ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

СУПЕРСИММЕТРИЯ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

СТЕПАНЬЯНЦ
КОНСТАНТИН ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

Содержание

Нарушение суперсимметрии

Глава 1. Нарушение суперсимметрии.

Параграф 1. Общая теория спонтанного нарушения SUSY

Поскольку суперпатнеры известных частиц пока экспериментально не наблюдаются, суперсимметрия в расширениях Стандартной Модели должна быть нарушена. При этом, как будет далее показано, бозоны и фермионы будут иметь различные массы.

Естественно, предположить, что SUSY нарушается спонтанно, то есть теория инвариантна относительно преобразований SUSY, а вакуумные состояния - нет.

Для того чтобы показать как это работает, напомним для начала алгебру SUSY. Алгебра SUSY - это Z_2-градуированное расширение алгебры Пуанкаре, в которой к генераторам сдвига $P_\mu = i\partial_\mu$ (грассманово-четные) и поворота $M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu$ (грассманово-четные) добавляются N операторов суперзарядов Q_{ia}, (грассманово-нечетные):

$$\begin{gathered}
[P_\mu, P_\nu] = 0,\\
[P_\mu, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\mu\alpha}P_\beta - \eta_{\mu\beta}P_\alpha),\\
[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha} + \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta}),\\
[Q_{ia}, P_\mu] = 0,\\
[Q_{ia}, M_{\mu\nu}] = \frac{i}{2}(\gamma_{\mu\nu}Q_i)_a,\\
\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu.
\end{gathered} \tag{1.1}$$

При этом $i = \overline{1,N}$ - индекс, нумерующий SUSY, а $a = \overline{1,4}$ - спинорный индекс.

Суперзаряды являются майорановскими спинорами, то есть

$$Q_i^+\gamma^0 = Q_i^T C. \tag{1.2}$$

Важным следствием алгебры SUSY является неотрицательность энергии вакуумного состояния. Действительно, используем последнее соотношение из (1.1) с антикаммутатором суперзарядов. Тогда, полагая в нем $i = j$ (без суммирования) получим

$$\{Q_{ia}, Q_{ib}\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu \quad \forall i. \tag{1.3}$$

Далее, помножим данное выражение на $(C\gamma^0)^{ba}$ и получим

$$\begin{aligned}
(C\gamma^0)^{ba}\{Q_{ia}, Q_{ib}\} = -2tr(\gamma^\mu CC\gamma^0)P_\mu = [C^2 = 1] = -2tr(\gamma^\mu\gamma^0)P_\mu =\\
= [tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}] = -8\eta^{\mu 0}P_\mu = 8P^0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

То есть

$$P^0 = \frac{1}{8}(C\gamma^0)^{ba}\{Q_{ia}, Q_{ib}\}. \tag{1.5}$$

Далее, докажем свойство симметричности $(\gamma^\mu C)_{ab}$ и $(C\gamma^\mu)_{ab}$ по нижним индексам. Для этого домножим соотношение $C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$ на C справа

$$C\gamma^\mu = -(\gamma^\mu)^T C = [C^T = C^{-1} = -C] = (\gamma^\mu C)^T. \tag{1.6}$$

Тогда, ввиду доказанной симметричности $(C\gamma^\mu)_{ab}$ и симметричности антикоммутатора, выражение (1.8) можно преобразовать

$$P^0 = \frac{1}{8}(C\gamma^0)^{ba}(Q_{ia}Q_{ib} + Q_{ib}Q_{ia}) = \frac{1}{4}(C\gamma^0)^{ba}Q_{ib}Q_{ia} = \frac{1}{4}(Q_i^T C\gamma^0)^a Q_{ia}. \tag{1.7}$$

Далее, воспользуемся свойством майорановости суперзарядов $Q_i^+\gamma^0 = Q_i^T C$, тогда

$$P^0 = \frac{1}{4}Q_i^{+a}Q_{ia} \quad \forall i. \tag{1.8}$$

Теперь, можно написать и оценить вакуумное среднее

$$E_0 = \langle 0| P^0 |0\rangle = \frac{1}{4}\langle 0| Q_i^{+a}Q_{ia} |0\rangle \geqslant 0. \tag{1.9}$$

В суперсимметричных теориях, таким образом, энергия вакуумного состояния не может быть отрицательна. Это утверждение тесно связано со спонтанным нарушением SUSY.

SUSY по определению спонтанно нарушена, если $\exists\ i, a$ такие, что $Q_{ia}|0\rangle \neq 0$.

Просуммируем выражение (1.9) по всем значениям $i = \overline{1,N}$, тогда получим

$$NE_0 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\langle 0| Q_i^{+a}Q_{ia} |0\rangle \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Тогда, если SUSY спонтанно нарушена, то

$$E_0 = \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N}\langle 0| Q_i^{+a}Q_{ia} |0\rangle > 0, \tag{1.11}$$

если же SUSY спонтанно не нарушена, то

$$E_0 = \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N}\langle 0| Q_i^{+a}Q_{ia} |0\rangle = 0, \tag{1.12}$$

так как $\forall\ i, a$ $Q_{ia}|0\rangle = 0$.

Кроме того, так как соотношение (1.9) одинаково $\forall\ i = \overline{1,N}$, то в случае расширенной SUSY ($N > 1$), либо все SUSY нарушены, либо все не нарушены.

Рассмторим конкретный пример нарушения. Используем следующую модель

$$S = \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\phi^{*i}\phi_i + \left(\frac{1}{2}\int d^4xd^2\theta g(\phi_i) + \text{к.с.}\right), \tag{1.13}$$

где ϕ_i - киральное скалярное суперполе, которое удовлетворяет условию киральности

$$(1-\gamma_5)D_a\phi_i = 0, \tag{1.14}$$

где $D_a \equiv \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^a} - i(\gamma^\mu\theta)_a\partial_\mu$. В терминах компонентных полей ($y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta$)

$$\phi_i(y^\mu,\theta) = \varphi_i(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_i(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_i(y^\mu). \tag{1.15}$$

Если $g(\phi_i)$ - аналитическая функция, то она будет удовлетворять условию киральности

$$(1-\gamma_5)D_a g(\phi_i) = 0, \tag{1.16}$$

Рассматриваемая теория инвариантна относительно преобразований SUSY

$$\begin{aligned}
&\delta\varphi_i = \overline{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi_i,\\
&\delta\psi_i = (Ref_i + i\gamma_5 Imf_i)\varepsilon - i(\partial_\mu Re\varphi_i + i\gamma_5\partial_\mu Im\varphi_i)\gamma^\mu\varepsilon\\
&\delta f_i = -i\overline{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_i,
\end{aligned} \tag{1.17}$$

где $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$ - параметр преобразований SUSY - грассманово-нечетный маорановский спинор.

Как было упомянуто ранее, если SUSY спонтанно нарушена, то $\exists\ i,a$, такие, что $Q_{ia}|0\rangle \neq 0$. При этом, преобразование SUSY связано с суперзарядами по следующей формуле

$$\delta\phi_i = -i\overline{\varepsilon}Q\phi_i \tag{1.18}$$

то есть, по сути, необходимо проверить обращение в ноль одной из величин $\delta\varphi_{i0}, \delta\psi_{i0}, \delta f_{i0}$, где индекс 0 обозначает вакуумные значения полей

$$\begin{aligned}
&\delta\varphi_{i0} = \overline{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi_{i0} = 0,\\
&\delta f_{i0} = -i\overline{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_{i0} = 0,\\
&\delta\psi_{i0} = (Ref_{i0} + i\gamma_5 Imf_{i0})\varepsilon - i(\partial_\mu Re\varphi_{i0} + i\gamma_5\partial_\mu Im\varphi_{i0})\gamma^\mu\varepsilon =\\
&= (Ref_{i0} + i\gamma_5 Imf_{i0})\varepsilon,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

где первые два преобразования и второе слагаемое в третьем преобразовании обращаются в ноль в силу условия лоренц-инвариантности вакуумного состояния. Не равным нулю может быть только вакуумное среднее вспомогательных полей $f_{i0} \neq 0$. Слеловательно SUSY спонтанно нарушена если хотя бы одно из вспомогательных полей f_i приобретает отличное от нуля вакуумное среднее $f_{i0} \neq 0$ и не нарушена при $f_{i0} = 0 \ \forall \ i$.

Теперь рассмотрим суперсимметричные калибровочные теории. Характерное действие имеет вид

$$S = \frac{1}{2e^2} trRe \int d^4xd^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4xd^4\theta \phi^{*i} (e^{2V})_i^j \phi_j + \\ + \left(\int d^4xd^2\theta \left(\frac{1}{4} m^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} \lambda^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) + \text{к.с.} \right), \tag{1.20}$$

где где ϕ_i - киральное скалярное суперполе, которое удовлетворяет условию киральности

$$(1-\gamma_5) D_a \phi_i = 0, \tag{1.21}$$

$V(x^\mu, \theta) = V^+(x^\mu, \theta)$ - эрмитово скалярное калибровочное суперполе, которое представляется через генераторы $V = eV^A t^A$ в первом слагаемом и $V = eV^A T^A$ во втором,

$$W_a \equiv \frac{1}{32} \overline{D} (1-\gamma_5) D \left[e^{-2V} (1+\gamma_5) D_a e^{2V} \right] \tag{1.22}$$

- суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля. SUSY-инвариантность действия (1.1) очевидна в терминах суперполей.

Чтобы исследовать возможность спонтанного нарушения SUSY, перепишем данное действие в терминах компонентных полей. Для этого выберем для начала, так называемую, калибровку Весса-Зумино, в которой калибровочное суперполе и его тензор напряженностей примут вид

$$V(x^\mu, \theta) = -\frac{1}{2} \overline{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) + i\sqrt{2} (\overline{\theta}\theta) \cdot \overline{\theta} \gamma_5 \lambda(x) + \frac{1}{4} (\overline{\theta}\theta)^2 D(x), \\ W_a(y^\mu, \theta) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \{ -i\sqrt{2} \lambda_a(y^\mu) - \\ -\theta_a D(y^\mu) + \frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} \theta_a \cdot F_{\mu\nu}(y^\mu) - \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\theta} (1+\gamma_5) \theta \gamma^\mu D_\mu \lambda_a(y^\mu) \}, \tag{1.23}$$

здесь $\lambda(x)$ - калибрино (суперпартнер калибровочного поля), $D(x)$ - вспомогательное поле.

Тогда, в терминах компонентных полей действие рассматриваемой теории принимает вид

$$\begin{aligned}
S = \frac{2}{e^2} tr \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\overline{\lambda}\gamma^\mu D_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 \right) + \\
+ \int d^4x (D_\mu \varphi^{i*} D^\mu \varphi_i + i\overline{\psi}(1-\gamma_5)^i \gamma^\mu D_\mu \psi_i + f^{i*} f_i + \\
+ \varphi^{i*} D_i^j \varphi_j + i\sqrt{2}\overline{\psi}(1-\gamma_5)^i \lambda_i^j \varphi_j - i\sqrt{2}\varphi^{i*}\overline{\lambda}_i^j (1+\gamma_5)\psi_j) + \\
+ \int d^4x (m^{ij}\varphi_i f_j - \frac{1}{2} m^{ij}\overline{\psi_i}(1+\gamma_5)\psi_j + \lambda^{ijk}\varphi_i\varphi_j f_k - \lambda^{ijk}\varphi_i\overline{\psi_j}(1+\gamma_5)\psi_k + \\
+ m_{ij}^* \varphi^{*i} f^{*j} - \frac{1}{2} m_{ij}^* \overline{\psi^i}(1-\gamma_5)\psi^j + \lambda_{ijk}^* \varphi^{*i}\varphi^{j*} f^{*k} - \lambda_{ijk}^* \varphi^{*i}\overline{\psi^j}(1-\gamma_5)\psi^k),
\end{aligned} \tag{1.24}$$

здесь

$$\begin{aligned}
D_\mu \lambda &= \partial_\mu \lambda + i[A_\mu, \lambda], \\
\lambda_i^j &= e\lambda^A (T^A)_i^j, \\
D_i^j &= eD^A (t^A)_i^j.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Такая модель инвариантна относительно следующих преобразований SUSY

$$\begin{aligned}
&\delta A_\mu = -i\sqrt{2}\overline{\varepsilon}\gamma_\mu \lambda, \\
&\delta \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5 \varepsilon D, \\
&\delta D = \sqrt{2}\overline{\varepsilon}\gamma^\mu \gamma_5 D_\mu \lambda, \\
&\delta \varphi_i = \overline{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi_i, \\
&\delta \psi_i = (Ref_i + i\gamma_5 Imf_i)\varepsilon - i(D_\mu Re\varphi_i + i\gamma_5 D_\mu Im\varphi_i)\gamma^\mu \varepsilon, \\
&\delta f_i = -i\overline{\varepsilon}\gamma^\mu (1+\gamma_5) D_\mu \psi_i - i\sqrt{2}\overline{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi_i.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

При этом, как и ранее, очевидно, что нетривиальными для вакуума могут оказаться только

$$\begin{aligned}
\delta\lambda_0 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5 \varepsilon D_0, \\
\delta\psi_i &= (Ref_{i0} + i\gamma_5 Imf_{i0})\varepsilon,
\end{aligned} \tag{1.27}$$

в случае если $\exists\ i, A$ при которых либо $D_0^A \neq 0$, либо $f_{i0}^A \neq 0$.

Таким образом, SUSY является спонтанно нарушенной, если хотя бы одно из вспомогательных полей приобретает вакуумное среднее, и не нарушена, если вакуумные средние всех вспомогательных полей равны 0.

Выясним теперь, как связан этот критерий с предыдущим. В SUSY теориях потенциал скалярных полей φ_i, φ^{*i} возникает при исключении вспомогательных полей D^A и f_i на уравнениях движения:

$$V(\varphi_i, \varphi^{*i}) = \frac{1}{2}(D^A)^2 + f^{*i} f_i, \tag{1.28}$$

где D^A и f_i должны быть выражены через φ_i с помощью уравнений движения для D^A и f_i:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\delta S}{\delta D^A} = D^A + e\varphi^{*i}(T^A)_i{}^j \varphi_j, \\ 0 = \frac{\delta S}{\delta f^i} = f^{*i} + m^{ij}\varphi_j + \lambda^{ijk}\varphi_j\varphi_k. \end{cases}$$

При этом

$$E_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(D_0^A)^2 + (f_{i0})^2\right] \geqslant 0, \tag{1.29}$$

поскольку $D^A \in Re$.

Очевидно, что $E_0 = 0$ если $\forall\ i, A$: $D_0^A = 0$ и $f_{i0} = 0$, $E_0 > 0$ если $\exists\ i, A$: $D_0^A \neq 0$ или $f_{i0} \neq 0$.

Таким образом, можно сформулировать условия спонтанного нарушения SUSY в виде следующей таблицы:

Ненарушенная SUSY	Спонтанно нарушенная SUSY
Определение	
$\forall\ i, a\ Q_{ia}\|0\rangle = 0$	$\exists\ i, a\ Q_{ia}\|0\rangle \neq 0$
Критерий 1	
$E_0 = 0$	$E_0 > 0$
Критерий 2	
$\forall\ i, A$: $D_0^A = 0$ и $f_{i0} = 0$	$\exists\ i, A$: $D_0^A \neq 0$ или $f_{i0} \neq 0$
Причем $E_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(D_0^A)^2 + (f_{i0})^2\right] \geqslant 0$	

Механизм спонтанного нарушения суперсимметрии

Параграф 2. Механизм Файе-Илиопулоса спонтанного нарушения суперсимметрии

Данный механизм спонтанного нарушения SUSY является наиболее простым и наглядным, но работает только в абелевом случае ($G = U(1)$).

Рассмотрим $N = 1$ SQED (SUSY-электродинамика) и добавим к ее действию слагаемое, пропорциональное вспомогательному полю D. В суперполях такая модель описывается действием

$$S = \frac{1}{4}Re\int d^4xd^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\left(\phi^+ e^{-2eV}\phi + \tilde{\phi}^+ e^{2eV}\tilde{\phi}\right) + \\ + \left(\frac{1}{2}m\int d^4xd^2\theta\tilde{\phi}\phi + \text{к.с.}\right) + \frac{1}{2}k\int d^4xd^4\theta V, \tag{2.1}$$

где $W^a \equiv W_b C^{ba}$, $k - const$, тензор SUSY калибровочного поля

$$W_a \equiv \frac{1}{16}\overline{D}(1-\gamma_5)D\left[(1+\gamma_5)D_a V\right], \tag{2.2}$$

так как V - абелево поле. ϕ и $\tilde{\phi}$ киральные скалярные поля

$$(1-\gamma_5)D\phi = 0,$$
$$(1-\gamma_5)D\tilde{\phi} = 0, \tag{2.3}$$

здесь

$$D_a \equiv \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^a} - i(\gamma^\mu\theta)_a\partial_\mu. \tag{2.4}$$

Рассматриваемая теория инвариантна относительно $U(1)$-преобразований

$$\begin{cases} \phi \to e^{-i\Lambda}\phi, \\ \tilde{\phi} \to e^{i\Lambda}\tilde{\phi}, \\ V \to V + \frac{i}{2e}(\Lambda^* - \Lambda), \\ W_a \to W_a. \end{cases}$$

где Λ - киральное суперполе, Λ^* - антикиральное суперполе

$$(1-\gamma_5)D\Lambda = 0,$$
$$(1+\gamma_5)D\Lambda^* = 0. \tag{2.5}$$

Последнее слагаемое в действии (2.1) представляет собой добавку Файе-Илиопулоса. Покажем, что оно также калибровочно-инвариантно:

$$\int d^4xd^4\theta V \to \int d^4xd^4\theta \left[V + \frac{i}{2e}\Lambda^* - \frac{i}{2e}\Lambda\right], \tag{2.6}$$

причем

$$\begin{gathered}\int d^4xd^4\theta\Lambda^* = \int d^4xd^2\overline{\theta}d^2\theta\Lambda^*,\\ \int d^4xd^4\theta\Lambda = \int d^4xd^2\theta d^2\overline{\theta}\Lambda,\\ \int d^2\theta = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta_a}(1+\gamma_5)_a^b\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^b} = -\frac{1}{4}\overline{D}(1+\gamma_5)D + \text{полные производные.}\end{gathered} \tag{2.7}$$

Поэтому с точностью до поверхностных слагаемых, с учетом (2.1) получаем

$$\begin{gathered}\int d^4xd^4\theta\Lambda^* = \int d^4xd^2\overline{\theta}d^2\theta\Lambda^* = \int d^4xd^2\overline{\theta}(-\frac{1}{4})\overline{D}(1+\gamma_5)D\Lambda^* = 0,\\ \int d^4xd^4\theta\Lambda = \int d^4xd^2\theta d^2\overline{\theta}\Lambda = \int d^4xd^2\theta(-\frac{1}{4})\overline{D}(1-\gamma_5)D\Lambda = 0.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Следовательно, действительно, при калибровочных преобразованиях слагаемое Файе-Илиопулоса преобразуется на полную производную.

В терминах компонентных полей в калибровке Весса-Зумино

$$\begin{gathered}V(x^\mu,\theta) = -\frac{1}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\overline{\theta}\theta)\cdot\overline{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta)^2D(x),\\ \phi(y^\mu,\theta) = \varphi(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu),\\ \tilde{\phi}(y^\mu,\theta) = \tilde{\varphi}(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\tilde{\psi}(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta\tilde{f}(y^\mu),\\ \Psi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\tilde{\psi}\right],\\ \overline{\Psi} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\overline{\psi}(1-\gamma_5) + \overline{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\right].\end{gathered} \tag{2.9}$$

Прежде чем выписывать в компонентах полное действие, запишем отдельно компонентную форму добавки Файе-Илиопулоса. С учетом равенства нулю интеграла по $d^4\theta$ слагаемых со степенью θ меньше 4

$$\frac{k}{2}\int d^4xd^4\theta V = \frac{k}{2}\int d^4xd^4\theta\frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta)^2D(x) = \left[\int d^4\theta(\overline{\theta}\theta)^2 = 8\right] = k\int d^4xD(x). \tag{2.10}$$

При этом $\lambda(x)$ и $D(x)$ инвариантны относительно остаточных калибровочных преобразований в абелевом случае (так как данные поля лежат в присоединенном представлении калибровочной группы). Поэтому для слагаемого Файе-Илиопулоса очевидна калибровочная инвариантность в компонентной форме записи.

Выпишем теперь полное действие в компонентном виде

$$S = \frac{1}{4} tr \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\overline{\lambda}\gamma^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 \right) +$$

$$+ \int d^4x (D_\mu \varphi^* D^\mu \varphi + D_\mu \tilde{\varphi}^* D^\mu \tilde{\varphi} + i\overline{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - e(\varphi^* D\varphi - \tilde{\varphi}^* D\tilde{\varphi}) + f^+ f + \tilde{f}^+ \tilde{f}$$

$$-ie\overline{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi + ie\varphi^*\overline{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi + ie\tilde{\varphi}\overline{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi - ie\overline{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^*)$$

$$+ \int d^4x (m(\tilde{\varphi} f + \tilde{f}\varphi + \tilde{\varphi}^* f^* + \tilde{f}^*\varphi^*) - m\overline{\Psi}\Psi) + k \int d^4x D(x), \tag{2.11}$$

где $D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - ieA_\mu \Psi$.

Вспомогательные поля $f, \tilde{f}$ и D исключаются на уравнениях движения, которые имеют вид

$$\begin{cases} 0 = f^* + m\tilde{\varphi}, \quad 0 = f + m\tilde{\varphi}^*, \\ 0 = \tilde{f}^* + m\varphi, \quad 0 = \tilde{f} + m\varphi^*, \\ 0 = D - e\varphi^*\varphi + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + k. \end{cases}$$

Из этих уравнений следует, что если $f_0 = \tilde{f}_0 = 0$, то $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 = 0$, и тогда $D = -k \neq 0$ при $k \neq 0$. Таким образом, одно из вспомогательных полей заведомо отлично от 0, то есть SUSY заведомо нарушена при $k \neq 0$.

После исключения вспомогательных полей действие (2.1) примет вид

$$S = \frac{1}{4} tr \int d^4x [-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\overline{\lambda}\gamma^\mu \partial_\mu \lambda + D_\mu \varphi^* D^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

$$+ D_\mu \tilde{\varphi}^* D^\mu \tilde{\varphi} - m^2 \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} - \frac{1}{2}(k - e\varphi^*\varphi + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi})^2 + i\overline{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\overline{\Psi}\Psi$$

$$-ie\overline{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi + ie\varphi^*\overline{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi + ie\tilde{\varphi}\overline{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi - ie\overline{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^*]. \tag{2.12}$$

Как всегда, потенциал скалярных полей в SUSY-теориях получается как результат исключения вспомогательных полей.

Исследуем теперь спектр частиц в полученной теории. Для этого необходимо найти вакуумное состояние, а затем в квадратичном приближении разложить около него функцию Лагранжа. Вакуум получается при минимизации потенциальной энергии скалярных полей

$$V(\varphi, \tilde{\varphi}) = m^2\varphi^*\varphi + m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(k - e\varphi^*\varphi + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}k^2 + \varphi^*\varphi(m^2 - ek) + \tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}(m^2 + ek) + \frac{e^2}{2}(\varphi^*\varphi - \tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi})^2 > 0, \tag{2.13}$$

при $k \neq 0$. Запишем условие на вакуумное состояние

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \varphi^*} = m^2\varphi - e\varphi(k - e\varphi^*\varphi + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}),$$
$$0 = \frac{\partial V}{\partial \tilde{\varphi}^*} = m^2\tilde{\varphi} + e\tilde{\varphi}(k - e\varphi^*\varphi + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}), \qquad (2.14)$$

умножая данные уравнения на $\tilde{\varphi}$ и на φ, соответственно, а затем складывая их получаем $0 = \varphi\tilde{\varphi}\cdot m^2$ и, таким образом, либо φ, либо $\tilde{\varphi}$, либо они оба в вакууме равны нулю. Пусть для определенности $e > 0,\ k > 0$. Тогда из вида $V(\varphi,\tilde{\varphi})$ очевидно, что $\tilde{\varphi}_0 = 0$.

Возникают два принципиально различных случая:

$$1)\ m^2 - ek > 0,$$
$$2)\ m^2 - ek < 0. \qquad (2.15)$$

В первом случае $\varphi_0 = 0$ и калибровочная симметрия не нарушена, а во втором $\varphi_0 \neq 0$ и имеет место спонтанное нарушение калибровочной симметрии.

Рассмотрим более подробно первый случай

$$1)\ m^2 - ek > 0,$$
$$\varphi_0 = 0; \tilde{\varphi}_0 = 0 \qquad (2.16)$$

В этом случае, потенциал (2.1) имеет следующий вид

$$V(\varphi,\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2}k^2 > 0, \qquad (2.17)$$

для функции Лагранжа в квадратичном приближении также имеем

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\overline{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - (m^2 - ek)\varphi^*\varphi$$
$$+\partial_\mu\tilde{\varphi}^*\partial^\mu\tilde{\varphi} - (m^2 + ek)\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + i\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\overline{\Psi}\Psi - \frac{1}{2}k^2. \qquad (2.18)$$

Видно, что в спектре частиц имеются

а) безмассовое векторное поле A_μ,

б) безмассовый майорановский спинор λ (суперпартнер A_μ),

в) массивный дираковский спинор Ψ с массой m,

г) массивный комплексный скаляр φ с массой $\sqrt{m^2 - ek}$,

д) массивный комплексный скаляр $\tilde{\varphi}$ с массой $\sqrt{m^2 + ek}$,

Здесь φ и $\tilde{\varphi}$ - суперпартнеры Ψ.

Таким образом, ясно видно, что при $k \neq 0$: $m_\Psi \neq m_\varphi \neq m_{\tilde{\varphi}}$ - следствие спонтанного нарушения SUSY. Далее заметим, что имеет место следующее равенство

$$0 = 4m^2 - 2(m^2 - ek) - 2(m^2 + ek), \tag{2.19}$$

которое можно переписать в виде

$$0 = \sum_B n_B m_B^2 - \sum_F n_F m_F^2, \tag{2.20}$$

где n_B и n_F - числа бозонных и фермионных степеней свободы, соответственно. Данное равенство является фундаментальным для SUSY-теорий и следует из алгебры SUSY, которое будет обсуждаться далее.

Спонтанное нарушение калибровочной симметрии

Теперь рассмотрим второй случай

$$\begin{gathered} 2)\ m^2 - ek < 0, \\ \varphi_0 \neq 0; \tilde{\varphi}_0 = 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

соответсвующий спонтанному нарушению калибровочной симметрии.

Пусть $\varphi \equiv v > 0, v \in Re$. Тогда

$$\begin{gathered} 0 = m^2 - e(k - ev^2), \\ e^2 v^2 = ek - m^2 \implies v = \frac{1}{e}\sqrt{ek - m^2}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Исследуем спектр частиц в данной теории. Для этого, разложим поле φ вблизи вакуума

$$\varphi = v + P + iS, \tag{3.3}$$

над которым мы можем совершить калибровочное преобразование

$$\varphi \to e^{-i\alpha}\varphi \simeq (1 - i\alpha)(v + P + iS) \simeq v + P + iS - i\alpha v, \tag{3.4}$$

в котором iS - голдстоуновскую часть можем занулить выбором калибровки (фиксацией параметра α), то есть перейти, в так называемую, унитарную калибровку: $\varphi = v + P$.

Исследуем, для начала бозонный сектор данной теории

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + D_\mu\varphi^* D^\mu\varphi + D_\mu\tilde{\varphi}^* D^\mu\tilde{\varphi} - V(\varphi, \tilde{\varphi}), \tag{3.5}$$

где

$$\begin{gathered} D_\mu\varphi = \partial\varphi - ieA_\mu\varphi, \\ D_\mu\tilde{\varphi} = \partial\tilde{\varphi} + ieA_\mu\tilde{\varphi}, \end{gathered} \tag{3.6}$$

которые в линейном приближении имеют вид

$$\begin{gathered} D_\mu\varphi = \partial P - ieA_\mu v, \\ D_\mu\tilde{\varphi} = \partial\tilde{\varphi}, \end{gathered} \tag{3.7}$$

то есть в квадратичном приближении кинетические слагаемые в лагранжиане (3) принимают вид

$$(\partial_\mu P)^2 + e^2v^2A_\mu^2 + \partial_\mu\tilde{\varphi}^*\partial^\mu\tilde{\varphi}. \tag{3.8}$$

Потенциал в (3) в унитарной калибровке принимает вид

$$\begin{gathered}V(\varphi,\tilde{\varphi}) = m^2(v+P)^2 + m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\left(k - e(v+P)^2 + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\right)^2 = \\ m^2(v^2+2vP+P^2) + m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\left((k-ev^2) - 2evP - eP^2 + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\right)^2 \approx \\ \approx [k - ev^2 = \frac{m^2}{e}] \approx \\ \approx m^2(v^2+2vP+P^2) + m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + \\ + \frac{m^4}{2e^2} - 2evP\frac{m^2}{e} + 2e^2v^2P^2 - m^2P^2 + m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} = \\ = m^2\left(v^2 + \frac{m^2}{2e^2}\right) + 2e^2v^2P^2 + 2m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi},\end{gathered} \tag{3.9}$$

Поэтому в квадратичном приближении лагранжиан (3) имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (\partial_\mu P)^2 + \partial_\mu\tilde{\varphi}^*\partial^\mu\tilde{\varphi} + \\ + e^2v^2A_\mu^2 - 2e^2v^2P^2 - 2m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} - m^2\left(v^2 + \frac{m^2}{2e^2}\right).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Таким образом, в спектре бозонных полей будут

а) массивное векторное поле A_μ с массой $m_A = \sqrt{2}ev$,

б) массивный вещественный скаляр P с массой $m_P = \sqrt{2}ev$,

в) массивное комплексное скалярное поле $\tilde{\varphi}$ с массой $m_{\tilde{\varphi}=\sqrt{2}m}$.

Исследуем теперь спектр фермионов. Лагранжиан фермионного сектора имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_F = i\overline{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + i\overline{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - m\overline{\Psi}\Psi - \\ -ie\overline{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi + ie\varphi^*\overline{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi + ie\tilde{\varphi}\overline{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi - ie\overline{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^*\end{gathered} \tag{3.11}$$

В линейном приближении

$$D_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi - ieA_\mu\Psi \simeq \partial_\mu\Psi. \tag{3.12}$$

Так как $\tilde{\varphi}_0 = 0$, то юкавские слагаемые содержащие $\tilde{\varphi}$ оказываются третьего порядка малости, поэтому в квадратичном приближении они не учитываются. При этом, так как $\varphi_0 = v \neq 0$, то соответсвующие юкавские слагаемые являются второго порядка малости и поэтому дают вклад в квадратичный лагранжиан, который с учетом всего сказанного примет следующий вид

$$\mathcal{L}_F = i\overline{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + i\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\overline{\Psi}\Psi - iev\overline{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda + iev\overline{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi. \tag{3.13}$$

Данный лагранжиан не удается разделить на два независимых лагранжиана. Поэтому необходимо перейти к, так называемым, нормальным координатам. Но прежде чем это делать, для начала, перейдем от дираковских спиноров к майорановским

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\tilde{\psi}\right], \\ \overline{\Psi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\overline{\psi}(1-\gamma_5) + \overline{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Тогда получим для лагранжиана (3.13) с точностью до полных производных следующее выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = i\overline{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\tilde{\psi}}\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} - 2m\overline{\psi}\tilde{\psi} - \\ -i\sqrt{2}ev\overline{\psi}(1-\gamma_5)\lambda + i\sqrt{2}ev\overline{\lambda}(1+\gamma_5)\psi = \\ = i\overline{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\tilde{\psi}}\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} - 2m\overline{\psi}\tilde{\psi} + 2i\sqrt{2}ev\overline{\psi}\gamma_5\lambda. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Определим $\lambda' \equiv i\gamma_5\lambda$, который является майорановским спинором

$$\begin{aligned} \overline{\lambda'} = (i\gamma_5\lambda)^+\gamma^0 = -i\lambda^+\gamma_5\gamma^0 = i\lambda^+\gamma^0\gamma_5 = i\overline{\lambda}\gamma_5, \\ \lambda'^T C = i\lambda^T\gamma_5 C = i\lambda^T C\gamma_5 = [\lambda^T C = \overline{\lambda}] = i\overline{\lambda}\gamma_5 \implies \\ \implies \overline{\lambda'} = \lambda'^T C, \end{aligned} \tag{3.16}$$

при этом кинетическое слагаемое после такого переопределения будет иметь прежний вид

$$\begin{aligned} i\overline{\lambda'}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda' = i(i\overline{\lambda}\gamma_5)\gamma^\mu\partial_\mu(i\lambda\gamma_5) = \\ -i\overline{\lambda}\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\lambda = [\{\gamma^\mu,\gamma_5\} = 0, \gamma_5^2 = 1] = i\overline{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Таким образом, для (3.13) имеем

$$\mathcal{L}_F = i\overline{\lambda'}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda' + i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\tilde{\psi}}\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} - 2m\overline{\psi}\tilde{\psi} + 2\sqrt{2}ev\overline{\psi}\lambda'. \tag{3.18}$$

Далее, сделаем следующее ортогональное преобразование

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}' &\equiv [m\tilde{\psi} - \sqrt{2}ev\lambda']\frac{1}{\sqrt{m^2+2e^2v^2}}, \\ \lambda'' &= [\sqrt{2}ev\tilde{\psi} + m\lambda']\frac{1}{\sqrt{m^2+2e^2v^2}}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

после которого (3.13) примет следующий вид

$$\mathcal{L}_F = i\overline{\lambda''}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda'' + i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\tilde{\psi}'}\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi}' - 2\sqrt{m^2+2e^2v^2}\,\overline{\psi}\tilde{\psi}'. \tag{3.20}$$

Нетрудно видеть, что данный лагранжиан построен в терминах майорановских спиноров. Поэтому, если определить дираковский спинор

$$\Psi' = \frac{1}{\sqrt{2}}((1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\psi'), \tag{3.21}$$

то лагранжиан (3.13) примет вид

$$\mathcal{L}_F = i\overline{\lambda''}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda'' + i\overline{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' - \sqrt{m^2+2e^2v^2}\,\overline{\Psi}'\tilde{\Psi}'. \tag{3.22}$$

Ясно видно, что в спектре фермионов будут присутствовать

г) безмассовый майорановский фермион λ'',

д) массивный дираковский спинор Ψ', с массой $m_{\Psi'} = \sqrt{m^2+2e^2v^2}$.

Итак спектр частиц SQED состоит из следующих полей

а) массивное векторное поле A_μ с массой $m_A = \sqrt{2}ev$,

б) массивный вещественный скаляр P с массой $m_P = \sqrt{2}ev$,

в) массивное комплексное скалярное поле $\tilde{\varphi}$ с массой $m_{\tilde{\varphi}=\sqrt{2}m}$.

г) безмассовый майорановский фермион λ'' (фатино - суперпартнер A_μ),

д) массивный дираковский спинор Ψ', с массой $m_{\Psi'} = \sqrt{m^2+2e^2v^2}$ (суперпартнер скалярных полей P и $\tilde{\varphi}$).

Вычислим теперь для рассматриваемого случая величину

$$\begin{aligned} &\sum_B n_B m_B^2 - \sum_F n_F m_F^2 = \\ &= 3\cdot(\sqrt{2}ev)^2 + (\sqrt{2}ev)^2 + 2\cdot(\sqrt{2}m) - 0 - 4(m^2+2e^2v^2) = \\ &= 4\cdot 2e^2v^2 + 2\cdot 2m^2 - 4m^2 - 8e^2v^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

видно, что рассматриваемое выражение вновь равно 0, что наводит на мысль, что соотношение

$$\sum_B n_B m_B^2 - \sum_F n_F m_F^2 = 0, \tag{3.24}$$

не случайно.

Заметим, что как в случае 1), так и в случае 2) SUSY нарушена, так как $V_0 > 0$. Таким образом, подводя итоги, получаем

1) $m^2 - ek > 0$	2) $m^2 - ek < 0$
$\varphi_0 = 0; \tilde{\varphi}_0 = 0$	$\varphi_0 \neq 0; \tilde{\varphi}_0 = 0$
ненарушенная калибровочная симметрия	спонтанное нарушение калибровочной симметрии
$V_0 = \frac{1}{2}k^2 > 0$	$V_0 = m^2(v^2 + \frac{m^2}{2e^2}) > 0$
спонтанное нарушение SUSY	
$D = e\varphi_0^*\varphi_0 - e\tilde{\varphi}_0{}^*\tilde{\varphi}_0 - k = -k \neq 0$	$D = ev^2 - k = \frac{m^2}{e} \neq 0$
$f_0 = \tilde{f}_0 = 0$	$f_0 = 0,\ \tilde{f}_0 = -mv$

Видно, что в обоих случаях D имеет ненулевое вакуумное среднее.

Параграф 3. Механизм спонтанного нарушения SUSY Файе-О'Райферти

В механизме Файе-Илиопулоса вакуумное среднее приобретало вспомогательное поле D. Но есть теории, в которых вакуумное среднее приобретает вспомогательное поле f. Примером является теория с действием (m, λ, M для простоты считаем действительными)

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta (\phi_1^*\phi_1 + \phi_2^*\phi_2 + \phi_3^*\phi_3) + \\ + \left[\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta (m\phi_1\phi_2 + \lambda\phi_3(\phi_2^2 - M^2)) + \text{к.с.}\right], \tag{3.25}$$

здесь ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 - киральные суперполя

$$(1-\gamma_5)D_a\phi_i = 0,\ i = 1,2,3, \tag{3.26}$$

в компонентах данные поля имеют следующий вид

$$\phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu). \tag{3.27}$$

Найдем потенциал скалярных полей в этой теории. Как обычно, он получается при исключении вспомогательных полей f_i. Слагаемые в действии, которые содержат эти поля, имеют вид

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta (f_1^* f_1 + f_2^* f_2 + f_3^* f_3) + \\ + m f_1\varphi_2 + m f_2\varphi_1 + \lambda f_3\varphi_2^2 + 2\lambda\varphi_3\varphi_2 f_2 - \lambda M^2 f_3 + \\ + m f_1^*\varphi_2^* + m f_2^*\varphi_1^* + \lambda f_3^*(\varphi_2^*)^2 + 2\lambda\varphi_3^*\varphi_2^* f_2^* - \lambda M^2 f_3^*. \tag{3.28}$$

Вспомогательные поля исключаются с помощью уравнений движения, которые имеют вид $\begin{cases} 0 = \frac{\delta S}{\delta f_1^*} = f_1 + m\varphi_2^*, \\ 0 = \frac{\delta S}{\delta f_2^*} = f_2 + m\varphi_1^* + 2\lambda\varphi_3^*\varphi_2^*, \\ 0 = \frac{\delta S}{\delta f_3^*} = f_3 + \lambda(\phi_2^*)^2 - \lambda M^2. \end{cases}$

При этом очевидно, что все вспомогательные поля не могут одновременно иметь нулевое вакуумное среднее (если $f_{10} = 0$, то $f_{30} \neq 0$), а потенциал скалярных полей имеет вид

$$V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = m^2|\varphi_2|^2 + \lambda^2|\varphi_2^2 - M^2|^2 + |m\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2\varphi_3|^2 \geqslant 0, \tag{3.29}$$

при этом, можно показать, что будет выполнено соотношение

$$\sum_B n_B m_B^2 = \sum_F n_F m_F^2. \tag{3.30}$$

Таким образом, показано, что SUSY можно спонтанно нарушить не только с помощью вспомогательного поля D, но также и при помощи вспомогательного поля f.

Соотношение между массами бозонов и фермионов. Мягкое нарушение суперсимметрии

До сих пор были изучены модели спонтанного нарушения суперсимметрии, которые позволили объяснить различие в массах суперпартнеров. Во всех рассмотренных моделях было выявлено достаточно общее соотношение между массами суперпартнеров, которое накладывает серьезное ограничение на феноменологию.

Параграф 4. Соотношение между массами бозонов и фермионов в теориях со спонтанно нарушенной SUSY

При рассмотрении механизма Файе-Илиопулоса спонтанного нарушения суперсимметрии было выявлено следующее соотношение между массами бозонов m_B и фермионов m_F

$$\sum_B n_B m_B^2 = \sum_F n_F m_F^2, \tag{4.1}$$

где n_B, n_F - число степеней свободы бозонов и фермионов, соответственно.

Замечание: данное соотношение верно не только при спонтанном нарушении SUSY, но и при его отсутствии.

Данное соотношение можно получить исходя из алгебры SUSY, а именно из следующих каммутационных соотношений

$$\begin{aligned} &[Q_{ia}, P_\mu] = 0, \\ &\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu, \end{aligned} \tag{4.2}$$

здесь $i = \overline{1,N},\ a = \overline{1,4}$.

Алгебра SUSY является Z_2-градуированной алгеброй, в которой каммутационные и антикаммутационные соотношения можно определить единым образом. Для этого присвоим каждой величине множитель $(-1)^{P_A}$, где

$$P_A = \begin{cases} 0\ (mod\ 2) \text{ для грассманово четных величин,} \\ 1\ (mod\ 2) \text{ для грассманово нечетных величин,} \end{cases}$$

- грассманова четность. с помощью которой можно определить Z_2-градуированный каммутатор

$$[A, B\} = AB - (-1)^{P_A P_B} BA, \tag{4.3}$$

и операцию Str - SUSY-след, обобщающую обычный след

$$trA = \sum_n \langle n|A|n\rangle = \sum_n A\,|n\rangle\langle n|\,, \tag{4.4}$$

в последнем выражении необходимо переставить $\langle n|$ слева от оператора A. В SUSY при такой перестановке зарабатывается дополнительный знак минус в степени грассмановой четности переставляемых объектов, поэтому операция SUSY-следа будет иметь следующий вид

$$StrA = \sum_n A\,|n\rangle\langle n| = \sum_n (-1)^{P_n(P_A+P_n)}\langle n|A|n\rangle = \sum_n (-1)^{P_n(P_A+1)}\langle n|A|n\rangle, \tag{4.5}$$

так как $P_n^2 = P_n$. В частности, если выбрать оператор $A = P_\mu^2 = \eta_{\mu\nu}P^\mu P^\nu$ с собственным значением m^2, то

$$StrP_\mu^2 = \sum_n (-1)^{P_n}\langle n|P_\mu^2|n\rangle = \sum_B n_B m_B^2 - \sum_F n_F m_F^2, \tag{4.6}$$

так как $P_A = 0$ - для оператора $A = P_\mu^2$, $P_n = 0$ - для бозонов, $P_n = 1$ - для фермионов.

Поэтому необходимо доказать, что

$$StrP_\mu^2 = 0, \tag{4.7}$$

для этого докажем следующее тождество

$$StrAB = (-1)^{P_A P_B} Str(BA), \tag{4.8}$$

для обычного следа $trAB = trBA$. Действительно

$$\begin{aligned} StrAB &= \sum_n (-1)^{(P_A+P_B)P_n+P_n}\langle n|AB|n\rangle = \\ &= \sum_{n,m} (-1)^{(P_A+P_B+1)P_n}\langle n|A|m\rangle\langle m|B|n\rangle = \\ &= \sum_{n,m} (-1)^{(P_A+P_B+1)P_n}(-1)^{(P_n+P_m+P_A)(P_n+P_m+P_B)}\langle m|B|n\rangle\langle n|A|m\rangle, \end{aligned} \tag{4.9}$$

так как $P_X^2 = P_X,\ 2P_XP_Y = 0(mod\ 2)$, то

$$\begin{aligned} &P_n(P_A+P_B+1) + (P_n+P_m+P_A)(P_n+P_m+P_B) = \\ &= P_n(P_A+P_B+1) + \\ &+ P_n + P_m + P_AP_n + 2P_nP_m + P_AP_m + P_nP_B + P_mP_B + P_AP_B = \\ &= P_m(P_A+P_B+1) + P_AP_B + mod(2), \end{aligned} \tag{4.10}$$

здесь все цветные слааемые после приведения подобных удваеваются. В итоге, получается требуемое равенство

$$
\begin{aligned}
Str(AB) &= \sum_{n,m}(-1)^{P_A P_B}(-1)^{P_m)(P_A+P_B+1)}\langle m|B|n\rangle\langle n|A|m\rangle = \\
&= (-1)^{P_A P_B}\sum_{m}(-1)^{P_m)(P_A+P_B+1)}\langle m|BA|m\rangle = (-1)^{P_A P_B} Str(BA). \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Далее, выразим P_μ^2 через антикаммутационное соотношение для суперзарядов

$$
\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu, \qquad (4.12)
$$

домножив его на $\delta_{ij}(C\gamma^\nu)^{ba}$

$$
\begin{aligned}
(C\gamma^\nu)^{ba}\{Q_{ia}, Q_{ib}\} &= -2Ntr(\gamma^\mu C\cdot C\gamma^\nu)P_\mu = \\
&= [C^2 = -1, tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}] = 8NP^\nu, \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

получим выражение для P_μ

$$
P_\mu = \frac{1}{8N}(C\gamma_\mu)^{ba}\{Q_{ia}, Q_{ib}\}, \qquad (4.14)
$$

поэтому

$$
\begin{aligned}
StrP_\mu^2 &= Str(P_\mu\frac{1}{8N}(C\gamma_\mu)^{ba}\{Q_{ia}, Q_{ib}\}) = \frac{1}{8N}(C\gamma_\mu)^{ba}Str(P_\mu\{Q_{ia}, Q_{ib}\}) = \\
&= \frac{1}{8N}(C\gamma_\mu)^{ba}Str(P_\mu Q_{ia}Q_{ib} + P_\mu Q_{ib}Q_{ia}) = \\
&= \frac{1}{8N}(C\gamma_\mu)^{ba}Str(P_\mu Q_{ia}Q_{ib} - Q_{ia}P_\mu Q_{ib}) = \frac{1}{8N}(C\gamma_\mu)^{ba}Str([P_\mu, Q_{ia}]Q_{ib}), \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

так как $[Q_{ia}, P_\mu] = 0$. Таким образом, действительно получается заявленное тождество

$$
\sum_B n_B m_B^2 - \sum_F n_F m_F^2 = StrP_\mu^2 = 0, \qquad (4.16)
$$

как следствие алгебры SUSY.

Это равенство имеет важные феноменологические следствия. Большенство частиц в Стандартной Модели являются фермионами. Поэтому большенство суперпартнеров будут бозонами. Пока суперпартнеры еще не открыты из-за того, что они имеют большие массы. Это означает, что в среднем в SUSY обобщениях СМ бозоны должны быть тяжелее чем фермионы

$$
\sum_B n_B m_B^2 > \sum_F n_F m_F^2, \qquad (4.17)
$$

это создает сложности при построении реалистичного механизма нарушения SUSY. Поэтому в простейших моделях используется, так называемое, мягкое нарушение SUSY, когда в теорию добавляются некоторые специальные слагаемые, не инвариантные относительно преобразований SUSY.

Параграф 5. Мягкое нарушение SUSY

В отличии от спонтанного нарушения SUSY при мягком нарушении SUSY в теорию добавляются слагаемые, явно нарушающие SUSY. По определению, мягкими слагаемыми называются такие слагаемые, которые явно нарушают SUSY, но не вносят в теорию квадратичных расходимостей.

Анализ расходимостей паказывает, что существуют 4 типа таких слагаемых:

1) $-m_1^2\varphi^*\varphi$ (масса скаляра),

2) $-m_1^2\varphi^2 + \text{к.с.}$,

3) $-m_3\varphi^3 + \text{к.с.}$,

4) $-m_4\overline{\lambda}\lambda$ (масса калибрино),

здесь для простоты калибровочные индексы не выписываются. Такие слагамые можно записать в виде, похожем на SUSY-инварианты. Дейсвительно, рассмотрим киральное скалярное поле

$$(1-\gamma_5)D_a\phi = 0,$$
$$\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu), \tag{4.18}$$

где $y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta$. Также построим вспомогательный объект, так называемый, шпурион

$$\eta \equiv \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta,$$
$$\eta^* = \frac{1}{2}\overline{\theta}(1-\gamma_5)\theta,$$
$$\eta\eta^* = \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta\frac{1}{2}\overline{\theta}(1-\gamma_5)\theta = \frac{1}{2}(\overline{\theta}\theta)^2, \tag{4.19}$$

тогда в силу того, что максимально возможная степень θ равна 4,

$$\eta\eta^*\phi = \frac{1}{2}(\overline{\theta}\theta)^2\varphi(x),$$
$$\eta\eta^*\phi\phi^* = \frac{1}{2}(\overline{\theta}\theta)^2\varphi^*(x)\varphi(x), \tag{4.20}$$

поэтому

$$\int d^4xd^4\theta\eta^*\eta\phi^*\phi = \int d^4xd^4\theta\frac{1}{2}(\overline{\theta}\theta)^2\varphi^*(x)\varphi(x) =$$
$$= \left[\int d^4(\overline{\theta}\theta)^2 = 8\right] = 4\int d^4x\varphi(x)^*\varphi(x), \tag{4.21}$$

то есть вклад первого мягкого слагаемого $-m_1^2\varphi^*\varphi$ можно переписать в действии в SUSY виде

$$1)\ -m_1^2\int d^4x\varphi^*\varphi = -\frac{m_1^2}{4}\int d^4xd^4\theta\eta^*\eta\phi^*\phi, \tag{4.22}$$

Хотя это выражение и является интегралом от вещественной функции x^μ и θ^a по полному суперпространству, оно не будет SUSY-инвариантом, поскольку η - не суперполе.

В калибровочно инвариантных теориях данное выражение должно быть калибровочно инвариантным. Для этого модифицируем данное действие, с учетом калибровки Весса-Зумино

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\overline{\theta}\theta)(\overline{\theta}\gamma_5\lambda(x)) + \frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta)^2 D(x), \tag{4.23}$$

и следовательно, с учетом того, что максимально возможная степень θ равна 4,

$$\eta\eta^* e^{2V} = \eta\eta^*, \tag{4.24}$$

поэтому модифицированное действие булет иметь следующий вид

$$-\frac{m_1^2}{4}\int d^4x d^4\theta \eta^*\eta\phi^+ e^{2V}\phi. \tag{4.25}$$

Аналогичным образом, с помощью равенства

$$\int d^2\theta\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta = 4, \tag{4.26}$$

получаем, что

$$\begin{aligned}\int d^4x d^2\theta\eta\phi^2 = \int d^4x d^2\theta\frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta\varphi^2(y) = \\ = 2\int d^4x\varphi^2(y^\mu) = 2\int d^4x(\varphi^2(x^\mu) + \frac{i}{2}\overline{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\partial_\nu\varphi^2(x^\mu) + ...) \to \\ \to 2\int d^4x\varphi^2(x^\mu),\end{aligned} \tag{4.27}$$

поэтому вклад второго мягкого слагаемого можно записать в следующей форме

$$2)\ -m_2^2\int d^4x\varphi^2(x^\mu) + \text{к.с.} = -\frac{m_2^2}{2}\int d^4x d^2\theta\eta\phi^2 + \text{к.с.}, \tag{4.28}$$

где, с учетом выражения для шпуриона $\eta\frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta$ ясно видно, что данное слагаемое похоже на интеграл от кирального суперполя

$$(1-\gamma_5)D_a(\eta\phi^2) = 0, \tag{4.29}$$

однако здесь также надо помнить, что шпурион не является суперполем, поэтому полученное действие не является SUSY-инвариантом.

Для третьего слагаемого получим аналогичное выражение

$$3) - m_3\int d^4x\varphi^3(x^\mu) + \text{к.с.} = -\frac{m_3}{2}\int d^4x d^2\theta\eta\phi^3 + \text{к.с.}. \tag{4.30}$$

Для четвертого слагаемого необходимо рассмотреть SUSY-аналог тензора напряженностей калибровочного поля, который в калибровке Весса-Зумино имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
W_a(y,(1+\gamma_5)\theta) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\{-i\sqrt{2}\lambda_a(y)- \\
-\theta_a D(y) + \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a \cdot F_{\mu\nu}(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta\gamma^\mu D_\mu \lambda_a(y)\}, \\
W^a(y,(1+\gamma_5)\theta) = W_b C^{ba} = \{-i\sqrt{2}\overline{\lambda}(y)- \\
-\overline{\theta}D(y) - \frac{i}{2}\overline{\theta}\gamma^{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}(y) + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta\gamma^\mu D_\mu \overline{\lambda}(y)\}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)^a,
\end{gathered} \tag{4.31}$$

поэтому

$$\eta W^a W_a = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\eta(-i\sqrt{2})\overline{\lambda}\eta(-i\sqrt{2})\lambda = -\eta\overline{\lambda}(1+\gamma_5)\lambda, \tag{4.32}$$

поэтому в абелевом случае

$$\begin{gathered}
\int d^4x d^2\theta \eta W^a W_a = -2\int d^4x \overline{\lambda}(1+\gamma_5)\lambda, \\
Re\int d^4x d^2\theta \eta W^a W_a = -2\int d^4x \overline{\lambda}\lambda,
\end{gathered} \tag{4.33}$$

так как $\overline{\lambda}\lambda \in Re$, $\overline{\lambda}\gamma_5\lambda \in Im$. И окончательно получаем четвертое мягкое слагаемое в виде

$$4)\ -m_4\int d^4x\overline{\lambda}\lambda = \frac{m_4}{2}Re\int d^4x d^2\theta\eta W^a W_a, \tag{4.34}$$

в неабелевом случае

$$-m_4\int d^4x \overline{\lambda}^A \lambda^A = \frac{m_4}{e^2} trRe\int d^4x d^2\theta \eta W^a W_a, \tag{4.35}$$

где $W_a \equiv eW_a^A t^A$, $tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$. Вновь получилось выражение, похожее на интеграл от кирального суперполя по киральному суперпространству, но не являющееся SUSY-инвариантом.

Замечание: шпурион η - размерная величина, размерность которой $[\eta] = [\theta^2] = m^{-1}$.

Итак, мягкие слагаемые имеют вид:

$$\begin{gathered}
1)\ -m_1^2\int d^4x\varphi^+\varphi = -\frac{m_1^2}{4}\int d^4x d^4\theta\eta^*\eta\phi^+ e^{2V}\phi, \\
2)\ -(m_2^2)^{ij}\int d^4x\varphi_i\varphi_j = -\frac{1}{2}(m_2^2)^{ij}\int d^4x d^2\theta\eta\phi_i\phi_j, \\
3) -(m_3)^{ijk}\int d^4x\varphi_i\varphi_j\varphi_k = -\frac{1}{2}(m_3)^{ijk}\int d^4x d^2\theta\eta\phi_i\phi_j\phi_k, \\
4)\ -m_4\int d^4x\overline{\lambda}^A\lambda^A = \frac{m_4}{e^2}trRe\int d^4x d^2\theta\eta W^a W_a,
\end{gathered} \tag{4.36}$$

все эти выражения явно нарушают SUSY, но не вносят в теорию квадратичных расходимостей. Однако их можно рассматривать как некий остаток от спонтанного нарушения SUSY.

Действительно, пусть имеется суперсимметричное слагаемое

$$\int d^4xd^4\theta A\phi^+e^{2V}\phi, \tag{4.37}$$

где A вещественное суперполе, которое раскладывается по компонентам следующим образом

$$A(x,\theta) = ... + \frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta)^2 d(x), \tag{4.38}$$

где $d(x)$ - старшая компонента, которая после спонтанного нарушения SUSY преобретает вакуумное среднее $d_0 = v \neq 0$. Тогда при энергиях много меньших v SUSY-инвариант

$$\int d^4xd^4\theta A\phi^+e^{2V}\phi \to \int d^4xd^4\theta\frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta)^2 v\phi^+e^{2V}\phi, \tag{4.39}$$

который, как нетрудно видеть после замены $\frac{1}{2}(\overline{\theta}\theta)^2 = \eta\eta^*$, с точностью до постоянных множителей дает первое мягкое слагаемое.

Аналогичным образом, если есть взаимодействие с киральным суперполем

$$\int d^4xd^2\theta B\phi^2, \tag{4.40}$$

где

$$(1-\gamma_5)D_a B = 0,$$
$$B(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = ... + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_B(y^\mu), \tag{4.41}$$

тогда при низких энергиях $f_{B0} = v$, с учетом $\eta = \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta$ получаем второе мягкое слагаемое

$$-\int d^4xd^2\theta B\phi^2 \to -v\int d^4xd^2\theta\eta\phi^2. \tag{4.42}$$

Оставшиеся мягкие слагаемые также можно рассматривать как остаток спонтанного нарушения SUSY от SUSY-инвариантных взаимодействий

$$-\int d^4xd^2\theta B\phi^3 \to -v\int d^4xd^2\theta\eta\phi^3,$$
$$-\int d^4xd^2\theta BW^aW_a \to -v\int d^4xd^2\theta\eta W^aW_a. \tag{4.43}$$

Вид мягких слагаемых позволяет понять, почему суперпартнеры фермионов и калибровочных бозонов не видны в эксперименте.

Мягкие массы могут возникать лишь для скаляров и калибрино, но не для фермионов (кварков и лептонов) и калибровочных бозонов.

Состав полей и действие МСММ

Глава 2. Минимальная Суперсимметричная Стандартная Модель (МССМ).

Параграф 1. Состав полей МССМ

МССМ - простейшая SUSY расширение Стандартной модели.

Замечание: строго говоря, суперсимметричной данная модель не является, поскольку нарушение суперсимметрии происходит в ней за счет мягких слагаемых.

Как и Стандартная Модель, данная теория является калибровочной теорией с группой

$$G = SU(3)\times SU(2)\times U(1), \tag{5.1}$$

поэтому в ней будет 3 калибровочных поля, которые теперь включаются в состав трех вещественных калибровочных суперполей

$$\underset{SU(3)}{V(x,\theta)};\ \underset{SU(2)}{V(x,\theta)};\ \underset{U(1)}{V(x,\theta)}, \tag{5.2}$$

при этом, как обычно, в калибровке Весса-Зумино

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\overline{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta A_{\mu}(x) + i\sqrt{2}(\overline{\theta}\theta)(\overline{\theta}\gamma_5\lambda(x)) + \frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta)^2 D(x), \tag{5.3}$$

также в теории будет 3 константы связи $e_1,\ e_2,\ e_3$, так как калибровочная группа - прямое произведение трех сомножителей.

Кварки, лептоны, и хиггсовские скалярные поля теперь будут компонентами киральных суперполей

$$(1-\gamma_5)D\phi = 0, \tag{5.4}$$

где

$$D_a \equiv \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^a} - i(\gamma^{\mu}\theta)_a\partial_{\mu}, \tag{5.5}$$

- SUSY-ковариантная производная. Киральное суперполе в компонентах имеет вид

$$\phi_i(y^{\mu},\theta) = \varphi_i(y^{\mu}) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_i(y^{\mu}) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_i(y^{\mu}), \tag{5.6}$$

где $y^{\mu} \equiv x^{\mu} + \frac{i}{2}\overline{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta$, $\varphi_i(y^{\mu})$ - комплексный скаляр, $\psi_i(y^{\mu})$ - майорановский спинор, $f_i(y^{\mu})$ - вспомогательное поле.

Замечание: суперполе мы будем обозначать большими буквами, а соответствующие поля Стандартной Модели - маленькими.

Замечание: Стандартная модель формулируется в терминах вейлевских спиноров в то время, как в суперполя входят майорановские спиноры. Поэтому необходимо вспомнить взаимооднозначное соответствие между вейлевскими и майорановскими спинорами

$$\begin{aligned} \psi_M \leftrightarrow \psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi, \\ \psi_M \leftrightarrow \psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где очевидно, что можно перейти, к примеру, от майорановского спинора $\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$ к левому вейлевскому спинору $\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ с помощью проектора $\frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}$ и обратно. Аналогично, для правого вейлевского спинора. Пользуясь таким взаимно-однозначным соответствием, можно суперполя выражать, к примеру, через правые вейлевские спиноры, а не через майорановские. Однако, возникает вопрос, как включать тогда в суперполя левые вейлевские спиноры. Для этого можно воспользоваться следующим равенством

$$(\psi_L)^C = (\psi^C)_R, \tag{5.8}$$

где $\psi^C = (\psi^T C\gamma^0)^+ = -\gamma^0 C\psi^*$ - зарядово сопряженный спинор. Данное равенство получается следующим образом

$$\begin{aligned} (\psi_L)^C = -\gamma^0 C\psi_L^* = -\gamma^0 C(\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi)^* = \\ = -\gamma^0 C\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^* = [C = i\gamma^0\gamma^2] = \\ = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)(-\gamma^0 C\psi^*) = -\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi^C = (\psi^C)_R. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Поэтому, когда будет требоваться включить левые вейлевские спиноры в суперполя, необходимо будет включить не сами левые спиноры, а их зарядово сопряженные величины

Запишем квантовые числа по группе $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ для киральных суперполей материи

Суперполе	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$ (Y)	Поле СМ
$\tilde{Q}^I = \begin{pmatrix} \tilde{U} & \tilde{D} \end{pmatrix}^I$	антифунд.	фунд.	$-\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} u^C \\ d^C \end{pmatrix}^I_R$
U^I	фунд.	трив.	$\frac{2}{3}$	u^I_R
D^I	фунд.	трив.	$-\frac{1}{3}$	d^I_R
$\tilde{L}^I = \begin{pmatrix} \tilde{N} & \tilde{E} \end{pmatrix}^I$	трив.	фунд.	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \nu^C & e^C \end{pmatrix}^I_R$
N^I	трив.	трив.	0	ν^I_R
E^I	трив.	трив.	-1	e^I_R
$\Phi_d = (\phi_{d_1}, \phi_{d_2})$	трив.	фунд.	$\frac{1}{2}$	$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$
$\Phi_u = (\phi_{u_1}, \phi_{u_2})$	трив.	фунд.	$-\frac{1}{2}$	-

Здесь $I = \overline{1,3}$ - индекс поколения, также учтено, что $\psi^C = -\gamma^0 C \psi^*$ лежит в сопряженном представлении к представлению ψ, а фундаментальное и антифундаментальное представления $SU(2)$ являются унитарно эквивалентными.

Замечание: в представленной таблице присутствуют два суперполя Хиггса вместо одного, как в СМ. Оказывается одного суперполя Хиггса недостаточно, чтобы придать массу всем полям МССМ, поэтому необходимо добавление дополнительного поля Φ_u, у которого нету партнера в СМ.

Перейдем теперь к описанию действия МССМ.

Параграф 2. Действие МССМ

Удобно разбить действие МССМ на ряд характерных частей

$$S = S_{SYM} + S_{WZ} + S_{\text{суперп.}} + S_{\text{мягкое}}, \tag{5.10}$$

где S_{SYM} - действие SUSY Янга-Миллса (определяется калибровочной группой), S_{WZ} - калибровочно инвариантное обобщение модели Весса-Зумино, включающее кинетические слагаемые для скаляров, спиноров, а также взаимодействие с калибровочными полями (определяется квантовыми числами киральных суперполей), $S_{\text{суперп.}}$ - суперпотенциал (аналог юкавских слагаемых СМ). Данные слагаемые являются SUSY-инвариантными. $S_{\text{мягкое}}$ - слагаемые приводящие к мягкому нарушению SUSY (не SUSY-инвариантны), обсуждавшиеся на прошлой лекции.

Выпишем в явном виде каждое из этих слагаемых. Начнем с действия SUSY

Янга-Миллса

$$S_{SYM} = \frac{1}{2e_3^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta \underset{SU(3)}{W^a W_a} + \\ + \frac{1}{2e_2^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta \underset{SU(2)}{W^a W_a} + \frac{1}{4} Re \int d^4x d^2\theta \underset{U(1)}{W^a W_a}, \tag{5.11}$$

где для $SU(3)$ и $SU(2)$

$$W_a(y, (1+\gamma_5)\theta) \equiv \frac{1}{32}\overline{D}(1-\gamma_5)D\left[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}\right], \tag{5.12}$$

а для $U(1)$

$$\underset{U(1)}{W_a(y, (1+\gamma_5)\theta)} \equiv \frac{1}{16}\overline{D}(1-\gamma_5)D\left[(1+\gamma_5)D_a \underset{U(1)}{V}\right] = \\ = \frac{1}{32e_1}\overline{D}(1-\gamma_5)D\left[\underset{U(1)}{e^{-2V}}(1+\gamma_5)D_a \underset{U(1)}{e^{2e_1 V}}\right], \tag{5.13}$$

в данном случае удобно вынести константу связи e_1 для удобства дальнейших обозначений.

Таким образом, S_{SYM} - сумма кинетических слагаемых для калибровочных суперполей, присутствующих в МССМ.

В компонентном виде, в калибровке Весса-Зумино

$$\frac{1}{4e^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta W^a W_a = \frac{2}{e^2} tr \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\overline{\lambda}\gamma^\mu D_\mu \lambda + \frac{1}{2}D^2\right), \tag{5.14}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu], \\ D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i[A_\mu, \lambda]. \tag{5.15}$$

Следующее слагаемое S_{WZ} представляет собой сумму всех кинетических членов для киральных суперполей материи, которые имеют структуру

$$\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V}\phi, \tag{5.16}$$

которое в калибровке Весса-Зумино в компонентах имеет следующий вид

$$\int d^4x (D_\mu \varphi^+ D^\mu \varphi + i\overline{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu \psi + f^+ f + \\ + \varphi^+ D\varphi + i\sqrt{2}\overline{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\sqrt{2}\varphi^+\overline{\lambda}(1+\gamma_5)\psi), \tag{5.17}$$

однако теперь есть много киральных суперполей и 3 калибровочных суперполя, поэтому калибровочно инвариантное обобщение модели Весса-Зумино будет иметь вид

$$S_{WZ} = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \Big(\begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{D} \end{pmatrix}^{I+} \exp\Big\{(-2 \underset{SU(3)}{V^T} + \underset{SU(2)}{2V} - \frac{e_1}{3} \underset{U(1)}{V})\Big\} \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{D} \end{pmatrix}^{I} +$$
$$+ U^{I+} \exp\Big\{(2 \underset{SU(3)}{V} + \frac{4e_1}{3} \underset{U(1)}{V})\Big\} U^I + D^{I+} \exp\Big\{(2 \underset{SU(3)}{V} - \frac{2e_1}{3} \underset{U(1)}{V})\Big\} D^I +$$
$$+ \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^{I+} \exp\Big\{(2 \underset{SU(2)}{V} + e_1 \underset{U(1)}{V})\Big\} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^{I} + N^{I+}N^I + E^{I+} \exp\Big\{(-2e_1 \underset{U(1)}{V})\Big\} E^I +$$
$$+ \phi_d^+ \exp\Big\{(2 \underset{SU(2)}{V} + e_1 \underset{U(1)}{V})\Big\} \phi_d + \phi_u^+ \exp\Big\{(2 \underset{SU(2)}{V} - e_1 \underset{U(1)}{V})\Big\} \phi_u. \qquad (5.18)$$

Здесь коэффициенты перед калибровочными полями V определены квантовыми числами из таблицы (5.1).

Теперь перейдем к слагаемому $S_{\text{суперп.}}$ - суперпотенциалу

$$S_{\text{суперп.}} = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta g(\text{киральные суперполя}) + \text{к.с.}, \qquad (5.19)$$

где g - аналитическая функция киральных суперполей теории.

Замечание: данное действие является инвариантом относительно SUSY-преобразований только если функция g является киральным полем, а это возможно только при условии ее аналитичности, то есть при условии, что данная функция зависит только от киральных полей, но не от их комплексных сопряжений.

Вообще говоря, также необходимо потребовать, чтобы данное действие было калибровочно инвариантно, а также соответствующая теория должна быть перенормируемой, то есть функция g не должна быть больше третьей степени по киральным полям. Таким образом, функция g, с учетом перечисленных требований будет иметь следующий вид

$$S_{\text{суперп.}} = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \big[(Y_u)_{IJ} \underset{Y=-\frac{1}{6}}{(\tilde{U}, \tilde{D})^{aI}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Y=-\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix}} \underset{Y=\frac{2}{3}}{U_a^J} +$$
$$+ (Y_d)_{IJ} \underset{Y=-\frac{1}{6}}{(\tilde{U}, \tilde{D})^{aI}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Y=\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}} \underset{Y=-\frac{1}{3}}{D_a^J} +$$
$$+ (Y_\nu)_{IJ} \underset{Y=\frac{1}{2}}{(\tilde{N}, \tilde{E})^{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Y=-\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix}} \underset{Y=0}{N^J} + \qquad (5.20)$$

$$+(Y_e)_{IJ}\underset{Y=\frac{1}{2}}{(\tilde{N},\tilde{E})^I}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\underset{Y=\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}}\underset{Y=-1}{E^J}+$$

$$+\frac{1}{2}M_{IJ}\underset{Y=0}{N_I}\underset{Y=0}{N_J}+\mu\underset{Y=-\frac{1}{2}}{(\phi_{u1},\phi_{u2})}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\underset{Y=\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}}]+\text{к.с.} \tag{5.21}$$

Данное действие, очевидно, калибровочно инвариантно. Инвариантность относительно $SU(3)$-преобразований следует из инвариантности свертки по цветовым индексам

$$\varphi^a\psi_a \to (\omega_3^*)^a{}_b\varphi^b(\omega_3)_a{}^c\psi_c = (\omega_3^+)_b{}^a(\omega_3)_a{}^c\varphi^b\psi_c = \delta_b^c\varphi^b\psi_c = \varphi^b\psi_b. \tag{5.22}$$

Инвариантность относительно $SU(2)$-преобразований следует из того, что

$$(\varphi_1,\varphi_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \varphi_1\chi_2-\varphi_2\chi_1 = \varepsilon^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\chi_\beta, \tag{5.23}$$

- очевидный инвариант, так как $\det\omega_2 = 1$.

Инвариантность относительно $U(1)$-преобразований следует из того, что сумма гиперзарядов Y в экспонентах для каждого слагаемого оказывается равной нулю (все гиперзаряды подписаны в формуле для суперпотенциала).

Таким образом, доказана инвариантность действия относительно калибровочных преобразований $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$.

Замечание: в Стандартной модели присутствовали слагаемые следующего вида

$$\int d^4x d^2\theta(\tilde{U},\tilde{D})^a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\phi_{d2}^* \\ \phi_{d1}^* \end{pmatrix}U_a, \tag{5.24}$$

однако для SUSY теорий такие слагаемые недопустимы, поскольку ϕ^* - антикирально и, следовательно, нарушает аналитичность функции g, которая требуется для SUSY-инвариантности. Тем не менее, подобные слагаемые обеспечивают массивность полей теории, так что их отсутствие приводит к безмассовости части спектра. Поэтому в МССМ вводится два хиггсовских дуплета φ_d и φ_u. Откуда следует, что количество хиггсовских бозонов в МССМ будет равно $2\cdot2\cdot2-3 = 8-3 = 5$ (В СМ $2\cdot2-3 = 4-3 = 1$ хиггсовское поле). Механизм спонтанного нарушения $SU(2)\times U(1)$ в МССМ будет детально изучаться далее.

Потенциал хиггсовских полей в МССМ

На прошлой лекции было введено действие МССМ

$$S = S_{SYM} + S_{WZ} + S_{\text{суперп.}} + S_{\text{мягкое}}, \tag{6.1}$$

где S_{SYM} - действие SUSY Янга-Миллса, S_{WZ} - калибровочно инвариантное обобщение модели Весса-Зумино, $S_{\text{суперп.}}$ - суперпотенциал (аналог юкавских слагаемых СМ). Данные слагаемые являются SUSY-инвариантными. $S_{\text{мягкое}}$ - слагаемые приводящие к мягкому нарушению SUSY (не SUSY-инвариантны).

При этом, МССМ является калибровочной теорией с группой

$$G = SU(3) \times SU(2) \times U(1). \tag{6.2}$$

Кварки, лептоны, и хиггсовские поля являются компонентами киральных суперполей ϕ:

$$(1-\gamma_5)D\phi = 0, \tag{6.3}$$

при этом спинорные поля ψ входят следующим образом в киральные суперполя

$$\begin{aligned} &\psi_R \to \phi, \\ &\psi_L \to (\psi_L)^C = (\psi^C)_R \to \phi, \end{aligned} \tag{6.4}$$

а хиггсовский дуплет СМ входит с состав SUSY-хиггсовского дуплета

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

и помимо SUSY-дуплета ϕ_d присутствует также хиггсовский дуплет ϕ_u, который требуется для обеспечивания массивности полей материи (к примеру, верхних кварков), не нарушая при этом SUSY.

Первые три слагаемые действия МССМ (15.3) были представлены в явном виде на прошлой лекции. В данной лекции будут записаны в явной форме мягкие слагаемые $S_{\text{мягкое}}$, нарушающие SUSY

$$S_{\text{мягкое}} = S_{\text{массы калибрино}} + S_{\text{массы скаляров}} + S_{\text{мягкий суперпотенциал}}, \tag{6.6}$$

где данное действие было разбито на слагаемое $S_{\text{массы калибрино}}$ - обеспечивающее массой суперпартнеры калибровочного поля после СН SUSY, слагаемое $S_{\text{массы скаляров}}$

- обеспечивающее массой суперпартнеры кварков и лептонов после СН SUSY, и слагаемое $S_{\text{мягкий суперпотенциал}}$ - мягкие слагаемые, по форме напоминающие действие для суперпотенциала $S_{\text{суперп.}}$.

Для начала, выпишем в явной форме слагаемое $S_{\text{массы калибрино}}$. Для этого вспомним, как выглядит мягкое слагаемое для калибрино

$$\frac{M}{e^2} trRe \int d^4x d^2\theta \eta W^a W_a = -\frac{2M}{e^2} \int d^4x \overline{\lambda}\lambda =$$
$$= [\lambda = e\lambda^A t^A, tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}] = -M \int d^4x \overline{\lambda}^A \lambda^A \tag{6.7}$$

которое по форме напоминает действие для SUSY Янга-Миллса

$$S_{SYM} = \frac{1}{2e^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta W^a W_a \tag{6.8}$$

и которое отличается от данного слагаемого наличием шпуриона η и размерного массового множителя M. Тогда для калибрино МССМ, ввиду наличия трех калибровочных полей, мягкое слагаемое будет иметь вид

$$S_{\text{массы калибрино}} = \frac{M_3}{e_3^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta \eta \underset{SU(3)}{W^a W_a} +$$
$$+ \frac{M_2}{e_2^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta \eta \underset{SU(2)}{W^a W_a} + \frac{M_1}{2} Re \int d^4x d^2\theta \eta \underset{U(1)}{W^a W_a}, \tag{6.9}$$

где $\eta \equiv \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta$ - шпурион. Данные слагаемые обеспечивают массу спинорным суперпартнерам калибровочных бозонов - калибрино.

Следующее мягкое слагаемое $S_{\text{массы скаляров}}$ по форме напоминает S_{WZ} и содержит слагаемые вида

$$-\frac{1}{4} m^2 \int d^4x d^4\theta \eta^* \eta \phi^+ e^{2V} \phi = [\eta\eta^* = \frac{1}{2}(\overline{\theta}\theta)^2] = -m^2 \int d^4x \varphi^+ \varphi, \tag{6.10}$$

для $S_{\text{массы скаляров}}$ имеем следующее выражение

$$S_{\text{массы скаляров}} =$$
$$= \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \eta^* \eta (m_Q^2 \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{D} \end{pmatrix}^+ \exp\left\{(-2 \underset{SU(3)}{V^T} + \underset{SU(2)}{2V} - \frac{e_1}{3} \underset{U(1)}{V})\right\} \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{D} \end{pmatrix} +$$
$$+ m_U^2 U^+ \exp\left\{(2 \underset{SU(3)}{V} + \frac{4e_1}{3} \underset{U(1)}{V})\right\} U + m_D^2 D^+ \exp\left\{(2 \underset{SU(3)}{V} - \frac{2e_1}{3} \underset{U(1)}{V})\right\} D +$$
$$+ m_L^2 \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^+ \exp\left\{(2 \underset{SU(2)}{V} + e_1 \underset{U(1)}{V})\right\} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix} + m_N^2 N^+ N +$$
$$+ m_E^2 E^+ \exp\left\{(-2e_1 \underset{U(1)}{V})\right\} E +$$
$$+ m_1^2 \phi_u^+ \exp\left\{(2 \underset{SU(2)}{V} - e_1 \underset{U(1)}{V})\right\} \phi_u + m_2^2 \phi_d^+ \exp\left\{(2 \underset{SU(2)}{V} + e_1 \underset{U(1)}{V})\right\} \phi_d), \tag{6.11}$$

где для краткости не выписаны индексы поколений и цветовые индексы, а также $\phi_d = \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}, \phi_u = \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix}$.

Наконец, последнее слагаемое $S_{\text{мягкий суперпотенциал}}$ аналогично $S_{\text{суперп.}}$

$$\begin{aligned}
S_{\text{мягкий суперп.}} = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta\eta [A_u(\tilde{U},\tilde{D})^a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix} U_a + \\
+A_d(\tilde{U},\tilde{D})^a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix} D_a + \\
+A_\nu(\tilde{N},\tilde{E}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix} N + \\
+Y_e(\tilde{N},\tilde{E}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix} E + \\
-\frac{1}{2}\mathcal{M}^2 N^2 - \mu B(\phi_{u1},\phi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}] + \text{к.с.},
\end{aligned} \tag{6.12}$$

где $[A] = [\mathcal{M}] = [B] = m$.

Следующим шагом необходимо исследовать вопрос о спонтанном нарушении калибровочной симметрии.

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1) \to SU(3)\times U(1)_{em}. \tag{6.13}$$

Для этого прежде всего, необходимо понять, будут ли скалярные поля МССМ приобретать вакуумные средние. Так как в данной теории присутствует очень много скалярных полей (скварки, слептоны, хиггсы), то будем предполагать, что параметры модели (прежде всего мягкие массы) таковы, что вакуумные средние приобретают именно хиггсовские поля.

Для нахождения цепочки нарушения симметрии необходимо

1. Найти потенциал хиггсовских скаляров.
2. Найти вакуумное состояние.
3. Найти малую группу.

Поэтому, для начала, построим потенциал хиггсовских полей.

Параграф 3. Потенциал хиггсовских полей в МССМ

В данном параграфе речь пойдет о киральных суперполях

$$\phi_d = \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}, \ \phi_u = \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

у которых низшие компоненты являются комплексными скалярными полями

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}, \ \varphi_d = \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

для которых и будет искаться потенциал $V(\varphi_u, \varphi_d)$. Как показано в предыдущих лекциях, данный потенциал появляется из-за

1) исключения вспомогательных полей,

2) мягких слагаемых, нарушающих SUSY.

Более конкретно

$$V(\varphi_u, \varphi_d) = V_D + V_f + V_m + V_{\mu B}, \tag{6.16}$$

где

1) V_D получается при исключении вспомогательных полей D,

2) V_f получается при исключении вспомогательных полей f,

3) V_m из мягких слагаемых с m_1, m_2,

4) $V_{\mu B}$ - из μB мягкого слагаемого из суперпотенциала.

Будем последовательно вычислять все эти вклады, учитывая, что потенциал входит в Лагранжиан со знаком минус.

1) V_D получается из следующих слагаемых в действии МССМ: из S_{SYM}

$$S_{SYM} \to \frac{1}{2}(\underset{SU(3)}{D^A})^2 + \frac{1}{2}(\underset{SU(2)}{D^A})^2 + \frac{1}{2}(\underset{U(1)}{D})^2, \tag{6.17}$$

так как

$$\begin{aligned} S_{SYM} &= \frac{1}{2e^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta W^a W_a \to \frac{2}{e^2} tr \int d^4x \frac{1}{2} D^2 = \\ &= [D = eD^A t^A] = tr \int d^4x D^A D^B t^A t^B = \frac{1}{2} \int d^4x (D^A)^2, \end{aligned} \tag{6.18}$$

из S_{WZ} после интегрирования по θ получим

$$S_{WZ} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi \to \int d^4x \varphi^+ D \varphi, \tag{6.19}$$

из всех подобных слагаемых, вклад дают слагаемые с хиггсовскими полями

$$\begin{aligned}
S_{WZ} \to \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta (\phi_d^+ \exp\left\{\left(2\underset{SU(2)}{V} + e_1 \underset{U(1)}{V}\right)\right\}\phi_d + \\
+\phi_u^+ \exp\left\{\left(2\underset{SU(2)}{V} - e_1 \underset{U(1)}{V}\right)\right\}\phi_u) \to \\
\to \int d^4x (\phi_d^+ \left(e_2 \underset{SU(2)}{D^A}\frac{\sigma^A}{2} + \frac{e_1}{2}\underset{U(1)}{D^A}\right)\phi_d + \\
+\phi_u^+ \left(e_2 \underset{SU(2)}{D^A}\frac{\sigma^A}{2} - \frac{e_1}{2}\underset{U(1)}{D^A}\right)\phi_u),
\end{aligned} \tag{6.20}$$

где было учтено, что $\underset{SU(2)}{V} = e_2 V^A \frac{\sigma^A}{2}$.

Итого, суммарный вклад в V_D

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSSM} \to \frac{1}{2}(\underset{SU(3)}{D^A})^2 + \frac{1}{2}(\underset{SU(2)}{D^A})^2 + \frac{1}{2}(\underset{U(1)}{D})^2 + \phi_d^+ \left(e_2 \underset{SU(2)}{D^A}\frac{\sigma^A}{2} + \frac{e_1}{2}\underset{U(1)}{D^A}\right)\phi_d + \\
+\phi_u^+ \left(e_2 \underset{SU(2)}{D^A}\frac{\sigma^A}{2} - \frac{e_1}{2}\underset{U(1)}{D^A}\right)\phi_u,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

для получения потенциала, необходимо данные вспомогательные поля исключить на уравнениях движения

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\delta S}{\delta \underset{SU(3)}{D^A}} = \underset{SU(3)}{D^A}, \\
0 = \frac{\delta S}{\delta \underset{SU(2)}{D^A}} = \underset{SU(2)}{D^A} + \frac{e_2}{2}\left(\phi_d^+ \sigma^A \phi_d + \phi_u^+ \sigma^A \phi_u\right), \\
0 = \frac{\delta S}{\delta \underset{U(1)}{D}} = \underset{U(1)}{D} + \frac{e_1}{2}\left(\phi_d^+ \phi_d - \phi_u^+ \phi_u\right),
\end{aligned} \tag{6.22}$$

поэтому после исключения вспомогательных полей по стандартным правилам получим

$$\begin{aligned}
V_D = \frac{1}{2}(\underset{SU(3)}{D^A})^2 + \frac{1}{2}(\underset{SU(2)}{D^A})^2 + \frac{1}{2}(\underset{U(1)}{D})^2|\text{уравнения движения} = \\
= \frac{e_2^2}{8}\left(\phi_d^+ \sigma^A \phi_d + \phi_u^+ \sigma^A \phi_u\right)^2 + \frac{e_1^2}{8}\left(\phi_d^+ \phi_d - \phi_u^+ \phi_u\right)^2 \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{6.23}$$

откуда видно, что четвертая степень скалярных полей с нужным знаком получается автоматически, при этом коэффициенты также получаются положительными.

Замечание: в отличии от Стандартной модели, в которой подобные слагаемые добавлялись руками, в МССМ данные слагаемые необходимы для согласования SUSY и калибровочной инвариантности.

2) V_f получается после исключения вспомогательных полей f, входящие в действие МССМ через действие для суперпотенциала $S_{\text{суперп.}}$

$$S_{\text{суперп.}} \to \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \mu(\phi_{u1},\phi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix} + \text{к.с.} \to$$
$$\to \int d^4x \left(\mu(f_{u1},f_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} + \mu(\varphi_{u1},\varphi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{d1} \\ f_{d2} \end{pmatrix} \right) +$$
$$+ \left(\mu^*(f^*_{u1},f^*_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^*_{d1} \\ \varphi^*_{d2} \end{pmatrix} + \mu^*(\varphi^*_{u1},\varphi^*_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^*_{d1} \\ f^*_{d2} \end{pmatrix} \right), \qquad (6.24)$$

и через S_{WZ}

$$S_{WZ} \to$$
$$\to \int d^4x (\phi_d^+ \left(e_2 \underset{SU(2)}{D^A} \frac{\sigma^A}{2} + \frac{e_1}{2} \underset{U(1)}{D^A} \right) \phi_d + \phi_u^+ \left(e_2 \underset{SU(2)}{D^A} \frac{\sigma^A}{2} - \frac{e_1}{2} \underset{U(1)}{D^A} \right) \phi_u) \to$$
$$\to \int d^4x (f_d^+ f_d + f_u^+ f_u), \qquad (6.25)$$

Итого, суммарный вклад в V_D

$$\mathcal{L}_{MSSM} \to \left(\mu(f_{u1},f_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} + \mu(\varphi_{u1},\varphi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{d1} \\ f_{d2} \end{pmatrix} \right) +$$
$$+ \left(\mu^*(f^*_{u1},f^*_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^*_{d1} \\ \varphi^*_{d2} \end{pmatrix} + \mu^*(\varphi^*_{u1},\varphi^*_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^*_{d1} \\ f^*_{d2} \end{pmatrix} \right) +$$
$$+(f_d^+ f_d + f_u^+ f_u). \qquad (6.26)$$

Уравнения движения для f

$$0 = \frac{\delta S}{\delta f_{d_1}} = f^*_{d_1} - \mu\varphi_{u_2}, \quad 0 = \frac{\delta S}{\delta f_{d_2}} = f^*_{d_2} + \mu\varphi_{u_1},$$
$$0 = \frac{\delta S}{\delta f_{u_1}} = f^*_{u_1} + \mu\varphi_{d_2}, \quad 0 = \frac{\delta S}{\delta f_{u_2}} = f^*_{u_2} - \mu\varphi_{d_1}, \qquad (6.27)$$

поэтому после исключения f_u, f_d получим

$$V_f = f_d^+ f_d + f_u^+ f_u = |\mu|^2(\varphi_u^+\varphi_u + \varphi_d^+\varphi_d) \geqslant 0. \qquad (6.28)$$

3) V_m получается из мягких слагаемых для m_1, m_2

$$S_{\text{мягкое}} \to -\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \eta^*\eta (m_1^2 \phi_u^+ \exp\left\{ \left(2\underset{SU(2)}{V} - e_1 \underset{U(1)}{V} \right) \right\} \phi_u +$$
$$+m_2^2\phi_d^+ \exp\left\{ \left(2\underset{SU(2)}{V} + e_1 \underset{U(1)}{V} \right) \right\} \phi_d) \to \int d^4x (m_1^2 \varphi_u^+\varphi_u + m_2^2\varphi_d^+\phi_d) \qquad (6.29)$$

то есть

$$V_m = m_1^2 \varphi_u^+ \varphi_u + m_2^2 \varphi_d^+ \phi_d. \tag{6.30}$$

4) Наконец, $V_{\mu B}$ получается из мягкого слагаемого $S_{\text{мягкий суперпотенциал}}$

$$S_{\text{суперп.}} \to -\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \left[\eta \mu B(\phi_{u1}, \phi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}\right] + \text{к.с.} =$$
$$= [\eta \equiv \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta] =$$
$$= -\int d^4x \left[\mu B(\varphi_{u1}, \varphi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}\right] + \text{к.с.}, \tag{6.31}$$

то есть соответствующий потенциал будет иметь вид

$$V_{\mu B} = \mu B(\varphi_{u1}, \varphi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} + (\mu B)^*(\varphi_{u1}^*, \varphi_{u2}^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1}^* \\ \varphi_{d2}^* \end{pmatrix}. \tag{6.32}$$

Таким образом, потенциал скалярных полей в МССМ будет иметь вид

$$V(\varphi_u, \varphi_d) = \frac{e_2^2}{8}\left(\varphi_d^+ \sigma^A \varphi_d + \varphi_u^+ \sigma^A \varphi_u\right)^2 + \frac{e_1^2}{8}\left(\varphi_d^+ \varphi_d - \varphi_u^+ \varphi_u\right)^2 +$$
$$+(m_1^2 + |\mu|^2)\varphi_u^+ \varphi_u + (m_2^2 + |\mu|^2)\varphi_d^+ \phi_d +$$
$$+\mu B(\phi_{u1}, \phi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix} +$$
$$+(\mu B)^*(\phi_{u1}^*, \phi_{u2}^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1}^* \\ \phi_{d2}^* \end{pmatrix}. \tag{6.33}$$

Вообще говоря, данное выражение можно упростить, пользуясь тем, что в пространстве 2×2 матриц базисными матрицами являются $1_2, \sigma^A$, для которых можно записать соотношение полноты

$$(\sigma^A)_i^j (\sigma^A)_k^l + \delta_i^j \delta_k^l = 2\delta_i^l \delta_k^j, \tag{6.34}$$

данное соотношение можно доказать, сворачивая его с δ_j^i и с $(\sigma^B)_j^i$. Сворачивая с δ_j^i получим

$$tr\sigma^A \cdot (\sigma^A)_k^l + 2\delta_k^l = 2\delta_k^l, \tag{6.35}$$

- тождество. Сворачивая с $(\sigma^B)_j^i$ получим

$$tr(\sigma^A\sigma^B)\cdot(\sigma^A)_k^l + tr(\sigma^B)\delta_k^l = [tr(\sigma^A\sigma^B) = 2\delta^{AB},\ tr(\sigma^A) = 0] = 2(\sigma^B)_k^l, \tag{6.36}$$

- снова тождество.

Тогда, например

$$\begin{aligned}&\varphi_d^+\sigma^A\varphi_d\cdot\varphi_u^+\sigma^A\varphi_u=\varphi_d^{*i}\varphi_{dj}\cdot\varphi_u^{*k}\varphi_{ul}(\sigma^A)_i^j(\sigma^A)_k^l=\\&=[(\sigma^A)_i^j(\sigma^A)_k^l=2\delta_i^l\delta_k^j-\delta_i^j\delta_k^l]=\varphi_d^{*i}\varphi_{dj}\cdot\varphi_u^{*k}\varphi_{ul}(2\delta_i^l\delta_k^j-\delta_i^j\delta_k^l)=\\&=2(\varphi_d^+\varphi_u)\cdot(\varphi_u^+\varphi_d)-(\varphi_d^+\varphi_d)\cdot(\varphi_u^+\varphi_u)=2|\varphi_d^+\varphi_u|^2-|\varphi_d|^2\cdot|\varphi_u|^2,\end{aligned}\tag{6.37}$$

аналогичным образом,

$$(\varphi_u^+\sigma^A\varphi_u)^2=|\varphi_u|^2,\ (\varphi_d^+\sigma^A\varphi_d)^2=|\varphi_d|^2,\tag{6.38}$$

тогда

$$\begin{aligned}\left(\varphi_d^+\sigma^A\varphi_d+\varphi_u^+\sigma^A\varphi_u\right)^2&=|\varphi_u|^2+|\varphi_d|^2-2|\varphi_d|^2\cdot|\varphi_u|^2+4|\varphi_d^+\varphi_u|^2=\\&=(|\varphi_u|^2-|\varphi_d|^2)^2+4|\varphi_d^+\varphi_u|^2,\end{aligned}\tag{6.39}$$

что позволяет переписать потенциал скалярных полей в виде

$$\begin{aligned}V(\varphi_u,\varphi_d)=\frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)(|\varphi_u|^2-|\varphi_d|^2)^2+\frac{e_2^2}{2}|\varphi_d^+\varphi_u|^2+\\+(m_1^2+|\mu|^2)|\varphi_u|^2+(m_2^2+|\mu|^2)|\phi_d|^2+\\+\mu B(\phi_{d2}\phi_{u1}-\phi_{u2}\phi_{d1})+(\mu B)^*(-\phi_{u2}^*\phi_{d1}^*+\phi_{u1}^*\phi_{d2}^*).\end{aligned}\tag{6.40}$$

Замечание: с помощью преобразований полевых переменных

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\phi_{u1}\\\phi_{u2}\end{pmatrix}\to e^{i\alpha}\begin{pmatrix}\phi_{u1}\\\phi_{u2}\end{pmatrix},\\\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\\phi_{d2}\end{pmatrix}\to e^{i\alpha}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\\phi_{d2}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{6.41}$$

можно переопределить μB, совершив преобразование в соответствующем слагаемом в действии

$$\mu B(\phi_{u1},\phi_{u2})\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\\phi_{d2}\end{pmatrix}\to e^{2i\alpha}\mu B(\phi_{u1},\phi_{u2})\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\\phi_{d2}\end{pmatrix},\tag{6.42}$$

и добившись выбором α, чтобы $\mu B\in Re$ и $\mu B>0$, что всегда будет предполагаться далее.

С учетом данного замечание потенциал скалярных полей окончательно запишем в виде

$$\begin{aligned}V(\varphi_u,\varphi_d)=\frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)(|\varphi_u|^2-|\varphi_d|^2)^2+\frac{e_2^2}{2}|\varphi_d^+\varphi_u|^2+\\+(m_1^2+|\mu|^2)|\varphi_u|^2+(m_2^2+|\mu|^2)|\phi_d|^2+\\+\mu B(\phi_{d2}\phi_{u1}-\phi_{u2}\phi_{d1})+\mu B(\phi_{u1}^*\phi_{d2}^*-\phi_{u2}^*\phi_{d1}^*).\end{aligned}\tag{6.43}$$

Вакуумное состояние и спонтанное нарушение калибровочной симметрии в МССМ. Массы калибровочных бозонов в МССМ

На прошлой лекции мы начали изучать Минимальную суперсимметричную Стандартную модель (МССМ). Как уж стало ясно, данная теория не является SUSY-инвариантной, но является теорией с мягко нарушенной SUSY, то есть в действии МССМ есть слагаемые, инвариантные относительно SUSY-преобразований и есть также слагаемые мягко нарушающие SUSY, которые могут рассматриваться как некоторый остаток от спонтанного нарушения SUSY. Также на прошлой лекции было рассмотрено спонтанное нарушение калибровочной симметрии в МССМ. На данной лекции данный вопрос будет исследован детально.

Параграф 4. Вакуумное состояние и спонтанное нарушение калибровочной симметрии в МССМ

МССМ есть калибровочная теория с калибровочной группой

$$G = SU(3) \times SU(2) \times U(1). \tag{7.1}$$

которая при низких энергиях, должна нарушаться до $SU(3) \times U(1)_{em}$.

Как было замечено на прошлой лекции в данной теории присутствует очень много скалярных полей (скварки, слептоны, хиггсы), поэтому было предложено так выбирать параметры модели, чтобы вакуумные средние приобретали именно хиггсовские поля. При этом в МССМ есть два хиггсовских дуплета

$$\phi_d = \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}, \ \phi_u = \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

находящихся в фундаментальном представлении $SU(2)$ с гиперзарядами $Y = \frac{1}{2}$ и $Y = -\frac{1}{2}$ соответственно. Низшие компоненты являются комплексными скалярными полями

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}, \ \varphi_d = \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

для данных полей необходимо было найти потенциал $V(\varphi_u, \varphi_d)$. Далее, необходимо найти минимум данного потенциала и определить относительно каких преобразований исходной калибровочной группы данное вакуумное состояние остается инвариантным. То есть найти малую группу, относительно которой инвариантна исходная теория после исключения из нее всех полей, приобретающих массу после спонтанного нарушения калибровочной симметрии.

На прошлой лекции потенциал $V(\varphi_u,\varphi_d)$ был найден в следующем виде

$$V(\varphi_u,\varphi_d)=\frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)(|\varphi_u|^2-|\varphi_d|^2)^2+\frac{e_2^2}{2}|\varphi_d^+\varphi_u|^2+$$
$$+(m_1^2+|\mu|^2)|\varphi_u|^2+(m_2^2+|\mu|^2)|\phi_d|^2+$$
$$+\mu B(\phi_{d2}\phi_{u1}-\phi_{u2}\phi_{d1})+\mu B(\phi_{u1}^*\phi_{d2}^*-\phi_{u2}^*\phi_{d1}^*), \qquad (7.4)$$

где полевые переменные были выбраны таким образом, чтобы $\mu B\in Re$ и $\mu B>0$.

Теперь, найдем минимум данного потенциала. Прежде всего, заметим, что

$$|\varphi_u|^2=|\varphi_{u1}|^2+|\varphi_{u2}|^2,$$
$$|\varphi_d|^2=|\varphi_{d1}|^2+|\varphi_{d2}|^2, \qquad (7.5)$$

и большая часть слагаемых зависит именно от данных модулей в квадрате.

Далее, исследуем, как распределены вакуумные средние между верхними и нижними компонентами столбцов 11. Пусть величины 7.1 являются фиксированными. Тогда исследуем смешанные слагаемые в потенциале, так как они нетривиальным образом зависят от вакуумных средних

$$\frac{e_2^2}{2}|\varphi_d^+\varphi_u|^2+\mu B(\phi_{d2}\phi_{u1}-\phi_{u2}\phi_{d1})+\mu B(\phi_{u1}^*\phi_{d2}^*-\phi_{u2}^*\phi_{d1}^*), \qquad (7.6)$$

первое, что нужно заметить, первое слагаемое в данной сумме является положительно определенным, поэтому его минимум будет равен нулю. Так как $\mu B\in Re$ и $\mu B>0$, минимум двух остальных слагаемых будет достигаться при выборе $\varphi_{u2}=v_u>0,\varphi_{d1}=v_d>0,\varphi_{u1}=0,\varphi_{d2}=0$, то есть при выборе вакуумных состояний

$$\varphi_{u_0}=\begin{pmatrix}0\\ v_u\end{pmatrix},\ \varphi_{d_0}=\begin{pmatrix}v_d\\ 0\end{pmatrix}, \qquad (7.7)$$

тогда, очевидно, что при таком выборе первое слагаемое равно нулю

$$\varphi_d^+\varphi_u=(v_d,0)\begin{pmatrix}0\\ v_u\end{pmatrix}=0. \qquad (7.8)$$

Величины v_u,v_d определяются из условия минимума потенциала

$$V(v_u,v_d)=V(\varphi_u\to\varphi_{u0},\varphi_d\to\varphi_{d0})=$$
$$=\frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)(v_u^2-v_d^2)^2+(m_1^2+|\mu|^2)|v_u|^2+(m_2^2+|\mu|^2)|v_d|^2-2\mu Bv_uv_d), \qquad (7.9)$$

условия минимума данного выражения будут изучены далее. Пока же выясним относительно какой части калибровочных преобразований будет инвариантен вакуум

$$\varphi_{u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix}, \; \varphi_{d_0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

то есть найдем малую группу H.

Так как хиггсовские поля находятся в тривиальном представлении $SU(3)$, данная группа является частью малой группы. При преобразованиях калибровочной группы $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix} \to \omega_2 e^{-i\alpha_1/2} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} \to \omega_2 e^{i\alpha_1/2} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}, \tag{7.11}$$

где $\omega_2 \in SU(2)$ и может быть записан в виде

$$\omega_2 = \exp\left\{ \left(ie_2 \alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2} \right) \right\}, A = \overline{1,3} \tag{7.12}$$

соответственно для вакуумного состояния, инвариантного относительно малой группы H

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \to \exp\left\{ \left(ie_2 \alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2} - i\alpha_1/2 \right) \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} \to \exp\left\{ \left(ie_2 \alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2} + i\alpha_1/2 \right) \right\} \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

в инфинитезимальной форме получим

$$0 = \left(ie_2 \alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2} - i\alpha_1/2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & -e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix},$$
$$0 = \left(ie_2 \alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2} + i\alpha_1/2 \right) \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

откуда следует четыре условия на 4 параметра преобразований

$$\begin{cases} (\alpha_2^1 - i\alpha_2^2)v_u = 0, \\ (e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1)v_u = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (\alpha_2^1 + i\alpha_2^2)v_d = 0, \\ (e_2\alpha_2^1 + e_1\alpha_1)v_d = 0 \end{cases}$$

из каждой системы получается одни и те же условия

$$\begin{aligned} \alpha_2^1 &= 0, \\ \alpha_2^2 &= 0, \\ e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 &= 0, \end{aligned} \tag{7.15}$$

то есть независимых параметров остается $4-3=1$. Таким образом, малая группа H является однопараметрической. При этом преобразования малой группы запишутся в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix} &\to \exp\left\{ \left[ie_1\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} &\to \exp\left\{ \left[ie_1\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.16}$$

поэтому очевидно, что малая группа $H = SU(3)\times U(1)_{em}$. Надо помнить, что $U(1)_{em} \neq U(1)$, поскольку параметры $U(1)_{em}$ связаны с параметрами $U(1)$, так и $SU(2)$.

Как можно вспомнить $\tilde{L} = \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}$ лежит в тривиальном представлении $SU(3)$, фундаментальном представлении $SU(2)$ с гиперзарядом $Y = \frac{1}{2}$, что очевидно совпадает с квантовыми числами ϕ_d. Поэтому можно отождествить также и электрические заряды этих частиц, которые для $\tilde{L}$ равны $e\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(-e_2\alpha_2^3 = e_1\alpha_1 = e\alpha_{em})$ и следовательно преобразования малой группы можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix} &\to \exp\left\{ \left[ie\alpha_{em} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} &\to \exp\left\{ \left[ie\alpha_{em} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.17}$$

и можно легко увидеть, какие электричекие заряды имеют различные компоненты φ_u и φ_d.

Параграф 5. Массы калибровочных бозонов в МССМ

Как показано в предыдущем параграфе калибровочная симметрия в МССМ нарушается как и в СМ по следующему каналу

$$G = SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y \to H = SU(3)\times U(1)_{em}, \tag{7.18}$$

при этом количество массивных векторных бозонов так же как и в СМ будет равно разнице размерностей изначальной калибровочной группы G и малой группы H

$$\dim G - \dim H = (8+3+1)-(8+1) = 3. \tag{7.19}$$

Итак, определим массы данных калибровочных бозонов. Вакуумные средние хиггсовских полей равны

$$\varphi_{u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix},\ \varphi_{d_0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.20}$$

массы векторных полей получаются из слагаемых

$$D_\mu \varphi_u^+ D^\mu \varphi_u + D_\mu \varphi_d^+ D^\mu \varphi_d, \tag{7.21}$$

где

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi_u &= \partial_\mu \varphi_u + \frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^A}\, \sigma^A \varphi_u - \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu}\, \varphi_u, \\ D_\mu \varphi_d &= \partial_\mu \varphi_d + \frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^A}\, \sigma^A \varphi_d + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu}\, \varphi_d. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Напомним, что при локальных калибровочных преобразованиях группы $U(1)$ скалярное и векторное поля изменяются следующим образом

$$\begin{aligned} &\varphi \to \exp\{(ie_1 Y \alpha_1)\}\varphi, \\ &\underset{U(1)}{A_\mu} \to \underset{U(1)}{A_\mu} - \partial_\mu \alpha_1, \end{aligned} \tag{7.23}$$

и поэтому, легко показать, что соответствующая ковариантная производная при таких преобразованиях изменяется так же как и поле, на которое она действует

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ie_1 Y \underset{U(1)}{A_\mu}\, \varphi \to \exp\{(ie_1 Y \alpha_1)\} D_\mu \varphi. \tag{7.24}$$

Массивные слагаемые для векторных бозонов получаются если заменить скалярные поля на их вакуумные средние

$$D_\mu \varphi_u \to \Big(\frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A^A_\mu} \sigma^A - \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu}\Big) \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2 \underset{SU(2)}{A^3_\mu} - e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} & e_2 \underset{SU(2)}{(A^1_\mu - i A^2_\mu)} \\ e_2 \underset{SU(2)}{(A^1_\mu + i A^2_\mu)} & -e_2 \underset{SU(2)}{A^3_\mu} - e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} = \frac{i v_u}{2} \begin{pmatrix} e_2 \underset{SU(2)}{(A^1_\mu - i A^2_\mu)} \\ -e_2 \underset{SU(2)}{A^3_\mu} - e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \end{pmatrix},$$

$$D_\mu \varphi_d \to \Big(\frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A^A_\mu} \sigma^A + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu}\Big) \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2 \underset{SU(2)}{A^3_\mu} + e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} & e_2 \underset{SU(2)}{(A^1_\mu - i A^2_\mu)} \\ e_2 \underset{SU(2)}{(A^1_\mu + i A^2_\mu)} & -e_2 \underset{SU(2)}{A^3_\mu} + e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i v_d}{2} \begin{pmatrix} e_2 \underset{SU(2)}{A^3_\mu} + e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \\ e_2 \underset{SU(2)}{(A^1_\mu + i A^2_\mu)} \end{pmatrix}, \tag{7.25}$$

поэтому

$$|D_\mu \varphi_u|^2 + |D_\mu \varphi_d|^2 \to$$

$$\to \frac{1}{4}(v_u^2 + v_d^2) e_2^2 \left[(\underset{SU(2)}{A^1_\mu})^2 + (\underset{SU(2)}{A^2_\mu})^2 \right] + \frac{1}{4}(v_u^2 + v_d^2) \left[e_2 \underset{SU(2)}{A^3_\mu} + e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \right]^2, \tag{7.26}$$

таким образом, действительно, получились 3 массивных векторных бозона как в СМ.

Замечание: в СМ массы векторных полей определяются вакуумным средним только одного хиггсовского поля, в МССМ же присутствует два хиггсовских поля, поэтому для согласования значений масс векторных полей следует произвести следующее отождествление

$$v^2 = v_u^2 + v_d^2. \tag{7.27}$$

Далее, как обычно, полагаем

$$W^1_\mu \equiv \underset{SU(2)}{A^1_\mu}, \; W^2_\mu \equiv \underset{SU(2)}{A^2_\mu},$$

$$Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \left[e_2 \underset{SU(2)}{A^3_\mu} + e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \right] = \cos\theta_W \underset{SU(2)}{A^3_\mu} + \sin\theta_W \underset{U(1)}{A_\mu},$$

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \left[-e_1 \underset{SU(2)}{A^3_\mu} + e_2 \underset{U(1)}{A_\mu} \right] = -\sin\theta_W \underset{SU(2)}{A^3_\mu} + \cos\theta_W \underset{U(1)}{A_\mu}, \tag{7.28}$$

здесь, как обычно

$$e = e_1 \cos\theta_W = e_2 \sin\theta_W. \tag{7.29}$$

В данных обозначениях часть лагранжиана, содержащая векторные бозоны, в квадратичном приближении примет вид

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}^{(2)} \to -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 - \\
-\frac{1}{4}(\partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu W^2_\nu - \partial_\nu W^2_\mu)^2 + \\
+\frac{1}{4}e_2^2(v_u^2 + v_d^2)\left[(W^1_\mu)^2 + (W^2_\mu)^2\right] + \frac{1}{4}(e_1^2 + e_2^2)(v_u^2 + v_d^2)Z_\mu^2.
\end{gathered} \tag{7.30}$$

Таким образом, для масс векторных бозонов мы получаем следующие выражения, похожие на СМ:

$$\begin{aligned}
m_W^2 &= \frac{1}{2}e_2^2(v_u^2 + v_d^2) = \frac{1}{2}e_2^2 v^2, \\
m_Z^2 &= \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)(v_u^2 + v_d^2) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)v^2,
\end{aligned} \tag{7.31}$$

где как и в СМ $v \simeq 174{,}4$ ГэВ. Наконец, удобно перейти от переменных v_u, v_d к переменным $v, \tan\beta$

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_u^2 + v_d^2}, \\ \tan\beta = \frac{v_u}{v_d}, \end{cases} \tag{7.32}$$

величина $\tan\beta$ в настоящее время пока еще не определена экспериментально, поскольку явно в выражения для масс частиц МССМ она не входит.

Хиггсовские бозоны в МССМ

На прошлой лекции было изучено, как происходит спонтанное нарушение калибровочной симметрии. При этом вакуумные средние приобретали два хиггсовских поля

$$\varphi_{u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix}, \ \varphi_{d_0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

а калибровочная группа нарушается по следующему каналу

$$G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y \to H = SU(3) \times U(1)_{em}, \tag{8.2}$$

как и в СМ. Также был исследован спектр калибровочных бозонов МССМ, в котором массы калибровочных бозонов оказались в точности такими же, как в СМ, определенными вакуумным средним $v = \sqrt{v_u^2 + v_d^2} \simeq 174,4$ ГэВ. Также была введена величина $\tan\beta$

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_u^2 + v_d^2}, \\ \tan\beta = \frac{v_u}{v_d}, \end{cases} \implies \begin{cases} v_u = v\sin\beta, \\ v_d = v\cos\beta, \end{cases} \tag{8.3}$$

однако в отличии от v величина $\tan\beta$ явно не входит в выражения для масс калибровочных бозонов МССМ.

Таким образом, показано, что спектр калибровочных бозонов оказывается в точности таким же, как и в СМ. Теперь, исследуем спектр хиггсовских полей МССМ, и как станет ясно данный спектр отличается от соответствующего спектра хиггсовских полей в СМ.

Параграф 6. Хиггсовские бозоны в МССМ

Для начала, выясним по какой причине спектр хиггсовских полей в МССМ отличается от спектра хиггсовских полей в СМ. Ключевым отличием является наличие двух дуплетов хиггсовских полей φ_u, φ_d, которые являются низшими компонентами двух киральных скалярных хиггсовских суперполей ϕ_u, ϕ_d. Два хиггсовских суперполя необходимы для согласования SUSY с калибровочной симметрией.

Таким образом, всего в МССМ есть $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ степеней свободы у полей φ_u, φ_d. Из них 3 являются голдстоуновскими бозонами, которых съедают векторные поля $W_\mu^{1,2}$ и Z_μ, поэтому всего остается $8 - 3 = 5$ хиггсовских бозонов. Для сравнения, в СМ $4 - 3 = 1$ хиггсовский бозон.

Представим для начала хиггсовские поля как сумму вакуумных средних и малых отклонений от них

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} \varphi'_{u1} \\ v_u + \varphi'_{u2} \end{pmatrix}, \ \varphi_d = \begin{pmatrix} v_d + \varphi'_{d1} \\ \varphi'_{d2} \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

где

$$\begin{aligned} &\varphi'_{u1} = \varphi_{u1}; \ \varphi'_{u2} = \varphi_{u2} - v_u, \\ &\varphi'_{d1} = \varphi_{d1} - v_d; \ \varphi'_{d2} = \varphi_{d2}, \end{aligned} \tag{8.5}$$

и выберем, так называемую, унитарную калибровку, в которой все голдстоуновские степени свободы равны нулю. Для этого, необходимо, соответствующим образом выбрать параметры калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \varphi_u = \begin{pmatrix} \varphi'_{u1} \\ v_u + \varphi'_{u2} \end{pmatrix} \to \omega_2 e^{-i\alpha_1/2}\varphi_u = \exp\left\{ \left(ie_2\alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2} - \frac{i}{2}e_1\alpha_1 \right) \right\}\varphi_u, \\ \varphi_d = \begin{pmatrix} v_d + \varphi'_{d1} \\ \varphi'_{d2} \end{pmatrix} \to \omega_2 e^{i\alpha_1/2}\varphi_d = \exp\left\{ \left(ie_2\alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2} + \frac{i}{2}e_1\alpha_1 \right) \right\}\varphi_d, \end{aligned} \tag{8.6}$$

в низшем порядке по α и φ' получаем, что

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \delta\varphi'_{u1} \\ \delta\varphi'_{u2} \end{pmatrix} = \left(\frac{i}{2}e_2\alpha_2^A\sigma^A - \frac{i}{2}e_1\alpha_1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & -e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} = \frac{i}{2}v_u \begin{pmatrix} e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ -(e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1) \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} \delta\varphi'_{d1} \\ \delta\varphi'_{d2} \end{pmatrix} = \left(\frac{i}{2}e_2\alpha_2^A\sigma^A + \frac{i}{2}e_1\alpha_1 \right) \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}v_d \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8.7}$$

поэтому для компонент $\delta\varphi'_u$ получим

$$\begin{aligned} \delta\varphi'_{u1} &= \frac{i}{2}v_u e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2), \\ \delta Re \ \varphi'_{u2} &= 0, \\ \delta Im \ \varphi'_{u2} &= -\frac{v_u}{2}(e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1), \end{aligned} \tag{8.8}$$

для компонент $\delta\varphi'_d$ получим

$$\begin{aligned} \delta Re \ \varphi'_{d1} &= 0, \\ \delta Im \ \varphi'_{d1} &= \frac{v_d}{2}(e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1), \\ \delta\varphi'_{d2} &= \frac{i}{2}v_d e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2). \end{aligned} \tag{8.9}$$

Из представленных соотношений, ясно видно, что выбором параметров калибровочной группы не удается занулить $Re\ \varphi'_{u2}$ и $Re\ \varphi'_{d1}$, то есть данные компоненты являются хиггсовскими бозонами. Также, можно составить следующую комбинацию

$$\delta\left(\frac{v_d}{v}Im\ \varphi'_{u2}+\frac{v_u}{v}Im\ \varphi'_{d1}\right)= \\ =-\frac{v_u v_d}{2}(e_2\alpha_2^3+e_1\alpha_1)+\frac{v_d v_u}{2}(e_2\alpha_2^3+e_1\alpha_1)=0, \tag{8.10}$$

то есть величина

$$\frac{v_d}{v}Im\ \varphi'_{u2}+\frac{v_u}{v}Im\ \varphi'_{d1}=\cos\beta Im\ \varphi'_{u2}+\sin\beta Im\ \varphi'_{d1}, \tag{8.11}$$

является хиггсовским бозоном. Очевидно, полученная величина является первой компонентой ортогонального преобразования

$$\begin{cases}\frac{v_d}{v}Im\ \varphi'_{u2}+\frac{v_u}{v}Im\ \varphi'_{d1}=\cos\beta Im\ \varphi'_{u2}+\sin\beta Im\ \varphi'_{d1},\\ -\frac{v_u}{v}Im\ \varphi'_{u2}+\frac{v_d}{v}Im\ \varphi'_{d1}=-\sin\beta Im\ \varphi'_{u2}+\cos\beta Im\ \varphi'_{d1},\end{cases} \tag{8.12}$$

при этом изменение второй компоненты

$$\delta\left(-\frac{v_u}{v}Im\ \varphi'_{u2}+\frac{v_d}{v}Im\ \varphi'_{d1}\right)= \\ =\frac{v_u^2}{2v}(e_2\alpha_2^3+e_1\alpha_1)+\frac{v_d^2}{2v}(e_2\alpha_2^3+e_1\alpha_1)=\frac{v}{2}(e_2\alpha_2^3+e_1\alpha_1) \tag{8.13}$$

оказывается ненулевым. Таким образом, первая компонента является хиггсовским бозоном, а вторая голдстоуновским.

Далее рассмотрим следующие пары преобразований

$$\delta\varphi'_{u1}=\frac{i}{2}v_u e_2(\alpha_2^1-i\alpha_2^2),\ \delta\varphi'^*_{u1}=-\frac{i}{2}v_u e_2(\alpha_2^1+i\alpha_2^2), \\ \delta\varphi'_{d2}=\frac{i}{2}v_d e_2(\alpha_2^1+i\alpha_2^2),\ \delta\varphi'^*_{d2}=-\frac{i}{2}v_d e_2(\alpha_2^1-i\alpha_2^2), \tag{8.14}$$

как можно видеть, на основе данных преобразований можно снова построить инвариантную комбинацию, совершив ортогональное преобразование

$$\begin{cases}\frac{v_d}{v}\varphi'_{u1}+\frac{v_u}{v}\varphi'^*_{d2}=\cos\beta\,\varphi'_{u1}+\sin\beta\,\varphi'^*_{d2},\\ -\frac{v_u}{v}\varphi'_{u1}+\frac{v_d}{v}\varphi'^*_{d2}=-\sin\beta\,\varphi'_{u1}+\cos\beta\,\varphi'^*_{d2},\end{cases} \tag{8.15}$$

первое из которых не изменяется при калибровочных преобразованиях, то есть оно представляет собой хиггсовский бозон, а второе преобразуется, то есть является голдстоуновским бозоном:

$$\delta(\cos\beta\,\varphi'_{u1}+\sin\beta\,\varphi'^*_{d2})=0, \\ \delta(-\sin\beta\,\varphi'_{u1}+\cos\beta\,\varphi'^*_{d2})=-\frac{iv}{2}e_2(\alpha_2^1-i\alpha_2^2). \tag{8.16}$$

Запишем все полученные преобразования

$$\begin{cases} \delta Re\ \varphi'_{u2} = 0, \\ \delta Re\ \varphi'_{d1} = 0, \\ \delta\left(\cos\beta \cdot Im\ \varphi'_{u2} + \sin\beta \cdot Im\ \varphi'_{d1}\right) = 0, \\ \delta(\cos\beta\varphi'_{u1} + \sin\beta\varphi'^{*}_{d2}) = 0, \\ \delta\left(-\sin\beta \cdot Im\ \varphi'_{u2} + \cos\beta \cdot Im\ \varphi'_{d1}\right) = \frac{v}{2}(e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1), \\ \delta(-\sin\beta\varphi'_{u1} + \cos\beta\varphi'^{*}_{d2}) = -\frac{iv}{2}e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2). \end{cases} \tag{8.17}$$

Таким образом, явно выделены хиггсовские и голдстоуновские степени свободы. Голдстоуновсие степени свободы

$$\begin{gathered} -\sin\beta \cdot Im\ \varphi'_{u2} + \cos\beta \cdot Im\ \varphi'_{d1}, \\ -\sin\beta\varphi'_{u1} + \cos\beta\varphi'^{*}_{d2}, \end{gathered} \tag{8.18}$$

хиггсовские степени свободы

$$\begin{cases} Re\ \varphi'_{u2} \equiv \tilde{\varphi}_u, \\ Re\ \varphi'_{d1} \equiv \tilde{\varphi}_d, \\ \cos\beta \cdot Im\ \varphi'_{u2} + \sin\beta \cdot Im\ \varphi'_{d1} \equiv A, \\ \cos\beta\varphi'_{u1} + \sin\beta\varphi'^{*}_{d2} \equiv \varphi^-, \\ \cos\beta\varphi'^{*}_{u1} + \sin\beta\varphi'_{d2} \equiv \varphi^+ = (\varphi^-)^*. \end{cases} \tag{8.19}$$

Вычислим теперь электрические заряды хиггсовских полей. Ранее было показано, что при остаточных $U(1)_{em}$ преобразованиях хиггсовские поля изменяются следующим образом

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix} \to \exp\left\{\left[ie\alpha_{em}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\right\}\begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} \to \exp\left\{\left[ie\alpha_{em}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\right\}\begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{8.20}$$

откуда следует. что $q(\varphi_{u1}) = -1,\ q(\varphi_{u2}) = 0,\ q(\varphi_{d1}) = 0,\ q(\varphi_{d2}) = 1$ и поэтому

$$\begin{cases} q(\tilde{\varphi}_u) = 0, \\ q(\tilde{\varphi}_d) = 0, \\ q(A) = 0, \\ q(\varphi^-) = -1, \\ q(\varphi^+) = 1, \end{cases} \tag{8.21}$$

таким образом, $\tilde{\varphi}_u$, $\tilde{\varphi}_d$, A электрически нейтральны, φ^+, φ^- имеют электрические заряды $+1$ и -1, соответственно.

Далее, исследуем спектр масс хиггсовских бозонов. Для этого, для начала, запишем хиггсовские дуплеты в унитарной калибровке, в которой все голдстоуновские поля полагаются равными нулю

$$\begin{aligned} -\sin\beta\cdot Im\ \varphi'_{u2}+\cos\beta\cdot Im\ \varphi'_{d1}=0,\\ -\sin\beta\,\varphi'_{u1}+\cos\beta\,\varphi'^{*}_{d2}=0, \end{aligned} \tag{8.22}$$

тогда хиггсовские дупплеты примут вид

$$\begin{gathered} \varphi_u=\begin{pmatrix}\varphi'_{u1}\\ v_u+\varphi'_{u2}\end{pmatrix}=\\ =\begin{pmatrix}\cos\beta(\cos\beta\,\varphi'_{u1}+\sin\beta\,\varphi'^{*}_{d2})\\ v_u+Re\varphi'_{u2}+i\cos\beta(\cos\beta\cdot Im\ \varphi'_{u2}+\sin\beta\cdot Im\ \varphi'_{d1})\end{pmatrix}-\\ -\begin{pmatrix}\sin\beta(-\sin\beta\,\varphi'_{u1}+\cos\beta\,\varphi'^{*}_{d2})\\ i\sin\beta(-\sin\beta\cdot Im\ \varphi'_{u2}+\cos\beta\cdot Im\ \varphi'_{d1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta\,\varphi^-\\ v_u+\tilde{\varphi}_u+i\cos\beta A\end{pmatrix},\\ \varphi_d=\begin{pmatrix}v_d+\varphi'_{d1}\\ \varphi'_{d2}\end{pmatrix}=\\ =\begin{pmatrix}v_d+Re\varphi'_{d1}+i\sin\beta(\cos\beta\cdot Im\ \varphi'_{u2}+\sin\beta\cdot Im\ \varphi'_{d1})\\ \sin\beta(\cos\beta\,\varphi'^{*}_{u1}+\sin\beta\,\varphi'_{d2})\end{pmatrix}+\\ +\begin{pmatrix}i\cos\beta(-\sin\beta\cdot Im\ \varphi'_{u2}+\cos\beta\cdot Im\ \varphi'_{d1})\\ \cos\beta(-\sin\beta\,\varphi'^{*}_{u1}+\cos\beta\,\varphi'_{d2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_d+\tilde{\varphi}_d+i\sin\beta A\\ \sin\beta\,\varphi^+\end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{8.23}$$

итого, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_u&=\begin{pmatrix}\varphi'_{u1}\\ v_u+\varphi'_{u2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta\,\varphi^-\\ v_u+\tilde{\varphi}_u+i\cos\beta A\end{pmatrix},\\ \varphi_d&=\begin{pmatrix}v_d+\varphi'_{d1}\\ \varphi'_{d2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_d+\tilde{\varphi}_d+i\sin\beta A\\ \sin\beta\,\varphi^+\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Параграф 7. Массы хиггсовских бозонов в МССМ

Для исследования спектра хиггсовских бозонов МССМ необходимо рассмотреть следующие слагаемые лагранжиана МССМ

$$\mathcal{L}_{MSSM}=D_\mu\varphi_u^+D^\mu\varphi_u+D_\mu\varphi_d^+D^\mu\varphi_d-V(\varphi_u,\varphi_d), \tag{8.25}$$

первые два слагаемых в квадратичном приближении, в унитарной калибровке, примут следующий вид

$$\partial_\mu \varphi_u^+ \partial^\mu \varphi_u + \partial_\mu \varphi_d^+ \partial^\mu \varphi_d, \tag{8.26}$$

Замечание: не в унитарной калибровке, в квадратичном приближении, из данных слагаемых остались бы еще слагаемые со взаимодействием калибровочных и голдстоуновских бозонов.

Теперь, запишем потенциал $V(\varphi_u, \varphi_d)$ в квадратичном приближении. Ранее было показано, что

$$\begin{aligned} V(\varphi_u, \varphi_d) = \frac{1}{8}(e_1^2 + e_2^2)(|\varphi_u|^2 - |\varphi_d|^2)^2 + \frac{e_2^2}{2}|\varphi_d^+ \varphi_u|^2 + \\ +(m_1^2 + |\mu|^2)|\varphi_u|^2 + (m_2^2 + |\mu|^2)|\phi_d|^2 + \\ +\mu B(\phi_{d2}\phi_{u1} - \phi_{u2}\phi_{d1}) + \mu B(\phi_{u1}^*\phi_{d2}^* - \phi_{u2}^*\phi_{d1}^*), \end{aligned} \tag{8.27}$$

где все коэффициенты являются положительными. Запишем данный потенциал в унитарной калибровке, в которой, как было только что показано

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} \cos\beta\varphi^- \\ v_u + \tilde{\varphi}_u + i\cos\beta A \end{pmatrix}, \ \varphi_d = \begin{pmatrix} v_d + \tilde{\varphi}_d + i\sin\beta A \\ \sin\beta\varphi^+ \end{pmatrix}, \tag{8.28}$$

благодаря чему

$$\begin{aligned} |\varphi_u|^2 = \cos\beta^2(|\varphi^+|^2 + A^2) + (v_u + \tilde{\varphi}_u)^2, \\ |\varphi_d|^2 = \sin\beta^2(|\varphi^+|^2 + A^2) + (v_d + \tilde{\varphi}_d)^2, \\ |\varphi_d^+\varphi_u|^2 = |(v_d + \tilde{\varphi}_d - i\sin\beta A, \sin\beta\varphi^-)\begin{pmatrix} \cos\beta\varphi^- \\ v_u + \tilde{\varphi}_u + i\cos\beta A \end{pmatrix}|^2 = \\ = |(v_d + \tilde{\varphi}_d - i\sin\beta A)\cos\beta\varphi^- + (v_u + \tilde{\varphi}_u + i\cos\beta A)\sin\beta\varphi^-|^2 = \\ = |\varphi^+|^2(v_d\cos\beta + v_u\sin\beta + \tilde{\varphi}_d\cos\beta + \tilde{\varphi}_u\sin\beta)^2 = \\ = |\varphi^+|^2(v + \tilde{\varphi}_d\cos\beta + \tilde{\varphi}_u\sin\beta)^2, \\ -\varphi_{u2}\varphi_{d1} + \varphi_{u1}\varphi_{d2} = \\ = -(v_u + \tilde{\varphi}_u + i\cos\beta A)(v_d + \tilde{\varphi}_d + i\sin\beta A) + \cos\beta\varphi^-\sin\beta\varphi^+ \\ \Longrightarrow -\varphi_{u2}\varphi_{d1} + \varphi_{u1}\varphi_{d2} + \text{к.с.} = \\ = -2(v_u + \tilde{\varphi}_u)(v_d + \tilde{\varphi}_d) + 2\sin\beta\cos\beta(|\varphi^+|^2 + A^2), \end{aligned} \tag{8.29}$$

здесь было учтено, что

$$\begin{aligned} |\varphi^-|^2 = (\varphi^-)^*\varphi^- = [(\varphi^-)^* = \varphi^+] = |\varphi^+|^2, \\ v_d\cos\beta + v_u\sin\beta = v\cos\beta^2 + v\sin\beta^2 = v, \end{aligned} \tag{8.30}$$

подставляя все эти выражения в потенциал хиггсовских полей, получаем

$$\begin{aligned} V(\varphi_u,\varphi_d) = \frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)\left[\cos 2\beta(|\varphi^+|^2+A^2)+(v_u+\tilde{\varphi}_u)^2-(v_d+\tilde{\varphi}_d)^2\right]^2+ \\ +\frac{e_2^2}{2}|\varphi^+|^2(v+\tilde{\varphi}_d\cos\beta+\tilde{\varphi}_u\sin\beta)^2+ \\ +(m_1^2+|\mu|^2)(\cos\beta^2(|\varphi^+|^2+A^2)+(v_u+\tilde{\varphi}_u)^2)+ \\ +(m_2^2+|\mu|^2)(\sin\beta^2(|\varphi^+|^2+A^2)+(v_d+\tilde{\varphi}_d)^2)+ \\ -2\mu B(v_u+\tilde{\varphi}_u)(v_d+\tilde{\varphi}_d)+\mu B\sin 2\beta(|\varphi^+|^2+A^2), \end{aligned} \tag{8.31}$$

далее, будет изучен спектр масс хиггсовских полей.

Массы хиггсовских бозонов в МССМ

В последних лекциях мы начали изучение Минимальной суперсимметричной Стандартной модели (МССМ), которая является простейшим SUSY-расширением СМ. Строго говоря, данная теория является теорией с мягко нарушенной SUSY, что объясняет различие в массах суперпартнеров. МССМ есть калибровочная теория с калибровочной группой

$$G = SU(3)\times SU(2)\times U(1), \tag{9.1}$$

которая при низких энергиях нарушаеться до $SU(3)\times U(1)_{em}$.

При этом в отличии от СМ в МССМ есть два хиггсовских дуплета, отвечающие за спонтанное нарушение калибровочной симметрии

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix},\ \varphi_d = \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

находящихся в тривиальном представлении $SU(3)$, фундаментальном представлении $SU(2)$, и с гиперзарядами $Y=\frac{1}{2}$ и $Y=-\frac{1}{2}$ соответственно.

Спонтанное нарушение калибровочной симметрии происходит благодаря тому, что данные хиггсовские поля приобретают вакуумные средние

$$\varphi_{u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix},\ \varphi_{d_0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9.3}$$

при этом, калибровочные бозоны приобретают массы как в СМ

$$\begin{aligned} m_W^2 &= \frac{1}{2}e_2^2 v^2, \\ m_Z^2 &= \frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2)v^2, \end{aligned} \tag{9.4}$$

где величина v ГэВ связана с параметрами $v_u,\ v_d$ следующим образом

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_u^2+v_d^2}, \\ \tan\beta = \frac{v_u}{v_d}, \end{cases} \tag{9.5}$$

где также была введена величина $\tan\beta$. Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{cases} v_u = v\sin\beta, \\ v_d = v\cos\beta, \end{cases} \tag{9.6}$$

зная величину массы Z-бозона, можно определить вакуумное среднее v, величина $\tan\beta$ явно не входит в выражения для масс калибровочных бозонов МССМ поэтому на настоящий момент не известна.

На прошлых лекциях мы начали исследовать спектр масс хиггсовских полей, Были выделены хиггсовские и голдстоуновские степени свободы. Оказалось, что в спектре присутствует 5 хиггсовских бозонов и 3 голдстоуновских бозона. Хиггсовские бозоны имеют следующий вид

$$\begin{cases} Re\ \varphi'_{u2} \equiv \tilde{\varphi}_u, \\ Re\ \varphi'_{d1} \equiv \tilde{\varphi}_d, \\ \cos\beta \cdot Im\ \varphi'_{u2} + \sin\beta \cdot Im\ \varphi'_{d1} \equiv A, \\ \cos\beta\, \varphi'_{u1} + \sin\beta\, \varphi'^{*}_{d2} \equiv \varphi^-, \\ \cos\beta\, \varphi'^{*}_{u1} + \sin\beta\, \varphi'_{d2} \equiv \varphi^+ = (\varphi^-)^*. \end{cases} \tag{9.7}$$

пр этом, $\tilde{\varphi}_u$, $\tilde{\varphi}_d$, A электрически нейтральны, φ^+, φ^- имеют электрические заряды $+1$ и -1, соответственно.

Далее хиггсовские поля были записаны в унитарной калибровке, в которой все голдстоуновские степени свободы равны нулю

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} \cos\beta\,\varphi^- \\ v_u + \tilde{\varphi}_u + i\cos\beta A \end{pmatrix}, \ \varphi_d = \begin{pmatrix} v_d + \tilde{\varphi}_d + i\sin\beta A \\ \sin\beta\,\varphi^+ \end{pmatrix}, \tag{9.8}$$

в терминах которых был записан потенциал хиггсовских полей

$$\begin{gathered} V(\varphi_u, \varphi_d) = \frac{1}{8}(e_1^2 + e_2^2)\left[\cos 2\beta(|\varphi^+|^2 + A^2) + (v_u + \tilde{\varphi}_u)^2 - (v_d + \tilde{\varphi}_d)^2\right]^2 + \\ + \frac{e_2^2}{2}|\varphi^+|^2(v + \tilde{\varphi}_d\cos\beta + \tilde{\varphi}_u\sin\beta)^2 + \\ +(m_1^2 + |\mu|^2)(\cos\beta^2(|\varphi^+|^2 + A^2) + (v_u + \tilde{\varphi}_u)^2) + \\ +(m_2^2 + |\mu|^2)(\sin\beta^2(|\varphi^+|^2 + A^2) + (v_d + \tilde{\varphi}_d)^2) + \\ -2\mu B(v_u + \tilde{\varphi}_u)(v_d + \tilde{\varphi}_d) + \mu B\sin 2\beta(|\varphi^+|^2 + A^2). \end{gathered} \tag{9.9}$$

Теперь, найдем спектр масс хиггсовских бозонов, разложив данный потенциал в квадратичном приближении по отклонениям хиггсовских полей от вакуумных значений. При этом кинетические слагаемые для хиггсовских полей в унитарной калибровке имеют следующий вид

$$\partial_\mu \varphi_u^+ \partial^\mu \varphi_u + \partial_\mu \varphi_d^+ \partial^\mu \varphi_d \to \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi^- + (\partial_\mu A)^2 + (\partial_\mu \tilde{\varphi}_u)^2 + (\partial_\mu \tilde{\varphi}_d)^2, \tag{9.10}$$

потенциал в квадратичном приближении примет вид

$$\begin{gathered}V(\varphi_u,\varphi_d)\to V^{(2)}=\\ \frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)\left[4(v_u\tilde\varphi_u-v_d\tilde\varphi_d)^2+2(v_u^2-v_d^2)(\cos 2\beta(|\varphi^+|^2+A^2)+\tilde\varphi_u^2-\tilde\varphi_d)\right]+\\ +\frac{e_2^2}{2}|\varphi^+|^2v^2+(m_1^2+|\mu|^2)(\cos^2\beta(|\varphi^+|^2+A^2)+\tilde\varphi_u^2)+\\ +(m_2^2+|\mu|^2)(\sin^2\beta(|\varphi^+|^2+A^2)+\tilde\varphi_d^2)+\\ -2\mu B\tilde\varphi_u\tilde\varphi_d+\mu B\sin 2\beta(|\varphi^+|^2+A^2),\end{gathered}\tag{9.11}$$

Замечание: здесь мы не учитывали слагаемые нулевого порядка, так как они представляют собой несущественную постоянную, а линейные слагаемые исчезают, поскольку разложение производится вблизи точки минимума.

Получившееся выражение распадается на две части. Одна из них содержит поля $\varphi^\pm$ и A, а другая - поля $\tilde\varphi_u$ и $\tilde\varphi_d$:

$$V^{(2)}=V_1(\varphi^\pm,A)+V_2(\tilde\varphi_u,\tilde\varphi_d),\tag{9.12}$$

рассмотрим вначале первую часть

$$\begin{gathered}V_1(\varphi^\pm,A)=[\frac{1}{4}(e_1^2+e_2^2)(v_u^2-v_d^2)\cos 2\beta+\\ +\frac{1}{2}(m_1^2+|\mu|^2)(1+\cos 2\beta)+\frac{1}{2}(m_2^2+|\mu|^2)(1-\cos 2\beta)+\\ +\mu B\sin 2\beta](|\varphi^+|^2+A^2)+\\ +\frac{e_2^2v^2}{2}|\varphi^+|^2,\end{gathered}\tag{9.13}$$

преобразуем его, используя следующие выражения

$$\begin{gathered}v_u^2-v_d^2=v^2(\sin^2\beta-\cos^2\beta)=-v^2\cos 2\beta,\\ m_W^2=\frac{1}{2}e_2^2v^2,\ m_Z^2=\frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2)v^2,\end{gathered}\tag{9.14}$$

тогда

$$\begin{gathered}V_1(\varphi^\pm,A)=[-\frac{1}{2}m_Z^2\cos^2 2\beta+\\ +\frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2)+\frac{1}{2}(m_1^2-m_2^2)\cos 2\beta+\\ +\mu B\sin 2\beta](|\varphi^+|^2+A^2)+m_W^2|\varphi^+|^2,\end{gathered}\tag{9.15}$$

откуда видно, что коэффициент перед $(|\varphi^+|^2+A^2)$ представляет собой массу хиггсовского бозона A и поэтому выполняется следующее очень важное соотношение между массами хиггсовских бозонов

$$m_{\varphi^\pm}^2 = m_A^2 + m_W^2, \tag{9.16}$$

где

$$m_A^2 = -\frac{1}{2}m_Z^2\cos^2 2\beta + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2) + \\ +(m_1^2 - m_2^2)\cos 2\beta + \mu B\sin 2\beta \tag{9.17}$$

то есть заряженные хиггсовские бозоны оказываются тяжелее электрически нейтрального хиггсовского бозона A.

Выразим теперь m_A через параметры теории. Для этого вспомним полученное выражение для вакуумного значения потенциальной энергии

$$V(v_u, v_d) = V(\varphi_u \to \varphi_{u0}, \varphi_d \to \varphi_{d0}) = \\ = \frac{1}{8}(e_1^2 + e_2^2)(v_u^2 - v_d^2)^2 + (m_1^2 + |\mu|^2)|v_u|^2 + (m_2^2 + |\mu|^2)|v_d|^2 - 2\mu B v_u v_d), \tag{9.18}$$

из которого можно получить величины v_u, v_d, минимизировав данное выражение по данным параметрам

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial V}{\partial v_u} = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)v_u(v_u^2 - v_d^2) + 2(m_1^2 + |\mu|^2)v_u - 2\mu B v_d, \\ 0 = \frac{\partial V}{\partial v_d} = -\frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)v_d(v_u^2 - v_d^2) + 2(m_2^2 + |\mu|^2)v_d - 2\mu B v_u, \end{cases} \tag{9.19}$$

далее, первое уравнение умножим на v_d, второе - на v_u, а затем сложим и вычтем их. После сложения получим

$$0 = 2(m_1^2 + |\mu|^2)v_u v_d - 2\mu B v_d^2 + 2(m_2^2 + |\mu|^2)v_u v_d - 2\mu B v_u^2, \tag{9.20}$$

а после вычитания получим

$$0 = (e_1^2 + e_2^2)v_u v_d(v_u^2 - v_d^2) + 2(m_1^2 - m_2^2)v_u v_d + 2\mu B v_u^2 - 2\mu B v_d^2, \tag{9.21}$$

далее, перепишем получившуюся систему уравнений в терминах $v, \tan\beta$, принимая во внимание, что $v_u = v\sin\beta$, $v_d = v\cos\beta$. Тогда, разделив первое уравнение на v^2 получим

$$0 = (m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2)\sin\beta\cos\beta - \mu B, \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2)\sin 2\beta = 2\mu B, \tag{9.22}$$

таким образом, получено соотношение, из которого можно определить $\tan\beta$

$$\sin 2\beta = \frac{2\mu B}{(m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2)}, \tag{9.23}$$

из второго уравнения получим

$$0=(e_1^2+e_2^2)v^2\frac{1}{2}\sin 2\beta v^2(-\cos 2\beta)+(m_1^2-m_2^2)\sin 2\beta-2\mu B\cos 2\beta,\ \Longrightarrow$$
$$0=-m_Z^2\sin 2\beta\cos 2\beta+(m_1^2-m_2^2)\sin 2\beta-2\mu B\cos 2\beta, \tag{9.24}$$

подставляя в данное выражение полученное выше соотношение на $\sin 2\beta$ получим

$$m_Z^2\sin 2\beta\cos 2\beta=(m_1^2-m_2^2)\sin 2\beta-\cos 2\beta\sin 2\beta(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2),\ \Longrightarrow$$
$$(m_1^2-m_2^2)=\cos 2\beta(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2+m_Z^2), \tag{9.25}$$

таким образом, получены два соотношения на v и $\tan\beta$

$$\sin 2\beta=\frac{2\mu B}{(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2)},$$
$$(m_1^2-m_2^2)=\cos 2\beta(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2+m_Z^2), \tag{9.26}$$

с помощью данных соотношений преобразуем выражение для массы хиггсовского бозона A

$$m_A^2=-\frac{1}{2}m_Z^2\cos^2 2\beta+\frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2)+$$
$$+\frac{1}{2}\cos^2 2\beta(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2+m_Z^2)+\frac{1}{2}\sin^2 2\beta(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2)=$$
$$=m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2. \tag{9.27}$$

Таким образом, получены следующие соотношения для масс хиггсовских бозонов

$$m_A^2=m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2,$$
$$m_{\varphi^\pm}^2=m_A^2+m_W^2. \tag{9.28}$$

Исследуем теперь спектр масс в секторе, содержащем поля $\tilde{\varphi}_u$ и $\tilde{\varphi}_d$

$$V_2(\tilde{\varphi}_u,\tilde{\varphi}_d)=\frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)\left[4(v_u\tilde{\varphi}_u-v_d\tilde{\varphi}_d)^2+2(v_u^2-v_d^2)(\tilde{\varphi}_u^2-\tilde{\varphi}_d)\right]+$$
$$+(m_1^2+|\mu|^2)\tilde{\varphi}_u^2+(m_2^2+|\mu|^2)\tilde{\varphi}_d^2-2\mu B\tilde{\varphi}_u\tilde{\varphi}_d, \tag{9.29}$$

далее, перепишем данное выражение в терминах

$$\begin{cases} v_u=v\sin\beta,\\ v_d=v\cos\beta,\end{cases}$$
$$m_A^2=m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2,$$
$$m_Z^2=\frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2)v^2, \tag{9.30}$$

тогда получим

$$\begin{aligned}
V_2(\tilde\varphi_u,\tilde\varphi_d) = \frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2)v^2\left[(\sin\beta\,\tilde\varphi_u - \cos\beta\,\tilde\varphi_d)^2 - \frac{1}{2}\cos 2\beta\,(\tilde\varphi_u^2-\tilde\varphi_d^2)\right]+\\
+(m_1^2+|\mu|^2)\tilde\varphi_u^2+(m_2^2+|\mu|^2)\tilde\varphi_d^2-2\mu B\tilde\varphi_u\tilde\varphi_d=\\
=\left[m_1^2+|\mu|^2=\frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2)+\frac{1}{2}(m_1^2-m_2^2)\right]=\\
=m_Z^2\left[(\sin\beta\,\tilde\varphi_u-\cos\beta\,\tilde\varphi_d)^2-\frac{1}{2}\cos 2\beta\,(\tilde\varphi_u^2-\tilde\varphi_d^2)\right]+\\
+(\frac{1}{2}m_A^2+\frac{1}{2}(m_1^2-m_2^2))\tilde\varphi_u^2+(\frac{1}{2}m_A^2-\frac{1}{2}(m_1^2-m_2^2))\tilde\varphi_d^2-2\mu B\tilde\varphi_u\tilde\varphi_d,
\end{aligned}\tag{9.31}$$

далее используем следующие, ранее полученные, формулы

$$\begin{aligned}
\sin 2\beta = \frac{2\mu B}{m_A^2},\\
(m_1^2-m_2^2)=\cos 2\beta\,(m_A^2+m_Z^2),
\end{aligned}\tag{9.32}$$

тогда

$$\begin{aligned}
V_2(\tilde\varphi_u,\tilde\varphi_d)=m_Z^2\left[\sin^2\beta\,\tilde\varphi_u^2+\cos^2\beta\,\tilde\varphi_d^2-2\sin\beta\cos\beta\,\tilde\varphi_u\tilde\varphi_d\right]-\\
-\frac{1}{2}m_Z^2\cos 2\beta\,(\tilde\varphi_u^2-\tilde\varphi_d^2)+\frac{1}{2}\left(m_A^2(1+\cos 2\beta)+m_Z^2\cos 2\beta\right)\tilde\varphi_u^2+\\
+\frac{1}{2}\left(m_A^2(1-\cos 2\beta)-m_Z^2\cos 2\beta\right)\tilde\varphi_d^2-m_A^2\sin(2\beta)\tilde\varphi_u\tilde\varphi_d,
\end{aligned}\tag{9.33}$$

итак, выделим коэффициенты перед каждым полем

$$\begin{aligned}
V_2(\tilde\varphi_u,\tilde\varphi_d)=\\
\tilde\varphi_u^2\left[\frac{1}{2}m_Z^2(1-\cos 2\beta)-\frac{1}{2}m_Z^2\cos 2\beta+\frac{1}{2}m_A^2(1+\cos 2\beta)+\frac{1}{2}m_Z^2\cos 2\beta\right]+\\
+\tilde\varphi_d^2\left[\frac{1}{2}m_Z^2(1+\cos 2\beta)+\frac{1}{2}m_Z^2\cos 2\beta+\frac{1}{2}m_A^2(1-\cos 2\beta)-\frac{1}{2}m_Z^2\cos 2\beta\right]-\\
+\tilde\varphi_u\tilde\varphi_d(-m_Z^2\sin 2\beta-m_A^2\sin(2\beta)),
\end{aligned}\tag{9.34}$$

Окончательно, получим

$$\begin{aligned}
V_2(\tilde\varphi_u,\tilde\varphi_d)=\tilde\varphi_u^2\frac{1}{2}\left[m_A^2+m_Z^2+(m_A^2-m_Z^2)\cos 2\beta\right]+\\
+\tilde\varphi_d^2\frac{1}{2}\left[m_A^2+m_Z^2-(m_A^2-m_Z^2)\cos 2\beta\right]-\\
-\tilde\varphi_u\tilde\varphi_d(m_A^2+m_Z^2)\sin 2\beta,
\end{aligned}\tag{9.35}$$

ясно видно, что данная часть лагранжиана содержит перекрестные слагаемые. Поэтому его нужно привести к нормальным координатам, совершив ортогональное преобразование полей $\tilde{\varphi}_u$ и $\tilde{\varphi}_d$

$$\begin{cases} H \equiv \cos\alpha \cdot \tilde{\varphi}_u + \sin\alpha \tilde{\varphi}_d, \\ h \equiv -\sin\alpha \cdot \tilde{\varphi}_u + \cos\alpha \tilde{\varphi}_d, \end{cases} \tag{9.36}$$

где угол α определяется из требования диагональности массовой матрицы. После такого преобразования потенциал примет следующий вид

$$V_2(\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d) = (\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d) M^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_u \\ \tilde{\varphi}_d \end{pmatrix} \to (H, h) A M^2 A^T \begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix}, \tag{9.37}$$

где

$$M^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 + (m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta\right] & -\frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\sin 2\beta \\ -\frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\sin 2\beta & \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 - (m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta\right] \end{pmatrix} \tag{9.38}$$

недиагональная симметричная массовая матрица, а AM^2A^T - диагональная массовая матрица. Сами квадраты масс будут представлять собой собственные значения массовой матрицы, которые мы определим на следующей лекции.

Легчайший хиггсовский бозон в МССМ

На прошлых лекциях мы начали изучать спектр хиггсовских полей МССМ. МССМ есть калибровочная теория с калибровочной группой

$$G = SU(3) \times SU(2) \times U(1), \tag{10.1}$$

которая при низких энергиях нарушается до $SU(3) \times U(1)_{em}$ за счет того, что два хиггсовских дуплета

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}, \ \varphi_d = \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}, \tag{10.2}$$

находящихся в тривиальном представлении $SU(3)$, фундаментальном представлении $SU(2)$, и с гиперзарядами $Y = \frac{1}{2}$ и $Y = -\frac{1}{2}$ соответственно, приобретают вакуумные средние

$$\varphi_{u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix}, \ \varphi_{d_0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10.3}$$

при этом в спектре хиггсовских полей были выделены 3 голдстоуна и 5 хиггсовских бозонов

$$\begin{cases} Re\ \varphi'_{u2} \equiv \tilde{\varphi}_u, \\ Re\ \varphi'_{d1} \equiv \tilde{\varphi}_d, \\ \cos\beta \cdot Im\ \varphi'_{u2} + \sin\beta \cdot Im\ \varphi'_{d1} \equiv A, \\ \cos\beta\, \varphi'_{u1} + \sin\beta\, \varphi'^{*}_{d2} \equiv \varphi^-, \\ \cos\beta\, \varphi'^{*}_{u1} + \sin\beta\, \varphi'_{d2} \equiv \varphi^+ = (\varphi^-)^*, \end{cases} \tag{10.4}$$

также был записан потенциал в квадратичном приближении, в унитарной калибровке, который распался на две характерные части

$$V^{(2)} = V_1(\varphi^{\pm}, A) + V_2(\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d), \tag{10.5}$$

для $V_1(\varphi^{\pm}, A)$ были получены следующие соотношения для масс хиггсовских бозонов

$$\begin{gathered} m_A^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2, \\ m_{\varphi^{\pm}}^2 = m_A^2 + m_W^2, \end{gathered} \tag{10.6}$$

также из условия минимума потенциала были получены следующие соотношения для $\tan\beta$ и v

$$\begin{gathered} \sin 2\beta = \frac{2\mu B}{m_A^2}, \\ (m_1^2 - m_2^2) = \cos 2\beta (m_A^2 + m_Z^2), \end{gathered} \tag{10.7}$$

где $m_Z^2 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)v^2$.

Для $V_2(\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d)$ было получено следующее выражение

$$V_2(\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d) = (\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d) M^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_u \\ \tilde{\varphi}_d \end{pmatrix}, \tag{10.8}$$

где

$$M^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 + (m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta\right] & -\frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\sin 2\beta \\ -\frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\sin 2\beta & \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 - (m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta\right] \end{pmatrix} \tag{10.9}$$

недиагональная симметричная массовая матрица. Данная матрица была приведена к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования

$$\begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_u \\ \tilde{\varphi}_d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_u \\ \tilde{\varphi}_d \end{pmatrix}, \tag{10.10}$$

где $A^T = A^{-1}$ - ортогональная матрица. Тогда потенциал примет следующий вид

$$V_2(\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d) = (H, h) A M^2 A^T \begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} = (H, h) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix}, \tag{10.11}$$

где $\lambda_1 = m_h^2,\ \lambda_2 = m_H^2$, которые можно найти решив следующее уравнение

$$0 = \det\big(M^2 - \lambda \cdot 1_2\big) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 + (m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta\right] - \lambda & -\frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\sin 2\beta \\ -\frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\sin 2\beta & \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 - (m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta\right] - \lambda \end{pmatrix} =$$
$$= \left[\frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) - \lambda\right]^2 - \frac{1}{4}(m_A^2 - m_Z^2)^2 \cos^2 2\beta -$$
$$-\frac{1}{4}(m_A^2 + m_Z^2)^2 \sin^2 2\beta =$$
$$= \left[\frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) - \lambda\right]^2 - \frac{1}{4}(m_A^4 + m_Z^4 - 2m_A^2 m_Z^2 \cos 4\beta), \tag{10.12}$$

откуда следует следующие выражения для λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{m_A^4 + m_Z^4 - 2m_A^2 m_Z^2 \cos 4\beta}, \tag{10.13}$$

рассмотрим меньшее собственное значение

$$\lambda_1 = m_h^2 = \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) - \frac{1}{2}\sqrt{m_A^4 + m_Z^4 - 2m_A^2 m_Z^2 \cos 4\beta} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(m_A^2 - m_Z^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) - \frac{1}{2}|(m_A^2 - m_Z^2)| = \begin{cases} m_Z^2,\ m_A^2 \geqslant m_Z^2 \\ m_A^2,\ m_A^2 \leqslant m_Z^2 \end{cases} \leqslant m_Z^2, \tag{10.14}$$

То есть получается следующее соотношение

$$m_h^2 \leqslant m_Z^2, \tag{10.15}$$

то есть масса легчайшего хиггсовского бозона должна быть меньше массы Z-бозона m_Z. Однако, на данный момент известны следующие значения масс Z-бозона и хиггсовского бозона

$$\begin{aligned} m_Z &= 91.1880(20) \text{ ГэВ}, \\ m_h &= 125.20 \pm 0.11 \text{ ГэВ}, \end{aligned} \tag{10.16}$$

следовательно, формула (10.15) не может быть верной. Однако данное соотношение было получено в древесном приближении (без учета квантовых поправок к массе хиггсовского бозона). Прежде чем вычислять первую квантовую поправку немного упростим выражение для массы хиггсовского бозона при $m_A \gg m_Z$

$$\begin{aligned} m_h^2 \simeq \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) - \frac{1}{2}m_A^2\sqrt{1 - 2\frac{m_Z^2}{m_A^2}\cos 4\beta} \simeq \\ \simeq \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) - \frac{1}{2}(m_A^2 - m_Z^2\cos 4\beta) = \frac{1}{2}m_Z^2(1 + \cos 4\beta) = m_Z^2\cos^2 2\beta, \end{aligned} \tag{10.17}$$

то есть

$$m_h \simeq m_Z \cos 2\beta, \tag{10.18}$$

тогда с учетом квантовых поправок получим

$$m_h^2 \simeq m_Z^2 \cos^2 2\beta + \frac{3\alpha_2 m_t^4}{4\pi m_W^2} \ln \frac{m_{\tilde{t}_1}^2 m_{\tilde{t}_2}^2}{m_t^4}, \tag{10.19}$$

где m_t - масса t-кварка, $m_{\tilde{t}_1}$ и $m_{\tilde{t}_2}$ - массы двух скалярных суперпартнеров t-кварка. При этом

$$\begin{aligned} \alpha_2(M_Z) &= (29.58)^{-1}, \\ m_W &= 80.3692(133) \text{ ГэВ}, \\ m_t &= 172{,}57 \pm 0.29 \text{ ГэВ}, \end{aligned} \tag{10.20}$$

тогда

$$m_h^2 \simeq 8315\cos^2 2\beta + 4486 \ln \frac{\sqrt{m_{\tilde{t}_1} m_{\tilde{t}_2}}}{m_t} \text{ ГэВ}^2 = 15647 \text{ ГэВ}^2. \tag{10.21}$$

Если $\cos 2\beta$ мал, то тогда $\sqrt{m_{\tilde{t}_1} m_{\tilde{t}_2}} \simeq 5.6$ TeV - максимальное значение массы суперпартнеров t-кварка.

Параграф 8. Массы кварков, лептонов и их скалярных суперпартнеров в МССМ

Выясним теперь, как в МССМ получаются массы кварков, лептонов и их скалярных суперпартнеров. Начнем с масс фермионов, которые получаются из суперпотенциала благодаря юкавскому взаимодействию.

Кварки и лептоны в МССМ приобретают массы аналогично случаю Стандартной модели. Только в отличии от СМ в МССМ приобретают вакуумные средние два дуплета хиггсовских полей

$$\varphi_{u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix}, \ \varphi_{d_0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10.22}$$

где

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_u^2 + v_d^2}, \\ \tan\beta = \frac{v_u}{v_d}, \end{cases} \tag{10.23}$$

а суперпотенциал МССМ имеет вид

$$\begin{gathered} S_{\text{суперп.}} = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \Big[(Y_u)_{IJ} \underset{Y=-\frac{1}{6}}{(\tilde{U},\tilde{D})^{aI}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Y=-\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix}} \underset{Y=\frac{2}{3}}{U_a^J} + \\ + (Y_d)_{IJ} \underset{Y=-\frac{1}{6}}{(\tilde{U},\tilde{D})^{aI}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Y=\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}} \underset{Y=-\frac{1}{3}}{D_a^J} + \\ + (Y_\nu)_{IJ} \underset{Y=\frac{1}{2}}{(\tilde{N},\tilde{E})^{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Y=-\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix}} \underset{Y=0}{N^J} + \\ + (Y_e)_{IJ} \underset{Y=\frac{1}{2}}{(\tilde{N},\tilde{E})^{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Y=\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}} \underset{Y=-1}{E^J} + \\ + \frac{1}{2} M_{IJ} \underset{Y=0}{N_I} \underset{Y=0}{N_J} + \mu \underset{Y=-\frac{1}{2}}{(\phi_{u1},\phi_{u2})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Y=\frac{1}{2}}{\begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix}} \Big] + \text{к.с.} \end{gathered} \tag{10.24}$$

где киральное скалярное суперполе имеет вид

$$\phi_i(y^\mu,\theta) = \varphi_i(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_i(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_i(y^\mu), \tag{10.25}$$

при низких энергиях хиггсовские суперполя можно заменить на их вакуумные средние.

Замечание: при низких энергиях вакуумные средние приобретают как низшие скалярные компоненты φ_u, φ_d, так и скалярные компоненты f_u, f_d, однако после интегрирования по θ при данных компонентах останутся только скалярные компоненты суперполей. А так как нас прежде всего интересуют массы фермионов, то будем рассматривать слагаемые только с низшими компонентами φ_u, φ_d

$$\phi_u \to \varphi_{u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix},$$
$$\phi_d \to \varphi_{d_0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10.26}$$

тогда суперпотенциал даст слагаемые

$$S_{\text{суперп.}} \to \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \big[(Y_u)_{IJ}(\tilde{U},\tilde{D})^{aI}\begin{pmatrix} v_u \\ 0 \end{pmatrix} U_a^J +$$
$$+(Y_d)_{IJ}(\tilde{U},\tilde{D})^{aI}\begin{pmatrix} 0 \\ -v_d \end{pmatrix} D_a^J +$$
$$+(Y_\nu)_{IJ}(\tilde{N},\tilde{E})^I\begin{pmatrix} v_u \\ 0 \end{pmatrix} N^J + (Y_e)_{IJ}(\tilde{N},\tilde{E})^I\begin{pmatrix} 0 \\ -v_d \end{pmatrix} E^J +$$
$$+\frac{1}{2}M_{IJ}N_I N_J\big] + \text{к.с.} =$$
$$= \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \big[v_u(Y_u)_{IJ}\tilde{U}^{aI}U_a^J - v_d(Y_d)_{IJ}\tilde{D}^{aI}D_a^J +$$
$$+v_u(Y_\nu)_{IJ}\tilde{N}^I N^J - v_d(Y_e)_{IJ}\tilde{E}^I E^J + \frac{1}{2}M_{IJ}N^I N^J\big] + \text{к.с.} \tag{10.27}$$

Известно, что действие $N = 1$ *SQCD*

$$S = S_{gauge} + \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta(\phi^+ e^{2V}\phi + \tilde{\phi}^+ e^{-2V^T}\tilde{\phi}) + (\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta m\tilde{\phi}^T\phi) \to$$
$$\to \int d^4x\left[i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi\right] \tag{10.28}$$

сравнивая с предыдущем соотношением, ясно видно, что полученные выражения из суперпотенциала дают дираковскую массу кваркам и заряженным лептонам

$$(m_u)_{IJ} = v_u(Y_u)_{IJ} = (Y_u)_{IJ} v\sin\beta,$$
$$(m_d)_{IJ} = -v_d(Y_d)_{IJ} = -(Y_d)_{IJ} v\cos\beta,$$
$$(m_e)_{IJ} = -v_d(Y_e)_{IJ} = -(Y_e)_{IJ} v\cos\beta. \tag{10.29}$$

Замечание: ясно видно, что если бы в теории не было бы второго хиггсовского дуплета, то из-за требования аналитичности суперпотенциала часть масс фермионов бы равнялась нулю.

У нейтрино ситуация более сложная из-за наличия майорановской массовой добавки. Если сравнить с моделью Весса-Зумино

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+\phi + \left(\frac{m}{4}\int d^4x d^2\theta \phi^2 + \text{к.с.}\right), \tag{10.30}$$

где последнее слагаемое как раз представляет собой майорановское массовое слагаемое, то можно видеть, что последнее слагаемое в суперпотенциале, действительно, является майорановским массовым слагаемым.

При этом масса M полагается достаточно большой, что обеспечивает качельный механизм генерации массы нейтрино. Поэтому кинетическим слагаемым, соответствующим правому нейтрино, можно пренебречь и исключить правое нейтрино N на уравнении движения

$$\begin{aligned} 0 = M_{IJ}N^J + v_u(Y_\nu)_{IJ}\tilde{N}^J, \Longrightarrow \\ \Longrightarrow N = -M^{-1}(Y_\nu)^T v_u \tilde{N}, \end{aligned} \tag{10.31}$$

подставляя данное выражение в суперпотенциал, получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \big[v_u(Y_\nu)_{IJ}\tilde{N}^I N^J + \frac{1}{2}M_{IJ}N^I N^J\big] + \text{к.с.} \to \\ -\frac{1}{4}\int d^4x d^2\theta \big[v_u^2 \tilde{N}^T Y_\nu M^{-1} Y_\nu^T \tilde{N}\big] + \text{к.с.} \end{aligned} \tag{10.32}$$

откуда видно, что масса левого нейтрино $\tilde{N}$ будет равна

$$(m_\nu)_{IJ} = v_u^2 (Y_\nu M^{-1} Y_\nu^T)_{IJ}, \tag{10.33}$$

так МССМ является остаточной теорией от теории SUSY GUT с более широкой калибровочной группой, характерный масштаб нарушения которой, как далее станет понятно, порядка 10^{16} ГэВ, то, естественно, связать тяжелую массу M с данным энергетическим масштабом. В этом случае масса нейтрино будет порядка

$$m_\nu \sim \frac{v^2}{M} \sim \frac{(10^2\ \text{ГэВ})^2}{10^{16}\ \text{ГэВ}} \sim 10^{-12}\ \text{ГэВ} \sim 10^{-3}\text{эВ}, \tag{10.34}$$

то есть для левого нейтрино естественным образом возникает малая майорановская масса.

На следующей лекции будут получены массы скалярных суперпартнеров кварков и лептонов.

Глобальные законы сохранения в МССМ

На прошлой лекции были найдены массы фермионов МССМ. Данные массы получались за счет юкавского взаимодействия фермионов с хиггсовскими бозонами, два дуплета которых при спонтантанном нарушении калибровочной симметрии приобретают вакуумные средние

$$\phi_u = \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix} \to \varphi_u = \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix} \to \varphi_{u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix},$$
$$\phi_d = \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix} \to \varphi_d = \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} \to \varphi_{d_0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{11.1}$$

при этом массовые слагаемые оказываются следующего вида

$$\frac{m}{2}\int d^4xd^2\theta\tilde{\phi}^T\phi, \tag{11.2}$$

которые дают дираковскую массу не только фермионам, но и их скалярным суперпартнерам. Если бы вклад в массу скалярных суперпартнеров давало бы только данное слагаемое, то массы фермионов и их суперпартнеров были бы одинаковыми, что не наблюдается на эксперименте. В действительности, существует несколько источников масс данных скалярных суперпартнеров:

1) слагаемые типа

$$\frac{m}{2}\int d^4xd^2\theta\tilde{\phi}^T\phi, \tag{11.3}$$

обсуждавшиеся выше. При этом вклад в массу соответствующего скалярного суперпартнера получается путем исключения вспомогательного поля f (компонента суперкваркого или суперлептонного поля)

$$f^+f^T\varphi m + f^+\varphi^* m \to -m^2\varphi^+\varphi, \tag{11.4}$$

2) мягкие массы

$$-m_\varphi^2|\varphi|^2 - m_{\tilde{\varphi}^2|\tilde{\varphi}|^2}, \tag{11.5}$$

обеспечивающие большую массу скалярным суперпартнерам и не вносящие квадратичных расходимостей.

3) слагаемые взаимодействия калибровочных полей с низшими компонентами хиггсовских полей

$$\frac{1}{2}\underset{U(1)}{D^2} - \frac{e_1}{2}\varphi_u^+\underset{U(1)}{D}\varphi_u + \frac{e_1}{2}\varphi_d^+\underset{U(1)}{D}\varphi_d,$$
$$\frac{1}{2}\underset{SU(2)}{(D^A)^2} + \frac{e_2}{2}\left[\varphi_u^+\sigma^A\varphi_u + \varphi_d^+\sigma^A\varphi_d\right]\underset{SU(2)}{D} \to \varphi^+\underset{SU(2)}{D_0}\varphi, \tag{11.6}$$

где D_0 - вакуумное значение вспомогательного поля D, которое после исключения на уравнениях движения равно

$$\begin{aligned}
\underset{U(1)}{D_0} &= -\frac{e_1}{2}(v_d^2 - v_u^2) = -\frac{e_1}{2}v^2\cos 2\beta,\\
\underset{SU(2)}{D_0^3} &= -\frac{e_2}{2}(v_d^2 - v_u^2) = -\frac{e_2}{2}v^2\cos 2\beta,\\
\underset{SU(2)}{D_0^1} &= \underset{SU(2)}{D_0^2} = 0,
\end{aligned} \tag{11.7}$$

тогда слагаемые взаимодействия калибровочных полей с скварками и слептонами преобретают вид массовых слагаемых

$$\varphi^+ D\varphi \to \varphi^+ D_0\varphi, \tag{11.8}$$

4) слагаемые взаимодействия хиггсовских суперполей в суперпотенциале

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mu\int d^4x d^2\theta \phi_u^+ \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\phi_d \to\\
&\to \mu\left[f_u^T \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\varphi_d + \varphi_u^T \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} f_d\right] + \text{к.с.},
\end{aligned} \tag{11.9}$$

которые в сумме с соответствующими компонентами из кинетичекских слагаемых

$$\begin{aligned}
&f_u^+ f_u + f_d^+ f_d +\\
&+\mu\left[f_u^T \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\varphi_d + \varphi_u^T \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} f_d\right] + \text{к.с.},
\end{aligned} \tag{11.10}$$

и исключения вспомогательных полей на уравнениях движения

$$\begin{aligned}
0 &= f_u + \mu^* \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\varphi_d^*,\\
f_{u0} &= -\mu^* \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_d\\ 0\end{pmatrix} = \mu^*\begin{pmatrix} 0\\ v_d\end{pmatrix},\\
0 &= f_d + \mu^* \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\varphi_u^*,\\
f_{d0} &= -\mu^* \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ v_u\end{pmatrix} = \mu^*\begin{pmatrix} v_u\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{11.11}$$

как можно видеть, дают нетривиальные вакуумные средние для полей f. Данные поля приводят к появлению массовых слагаемых для скварков и слептонов из юкавских взаимодействий

$$\frac{1}{2}Y_d\int d^4xd^2\theta(\tilde{U},\tilde{D})\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix}D+... \tag{11.12}$$

после интегрирования по θ старших компонент скалярного суперполя

$$\phi_i(y^\mu,\theta)=\varphi_i(y^\mu)+\overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_i(y^\mu)+\frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_i(y^\mu), \tag{11.13}$$

5) Аналогичные структуры возникают из мягких юкавских слагаемых

$$\frac{1}{2}A_d\int d^4xd^2\theta\eta(\tilde{U},\tilde{D})\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix}D+...\to$$
$$\to\frac{1}{2}A_d\int d^4xd^2\theta\eta(\tilde{U},\tilde{D})\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_d\\ 0\end{pmatrix}D+... \tag{11.14}$$

где $\eta=\frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta$ - шпурион.

Таким образом, для полей φ и $\tilde{\varphi}$ возникают массовые матрицы

$$(\varphi,\tilde{\varphi})\begin{pmatrix}m_{11}^2 & m_{12}^2\\ m_{21}^2 & m_{22}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \tilde{\varphi}\end{pmatrix} \tag{11.15}$$

а поля с определенными квадратами масс получаются как линейные комбинации φ и $\tilde{\varphi}$. Квадраты масс, как обычно, представляют собой собственные значения массовой матрицы.

Замечание: отдельного обсуждения требуют массы спинорных суперпартнеров калибровочных полей. Однако, данные вопросы исследоваться в данном курсе не будут.

Параграф 9. Глобальные законы сохранения в МССМ

Также как и в СМ, в МССМ имеются глобальные симметрии, приводящие к законам сохранения.

Например, действие МССМ инвариантно относительно преобразований ($\beta\in Re,\beta\neq\beta(x)$)

$$U^I\to e^{i\beta/3}U^I,$$
$$D^I\to e^{i\beta/3}D^I,$$
$$\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{D}\end{pmatrix}^I\to e^{-i\beta/3}\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{D}\end{pmatrix}^I, \tag{11.16}$$

где $I = \overline{1,3}$. Эта симметрия приводит к сохранению барионного числа.

Замечание: как в СМ с помощью данных преобразований не все юкавские матрицы можно диагонализовать одновременно.

Также почти все слагаемые в МССМ инвариантны относительно преобразований

$$N^I \to e^{i\alpha} N^I,$$
$$E^I \to e^{i\alpha} E^I,$$
$$\begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix} \to e^{-i\alpha} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}, \tag{11.17}$$

где $\alpha = \alpha(x) - Re$ число.

Не инвариантна только майорановская масса правого нейтрино и соответствующее мягкое слагаемое. Но ситуацию легко исправить введя поле S с нетривиальным вакуумным средним, таким что $S \to e^{-2i\alpha} S$ и заменив

$$M_{IJ} N^I N^J \to (Y_S)_{IJ} S N^I N^J, \tag{11.18}$$

при этом вакуумное среднее $(Y_S)_{IJ} S_0 \to M_{IJ}$. Тогда получится закон сохранения лептонного числа.

Параграф 10. R-четность и стабильность легчайшего суперпартнера

Можно также заметить, что в МССМ есть дискретная $Z_2 = (1, -1)$-симметрия, которая оставляет поля СМ (и дополнительный хиггсовский дуплет) неизменными, но меняет знаки их суперпартнеров. Рассмотрим данную симметрию более детально.

Напомним, что хиггсовские суперполя ϕ_u, ϕ_d в МССМ являются киральными суперполями

$$\phi_i(y^\mu, \theta) = \varphi_i(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_i(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_i(y^\mu), \tag{11.19}$$

где $y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta$ - киральные координаты. Здесь низшие компоненты $\varphi_i(y^\mu)$ являются хиггсовскими бозонами СМ, $\psi_i(y^\mu)$ - их суперпартнеры.

Нас интересуют преобразования, при которых

$$\varphi(x) \to \varphi(x),$$
$$\psi(x) \to -\psi(x),$$
$$f(x) \to f(x), \tag{11.20}$$

то есть при таких преобразованиях суперполе преобразуется следующим образом

$$\phi_i(y^\mu,\theta) = \varphi_i(y^\mu) - \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_i(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_i(y^\mu), \tag{11.21}$$

очевидно, данное преобразование можно записать следующим образом

$$\phi_i(y^\mu,\theta) \to \phi_i(y^\mu,-\theta). \tag{11.22}$$

Кваркам и лептонам $\begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{D} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}, U, D, E, N$ также соответствуют киральные суперполя

$$\phi_i(y^\mu,\theta) = \varphi_i(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_i(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_i(y^\mu), \tag{11.23}$$

при этом, кваркам и лептонам СМ соответствуют спинорные компоненты данных полей $\psi_i(y^\mu)$, а их суперпартнеры - $\varphi_i(y^\mu)$. Поэтому для них преобразования R-четности должно быть записано в следующей форме

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\to -\varphi(x), \\ \psi(x) &\to \psi(x), \\ f(x) &\to -f(x), \end{aligned} \tag{11.24}$$

то есть, данное преобразование можно записать следующим образом

$$\phi_i(y^\mu,\theta) \to -\phi_i(y^\mu,-\theta). \tag{11.25}$$

Калибровочные бозоны A_μ представляют собой компоненты суперполя $V(x,\theta)$, которое в калибровке Весса-Зумино имеет вид

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\gamma_5 A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\overline{\theta}\theta)\cdot\overline{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta)^2 D(x), \tag{11.26}$$

которое при преобразованиях R-четности должно преобразовываться так, чтобы

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\to A_\mu(x), \\ \lambda(x) &\to -\lambda(x), \\ D(x) &\to D(x), \end{aligned} \tag{11.27}$$

то есть, данное преобразование можно записать следующим образом

$$V(x,\theta) \to V(x,-\theta). \tag{11.28}$$

При преобразованиях R-четности тензор напряженностей

$$W_a(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) \equiv \frac{1}{32}\overline{D}(1-\gamma_5)D\left[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}\right], \tag{11.29}$$

изменяется за счет изменения знака ковариантной производной $D_a \equiv \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^a} - i(\gamma^\mu\theta)_a\partial_\mu$ следующим образом

$$W_a(y^\mu,\theta) \to -W_a(y^\mu,-\theta). \tag{11.30}$$

Таким образом, преобразования R-четности имеют вид

$$\begin{cases} V(x,\theta) \to V(x,-\theta), \\ W_a(y^\mu,\theta) \to -W_a(y^\mu,-\theta), \\ \phi_i(y^\mu,\theta) \to \phi_i(y^\mu,-\theta), \text{ для } \phi_u,\phi_d \\ \phi_i(y^\mu,\theta) \to -\phi_i(y^\mu,-\theta), \text{ для суперполей, содержащих кварки и лептоны} \end{cases} \tag{11.31}$$

инвариантность действия МССМ может быть легко проверена. Действие МССМ содержит слагаемые типа

$$\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V}\phi, \tag{11.32}$$

которые ввиду квадратичности по ϕ, а также ввиду того, что интеграл

$$\int d^4\theta = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\right)^2 \tag{11.33}$$

инвариантен относительно замены $\theta \to -\theta$, является инвариантной величиной относительно преобразований R-четности.

Также действие МССМ содержит слагаемые типа

$$\frac{1}{2e^2} tr Re\int d^4x d^2\theta W^a W_a, \tag{11.34}$$

которые также остаются инвариантными относительно преобразований R-четности ввиду квадратичности по W_a и инвариантности интеграла

$$\int d^2\theta = \frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}. \tag{11.35}$$

Останутся инвариантными также и мягкие слагаемые, отличающиеся от рассмотренных выше слагаемых наличием шпуриона $\eta \equiv \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta$, явно инвариантного относительно замены $\theta \to -\theta$.

В суперпотенциале инвариантными будут слагаемые, имеющие четные степени по полям кварков и лептонов, например, слагаемое

$$\frac{1}{2}(Y_u)_{IJ}\int d^4x d^2\theta (\tilde{U},\tilde{D})^{aI}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix} U_a^J + ..., \tag{11.36}$$

инвариантно относительно преобразований R-четности, поскольку содержит два суперполя, содержащих кварковые поля. То же самое относится и к соответствующим мягким слагаемым.

Таким образом, лагранжиан инвариантен относительности R-четности.

Замечание: R-четность лагранжиана МССМ связана с наличием четного числа суперпартнеров в данной теории.

Рассмотрим следствие наличия данной симметрии. Пусть имеется некоторый массивный суперпартнер. Как уже было замечено, в силу инвариантности действия МССМ относительно преобразований R-четности, в любую вершину взаимодействия суперпартнеры должны входить только в четных степенях. Поэтому при распаде суперпартнера всегда должен возникать еще один суперпартнер (см. рис.).

Следовательно, легчайший суперпартнер должен оказаться стабильным, так как ему не на что распадаться. Это хороший кандидат на роль темной материи во Вселенной.

Однако легчайший суперпартнер может не оказаться стабильной частицей, так как к действию МССМ можно добавить калибровочно инвариантные слагаемые, нарушающие R-четность:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \{\lambda_{IJK}\overset{+1/2}{(\tilde{N},\tilde{E})^I}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\overset{+1/2}{\begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}}\overset{-1}{E^K}+\\ +\lambda'_{IJK}\overset{-1/6}{(\tilde{U},\tilde{D})^{aI}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\overset{+1/2}{\begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}}\overset{-1/3}{D_a^K}+\\ +\lambda''_{IJK}\varepsilon^{abc}\overset{+2/3}{U_a^I}\overset{-1/3}{D_b^J}\overset{-1/3}{D_c^K}+M_I\overset{+1/2}{(\tilde{N},\tilde{E})^I}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\overset{-1/2}{\begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix}}\}+\text{к.с.},\end{gathered} \tag{11.37}$$

R-четность нарушается поскольку все эти слагаемые имеют нечетные степени по суперполям, содержащим кварки и лептоны, и, следовательно, преобразования R-четности меняют знак данных слагаемых.

В то же время данные слагаемые являются калибровочно инвариантными. $SU(3)\times SU(2)$-инвариантность этого выражения очевидна ввиду свертки по соответствующим индексам и наличия соответствующих инвариантных тензорных структур. $U(1)$-

инвариантность следует из равенства нулю суммы гиперзарядов для каждого слагаемого, подписанных над каждым полем.

Здесь также следует заметить, что первое слагаемое отлично от нуля при условии $\lambda_{IJK} = -\lambda_{JIK},\ \lambda''_{IJK} = -\lambda_{IKJ}$.

Таким образом, при наличии указанных выше слагаемых легчайший суперпартнер уже не будет стабильной частицей.

Для R-четности иногда используют следующее выражение

$$R_p = (-1)^{3B+L+2S}, \tag{11.38}$$

где B - барионное число, L - лептонное число, S - спин.

Справедливость данной формулы следует из следующей таблицы

поля	B	L	S	R_p
кварки	1/3	0	1/2	+1
скварки	1/3	0	0	−1
лептоны	0	1	1/2	+1
слептоны	0	1	0	−1
хиггсы	0	0	0	+1
хиггсино	0	0	1/2	−1
калибровочные бозоны	0	0	1	+1
калибрино	0	0	1/2	−1

Из данной таблицы видно, что для частиц СМ $R_p = +1$, а для суперпартнеров $R_p = -1$.

Объединение бегущих констант связи в МССМ

На прошлых лекциях была изучена МССМ - теория с нарушенной суперсимметрией. В данной лекции исследуем насколько точно данная теория соответствует действительности.

Параграф 11. Объединение бегущих констант связи в МССМ

Напомним, что МССМ есть калибровочная теория с калибровочной группой

$$G = SU(3)\times SU(2)\times U(1), \tag{12.1}$$

и с тремя константами связи соответственно

$$\alpha_3 = \frac{e_3^2}{4\pi},\ \alpha_2 = \frac{e_2^2}{4\pi},\ \alpha_1 = \frac{5}{3}\frac{e_1^2}{4\pi}, \tag{12.2}$$

где множитель $\frac{5}{3}$ кодирует значение угла Вайнберга $\sin^2\theta_W = 3/8$. Также известно (курс "Теории Великого Объединения"), что как СМ, так и МССМ являются низкоэнергетическим пределом некоторой теории с более широкой калибровочной группой - теории Великого объединения (например, с группами $SU(5)$, $SO(10)$, E_6). Важным следствием таких теорий Великого Объединения является объединение констант связи

$$\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = \left(\alpha_5 = \frac{e_5^2}{4\pi}\right), \tag{12.3}$$

при этом на массе Z-бозона

$$\begin{aligned}\alpha_3(M_Z) &\simeq (8,4675)^{-1},\\ \alpha_2(M_Z) &\simeq (29,58)^{-1},\\ \alpha_1(M_Z) &\simeq (59,02)^{-1},\end{aligned} \tag{12.4}$$

естественно, на масштабе энергий порядка массы Z-бозона равенство констант связи не выполняется, поскольку необходимо также учитывать квантовые поправки.

В однопетлевом приближении ренормгрупповая эволюция констант связи описывается формулой

$$\frac{1}{\alpha(\mu)} = \frac{1}{\alpha(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\left(\frac{11}{3}c_2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\Phi}T(R_\Phi) - \frac{1}{3}\sum_{\text{ск.}T(R_{\text{ск.}})}\right), \tag{12.5}$$

где первое слагаемое в скобках представляет собой вклад калибровочных полей и духов, второе - от дираковских фермионов (1/2 - учет майорановских или вейлевских фермионов), последнее слагаемое - вклад комплексных скаляров.

При этом генераторы фундаментального представления калибровочной группы t^A удовлетворяют условию нормировки

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}, \tag{12.6}$$

и коммутационным соотношениям

$$[t^A, t^B] = if^{ABC}t^C, \tag{12.7}$$

где f^{ABC} - структурные константы калибровочной группы, полностью антисимметричные по своим индексам.

Генераторы T^A представления R калибровочной группы также удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям

$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C, \tag{12.8}$$

и нормированы следующим образом

$$tr(T^A T^B) = T(R)\delta^{AB}, \tag{12.9}$$

где коэффициент

$$\begin{aligned} T(\text{фунд.}) &= \frac{1}{2}, \\ T(Adj) &= C_2, \end{aligned} \tag{12.10}$$

здесь константа C_2 определяется выражением

$$f^{ACD}f^{BCD} = C_2\delta^{AB} \tag{12.11}$$

а также поскольку в присоединенном представлении

$$(T^A_{Adj})_{BC} = -if^{ABC}, \tag{12.12}$$

то

$$T(Adj)\delta^{AB} = tr(T^A T^B) = -if^{ACD}(-i)f^{BDC} = C_2\delta^{AB}, \tag{12.13}$$

то есть, действительно,

$$T(Adj) = C_2, \tag{12.14}$$

при этом, известно, что

$$C_2(SU(N)) = N,\ C_2(U(1)) = 0. \tag{12.15}$$

Замечание: в формуле для эволюции константы связи пренебрегается пороговыми эффектами (рассматриваются вклады только тех частиц, массы которых меньше заданного масштаба энергий) и вкладом высших петель.

В СМ поведение констант связи изображается следующим графиком (). Как можно видеть три прямые пересекаются в трех различных точках, то есть отсутствует масштаб энергии, на котором бы выполнялось условие (12.3).

Теперь, проверим выполняется ли на каком-либо масштабе энергий условие (12.3) в МССМ. Для этого, исследуем по-отдельности однопетлевую эволюцию каждой из констант связи в МССМ.

$SU(3)$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)}+ \\ +\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\left(\frac{11}{3}\cdot 3-\frac{2}{3}\cdot 3-\frac{4}{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\right), \\ \frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)}+\frac{3}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0},\end{gathered} \tag{12.16}$$

где первое слагаемое представляет собой вклад глюонов и духов, второе - вклад глюино (майорановские спиноры), третье - вклад 3 поколений кварков (дираковские спиноры), последнее слагаемое - вклад скалярных суперпартнеров кварков (по два суперпартнера у каждого дираковского фермиона).

Замечание: в СМ соответствующая эволюция выглядела следующим образом

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)}+\frac{7}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}, \tag{12.17}$$

таким образом, изменение коэффициента произошло из-за вкладов глюино и скварков.

$SU(3)$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}(\frac{11}{3}\cdot 2-\frac{2}{3}\cdot 2- \\ -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot 3-\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}- \\ -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2) = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0},\end{gathered} \tag{12.18}$$

где первое слагаемое представляет собой вклад калибровочных бозонов $\underset{SU(2)}{A_\mu}$ и духов, второе - вклад калибрино (майорановские спиноры), третье и четвертое - вклады 3 поколений кварков и лептонов (вейлевские спиноры), и 2 дуплетов хиггсино соответственно, последние два слагаемых - вклад скалярных суперпартнеров кварков и лептонов, и хиггсов соответственно.

Замечание: вклады третье и четвертого слагаемых отличается от вкладов двух последних слагаемых только коэффициентами $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{3}$, поэтому суммарно вклад от киральных суперполей материи можно записывать с коэффициентом -1.

Замечание: в СМ соответствующая эволюция выглядела следующим образом

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} + \frac{19}{6}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}, \tag{12.19}$$

таким образом, изменение коэффициента произошло за счет калибрино и суперпартнеров материальных полей.

Итак, однопетлевая эволюция констант связи α_3, α_2 имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_3(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{3}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}, \\ \frac{1}{\alpha_2(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}. \end{aligned} \tag{12.20}$$

$U(1)$: здесь вычисления отличаются, поскольку по $U(1)$ характеристикой является не представление, а гиперзаряд Y. Также, как было ранее замечено

$$C_2(U(1)) = 0, \tag{12.21}$$

то есть первое слагаемое в скобках в формуле для эволюции константы связи (12.5) будет отсутствовать.

Далее, нужно понять, как будут выглядеть второе и третье слагаемые в формуле (12.5) в абелевом случае. Данные слагаемые получаются из вершин взаимодействия полей материи с калибровочными полями, которые в свою очередь определяются из выражений для ковариантных производных. В неабелевом случае последние имеют вид

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + ieA_\mu^A T^a\psi, \tag{12.22}$$

которые для однопетлевого приближения через соответствующие вершины и пропагаторы (см. рис.) дают вклады пропорциональные

$$(T^A)_i^j (T^B)_j^i = tr(T^A T^B) = \delta^{AB} T(R), \tag{12.23}$$

откуда и получаются соответствующие два последних слагаемых в скобках в формуле (12.5) в неабелевом случае.

суперполе	$(\tilde{U},\tilde{D})^I$	U^I	D^I	$(\tilde{N},\tilde{E})^I$	N^I	E^I	ϕ_d	ϕ_u
Y	$-1/6$	$+2/3$	$-1/3$	$+1/2$	0	-1	$+1/2$	$-1/2$

Таблица 12.1. Caption

В абелевом же случае ковариантная производная имеет вид

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ie \underset{U(1)}{A_\mu} Y \psi, \tag{12.24}$$

поэтому в абелевом случае вместо $tr(T^A T^B)$ в петлях будет величина Y^2. В итоге, для константы связи $\alpha_{10} = \frac{e_1^2}{4\pi}$ получим следующее выражение

$$\frac{1}{\alpha_{10}(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{10}(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \left(-\frac{2}{3} \sum_{\Phi} Y_\Phi^2 - \frac{1}{3} \sum_{\text{ск.} Y_{\text{ск.}}{}^2} \right), \tag{12.25}$$

с учетом того, что и спиноры, и скаляры в суперсимметричном случае имеют один и тот же гиперзаряд

$$\frac{1}{\alpha_{10}(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{10}(\mu_0)} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \sum Y^2, \tag{12.26}$$

где суммирование ведется по киральным суперполям. Для $\alpha_1 = \frac{5}{3}\frac{e_1^2}{4\pi}$ тогда получим

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{3}{5}\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \sum Y^2, \tag{12.27}$$

чтобы вычислить сумму всех гиперзарядов напомним, что в МССМ гиперзаряды киральных суперполей имеют вид

поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{3}{5}\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} [(-\frac{1}{6})^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + (\frac{2}{3})^2 \cdot 3 \cdot 3 + \\
+ (-\frac{1}{3})^2 \cdot 3 \cdot 3 + (\frac{1}{2})^2 \cdot 3 \cdot 2 + 0 + (-1)^2 \cdot 3 + (\frac{1}{2})^2 \cdot 2 + (-\frac{1}{2})^2 \cdot 2] = \\
= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{3}{5}\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \cdot 11,
\end{aligned} \tag{12.28}$$

таким образом, окончательно получаем

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{3}{5}\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \cdot 11, \tag{12.29}$$

Замечание: в СМ соответствующая эволюция выглядела следующим образом

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{41}{10}\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \tag{12.30}$$

Таким образом, в МССМ однопетлевая эволюция констант связи описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_3(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{3}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}, \\ \frac{1}{\alpha_2(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}, \\ \frac{1}{\alpha_1(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{33}{5}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}. \end{aligned} \tag{12.31}$$

Найдем масштабы, на которых пересекаются различные прямые. Для этого в качестве масштаба μ_0 возьмем массу Z-бозона M_Z, а в качестве масштаба μ выберем энергетический масштаб великого объединения M_X

Замечание: на данном масштабе начинают рождаться X_μ и Y_μ бозоны и близок порог для хиггсовского триплета. После прохождения этих порогов все константы связи сольются в одну и будут бежать вместе.

1) Уравнение $\alpha_3(M_X) = \alpha_2(M_X)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_3(M_Z)} + \frac{3}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z} &= \frac{1}{\alpha_2(M_Z)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z} \implies \\ \ln\frac{M_X}{M_Z} &= 2\pi\frac{\frac{1}{\alpha_2(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}}{3+1} \implies \\ \log_{10}\frac{M_X}{M_Z} &= \frac{2\pi}{\ln 10}\frac{\frac{1}{\alpha_2(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}}{3+1} \simeq 14{,}40. \end{aligned} \tag{12.32}$$

2) Уравнение $\alpha_3(M_X) = \alpha_1(M_X)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{3}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0} &= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{33}{5}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0} \implies \\ \log_{10}\frac{M_X}{M_Z} &= \frac{2\pi}{\ln 10}\frac{\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}}{3+33/5} \simeq 14{,}37. \end{aligned} \tag{12.33}$$

3) Уравнение $\alpha_2(M_X) = \alpha_1(M_X)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0} &= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{33}{5}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0} \implies \\ \log_{10}\frac{M_X}{M_Z} &= \frac{2\pi}{\ln 10}\frac{\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_2(M_Z)}}{-1+33/5} \simeq 14{,}35. \end{aligned} \tag{12.34}$$

Теперь, сравним предсказания для объединения констант связи в СМ и в МССМ

График полученных функций изображен на рисунке () синими линиями. Для сравнения случай СМ показан красными линиями.

константы	$\alpha_1 = \alpha_2$	$\alpha_1 = \alpha_2$	$\alpha_1 = \alpha_2$	средние
масштаб (СМ)	$11,06$	$12,43$	$12,84$	$12,84$
масштаб (МССМ)	$14,35$	$14,37$	$14,40$	$14,37$

Таблица 12.2. Caption

Итак, энергетический масштаб великого объединения в МССМ имеет следующий порядок

$$M_X \sim M_Z \cdot 10^{14,37} \sim 2,1 \cdot 10^{16}\text{Гэв}, \tag{12.35}$$

тогда как в СМ

$$M_X \sim M_Z \cdot 10^{12,84} \sim 6,3 \cdot 10^{14}\text{Гэв}, \tag{12.36}$$

что в 30 раз меньше чем в случае МССМ.

Состав полей суперсимметричной $SU(5)$ ТВО

На прошлых лекциях были рассмотрена МССМ - SUSY-обобщение СМ. Одной из важных особенностей данной модели является объединение бегущих констант связи в одной точке, что согласуется с предсказаниями любой теорией великого объединения. В данной лекции будет рассмотрена простейшая SUSY ТВО с калибровочной группой $SU(5)$.

Замечание: данная теория не в SUSY случае уже является опровергнутой в экспериментах по распаду протона.

Изучение данной теории тем не менее является полезным с точки зрения изучения основных идей построения ТВО в SUSY случае.

Глава 3. Суперсимметричная ТВО с группой $SU(5)$

Параграф 1. Состав полей SUSY ТВО с группой $SU(5)$

МССМ является SUSY СМ с калибровочной группой

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1), \tag{13.1}$$

которая с точки зрения ТВО может быть рассмотрена как остаток от спонтанного нарушения более широкой групы, в простейшем случае группы $SU(5)$, так как группа $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ является максимальной подгруппой $SU(5)$, то есть

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5), \tag{13.2}$$

причем не существует G отличной от $SU(5)$ или $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, такой что

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset G \subset SU(5), \tag{13.3}$$

при этом квантовые числа СМ подразумевают наличие данной более широкой группы симметрии.

Теперь, в явном виде выпишем вложение $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ в $SU(5)$. Группа $SU(5)$ состоит из унитарных 5×5 матриц с единичным определителем, поэтому вложение запишется в следующей форме

$$\omega_5 = \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha}\omega_2^* \end{pmatrix} \in SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5), \tag{13.4}$$

где $\omega_3 \in SU(3)$, $\omega_2 \in SU(2)$ (комплексное сопряжение написано для удобства записи киральных суперполей, так как $\omega_2^* = (\omega_2^+)^T = (\omega_2^{-1})^T$), $\alpha - Re$ число.

Замечание: коэффициенты -2 и 3 в показателях экспонент выбраны чтобы определитель матрицы ω_5 был равен 1

$$\det\{\omega_5\} = \det\{\omega_3\}(e^{-2i\alpha})^3 \cdot \det\{\omega_2^*\} \cdot (e^{3i\alpha})^2 = \\ = 1 \cdot (e^{-2i\alpha})^3 \cdot 1 \cdot (e^{3i\alpha})^2 = 1. \tag{13.5}$$

Поскольку группа $SU(5)$ является простой, то в соответствующей ТВО будет только одна константа связи

$$\alpha_5 = \frac{e_5^2}{4\pi} = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1, \tag{13.6}$$

где

$$\alpha_3 = \frac{e_3^2}{4\pi},\ \alpha_2 = \frac{e_2^2}{4\pi},\ \alpha_1 = \frac{5}{3}\frac{e_1^2}{4\pi}, \tag{13.7}$$

константы связи МССМ, множитель $\frac{5}{3}$ кодирует значение угла Вайнберга $\sin^2\theta_W = 3/8$. Соответственно в данной теории будет только одно калибровочное суперполе

$$\underset{SU(5)}{V(x^\mu,\theta)} = e_5 \underset{SU(5)}{V^A(x^\mu,\theta)} \underset{SU(5)}{t^A}, \\ \underset{SU(5)}{V^+} = \underset{SU(5)}{V} \iff \underset{SU(5)}{(V^A)^*} = \underset{SU(5)}{V^A}, \tag{13.8}$$

при этом генераторы удовлетворяют условиям

$$(t^A)^+ = t^A, \\ tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}. \tag{13.9}$$

Как и в МССМ, в теории присутствуют киральные суперполя материи, которые делятся на две группы:

1. Суперполя, включающие кварки или лептоны (3 поколения).
2. Суперполя, включающие различные хиггсовские поля.

При этом, квантовые числа полей СМ (МССМ) могут быть получены, если разместить (супер)поля материи в нескольких неприводимых представлениях калибровочной группы ТВО. В случае $SU(5)$ ТВО поля левых кварков и левых лептонов одного поколения размещаются в представлениях

$$3 \times (1 + \overline{5} + 10), \tag{13.10}$$

в случае SUSY $SU(5)$ ТВО кварки и лептоны одного поколения являются спинорными компонентами скалярного суперполя

$$\phi_i(y^\mu,\theta) = \varphi_i(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_i(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_i(y^\mu), \tag{13.11}$$

которые, как можно видеть являются правыми фермионами, поэтому пользуясь известным соотношением

$$(\psi_L)^C = (\psi^C)_R, \tag{13.12}$$

замечаем, что правые фермионы получаются из левых действием зарядового сопряжения, которое включает в себя комплексное сопряжение, которое в свою очередь переводит соответствующие представления в представления, сопряженные к ним. Поэтому киральные суперполя материи или, что эквивалентно правые фермионы (поля кварков и лептонов) размещаются в представлениях

$$3\times(1+5+\overline{10}), \tag{13.13}$$

где 1 - тривиальное представление (синглет) $SU(5)$ в которым располагается правое нейтрино:

$$3\times 1\sim N^I, \tag{13.14}$$

5 - фундаментальное представление $SU(5)$, в котором располагаются правые нижние кварки D^I и левые лептоны $\tilde{E},\tilde{N}$

$$3\times 5\sim \left(\begin{array}{c} D_1\\ D_2\\ D_3\\ \hline \tilde{E}\\ -\tilde{N}\end{array}\right)^I = 5_i^I, \tag{13.15}$$

10 - антисимметричное тензорное представление $SU(5)$

$$3\times\overline{10}\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & U_3 & -U_2 & \tilde{U}^1 & \tilde{D}^1\\ -U_3 & 0 & U_1 & \tilde{U}^2 & \tilde{D}^2\\ U_2 & -U_1 & 0 & \tilde{U}^3 & \tilde{D}^3\\ \hline -\tilde{U}^1 & -\tilde{U}^2 & -\tilde{U}^3 & 0 & E\\ -\tilde{D}^1 & -\tilde{D}^2 & -\tilde{D}^3 & -E & 0\end{array}\right)^I = \overline{10}^{ijI} = -\overline{10}^{jiI}. \tag{13.16}$$

где индекс $I=\overline{1,3}$, нумерующий поколения.

Хиггсовские поля (входящие в суперполя) должны обеспечивать цепочку нарушения симметрии

$$SU(5)\underset{H}{\rightarrow} SU(3)\times SU(2)\times U(1)\underset{\phi_u,\phi_d}{\rightarrow} SU(3)\times U(1)_{em}. \tag{13.17}$$

Далее станет понятно, что минимальное представление $SU(5)$, в котором может лежать хиггс, нарушающий $SU(5)$ до $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ есть присоединенное представление Adj размерности 24. Соответствующее киральное суперполе обозначается через $H_i^j \equiv H^A(\underset{SU(5)}{t^A})_i^j$, а его скалярную компоненту через h_i^j.

Для нарушения $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ до $SU(3)\times U(1)_{em}$ ранее (в МССМ) использовались суперполя ϕ_u, ϕ_d в фундаментальном представлении $SU(2)$, тривиальном представлении $SU(3)$ и гиперзарядами $-1/2$ и $+1/2$ соответственно. Их можно. включить в суперполя

$$\begin{aligned}(\phi_d)_i &\in 5,\\ (\phi_u)^i &\in \overline{5},\end{aligned} \tag{13.18}$$

которые при этом также будут содержать триплеты (3 верхние компоненты), которых не было в МССМ.

Замечание: в отличие от несуперсимметричного случая здесь нигде нет зарядового сопряжения, все элементы являются киральными суперполями.

Параграф 2. Получение квантовых чисел суперполей МССМ из квантовых чисел по группе $SU(5)$

Квантовые числа, полученные из экспериментальных данных, позволили в свое время сформулировать СМ, теперь, покажем, что данные квантовые числа также свидетельствуют о наличии более широкой группы симметрий - в простейшем случае группы $SU(5)$.

Так как представления $SU(5)$ определяют и законы преобразования (супер)полей по подгруппе $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, то необходимо проверить, что соответствующие квантовые числа получаются правильно.

N - тривиальное представление $SU(5)$, в котором лежит суперполе, соответствующее правому нейтрино, следовательно, N - также тривиальное представление $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ $(Y=0)$, что соответствует МССМ.

Фундаментальное представление $SU(5)$

$$5_i = \left(\begin{array}{c} D_1\\ D_2\\ D_3\\ \hline \tilde{E}\\ -\tilde{N}\end{array}\right) \to (\omega_5)_i^j 5_j \overset{\rightarrow}{=} \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0\\ 0 & e^{3i\alpha}\omega_2^* \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} D_1\\ D_2\\ D_3\\ \hline \tilde{E}\\ -\tilde{N}\end{array}\right), \tag{13.19}$$

для верхнего блока (триплета) имеем

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \to (\omega_3) e^{-2i\alpha} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \tag{13.20}$$

следовательно, D_a лежит в фундаментальном представлении $SU(3)$ и тривиальном по $SU(2)$. Так как α определено с точностью до нормировки то гиперзаряд определить нельзя. Требуя, чтобы $Y = -1/3$, мы получаем, что если $\alpha \equiv \frac{1}{6}\alpha_0$, то коэффициент перед $i\alpha_0$ в экспоненте будет гиперзарядом - фиксация нормировки.

Тогда для нижнего блока имеем

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix} \to \omega_2^* e^{3i\alpha} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix} = \omega_2^* e^{i\alpha_0/2} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \tilde{N}^* \\ \tilde{E}^* \end{pmatrix} \to \omega_2^* e^{i\alpha_0/2} \begin{pmatrix} \tilde{N}^* \\ \tilde{E}^* \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix} \to \omega_2 e^{i\alpha_0/2} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{13.21}$$

то есть данный столбец располагается в тривиальном представлении $SU(3)$, фундаментальном $SU(2)$ и $Y = 1/2$, что также согласуется с МССМ.

Замечание: здесь использован тот факт, что столбец

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \to \omega_2 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{13.22}$$

преобразуется так же, как столбец

$$\begin{pmatrix} \varphi_2^* \\ -\varphi_1^* \end{pmatrix} \to \omega_2 \begin{pmatrix} \varphi_2^* \\ -\varphi_1^* \end{pmatrix}, \tag{13.23}$$

поскольку $\omega_2 = (a_4 \cdot 1 + i\vec{\sigma}\vec{a})$, где $a_1, ..., a_4 \in Re$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$, а также с учетом

$$\begin{pmatrix} \varphi_2^* \\ -\varphi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^* \\ \varphi_2^* \end{pmatrix}, \tag{13.24}$$

получим

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}\varphi_2^* \\ -\varphi_1^*\end{pmatrix} \to \omega_2^* \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1^* \\ \varphi_2^*\end{pmatrix} \to \\ \to \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}(a_4\cdot 1 - i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 - i\sigma_3 a_3)\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot \\ \cdot\begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1^* \\ \varphi_2^*\end{pmatrix} = \\ i\sigma_2(a_4\cdot 1 - i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 - i\sigma_3 a_3)(-i\sigma_2)\begin{pmatrix}\varphi_2^* \\ -\varphi_1^*\end{pmatrix} = \\ [\sigma_2^2 = 1, \{\sigma_1,\sigma_2\} = \{\sigma_3,\sigma_2\} = 0] = \\ = (a_4\cdot 1 + i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 + i\sigma_3 a_3)\begin{pmatrix}\varphi_2^* \\ -\varphi_1^*\end{pmatrix} = \omega_2\begin{pmatrix}\varphi_2^* \\ -\varphi_1^*\end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{13.25}$$

Теперь, проверим соответствие с МССМ для тензорного представления

$$\overline{10}^{ij} \to (\omega_5^*)^i_k(\omega_5^*)^j_l\overline{10}^{kl}, \tag{13.26}$$

представим индекс $i = \overline{1,5}$ как совокупность $i = (a,\alpha)$, где $a = \overline{1,3}, \alpha = 4,5$. Тогда

$$\overline{10}^{\alpha\beta} = E\cdot\varepsilon^{\alpha\beta} \to E\cdot(\omega_5^*)^\alpha_\gamma(\omega_5^*)^\beta_\delta\varepsilon^{\gamma\delta}, \tag{13.27}$$

так как $(\omega_5^*)^\alpha_\beta = \omega_2^* e^{3i\alpha}$, то

$$\begin{gathered} E\cdot\varepsilon^{\alpha\beta} \to E\cdot(\omega_2)^\alpha_\gamma\cdot e^{-3i\alpha}(\omega_2)^\beta_\delta e^{-3i\alpha}\varepsilon^{\gamma\delta} = \\ = [(\omega_2)^\alpha_\gamma\cdot(\omega_2)^\beta_\delta\cdot\varepsilon^{\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta}\cdot\det\{\omega_2\} = \varepsilon^{\alpha\beta}] = \\ E\cdot\varepsilon^{\alpha\beta}\cdot e^{-6i\alpha} = E\cdot\varepsilon^{\alpha\beta}\cdot e^{-i\alpha_0} \implies \\ E \to e^{-i\alpha_0}E, \end{gathered} \tag{13.28}$$

располагается в тривиальном представлении по $SU(3), SU(2)$, с гиперзарядом $Y = -1$, что также соответствует МССМ.

Далее

$$\begin{gathered} \overline{10}^{\alpha a} = \begin{pmatrix}-\tilde{U}^a \\ -\tilde{D}^a\end{pmatrix} \to (\omega_5^*)^\alpha_\beta(\omega_5^*)^a_b\overline{10}^{\beta b} \implies \\ \begin{pmatrix}\tilde{U}^a \\ \tilde{D}^a\end{pmatrix} \to (\omega_2)^\alpha_\beta e^{-3i\alpha}(\omega_3^*)^a_b e^{2i\alpha}\overline{10}^{\beta b} = \\ = e^{-i\alpha_0/6}(\omega_2)^\alpha_\beta(\omega_3^*)^a_b\overline{10}^{\beta b} = e^{-i\alpha_0/6}\omega_2(\omega_3^*)^a_b\begin{pmatrix}\tilde{U}^a \\ \tilde{D}^a\end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{13.29}$$

откуда видно, что данные суперполя находятся в фундаментальном представлении $SU(2)$, антифундаментальном представлении $SU(3)$, с гиперзарядом $Y = -1/6$, что также согласуется с МССМ.

Остальные квантовые числа будут получены на следующей лекции.

Действие суперсимметричной $SU(5)$ ТВО

На прошлой лекции мы начали изучать SUSY $SU(5)$ ТВО. Данная ТВО является простейшей теорией великого объединения. Ключевой особенностью данной теории является то, что калибровочная группа МССМ является максимальной подгруппой $SU(5)$

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset SU(5), \tag{14.1}$$

данной вложение может быть представлена следующим образом

$$\omega_5=\begin{pmatrix} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0\\ 0 & e^{3i\alpha}\omega_2^* \end{pmatrix}\in SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset SU(5). \tag{14.2}$$

Данная теория как ТВО имеет только одну константу связи α_5. Материальные поля, соответствующие кваркам и лептонам размещаются в трех неприводимых представлениях $SU(5)$

$$1+5+\overline{10}, \tag{14.3}$$

где 1 - тривиальное представление (синглет) $SU(5)$ в которым располагается правое нейтрино:

$$1\sim N, \tag{14.4}$$

5 - фундаментальное представление $SU(5)$, в котором располагаются правые нижние кварки D и левые лептоны $\tilde{E},\tilde{N}$

$$5_i\sim\left(\begin{array}{c} D_1\\ D_2\\ D_3\\ \hline \tilde{E}\\ -\tilde{N}\end{array}\right), \tag{14.5}$$

$\overline{10}$ - антисимметричное тензорное представление $SU(5)$, в котором располагаются левые кварки и правые верхние кварки, а также праве лептоны

$$\overline{10}^{ij}\sim\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & U_3 & -U_2 & \tilde{U}^1 & \tilde{D}^1\\ -U_3 & 0 & U_1 & \tilde{U}^2 & \tilde{D}^2\\ U_2 & -U_1 & 0 & \tilde{U}^3 & \tilde{D}^3\\ \hline -\tilde{U}^1 & -\tilde{U}^2 & -\tilde{U}^3 & 0 & E\\ -\tilde{D}^1 & -\tilde{D}^2 & -\tilde{D}^3 & -E & 0\end{array}\right). \tag{14.6}$$

Так как все элементарные частицы находятся в представлениях $SU(5)$, то и все их квантовые числа определятся законом преобразования по подгруппе $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. При этом, если выбрать нормировку $\alpha = \frac{1}{6}\alpha_0$, то коэффициент в показателе экспоненты будет представлять собой гиперзаряд.

В прошлый раз были воспроизведены квантовые числа для правых нижних кварков D, левых и правых лептонов $E, \tilde{E}, N, \tilde{N}$, левых кварков $\tilde{U}, \tilde{D}$. Теперь, получим квантовые числа для правых верхних кварков U. Напомним, каким образом получаются квантовые числа для частиц из представления $\overline{10}$. Запишем закон преобразования

$$\overline{10}^{ij} \to (\omega_5^*)^i_k (\omega_5^*)^j_l \overline{10}^{kl}, \tag{14.7}$$

представим индекс $i = \overline{1,5}$ как совокупность $i = (a, \alpha)$, где $a = \overline{1,3}, \alpha = 4,5$. Тогда

$$\begin{gathered}
\overline{10}^{\alpha\beta} = E\cdot\varepsilon^{\alpha\beta} \to E\cdot(\omega_5^*)^\alpha_\gamma(\omega_5^*)^\beta_\delta \varepsilon^{\gamma\delta} = \\
= E\cdot(\omega_2)^\alpha_\gamma \cdot e^{-3i\alpha}(\omega_2)^\beta_\delta e^{-3i\alpha}\varepsilon^{\gamma\delta} = \\
= [(\omega_2)^\alpha_\gamma\cdot(\omega_2)^\beta_\delta\cdot\varepsilon^{\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta}\cdot\det\{\omega_2\} = \varepsilon^{\alpha\beta}] = \\
E\cdot\varepsilon^{\alpha\beta}\cdot e^{-6i\alpha} = E\cdot\varepsilon^{\alpha\beta}\cdot e^{-i\alpha_0} \implies \\
E \to e^{-i\alpha_0}E,
\end{gathered} \tag{14.8}$$

располагается в тривиальном представлении по $SU(3), SU(2)$, с гиперзарядом $Y = -1$, что соответствует МССМ.

Для левых кварков

$$\begin{gathered}
\overline{10}^{\alpha a} = \begin{pmatrix} -\tilde{U}^a \\ -\tilde{D}^a \end{pmatrix} \to (\omega_5^*)^\alpha_\beta(\omega_5^*)^a_b\overline{10}^{\beta b} \implies \\
\begin{pmatrix} \tilde{U}^a \\ \tilde{D}^a \end{pmatrix} \to (\omega_2)^\alpha_\beta e^{-3i\alpha}(\omega_3^*)^a_b e^{2i\alpha}\overline{10}^{\beta b} = \\
= e^{-i\alpha_0/6}(\omega_2)^\alpha_\beta(\omega_3^*)^a_b\overline{10}^{\beta b} = e^{-i\alpha_0/6}\omega_2(\omega_3^*)^a_b\begin{pmatrix} \tilde{U}^a \\ \tilde{D}^a \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{14.9}$$

откуда видно, что данные суперполя находятся в фундаментальном представлении $SU(2)$, антифундаментальном представлении $SU(3)$, с гиперзарядом $Y = -1/6$, что также согласуется с МССМ.

$$\begin{gathered}
\overline{10}^{ab} = \varepsilon^{abd} U_d \to (\omega_5^*)^a_c (\omega_5^*)^b_f \varepsilon^{efd} U_d = \\
= (\omega_3^*)^a_e (\omega_3^*)^b_f e^{4i\alpha} \varepsilon^{efg} \underbrace{(\omega_3^*)^c_g \cdot (\omega_3^{-1\star})^d_c}_{\delta^d_g} U_d = \\
= [(\omega_3^{-1})^* = (\omega_3^+)^* = \omega_3^T] = \\
(\omega_3^*)^a_e (\omega_3^*)^b_f (\omega_3^*)^c_g \varepsilon^{efg} \cdot e^{2i\alpha/3} (\omega_3^T)^d_c U_d = \\
= [(\omega_3^*)^a_e (\omega_3^*)^b_f (\omega_3^*)^c_g \varepsilon^{efg} = \varepsilon^{abc} \det\{\omega_3^*\} = \varepsilon^{abc}] = \\
= \varepsilon^{abc} e^{2i\alpha/3} (\omega_3^T)^d_c U_d \implies \\
U_a \to e^{2i\alpha/3} (\omega_3^T)^b_a U_b,
\end{gathered} \tag{14.10}$$

то есть, данные суперполя находятся в фундаментальном представлении $SU(3)$, тривиальном представлении $SU(2)$, с гиперзарядом $Y = 2/3$, что также согласуется с МССМ.

Таким образом, все суперполя, соответствующие элементарным частицам МССМ, располающиеся в различных представлениях $SU(5)$, имеют правильные квантовые числа по подгруппе $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Аналогично рассматриваются и суперполя, соответствующие хиггсовским полям ϕ_u, ϕ_d. В прошлый раз было показано, что данные суперполя лежат в фундаментальном и антифундаментальном представлениях по группе $SU(5)$

$$(\phi_d)_i \in 5, (\phi_u)^i \in \overline{5}. \tag{14.11}$$

Итак, данные поля преобразуются следующим образом

$$(\phi_d)_i \to (\omega_5)_i^j (\phi_d)_j,$$

$$\left(\begin{array}{c} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \\ \phi_{d3} \\ \hline \phi_{d4} \\ \phi_{d5} \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha}\omega_2^* \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \\ \phi_{d3} \\ \hline \phi_{d4} \\ \phi_{d5} \end{array}\right), \tag{14.12}$$

то есть в теории присутствует триплет, который преобразуется следующим образом

$$\begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \\ \phi_{d3} \end{pmatrix} \to e^{-i\alpha_0/3}\omega_3 \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \\ \phi_{d3} \end{pmatrix} \tag{14.13}$$

- по фундаментальному представлению $SU(3)$, тривиальному $SU(2)$, с гиперзарядом $Y = -1/3$. Данный триплет отсутствует в МССМ, а значит должен исчезнуть при низких энергиях. Также присутствует хиггсовский дуплет

$$\begin{pmatrix} \phi_{d4} \\ \phi_{d5} \end{pmatrix} \to e^{i\alpha_0/2}\omega_2^* \begin{pmatrix} \phi_{d4} \\ \phi_{d5} \end{pmatrix}, \tag{14.14}$$

далее, чтобы избавиться здесь от комплексного сопряжения используем ранее доказанное утверждение

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \phi_{d5}^* \\ -\phi_{d4}^* \end{pmatrix} \to e^{-i\alpha_0/2}\omega_2^* \begin{pmatrix} \phi_{d5}^* \\ -\phi_{d4}^* \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \phi_{d5} \\ -\phi_{d4} \end{pmatrix} \to e^{i\alpha_0/2}\omega_2 \begin{pmatrix} \phi_{d5} \\ -\phi_{d4} \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{14.15}$$

то есть данный дуплет находится в тривиальном представлении по $SU(3)$, фундаментальном $SU(2)$, с гиперзарядом $Y = +1/2$. Следовательно, данный дуплет можно отождествить с полем ϕ_d в МССМ.

Для ϕ_u имеем

$$\begin{gathered} (\phi_u)^i \to (\omega_5^*)^i_j (\phi_u)^j, \\ \left(\begin{array}{c} \phi_u^1 \\ \phi_u^2 \\ \phi_u^3 \\ \hline \phi_u^4 \\ \phi_u^5 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha}\omega_2^* \end{pmatrix}^* \left(\begin{array}{c} \phi_u^1 \\ \phi_u^2 \\ \phi_u^3 \\ \hline \phi_u^4 \\ \phi_u^5 \end{array}\right), \end{gathered} \tag{14.16}$$

здесь также присутствует триплет, который преобразуется

$$\begin{pmatrix} \phi_u^1 \\ \phi_u^2 \\ \phi_u^3 \end{pmatrix} \to e^{-i\alpha_0/3}\omega_3 \begin{pmatrix} \phi_u^1 \\ \phi_u^2 \\ \phi_u^3 \end{pmatrix} \tag{14.17}$$

- по фундаментальному представлению $SU(3)$, тривиальному $SU(2)$, с гиперзарядом $Y = -1/3$ и должен исчезнуть при низких энергиях. Для дуплета получаем

$$\begin{pmatrix} \phi_u^4 \\ \phi_u^5 \end{pmatrix} \to e^{-i\alpha_0/2}\omega_2 \begin{pmatrix} \phi_u^4 \\ \phi_u \end{pmatrix}, \tag{14.18}$$

который находится в тривиальном представлении по $SU(3)$, фундаментальном $SU(2)$, с гиперзарядом $Y = -1/2$. Следовательно, данный дуплет можно отождествить с полем ϕ_u в МССМ.

Теперь напишем соответствующее действие.

Параграф 3. Действие SUSY $SU(5)$ ТВО

Как в случае МССМ в действии SUSY $SU(5)$ ТВО будут присутствовать мягкие слагаемые, представляющие собой остаток от спонтанного нарушения SUSY. Удобно представить действие SUSY $SU(5)$ ТВО в виде суммы нескольких характерных частей, как это уже делалось в случае МССМ

$$S = S_{SYM} + S_{WZ} + S_{\text{суперп.}} + S_{\text{мягкое}}, \tag{14.19}$$

где S_{SYM} - действие для калибровочного SUSY поля Янга-Миллса, S_{WZ} - слагаемое Весса-Зумино, соответствующее взаимодействию киральных полей материи с калибровочным полем, $S_{\text{суперп.}}$ - суперпотенциал. Данные слагамые являются SUSY-инвариантными. $S_{\text{мягкое}}$ - слагаемые приводящие к мягкому нарушению SUSY (не SUSY-инвариантны).

Так как SUSY $SU(5)$ ТВО является калибровочной теорией с простой группой $SU(5)$ и соответсвующей единственной константой связи e_5, то действие S_{SYM} будет иметь только одно слагаемое в отличии от МССМ

$$S_{SYM} = \frac{1}{2e_5^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta W^a \underset{SU(5)}{W_a}, \tag{14.20}$$

где

$$\underset{SU(5)}{W_a} \equiv \frac{1}{32}\overline{D}(1-\gamma_5)D\left[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}\right],$$
$$\underset{SU(5)}{V}(x^\mu,\theta)^+ = \underset{SU(5)}{V}(x^\mu,\theta), \tag{14.21}$$

Следующее слагаемое S_{WZ} представляет собой сумму по всем киральным суперполям материи: кваркам, лептонам, и их суперпартнерам, располающиеся в представлении $3\times(1+5+\overline{10})$, хиггсам и их суперпартнерам, располающихся в представлениях $5+\overline{5}+24$

$$S_{WZ} = \sum_\phi \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V}\phi =$$
$$= \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta (N^{+I}N^I + 5^{+iI}(e^{2V})_i^j 5_j^I + \frac{1}{2}\overline{10}_{ij}^{+I}(e^{2V})_{ij}^{kl}\overline{10}^{kl\ I} +$$
$$+\phi_d^{+i}(e^{2V})_i^j\phi_{dj} + \phi_{ui}^+(e^{-2V^T})_j^i\phi_u^j) + \frac{1}{2}tr\int d^4x d^4\theta H^+ e^{2V} H e^{-2V}, \tag{14.22}$$

где $I=\overline{1,3}$ - индекс, нумерующий поколения. Все слагаемые в этом выражении однотипны. Действительно, N лежит в тривиальном представлении $SU(5)$, в котором генераторы равны 0. Поэтому

$$e^{2V} \to e^{2\cdot 0} = 1, \tag{14.23}$$

здесь также учтено, что поле H в присоединенном представлении преобразуется следующим образом

$$(e^{2V})_{Adj}H = e^{2V}He^{-2V}, \tag{14.24}$$

различие в нормировочных коэффициентах связано с необходимостью учета нормировки генераторов

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}. \tag{14.25}$$

Далее, выпишем в явном виде генераторы представлений калибровочной группы, в которых распалагются поля МССМ:

1) фундаментальному представлению 5 соответствуют генераторы $T^A = t^A$ и соответственно, $V = e_5 V^A t_5^A$ для калибровочного поля, взаимодействующего с ϕ_d и 5 и полем H, находящимся в присоединенным представлении 24,

2) поля, располагающиеся в антифундаментальном представлении $\overline{5}$ преобразуются следующим образом

$$\overline{5}^i \to (\omega_5^*)^i_j(\overline{5})^j = [(\omega_5^{-1})^T]^i_j(\overline{5})^j = (e^{-\alpha_5^T})^i_j\overline{5}^j \simeq \overline{5}^i - (\alpha_5^T)^i_j\overline{5}^j, \tag{14.26}$$

далее, сравнивая данное выражение с преобразованием полей в фундаментальном представлении

$$5_i \to 5_i + (\alpha_5)_i^j 5_j, \tag{14.27}$$

получаем, что генераторы антифундаментального представления будут иметь следующий вид

$$T^A_{\overline{5}} = -(t^A)^T \iff (T^A_{\overline{5}})^i_j = -(t^A)_i^j, \tag{14.28}$$

и соответственно, $V = e_5 V^A T^A_{\overline{5}}$ для калибровочного поля, взаимодействующего с ϕ_u,

3) для калибровочного поля, взаимодействующего с полями, располагающимися в тензорном представления $\overline{10}$ имеем

$$V = e_5 V^A (T^A_{\overline{10}})^{ij}_{kl}, \tag{14.29}$$

где генераторы $(T^A_{\overline{10}})^{ij}_{kl}$ построим в явном виде, используя закон преобразования полей в данном представлении

$$\begin{aligned}\overline{10}^{ij} \to (\omega_5^*)^i_k(\omega_5^*)^j_l(\overline{10})^{kl} = (e^{-\alpha_5^T})^i_k(e^{-\alpha_5^T})^j_l\overline{10}^{kl} \simeq (1-\alpha_5^T)^i_k(1-\alpha_5^T)^j_l\overline{10}^{kl} \simeq \\ \overline{10}^{ij} - (\alpha_5^T)^i_k\overline{10}^{kj} - (\alpha_5^T)^j_l\overline{10}^{il} = \\ = \overline{10}^{ij} - (\alpha_5)_i^k\overline{10}^{kj} - (\alpha_5)_j^l\overline{10}^{il} = \overline{10}^{ij} + (\alpha_5)^{ij}_{kl}\overline{10}^{kl},\end{aligned} \tag{14.30}$$

откуда получаем явный вид генераторов представления $\overline{10}$

$$(T^A)^{ij}_{kl} = -(t^A)^i_k\delta^j_l - (t^A)^j_l\delta^i_k, \tag{14.31}$$

но в действительности, также надо учитывать антисимметрию по индексам i,j исходного тензорного поля, поэтому произведем дополнительную антисимметризацию по данным индексам

$$(T^A)^{ij}_{kl} = -\frac{1}{2}(t^A)^i_k\delta^j_l - \frac{1}{2}(t^A)^j_l\delta^i_k + \frac{1}{2}(t^A)^j_k\delta^i_l + \frac{1}{2}(t^A)^i_l\delta^j_k. \tag{14.32}$$

Таким образом, S_{SYM} и S_{WZ} полностью определяются калибровочной группой и представлениями, в которых лежат киральные суперполя материи.

Теперь, рассмотрим $S_{\text{суперп.}}$ - суперпотенциал. Как и в МССМ, он строится из следующих требований:

1. Перенормируемость (степень по киральным суперполям не должна превышать 3).

2. Калибровочная инвариантность.

3. R-четность (не обязательное требование).

Данным требованиям удовлетворяет следующее выражение

$$\begin{aligned} S_{\text{суперп}} = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \big((Y_{\overline{10}})_{IJ}\varepsilon_{ijklm}(\overline{10})^{ijI}(\overline{10})^{klJ}\phi^m_u + \\ +(Y_5)_{IJ}(\overline{10})^{ijI}5^J_i\phi_{dj} + (Y_1)_{IJ}5^I_iN^J\phi^i_u \\ \frac{1}{2}M_{IJ}N^IN^J + m\phi^i_u\phi_{di} + \\ +x\cdot trH^2 + y\cdot trH^3 + \lambda\phi^i_uH^j_i\phi_{dj}\big) + \text{к.с.}, \end{aligned} \tag{14.33}$$

которое является калибровочно инвариантным, поскольку верхние $SU(5)$ индексы везде свернуты с нижними, а ε_{ijklm} - инвариантный тензор для группы $SU(5)$. Инвариантность последних слагаемых (инвариантные тензорные слагаемые из хиггсов H) следует из закона их преобразования

$$\begin{aligned} H \to \omega_5 H\omega_5^{-1} \implies \\ tr(H^2) \to tr(\omega_5 H\omega_5^{-1}\omega_5 H\omega_5^{-1}) = tr(H^2). \end{aligned} \tag{14.34}$$

Коэффициенты Y_{IJ}, y, λ при кубичных слагаемых являются безразмерными, а коэффиценты M_{IJ}, m, x при квадратичных слагаемых имеют размерность массы.

Инвариантность относительно R-четности очевидна, поскольку суперполя $N, 5^i, 10^{ij}$, которые включают кварки и лептоны, входят во все слагаемые в четных степенях.

Мягкие слагаемые выпишем на следующей лекции.

Мягкие слагаемые в $SU(5)$ теории

На прошлых лекциях мы начали рассматривать SUSY ТВО на основе калибровочной группы $SU(5)$, которая является простейшим расширением МССМ, поскольку калибровочная группа МССМ является максимальной подгруппой $SU(5)$ SUSY ТВО

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset SU(5), \tag{15.1}$$

при этом квантовые числа МССМ указывают на то, что материальные поля (одного поколения), соответствующие кваркам и лептонам размещаются в трех неприводимых представлениях $SU(5)$

$$1+5+\overline{10}, \tag{15.2}$$

где 1 - тривиальное представление, 5 - фундаментальное представление, $\overline{10}$ - антисимметричное тензорное представление.

Соответственно, после нарушения $SU(5)$ до $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ получаются правильные квантовые числа по группе МССМ.

Действие SUSY $SU(5)$ ТВО имеет вид

$$S=S_{SYM}+S_{WZ}+S_{\text{суперп.}}+S_{\text{мягкое}}, \tag{15.3}$$

где S_{SYM} - действие для калибровочного SUSY поля Янга-Миллса, S_{WZ} - слагаемое Весса-Зумино, соответствующее взаимодействию киральных полей материи с калибровочным полем, $S_{\text{суперп.}}$ - суперпотенциал. Данные слагаемые являются SUSY-инвариантными. $S_{\text{мягкое}}$ - слагаемые приводящие к мягкому нарушению SUSY (не SUSY-инвариантны).

На прошлой лекции были получены первые три слагаемых. Сейчас выпишем в явной форме последнее слагаемое, соответствующее мягким слагаемым, которое можно представить в виде суммы трех характерных частей

$$S_{\text{мягкое}}=S_{\text{массы калибрино}}+S_{\text{массы скаляров}}+S_{\text{мягкий суперпотенциал}}, \tag{15.4}$$

где $S_{\text{массы калибрино}}$ - обеспечивающее массой суперпартнеры калибровочного поля после СН SUSY, слагаемое $S_{\text{массы скаляров}}$ - обоспечивающее массой суперпартнеры кварков и лептонов после СН SUSY, и слагаемое $S_{\text{мягкий суперпотенциал}}$ - мягкие слагаемые, по форме напоминающие действие для суперпотенциала $S_{\text{суперп.}}$. Напомним, что хотя данные слагаемые и строятся из суперполей, но SUSY-инвариантами не являются, поскольку в них также присутствует SUSY-неинвариантный шпурион

$$\begin{aligned} \eta &\equiv \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta, \\ \eta^* &= \frac{1}{2}\overline{\theta}(1-\gamma_5)\theta, \\ \eta\eta^* &= \frac{1}{2}(\overline{\theta}\theta)^2. \end{aligned} \tag{15.5}$$

Итак, выпишем в явной форме каждое из данных слагаемых. Первое слагаемое для мягких масс калибрино имеет вид

$$S_{\text{массы калибрино}} = \frac{M_5}{e_5^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta \eta \underset{SU(5)}{W^a W_a}, \tag{15.6}$$

видно, что здесь есть только одно такое слагаемое. Следовательно, так же как и для констант связи, для масс калибрино будет справедливо условие объединения

$$M_5 = M_3 = M_2 = M_1, \tag{15.7}$$

которое конечно, должно выполняться на масштабе нарушения $SU(5)$ симметрии.

Второе слагаемое $S_{\text{массы скаляров}}$, соответствующее мягким массам скаляров имеет структуру слагаемого S_{WZ}

$$\sum_\phi \left(-\frac{1}{4}\right) m^2 \int d^4x d^4\theta \eta^* \eta \phi^+ e^{2V} \phi, \tag{15.8}$$

которое в компонентах имеет вид

$$\begin{aligned} &S_{\text{массы скаляров}} = \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \eta^*\eta (m_N^2 N^{+I} N^I + m_5^2 5^{+iI} (e^{2V})_i^j 5_j^I + m_{10}^2 \frac{1}{2} \overline{10}_{ij}^{+I} (e^{2V})_{ij}^{kl} \overline{10}^{kl\ I} + \\ &+ m_1^2 \phi_{ui}^+ (e^{-2V^T})_j^i \phi_u^j + m_2^2 \phi_d^{+i} (e^{2V})_i^j \phi_{dj}) - \frac{m_H^2}{2} tr \int d^4x d^4\theta \eta^* \eta H^+ e^{2V} H e^{-2V}. \end{aligned} \tag{15.9}$$

Последнее слагаемое $S_{\text{суперп.}}$ имеет структуру

$$S_{\text{суперп.}} = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta W(\text{киральные суперполя}) + \text{к.с.}, \tag{15.10}$$

где W - аналитическая функция киральных суперполей теории. В компонентах данное слагаемое имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\text{суперп}} = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \eta ((A_{\overline{10}})_{IJ} \varepsilon_{ijklm} (\overline{10})^{ijI} (\overline{10})^{klJ} \phi_u^m + \\ + (A_5)_{IJ} (\overline{10})^{ijI} 5_i^J \phi_{dj} + (A_1)_{IJ} 5_i^I N^J \phi_u^i \\ - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{IJ} N^I N^J + A_\phi \phi_u^i \phi_{di} + \\ + A_x \cdot trH^2 + A_y \cdot trH^3 + A_H \phi_u^i H_i^j \phi_{dj}) + \text{к.с.}, \end{aligned} \tag{15.11}$$

где A_1, A_5, $A_{\overline{10},\ \mathcal{M},\ A_y,\ A_H}$ имеют размерность массы, а величины A_ϕ, A_x имеют размерность квадрата массы. Напомним, что из-за структуры шпуриона, после интегрирования по θ остаются только низшие скалярные компоненты.

Параграф 4. Нарушение калибровочной симметрии в SUSY $SU(5)$ ТВО

Набор хиггсовских полей рассматриваемой теории должен обеспечивать цепочку нарушения калибровочной симметрии

$$SU(5) \overset{H\in 24}{\rightarrow} SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y \overset{\phi_u\in\overline{5},\phi_d\in 5}{\rightarrow} H = SU(3)\times U(1)_{em}, \tag{15.12}$$

при этом масштаб нарушения $SU(5)$ симметрии $M_X \sim 10^{16}$ ГэВ, масштаб нарушения $SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$ симметрии $M_Z \sim 10^2$ ГэВ, соответственно, вакуумные средние H_0 и ϕ_{u0},ϕ_{d0} имеют те же энергетические масштабы. То есть, ввиду большой разницы в масштабах нарушения симметрии при изучении нарушения $SU(5) \overset{H\in 24}{\rightarrow} SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$ можно пренебречь слагаемыми, содержащими ϕ_u и ϕ_d.

Тогда существенными будут только следующие слагаемые в суперпотенциале

$$S_{\text{суперп}} \rightarrow \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta (x\cdot trH^2 + y\cdot trH^3) + \text{к.с.}, \tag{15.13}$$

при этом, так как $H^i_j \in 24$, а пространством присоединенного представления 24 является алгебра Ли, матрицы которой бесследовы для $SU(5)$, то есть суперполе H также удовлетворяет условию бесследовости $H^i_i = trH = 0$. Данное условие является условием связи, которое можно учесть с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа

$$S_{\text{суперп}} \rightarrow \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta (x\cdot trH^2 + y\cdot trH^3 + z\cdot trH) + \text{к.с.}, \tag{15.14}$$

тогда компоненты H^i_j можно рассматривать как независимые, а условие $trH = 0$ получается при дифференцировании по z.

Киральные суперполя H имеют следующий вид

$$H(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = h(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_H(y^\mu) + \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_H(y^\mu), \tag{15.15}$$

где $y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta$. При спонтанном нарушении $SU(5)$ симметрии вакуумное среднее приобретает низшая компонента h (если вакуумное среднее приобретает вспомогательное поле f_H то нарушается SUSY).

Чтобы понять, каким образом поле h приобретает вакуумное среднее, необходимо написать выражение для потенциала данного поля. Далее, условие на минимум данного потенциала позволяет найти вакуумное среднее h_0, которое должно быть инвариантным относительно малой группы. Как будет показано, данная малая группа является калибровочной группой МССМ.

В SUSY теориях скалярный потенциал получается при исключении вспомогательных полей. Поэтому $V(h)$ получается из

1) исключения вспомогательных полей $\underset{SU(5)}{D^A}$,

2) исключения вспомогательного поля f_H,

3) мягких слагаемых.

Вычислим последовательно все вклады.

1) Слагаемые, содержащие $\underset{SU(5)}{D^A}$ имеют вид

$$S_{YM} \to \frac{2}{e_5^2} Re\ tr \int d^4x d^2\theta \frac{1}{2} \underset{SU(5)}{D^2} = [\underset{SU(5)}{D} = e_5 D^A t^A] = \int d^4x \frac{1}{2} \underset{SU(5)}{D^A}{}^2,$$

$$S_{WZ} \to \frac{1}{2} tr \int d^4x d^4\theta H^+ e^{2V} H e^{-2V} \to 2 \int d^4x tr(h^+ [\underset{SU(5)}{D}, h]), \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}_D = tr \left[\frac{1}{e_5^2} \underset{SU(5)}{D}{}^2 + 2 \underset{SU(5)}{D} [h, h^+] \right], \tag{15.16}$$

после исключения вспомогательного поля D на уравнениях движения

$$\frac{1}{e_5^2} \underset{SU(5)}{D} + [h, h^+] = 0, \tag{15.17}$$

получаем вклад в функцию лагранжа

$$\Delta\mathcal{L} = tr \frac{1}{e_5^2} \underset{SU(5)}{D}{}^2 \Big|_{\underset{SU(5)}{D} = -e_5^2 [h,h^+]} = -e_5^2 tr[h, h^+]^2, \tag{15.18}$$

или вклад в потенциал

$$\Delta_1 V = e_5^2 tr[h, h^+]^2, \tag{15.19}$$

можно показать, что данный вклад является положительно определенным ввиду

$$[h, h^+] = [h^A t^A, h^{B*} t^B] = i f^{ABC} t^C h^A h^{B*}, \Longrightarrow$$

$$\Delta_1 V = [tr(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}] = \left(-\frac{1}{2}\right) e_5^2 f^{ABC} h^A h^{B*} \cdot f^{EFC} h^E h^{F*}, \tag{15.20}$$

а также

$$h^A = Reh^A + iImh_A,$$

$$h^{*A} = Reh^A - iImh_A, \Longrightarrow$$

$$f^{ABC} h^A h^{B*} = f^{ABC} (Reh^A + iImh_A)(Reh^B - iImh_B) =$$

$$= -2i(f^{ABC} Reh^A \cdot Imh_B), \tag{15.21}$$

откуда следует, что вклад в потенциал, действительно, является положительно определенным

$$\Delta_1 V = 2e_5^2(f^{ABC}Reh^A \cdot Imh_B)^2 \geqslant 0. \tag{15.22}$$

2) Слагаемые, содержащие f_H, имеют вид

$$\begin{gathered}
S_{WZ} \to \frac{1}{2}tr\int d^4xd^4\theta H^+e^{2V}He^{-2V} \to 2tr\int d^4x f_H^+ f_H, \Longrightarrow \\
S_{\text{суперп}} \to tr\int d^4x(z\cdot f_H + 2x\cdot f_H h + 3y\cdot f_H h^2) + \text{к.с.}, \Longrightarrow \\
\mathcal{L}_{f_H} = tr\left(2f_H^+ f_H + (zf_H + 2x\cdot f_H h + 3y\cdot f_H h^2) + \text{к.с.}\right)
\end{gathered} \tag{15.23}$$

исключим теперь поля f_H на уравнениях движения

$$2f_H^+ + z + 2xh + 3yh^2 = 0, \tag{15.24}$$

коэффициент z можно вычислить, взяв след от данного выражения, и учитывая, что $trf_H = trh = 0$

$$z = -\frac{1}{5}tr(2f_H^+ + 2xh + 3yh^2) = -\frac{3y}{5}trh^2, \tag{15.25}$$

таким образом, вклад в потенциал после исключения данных вспомогательных полей будет иметь следующий вид

$$\Delta_2 V = tr[2f_H^+ f_H]|_{f_H} = \frac{1}{2}tr|z + 2xh + 3yh^2|^2 \geqslant 0, \tag{15.26}$$

который также является положительно определенным.

3) Мягкие слагаемые, содержащие только h, записываются следующим образом

$$\begin{gathered}
-\frac{m_H^2}{2}tr\int d^4xd^4\theta\eta^*\eta H^+e^{2V}He^{-2V} + \\
+\left(\frac{1}{2}\int d^4xd^2\theta\eta[A_x trH^2 + A_y trH^3] + \text{к.с.}\right) = \\
= -2m_H^2 tr\int d^4x h^+h + \left(\int d^4x[A_x trh^2 + A_y trh^3] + \text{к.с.}\right) \Longrightarrow \\
\Delta_3 V(h) = 2m_H^2 tr(h^+h) + (A_x trh^2 + A_y trh^3 + \text{к.с.}).
\end{gathered} \tag{15.27}$$

Таким образом, окончательное выражение для потенциала скалярного поля h принимает вид

$$\begin{gathered}
V(h) = e_5^2 tr[h,h^+]^2 + \frac{1}{2}tr|z + 2xh + 3yh^2|^2 + \\
+2m_H^2 tr(h^+h) + (A_x trh^2 + A_y trh^3 + \text{к.с.}),
\end{gathered} \tag{15.28}$$

заметим, что $x \sim 10^{16}$ ГэВ, а величины $m_H, \sqrt{A_x}, A_y \sim 10^3$ ГэВ (характерный масштаб рождения суперпартнеров) если считать, что все параметры мягкого нарушения SUSY имеют один и тот же порядок.

Поэтому слагаемые во второй строчке в выражении (15.1) намного меньше, чем в первой.

Минимум данного потенциала найдем на следующей лекции.

Спонтанное нарушение калибровочной симметрии в SU(5) ТВО

На прошлых лекциях мы начали рассматривать SUSY ТВО на основе калибровочной группы $SU(5)$. Основанием для рассмотрения данной ТВО служит анализ величин квантовых чисел элементарных частиц МССМ по соответствующей калибровочной группе $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. Данная теория является простейшей ТВО, но не лучшей, поскольку ряд экспериментальных данных (эксперименты по измерению времени жизни протона) уже опровергли данную ТВО. Тем не менее, изучение данной ТВО позволяет понять основные особенности всех ТВО.

На предыдущей лекции мы начали рассматривать вопрос о нарушении калибровочной симметрии $SU(5)$ данной ТВО. Цепочка нарушения симметрии имеет следующий вид

$$SU(5) \overset{H\in 24}{\rightarrow} SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y \overset{\phi_u\in\overline{5},\phi_d\in 5}{\rightarrow} SU(3)\times U(1)_{em}, \tag{16.1}$$

при этом, ввиду большой разницы в энергетических масштабах нарушения симметрии при изучении нарушения $SU(5) \overset{H\in 24}{\rightarrow} SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$ можно пренебречь слагаемыми, содержащими ϕ_u и ϕ_d.

Киральные хиггсовсие суперполя H имеют следующий вид

$$H(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = h(y^\mu)+\overline{\theta}(1+\gamma_5)\psi_H(y^\mu)+\frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_H(y^\mu), \tag{16.2}$$

где $y^\mu = x^\mu+\frac{i}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta$. При спонтанном нарушении $SU(5)$ симметрии вакуумное среднее приобретает низшая компонента h.

Далее, был построен потенциал для данного поля

$$\begin{aligned} V(h) = e_5^2 tr[h,h^+]^2+\frac{1}{2}tr|z+2xh+3yh^2|^2+ \\ +2m_H^2 tr(h^+h)+(A_x trh^2+A_y trh^3+\text{к.с.}), \end{aligned} \tag{16.3}$$

здесь учитывается условие бесследовости $trH=0$. В данном потенциале первые два слагаемых представляют собой вклады от исключения вспомогательных полей (как в любой SUSY теории), последние же два слагаемых представляют собой вклады от мягких слагаемых. При этом, по порядку величины $x\sim 10^{16}$ ГэВ, а величины $m_H,\sqrt{A_x},A_y\sim 10^3$ ГэВ (характерный масштаб рождения суперпартнеров) если считать, что все параметры мягкого нарушения SUSY имеют один и тот же порядок.

Поэтому, далее, вклады от мягких слагаемых в потенциал будем считать малыми по сравнению с чисто SUSY-вкладами.

Чтобы понять, какая низкоэнергетическая теория будет соответствовать данной ТВО, необходимо минимизировать данный потенциал, найти вакуумное состояние и соответствующую малую группу (группу симметрий вакуумного состояния).

Таким образом, необходимо найти минимум функции

$$f(x) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x), \tag{16.4}$$

где ε - малый параметр. Тогда в точке минимума

$$f(x) = f_0'(x) + \varepsilon f_1'(x), \tag{16.5}$$

если x_0 удовлетворяет условию $f'(x_0) = 0$, то очевидно, что минимум функции $f(x)$ можно представить в виде

$$x \simeq x_0 + \varepsilon x_1, \tag{16.6}$$

где

$$x_1 \simeq -\frac{f_1'(x_0)}{f_0'(x_0)}, \tag{16.7}$$

который отличается от минимума $f_0(x)$ на малую величину. Тогда

$$\begin{aligned} f_{\min = f(x_0+\varepsilon x_1) = f(x_0+\varepsilon x_1) + \varepsilon f_1(x_0+\varepsilon x_1) =} \\ = f_0(x_0) + f_0'(x_0)\varepsilon x_1 + \varepsilon f_1(x_0) + O(\varepsilon^2) = \\ = f_0(x_0) + \varepsilon f_1(x_0) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{16.8}$$

поэтому при нахождении вакуумного среднего поля h можно пренебречь мягкими слагаемыми. При этом для нахождения потенциала в минимуме можно просто подставить найденное таким образом h_0 в формулу (15.1).

Итак, начнем с минимизации выражения

$$V(h) = e_5^2 tr[h, h^+]^2 + \frac{1}{2} tr|z + 2xh + 3yh^2|^2. \tag{16.9}$$

Ввиду наличия калибровочных преобразований

$$h \to \omega h \omega^{-1}, \tag{16.10}$$

где $\omega \in SU(5),\ h = h^A t^A,\ (t^A)^+ = t^A \implies h^+ = h^{A*} t^A$, а также ввиду разложения

$$\begin{aligned} h = Re\ h + iIm\ h, \\ Re\ h = (Re\ h^A) t^A,\ (Re\ h)^+ = Re\ h, \\ Im\ h = (Im\ h^A) t^A,\ (Im\ h)^+ = Im\ h, \end{aligned} \tag{16.11}$$

одну из данных величин с помощью определенного выбора ω ввиду их эрмитовости можно привести к диагональному виду. Выберем ω так, чтобы $Re\ h_0$ была бы диагональной, причем на диагонали очевидно будут стоять вещественные числа.

Итак, выпишем первое слагаемое в (15.1)

$$\begin{aligned} e_5^2 tr[h,h^+]^2 &= e_5^2 tr[Re\ h - iIm\ h, Re\ h + iIm\ h]^2 = \\ &= -4e_5^2 tr[Re\ h, Im\ h]^2 = 4e_5^2 (f^{ABC} Re\ h^A \cdot Im\ h^B)^2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{16.12}$$

данное выражение ввиду положительной определенности достигает своего минимума при

$$e_5^2 tr[h,h^+]^2 = 0 \implies [Re\ h_0, Im\ h_0] = 0, \tag{16.13}$$

откуда следует, что $Im\ h_0$ также является диагональной.

Замечание: если у $Re\ h_0$ какие-то диагональные элементы совпадают, то имеется остаточная инвариантность, которая позволяет диагонализовать ту часть $Im\ h_0$, которая не зафиксируется условием $[Re\ h_0, Im\ h_0] = 0$.

Таким образом, используя калибровочную инвариантность и условие минимума, мы можем считать, что

$$h_0 = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 \end{pmatrix}, \tag{16.14}$$

где h_i - вообще говоря, комплексные числа. При этом

$$tr h_0 = \sum_{i=1}^{5} h_i = 0. \tag{16.15}$$

Второе слагаемое

$$\frac{1}{2} tr|z + 2xh + 3yh^2|^2 \geqslant 0, \tag{16.16}$$

достигает минимума если

$$z + 2xh_0 + 3yh_0^2 = 0. \tag{16.17}$$

Замечание: минимум поля h_0 обеспечивает, таким образом, равенство нулю соответствующего потенциала, поэтому такое вакуумное состояние является SUSY симметричным. Вообще говоря, это является следствием рассмотрения минимума только SUSY-инвариантной части.

Итак, ввиду диагональности найденного вакуумного значения условия минимума принимает следующий вид

$$z+2xh_i+3yh_i^2=0,\ \forall i=\overline{1,5} \tag{16.18}$$

то есть имеется 5 квадратных уравнений, у каждого из которых не более 2 решений. Следовательно, среди h_i не более двух различных значения. Обозначим их $h^{(1)}$, $h^{(2)}$. Поэтому, возможны три различных ситуации:

1) все h_i - одинаковы, а так как $tr\ h=0$, то все $h_i=0$, то есть $h_0=0$ - это решение соответствует ненарушенной симметрии, поскольку

$$\omega 0\omega^{-1}=0, \tag{16.19}$$

то есть $H=SU(5)$ (H - малая группа, то есть группа, оставляющая вакуумное состояние инвариантным).

2) 4 из 5 $h^{(1)}$, 1 - $h^{(2)}$. Опять же ввиду бесследовасти h_0 в этом случае имеем следующий вид для вакуумного состояния

$$h_0=v_5\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-4\end{pmatrix}, \tag{16.20}$$

то есть малая группа $H=SU(4)\times U(1)$, элемент которой можно записать в следующем виде

$$\omega=\begin{pmatrix}e^{i\alpha}\omega_4&0\\0&e^{-i\alpha}\end{pmatrix}\in SU(4)\times U(1), \tag{16.21}$$

данная малая группа не совпадает с группой МССМ, поэтому исключается из рассмотрения.

При этом $h^{(1)}=v_5,\ h^{(2)}=-4v_5$, являющиеся решениями следующей системы уравнений

$$\begin{cases}z+2xh^{(1)}+3y{h^{(1)}}^2=0\\z+2xh^{(2)}+3y{h^{(2)}}^2=0,\end{cases} \tag{16.22}$$

вычитая данные уравнения друг из друга, получим

$$2x(h^{(1)}-h^{(2)})+3y(h^{(1)}-h^{(2)})(h^{(1)}+h^{(2)})=0,\implies$$
$$2x+3y(h^{(1)}+h^{(2)})=0,$$
$$2x+3y(v_5-4v_5)=0,\implies$$
$$v_5=\frac{2x}{9y} \tag{16.23}$$

по порядку величин $x \sim 10^{16}$ ГэВ, откуда следует что $v_5 \sim 10^{16}$ ГэВ.

3) 3 из 5 $h^{(1)}$, 2 из 5 - $h^{(2)}$. Опять же ввиду бесследовасти h_0 в этом случае имеем следующий вид для вакуумного состояния

$$h_0 = v_5 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \tag{16.24}$$

то есть малая группа $H = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, элемент которой

$$\omega = \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha}\omega_2^* \end{pmatrix} \in SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5), \tag{16.25}$$

как можно видеть представляет собой элемент максимальной подгруппы $SU(5)$ - калибровочной группы МССМ. При этом $h^{(1)} = 2v_5,\ h^{(2)} = -3v_5$, где

$$2x + 3y(2v_5 - 3v_5) = 0,$$
$$v_5 = \frac{2x}{3y} \sim 10^{16} \text{ ГэВ}. \tag{16.26}$$

Итак, при рассмотрении минимума SUSY-инвариантной части потенциала $V(h)$ получилось три возможных варианта вакуумного состояния, первый из которых является тривиальным, а третий является инвариантным относительно калибровочной группы МССМ. Далее, необходимо найти минимальный из найденных вакуумов. Для этого подставим его в полной выражение для $V(h)$, где также учитываются мягкие слагаемые, нарушающие SUSY и найдем значения параметров данного потенциала, при которых вакуумным состоянием будет h_0, инвариантное относительно $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Для простоты выберем $m_H = A_x = 0,\ A_y \neq 0$, тогда SUSY-неинвариантное слагаемое будет иметь следующий вид

$$V_1 = A_y tr\ h^3 + \text{к.с.}, \tag{16.27}$$

тогда значение данного потенциала в рассмотренных вакуумных состояниях получатся следующие:

1) в случае $H = SU(5)$

$$V_0(h_0) = 0,\ V_1(h_0) = 0, \tag{16.28}$$

2) в случае $H = SU(4) \times U(1)$

$$\begin{aligned}
V_0(h_0) &= 0, \\
V_1(h_0) &= 2A_y v_5^3 (4 \cdot 1^3 + 1 \cdot (-4)^3) = \\
&= 2A_y \left(\frac{2x}{9y}\right)^3 (4-64) = 2A_y \frac{8x^3}{9 \cdot 81 y^3}(-60) = \\
&= \left(-\frac{320}{243}\right) A_y \frac{x^3}{y^3},
\end{aligned} \tag{16.29}$$

3) в случае $H = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

$$\begin{aligned}
V_0(h_0) &= 0, \\
V_1(h_0) &= 2A_y v_5^3 (3 \cdot 2^3 + 2 \cdot (-3)^3) = \\
&= 2A_y \left(\frac{2x}{9y}\right)^3 (24-162) = \\
&= \left(-\frac{160}{9}\right) A_y \frac{x^3}{y^3},
\end{aligned} \tag{16.30}$$

Откуда видно, что имеется область значений мягких параметров, например, $m_H = 0$, $A_x = 0$, $A_y \frac{x^3}{y^3} \in Re > 0$, в которой минимум, соответствующий $H = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ является самым низким.

Таким образом, можно добиться, чтобы вакуумное среднее поля h нарушало бы $SU(5)$ до $H = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Выясним теперь, как будет происходить второе нарушении симметрии

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \to SU(3) \times U(1)_{em}, \tag{16.31}$$

которое должно быть на масштабе 10^2 ГэВ засчет ненулевых вакуумных средних скалярных компонент суперполей ϕ_u^i и ϕ_{di}.

Рассмотрим вначале, слагаемые, которые содержат только хиггсовские поля в суперпотенциале и мягком суперпотенциале

$$\begin{aligned}
S_{\text{суперп.}} &\to \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \left(m\phi_u^i \phi_{di} + \lambda \phi_u^i H_i^j \phi_{dj}\right) + \text{к.с.} \to \\
&\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \phi_u^i \left(m\delta_i^j + (h_0)_i^j\right) \phi_{dj} + \text{к.с.},
\end{aligned} \tag{16.32}$$

где мы подставили вместо суперполя H_i^j вакуумное среднее его скалярной компоненты

$$h_0 = v_5 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \tag{16.33}$$

поскольку масштаб нарушения $SU(5)$ значительно превышает масштаб нарушения МССМ до электромагнетизма. Здесь, напомним, что хиггсовские поля имеют вид

$$(\phi_u)^i = \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \\ \phi_{u3} \\ \hline \phi_{u4} \\ \phi_{u5} \end{pmatrix} \; (\phi_d)_i = \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \\ \phi_{d3} \\ \hline \phi_{d4} \\ \phi_{d5} \end{pmatrix}, \tag{16.34}$$

дуплет в которых отождествляется с хиггсовскими полями МССМ

$$(\phi_u)_{\text{МССМ}} = \begin{pmatrix} \phi_{u4} \\ \phi_{u5} \end{pmatrix}, \; (\phi_d)_{\text{МССМ}} = \begin{pmatrix} \phi_{d5} \\ -\phi_{d4} \end{pmatrix}, \tag{16.35}$$

триплет же должен оказаться достаточно массивным, чтобы при низких энергиях не давал вклад в эволюцию константы связи.

Поэтому суперпотенциал запишется в виде

$$S_{\text{суперп.}} \to$$
$$\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta (\phi_{u1}\phi_{u2}\phi_{u3}|\phi_{u4}\phi_{u5}) \begin{pmatrix} m+2\lambda v_5 & 0 \\ 0 & m-3\lambda v_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \\ \phi_{d3} \\ \hline \phi_{d4} \\ \phi_{d5} \end{pmatrix} + \text{к.с.}, \tag{16.36}$$

откуда для дуплета получается слагаемое аналогичное суперпотенциалу МССМ

$$S_{\text{суперп.}} \to$$
$$\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \Big((m-3\lambda v_5)(\phi_u)^T_{\text{МССМ}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\phi_d)_{\text{МССМ}} +$$
$$+((m-3\lambda v_5)+5\lambda v_5)(\phi_{u1},\phi_{u2},\phi_{u3}) \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \\ \phi_{d3} \end{pmatrix}\Big) + \text{к.с.}, \tag{16.37}$$

при этом в МССМ суперпотенциал имеет вид

$$S_{\text{суперп.}} = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta (\mu (\phi_u)^T_{\text{МССМ}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\phi_d)_{\text{МССМ}}) + \text{к.с.}, \tag{16.38}$$

то есть получаем выражение для μ

$$\mu = 3\lambda v_5 - m, \tag{16.39}$$

при этом μ по порядку величины должна быть достаточно маленькой (меньше 10^{16} ГэВ), чтобы хиггсовский дуплет давал вклад в эволюцию констант связи. В НМССМ теории показывается, что μ оказывается пропорциональной вакуумному среднему некоторого поля, которая имеет порядок 10^3 ГэВ. Поэтому

$$\mu \sim 10^3 \text{ГэВ}. \tag{16.40}$$

А так как $\lambda \sim 1$, $v_5 \sim 10^{16}$, то слагаемое с триплетом оказываются пропорциональными величине

$$\mu + 5\lambda v_5 \sim 10^{16} \text{ГэВ}, \tag{16.41}$$

то есть слагаемые с триплетом приобретают достаточно большую массу и поэтому не проявляются в низкоэнергетическом спектре теории.

Однако, при расщеплении дуплета и триплета возникает проблема, так называемой, точной подстройки, характерная для большинства ТВО. Данная проблема связана, с тем, что величина $\mu \sim 10^3$ представляет собой разность двух величин порядка 10^{16}, что накладывает очень сильные ограничения на точные значения вакуумного состояния v_5 и слабую массу m. Более того, данные значения имеют квантовые поправки, которые должны оставлять μ малой величиной.

Суперпотенциал суперсимметричной SU(5) ТВО при низких энергиях

Мы изучаем ряд вопросов в SUSY ТВО, наиболее простой из которых является SUSY ТВО, основанная на калибровочной группе $SU(5)$. МССМ есть SUSY расширение СМ с калибровочной группой $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. При этом, квантовые числа МССМ указывают на существование более широкой группы симметрий, например, $SU(5)$ (простейший вариант).

При этом цепочка нарушения калибровочной симметрии следующая

$$SU(5)\overset{H\in 24}{\to} SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y \overset{\phi_u\in\overline{5},\phi_d\in 5}{\to} SU(3)\times U(1)_{em}. \tag{17.1}$$

В данной лекции рассмотрим более детально суперпотенциал в $SU(5)$ SUSY МССМ, за счет которого возникают массы элементарных частиц. А именно, как возникает суперпотенциал МССМ из суперпотенциала SUSY $SU(5)$ ТВО.

Параграф 5. Получение суперпотенциала МССМ из суперпотенциала SUSY $SU(5)$ ТВО

Рассмотрим часть суперпотенциала SUSY $SU(5)$ ТВО, которая содержит суперполя, включающие кварки и лептоны, и выясним, что она дает в пределе низких энергий ($\sim 10^2-10^3$ ГэВ)

$$S_{\text{суперп}} = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \Big((Y_{\overline{10}})_{IJ}\varepsilon_{ijklm}(\overline{10})^{ijI}(\overline{10})^{klJ}\phi_u^m +$$
$$+(Y_5)_{IJ}(\overline{10})^{ijI}5_i^J\phi_{dj} + (Y_1)_{IJ}5_i^I N^J\phi_u^i + \frac{1}{2}M_{IJ}N^I N^J\Big) + \text{к.с.}, \tag{17.2}$$

где поля материи располагаются в следующих представлениях

$$1 \sim N,$$

$$5_i \sim \left(\begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{array}\right),$$

$$\overline{10}^{ij} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & U_3 & -U_2 & \tilde{U}^1 & \tilde{D}^1 \\ -U_3 & 0 & U_1 & \tilde{U}^2 & \tilde{D}^2 \\ U_2 & -U_1 & 0 & \tilde{U}^3 & \tilde{D}^3 \\ \hline -\tilde{U}^1 & -\tilde{U}^2 & -\tilde{U}^3 & 0 & E \\ -\tilde{D}^1 & -\tilde{D}^2 & -\tilde{D}^3 & -E & 0 \end{array}\right). \tag{17.3}$$

Данный суперпотенциал был введен из соображений калибровочной симметрии, SUSY-симметрии и R-четности (суммарная степень суперполей, содержащих скварки и слептоны, четна).

При низких энергиях хиггсовские триплеты с массой порядка 10^{16} ГэВ можно считать равными 0 (у них вакуумные средние равны 0)

$$(\phi_u)^i = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \phi_{u4} \\ \phi_{u5} \end{array}\right) \quad (\phi_d)_i = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \phi_{d4} \\ \phi_{d5} \end{array}\right), \tag{17.4}$$

поэтому при низких энергиях

$$(Y_1)_{IJ} 5_i^I N^J \phi_u^i \to (Y_1)_{IJ} (\tilde{E}, -\tilde{N})^I N^J \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix} =$$
$$= (Y_1)_{IJ} (\tilde{N}, \tilde{E})^I \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix} N^J, \tag{17.5}$$

сравнивая данное выражение с аналогичным слагаемым в MCCM, заключаем, что

$$(Y_\nu)_{IJ} = -(Y_1)_{IJ}. \tag{17.6}$$

В следующих слагаемых разделим индексы следующим образом $i = (a, \alpha)$, $a =$

$\overline{1,3},\ \alpha = \overline{4,5}$.

$$\begin{aligned}(Y_5)_{IJ}(\overline{10}^{ijI})5_i^J\phi_{dj} &= (Y_5)_{IJ}[(\overline{10}^{i4I})5_i^J\phi_{d4} + (\overline{10}^{i5I})5_i^J\phi_{d5}] = \\ &= (Y_5)_{IJ}[(\overline{10}^{a4I})5_a^J\phi_{d4} + (\overline{10}^{a5I})5_a^J\phi_{d5} + \\ &(\overline{10}^{54I})5_5^J\phi_{d4} + (\overline{10}^{45I})5_4^J\phi_{d5}] = \\ &= (Y_5)_{IJ}[\tilde{U}^{aI}D_a^J\phi_{d4} + (\tilde{D}^{aI})D_a^J\phi_{d5} - E^IN^J\phi_{d4} + E^I\tilde{E}^J\phi_{d5}] = \\ &= (Y_5)_{IJ}[\tilde{U}^{aI}D_a^J\phi_{d4} + (\tilde{D}^{aI})D_a^J\phi_{d5} - E^I\tilde{N}^J\phi_{d4} + E^I\tilde{E}^J\phi_{d5}].\end{aligned} \tag{17.7}$$

Далее будем считать что $\phi_{d5} \to \underset{\text{МССМ}}{\phi_{d1}}$, $\phi_{d4} \to -\underset{\text{МССМ}}{\phi_{d2}}$, тогда получим

$$\begin{aligned}&(Y_5)_{IJ}(\tilde{U},\tilde{D})^{aI}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix}D_a^J + \\ &+(Y_5)_{IJ}(\tilde{N},\tilde{E})^J\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix}E^I,\end{aligned} \tag{17.8}$$

сравнивая с аналогичными слагаемыми в МССМ

$$\begin{aligned}&(Y_d)_{IJ}(\tilde{U},\tilde{D})^{aI}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix}D_a^J + \\ &+(Y_e)_{IJ}(\tilde{N},\tilde{E})^I\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix}E^J,\end{aligned} \tag{17.9}$$

получаем следующие соотношения

$$(Y_d)_{IJ} = (Y_e)_{JI} = -(Y_5)_{IJ}, \tag{17.10}$$

следовательно

$$(Y_d)_{IJ} = -(Y_e)_{JI}, \tag{17.11}$$

то есть массы нижних кварков и заряженных лептонов должны совпадать.

Замечание: на данный момент известно, что массы данных элементарных частиц различны. Данное равенство может быть достигнуто только при учете квантовых поправок на масштабе объединения констант связи.

Таким образом, $SU(5)$ симметрия накладывает некоторые связи на юкавские константы. Чем более симметричная теория, тем больше будет таких связей.

Наконец, проанализируем последнее слагаемое. С учетом симметричности матрицы $(Y_{\overline{10}})_{IJ}$ получим

$$\begin{gathered}
(Y_{\overline{10}})_{IJ}\varepsilon_{ijklm}(\overline{10})^{ij^I}(\overline{10})^{kl^J}\phi_u^m \to \\
(Y_{\overline{10}})_{IJ}[\varepsilon_{ijkl4}(\overline{10})^{ij^I}(\overline{10})^{kl^J}\phi_u^4+\varepsilon_{ijkl5}(\overline{10})^{ij^I}(\overline{10})^{kl^J}\phi_u^5] = \\
=4(Y_{\overline{10}})_{IJ}[\varepsilon_{abc54}(\overline{10})^{ab^I}(\overline{10})^{c5^J}\phi_u^4+\varepsilon_{abc45}(\overline{10})^{ab^I}(\overline{10})^{c4^J}\phi_u^5] = \\
=4(Y_{\overline{10}})_{IJ}\varepsilon_{abc}\cdot\varepsilon^{abd}u_d^I[-\tilde{D}^{cJ}\phi_{u1}++\tilde{U}^{cJ}\phi_{u2}] = \\
=8(Y_{\overline{10}})_{IJ}(\tilde{U},\tilde{D})^{aJ}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}U_a^I,
\end{gathered} \tag{17.12}$$

сравнивая данное выражение с аналогичным слагаемым из суперпотенциала МССМ

$$(Y_u)_{IJ}(\tilde{U},\tilde{D})^{aJ}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}U_a^I \tag{17.13}$$

получаем, что

$$(Y_u)_{IJ}=8(Y_{\overline{10}})_{IJ}. \tag{17.14}$$

Таким образом, все слагаемые суперпотенциала МССМ воспроизводятся из суперпотенциала $SU(5)$ SUSY ТВО, но на юкавские константы возникают некоторые ограничения.

Параграф 6. Объединение слагаемых, нарушающих R-четность

Поскольку ранее написанное действие $SU(5)$ SUSY ТВО содержат суперполя, включающие кварки и лептоны, только в четных степенях, то оно, также как и МССМ, инвариантно относительно Z_2 преобразований R-четности, которые аналогичны тем, которые выписывались в МССМ.

При преобразованиях R-симметрии суперполя преобразуются следующим образом

$$\begin{gathered}
V(x^\mu,\theta)\to V(x^\mu,-\theta), \\
\phi_u(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta)\to\phi_u(y^\mu,-(1+\gamma_5)\theta), \\
N^I(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta)\to -N^I(y^\mu,-(1+\gamma_5)\theta), \\
5_i^I(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta)\to -5_i^I(y^\mu,-(1+\gamma_5)\theta), \\
\overline{10}^{ij^I}(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta)\to -\overline{10}^{ij^I}(y^\mu,-(1+\gamma_5)\theta).
\end{gathered} \tag{17.15}$$

Напомним, что инвариантность относительно преобразований R-четности приводит к существованию в SUSY теориях стабильного легчайшего суперпартнера - кандидата на роль темной материи.

Однако, как уже было ранее замечено, к суперпотенциалу можно добавить слагаемые, неинвариантные относительно R-четности

$$\Delta S = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta \left\{\Lambda_{IJK} 5^I_i \overline{10}^{ij\,K} 5^J_j - M_I 5^I_i \phi^i_u\right\} + \text{к.с.}, \tag{17.16}$$

где $\Lambda_{IJK} = -\Lambda_{JIK},\ [\lambda] = 1,\ [M_{IJ}] = m.$

Замечание: данное слагаемое является SUSY инвариантным (отсутствие комплексного сопряжения в выписанных слагаемых), калибровочно инвариантным (свертка по калибровочным индексам), перенормируемым (не более чем 3 степень по киральным суперполям).

Далее, проанализируем низкоэнергетический остаток данного добавка.

Второе слагаемое может быть записано следующим образом

$$-M_I 5^I_i \phi^i_u \to M_I(\tilde{E}, -\tilde{N}) \begin{pmatrix} \phi^4_u \\ \phi^5_u \end{pmatrix} =$$

$$M_I(\tilde{E}, -\tilde{N}) \begin{pmatrix} \phi^4_u \\ \phi^5_u \end{pmatrix} = M_I(\tilde{N}, \tilde{E})^I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1_u \\ \phi^2_u \end{pmatrix}, \tag{17.17}$$

которое получилось таким же как в МССМ.

Первое слагаемое в этом выражении может быть переписано в виде

$$\begin{gathered}
\Lambda_{IJK} 5^I_i \overline{10}^{ij\,K} 5^J_j = \Lambda_{IJK} 5^I_a \overline{10}^{ab\,K} 5^J_b + \\
+\Lambda_{IJK} 2\cdot 5^I_a \overline{10}^{a\alpha\,K} 5^J_\alpha + \Lambda_{IJK} 5^I_\alpha \overline{10}^{\alpha\beta\,K} 5^J_\beta = \\
= \Lambda_{IJK} D^I_a \varepsilon^{abc} u^K_c D^J_b + \\
+2\Lambda_{IJK} D^I_a (\tilde{U}^a, \tilde{D}^a)^K \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix}^J + \Lambda_{IJK}(\tilde{E}, -\tilde{N})^I \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}^K \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix}^J = \\
\Lambda_{JKI} \varepsilon^{abc} U^K_a D^J_b D^I_c + \\
+2\Lambda_{KJI}(\tilde{U}, \tilde{D})^{aI} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^J D^K_a + \Lambda_{IJK}(\tilde{N}, \tilde{E})^I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^J E^K,
\end{gathered} \tag{17.18}$$

сравнивая с аналогичными слагаемыми в МССМ

$$\begin{gathered}
\lambda''_{IJK} \varepsilon^{abc} U^K_a D^J_b D^I_c + \\
+2\lambda'_{IJK}(\tilde{U}, \tilde{D})^{aI} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^J D^K_a + \lambda_{IJK}(\tilde{N}, \tilde{E})^I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^J E^K
\end{gathered} \tag{17.19}$$

видим, что коэффициенты оказываются связанными друг с другом следующим образом

$$\begin{aligned} \lambda''_{IJK} &= \Lambda_{JKI}, \\ \lambda'_{IJK} &= 2\Lambda_{KJI}, \\ \lambda_{IJK} &= \Lambda_{IJK}, \end{aligned} \tag{17.20}$$

то есть на масштабе $SU(5)$ SUSY ТВО необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\Lambda_{IJK} = \lambda_{IJK} = \frac{1}{2}\lambda'_{KJI} = \lambda''_{KIJ}. \tag{17.21}$$

Таким образом, в $SU(5)$ SUSY ТВО также могут присутствовать слагаемые, нарушающие R-четность, а, следовательно, и стабильность легчайшего суперпартнера.

На этом заканчивается рассмотрение $SU(5)$ SUSY ТВО. На следующей лекции мы перейдем к рассмотрению вопроса нарушения SUSY.

Формализмы 2-го и 1-го порядка в обычной гравитации

Перейдем к последней главе данного курса, а именно, поймем как происходит нарушение SUSY посредством супергравитации.

Глава 4. Нарушение SUSY с помощью супергравитации

SUSY с точки зрения феноменологии должна быть нарушена, так как на эксперименте не наблюдаются суперпартнеры элементарных частиц. Оказывается, что простейшие модели нарушения SUSY, такие как механизм Файе-Илиопулоса, или механизм О'Райферти с феноменологией не согласуются. Поэтому при обсуждении МССМ и SUSY ТВО использовались мягкие слагаемые, напрямую нарушающие SUSY, но не вносящие квадратичных расходимостей. Данные мягкие слагаемые возникают из некоторого более сложного механизма нарушения SUSY.

В данной главе будет обсуждаться следующая идея такого нарушения. Предполагается, что существует некоторый параллельный мир, так называемый скрытый сектор, в котором SUSY нарушается спонтанно. Затем, с помощью некоторого посредника происходит передача нарушения SUSY в наблюдаемый или видимый сектор. При этом, посредником, который передает нарушение SUSY, может являться, например, гравитация.

Прежде чем изучать детально данный механизм, вспомним классическую теорию гравитации.

Параграф 1. Формализмы 2-го и 1-го порядков в обычной гравитации

Действие гравитационного поля записывается в виде

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}R = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}R, \tag{18.1}$$

где $k^2 = 8\pi G,\ g = \det\{g_{\mu\nu}\} < 0$. Также здесь

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{18.2}$$

скалярная кривизна, $R_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} = R_{\nu\mu}$ - тензор Ричи, выражаемый через тензор кривизны Римана

$$R_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\beta} = -R^{\alpha}_{\nu\mu\ \beta}, \tag{18.3}$$

где

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right), \tag{18.4}$$

символы Кристоффеля.

Так как $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ содержат первые производные метрики, то R, $R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ содержат вторые производные метрического тензора. Поэтому такое описание гравитации называется формализмом 2-го порядка.

Так как далее мы будем работать с супергравитацией, в которой присутствует взаимодействие фермионов с гравитацией, то нужно использовать тетрадный формализм, в котором

$$g_{\mu\nu} = e^{a}{}_{\mu} e_{a\nu}, \tag{18.5}$$

где $e_{a\mu}$ - тетрада, у которой латинский индекс a является локально лоренцевым, а геческий μ - эйнштейновский индекс. То есть

$$\eta_{ab} = e_{a\mu} e_{b\nu} g^{\mu\nu}, \tag{18.6}$$

где $\eta_{ab} = diag(1,-1,-1,-1)$ - метрика пространства Минковского. Также вводится, так называемая, спиновая связность

$$\omega^{b}_{\mu a}(e) = e_{a\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} e^{b\beta} + e_{a\alpha} \partial_\mu e^{b\beta} = -\omega_{\mu a}{}^{b}. \tag{18.7}$$

Тогда действие гравитационного поля можно переписать в виде

$$S = -\frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} e^{m\mu} e^{\nu}_{n} R^{n}_{\mu\nu m}, \tag{18.8}$$

где

$$R^{n}_{\mu\nu m} = \partial_\mu \omega^{n}_{\nu m} - \partial_\nu \omega^{n}_{\mu m} + \omega^{a}_{\mu m} \omega^{n}_{\nu a} - \omega^{a}_{\nu m} \omega^{n}_{\mu a}, \tag{18.9}$$

при этом, можно показать, что

$$R^{n}_{\mu\nu m} e^{m\alpha} e_{n\beta} = R^{\beta}_{\mu\nu\alpha}. \tag{18.10}$$

Так как приведенное выше действие содержит вторые производные тетрады, то данный формализм также будет формализмом второго порядка.

Спиноры в гравитационном поле описываются действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (i\overline{\psi} \gamma^m e^{\mu}_{m} \nabla_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi), \tag{18.11}$$

где

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^{ab})\psi,$$
$$\gamma^{ab} = \frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a),$$
$$\overline{\psi} = \psi^+\gamma^0, \tag{18.12}$$

здесь γ-матрицы имеют локально-лоренцев индекс

$$\{\gamma^n, \gamma^m\} = 2\eta^{mn}. \tag{18.13}$$

Однако можно описывать гравитацию иначе, с помощью, так называемого, формализма первого порядка. В данном формализме действие является функционалом от двух независимых полей

$$\overline{S}[e_{m\mu}, \overline{\omega}^n_{\mu m}] = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}e^{m\mu}e^\nu_n \overline{R}^n_{\mu\nu m}, \tag{18.14}$$

здесь

$$\overline{R}^n_{\mu\nu m} = \partial_\mu \overline{\omega}^n_{\nu m} - \partial_\nu \overline{\omega}^n_{\mu m} + \overline{\omega}^a_{\mu m}\overline{\omega}^n_{\nu a} - \overline{\omega}^a_{\nu m}\overline{\omega}^n_{\mu a}, \tag{18.15}$$

где $\overline{\omega}^b_{\mu a}$ - произвольное поле с одним эйнштейновским и двумя локально лоренцевыми индексами, такое что $\overline{\omega}_{\mu ab} = -\overline{\omega}_{\mu ba}$. При этом $\overline{\omega}^b_{\mu a}$ никак не связано с тетрадой.

Как можно видеть, действие содержит только первые производные полей, поэтому такое описание гравитации называют формализмом 1-го порядка. Покажем, что данный формализм также правильно описывает гравитацию. Для этого представим $\overline{\omega}_{\mu ab}$ в виде

$$\overline{\omega}_{\mu ab} = \omega_{\mu ab} + K_{\mu ab}, \tag{18.16}$$

где $\omega_{\mu ab}$ - связность, согласованная с тетрадой, $K_{\mu ab} = -K_{\mu ba}$ - тензор конторсии. То есть, вторым независимым полем будет являться тензор конторсии

$$\overline{S}[e_{m\mu}, \overline{\omega}^n_{\mu m}] = \overline{S}[e_{m\mu}, K^n_{\mu m}], \tag{18.17}$$

тогда несложно убедиться, что

$$\overline{R}^b_{\mu\nu a} = R^b_{\mu\nu a} + \nabla_\mu K^b_{\nu a} - \nabla_\nu K^b_{\mu a} + K^c_{\mu a}K^b_{\nu c} - K^c_{\nu a}K^b_{\mu c}, \tag{18.18}$$

где ковариантная производная согласована с тетрадой

$$\nabla_\mu K^n_{\nu m} = \partial_\mu K^n_{\nu m} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}K^n_{\sigma m} + \omega^p_{\mu m}K^n_{\nu p} - \omega^n_{\mu p}K^p_{\nu m}, \tag{18.19}$$

как следствие

$$\begin{aligned}\overline{S} = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}e^{m\mu}e_n^{\nu}[R^n_{\mu\nu m}+ \\ +\nabla_\mu K^b_{\nu a} - \nabla_\nu K^b_{\mu a} + K^c_{\mu a}K^b_{\nu c} - K^c_{\nu a}K^b_{\mu c}] = \\ = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}R - \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}e^{m\mu}e_n^{\nu}[K^c_{\mu a}K^b_{\nu c} - K^c_{\nu a}K^b_{\mu c}]+ \\ +\text{поверхностные слагаемые,}\end{aligned} \tag{18.20}$$

здесь ввиду согласованности спиновой связности с тетрадой

$$\nabla_\mu e^a_\nu = 0, \tag{18.21}$$

а также ввиду следующего свойства

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu A^\mu = \int d^4x\partial_\mu(\sqrt{-g}A^\mu), \tag{18.22}$$

слагаемые с ковариантными производными представляют собой полные производные. Откуда, следует, что поле $K_{\mu ab}$ является вспомогательным полем, которое может быть исключено на уравнениях движения.

Несложно убедиться, что решением уравнений движения для $K_{\mu ab}$ будет $K_{\mu ab} = 0$. Поэтому после исключения этого поля мы получаем, что

$$\overline{S} = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}R, \tag{18.23}$$

и формализм первого порядка будет эквивалентен формализму второго порядка.

Однако, если в теории присутствуют спинорные поля, то возникают существенные отличия

$$\overline{S}[e,\omega,\psi] = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\overline{R} + \int d^4x\sqrt{-g}(i\overline{\psi}\gamma^m e^\mu_m\overline{\nabla}_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi), \tag{18.24}$$

где

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_\mu\psi = (\partial_\mu + \frac{1}{4}\overline{\omega}_{\mu ab}\gamma^{ab})\psi = \\ = \partial_\mu\psi + \frac{1}{4}(\omega_{\mu ab} + K_{\mu ab})\gamma^{ab}\psi = \nabla_\mu\psi + \frac{1}{4}K_{\mu ab}\gamma^{ab}\psi,\end{aligned} \tag{18.25}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\overline{S}[e,\omega,\psi] = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R + e^{m\mu}e^\nu_n[K^c_{\mu a}K^b_{\nu c} - K^c_{\nu a}K^b_{\mu c}]+ \\ +\int d^4x\sqrt{-g}(i\overline{\psi}\gamma^m e^\mu_m\nabla_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi + i\overline{\psi}e^\mu_m\gamma^m\frac{1}{4}K_{\mu ab}\gamma^{ab}\psi),\end{aligned} \tag{18.26}$$

как можно видеть уравнения для конторсии $K_{\mu ab}$ будет иметь в правой части слагаемые порядка ψ^2 и при исключении $K_{\mu ab}$ возникают дополнительные слагаемые порядка ψ^4

$$\overline{S} = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}R(e) + \int d^4x\sqrt{-g}(i\overline{\psi}\gamma^m e_m^\mu \nabla_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi) +$$
$$+\text{слагаемые порядка } \psi^4. \tag{18.27}$$

Простая N=1 супергравитация

Продолжим изучение вопроса о нарушении SUSY с помощью супергравитации. До сих пор SUSY предполагалась нарушенной введением мягких слагаемых, неинвариантных относительно SUSY, но не вносящие квадратичных расходимостей, не предполагая соответствующего механизма нарушения SUSY. Надо заметить, что простейшие модели нарушения SUSY не согласуются с феноменологией.

В данной главе рассматривается следующий механизм нарушения SUSY. Предполагается, что существует некоторый параллельный мир, так называемый скрытый сектор в котором SUSY нарушается спонтанно. Затем, с помощью некоторого посредника происходит передача нарушения SUSY в наблюдаемый или видимый сектор. При этом, посредником, который передает нарушение SUSY, может являться, например, гравитация.

Параграф 2. Простая $N = 1$ супергравитация

Теория супергравитации помимо гравитона со спиральностью $\lambda = \pm 2$ должны содержать его суперпартнер гравитино со спиральностью $\lambda = \pm 3/2$. Простейшая теория супергравитации соответствует таблице

λ	-2	$-3/2$	...	2	$3/2$
n	1	1	0	1	1

Гравитино описывается с помощью поля $\psi_{\mu a}$, имеющего один спонорный индекс $a = \overline{1,4}$ и один тензорный индекс $\mu = \overline{0,3}$.

Замечание: далее спинорные индексы явно выписывать не будем, чтобы не путать их с локально лоренцевыми.

Чтобы такой объект имел только 2 степени свободы на массовой поверхности, действие для него должно иметь некоторую симметрию. Кроме того, для уменьшения числа степеней свободы, накладывается условие майорановости

$$\overline{\psi}_\mu = \psi_\mu^T C, \tag{19.1}$$

при этом, действие для свободного гравитино записывается в виде

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \overline{\psi}_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \partial_\alpha \psi_\beta, \tag{19.2}$$

в данном случае речь идет о действии в пространстве Минковского.

Замечание: данное действие является вещественным ввиду следующего соотношения

$$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\chi \in Re, \tag{19.3}$$

где ψ, χ - майорановские спиноры. Также данное действие не является нулевым ввиду следующего свойства

$$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\chi = \overline{\chi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi, \tag{19.4}$$

проинтегрируем действие по частям

$$\begin{aligned} S \to \frac{1}{2}\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(-1)\partial_\alpha\overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\psi_\beta = \\ = \frac{1}{2}\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(-1)\psi_\beta\gamma_\nu\gamma_5\partial_\alpha\overline{\psi}_\mu = \\ = \frac{1}{2}\int d^4x \varepsilon^{\beta\nu\alpha\mu}(-1)\psi_\mu\gamma_\nu\gamma_5\partial_\alpha\overline{\psi}_\beta = \\ = \frac{1}{2}\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\psi_\mu\gamma_\nu\gamma_5\partial_\alpha\overline{\psi}_\beta, \end{aligned} \tag{19.5}$$

то есть получилось исходное действие.

Рассматриваемое действие инвариантно относительно преобразований

$$\psi_\mu \to \psi_\mu + \partial_\mu\varepsilon, \tag{19.6}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x)$ - грассманово нечетный майорановский спинор. Действительно

$$\delta S = \frac{1}{2}\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu\overline{\varepsilon}\gamma_\nu\gamma_5\partial_\alpha\overline{\psi}_\beta + \overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\partial_\alpha\partial_\beta\varepsilon], \tag{19.7}$$

где второе слагаемое оказывается равным нулю ввиду свертки симметричного и антисимметричного тензоров. После интегрирования по частям первого слагаемого оно по той же причине оказывается равным нулю

$$\delta S \to -\frac{1}{2}\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\overline{\varepsilon}\gamma_\nu\gamma_5\partial_\mu\partial_\alpha\overline{\psi}_\beta = 0. \tag{19.8}$$

Замечание: указанное преобразование похоже по виду на локальное SUSY преобразование.

Замечание: действие для свободного гравитино может быть записано в представленном виде только в $D = 4$. Для возможных обобщений на случай других размерностей более удобна эквивалентная форма этого действия

$$S = -\frac{i}{2}\int d^4x \overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\sigma}\partial_\nu\psi_\sigma, \tag{19.9}$$

где $\gamma^{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{3!}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma \pm perm.)$ - антисимметризованное произведение трех γ-матриц. Действительно, так как базис в пространстве γ-матриц есть следующий набор матриц

$$1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \gamma^{\mu\nu}, \tag{19.10}$$

по которому любая матрица раскладывается следующим образом

$$M = \frac{1}{4}tr(M)\cdot 1_4 + \frac{1}{4}tr(M\gamma_5)\gamma_5 + \frac{1}{4}tr(M\gamma^\mu)\gamma_\mu - \frac{1}{4}tr(M\gamma^\mu\gamma_5)\gamma_\mu\gamma_5 - \frac{1}{8}tr(M\gamma^{\mu\nu})\gamma_{\mu\nu} \tag{19.11}$$

это есть, так называемое, тождество Фирца или соотношение полноты. Вместо M подставим $\gamma^{\mu\nu\sigma}$, тогда ввиду равенства нулю следа нечетного числа γ-матриц получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}tr(\gamma^{\mu\nu\sigma})\cdot 1_4 = 0, \\ \frac{1}{4}tr(\gamma^{\mu\nu\sigma}\gamma_5)\gamma_5 = 0, \\ \frac{1}{8}tr(\gamma^{\mu\nu\sigma}\gamma^{\alpha\beta})\gamma_{\alpha\beta} = 0, \end{aligned} \tag{19.12}$$

слагаемое с коэффициентом

$$\frac{1}{4}tr(\gamma^{\mu\nu\sigma}\gamma^\alpha) = (\eta^{[\mu\nu}\eta^{\sigma]\alpha} - \eta^{[\mu\sigma}\eta^{\nu]\alpha} + \eta^{\alpha[\mu}\eta^{\nu\sigma]}) = 0, \tag{19.13}$$

равно нулю ввиду антисимметризации симметричных метрических тензоров. Остается слагаемое с коэффициентом

$$\frac{1}{4}tr(\gamma^{\mu\nu\sigma}\gamma^\alpha\gamma_5) = -i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\alpha}, \tag{19.14}$$

тогда получаем следующее выражение для $\gamma^{\mu\nu\sigma}$

$$\gamma^{\mu\nu\sigma} = i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\alpha}\gamma_\alpha\gamma_5, \tag{19.15}$$

и соответственно

$$-\frac{i}{2}\overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\sigma}\partial_\nu\psi_\sigma = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\alpha}\overline{\psi}_\mu\gamma_\alpha\gamma_5\partial_\nu\psi_\sigma = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\nu\sigma}\overline{\psi}_\mu\gamma_\alpha\gamma_5\partial_\nu\psi_\sigma. \tag{19.16}$$

Таким образом, получено действие для свободного гравитино, которое можно обобщить на любую размерность D.

Наивно можно предположить, что $N = 1$ супергравитация описывается действием

$$S = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}R + \frac{1}{2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\nabla_\alpha\psi_\beta, \tag{19.17}$$

где

$$\nabla_\alpha \psi_\beta = \partial_\alpha \psi_\beta - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\psi_\sigma + \frac{1}{4}\omega_{\alpha mn}(e)\gamma^{mn}\psi_\beta,$$
$$\gamma_\nu = e_{n\nu}\gamma^n, \tag{19.18}$$

но в этом случае оказывается, что из уравнения движения для гравитино следует, что

$$\nabla_\mu \frac{\delta S}{\delta \psi_\mu} = 0 \to R_{\mu\nu} = 0, \tag{19.19}$$

поэтому этот вариант неверен.

Правильное действие для $N = 1$ супергравитации получается при использовании, так называемого, формализма 1.5 порядка, который представляет собой что-то среднее между формализмами первого и второго порядка. А именно рассмотрим действие следующего вида

$$S[e,\psi] = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}R(e,\overline{\omega}) + \frac{1}{2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\overline{\nabla}_\alpha(e,\overline{\omega})\psi_\beta, \tag{19.20}$$

где

$$\overline{\nabla}_\alpha(e,\overline{\omega})\psi_\beta = \partial_\alpha\psi_\beta - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(e)\psi_\sigma + \frac{1}{4}\overline{\omega}_{\alpha mn}\gamma^{mn}\psi_\beta, \tag{19.21}$$

при этом

$$\overline{\omega}_{\mu mn} = \omega_{\mu mn}(e) + K_{\mu mn}, \tag{19.22}$$

где тензор конторсии исключен на уравнениях движения как вспомогательное поле, то есть

$$K_{\mu mn} = K_{\mu mn}(e,\psi), \tag{19.23}$$

поэтому поле связности в формализме 1.5 порядка также является функцией тетрады и гравитино

$$\overline{\omega}_{\mu mn} = \overline{\omega}_{\mu mn}(e,\psi). \tag{19.24}$$

Для того чтобы найти, как тензор конторсии выражается через гравитино, запишем данное действие в формализме 1-го порядка

$$S[e,\psi] = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R(e) + e^{m\mu}e_n^\nu[K^c_{\mu a}K^b_{\nu c} - K^c_{\nu a}K^b_{\mu c}]) +$$
$$+\frac{1}{2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5[\nabla_\alpha + \frac{1}{4}K_{\alpha mn}\gamma^{mn}]\psi_\beta, \tag{19.25}$$

после исключения конторсии на уравнениях движения получим следующее выражение для конторсии

$$K_{\mu mn} = -\frac{ik^2}{4}(\overline{\psi}_m\gamma_\mu\psi_n + \overline{\psi}_\mu\gamma_m\psi_n - \overline{\psi}_\mu\gamma_n\psi_m) \tag{19.26}$$

то есть поле связности будет иметь следующий вид

$$\overline{\omega}_{\mu mn}(e,\psi) = \omega_{\mu mn}(e) - \frac{ik^2}{4}(\overline{\psi}_m\gamma_\mu\psi_n + \overline{\psi}_\mu\gamma_m\psi_n - \overline{\psi}_\mu\gamma_n\psi_m). \tag{19.27}$$

Полученное выражение зависит от вторых производных тетрады (как в формализме второго порядка), но получается с использованием формализма первого порядка. Поэтому данный формализм и называется формализмом 1.5 порядка.

Замечание: действие (19.20) для $N = 1$ супергравитации отличается от наивного действия (19.17) наличием слагаемых, пропорциональных ψ^4.

Полученное действие инвариантно относительно следующих преобразований

$$\begin{cases} \delta e_\mu^a = -\frac{ik}{2}\overline{\varepsilon}\gamma^a\psi_\mu, \\ \delta\psi_\mu = \frac{1}{k}\overline{\nabla}_\mu(\overline{\omega}(e,\psi))\varepsilon, \end{cases}$$

которые являются локальными преобразованиями SUSY. Здесь

$$\overline{\nabla}_\mu(\overline{\omega}(e,\psi))\varepsilon = \partial_\mu\varepsilon + \frac{1}{4}(\omega_{\mu mn}(e) + K_{\mu mn}(e,\psi))\gamma^{mn}\varepsilon, \tag{19.28}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x)$ - майорановский спинор.

Таким образом, при наличии гравитации преобразования SUSY становятся локальными.

Замечание: гравитино можно рассматривать, как калибровочное поле, локализирующее преобразования суперсимметрии.

Также можно построить действие $N = 1$ супергравитации при наличии космологической постоянной Λ

$$\begin{aligned} S = &-\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R(g) + 2\Lambda) + \\ &+\frac{1}{2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\overline{\nabla}_\alpha(e,\overline{\omega})\psi_\beta, \end{aligned} \tag{19.29}$$

при этом чтобы данное действие было SUSY инвариантным необходимо модифицировать действие (19.20) следующим образом

$$\begin{aligned} S = &-\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}R(e,\psi) + \\ &+\frac{1}{2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\overline{\nabla}_\alpha(e,\overline{\omega})\psi_\beta + \int d^4x\sqrt{-g}(\frac{3}{k^2}m^2 - \frac{m}{2}\overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu), \end{aligned} \tag{19.30}$$

которое инвариантно относительно преобразований

$$\begin{cases} \delta e_\mu^a = -\frac{ik}{2}\overline{\varepsilon}\gamma^a\psi_\mu, \\ \delta\psi_\mu = \frac{1}{k}(\overline{\nabla}_\mu(\overline{\omega}(e,\psi))\varepsilon + \frac{im}{2}\gamma^\mu\varepsilon), \end{cases} \tag{19.31}$$

при этом величина m представляет собой массу гравитино, а космологическая постоянная $\Lambda = -3m^2$ (случай AdS).

Замечание: отрицательное значение величины космологической постоянной, вообще говоря, не согласуется с наблюдаемыми астрофизическими данными. Однако надо заметить, что здесь была рассмотрена простейшая супергравитация без взаимодействия с полями материи. Чему будет посвящена следующая лекция.

Взаимодействие супергравитации с материей

На прошлой лекции была изучена простейшая теория $N = 1$ супергравитации, в спектре которой присутствует помимо гравитона его суперпартнер гравитино $\psi_{\mu a}$, который удовлетворяет условию майорановости

$$\overline{\psi}_\mu = \psi_\mu^T C, \tag{20.1}$$

при этом построение взаимодействия гравитона с гравитино оказалось нетривиальной задачей. А именно к минимальному взаимодействию потребовалось добавить слагаемые, пропорциональные полю гравитино в четвертой степени (формализм 1.5 порядка), которые получаются после исключения поля конторсии на уравнениях движения в формализме 1-го порядка. Было построено обобщение данной теории на случай наличия космологической постоянной.

В данной лекции будет рассмотрено взаимодействие супергравитации с материей.

Параграф 3. Взаимодействие супергравитации с материей

Взаимодействие материи с супергравитацией должно учитывать локальность SUSY. Предварительно заметим, что ввиду неперенормируемости как теории гравитации, так и супергравитации, взаимодействие с материей может описываться неперенормируемым выражением.

Для начала, рассмотрим теорию, инвариантную относительно преобразований глобальной SUSY (в пространстве Минковского), которая описывается суперполевым действием

$$S = \frac{1}{4} Re \int d^4x d^2\theta f_{AB}(\phi_i) W_a^A C^{ab} W_b^B +$$
$$+\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \Phi(\phi^+ e^{2V}, \phi) + (\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta g(\phi_i) + \text{к.с.}), \tag{20.2}$$

здесь первое слагаемое представляет собой аналог $N = 1$ SUSY Янга-Миллса

$$S = \frac{1}{4} Re \int d^4x d^2\theta \delta_{AB}(\phi_i) W_a^A C^{ab} W_b^B, \tag{20.3}$$

где $W_a = eW_a^A t^A$ - тензор калибровочного поля ($tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$). Отметим, что в случае Янга-Миллса $f_{AB}(\phi_i) = \delta_{AB}$. Данное слагаемое является SUSY инвариантным поскольку ϕ_i - киральное суперполе материи

$$\phi_i(y^\mu, \theta) = \varphi_i(y^\mu) + \overline{\theta}(1+\gamma_5)\chi_i(y^\mu) - \frac{1}{2}\overline{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_i(y^\mu). \tag{20.4}$$

Второе слагаемое является обобщением модели Весса-Зумино, которая получается если выбрать $\Phi(\phi^+ e^{2V}, \phi) = \phi^+ e^{2V}\phi$, где $V_i^j = eV^A(T^A)_i^j$ - вещественная функция

$$\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V}\phi, \tag{20.5}$$

и которое является также SUSY инвариантным.

Последнее слагаемое является суперпотенциалом.

Предполагается, что функции $f_{AB}(\phi_i)$, $g(\phi_i)$ выбраны так, чтобы получилась калибровочно инвариантная теория.

В литературе известно довольно громоздкое выражение для обобщения действия (20.1) на случай наличия $N = 1$ SUSY взаимодействия с мультиплетом супергравитации (включение искривления пространства-времени и гравитино).

Полное действие может быть найдено в работе H.P.Nilles "Supersymmetry, supergravity and particle physics Phys. Rep. 110 (1984), 1.

Здесь будет обсуждаться только его общая структура и рассматриваться существенные для дальнейшего изложения слагаемые.

Наиболее важно, что данное действие зависит от функций Φ и g только в комбинации

$$G(\phi^{*i}, \phi_i) = 3\ln\left[-\frac{k^2}{3}\Phi(\varphi^{*i}, \varphi_i)\right] - \ln\left(k^6|g(\varphi_i|^2\right), \tag{20.6}$$

которая называется кэлеровым потенциалом. Здесь $k = \sqrt{8\pi G}$ имеет порядок планковской длины, а φ_i - скалярные компоненты киральных суперполей исходного действия.

Далее аргументы φ^{*i}, φ_i не будут выписываться явно, также будут использоваться следующие обозначения

$$G_i = \frac{\partial G}{\partial \varphi^{*i}},\ G^i = \frac{\partial G}{\partial \varphi_i},$$
$$G_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^{*i}\partial \varphi^{*j}},\ G_k^{ij} = \frac{\partial^3 G}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j \partial \varphi^{*k}}, \ldots \tag{20.7}$$

Действие рассматриваемой теории ($N = 1$ SUGRA с материей) можно разбить на четыре характерные части

$$S = S_B + S_F + S_{F^2} + S_{F^4}, \tag{20.8}$$

где

1) первое слагаемое представляет собой выражение для бозонной части действия. Данное выражение не содержит фермионов и является наиболее простым слагаемым,

лагранжиан для которого имеет вид

$$\mathcal{L}_B = \sqrt{-g}\{\frac{1}{k^4}e^{-G}(3+G_i(G^{-1})^i_j G^j) - \frac{1}{k^2}G^j_i D_\mu \varphi_j D^\mu \varphi^i -$$
$$-\frac{e^2}{2k^4}(Re\ f)^{-1}_{AB}(G^i(T^A)^j_i\varphi_j)\cdot(G_k(T^B)^k_l\varphi^{*l}) - \frac{1}{4}(Re\ f)_{AB}F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu B} +$$
$$+\frac{i}{4}(Im\ f)_{AB}F^A_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu B} - \frac{1}{2k^2}R(e)\}, \qquad (20.9)$$

здесь первое слагаемое представляет собой часть потенциала скаляров, второе - кинетическое слагаемое для скалярных полей, третье слагаемое есть аналог $-\frac{1}{2}(D^A)^2$, четвертое слагаемое - лагранжиан Янга-Миллса, предпоследнее - топологическое слагаемое, наконец, последнее слагаемое - лагранжиан Эйнштейна-Гильберта для обычной теории гравитации.

Здесь

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \qquad (20.10)$$

дуальный тензор поля. Также $(G^{-1})^j_i G^k_j = \delta^k_i$.

2) Второе слагаемое

$$\mathcal{L}_F = \sqrt{-g}\{-\frac{i}{16}(Re\ f)_{AB}\overline{\lambda}^A\gamma^\mu\gamma_5\lambda^B\cdot G^i D_\mu\varphi_i +$$
$$+\frac{i}{4}f_{AB}\overline{\lambda}^A(1+\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\lambda^B + \frac{ik}{8}f_{AB}\overline{\lambda}^A\gamma^\mu\gamma^{\alpha\beta}\psi_\mu F^B_{\alpha\beta} +$$
$$+\frac{1}{8}f^i_{AB}\overline{\chi}_i(1+\gamma_5)\gamma^{\alpha\beta}F^A_{\alpha\beta}\lambda^B + \frac{1}{4\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\nabla_\alpha\psi_\beta -$$
$$-\frac{1}{8\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\overline{\psi}_\alpha\gamma_\beta\psi_\gamma G^i D_\mu\varphi_i + \frac{1}{2k}G^i_j\overline{\psi}_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu(1-\gamma_5)\chi^j D_\mu\varphi_i +$$
$$+\frac{i}{2k^2}\overline{\chi}_i(1+\gamma_5)\gamma^\mu\chi^j D_\mu\varphi_k(G^{ik}_j + \frac{1}{2}G^i_j G^k) - \frac{i}{2k^2}G^i_j\overline{\chi}_i(1+\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\chi^j + \text{к.с.}\}, \qquad (20.11)$$

представляет собой кинетическое слагаемое для фермионов - сумма слагаемых, квадратичных по фермионным полям, которые содержит производные. Здесь второе слагаемое является кинетическим слагаемым для калибрино, пятое слагаемое - кинетическое слагаемое для гравитино, последнее слагаемое есть кинетическое слагаемое для фермионов.

Замечание: λ^A здесь в $\sqrt{2}$ раза отличается от того, которое было в теориях с глобальной SUSY).

Третье слагаемое $\mathcal{L}_{F^2}$ представляет собой сумму остальных слагаемых, квадратичных по фермионным полям.

Наконец, последнее слагаемое $\mathcal{L}_{F^4}$ представляет собой сумму слагаемых четвертого порядка по фермионным полям.

Приведем явное выражение для $\mathcal{L}_{F^2}$

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{F^2} = \sqrt{-g}\{-\frac{1}{4k}e^{-G/2}\overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}(1-\gamma_5)\psi_\nu - \frac{1}{8k}e^{-G/2}(G^{-1})_i^j f^i_{AB}G_j\overline{\lambda}^A(1+\gamma_5)\lambda^B + \\ +\frac{i}{2k^2}e^{-G/2}G^i\overline{\psi}_\mu\gamma^\mu(1+\gamma_5)\chi_i + \frac{i}{2k^3}e^{-G/2}(G^{ij}-G^iG^j-G^l(G^{-1})^k_lG^{ij}_k)\overline{\chi}_i(1+\gamma_5)\chi_j + \\ \frac{e}{4k}G^i\overline{\psi}_\mu\gamma^\mu(1+\gamma_5)\lambda^A(T^A)^j_i\varphi_j + \frac{ie}{k^2}G^j_i\overline{\chi}_i(1+\gamma_5)\lambda^A(T^A)^k_j\varphi_k + \\ +\frac{ie}{4k^2}(Re\ f)^{-1}_{AB}G^jf^i_{AC}\overline{\chi}_i(1+\gamma_5)\lambda^C(T^B)^k_j\varphi_k + \text{к.с.}\}\end{gathered} \tag{20.12}$$

где первое слагаемое представляет собой массу гравитино, второе - массу калибрино, третье - смешивание гравитино с фермионами, четвертое - массы фермионов, пятое - смешивание гравитино и калибрино, последние два слагаемых - юкавские слагаемые.

Выражение для $\mathcal{L}_{F^4}$ существенно больше и здесь не приводится.

Замечание: вообще говоря, все G, G_i и так далее, зависят от скалярных полей φ_i, φ^{*i}. Поэтому данные слагаемые соответствуют своим названиям, когда данные скалярные поля приобретают вакуумные средние.

Действие, соответствующее глобальной SUSY получается из действия (20.8) при

$$\begin{gathered}G^i_j = -k^2\delta^i_j,\ k\to 0 \\ G = -f^2\varphi^{*i}\varphi_i.\end{gathered} \tag{20.13}$$

Приведенные выражение были получены после исключения вспомогательных полей на уравнениях движения. При этом

$$\begin{gathered}D^A = (Re\ f)^{-1}_{AB}[-\frac{e}{2k^2}G^i(T^B)^j_i\varphi_j - \frac{e}{2k^2}G_i(T_B)^i_j\varphi^{*j} + \\ +\text{слагаемые, квадратичные по фермионам}], \\ f_i = \frac{1}{k}e^{-G/2}(G^{-1})^j_iG_j + \text{слагаемые, квадратичные по фермионам.}\end{gathered} \tag{20.14}$$

Преобразования SUSY, относительно которых инвариантно действие $N = 1$ SUGRA с материей (20.8), могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \delta e^a_\mu = -\frac{ik}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^a\psi_\mu, \\ \delta[(1+\gamma_5)\psi_\mu] = \frac{1}{k}\nabla_\mu\varepsilon + \frac{1}{4k}G_iD_\mu\varphi^{*i}(1+\gamma_5)\varepsilon - \\ -\frac{1}{4k}G^iD_\mu\varphi_i(1+\gamma_5)\varepsilon + \frac{i}{2k^2}e^{-G/2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\varepsilon + \\ \text{слагаемые, квадратичные по фермионам,} \\ \delta\varphi_i = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\chi_i, \\ \delta[(1+\gamma_5)\chi_i] = -\frac{1}{2k}e^{-G/2}(G^{-1})_i^jG_j(1+\gamma_5)\varepsilon - \frac{i}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\varepsilon D_\mu\varphi_i + \\ +\text{слагаемые, квадратичные по фермионам,} \\ \delta A^A_\mu = \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda^A, \\ \delta[(1+\gamma_5)\lambda^A] = -\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}(1+\gamma_5)\varepsilon F^A_{\mu\nu} + \frac{ie}{2k^2}(1+\gamma_5)\varepsilon(Re\ f)^{-1}_{AB}G^i(T^B)_i^j\varphi_j + \\ +\text{слагаемые, квадратичные по фермионам,} \end{cases} \tag{20.15}$$

Замечание: здесь $\varepsilon \to \frac{1}{2}\varepsilon$.

Параграф 4. Спонтанное нарушение локальной SUSY

По определению, SUSY спонтанно нарушена если

$$Q_{ia}|0\rangle \neq 0, \tag{20.16}$$

в этом случае скалярные поля φ_i, φ^{*i} должны приобретать вакуумные средние. Как следствие, $G = G(\varphi_i, \varphi^{*i})$ приобретает вакуумное среднее, вакуумные средние полей в нетривиальных представлениях группы Лоренца равны нулю. Поэтому SUSY преобразования бозонных полей в вакуумном состоянии равно нулю. Ненулевыми будут преобразования фермионных полей за счет ненулевых вакуумных средних вспомогательных полей D^A, f_i, зависящих от G (см. 20.1). Данный критерий спонтанного нарушения SUSY остается верным при изучении нарушения локальной SUSY.

В случае глобальной SUSY в этом случае вакуумная энергия E_0 была строго положительна. В случае же локальной SUSY это, вообще говоря, не так. Для того чтобы это показать, рассмотрим скалярную часть бозонного действия (20.1)

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_B = \sqrt{-g}\{\frac{1}{k^4}e^{-G}(3 + G_i(G^{-1})^i_jG^j) - \\ -\frac{e^2}{2k^4}(Re\ f)^{-1}_{AB}(G^i(T^A)_i^j\varphi_j)\cdot(G_k(T^B)^k_l\varphi^{*l}) - \frac{1}{k^2}G_i^jD_\mu\varphi_jD^\mu\varphi^i\}, \end{gathered} \tag{20.17}$$

в котором последнее слагаемое при $G_i^j = -k^2\delta_i^j$ дает кинетическое слагаемое для скалярного поля, а два первых слагаемых представляют собой потенциал для скалярных полей. Предположим, в вакуумном состоянии

$$G^i (T^A)_i^{\ j} \varphi_j |_{\varphi\to\varphi_0} = 0 \implies D_0^A = 0, \tag{20.18}$$

тогда вакуумное значение потенциальной энергии для скалярных полей примет следующий вид

$$\sqrt{-g}\frac{1}{k^4}e^{-G}(3 + G_i (G^{-1})^i_{\ j} G^j), \tag{20.19}$$

которое при $G_i^j = -k^2\delta_i^j \implies (G^{-1})_i^j = -\frac{1}{k^2}\delta_i^j$ приводит к следующему выражению

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g}\frac{1}{k^4}e^{-G}(3 - \frac{1}{k^2}G_i G^i), \tag{20.20}$$

которое, вообще говоря, положительно не определено. Это существенное отличие теорий с локальной SUSY от теорий с глобальной SUSY.

При этом, в случае нарушения глобальной SUSY потенциал скалярных полей в вакуумном состоянии равен

$$V_0 = |f_0|^2, \tag{20.21}$$

характерный масштаб μ которого с учетом размерности вспомогательного поля $[f] = m^2$, будет $\mu \sim \sqrt{|f_0|}$, то есть

$$V_0 = |f_0|^2 \sim \mu^4, \tag{20.22}$$

который связан с характерными массами суперпартнеров $m \sim 10^4$ ГэВ. Предполагая, что масштаб SUSY СНС пропорционален данным массам, получим, что

$$V_0 \sim 10^{16} \text{ ГэВ}, \tag{20.23}$$

в случае наличия гравитации соответствующий потенциал

$$-\int d^4x \sqrt{-g} V_0, \tag{20.24}$$

имеет смысл интеграла от космологической постоянной

$$m_\Lambda c^2 = \left(\frac{\hbar^3 \Lambda}{Gc}\cdot c^2\right) \simeq 5\cdot 10^{-3}\text{эВ}, \tag{20.25}$$

то есть соотвествующее действие

$$m_\Lambda^4 \int d^4x \sqrt{-g}, \tag{20.26}$$

по порядку величины является очень малым. Поэтому полученная знакопеременность потенциала скалярных полей в случае локальной SUSY объясняет экспериментально наблюдаемую малую величину космологической постоянной. Данное обстоятельство накладывает следующее ограничение на кэлеров потенциал

$$G_i G^i|_{\varphi\to\varphi_0} = 3k^2, \tag{20.27}$$

откуда можно получить оценку на порядок масштаба нарушения SUSY

$$\mu \sim \sqrt{|f_0|} \sim \sqrt{\frac{1}{k}e^{-G/2}\frac{1}{k^2}G_i}, \tag{20.28}$$

сравнивая его с массовым слагаемым для поля гравитино

$$-\frac{1}{4k}e^{-G/2}\overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}(1-\gamma_5)\psi_\nu + \text{к.с.} = -\frac{1}{2k}e^{-G/2}\overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu, \tag{20.29}$$

которое в вакуумном состоянии обеспечивает следующее значение массы гравитино

$$m_{3/2} = \frac{1}{k}e^{-G/2}|_{\varphi\to\varphi_0}, \tag{20.30}$$

в результате получаем следующую оценку

$$\mu \sim \sqrt{m_{3/2}\frac{1}{k}} \sim \sqrt{m_{3/2}M_{pl}}, \tag{20.31}$$

так как $G_i \sim k$, . Чтобы оценить массу гравитино, воспользуемся ранее доказанной теоремой о равенстве бозонных и фермионных степеней свободы

$$Str(P_\mu^2) = \sum_B n_B m_B^2 - \sum_F n_F m_F^2 = 0, \tag{20.32}$$

где слева стоит суперслед, равный

$$Str(P_\mu^2) = 2(n-1)m_{3/2}^2, \tag{20.33}$$

здесь n - число киральных суперполей материи. Ввиду доминирования бозонных суперпартнеров и с учетом их энергетического масштаба $10^3 - 10^5$ ГэВ, получаем следующую оценку на массу гравитино, которое должно уравновешивать разницу между бозонными и фермионными степенями свободы

$$\begin{gathered} m_{3/2} \sim 10^3 - 10^5 \text{ ГэВ} \Longrightarrow \\ \mu \sim \sqrt{m_{3/2}M_{pl}} \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ ГэВ}. \end{gathered} \tag{20.34}$$

Таким образом, в теории возникает некоторый промежуточный масштаб, на котором нарушается SUSY.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ