{IJ} будет аналогичное условие антисамодуальности.

$$\varepsilon_{ijk} S_k = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk4} S_{4k} + \varepsilon_{ij4k} S_{4k} = \varepsilon_{ijk} S_k \tag{15.40}$$

Теперь можно переписать юкавские слагаемые в SO(4)-инвариантном виде.

$$tr(S_{IJ}\{\bar{\Psi}_I, \gamma_5 \Psi_J\}) = tr(\varepsilon_{ijk} S_k \{\bar{\Psi}_i, \gamma_5 \Psi) + S_i\{\bar{\Psi}_i, \gamma_5\lambda\} - S_i\{\bar{\lambda}, \gamma_5 \Psi_i\} \tag{15.41}$$

Тогда:

$$S = \frac{2}{e^2} tr \int d^4x \{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda} D_\mu \lambda + i\bar{\Psi}_I \gamma^\mu D_\mu \Psi_I + \frac{1}{2}(D_\mu P_i)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu S_i)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}[P_i,P_j]^2+\frac{1}{4}[S_i,S_j]^2+\frac{1}{2}[P_i,S_j]^2+2iP_i\{\bar{\Psi}_i,\lambda\}+S_{IJ}\{\bar{\Psi}_I,\gamma_5\Psi_J\}- \\ -i\varepsilon_{ijk}P_i\bar{\Psi}_j,\Psi_k\}+\varepsilon_{ijk}S_i\{\bar{\Psi}_j,\gamma_5\Psi_k\}\} \tag{15.42}$$

Аналогично для слагаемых P_{IJ}.

$$tr(-iP_{IJ}\{\bar{\Psi}_I,\Psi_J\})=tr(-i\varepsilon_{ijk}P_k\{\bar{\Psi}_i,\bar{\Psi}_j\}+iP_i\{\bar{\Psi}_i,\lambda\}-iP_i\{\lambda,\Psi_i\}) \tag{15.43}$$

Тогда:

$$S=\frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+i\bar{\lambda}D_\mu\lambda+i\bar{\Psi}_I\gamma^\mu D_\mu\Psi_I+\frac{1}{2}(D_\mu P_i)^2+\frac{1}{2}(D_\mu S_i)^2+ \\ +\frac{1}{2}[P_i,P_j]^2+\frac{1}{4}[S_i,S_j]^2-iP_{IJ}\{\bar{\Psi}_I,\Psi_J\}+S_{IJ}\{\bar{\Psi}_I,\gamma_5\Psi_J\}- \\ -i\varepsilon_{ijk}P_i\bar{\Psi}_j,\Psi_k\}+\varepsilon_{ijk}S_i\{\bar{\Psi}_j,\gamma_5\Psi_k\}\} \tag{15.44}$$

Остались скаляры.

$$P_{IJ}^2=P_{ij}^2+P_{i4}^2P_{4i}^2=\varepsilon_{ijk}P_k\cdot\varepsilon_{ijl}P_l+P_i^2+P_i^2=2P_i^2+2P_i^2=4P_i^2 \tag{15.45}$$

$$(D_\mu P_i)^2=\frac{1}{4}(D_\mu P_{IJ})^2 \tag{15.46}$$

Тогда окончательное выражение для действия:

$$S=\frac{2}{e^2}tr\int d^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+i\bar{\lambda}D_\mu\lambda+i\bar{\Psi}_I\gamma^\mu D_\mu\Psi_I+\frac{1}{8}(D_\mu P_{IJ})^2+\frac{1}{8}(D_\mu S_{IJ})^2+ \\ +\frac{1}{64}[P_{IJ}P_{KL}]^2+\frac{1}{64}[S_{IJ}S_{KL}]^2+\frac{1}{32}[P_{IJ}S_{KL}]^2-iiP_{IJ}\{\bar{\Psi}_I,\Psi_J\}+S_{IJ}\{\bar{\Psi}_I,\gamma_5\Psi_J\}\} \tag{15.47}$$

Здесь есть явная SO(4) симметрия, поскольку все выражения, входящие в действия, являются тензорами. Однако здесь нет явной суперсимметрии, ее нужно проверять. Преобразования суперсимметрии на массовой поверхности:

$$\delta A_\mu=-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_4\gamma_\mu\Psi_4-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_1\gamma_\mu\Psi_2-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_3\gamma_\mu\Psi_3=-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_I\gamma_\mu\Psi_I \tag{15.48}$$

$$\delta P_{IJ}=\sqrt{2}(\bar{\varepsilon}_I\Psi_I-\bar{\varepsilon}_I\Psi_I-\varepsilon_{IJKL}\bar{\varepsilon}_K\Psi_K) \tag{15.49}$$

$$\delta S_{IJ}=i\sqrt{2}(\bar{\varepsilon}_I\gamma_5\Psi_J-\bar{\varepsilon}_J\gamma_5\Psi_I+\varepsilon_{IJKL}\bar{\varepsilon}_K\gamma_5\Psi_L) \tag{15.50}$$

$$\delta\Psi_I=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon_I F_{\mu\nu}+\frac{i}{\sqrt{2}}(D_\mu P_{IJ}-i\gamma_5 D_\mu S_{IJ})\gamma^\mu\varepsilon_J- \\ -\frac{i}{2\sqrt{2}}[P_{IJ}-i\gamma_5 S_{IJ},P_{JK}+i\gamma_5 S_{IJ}]\varepsilon_K \tag{15.51}$$

Условие самодуальности выполняется:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{IJKL}\delta P_{KL} = \sqrt{2}\varepsilon_{IJKL}\bar{\varepsilon}_K - \Psi_L - \sqrt{2}\varepsilon_{IJKL}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{KLMN}\bar{\varepsilon}_M\Psi_N =$$

$$= \sqrt{2}(\varepsilon_{IJKL}\bar{\varepsilon}_K\Psi_L - \bar{\varepsilon}_I\Psi_J + \bar{\varepsilon}_J\Psi_I) = -\delta P_{IJ} \tag{15.52}$$

Убедимся, что эти формулы дадут явную суперсимметрию при

$$\begin{cases} \varepsilon_4 \longrightarrow \varepsilon \\ \varepsilon_i = 0,\, i = 1,2,3 \end{cases} \tag{15.53}$$

$$\delta A_\mu = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda \tag{15.54}$$

Рассмотрим случай

$$\begin{cases} I = i \\ J = 4 \end{cases} \tag{15.55}$$

$$\delta(P_i) = \sqrt{2}(\bar{\varepsilon}\Psi_i) \tag{15.56}$$

Аналогично:

$$\delta S_i = \sqrt{2}(-i)\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi_i \tag{15.57}$$

Привычная суперсимметрия:

$$\delta\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta P_i + i\delta S_i) = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\Psi_i \tag{15.58}$$

Остается формула для $\delta\Psi_I$, рассмотрим случай $I = 4$:

$$\delta\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{2\sqrt{2}}[P_j + i\gamma_5 S_j, -P_j + i\gamma_5 S_j]\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2}}[P_j, S_j]\gamma_5\varepsilon \tag{15.59}$$

Раньше было выражение:

$$\delta\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\varepsilon - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon D \tag{15.60}$$

$$D = -[\varphi_i, \varphi_i^+] = -\frac{1}{2}[P_i + iS_i, P_I - iS_i] = i[P_i, S_i] \tag{15.61}$$

Действительно, получилась явная суперсимметрия.

Рассмотрим случай $I = 1,2,3$.

$$\delta\Psi_i = \frac{i}{\sqrt{2}}(-D_\mu P_i - i\gamma_5 D_\mu S_i)\gamma^\mu\varepsilon - \frac{i}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}[P_K - i\gamma_5 S_K, -P_j + i\gamma_5 S_j]\varepsilon \tag{15.62}$$

Закон преобразования выглядел следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(P+iS) \tag{15.63}$$

$$\frac{-i}{\sqrt{2}}(D_\mu P_i + i\gamma_5 D_\mu S_i)\gamma^\mu \varepsilon + \frac{1}{2}(f_i + f_i^+)\varepsilon + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_5(f_i - f_i^+)\varepsilon \tag{15.64}$$

Когда исключали вспомогательные поля, записывали выражения для f_i:

$$f_i^+ = -\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}[\varphi_j,\varphi_k] = -\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}[P_j+iS_j,P_k+iS_k] = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}([P_j,P_k]-[S_j,S_k]) \tag{15.65}$$

$$f_i^+ = -\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}[\varphi_j^+,\varphi_k^+] = -\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}([P_j,P_k]-[S_j,S_k]) - \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}[P_j,S_k] \tag{15.66}$$

Тогда:

$$\delta\Psi_i = \frac{i}{\sqrt{2}}(-D_\mu P_i - i\gamma_5 D_\mu S_i)\gamma^\mu\varepsilon - \frac{i}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}[P_K - i\gamma_5 S_K, -P_j + i\gamma_5 S_j]\varepsilon =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}(D_\mu P_i + i\gamma_5 D_\mu S_i)\gamma^\mu\varepsilon - \frac{i}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}([P_j,P_k]-[S_j,S_k])\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\gamma_5[P_j,S_k]\varepsilon \tag{15.67}$$

SO(4) симметрия свелась к явной суперсимметрии.

Лекция 16. Суперсимметрия на квантовом уровне

Глава V. Суперсимметрия на квантовом уровне

Особый интерес к суперсимметричным теориям связан с улучшенным по сравнению с несимметричным случаем ультрафиолетовым поведением. При вычислении квантовых поправок возникают расходимости, их существование – колоссальная проблема. Были разработаны перенормируемые теории, но проблему это не решило. Есть суперсимметричные теории, свободные от ультрафиолетовых расходимостей, однако они не описывают реальную физику элементарных частиц, они модельные. В терминах суперполей можно проквантовать теорию так же, как и в терминах обычных полей.

Причины улучшения ультрафиолетового поведения можно понять, если использовать суперполевое квантование. Его можно выполнить, сохраняя $N=1$ суперсимметрию как явную симметрию теории, записать выражение для производящего функционала и эффективного действия. Также можно построить и суперполевые правила Фейнмана.

Основной результат этого анализа следующий: любой вклад в эффективное действие может быть представлен как интеграл по полному пространству

$$\int d^4x d^4\theta \tag{16.1}$$

При этом расходимости являются локальными, благодаря чему все расходимости являются интегралами по полному суперпространству от локальных выражений.

Следствием является так называемая теорема о непенормировке суперпотенциала:
В N=1 суперсимметричных теориях отсутствуют расходящиеся квантовые поправки к суперпотенциалу.

Например, если

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^{*i}\phi_i + (\int d^4x d^2\theta (\frac{1}{4}m_0^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}\lambda_0^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k) + \textbf{к.с.}), \tag{16.2}$$

то нет расходимостей со структурой

$$\int d^4x d^2\theta m^{ij}\phi_i\phi_j \tag{16.3}$$

или

$$\lambda_0^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \tag{16.4}$$

Заметим, что можно представить интеграл в виде

$$\int d^4xd^2\theta\phi^2 = \int d^4xd^4\theta\phi\cdot\frac{1}{16\partial^2}\bar{D}(1+\gamma_5)D\phi \tag{16.5}$$

В этом выражении ∂^2 указывает на нелокальность, подынтегральное выражение является нелокальным.

$$\int d^4\theta = \int d^2\theta\int d^2\bar{\theta} = \int d^2\theta\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{16.6}$$

$$\bar{D}(1-\gamma_5)D = -\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \textbf{слагаемые, содержащие}\,\partial_\mu \tag{16.7}$$

Тогда:

$$\int d^4\theta = \int d^2\theta(-\frac{1}{4})\bar{D}(1+\gamma_5)D + \textbf{слагаемые, содержащие}\,\partial_\mu \tag{16.8}$$

Отсюда:

$$\int d^4xd^2\theta\phi^2 = \int d^4xd^4\theta\phi\cdot\frac{1}{16\partial^2}\bar{D}(1+\gamma_5)D\phi = \int d^4xd^2\theta(-\frac{1}{64\partial^2})\bar{D}(1-\gamma_5)D\cdot$$

$$\cdot\bar{D}(1+\gamma_5)D\phi = \int d^4xd^2\theta\frac{-1}{4}\bar{D}(1-\gamma_5)D[\phi\frac{\bar{D}(1+\gamma_5)D}{16\partial^2}\phi] = \tag{16.9}$$

$$= \int d^4xd^2\theta(-\frac{1}{64}\phi)\bar{D}(1-\gamma_5)D\bar{D}(1+\gamma_5)D\frac{1}{\partial^2}\phi$$

Воспользовались тождеством:

$$\bar{D}(1-\gamma_5)D\cdot\bar{D}(1+\gamma_5)D\phi = -64\partial^2\phi \tag{16.10}$$

Квантовые поправки к суперпотенциалу конечны, они не могут иметь расходимостей. Попробуем понять, почему $\frac{1}{\partial^2}$ – это нелокальная величина. Возьмем пространство (++++).

$$\partial_\mu^2\frac{1}{x^2} = \partial_\mu(-\frac{2x_\mu}{x^4}) = -\frac{2\cdot 4}{x^4} + \frac{2x_\mu\cdot 4x_\mu}{x^6} = 0 \tag{16.11}$$

$$\int d^4x\partial_\mu(-\frac{2x_\mu}{x^4}) = \oint dS_\mu\cdot\frac{-2x_\mu}{x^4} = -2\cdot 2\pi^2 = -2\pi^2 \tag{16.12}$$

$$\partial_\mu^2\frac{1}{x^2} = -4\pi^2\delta^4(x) \tag{16.13}$$

Рассмотрим уравнение

$$\partial_\mu^2\varphi(x) = j(x) \tag{16.14}$$

Решение:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\partial^2}j(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int d^4y\frac{1}{(x-y)^2}j(y) \tag{16.15}$$

$$\partial_x^2\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int d^4y(-4\pi^2)\delta^4(x-y)j(y) = j(x) \tag{16.16}$$

Действительно, получили решение уравнения. Оператор определяется значением j во всех остальных точках пространства, является не локальным.

$$\int d^4xd^2\theta\phi^2 = \int d^4xd^4\theta\phi\cdot\frac{1}{16\partial^2}\bar{D}(1+\gamma_5)D\phi \tag{16.17}$$

Расходимости всегда локальны, поэтому интеграл берется от локального выражения. Отсюда и получается $N=1$ теорема о неперенормировке, которая означает отсутствие расходящихся квантовых поправок.

Однако перенормировка потенциала не означает, что масса m^{ij} и юкавские константы λ^{ijk} не перенормируются в суперсимметричных теориях. Действительно, в теории имеются расходимости со структурой

$$\int d^4xd^4\theta\phi^{*i}\phi_i, \tag{16.18}$$

которые ликвидируются перенормировкой

$$\phi_i = (\sqrt{Z})_i^j\phi_{j,R} \tag{16.19}$$

$\sqrt{Z}$ – константа перенормировки. Поэтому с учетом перенормировки суперпотенциала

$$m^{ij} = (\sqrt{Z})_k^i(\sqrt{Z})_l^j m_0^{kl} \tag{16.20}$$

$$m_0^{ij}\phi_i\phi_j = m_0^{ij}(\sqrt{Z})_i^k(\sqrt{Z})_j^l\phi_{k,R}\phi_{l,R} \tag{16.21}$$

$$m_0^{ij}(\sqrt{Z})_i^k(\sqrt{Z})_j \equiv m^{kl}\phi_{k,R}\phi_{l,R} \tag{16.22}$$

$$m^{kl} = m_0^{ij}(\sqrt{Z})_i^k(\sqrt{Z})_j^l \tag{16.23}$$

$$\lambda^{mnp} = (\sqrt{Z})_i^m(\sqrt{Z})_j^n(\sqrt{Z})_k^p\lambda_0^{ijk} \tag{16.24}$$

Это означает, что перенормировка масс и юкавских констант в суперсимметричных теориях связана с перенормировкой киральных суперполей материи.

Заметим, что перенормируемые суперсимметричные теории получаются только если суперпотенциал не более чем кубичен по суперполям материи. В этом случае обычный потенциал будет не более чем четвертой степени по скалярным полям и в теории не будет размерных констант связи.

Рассмотрим теперь суперсимметричные калибровочные теории. Рассмотрим $N=1$. В случае, если калибровочная группа является простой, то

$$S = \frac{1}{2e_0^2}trRe\int d^4xd^2\theta W_aC^{ab}W_b + \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^{*i}(e^{2V})_i^j\phi_j +$$

$$+(\int d^4xd^2\theta(\frac{1}{4}m_0^{ij}\phi_i\phi_j+\frac{1}{6}\lambda_0^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k)+\textbf{к.с.}), \tag{16.25}$$

где предполагается, что массовые слагаемые и слагаемое с юкавским взаимодействием являются калибровочно инвариатными, например:

$$m_0^{ij}(T^A)_k^j+m_0^{kj}(T^A)_k^i=0 \tag{16.26}$$

$$\begin{cases} \phi_i \longrightarrow (e^{i\Lambda})_i^j\phi_j \\ e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda} \end{cases} \tag{16.27}$$

Получим ограничения.

$$\Lambda_i^j=e\Lambda^A(T^A)_i^j \tag{16.28}$$

$$m_0^{ij}\phi_i\phi_j \longrightarrow m_0^{ij}(e^{i\Lambda})_i^k(e^{i\Lambda})_j^l\phi_k\phi_l=m_0^{ij}(\delta_i^k+ie_0\Lambda^A(T^A)_i^k)(\delta_j^l+ie_0\Lambda^A(T^A)_j^l)\phi_k\phi_l=$$
$$=m_0^{ij}\phi_k\phi_l+ie_0\Lambda^A[m_0^{kj}(T^A)_j^l+m_0^{jl}(T^A)_j^k]\phi_k\phi_l=m_0^{ij}\phi_k\phi_j \tag{16.29}$$

Отсюда выражение в квадратных скобках должно равняться нулю (немного заменим индексы):

$$[m_0^{im}(T^A)_m^lj+m_0^{mj}(T^A)_m^i]=0 \tag{16.30}$$

Аналогично, калибровочная инвариантность юкавского слагаемого дает условие для λ:

$$\lambda_0^{ijm}(T^A)_m^k+\lambda_0^{imk}(T^A)_m^j+\lambda_0^{mjk}(T^A)_m^i=0 \tag{16.31}$$

Далее будем предполагать выполнение этих условий. Неявно будем предполагать, что аномалии в этой теории сокращаются, помня, что $N=1$ суперсимметричные теории киральны.

Обсудим квантовые свойства этой теории.

Как и в случае теорий без калибровочного суперполя, суперпотенциал не перенормируется, и перенормировка массы и юкавских констант связаны с перенормировкой ϕ_i теми же формулами, что и ранее. Формулы справедливы и для калибровочного случая

$$m_0^{ij}(\sqrt{Z})_i^k(\sqrt{Z})_j\equiv m^{kl}\phi_{k,R}\phi_{l,R} \tag{16.32}$$

$$\phi_i=(\sqrt{Z})_i^j\phi_j \tag{16.33}$$

$$\lambda^{mnp}=(\sqrt{Z})_i^m(\sqrt{Z})_j^n(\sqrt{Z})_k^p\lambda_0^{ijk} \tag{16.34}$$

Перенормируется ли

$$\frac{1}{2e_0^2}Retr\int d^4xd^2\theta W_aC^{ab}W_b? \tag{16.35}$$

Можно предположить, что расходящихся поправок нет, но это неверно. Это выражение может быть представлено в виде интеграла от локального выражения. Интегрирование осуществляется только по $d^2\theta$. Вспомним выражение для W_a:

$$W_a = \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}] \tag{16.36}$$

W – киральное скалярное суперполе:

$$(1-\gamma_5)D_a W_b = 0 \tag{16.37}$$

$$\begin{gathered}\int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b = \int d^4x d^2\theta \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}]C^{ab}W_b = \\ = \int d^4x d^2\theta(-\frac{1}{4}\bar{D}(1-\gamma_5)D)\cdot[-\frac{1}{8}e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}C^{ab}W_b] = \\ = \int d^4x d^2\theta(-\frac{1}{8}e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}C^{ab}W_b)\end{gathered} \tag{16.38}$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\frac{1}{2e_0^2}Retr\int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b = [W_b - \textbf{киральное суперполе}] = \\ = \frac{1}{64e_0^2}Retr\int d^4x d^2\theta \bar{D}(1-\gamma_5)D[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}\cdot C^{ab}W_b]\end{gathered} \tag{16.39}$$

W_b можно вынести в силу киральности.

При этом

$$\int d^2\bar{\theta} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} = -\frac{1}{4}\bar{D}(1-\gamma_5)D + \textbf{полные производные по}\, x^\mu \tag{16.40}$$

Поэтому с точностью до поверхностных членов:

$$\int d^4x d^2\theta = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} = \int d^4x d^2\theta(-\frac{1}{4})\bar{D}(1-\gamma_5)D \tag{16.41}$$

Это означает, что рассматриваемое слагаемое представимо в виде интеграла по полному суперпростратству от локального выражения:

$$\frac{1}{2e_0^2}Retr\int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b = -\frac{1}{16e_0^2}Retr\int d^4x d^4\theta e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}\cdot C^{ab}W_b \tag{16.42}$$

Как следствие, могут существовать расходящиеся квантовые поправки, которые имеют такую структуру.

Поэтому, вообще говоря, перенормироваться могут заряд и калибровочное поле (при использовании метода фонового поля – квантовое калибровочное поле). Вводится голая костанта связи:

$$\alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi} \tag{16.43}$$

e_0 – голый заряд. И перенормируемая константа связи:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \tag{16.44}$$

e – перенормируемый заряд.

$$\alpha = \alpha(\alpha_0, \lambda_0, ln\Lambda/\mu) \tag{16.45}$$

Константа перенормировки зависит от тех же аргументов:

$$Z_i^j = Z_i^j(\alpha_0, \lambda_0, ln\Lambda/\mu) \tag{16.46}$$

Эти величины определяют расходимости в теории. Расходимости в теории удобнее задавать в виде ренорм-групповых функций, чтобы не писать каждый раз зависимости.

Напомним, что по определению ренорм-групповые функции записываются следующим образом:

$$\beta(\alpha,\lambda) \equiv \frac{d\alpha}{dln\mu}\bigg|_{\lambda_0=const,\alpha_0=const} \tag{16.47}$$

$$(\gamma_\phi{}^i{}_j)(\alpha,\lambda) \equiv \frac{dlnZ^i_j}{dln\mu}\bigg|_{\lambda_0=const,\alpha_0=const}, \tag{16.48}$$

где μ – точка нормировки, λ_0, α_0 – константы связи, α, λ – перенормировочные константы связи. Зависимость от трех аргументов собирается в зависимости от перенормируемых констант, тогда получаются более компактные и удобные выражения. Расходимости определяются этими величинами.

В $N = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях перенормировка суперполей материи связана с так называемой точной NSVZ (Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова) β-функцией – связь, справедливая во всех порядках теории возмущений:

$$\frac{\beta(\alpha,\lambda)}{\alpha^2} = -\frac{3C_2 - T(R) + C(R)_i^j(\gamma_\phi)^i_j(\alpha,\lambda)/r}{2\pi(1-\frac{C_2\alpha}{2\pi})}, \tag{16.49}$$

где

$$\begin{cases} r = dimG = \delta^{AA} \\ tr(T^AT^B) = T(R)\delta^{AB} \\ (T^AT^A)_i^j = C(R)_i^j \\ f^{ACD}F^{BCD} = C_2\delta^{AB} \\ tr(t^At^B) = \dfrac{1}{2}\delta^{AB} \\ ([T^A,T^B]) = if^{ABC}T^C \end{cases} \tag{16.50}$$

Причем $t^A t^B$ – генераторы фундаментального представления.

Для присоединенного представления:

$$\delta^{AB} T(Adj) = tr(T^A_{Adj} T^B_{Adj}) = (T^A_{Adj})_{CD}(T^B_{Adj})_{DC} = -if^{ACD}(-i)f^{ADC} = C_2\delta^{AB} \tag{16.51}$$

$$T(Adj) = C_2 \tag{16.52}$$

где $f^{ACD}f^{ADC} = C_2\delta^{AB}$.

Для случая «чистой» $N = 1$ суперсимметрии (Янг-Миллс):

$$\beta(\alpha) = -\frac{3C_2\alpha^2}{2\pi(1-\frac{\alpha C_2}{2\pi})} \tag{16.53}$$

То есть, можно построить точное выражение для определенной теории. Основные результаты на квантовом уровне перечислены.

Изучим теперь квантовые свойства $N = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий.

В случае простой калибровочной группы

$$S = \frac{1}{2e_0^2} Retr \int d^4 d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e_0^2} tr \int d^4 x d^4\theta \cdot \phi^+ e^{2V} \phi e^{-2V} + \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta(\phi_1^+ e^{2V}\phi_1 +$$
$$+\phi_2^+ e^{-2V^T}\phi_2) + \{\int d^4xd^2\theta(\frac{1}{2}m_0\phi_2^T\phi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_2^T\phi\phi_1) + \textbf{к.с.})\} \tag{16.54}$$

$$\begin{cases} \phi \in Adj \\ \phi_1 \in R_0 \\ \phi_2 \in \bar{R}_0 \end{cases} \tag{16.55}$$

Исследуем квантовые свойства этой теории. Если теория квантуется с сохранением $N = 2$ суперсимметрии, то ϕ перенормируется так же как и фоновое калибровочное поле. Поэтому не перенормируются и ϕ_1, ϕ_2, то есть гипермультиплет в силу $N = 1$ теоремы о неперенормировки.

$$\phi = \phi_n \tag{16.56}$$

$$\phi_1 = \phi_{1,R} \tag{16.57}$$

$$\phi_2 = \phi_{2,R} \tag{16.58}$$

При условии $N = 2$ суперсимметричного квантования можно также показать, что из NSVZ β-функции следует конечность все однопетлевого приближения:

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\pi}(C_2 - T(R_0)), \tag{16.59}$$

где R_0 – представление, в котором находятся ϕ_1 или ϕ_2.

$$R = Adj + R_0 + \bar{R}_0 \tag{16.60}$$

То есть никаких аномалий не будет, так как нет киральности.

$$\phi = e_0 \phi^A t^A \tag{16.61}$$

$$\phi_2^T \phi^A \phi_1 \longrightarrow \phi_2^i e_0 \phi^A \phi_{1j} (T^A_{R_0})_i^j \tag{16.62}$$

$$\phi = e_0 \phi^A t^A = \phi_R = e \phi_{A,R} t^A \tag{16.63}$$

Для гипермултиплета аномальная размерность нулевая:

$$(Z_{\phi_1})_i^j = \delta_i^j \longrightarrow (\gamma_{\phi 1})_i^j = 0 \tag{16.64}$$

$$(Z_{\phi_2})_j^i = \delta_j^i \longrightarrow (\gamma_{\phi 2})_i^j = 0 \tag{16.65}$$

$$\phi_A = (\sqrt{Z}_\phi)_A^B \phi_{B,R} \tag{16.66}$$

Тогда:

$$e_0 (\sqrt{Z}_\phi)_A^B \phi_{B,R} t^A = e \phi_{A,R} t^A \tag{16.67}$$

$$(\sqrt{Z}_\phi)_A^B = \delta_A^B \cdot \frac{e}{e_0} \tag{16.68}$$

Вычислим аномальную размерность при $\alpha_0 = const$:

$$(\gamma_\phi)_A^B = \frac{dln(Z_\phi)_A^B}{dln\mu} = \delta_A^B \frac{dln\frac{\alpha}{\alpha_0}}{dln\mu} = \delta_A^B \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dln\mu} = \delta_A^B \frac{\beta(\alpha)}{\alpha} \tag{16.69}$$

Аномальная размерность связана с β-функцией.

$$\begin{cases} (\gamma_{\phi_1})_i^j = 0 \\ (\gamma_{\phi_2})_j^i = 0 \\ (\gamma_\phi)_A^B = \delta_A^B \dfrac{\beta(\alpha)}{\alpha} \\ R = Adj + R_0 + \bar{R}_0 \end{cases} \tag{16.70}$$

$$(T_R^A)_i^j \longrightarrow \begin{pmatrix} T^A_{Adj} & 0 & 0 \\ 0 & T^A_{R_0} & 0 \\ 0 & 0 & T^A_{\bar{R}_0} \end{pmatrix} \tag{16.71}$$

$$tr(T_R^A T_A^B) = tr(T^A_{Adj} T^B_{Adj}) + tr(T^A_{R_0} T^B_{R_0}) + tr(T^A_{\bar{R}_0} T_{\bar{R}_0}{}^B{}_{)=\delta^{AB}(C_2+2T(R_0))})(16.72)$$

Тогда можно записать:

$$T(R) = C_2 + 2T(R_0) \tag{16.73}$$

Вспомним, что

$$C(R)_i^j = (T_R^A T_R^A)_i^j \longrightarrow \begin{pmatrix} C(Adj) & 0 & 0 \\ 0 & C(R_0) & 0 \\ 0 & 0 & C(\bar{C}_0) \end{pmatrix} \tag{16.74}$$

$$C(Adj)_{AB} = (T_{Adj}^D)_{AC}(T_{Adj}^D)_{CB} = -if^{DAC}(-1)f^{DCB} = C_2\delta^{AB} \tag{16.75}$$

Тогда

$$C(R)_i^j = (T_R^A T_R^A)_i^j \longrightarrow \begin{pmatrix} C_2\delta_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & C(R_0) & 0 \\ 0 & 0 & C(\bar{C}_0) \end{pmatrix} \tag{16.76}$$

$$\frac{\beta(\alpha)}{\alpha^2}(1 - \frac{\alpha C_2}{2\pi}) = -\frac{1}{2\pi}[3C_2 - C_2 - 2T(R_0) + \frac{1}{r}C_2\delta_{AB}\delta_{AB}\frac{\beta(\alpha)}{\alpha}] \tag{16.77}$$

Воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{r}\delta_{AB}\delta_{AB} = \frac{1}{r}\delta_{AA} = 1 \tag{16.78}$$

Тогда:

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\pi}(C_2 - T(R_0)) \tag{16.79}$$

Расходимость существует только в однопетлевом случае, за рамками одной петли расходимости нет. Можно подобрать группу и представление так, чтобы нужные слагаемые сократились, можно получить конечные теории. Самый известный пример конечной теории - $N = 4$ теория Янга-Миллса. Объясним, почему это так.

Если $R_0 = Adj = \bar{R}_0$, а $m_0 = 0$, то получается $N = 4$ суперсимметричная теория Янга-Миллса. В этом случае

$$T(R_0) = T(Adj) = C_2 \tag{16.80}$$

потому что

$$tr(T_{Adj}^A T_{Adj}^B) = -if^{ACD} \cdot (-i) \cdot f^{BDC} = C_2\delta^{AB} \tag{16.81}$$

Откуда следует:

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\pi}[C_2 - C_2] = 0 \tag{16.82}$$

– N=4 суперсимметрия конечна во всех порядках теории возмущений. Это также очевидно из вида действия

$$S = \frac{1}{2e_0^2} trRe \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e_0^2} tr \int d^4x d^4\theta \cdot \phi_i^+ e^{2V} \phi_i e^{-2V} +$$

$$+\{\frac{i}{3\sqrt{2}e_0^2}tr\int d^4xd^2\theta\varepsilon_{ijk}\phi_i[\phi_j,\phi_k]+\textbf{к.с.}\} \tag{16.83}$$

В этом случае $i = 1,2,3$.

Действительно, здесь все коэффициенты жестко заданы $N = 4$ суперсимметрией, перенормироваться может только константа связи. Но слагаемое с ϕ^3 не перенормируется в силу $N = 1$ теоремы о неперенормировке суперпотенциала. Поэтому не перенормируется и заряд.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ