МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

СТРУКТУРА ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ. ЧАСТЬ 2

ТИМАШЁВ
ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ

Содержание

Лекция 1

Резюме осеннего семестра

Если G — это группа Ли, то мы можем сопоставить ей ее касательную алгебру Ли $\mathfrak{g} = TeG$. Если группа G односвязна, то мы можем восстановить ее однозначно её по касательной алгебре.

Произвольная связная группа Ли восстанавливается по своей односвязной накрывающей:

$$G = \widetilde{G}/Z,$$

где $\widetilde{G}$ — односвязна, а Z — дискретная центральная подгруппа.

Свойства группы Ли G определяют свойства алгебры Ли $\mathfrak{g}$. И, до некоторой степени, наоборот. Один из инструментов обратной связи — экспоненциальное отображение:

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G,$$

которое является локальным диффеоморфизмом в окрестности нуля (между окрестностями нуля в алгебре Ли и единицей $e \in G$).

Структурная теория групп и алгебр Ли

Абелевы группы Ли

Теорема 1. *Всякая связная абелева $\mathbb{R}-$ группа Ли изоморфна $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^l$, $k, l \geqslant 0$, то есть произведению тора на векторную группу.*

Доказательство.

Лемма 1. *Если G — связная абелева группа Ли, то $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ — универсальное накрытие. (теорема из осеннего семестра).*

Доказательство. Если рассматривать $\mathfrak{g}$ как векторную группу, то есть с операцией сложения, а G — с операцией умножения. Тогда по свойству экспоненты exp — гомоморфизм групп Ли. Кроме того, оно является локальным диффеоморфизмом, следовательно, оно является накрытием, так как G связно. А поскольку, $\mathfrak{g}$ односвязно (векторное пространство), то это универсальное накрытие. □

Тогда $G \simeq \mathfrak{g}/\Lambda$, где Λ — дискретная подгруппа («центральная» опускаем, так как группа абелева). Как устроены дискретные подгруппы в векторных группах?

Лемма 2. *Дискретная подгруппа в аддитивной группе векторного пространства V над $\mathbb{R}$ имеет вид:*

$$\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \ldots + \mathbb{Z}v_k,$$

где $v_1, \ldots, v_k \in V$ — линейно независимые векторы.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что дискретная подгруппа Λ порождает векторное пространство V как векторное пространство, то есть

$V = \langle \Lambda \rangle_{\mathbb{R}}$. Выберем базис пространства V: $w_1, \dots w_k \in \Lambda$ и рассмотрим целочисленные линейные комбинации этих векторов. Это будет дискретная подгруппа в Λ:

$$\Lambda \supseteq \Lambda_0 = \mathbb{Z}w_1 + \dots \mathbb{Z}w_k - \text{подрешетка.}$$

Рассмотрим фундаментальный параллелепипед этой решетки, то есть линейную комбинацию этих базисных векторов с вещественными коэффициентами $t_i \in [0, 1]$.

$$\prod = \{v = t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k \mid t_i \in [0, 1]\}.$$

Вообще говоря, любой вектор из пространства V можно сдвинуть на подходящий вектор из Λ_0 так, чтоб попасть в $\prod$. Просто нужно из каждой координаты вычесть её целую часть, и останется дробная, то есть число $\in [0, 1)$. Отсюда вытекает, что если мы векторы из Λ сдвигаем на векторы из Λ_0, то мы двигаемся внутри смежного класса. И в каждом таком смежном классе есть единственная точка, попавшая в фундаментальный параллелепипед (если из него выкинуть грани, не содержащие 0 (начала координат), то есть там, где какое-то $t_i = 1$). Иными словами,

$$|\Lambda/\Lambda_0| = |\prod \bigcap \Lambda \setminus \{\text{грани } \not\ni 0\}| = m < \infty.$$

Множество справа от знака равенства конечно, потому что Λ дискретна, и в любом ограниченном объеме содержится лишь конечное число её точек.

По теореме Лагранжа из того, что Λ/Λ_0 конечна, то любой её элемент взятый с кратностью m дает ноль (в аддитивной записи). Другими словами, если мы любой элемент из Λ умножим на m, то мы попадем в Λ_0. То есть

$$m\Lambda \subseteq \Lambda_0 \subseteq \Lambda \Longrightarrow \Lambda_0 \subseteq \Lambda \subseteq \frac{1}{m}\Lambda,$$

где Λ_0 — решетка ранга k. По известной теореме из теории групп подгруппа свободной абелевой группы свободна, и её ранг не превосходит ранга объемлющей группы. Λ — свободная абелева группа. Её ранг с одной стороны не превосходит k, с другой стороны $\leqslant k$. Значит, ранг Λ равен k (k — размерность объемлющего пространства).

Выберем базис в Λ. Пусть $v_1, \dots v_k$ — базис Λ. Через них выражаются все векторы из Λ с целыми коэффициентами, в частности и векторы из Λ_0, а значит и $w_1, \dots, w_k$. А так как $w_1, \dots, w_k$ линейно независимы (мы так брали с самого начала), то по основной лемме о линейной зависимости $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Что и требовалось доказать.

□

В нашей ситуации мы можем дополнить выбранный базис решетки Λ $v_1, \dots, v_k$ до базиса $\mathfrak{g}$. Тогда выбор этого базиса дает изоморфизм $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$, а наша решетка — это целочисленная линейная комбинация первых k векторов в базисе, то есть $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^k \times \{0\}^{n-k}$. Следовательно,

$$G \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/0 \times \mathbb{R}/0 \simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

□

Замечание 1. Почти все, что было изложено, справедливо и для $\mathbb{C}$–групп. А именно, связная абелева $\mathbb{C}-$группа Ли $G \simeq \mathbb{C}^n/\Lambda$. Но мы не сможем привести это к одному фиксированному виду, потому что мы рассматриваем группы с точностью до комплексного изоморфизма, а решеток в комплексном пространстве «много»: они задаются континуальным семейством параметров. Чтобы две такие группы были изоморфны нужно, чтобы существовало линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^n$, которое одну решетку переводит в другую:

$$\mathbb{C}^n/\Lambda_1 \simeq \mathbb{C}^n/\Lambda_2 \Longleftrightarrow \exists \text{ невырожденный лин. оператор } \Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad \Phi(\Lambda_1) = \Lambda_2.$$

Коммутант

Пусть G — группа Ли, $G' = [G, G]$ — коммутант (подгруппа, порожденная всеми коммутаторами). В теории групп известен факт — коммутант является наименьшей нормальной подгруппой, фактор по которой является абелевой группой. Введем аналогичное понятие для алгебр Ли.

Определение 1. Если $\mathfrak{g}$ — это алгебра Ли, то её *коммутант* $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ определяется как линейная оболочка всех коммутаторов $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle [\xi, \eta] \mid \xi, \eta \in \mathfrak{g} \rangle$. Это будет подалгебра и даже идеал.

Свойства:

- $\mathfrak{g}' \lhd \mathfrak{g}$. Коммутант алгебры Ли является идеалом в этой алгебре Ли.
- $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ абелева.
- Если есть идеал $h \lhd \mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{g}/h$ абелева, то $\mathfrak{g}' \subseteq h$.

Установим связь между коммутантами группы Ли и алгебры Ли.

Теорема 2. *Если G — односвязная группа Ли, $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, то $G' \subseteq G$ — односвязная подгруппа Ли и $\operatorname{Lie} G' = \mathfrak{g}'$.*

Доказательство. Рассмотрим фактор–алгебру $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' = \mathfrak{a} = \operatorname{Lie} A$. Это будет абелева алгебра Ли по свойствам коммутанта. И как и всякая абелева алгебра Ли она является касательной алгеброй векторной группы. $\mathfrak{a} = \operatorname{Lie} A$, где A — векторная группа. У нас имеется каноническая проекция — гомоморфизм из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{a}$. Поскольку $\mathfrak{g}$ — это алгебра Ли односвязной группы G, то по теореме из осеннего семестра этот гомоморфизм можно проинтегрировать до гомоморфизма из группы G в группу A. То есть $\exists$ гомоморфизм групп Ли $\varphi : G \longrightarrow A$ такой, что $d\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$ — каноническая проекция. φ — субмерсия $\Longrightarrow$ сюръективен.

Обозначим $H = \operatorname{Ker} \varphi \subseteq G$ — подгруппа Ли. $A \simeq G/H$. А поскольку A абелева, то $G' \subseteq H$. По построению $h = \mathfrak{g}'$.

Теперь докажем, что H односвязна. Рассмотрим гомотопическую последовательность расслоение группы G над G/H.

$$\ldots \to \pi_{k+1}(A) \to \pi_k(H) \to \pi_k(G) \to \pi_k(A) \to \ldots$$

Поскольку A — векторная группа, то $\pi_{k+1}(A) = \pi_k(A) = 0$. Следовательно, $\pi_k(H) \simeq \pi_k(G)$. Следовательно, H односвязна.

Осталось доказать, что $H \subseteq G'$. Достаточно для каждого вектора из $\mathfrak{g}'$ построить кривую, лежащую в $\mathfrak{g}'$ с этим касательным вектором.

Лемма 3. *Пусть $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $\xi = \dot{a}(0)$, $\eta = \dot{b}(0)$, $a(s), b(t) \in G$. Тогда для $\forall$ функции f в окрестности $e \in G$:*

$$\partial_{[\xi,\eta]} f = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=t=0} f([a(s), b(t)]).$$

Доказательство. Посмотрим сначала на правую часть равенства:

$$\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \frac{\partial}{\partial st}\bigg|_{t=0} f(a(s_b(t)a^{-1}(s)b^{-1}(t)) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left(\partial_{\mathrm{Ad}[a(s)]\eta} f - \partial_\eta f\right) = \partial_{\mathrm{ad}(\xi)\eta} f = \partial_{[\xi,\eta]} f.$$

□

Следствие 1. *В условиях леммы $[\xi, \eta] = \dot{g}(0)$, где*

$$g(t) = \begin{cases} [a(\sqrt{t}), b(\sqrt{t})], & t \geqslant 0, \\ [b(\sqrt{-t}), a(\sqrt{-t})], & t \leqslant 0, \end{cases}$$

и $g(t)$ — кривая класса C^1.

Доказательство. По формуле Тейлора:

$$f([a(s), b(t)]) = f(e) + st \cdot \partial_{\xi,\eta]} f + o(s^2 + t^2).$$

Если теперь $s = t = \sqrt{t}$, то

$$f(g(t)) = f(e) + t\partial_{[\xi,\eta]} f + o(t).$$

□

Мы хотим доказать, что подгруппа H содержится в коммутанте группы.

Выберем базис $[\xi_1, \eta_1], \dots [\xi_m, \eta_m]$ алгебры $\mathfrak{g}'$ над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим отображение $\psi : \mathfrak{g}' \supset U(0) \longrightarrow H$:

$$\psi(\sum_i t_i[\xi_i, \eta_i]) = \prod_i g_i(t_i),$$

где $[\xi_i, \eta_i] = \dot{g}_i(0)$, $g_i(t_i) \in G' \subseteq H$.

Итак, ψ — $\mathbb{R}$−дифференцируемое отображение класса $\mathbb{C}^1$, $d_0\psi = E$. Отсюда вытекает, что ψ — локальный диффеоморфизм, а поэтому $\psi(U)$ — окрестность $e \in H$, и $\psi(U) \subseteq G'$.

Получаем: H связна $\Longrightarrow$ порождается $\psi(U) \Longrightarrow H \subseteq G'$. Что и требовалось доказать.

□

Замечание 2. Если G связна, но не односвязна, то $G' = \pi(\widetilde{G}')$, где $\pi : \widetilde{G} \longrightarrow G$ — универсальное накрытие.

Следствие 2 (из доказательства)**.** *Если G связна, и $H \subseteq G$ — связная подгруппа Ли, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}'$, то $H = G'$.*

Доказательство. Рассмотрим дифференциал универсального накрытия $d\pi : \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Это будет изоморфизм и при нем получим:

$$\widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{h}.$$

Дальше по теореме о прообразе группы Ли при гомоморфизме

$$\mathrm{Lie}(\pi^{-1}(H)) = (d\pi)^{-1}(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{g}}'.$$

Следовательно, $\pi^{-1}(H) \supset \widetilde{G}'$. Отсюда следует, что $\pi(\widetilde{G}') = G' \subseteq H$.

Отсюда вытекает, что $\pi : \widetilde{G}' \longrightarrow H$ — субмерсия. Поскольку H связна, то π — сюръекция. А значит, $G' = H$.

□

Пример 1. $GL_n(\mathbb{K})' = SL_n(\mathbb{K})$.

Включение $\subseteq$ очевидно: групповой коммутатор матриц имеет $\det = 1$.

Обратное включение можно доказать, используя теорию групп Ли. Оно следует из аналогичного равенства для алгебры Ли: $GL_n(\mathbb{R})$ имеет две связные компоненты — возьмем компоненту с положительным определителем, $GL_n(\mathbb{C})$ связно; тогда попадаем в условия следствия, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})' = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Отсюда вытекает совпадение коммутанта на групповом уровне.

Осталось доказать $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})' = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Это следует из *правила коммутирования матричных единиц*:

$$[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj},$$
$$[E_{ij}, E_{jk}] = E_{ik}, \quad i \neq k$$
$$[E_{ij}, E_{ki}] = -E_{kk}, \quad j \neq k,$$
$$[E_{ij}, E_{kl}] = 0 \text{ в других случаях.}$$

Кратные коммутанты

Определение 2. Подгруппа $G^{(k)}$ называется кратным коммутантом.

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], \quad G^{(0)} = G.$$

Для алгебр Ли определяется аналогично:

$$\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}], \quad \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}.$$

Следствие 3. *G односвязна $\Longrightarrow \forall\ k\ G^{(k)} \subseteq G$ — односвязная подгруппа Ли,* $\mathrm{Lie}\, G^{(k)} = \mathfrak{g}^{(k)}$.

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой*, если $\exists k$: $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$.

Следствие 4. *Связная группа Ли G разрешима $\iff \mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ разрешима. Более того, ступени разрешимости G и $\mathfrak{g}$ одинаковы.*

Доказательство. Рассмотрим односвязную накрывающую группы G.

$$G = \widetilde{G}/Z,$$

где $\widetilde{G}$ односвязна, Z — дискретная центральная (следовательно, коммутативная) подгруппа. В теории групп есть критерий разрешимости: группа разрешима, если в ней есть разрешимая нормальная подгруппа, фактор по которой будет разрешим. Поэтому в данной ситуации G разрешима $\iff \widetilde{G}$ разрешима. А $\widetilde{G}$ разрешима $\iff$ $\mathfrak{g}$ разрешима. (по следствию 3). Эквивалентность доказана.

Ступень разрешимости: $\pi : \widetilde{G} \longrightarrow G$ — универсальное накрытие. $\forall k : \pi(\widetilde{G}^{(k)}) = G^{(k)}$.

Отметим, что $G^{(k)} = \{e\} \iff \widetilde{G}^{(k)} \subseteq Z$. Но так как $\widetilde{G}$ односвязна, то $\widetilde{G}^{(k)}$ — связная группа Ли, а Z — дискретная. То есть $\widetilde{G}^{(k)} \subseteq Z \iff \widetilde{G}^{(k)} = \{e\}$. Следовательно, ступени разрешимости у G и $\widetilde{G}$ совпадают. А то, что они совпадают у $\widetilde{G}$ и $\mathfrak{g}$ вытекает из следствия 3.

$\square$

Пример 2. Группа верхнетреугольных матриц $B_n(\mathbb{K})$ разрешима $\Longleftarrow B_n(\mathbb{R})^0$ разрешима $\Longleftarrow \mathfrak{b}_n(\mathbb{K})$ разрешима.

$B_n(\mathbb{C})$ связна.

$\pi_0(B_n(\mathbb{R})) = B_n(\mathbb{R})/B_n(\mathbb{R})^0 \simeq \{\pm 1\}^n$.

Лекция 2

Лемма о подалгебрах

Лемма 4. *G — группа Ли, $H_i \subseteq G$, $(i \in I)$ — семейство подгрупп Ли. $H = \bigcap\limits_{i\in I} H_i$ — тоже подгруппа Ли. $\mathfrak{h} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{h}_i$.*

Доказательство. Для конечного семейства это верно. В общем случае выберем конечное подсемейство H_j, $j \in J$, где J — конечное множество, такое, что $H_J = \bigcap\limits_{j\in J} H_j$. Следовательно, $H_J^0 \subseteq H_i$, $\forall i \in I$, а поэтому $\mathfrak{h}_J \subseteq \mathfrak{h}_i$. Иначе $\dim(H_J^0 \bigcap H_i) = \dim(H_J \bigcap H_i) < \dim H_J$. А значит, $H_J^0 \subseteq H \subseteq H_J$. Следовательно, H — подгруппа Ли. $\mathfrak{h} = \bigcap\limits_{j\in J} \mathfrak{h}_j = \bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{h}_i$.

□

Замыкание Мальцева

Определение 4. Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ — подалгебра Ли. *Замыкание Мальцева* $\mathfrak{h}^M$ — компактная подалгебра Ли $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{s}$, для которой $\exists$ подгруппа Ли $S \subseteq G$, $\operatorname{Lie} S = \mathfrak{s}$. Оно существует по лемме.

$$\mathfrak{h}^M = \operatorname{Lie} H^M,$$

где $H^M \subseteq G$ — связная подгруппа Ли.

Пример 3. Пусть $G = \mathbb{T}^n$, $\mathfrak{g} = (i\mathbb{R})^n$, $\mathfrak{g} \ni \xi = (i\alpha_1, \ldots, i\alpha_n)$ такие, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда $\exp(t\xi) = (e^{i\alpha_1 t}, \ldots, e^{i\alpha_n t})$. Тогда можно доказать, что эта экспоненциальная подгруппа — плотная обмотка тора. Следовательно, $\mathfrak{h} = \langle\xi\rangle \implies \mathfrak{h}^M = \mathfrak{g}$. Иначе бы $\exp(t\xi) \in H^M \subset G$, а это противоречит плотной обмотке, и всю группу G при замыкании мы бы не получили.

Утверждение 1. *В условиях определения замыкания Мальцева*

$$(\mathfrak{h}^M)' = \mathfrak{h}'.$$

Доказательство. $P = \{g \in G \mid (\operatorname{Ad}(g) - E)\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}'\}$. Утверждается, что это будет подгруппа Ли в группе G. Можно разбить матрицу на 9 частей: на три по столбцам и на три по строкам. Первая группа столбцов будет отвечать базису $\mathfrak{h}'$, первая и вторая группа — за базис $\mathfrak{h}$, а все вместе они — за базис $\mathfrak{g}$.

$$P = \operatorname{Ad}^{-1}\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \circledast & \circledast & \circledast \\ \hline 0 & E & \circledast \\ \hline 0 & 0 & \circledast \\ \hline \end{array}\right) \text{ — подгруппа Ли.}$$

Теперь посмотрим на соответствующую алгебру Ли:

$$\mathfrak{p} = \mathrm{ad}^{-1}\begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & 0 & \circledast \\ 0 & 0 & \circledast \end{pmatrix} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}'\} \supseteq \mathfrak{h}.$$

Отсюда получаем, что $\mathfrak{h}^M \subseteq \mathfrak{p}$. Следовательно, $[\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}'$.

Теперь рассмотрим новую группу Ли $Q = \{g \in G \mid (\mathrm{Ad}(g) - E)\mathfrak{h}^M \subseteq \mathfrak{h}'\}$ — тоже подгруппа Ли. Ее касательная алгебра записывается так:

$$\mathfrak{q} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \mathfrak{h}^M] \subseteq \mathfrak{h}'\} \supseteq \mathfrak{h}.$$

Рассуждая, как ранее, мы получим касательную алгебру некоторой подгруппы Ли, которая содержит $\mathfrak{h}$. А замыкание Мальцева — это наименьшая такая. $\Longrightarrow \mathfrak{h}^M \subseteq \mathfrak{q}$. Следовательно, $[\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}^M] \subseteq \mathfrak{h}'$.

□

Следствие 5. *Подалгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна/разрешима $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{h}^M$ коммутативна/разрешима.*

Утверждение 2.
- $\varphi \in AutG \Longrightarrow d\varphi(\xi)^M = d\varphi(\xi^M)$.
- *Если подалгебра Ли является идеалом, то ее замыкание Мальцева тоже идеал: $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g} \Longrightarrow \mathfrak{h}^M \lhd \mathfrak{g}$.*

Доказательство.

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{s} = \mathrm{Lie}\, S$, $S \subseteq G$ — подгруппа Ли, $\Longrightarrow d\varphi(\mathfrak{h}) \subseteq d\varphi(\mathfrak{s}) = \mathrm{Lie}\,\varphi(S)$.

  $d\phi(\mathfrak{s})$ — так выглядит любая подалгебра Ли $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$, $d\varphi(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{t}$, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T$.
- Второй пункт следует из первого. Надо применить предыдущий пункт внутренним автоморфизмам группы G, то есть к автоморфизмам сопряжения. Для $\varphi = a_g$ $(a \in G)$, $d\varphi = \mathrm{Ad}(g)$, считаем G связной.

□

Радикал алгебры Ли

Определение 5. *Радикал* алгебры Ли $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ — это наибольший разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$.

Существование: если $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd \mathfrak{g}$ — разрешимые идеалы $\Longrightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \lhd \mathfrak{g}$ — разрешимый идеал.

$\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ — разрешимый, и $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ — разрешимый.

Характеристичность — $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Утверждение 3. *Радикал алгебры Ли $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ замкнут по Мальцеву.*

Доказательство. $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^M$ — разрешимый (по следствию 5) идеалом (по утверждению 2(2)) в $\mathfrak{g}$, и содержит сам радикал. Но так как радикал — наибольший, то $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})^M$. □

Определение 6. Пусть $R \subseteq G$ — связная подгруппа Ли с $\operatorname{Lie} R = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

Свойства:

1. R разрешима

2. R инвариантна относительно $\operatorname{Aut}(G)$.

   Доказательство. Пусть есть автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut}(G) \implies d\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. $\operatorname{Lie}\varphi(R) = d\varphi(\mathfrak{r}(g)) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \implies \varphi(R) = R$.

   □

3. $R \lhd G$.

Определение 7. Радикал группы Ли $R(G)$ — наибольшая связная разрешимая нормальная подгруппа Ли в группе G.

Существование: $R(G) = R$.

В самом деле: $S \lhd G$ — связная разрешимая нормальная подгруппа Ли $\implies \mathfrak{s} \lhd \mathfrak{g}$ — разрешимый идеал $\implies \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \implies S \subseteq R$.

Свойства:

1. $\operatorname{Lie} R(G) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

2. $R(G)$ инвариантен относительно $\operatorname{Aut}(G)$.

3. $R(G) = R(G^0)$. Радикал группы является радикалом связной компоненты единицы. ((1) $\implies$ (3)).

Полупростые группы и алгебры Ли

Определение 8. Связная группа Ли G называется *полупростой*, если её радикал тривиален. $R(G) = \{e\}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *полупростой*, если её радикал тривиален. $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Утверждение 4. *Для связной группы Ли G следующие условия эквивалентны:*

1. *G полупроста.*

2. *$\mathfrak{g}$ полупроста.*

3. *G (соответственно, $\mathfrak{g}$) не содержит нетривиальных связных разрешимых нормальных подгрупп (нетривиальных связных разрешимых идеалов).*

4. *G (соответственно, $\mathfrak{g}$) не содержит нетривиальных связных коммутативных нормальных подгрупп (нетривиальных связных коммутативных идеалов).*

Доказательство. (1) $\Longleftrightarrow$ (2): следует из $\operatorname{Lie} R(G) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

(1), (2) $\Longleftrightarrow$ (3): очевидно.

(3) $\Longrightarrow$ (4): очевидно (коммутативность — частный случай разрешимости).

(4) $\Longrightarrow$ (1), (2):

Предположим, что $R(G) \neq \{e\} \Longrightarrow \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}, \Longrightarrow \exists k : \mathfrak{r}(\mathfrak{g})^{(k)} \neq \{0\} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})^{(k+1)}$ $\Longrightarrow \mathfrak{r}(\mathfrak{g})^{(k)}$ — нетривиальный абелев идеал.

Для групп нужно рассмотреть замыкание Мальцева. $\mathfrak{a} = (\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^{(k)})^M$ — нетривиальный абелев идеал, $\mathfrak{a} = \operatorname{Lie} A$, $A \subseteq G$ — связная нормальная абелева подгруппа Ли. Противоречие.

От противного утверждение доказано.

□

Пример 4. Группа Ли $G = SL_n$ полупроста $\Longleftarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ полупроста $\Longleftarrow$ проста (докажем), коммутативна (из прошлой лекции).

Доказательство. Возьмем произвольный идеал в $\mathfrak{sl}_n$: $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{h} \neq \{0\}$, $\mathfrak{h} \in A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij}$, $A \neq 0$.

Найдем коммутант:

$$[[A, E_{lk}], E_{lk}] = -2a_{kl}E_{lk}, \text{ при } k \neq l.$$

$\Longrightarrow E_{lk} \in \mathfrak{h} \Longrightarrow [E_{ij}, E_{lk}] \in \mathfrak{h}$ линейно порождают всё $\mathfrak{sl}_n \Longrightarrow \mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n$.

Если A диагональна, то $\exists k \neq l$: $a_{kk} \neq a_{ll} \Longrightarrow [A, E_{kl}] = (a_{kk} - a_{ll})E_{kl} \Longrightarrow E_{kl} \in \mathfrak{h}$, а далее см. предыдущий случай.

□

Замечание 3. Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, $R(G/R(G)) = \{e\} \Longrightarrow (G/R(G))^0 = G^0/R(G^0)$ полупроста.

Аналогично для алгебры Ли: $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ полупроста.

Теорема 3 (Леви-Мальцева). *Существует разложение в полупрямую сумму*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \oplus\!\!\!\!\!\!\;\;\rightthreetimes \mathfrak{l},$$

$\mathfrak{l} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ *— полупроста,* $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ *— разрешимый идеал.*

$\mathfrak{l}$ *называется подалгеброй Леви. Определяется однозначно с точностью до действия* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$.

Если G односвязна, то

$$G = R(G) \rightthreetimes L,$$

$L \simeq G/R(G)$ *— полупроста. L называется подгруппой Леви. Определяется однозначно с точностью до действия* $\operatorname{Aut}(G)$. $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$.

Более того, все подгруппы Леви сопряжены в G. А все подалгебры Леви эквивалентны относительно действия $\operatorname{Ad}(G)$.

Пример 5. Пусть V — векторное пространство. $U \subset V$.

$$G = \{g \in GL_n(V) \mid g(U) = U\} = \begin{array}{|c|c|} \hline \circledast & \circledast \\ \hline 0 & \circledast \\ \hline \end{array}, \quad \Longrightarrow$$

$$R(G) = \begin{array}{|c|c|} \hline \lambda E & \circledast \\ \hline 0 & \mu E \\ \hline \end{array}, \quad \lambda\mu \neq 0.$$

Тогда

$$\mathfrak{l} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathrm{tr} = 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{tr} = 0 \\ \hline \end{array} = \mathfrak{sl}_k \bigoplus \mathfrak{sl}_{n-k}.$$

Лекция 3

Комплексификация алгебры Ли над $\mathbb{R}$

Определение 9. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Её *Комплексификация* — это $\mathbb{C}$–алгебра Ли

$$\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}.$$

Если имеется базис $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — базис $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$, $\Longrightarrow$ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — базис $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$. Коммутационные соотношения те же самые. Кроме того,

$$\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{g} \bigoplus i\mathfrak{g},$$

где $\mathfrak{g}, i\mathfrak{g}$ — подпространства над $\mathbb{R}$.

Операция комплексификации однозначна.

Определение 10. *Комплексное сопряжение*

$$\mathfrak{g}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{g}(\mathbb{C}),$$

$$\xi = \eta + i\xi \longmapsto \xi = \eta - i\zeta,$$

где $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$.

Полулинейный инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$:

$$\bar{\lambda\xi} = \bar{\lambda} \cdot \bar{\xi}.$$

Определение 11. Пусть $\mathfrak{h}$ — $\mathbb{C}$–алгебра Ли. $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$ — её $\mathbb{R}$–подалгебра Ли такая, что

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \bigoplus i\mathfrak{g}.$$

Тогда $\mathfrak{g}$ называется *вещественной формой* $\mathfrak{h}$. В этом случае $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}(\mathbb{C})$.

Задать вещественную форму $\Longleftrightarrow$ задать полулинейный инволютивный автоморфизм на $\mathfrak{h}$. В этом случае, $\mathfrak{g} = \{\xi \in \mathfrak{h} \mid \bar{\xi} = \xi\}$.

Версия для групп Ли

Определение 12. Пусть H — $\mathbb{C}$–группа Ли.

Её *вещественная форма* — это $\mathbb{R}$–подгруппа Ли $G \subset H$, удовлетворяющая условиям:

1) $\mathfrak{g}$ — вещественная форма $\mathfrak{h}$,

2) G пересекает все связные компоненты H.

Пример 6. Пусть $H = O_{k,l}(\mathbb{C})$ — 2 компоненты связности, $G = O_{k,l}(\mathbb{R})$ — 4 компоненты связности при $k, l > 0$, B — матрица квадратичной формы.

$$gBg^T = B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Для алгебр Ли:

$$\xi B + B\xi^T = 0 \Longleftrightarrow \xi^T = -B^{-1}\xi B.$$

Свойства:

1. $\mathfrak{s} \lhd \mathfrak{g} \Longleftrightarrow \mathfrak{s}(\mathbb{C}) \lhd \mathfrak{g}(\mathbb{C})$.
2. $\mathfrak{g}'(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}(\mathbb{C})'$.
3. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})(\mathbb{C}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$.
4. $\mathfrak{g}$ коммутативна/разрешима $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ коммутативна/разрешима (следует из свойств 2 и 3).
5. $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})(\mathbb{C}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$.

   Доказательство. Из свойств 1 и 4 вытекает, тчо $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})(\mathbb{C})$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) \Longrightarrow \mathfrak{r}(\mathfrak{g})(\mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$.

   Рассмотрим радикал и возьмем комплексное сопряжение $\mathfrak{r}(\overline{\mathfrak{g}(\mathbb{C})})$ — тоже наибольший разрешимый идеал в $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) \Longrightarrow \mathfrak{r}(\overline{\mathfrak{g}(\mathbb{C})}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}(\mathbb{C})) \Longrightarrow \mathfrak{r}(\mathfrak{g}(\mathbb{C})) = \mathfrak{s}(\mathbb{C})$, где $\mathfrak{s} \lhd \mathfrak{g}$ — разрешимый идеал. $\Longrightarrow \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \Longrightarrow \mathfrak{s}(\mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{g})(\mathbb{C})$ — обратное включение доказано. □

6. $\mathfrak{g}$ полупроста $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ полупроста.
7. Всякое $\mathbb{C}-$представление $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ единственным образом продолжается на $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$. Пусть $\eta, \zeta \in \mathfrak{g}$:

   $$\rho(\eta + i\zeta) = \rho(\eta) + i\rho(\zeta).$$

8. Пусть $R : H \longrightarrow GL(V)$ — $\mathbb{C}-$линейное представление, $G \subset H$ — вещественная форма.

   Тогда вектор $v \in V$ инвариантен относительно $H \Longleftrightarrow$ инвариантен относительно G и $\forall$ подпространства $U \subset V$.

Доказательство. Будем писать $hv = R(h)v$, $\forall h \in H$, $\xi v = dR(\xi)v$, $\forall \xi \in \mathfrak{h}$.

Пусть $g_i \in G$ $(i \in I)$ — представители всех связных компонент H.

$Hv = \{v\} \iff H^0 v = \{v\}$, $g_i v = v$ $\forall i \iff \mathfrak{h}v = \{0\}$, $g_i v = v$, $\forall i$, $\iff gv = \{0\}$, $g_i v = v$ $\forall i \iff G^0 v = \{v\}$, $g_i v = v$, $\forall i \impliedby Gv = \{v\}$. Но также $Hv = \{v\} \impliedby Gv = \{v\}$, и условия оказываются равносильными.

Для подпространств всё аналогично.

$\square$

Разрешимые группы и алгебры Ли

Теорема Ли

Теорема 4 (Ли)**.** *Пусть $R : G \longrightarrow GL(V)$ — $\mathbb{C}-$линейное представление связной разрешимой группы Ли G. Тогда в пространстве V есть одномерное инвариантное подпространство $U \subseteq V$.*

Все условия теоремы существенны.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что группа G односвязна: иначе заменим группу G на её односвязную накрывающую $\widetilde{G}$:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend right, "\widetilde{R}"'] & G \arrow[r, "R"] & GL(V) \end{tikzcd}$$

Индукция по ступени разрешимости группы G.

База индукции — группа G — абелева:

Лемма 5. *Пусть $A_i \in L(V)$ $(i \in I)$ — семейство попарно коммутирующих линейных операторов, то у этого семейства есть общий собственный вектор $v \in V$ для всех A_i.*

Если все A_i полупросты (т.е. диагонализуемы), то существует базис, в котором все A_i записываются диагональными матрицами.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Либо все A_i скалярны, тогда доказывать нечего. Либо $\exists$ нескалярный $A_i \implies \exists$ собственное подпространство $V_\lambda = V_\lambda(A_i) \neq \{0\}$, $\forall j \in I$: $A_i A_j = A_j A_i \implies V_\lambda$ инвариантное подпространство для всех A_j.

По предположению индукции существует общий собственный вектор $v \in V_\lambda$.

Если все A_j полупросты, то в частности:

$$V = V_{\lambda_1} \bigoplus \ldots \bigoplus V_{\lambda_s},$$

где собственные подпространства для A_i, инвариантные относительно всех A_j.

По предположению индукции все A_j одновременно диагонализуемы на каждом $V_{\lambda_k} \implies$ и на всем V. $\square$

$V = \langle v \rangle$, где v — общий собственный вектор для $R(g)$, $g \in G$. База индукции проверена.

Шаг индукции: от группы переходим к коммутанту. $G' \lhd G$ — связная разрешимая нормальная подгруппа Ли. По предположению индукции существует общий собственный вектор $u \in V$ для $R(h)$, $h \in G'$.

$$R(h)u = \lambda(h)u,$$
$$\lambda : G' \longrightarrow \mathbb{C}^{\times} \text{ — гомоморфизим групп Ли.}$$

Отображение λ называют *характером* или *весом группы.*

Весовое подпространство $V_\lambda(G') = \{v \in V \mid R(h)v = \lambda(h)v, \forall h \in G'\}$.

Свойства весовых подпространств:

1. $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — разные веса, то $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_s}$ линейно независимы.

2. G действует на свой коммутант (нормальную подгруппу) G' сопряжениями. $\rightsquigarrow$ действие G на характерах G' (нормальной подгруппы):

$$(g\lambda)(h) = \lambda(g^{-1}hg), \quad \forall g \in G, h \in G'.$$

$R(g)V_\lambda = V_{g\lambda}$: $v \in V_\lambda \Longrightarrow$

$$R(h)R(g)v = R(hg)v = R(g \circ g^{-1}hg)v = R(g)[\lambda(g^{-1}hg)v] = \lambda(g^{-1}hg)R(g)v.$$

Таким образом действие группы G на $Gr(V)$ переставляет весовые подпространства для G' и их конечное число.

G связна $\Longrightarrow$ все весовые подпространства G' инвариантны относительно G. Заменив V на V_λ, можно считать, что G' действует на V скалярными преобразованиями, то есть с помощью характера λ.

Так как $R(G') \subseteq GL(V)' = SL(V)$, то $\det R(h) = \lambda(h)^n = 1$, $(n = \dim V)$. Следовательно, $\operatorname{Im} \lambda \subseteq \sqrt[n]{1}$.

Так как G связна, то $\lambda \equiv 1 \Longrightarrow$ действие G на V сводится к действию абелевой группы G/G' на V. Далее применяем базу индукции.

Доказательство теоремы Ли завершено.

$\square$

Следствие 6. *Существует $G-$инвариантный полный флаг подпространств $V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$, $\dim V_k = k$.*

Доказательство. Существует одномерное инвариантное подпространство V_1.

В V/V_1 существует одномерное подпространство V_2. V_2 — его прообраз в V. И т.д. $\square$

Следствие 7. *В некотором базисе группа $R(G) \subseteq GL(V)$ записываются в виде верхнетреугольных матриц.*

Доказательство. Нужно взять базис, согласованный с флагом из условия первого следствия: первый вектор будет порождать V_1, первые два — V_2 и т.д. И ввиду инвариантности подпространств матрица получится верхнетреугольная. $\square$

Следствие 8. *Неприводимые комплексные представления связных разрешимых групп Ли одномерны.*

Теорема 5 (Ли для алгебр Ли)**.** *Пусть $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — $\mathbb{C}$−линейное представление разрешимой алгебры Ли. Тогда в пространстве V есть одномерное инвариантное подпространство $U \subseteq V$.*

Доказательство. Возьмем замыкание Мальцева разрешимой подалгебры Ли

$$\rho(\mathfrak{g})^M = \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}(V).$$

$\mathfrak{h} = \operatorname{Lie} H$, где $H \subseteq GL(V)$ — связная разрешимая подгруппа Ли.

По теореме Ли существует H−инвариантное одномерное подпространство $U \subseteq V$. Так как U является H−инвариантным, то оно $\mathfrak{h}$–инвариантно. А следовательно, и $\mathfrak{g}$–инвариантно. $\square$

Следствие 9. *В некотором базисе $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \rho(\mathfrak{g}') \subseteq \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \forall \xi \in \mathfrak{g}'$: $\rho(\xi)$ — нильпотентный линейный оператор.*

$\mathfrak{b}_n(\mathbb{C})$ — верхнетреугольные матрицы.

$\mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$ — нильтреугольные матрицы

Теорема Энгеля

Теорема 6 (Энгель)**.** *Пусть $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — $\mathbb{C}$−линейное представление алгебры Ли такое, что $\forall \xi \in \mathfrak{g}$: $\rho(\xi)$ нильпотентен. Тогда $\exists v \neq 0$, $v \in V$, $\rho(\xi)v = 0$ $\forall \xi \in \mathfrak{g}$.*

Следствие 10. *В условиях теоремы Энгеля существует полный флаг подпространств $V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$, $\dim V_k = k$, и $\rho(\xi)V_k \subseteq V_{k-1}$, $\xi \in \mathfrak{g}$, $k = 1, \ldots, n$ ($V_0 = \{0\}$).*

Следствие 11. *В некотором базисе $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$.*

Следствие 12. *В условиях теоремы Энгеля если ρ — точное представление (т.е. инъективно), то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима (и даже нильпотентна).*

Лекция 4

Теорема Энгеля

Теорема 7 (Энгель)**.** *Пусть $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — $\mathbb{C}$−линейное представление алгебры Ли такое, что $\forall \xi \in \mathfrak{g}$: $\rho(\xi)$ нильпотентен. Тогда $\exists v \neq 0$, $v \in V$, $\rho(\xi)v = 0$ $\forall \xi \in \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Индукция по $\dim \mathfrak{g}$.

База: $\dim \mathfrak{g} = 0$. Очевидно.

Шаг: Если $\operatorname{Ker} \rho \neq \{0\} \Longrightarrow$ можно заменить $\mathfrak{g}$ на $\operatorname{Im} \rho$ и применить предположение индукции.

Теперь можно считать, что ядро нулевое, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$.

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — максимальная по включению собственная подалгебра Ли.

Рассмотрим присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$, ограниченное на подалгебру $\mathfrak{h}$:

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$
$$\bar{\operatorname{ad}} = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}} / \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}).$$

Лемма 6. *Если $A \in \mathfrak{gl}(V)$ — нильпотентный линейный оператор на $V \Longrightarrow \operatorname{ad}(A)$ — нильпотентный линейный оператор на $\mathfrak{gl}(V)$. То есть взятие присоединенного оператора сохраняет нильпотентность.*

Доказательство.

$$\operatorname{ad}(A)^n B = [A, [A, \ldots [A, B], \ldots]] = \sum \pm A^k B A^{n-k} = 0 \text{ при достаточно больших } n.$$

(Так как A — нильпотентный оператор, то либо A^k, либо A^{n-k} будут равны нулю. □

В частности, $\forall \xi \in \mathfrak{h}$: $\operatorname{ad}(\xi)$ нильпотентен на $\mathfrak{gl}(V)$, следовательно, и на $\mathfrak{g} \Longrightarrow \bar{\operatorname{ad}}(\xi)$ нильпотентен.

По предположению индукции существует общий ненулевой собственный вектор $\eta \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$:

$\xi \in \mathfrak{h}$: $\bar{\operatorname{ad}}(\xi)(\eta + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \Longrightarrow [\xi, \eta] \subseteq \mathfrak{h}$, т.е. $[\mathfrak{h}, \eta] \subseteq \mathfrak{h} \Longrightarrow \mathfrak{h} \bigoplus \langle \eta \rangle$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$. Но так как $\mathfrak{h}$ — максимальная собственная подалгебра, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus \langle \eta \rangle$, $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$, $\operatorname{codim} \mathfrak{h} = 1$.

Применим предположение индукции к $\rho|_{\mathfrak{h}}$. Тогда $\exists\ v \neq 0$, $v \in V$: $\forall \xi \in \mathfrak{h}$ $\rho(\xi)v = 0$. Рассмотрим все такие векторы:

$$V_0 = \{v \in V \mid \rho(\mathfrak{h})v = 0\} \neq 0 \text{ — } \mathfrak{g}\text{−инвариантное подпространство.}$$

Проверим это: $\forall v \in V_0$ $\forall \zeta \in \mathfrak{g}$ $\forall \xi \in \mathfrak{h}$

$$\xi(\zeta v) = \underbrace{\zeta(\xi v)}_{=0} + \underbrace{[\xi, \zeta]}_{\in \mathfrak{h}} v = 0,$$

$\Longrightarrow \xi v \in V_0$.

Возьмем теперь собственный вектор $v \in V_0$ для $\rho(\eta)\_V_0$. $\rho(\eta)\_V_0$ нильпотентен $\Longrightarrow$ собственное значение равно нулю $\Longrightarrow v$ — искомый вектор.

Доказательство теоремы Энгеля завершено. □

Разложение Жордана

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$, $A = L(V)$.

Теорема 8. *Существует единственное разложение*

$$A = A_s + A_n,$$

где A_s — полупростой (т.е. диагонализуемый), A_n — нильпотентный. $A_sA_n = A_nA_s$.

На каждом корневом подпространстве $V^{\lambda_i} = V^{\lambda_i}(A)$: $A_s = \lambda_i E$.

Лемма 7. *Подпространство $U \subseteq V$ инвариантно относительно $A \Longrightarrow U$ инвариантно относительно A_s и A_n. Более того, $A|_U = A_s|_U + A_n|_U$ — тоже разложение Жордана.*

Доказательство. Если U инвариантно, то $U = U^{\lambda_1} \bigoplus \ldots \bigoplus U^{\lambda_s}$, где U^{λ_i} — корневое подпространство для $A|_U$. $U^{\lambda_i} \subseteq V^{\lambda_i}$. $\Longrightarrow A_s|_{U^{\lambda_i}} = \lambda_i E \Longrightarrow A_s$ сохраняет $U \Longrightarrow A_n$ сохраняет U.

$A_s|_U$ и $A_n|_U$ полупросты и коммутируют.

□

Замечание 4. Без коммутирования единственности не будет.

Лемма 8.

$$\mathrm{ad}(A) = \mathrm{ad}(A_s) + \mathrm{ad}(A_n) \text{ — тоже разложение Жордана.}$$

То есть разложение Жордана согласовано с присоединенным представлением.

Доказательство. Заметим, что эти операторы будут коммутировать. $\mathrm{ad}(A_n)$ — нильпотентен по лемме 7.

Осталось доказать, что $\mathrm{ad}(A_s)$ — полупрост.

В некотором базисе A_s записан с помощью диагональной матрицы $\Longrightarrow \mathrm{ad}(A_s)E_{ij} = [A_s, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$, $\Longrightarrow \mathrm{ad}(A_s)$ диагонализуем.

□

Инвариантное скалярное умножение

Определение 13. *Скалярное умножение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$* — это симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{g}$:

$$(\xi, \eta) \longmapsto (\xi|\eta).$$

Определение 14. Пусть $\mathfrak{g}$ — касательная алгебра G, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$. Скалярное умножение *инвариантно* относительно G, если

$$(\xi|\eta) = (\mathrm{Ad}(g)\xi|\,\mathrm{Ad}(g)\eta), \tag{1}$$

$\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $\forall g \in G$.

Продифференцируем (1) по g в $g = e$:

$$([\zeta, \xi]|\eta) + (\xi|[\zeta, \eta]) = 0,$$

$\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}$. Это равенство — условие инвариантности скалярного умножения относительно алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Перепишем его немного по-другому:

$$(\xi|[\zeta, \eta]) = ([\xi, \zeta]|\eta).$$

Инвариантность скалярного умножения $(\cdot|\cdot)$ относительно $G \Longrightarrow$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. Обратное верно, если G связна.

Пример 7. Пусть $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. Стандартное инвариантное скалярное умножение:

$$(\xi|\eta) = \operatorname{tr}(\xi \cdot \eta).$$

Инвариантность относительно группы Ли $G \subseteq GL(V)$ очевидна, потому что след при сопряжении не меняется.

Пример 8. Пусть $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \rightsquigarrow$ инвариантное скалярное умножение

$$(\xi|\eta)_\rho = \operatorname{tr} \rho(\xi)\rho(\eta).$$

Форма Киллинга

Определение 15. *Форма Киллинга* на $\mathfrak{g}$:

$$(\xi|\eta)_{\mathfrak{g}} = (\xi|\eta)_{\mathrm{ad}} = \operatorname{tr}(\mathrm{ad}(\xi) \cdot \mathrm{ad}(\eta)).$$

Утверждение 5. *1. Форма Киллинга инвариантна относительно всех автоморфизмов алгебры Ли (*$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$*–инвариантна).*

2. $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g} \Longrightarrow (\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}} = (\cdot|\cdot)_{\mathfrak{h}}$.

Доказательство.

1. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $\varphi([\xi, \zeta]) = [\varphi(\xi), \varphi(\zeta)]$,

$$\varphi \circ \mathrm{ad}(\xi) = \mathrm{ad}(\varphi(\xi)) \circ \varphi \Longrightarrow \mathrm{ad}(\varphi(\xi)) = \varphi \circ \mathrm{ad}(\xi) \circ \varphi^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$(\varphi(\xi) \mid \varphi(\eta)) = \operatorname{tr}(\mathrm{ad}(\varphi(\xi))\,\mathrm{ad}(\varphi(\eta))) = \operatorname{tr}(\mathrm{ad}(\xi)\,\mathrm{ad}(\eta)) = (\xi \mid \eta)_{\mathfrak{g}}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{ad}(\varphi(\xi)) = \varphi \circ \mathrm{ad}(\xi) \circ \varphi^{-1}, \quad \mathrm{ad}(\varphi(\eta)) = \varphi \circ \mathrm{ad}(\eta) \circ \varphi^{-1}.$$

2. Здесь для доказательства нужно выбрать согласованный базис.

   В базисе $\mathfrak{g}$ согласован с $\mathfrak{h}$: $\forall \xi \in \mathfrak{h}$

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\xi) = \begin{array}{|c|c|}\hline \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\xi) & \circledast \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \Longrightarrow$$

   $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{h}$ $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\xi)\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\eta)) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}}(\xi)\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}}(\eta))$, а это соответственно равно:

$$(\xi|\eta)_{\mathfrak{g}} = (\xi|\eta)_{\mathfrak{h}}.$$

□

Утверждение 6. *Пусть $(\cdot|\cdot)$ — инвариантное скалярное умножение на $\mathfrak{g}$.*

1. $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g} \Longrightarrow \mathfrak{h}^{\perp} \lhd \mathfrak{g}$.
2. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \perp [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Если $(\cdot|\cdot)$ невырождено, то $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp}$.*

Доказательство. 1. $\forall \xi \in \mathfrak{h}'$, $\eta \in \mathfrak{g}$, $\zeta \in \mathfrak{h}$:

$$([\xi, \eta]|\zeta) = (\xi|\underbrace{[\eta, \zeta]}_{\in \mathfrak{h}}) = 0.$$

   $\Longrightarrow [\xi, \eta] \in \mathfrak{h}^{\perp}$.

2. $\forall \xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $\eta, \zeta \in \mathfrak{g}$

$$(\xi|[\eta, \zeta]) = ([\xi, \eta]|\zeta) = 0.$$

   В невырожденном случае: если $\xi \in \mathfrak{g}$ такие, что $(\xi|[\eta, \zeta]) = 0$ $\forall \eta, \zeta \in \mathfrak{g} \Longrightarrow [\xi, \eta] = 0 \Longrightarrow \xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

□

Критерий разрешимости

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, $(\cdot|\cdot)$ — стандартное скалярное умножение на $\mathfrak{g}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *$\mathfrak{g}$ разрешима*
2. *$\mathfrak{g}' \perp \mathfrak{g}$*
3. *$(\cdot|\cdot) = 0$ на $\mathfrak{g}'$*

Доказательство. Заменив при необходимости V на $V(\mathbb{C})$, можно считать $\mathcal{K} = \mathbb{C}$.

$\boxed{(1) \Rightarrow (2):}$ По следствию теоремы Ли в некотором базисе алгебра $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{b}_n(\mathbb{C})$. А тогда $\mathfrak{g}' \in \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow (\mathfrak{g}|\mathfrak{g}') = 0$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3):}$ очевидно, так как условие 3 более слабое.

$\boxed{(3) \Rightarrow (1):}$ Достаточно доказать, что $\mathfrak{g}'$ разрешим. Заменим $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$. Тогда можно считать, что $(\cdot|\cdot) = 0$ на $\mathfrak{g}$. Нормализатор:

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}(V) \mid [\xi, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}\} \perp \mathfrak{g}'.$$

В самом деле, $\forall \xi \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$, $\eta, \zeta \in \mathfrak{g}$: $(\xi|[\eta,\zeta]) = ([\xi,\eta]|\zeta) = 0$.

$$\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{n}(\mathfrak{g}).$$

Нормализатор замкнут относительно разложения Жордана. Если $\xi \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$, то $\xi_s, \xi_n \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \implies \bar{\xi}_s \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$.

$\xi \in \mathfrak{g}' \implies \bar{\xi}_s \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$:

$$(\xi|\bar{\xi}_s) = |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_s|^2,$$

$\implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0 \implies$ оператор ξ нильпотентен. По следствию теоремы Энгеля в некотором базисе $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) \implies \mathfrak{g}'$ разрешим $\implies \mathfrak{g}$ разрешим. □

Следствие 13 (Необходимое условие)**.** *Если $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ полупроста, то стандартное скалярное умножение $(\cdot|\cdot)$ невырождено на $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Посмотрим на $\mathrm{Ker}(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^{\perp} \lhd \mathfrak{g}$. Само ядро $\mathrm{Ker}(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}}$ разрешимый идеал по теореме, $\implies \mathrm{Ker}(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}} = 0$, то есть скалярное умножение невырождено. □

Контрпример для $\boxed{\Longleftarrow}$:
$\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_n$ — диагональные матрицы.

$$(\xi|\eta) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \text{ — невырождено.}$$

Но $\mathfrak{t}_n$ абелева $\implies$ не полупроста.

Лекция 5

Критерий Картана

Теорема 10 (Критерий Картана)**.**

1. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *разрешима* $\iff (\mathfrak{g}|\mathfrak{g}')_{\mathfrak{g}} = 0$ *(или слабее —* $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}'} = 0$*).*

2. $\mathfrak{g}$ *полупроста* $\iff (\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}}$ *невырождена.*

Доказательство.

1. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима $\iff \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ разрешима. $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

   Форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ индуцирована стандартным скалярным умножением $(\cdot|\cdot)$ на этой линейной алгебре Ли $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

   $$(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}'} = (\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}'}.$$

   Остальное следует из критерия разрешимости.

2. $\boxed{\Longrightarrow:}$ $\mathfrak{g}$ полупроста $\Longrightarrow \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0 \Longrightarrow \mathfrak{g} \simeq \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ — линейная алгебра Ли. $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}}$ происходит из стандартного скалярного умножения на $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

   Утверждение следует из необходимого условия полупростоты линейной алгебры Ли.

   $\boxed{\Longleftarrow:}$ Докажем от противного. Пусть существует абелев идеал $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{g}$.

   $\forall \xi \in \mathfrak{g}$, $\eta \in \mathfrak{a}$ рассмотрим $A = \mathrm{ad}(\xi) \cdot \mathrm{ad}(\eta) \in L(\mathfrak{g})$.

   $\forall \zeta \in \mathfrak{g}$: $A^2(\zeta) = [\xi, [\eta[\xi[\eta, \zeta]]]]$. Имеем: $[\eta, \zeta] \in \mathfrak{a}$, $[\xi[\eta, \zeta]] \in \mathfrak{a} \Longrightarrow [\eta[\xi[\eta, \zeta]]] = 0$ $\Longrightarrow A^2 = 0 \Longrightarrow (\xi, \eta)_{\mathfrak{g}} = \operatorname{tr} A = 0$ (т.к. A нильпотентен).

   Следовательно, $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}} = 0 \Longrightarrow \mathfrak{g}$ полупроста.

□

Полупростые группы и алгебры Ли

Теорема 11. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *полупроста* $\iff \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathfrak{g}_s$*, где* $\mathfrak{g}_i$ *— некоммутативные простые алгебры Ли (идеалы в* $\mathfrak{g}$*).*

При этом $\mathfrak{g}_i \perp \mathfrak{g}_j$ $(i \neq j)$ *относительно* $\forall$ *инвариантного скалярного умножения на* $\mathfrak{g}$*, и любой идеал имеет вид прямой суммы нескольких из слагаемых* $\mathfrak{g}_i$*:*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{i_1} \bigoplus \ldots \bigoplus \mathfrak{g}_{i_k}.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow:}$ $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g} \Longrightarrow \mathfrak{h}^\perp \lhd \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}^\perp$ — ортогональное дополнение относительно формы Киллинга $\Longrightarrow \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp \lhd \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ — разрешим по критерию Картана. Следовательно, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. Кроме того, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\perp] \subseteq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$. $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^\perp$ полупросты по критерию Картана, так как форма Киллинга на них невырождена. Доказательство завершается индукцией по размерности алгебры $\mathfrak{g}$.

$\boxed{\Longleftarrow:}$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathfrak{g}_s$, где $\mathfrak{g}_i$ — некоммутативная простая алгебра Ли. Так как есть разложение в прямую сумму, то существует гомоморфизмы–проекции на каждое слагаемое. Тогда отображение $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}_i$ — сюръекция, где $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_i \lhd \mathfrak{g}_i$.

Если $\mathfrak{h}_i \neq 0$, то $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]$. $\Longrightarrow [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_i] = [\mathfrak{h}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{h}$ (по свойству идеала). $\Longrightarrow \mathfrak{h} = \bigoplus_{\mathfrak{h}_i \neq 0} \mathfrak{g}_i = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ — либо 0, либо некоммутативный идеал. Значит в нашей алгебре $\mathfrak{g}$ нет коммутативных идеалов, следовательно, она полупроста. Осталось доказать ортогональность разных простых идеалов:

$$(\mathfrak{g}_i \mid \mathfrak{g}_j) = ([\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \mid \mathfrak{g}_j) = (\mathfrak{g}_i \mid [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]) = (\mathfrak{g}_i \mid 0) = 0.$$

$\square$

Следствие 14. *Полупростая алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *совпадает со своим коммутантом* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Следствие 15. *Любой идеал и факторалгебра полупростой алгебры Ли является полупростой алгеброй Ли.*

Представления полупростых алгебр Ли

Определение 16. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Фиксируем невырожденное инвариантное скалярное умножение на $\mathfrak{g}$. Теперь с помощью нее можно отождествить $\mathfrak{g}$ с сопряженным $\mathfrak{g}^*$.

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \quad \xi \longleftrightarrow (\xi \mid \cdot).$$

Инвариантность:

$$([\xi, \eta] \mid \zeta) + (\eta \mid [\xi, \zeta]) = 0.$$
$$(\mathrm{ad}(\xi)\eta \mid \zeta) + (\eta \mid \mathrm{ad}(\xi)\zeta) = 0.$$

Инвариантное скалярное умножение $b \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ — $\mathfrak{g}$–инвариантный тензор.

Пространство $E \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$ $(\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*)$. *Элемент Казимира* $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ $(\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*)$.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — базис $\mathfrak{g}$. Двойственный базис $\xi_1^*, \ldots, \xi_n^* \in \mathfrak{g}$, $(\xi_i \mid \xi_j^*) = \delta_{ij}$. Следовательно,

$$E = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes (\xi_i^* \mid \cdot).$$

Следовательно, *элемент Казимира* имеет такой вид:

$$c = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \xi_i^*.$$

Пусть $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — линейное представление. С его помощью можно индуцировать линейное отображение $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow L(V)$ — гомоморфизм представлений алгебры $\mathfrak{g}$ по следующему правилу:

$$\xi \otimes \eta \longmapsto \rho(\xi)\rho(\eta),$$

$$c \longmapsto C_\rho = C_V = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\rho(\xi_i^*).$$

Обозначим C_ρ — оператор Казимира.

Свойства:

1. C_ρ коммутирует с $\rho(\xi)$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$.
2. $(\cdot \mid \cdot) = (\cdot \mid \cdot)_\rho \Longrightarrow \operatorname{tr} C_\rho = \dim \mathfrak{g} \Longrightarrow C_\rho \neq 0$
3. Если к тому же ρ неприводимо, то $C_\rho \in \operatorname{Aut}(V, \rho)$

Доказательство.

1. $\Longleftarrow C_\rho$ — $\mathfrak{g}$–инвариантный элемент $L(V)$. А именно, $\xi \cdot A = \rho(\xi)A - A\rho(\xi) \Longleftarrow$ c — $\mathfrak{g}$–инвариантный элемент $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.
2. $\operatorname{tr} C_\rho = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{tr} \rho(\xi_i)\rho(\xi_i^*) = n = \dim \mathfrak{g}$, так как $\rho(\xi_i)\rho(\xi_i^*) = (\xi_i \mid \xi_i^*) = 1$.
3. $\Longleftarrow$ лемма Шура.

$\square$

Теорема 12 (Вейль)**.** *Все линейные представления полупростой алгебры Ли вполне приводимы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, а $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — её линейное представление. Заменив $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\rho$, можно считать ρ точным, $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V) \Longrightarrow$ $(\cdot \mid \cdot) = (\cdot \mid \cdot)_\rho$ невырождено.

Пусть $U \subseteq V$ — $\mathfrak{g}$–инвариантное подпространство. Надо построить $\mathfrak{g}$–инвариантное дополнение. Сделаем это в двух частных случаях, а потом докажем для общего.

1. $\rho|_U$ неприводимо, $\operatorname{codim} U = 1$.

   $\rho/\rho|_U : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V \setminus U)$ — нулевое, так как $\mathfrak{gl}(V \setminus U)$ абелева, а $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. $\Longrightarrow$ $(\cdot \mid \cdot)_\rho = (\cdot \mid \cdot)_{\rho|_U}$.

   Рассмотрим оператор Казимира
   $$C = C_V = \sum_i \rho(\xi_i)\rho(\xi_i^*) : V \longrightarrow U,$$
   где C_V — оператор Казимира на V, построенный по $(\cdot \mid \cdot)_\rho$.

   $C|_U = C_U$ — оператор Казимира на U, построенный по $(\cdot \mid \cdot)_{\rho|_U} \Longrightarrow C_U \in GL(U) \Longrightarrow V = U \oplus \operatorname{Ker} C$, где $\operatorname{Ker} C$ — инвариантно. Итак, мы нашли инвариантное дополнение в этом случае.

2. $\rho|_U$ любое, $\operatorname{codim} U = 1$.

   Индукция по $\dim U$. Пусть $U \supset W$ — инвариантное подпространство. Обозначим $\bar{V} = V/W \supset \bar{U} = U/W$, $\operatorname{codim} \bar{U} = 1$.

   $\bar{V} = \bar{U} \oplus \bar{U}'$, $\dim \bar{U}' = 1$, $\bar{U}' = U'/W$. Также $U' = W \oplus U'' \Longrightarrow V = U \oplus U''$, где $\dim U'' = 1$.

3. Общий случай.

$$\mathfrak{p} = \{P : V \longrightarrow U \mid P|_U = \lambda E, \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathfrak{gl}(V).$$

$$P = \begin{array}{|c|c|} \hline \lambda E & \circledast \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Возьмем подпространство

$$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q} = \{P : V \longrightarrow U \mid P|_U = 0\}.$$

Заметим, что $\mathrm{ad} \circ \rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$, $\xi \longmapsto$ действие $\xi P = \rho(\xi)P - P\rho(\xi)$.

Итак, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — инвариантные подпространства. $\mathrm{codim}_{\mathfrak{p}}\, \mathfrak{q} = 1 \Longrightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \oplus \langle P \rangle$, ($\langle P \rangle$ — инвариантная прямая коммутирует с $\rho(\xi)$ $\forall \xi$), где P имеет вид

$$P = \begin{array}{|c|c|} \hline E & \circledast \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

$\Longrightarrow V = U \bigoplus \mathrm{Ker}\, P$, $\mathrm{Ker}\, P$ — инвариантное дополнение. Теорема доказана.

□

Следствие 16. *Любое линейное представление полупростой группы Ли вполне приводимо.*

Лекция 6

Следствия теоремы Вейля

Определение 17. Алгебра Ли дифференцирований —

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

Подалгебра Ли внутренних дифференцирований, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$:

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Кроме того, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \lhd \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. В самом деле, $\partial \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$.

$$[\partial, \mathrm{ad}(\xi)](\eta) = (\partial\,\mathrm{ad}(\xi) - \mathrm{ad}(\xi)\partial)(\eta) = \partial[\xi,\eta] - [\xi, \partial\eta] = [\partial\xi, \eta] + [\xi, \partial\eta] - [\xi, \partial\eta] = [\partial\xi, \eta].$$

Следовательно, $[\partial, \mathrm{ad}(\xi)] = \mathrm{ad}(\partial\xi)$.

Утверждение 7. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли $\Longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, $\Longrightarrow \mathfrak{g} \simeq \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ действует на $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ограничением присоединенного представления $ad_{\mathrm{Der}(\mathfrak{g})}$. А из полной приводимости полупростых алгебр Ли вытекает $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — $\mathfrak{g}$–инвариантное дополнение.

Возьмем элемент $\partial \in \mathfrak{m}$, $\xi \in \mathfrak{g}$: $[\partial, \mathrm{ad}(\xi)] = \mathrm{ad}(\partial\xi) \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{m} = 0$. То есть $\mathrm{ad}(\partial\xi) = 0$, но тогда $\partial\xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. Следовательно, $\partial\xi = 0 \Longrightarrow \partial = 0$ в силу произвольности ξ.

Таким образом, $\mathfrak{m} = 0$, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

□

Следствие 17. *Всякая полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является касательной алгеброй полупростой группы Ли $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^\circ$.*

Разложение Жордана в полупростых алгебрах Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая $\mathbb{C}$–алгебра Ли.

Утверждение 8. *Пусть $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ — полупростая линейная алгебра. Тогда $\xi \in \mathfrak{g} \Longrightarrow \xi_s, \xi_n \in \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Рассмотрим нормализатор $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. К тому же $\xi_s, \xi_n \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ (полупростая и нильпотентная части соответственно).

Теперь воспользуемся полной приводимостью. $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{z}$ — $\mathfrak{g}$–инвариантное дополнение.

$$\xi \in \mathfrak{g}, \eta \in \mathfrak{z} \Longrightarrow [\xi, \eta] \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{z} = 0.$$

Следовательно, $\mathfrak{z}$ — централизатор $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(V)$. Получаем:

$$\xi_s = \xi_s' + \zeta, \quad \xi_n = \xi_n' - \zeta,$$

где $\xi_s', \xi_n' \in \mathfrak{g}$, $\zeta \in \mathfrak{z}$.

По теореме Вейля можно разложить V на неприводимые представления $\mathfrak{g}$:

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s.$$

ξ_s, ξ_n сохраняют V_i, коммутируют с $\mathfrak{z}$, так как ξ коммутирует с $\mathfrak{z}$ ($\operatorname{ad}\xi = 0$ на $\mathfrak{z} \Longrightarrow$ $\operatorname{ad}(\xi_s)$ и $\operatorname{ad}(\xi_n)$ равны 0 на $\mathfrak{z}$).

Следовательно, ξ_s', ξ_n', ζ сохраняют V_i, коммутируют с $\mathfrak{z}$. Операторы $\zeta|_{V_i}$ скалярны на всех V_i по лемме Шура.

К тому же

$$\xi_n'|_{V_i} \in \mathfrak{g}|_{V_i} = [\mathfrak{g}|_{V_i}, \mathfrak{g}|_{V_i}] \subseteq \mathfrak{sl}(V_i).$$

Кроме того, $\xi_n|_{V_i}$ нильпотентен $\Longrightarrow$

$$\operatorname{tr}\xi_n|_{V_i} = 0 = \operatorname{tr}\xi_n'|_{V_i} - \operatorname{tr}\zeta|_{V_i} \Longrightarrow \operatorname{tr}\zeta|_{V_i} = 0,$$

но так как $\zeta|_{V_i}$ — скалярный оператор, то $\zeta|_{V_i} = 0\ \forall i \Longrightarrow \zeta = 0$, $\xi_s, \xi_n \in \mathfrak{g}$.

□

Следствие 18. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая $\mathbb{C}$–алгебра Ли. Тогда $\forall \xi \in \mathfrak{g}\ \exists! \xi_s, \xi_n \in \mathfrak{g}$: $\xi = \xi_s + \xi_n$ — разложение Жордана в полупростой алгебре $\mathfrak{g}$, $[\xi_s, \xi_n] = 0$. Кроме того,*

$$(\operatorname{ad}(\xi))_s = ad(\xi_s), \quad (\operatorname{ad}(\xi))_n = \operatorname{ad}(\xi_n).$$

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \supseteq \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}$, и $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ — полупростая линейная алгебра Ли. К тому же $(\operatorname{ad}(\xi))_s, (\operatorname{ad}(\xi))_n \in \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. А следовательно, эти операторы тоже являются присоединенными операторами соответствующими каким–то элементам алгебры $\mathfrak{g}$, которые мы и обозначим ξ_s и ξ_n. И поскольку присоединенное представление осуществляет изоморфизм между алгеброй $\mathfrak{g}$ и алгеброй внутренних дифференцирований, отношения коммутации сохраняются. □

Утверждение 9. *Пусть задано некоторое $\mathbb{C}$–линейное представление полупростой алгебры Ли $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Тогда $\forall \xi \in \mathfrak{g}$:*

$$\rho(\xi)_s = \rho(\xi_s), \quad \rho(\xi)_n = \rho(\xi_n).$$

Доказательство. Из прошлой лекции знаем, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m$, где $\mathfrak{g}_i$ — простой идеал. Обозначим ξ_i — проекция ξ на $\mathfrak{g}_i$.

$$\operatorname{ad}(\xi)|_{\mathfrak{g}_i} = \operatorname{ad}(\xi_i) \Longrightarrow (\xi_s)_i = (\xi_i)_s, \quad (\xi_n)_i = (\xi_i)_n.$$

Кроме того, мы знаем, что любой идеал в полупростой алгебре Ли является прямой суммой нескольких из ее простых идеалов. Поэтому можно считать, что $Ker\rho = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_k$. А тогда $\operatorname{Im}\rho \simeq \mathfrak{g}_{k+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m$ и $\rho(\xi) \longleftrightarrow \xi_{k+1} + \ldots + \xi_m := \xi'$.

Получаем, что $\rho(\xi)$ действует на $\operatorname{Im}\rho$ как $\operatorname{ad}(\xi')$. Тогда $\rho(\xi)_s$ действует на $\operatorname{Im}\rho$ как $\operatorname{ad}(\xi')_s = \operatorname{ad}(\xi_s')$. Следовательно, $\rho(\xi)_s = \rho(\xi_s)$.

Аналогично, $\rho(\xi)_n = \rho(\xi_n)$.

□

Теория представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2$ матриц 2×2 со следом 0. Эта алгебра трехмерна. Стандартный базис:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Коммутационные соотношения:

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f. \tag{2}$$

Замечание 5. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. $0 \neq e, f, h \in \mathfrak{g}$ и удовлетворяют соотношениям 2. $\implies e, f, h$ линейно независимы. Кроме того, $\mathfrak{g} \supseteq \langle e, f, h\rangle \simeq \mathfrak{sl}_2$. ($\mathfrak{sl}_2$–тройка).

Как устроены линейные представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$? По теореме Вейля они вполне приводимы, так как алгебра полупроста. Поэтому вопрос сводится к неприводимым представлениям алгебры $\mathfrak{sl}_2$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Пусть $\rho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(v)$ — $\mathbb{C}$–линейное представление. Элемент h полупрост $\implies \rho(h)$ полупрост $\implies V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda$, где V_λ — собственное подпространство для $\rho(h)$ с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$.

Лемма 9. *Имеем $\rho(e)V_\lambda \subseteq V_{\lambda+2}$, $\rho(f)V_\lambda \subseteq V_{\lambda-2}$ ($\rho(e)$ — повышающий оператор, а $\rho(f)$ — понижающий оператор).*

Доказательство. Доказательство проводится непосредственной проверкой. $v \in V_\lambda$. $w = \rho(e)v$

$$\rho(h)w = \rho(h)\rho(e)v = \rho(e)\rho(h)v + [\rho(h), \rho(e)]v = \rho(e)\lambda v + \rho(\underbrace{[h, e]}_{2e})v = (\lambda + 2)w.$$

$\implies w \in V_{\lambda+2}$. Аналогично для $\rho(f)$. $\square$

Следствие 19. *Существует $v \in V$, $v \neq 0$ такой, что $\rho(h)v = \lambda v$, $\rho(e)v = 0$. Этот вектор называется* старшим вектором. *Аналогично,* младший вектор *— собственный для $\rho(h)$, аннулируется $\rho(f)$.*

Лемма 10. *Пусть v — старший вектор,*
$v' = \rho(f)v$, $v'' = \rho(f)v'$,…, $v^{(k)} = \rho(f)v^{(k-1)}$, …
Тогда

1.
$$\rho(h)v^{(k)} = (\lambda - 2k)v^{(k)},$$
$$\rho(e)v^{(k)} = k(\lambda - k + 1)v^{(k-1)}, (k > 0)$$
$$\rho(f)v^{(k)} = v^{(k+1)}.$$

2. *$\exists n \geqslant 0$: $v, v', \dots, v^{(n)}$ — линейно независимы, $v^{(n+1)} = v^{(n+2)} = \ldots = 0$.*

3. $\lambda = n$.

4. $U = \langle v, v', \dots, v^{(n)} \rangle$ *— неприводимое инвариантное подпространство в* V*.*

Доказательство.

1. Нетривиально только второе равенство. Докажем, что $\rho(e)v^{(k)} = c_{k-1}v^{(k-1)}$ индукцией по k.

   База $k = 1$:

   $$\rho(e)v' = \rho(e)\rho(f)v = \rho(f)\underbrace{\rho(e)v}_{0} + \rho(\underbrace{[e,f]}_{h})v = \lambda v, \quad c_0 = \lambda.$$

   Шаг (от k к $k+1$):

   $$\rho(e)v^{(k+1)} = \rho(e)\rho(f)v^{(k)} = \rho(f)\underbrace{\rho(e)v^{(k)}}_{c_{k-1}v^{(k-1)}} + \rho(h)v^{(k)} = (c_{k-1} + \lambda - 2k)v^{(k)} = c_k v^{(k)}.$$

   Итак, $c_k = \lambda + (\lambda - 2) + (\lambda - 4) + \ldots + (\lambda - 2k) = (k+1)(\lambda - k)$. Делая сдвиг на единицу, получим формулу из условия леммы.

2. Существует такое n, что $v, v', \dots, v^{(n)} \neq 0$, $v^{(n+1)} = v^{(n+2)} = \ldots = 0$. А все ненулевые векторы — это собственные векторы для $\rho(h)$ с разными собственными значениями $\Longrightarrow$ линейно независимы.

3. $0 = \rho(e)v^{(n+1)} = (n+1)(\lambda - n)v^{(n)}, \Longrightarrow \lambda - n = 0 \Longrightarrow \lambda = n$.

4. Любое ненулевое инвариантное подпространство $W \subseteq U$ содержит собственный вектор для $\rho(h)$. А собственные векторы для $\rho(h)$ в U — это только векторы из цепочки $v, v', \dots, v^{(n)}$ и их линейные комбинации. $\Longrightarrow \exists k$: $v^{(k)} \in W$. Следовательно, в W содержатся и остальные векторы, так как их можно получить с помощью понижающих и повышающих операторов $\rho(e)$ и $\rho(f)$ из $v^{(k)}$ $\Longrightarrow W = U$, и тем самым доказана неприводимость.

$\square$

Теорема 13. *Для любого* $n \in \mathbb{Z}_+$ $\exists!$ *неприводимое представление* $\mathfrak{sl}_2$ *размерности* $n+1$*. Оно реализуется в пространстве* $V(n)$ *с базисом* $v, v', \dots, v^{(n)}$ *(*v *— старший вектор,* $v^{(n)}$ *— младший вектор), в котором*

$$\rho(h)v^{(k)} = (n - 2k)v^{(k)}, \tag{3}$$

$$\rho(e)v^{(k)} = k(n + 1 - k)v^{(k-1)}, (k > 0), \tag{4}$$

$$\rho(f)v^{(k)} = v^{(k+1)}. \tag{5}$$

Графически:

$$\xrightarrow{e}$$

$$\begin{tikzcd} v^{(n)} \arrow[loop above, "h"] \arrow[r, leftrightarrow] & v^{(n-1)} \arrow[loop above, "h"] \arrow[r, leftrightarrow] & \dots \arrow[loop above, "h"] \arrow[r, leftrightarrow] & v' \arrow[loop above, "h"] \arrow[r, leftrightarrow] & v \arrow[loop above, "h"] \end{tikzcd}$$

$$\xleftarrow{f}$$

Доказательство. Единственность и структура $V(n)$ вытекают из леммы 10.

Существование: явная проверка того, что операторы $\rho(e)$, $\rho(f)$, $\rho(h)$, определенные формулами (3), (4), (5), образуют $\mathfrak{sl}_2$–тройку.

Неприводимость следует из пункта 4 леммы 10. □

Следствие 20. *Пусть $\rho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — произвольное линейное представление. Тогда все собственные значения $\rho(h)$ — целые, и при $k < 0$: $V_k \hookrightarrow^{\rho(e_k)} V_{k+2}$, $V_{k+2} \twoheadrightarrow_{\rho_{f_k}} V_k$. Аналогично, при $k > 0$: $V_k \hookrightarrow^{\rho(f_k)} V_{k-2}$, $V_{k-2} \twoheadrightarrow_{\rho_{e_k}} V_k$.*

Доказательство. Верно для неприводимых слагаемых $\Longrightarrow$ верно для всего представления. □

Группа $SL_2(\mathbb{C})$ односвязна $\Longrightarrow$ любое линейное представление $\mathfrak{sl}_2$ интегрируется до линейного представления $SL_2(\mathbb{C})$.

Группа $SL_2(\mathbb{C})$ действует в $\mathbb{C}[x, y]$ линейными заменами переменных.

$$\mathbb{C}[x, y] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}[x, y]_n,$$

где $\mathbb{C}[x, y]_n$ — пространство однородных многочленов степени n. Это инвариантное подпространство.

Лемма 11. *$V(n) \simeq \mathbb{C}[x, y]_n$ как линейное представление группы SL_2.*

Доказательство. Группа $SL_2(\mathbb{C})$ действует в $\mathbb{C}[x, y]$ автоморфизмами. Следовательно, $\mathfrak{sl}_2$ действует дифференцированиями.

Известно, что $\mathbb{C}[x, y]_1 = (\mathbb{C}^2)^*$ ($\xi \in \mathfrak{sl}_2$ действует как ξ^*).

$$\begin{aligned} e &: x \longmapsto -y, \quad y \longmapsto 0, \\ f &: x \longmapsto 0, \quad y \longmapsto -x, \\ h &: x \longmapsto -x, \quad y \longmapsto y. \end{aligned}$$

$$\rho(e) = -y\frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho(f) = -x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \rho(h) = y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} \longrightarrow^{e} \\ x^n \longleftrightarrow yx^{n-1} \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow xy^{n-1} \longleftrightarrow y^n \\ \longleftarrow^{f} \end{gathered}$$

Из этого ясно, что получаем неприводимое представление размерности $n+1 \Longrightarrow$ $\mathbb{C}[x, y]_n \simeq V(n)$. □

Замечание 6. Вся теория переносится на вещественные линейные представления алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. (путем комплексификации получаем, что все собственные значения $\rho(h)$ — целые для любого вещественного преставления $\rho \Longrightarrow \rho(h)$ диагонализуем над $\mathbb{R}$).

Лекция 7

Структура полупростых $\mathbb{C}$–алгебр Ли

Будем считать $\mathfrak{g}$ полупростой $\mathbb{C}$–алгеброй Ли, если не оговорено иное.

Фиксируем точное $\mathbb{C}$–линейное представление $\rho : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ (например, $\rho = \mathrm{ad}$). Инвариантное скалярное умножение $(\cdot \mid \cdot) = (\cdot \mid \cdot)_\rho$. Если $\rho = \mathrm{ad}$, то $(\cdot \mid \cdot)$ — форма Киллинга.

Лемма 12. *Полупростая алгебра всегда содержит ненулевые полупростые элементы.*

Доказательство. Иначе все элементы $\mathfrak{g}$ будут нильпотентны ($\xi \in \mathfrak{g}$ не нильпотентный $\Longrightarrow \xi_s \in \mathfrak{g}$, $\xi_s \neq 0$) $\Longrightarrow$ все элементы нильпотентны $\Longrightarrow$ по теореме Энгеля $\mathfrak{g}$ разрешима — противоречие с полупростотой. □

Подалгебра Картана. Корневое разложение

Определение 18. *Подалгебра Картана* — это максимальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$, состоящая из полупростых элементов.

Замечание 7. Вообще говоря, условие коммутативности избыточно. Любая подалгебра Ли $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{gl}(V)$, состоящая из полупростых элементов коммутативна.

Определение 19. $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ коммутативна и состоит из полупростых элементов $\Longrightarrow$ диагонализуема $\Longrightarrow$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \Delta \subset \mathfrak{t}^* \setminus \{0\},$$

где Δ называется *системой корней* $\mathfrak{g}$ *относительно* $\mathfrak{t}$.

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\zeta, \xi] = \alpha(\zeta)\xi, \forall \zeta \in \mathfrak{t}\} \text{ — корневые подпространства (при } \alpha \neq 0).$$
$$\mathfrak{g}_0 = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\zeta, \xi] = 0, \forall \zeta \in \mathfrak{t}\} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$$

Лемма 13. *Верно следующее:* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Доказательство. $\forall \xi \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\eta \in \mathfrak{g}_\beta$, $\zeta \in \mathfrak{t}$:

$$[\zeta, [\xi, \eta]] = [[\zeta, \xi], \eta] + [\xi, [\zeta, \eta]] = (\alpha(\zeta) + \beta(\zeta))[\xi, \eta] \Longrightarrow [\xi, \eta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

□

Лемма 14.

1. $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ *при* $\alpha \neq -\beta$.
2. $\mathfrak{g}_\alpha$ *и* $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ *двойственны относительно* $(\cdot \mid \cdot)$. *В частности,* $(\cdot \mid \cdot)$ *невырождена на* $\mathfrak{g}_0$.

Доказательство.

1. $\forall \xi \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\eta \in \mathfrak{g}_\beta$, $\zeta \in \mathfrak{t}$:
$$([\zeta, \xi] \mid \eta) + (\xi \mid [\zeta, \eta]) = 0 \Longrightarrow (\alpha(\zeta) + \beta(\zeta))(\xi \mid \eta) = 0.$$
Если $\alpha \neq -\beta \Longrightarrow \alpha(\zeta) \neq -\beta(\zeta) \Longrightarrow (\xi \mid \eta) = 0$.

2. Каждая линейная функция на $\mathfrak{g}_\alpha$ представляется в виде скалярного произведениями с каким–то вектором. Но его имеет смысл брать только из $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, потому что на других скалярное произведение равно нулю. Итак, всякая линейная функция на $\mathfrak{g}_\alpha$ представляется в виде скалярного произведения с каким–то вектором из $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Это и означает, что они двойственны. То есть пункт 2 по сути следует из пункта 1 и невырожденности $(\cdot \mid \cdot)$ на $\mathfrak{g}$.

□

Лемма 15. *Централизатор $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$ замкнут относительно разложения Жордана. $\xi \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \Longrightarrow \operatorname{ad} \xi = 0|_\mathfrak{t} \Longrightarrow \operatorname{ad} \xi_s|_\mathfrak{t} = \operatorname{ad} \xi_n|_\mathfrak{t} = 0 \Longrightarrow \xi_s, \xi_n \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$.

В некотором базисе $\operatorname{tr} \rho(\xi_s)\rho(\xi_s) = 0$. Если элемент ξ полупрост $\Longrightarrow \xi \in \mathfrak{t}$ (следует из того, что $\mathfrak{t}$ — максимальная коммутативная подалгебра из полупростых элементов). Если же элемент ξ не полупрост $\Longrightarrow \xi \perp \mathfrak{t}$.

Следовательно, $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t} + \mathfrak{t}^\perp$. Поскольку $(\cdot \mid \cdot)$ на $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$, то размерности $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}^\perp$ дополнительны $\Longrightarrow \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) = \oplus \mathfrak{t}^\perp$. Но так как $\mathfrak{t}^\perp$ состоит из нильпотентных элементов, то по теореме Энгеля $(\cdot \mid \cdot) = 0$ на $\mathfrak{t}^\perp \Longrightarrow \mathfrak{t}^\perp = 0$ (так как на всем централизаторе скалярное произведение невырождено). □

Лемма 16. *Для любого $\alpha \in \Delta$: $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{t}$ одномерно.*

Доказательство. $\forall \xi \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\eta \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\zeta \in \mathfrak{t}$: $(\zeta, \mid [\xi, \eta]) = ([\zeta, \xi] \mid \eta) = \alpha(\zeta)(\xi \mid \eta)$, $\Longrightarrow$ $[\xi, \eta] \perp \operatorname{Ker} \alpha$.

Взяв ξ, η такие, что $(\xi \mid \eta) \neq 0$, $\zeta \notin \operatorname{Ker} \alpha \Longrightarrow (\zeta, \mid [\xi, \eta]) \neq 0 \Longrightarrow [\xi, \eta] \neq 0$. Таким образом, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = (\operatorname{Ker} \alpha)^\perp$.

□

Лемма 17. *Корень $\alpha \neq 0$ на $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$.*

Доказательство. Иначе возьмем $\xi \in \mathfrak{g}$, $\eta \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $(\xi \mid \eta) \neq 0 \Longrightarrow \zeta = [\xi, \eta] \in \mathfrak{t}$, $\zeta \neq 0$. Тогда (в предположении, что $\alpha = 0$)
$$[\zeta, \xi] = \alpha(\zeta)\xi = 0$$
$$[\zeta, \eta] = \alpha(\zeta)\eta = 0$$
$\Longrightarrow \mathfrak{h} = \langle \xi, \eta, \zeta \rangle \subseteq \mathfrak{g}$ — разрешимая подалгебра Ли, и $\mathfrak{h}' = \langle \zeta \rangle$. По следствию теоремы Ли элемент ζ нильпотентен, а с другой стороны он полупрост — противоречие.

□

Для любого корня $\alpha \in \Delta$ можно выбрать элементы $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $f_\alpha = e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha] \in \mathfrak{t}$ так, чтобы $\alpha(h_\alpha) = 2$. В этом случае понятно, что $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$ — $\mathfrak{sl}_2$–тройка. Обозначим $\mathfrak{s}_\alpha = \langle e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha \rangle \simeq \mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{s}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$.

Утверждение 10.

1. $\mathfrak{t}^* = \langle \Delta \rangle$.
2. $\mathfrak{t} = \langle h_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$.
3. $\forall \alpha \in \Delta$: $\mathfrak{g}_\alpha \langle e_\alpha \rangle$ *одномерно.*
4. $\forall \alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \sim \beta \Longrightarrow \alpha = \pm\beta$.

Доказательство.

1) $\bigcap\limits_{\alpha \in \Delta} \operatorname{Ker} \alpha = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, потому что алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста $\Longrightarrow \Delta$ порождает $\mathfrak{t}^*$.

2) $\langle h_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle^\perp = \bigcap\limits_{\alpha \in \Delta} \operatorname{Ker} \alpha = 0$

3), 4) $\mathfrak{m} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus\limits_{\beta = c\alpha} g_\beta$, $c \in \mathbb{C}$. Это подпространство будет инвариантно относительно $\operatorname{ad}(\mathfrak{s}_\alpha)$.

Теория представлений $\mathfrak{sl}_2 \Longrightarrow \operatorname{ad}(h_\alpha)$ действует на $\mathfrak{m}$ с весами 0 (на $\mathfrak{t}$), $\beta(h_\alpha) = 2c \in \mathbb{Z}$ (на $\mathfrak{g}_\beta$). Следовательно, $c \in \mathbb{Z}$ или $c \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Веса $\mathfrak{m}$ расположены симметрично относительно нуля, и если есть вес k, то есть и вес $k - 2$.

Соответственно, если $c \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, то среди весов есть $1 \Longleftarrow \frac{1}{2}\alpha \in \Delta$. Заменив α на $\frac{\alpha}{2}$ можно считать, что все $c \in \mathbb{Z}$.

Разложим $\mathfrak{m}$ в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$–подмодулей:

$$\mathfrak{m} \simeq V(2n_1) \oplus \ldots \oplus V(2n_s).$$

Заметим, что в каждом неприводимом модуле есть ровно один (с точность до пропорциональности) весовой вектор весом ноль. Это означает, что размерность пространство нулевого веса совпадает с количеством этих неприводимых подмодулей. Иными словами, $s = \dim \mathfrak{t}$.

С другой стороны, если кроме нулевого веса есть еще какие-то веса, то обязательно должен быть вес 2. $\mathfrak{t} \cap V(2n_i) = \langle \zeta_i \rangle$. $n_i > 0 \Longleftrightarrow [e_\alpha, \zeta_i] = -\alpha(\zeta_i) e_\alpha \neq 0 \Longrightarrow \exists!\ i$: $n_i > 0$.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} g_{k\alpha} \supset \mathfrak{s}_\alpha = \langle e_{-\alpha} \rangle \oplus \langle h_\alpha \rangle \oplus \langle e_\alpha \rangle \simeq V(2) \Longrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{t} + \mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Теорема доказана.

□

Резюме

Корневое разложение имеет следующий вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} g_\alpha$$

1) Конечное множество $\Delta \subset \mathfrak{t}^* \setminus \{0\}$, $\Delta = -\Delta$, $\langle\Delta\rangle = \mathfrak{t}^*$.

2) $\mathfrak{t}$ — абелева подалгебра в $\mathfrak{g}$

3) $\mathfrak{g}_\alpha = \langle e_\alpha\rangle$, $[\zeta, e_\alpha] = \alpha(\zeta)e_\alpha$ $\forall\zeta \in \mathfrak{t}$, $\alpha \in \Delta$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$.

4) $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$ порождают $\mathfrak{t}$. $\{e_\alpha, e_{-\alpha}, h_\alpha\}$ — $\mathfrak{sl}_2$–тройка.

Модельный пример

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$.

Пусть $\mathfrak{t} = \{\zeta = \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n), \operatorname{tr}\zeta = 0\}$. Введем на картановской подалгебре линейные функции: $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathfrak{t}^*$, $\varepsilon_i(\zeta) = z_i$.

Так как $[\zeta, E_{ij}] = (z_i - z_j)E_{ij}$, то корневые подпространства$\mathfrak{g}_\alpha = \langle E_{ij}\rangle$, $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$.

$$e_\alpha = E_{ij}, \quad e_{-\alpha} = E_{ji}, \quad h_\alpha = E_{ii} - E_{jj}.$$

Утверждение 11. *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} g_\alpha$, которое обладает свойствами (1), (2), (3). Тогда $\mathfrak{g}$ полупроста, $\mathfrak{t}$ – ее подалгебра Картана, а разложение — корневое.*

Доказательство.

1) Начнем с доказательства полупростоты. То есть с того, что в $\mathfrak{g}$ нет ненулевых абелевых идеалов. Предположим, что он есть: $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{g}$ — абелев идеал. Следовательно, $\mathfrak{a} = \mathfrak{t}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_0} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{t}_0 \subseteq \mathfrak{t}$, $\Delta_0 \subseteq \Delta$.

   Для любого веса $\alpha \in \Delta$ и $\zeta \in \mathfrak{t}_0$ рассмотрим коммутатор $[\zeta, e_\alpha] = \alpha(\zeta)e_\alpha \in \mathfrak{a}$. Возможны два случая:

   $$\alpha \in \Delta_0 \Longrightarrow [\zeta, e_\alpha] = 0 \Longrightarrow \alpha(\zeta) = 0 \text{ (т.к. } e_\alpha \neq 0),$$
   $$\alpha \neq \Delta_0 \Longrightarrow e_\alpha \notin \mathfrak{a} \Longrightarrow \alpha(\zeta) = 0.$$

   Следовательно, $\mathfrak{t}_0 \subset \bigcap_{\alpha\in\Delta} \operatorname{Ker}\alpha = 0$.

   Если $\alpha \in \Delta_0$, $[e_\alpha, e_{-\alpha}] \neq 0 \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ — противоречие. Следовательно, Δ_0 пусто. Значит, $\mathfrak{a} = 0$ и $\mathfrak{g}$ полупроста.

2) $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{t}$ диагонализуемо, $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ по свойствам (2) и (3) $\Longrightarrow$ $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана. Остальное очевидно.

□

Упражнение 1. Доказать полупростоту алгебр Ли $\mathfrak{so}_n$ $(n \geqslant 3)$ и $\mathfrak{sp}_n$ (n четно). Найти подалгебры Картана, корневые разложения и системы корней.

Лекция 8

Свойства корневого разложения и системы корней

Лемма 18. *Если* $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta$ $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Доказательство. $\operatorname{ad}(e_\alpha) : \mathfrak{g}_\beta \longrightarrow \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ — инъективно или сюръективно (следует из теории представлений $\mathfrak{sl}_2$). Кроме того, корневые подпространства $\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ одномерны, а вкупе с «инъективно или сюръективно» получаем, что оно биективно. □

Лемма 19. *Для любых* $\alpha, \beta \in \Delta$: $\alpha(h_\beta) \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Это следует из теории представлений $\mathfrak{sl}_2$: $\alpha(h_\beta)$ — это вес $\operatorname{ad}(h_\beta)$ на $\mathfrak{g}_\alpha$, а он является целым. □

Определение 20. *Решетка корней* $Q = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{t}^*$ (все элементы Q принимают целые значения на базисных векторах h_{β_i} пространства $\mathfrak{t}$). Кроме того, $\operatorname{rk} Q = \dim \mathfrak{t}$.

Также мы можем рассмотреть векторное пространство порожденное этой решеткой над полем действительных чисел: $E = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$ — вещественная форма $\mathfrak{t}^*$. Можно выбрать базис $\mathfrak{t}$ так, что Q состоит из линейных функций, целочисленных на базисе, а E из линейных функций, вещественных на базисе.

Рассмотрим сопряженное векторное пространство $E^* = \langle h_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$ — вещественная форма $\mathfrak{t}$.

Лемма 20. *Скалярное умножение* $(\cdot \mid \cdot)$ *положительно определено на* E^*

Доказательство. $(\cdot \mid \cdot) = (\cdot \mid \cdot)_\rho$, $\rho : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, т.е. $(\xi \mid \eta) = \operatorname{tr} \rho(\xi)\rho(\eta)$.

Для любого $\alpha \in \Delta$: $\rho(h_\alpha)$ диагонализуем с собственными значениями $\in \mathbb{Z}$ (следует из теории представлений $\mathfrak{sl}_2$).

$\rho(\mathfrak{t})$ диагонализуем $\Longrightarrow \forall \zeta \in E^*$: $\rho(\zeta)$ диагонализуем с собственными значениями $\in \mathbb{R} \Longrightarrow (\zeta \mid \zeta) = \operatorname{tr} \rho(\zeta)^2 > 0$ при $\zeta \neq 0$. Следовательно, $(\cdot \mid \cdot)$ вещественно на E^* и положительно определена. □

Двойственные корни. Числа Картана

Скалярное умножение на $\mathfrak{t}$ позволяет отождествить $\mathfrak{t}$ с $\mathfrak{t}^*$: каждому вектору мы сопоставляем линейную функцию, которая есть скалярное произведение на этот вектор. При этом отождествлении $E^* \in \mathfrak{t}$ отождествляется с $E \in \mathfrak{t}^*$. Тем самым $h_\alpha \longleftrightarrow \alpha^\vee$, где $h_\alpha \in E^*$, а $\alpha^\vee$ называют *двойственным корнем* или *кокорнем*.

Найдем, как выглядят двойственные корни. Вспомним, что $h_\alpha \perp \operatorname{Ker} \alpha$. Следовательно, $\alpha^\vee \sim \alpha$ (пропорционально). Найдем коэффициент пропорциональности: $(\alpha \mid \alpha^\vee) = \alpha(h_\alpha) = 2$. Подберем вектор:

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha \mid \alpha)}.$$

Определение 21. *Числа Картана* ($\forall \alpha, \beta \in \Delta$):

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle = \alpha(h_\beta) = (\alpha \mid \beta^\vee) = \frac{2(\alpha \mid \beta)}{(\beta \mid \beta)} \in \mathbb{Z} \text{ по лемме 19.}$$

Пусть $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, G — полупростая группа Ли. $\mathfrak{s}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}_\alpha \simeq \mathfrak{sl}_2$. Это можно проинтегрировать до гомоморфизма $\varphi\alpha : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow G$. Он существует, так как группа $SL_2(\mathbb{C})$ односвязна.

Рассмотрим в $SL_2(\mathbb{C})$ элемент

$$n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto n_\alpha = \varphi_\alpha(n) \in G.$$

Хотим понять, как сопряжение с элементом n_α действует на векторах из картановской подалгебры. Возьмем в алгебре $\mathfrak{sl}_2$ элемент

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2, \quad \operatorname{Ad}(n)h = nhn^{-1} = -h \Longrightarrow \operatorname{Ad}(n_\alpha)h_\alpha = -h_\alpha.$$

Теперь изучим, как действует оператор $\operatorname{Ad}(n_\alpha)$ на остальной части картановской подалгебры. Обозначим ее для краткости $\mathfrak{t}^\alpha$ — ядро корня α. $\Longrightarrow [\mathfrak{t}^\alpha, \mathfrak{s}_\alpha] = 0 \Longrightarrow \operatorname{Ad}(\varphi_\alpha(SL_2))|_{\mathfrak{t}^\alpha} = E$.

Следовательно, $\operatorname{Ad}(n_\alpha)|_{\mathfrak{t}}$ — ортогональное отражение относительно гиперплоскости $\mathfrak{t}^\alpha$ вдоль h_α.

$\Longrightarrow \operatorname{Ad}(n_\alpha)|_{\mathfrak{t}}^*$ — ортогональное отражение вдоль α. Его ограничение на E обозначим $r_\alpha \in O(E)$ и $r_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda \mid \alpha \rangle \cdot \alpha$.

Лемма 21. *Для любого $\alpha \in \Delta$: $r_\alpha(\Delta) = \Delta$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\operatorname{Ad}(n_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{r_\beta \beta}$ $\forall \beta \in \Delta$.

Возьмем $\forall \xi \in \mathfrak{g}_\beta$, $\forall \zeta \in \mathfrak{t}$: $[\zeta, \xi] = \beta(\zeta)\xi$,

$$[\operatorname{Ad}(n_\alpha)\zeta, \operatorname{Ad}(n_\alpha)\xi] = \beta(\zeta)\operatorname{Ad}(n_\alpha)\xi,$$
$$[\zeta, \operatorname{Ad}(n_\alpha)\xi] = \beta(\operatorname{Ad}(n_\alpha)^{-1}\zeta)\operatorname{Ad}(n_\alpha)\xi,$$

где $\beta(\operatorname{Ad}(n_\alpha)^{-1}\zeta) = r_\beta\beta(\zeta) \Longrightarrow \operatorname{Ad}(n_\alpha)\xi \in \mathfrak{g}_{r_\beta\beta}$. □

Абстрактные системы корней

Пусть E — произвольное евклидово пространство.

Определение 22. *Система корней* — это конечное подмножество $\Delta \subset E$, удовлетворяющее аксиомам

1) $0 \notin \Delta$, $\Delta = -\Delta$, $\langle \Delta \rangle = E$.

2) $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \sim \beta \Longrightarrow \alpha = \pm\beta$

3) $\forall \alpha, \beta \in \Delta$: $\langle \alpha \mid \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

4) $\forall \alpha, \beta \in \Delta$: $r_\alpha \in \Delta$. $(r_\alpha\beta = \beta - \langle \beta \mid \alpha \rangle \cdot \alpha)$

Определение 23. *Ранг системы корней* $\operatorname{rk}\Delta = \dim E$.

Группа Вейля $W = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \subset O(E)$ — конечная подгруппа (вкладывается в группу перестановок Δ).

Упражнение 2. Проверить, что

$$\Delta^\vee = \{\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha \mid \alpha)} \mid \alpha \in \Delta\}$$

тоже система корней.

Лемма 22. *Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$ (это векторы некоторой длины). Без ограничения общности $|\alpha| \geqslant |\beta|$.*

Имеются следующие возможности:

$\angle(\alpha, \beta)$	$\lvert\alpha\rvert/\lvert\beta\rvert$	$\langle \alpha \mid \beta \rangle$	$\langle \beta \mid \alpha \rangle$
0	1	2	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$	3	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}$	2	1
$\pi/3$	1	1	1
$\pi/2$	$?$	0	0
$2\pi/3$	1	-1	-1
$3\pi/4$	$\sqrt{2}$	-2	-1
$5\pi/6$	$\sqrt{3}$	-3	-1
π	1	-2	-2

Доказательство. Имеем

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 2\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cos\angle(\alpha\beta)$$

$\Longrightarrow \langle \alpha \mid \beta \rangle \cdot \langle \beta \mid \alpha \rangle = 4\cos^2(\alpha\beta) = 0, 1, 2, 3, 4$. Каждое из этих чисел дает варианты для второго и третьего столбца таблицы. В условии леммы выписаны все возможности. Пары $(4, 1)$ и $(-4, -1)$ исключаются по аксиоме 2.

Отношение длин можем восстановить по отношению чисел Картана:

$$\frac{\langle \alpha \mid \beta \rangle}{\langle \beta \mid \alpha \rangle} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}.$$

□

Лемма 23. *Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$: $\alpha \neq \pm\beta$. Если $\angle(\alpha, \beta) \leqslant \pi/2$, то $\alpha \mp \beta \in \Delta$.*

Доказательство. Можно считать, что $|\alpha| \geqslant |\beta|$

$$\implies \quad \langle \alpha \mid \beta \rangle = \pm 1,$$
$$\implies \quad r_\beta \alpha = \alpha - \langle \alpha \mid \beta \rangle \beta = \alpha \mp \beta \in \Delta.$$

□

Определение 24. Пусть $H \subset E$ — гиперплоскость, $0 \in H$, $H \cap \Delta = \varnothing$. H разбивает пространство E на два открытых полупространства E^+ и E^-. *Множество положительных/отрицательных корней* $\Delta^\pm = \Delta \cap E^\pm$, $\Delta^- = -\Delta^+$.

Определение 25. *Простые корни* — корни $\alpha \in \Delta^+$ такие, что $\alpha \neq \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$, $k > 1$, $\alpha_i \in \Delta^+$. Множество простых корней обозначим $\Pi \subseteq \Delta^+$.

Замечание 8.

1) Простые корни существуют (например, корни минимальной высоты над H) и любой положительный корень есть сумма простых (в разложении α высоты $\alpha_i <$ высоты α и процесс не может продолжаться бесконечно).

2) Для любого корня α можно выбрать разбиение $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ так, чтобы α стал простым.

Лемма 24.

1) $\alpha, \beta \in \Pi \implies \angle(\alpha, \beta) \geqslant \frac{\pi}{2}$.

2) Π *— базис пространства E и решетки Q.*

Доказательство.

1) Иначе $\alpha - \beta \in \Delta$. Можно считать $\alpha - \beta = \gamma \in \Delta^+ \implies \alpha = \beta + \gamma$ — противоречие.

2) Очевидно, что Π порождает Δ^+ относительно операции сложения. Следовательно, Π порождает Q и E.

   Осталось убедиться, что множество простых корней линейно независимо. Докажем от противного. Если линейная зависимость на Π есть, то она имеет вид
   $$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k - b_1\beta_1 - \ldots - b_l\beta_l = 0,$$
   где $a_i, b_j > 0$, $\alpha_i, \beta_j \in \Pi$, $k, l > 0$. Рассмотрим
   $$\lambda = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l \in E^+.$$
   Найдем скалярный квадрат:
   $$(\lambda \mid \lambda) = \sum_{i,j} \underbrace{a_i b_j}_{>0} \underbrace{(\alpha_i \mid \beta_j)}_{\leqslant 0} \leqslant 0 \text{ — противоречие.}$$

□

Лемма 25. *Если $\alpha \in \Pi$, то $r_\alpha(\Delta^+ \setminus \{\alpha\}) = \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$*

Доказательство. Пусть $\beta \in \Delta^+$, $\beta \neq \alpha$. Следовательно,
$$r_\alpha \beta = \beta - \langle \beta \mid \alpha \rangle \cdot \alpha = \beta - k\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Если $r_\alpha = \gamma \in \Delta^-$, то $k\alpha = \beta + \gamma$. β и γ выражаются через Π, не только через α. Тогда выходит, что Π линейно зависимо — противоречие. □

Лекция 9

Группа Вейля

Определение 26. *Группа Вейля* $W = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Delta\rangle \subset O(E)$ — конечная подгруппа (вкладывается в группу перестановок Δ).

Теорема 14. *Группа Вейля равна $W = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Pi\rangle$ и действует на множестве всех систем положительных (простых) корней просто транзитивно.*

Доказательство. 1) Транзитивность.

Пусть Δ^+ и $\widetilde{\Delta^+}$ — две системы положительных корней в Δ. Так как это разные системы, то $\Delta^+ \cap \widetilde{\Delta^-} \neq \varnothing$. Следовательно, $\exists \alpha \in \Pi \cap \widetilde{\Delta^-}$.

Рассмотрим корневое отражение $r_\alpha\Delta^+ = (\Delta^+ \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\alpha\}$ — тоже система положительных корней. Также рассмотрим $r_\alpha\Delta^+ \cap \widetilde{\Delta^-} = \Delta^+ \cap \widetilde{\Delta^-} \setminus \{\alpha\}$. Продолжая, можем построить цепочку:

$$\Delta^+ \xrightarrow{r_\alpha} r_\alpha\Delta^+ \xrightarrow{r_\beta} \ldots \xrightarrow{r_\gamma} w\Delta^+ ,$$

где $w = r_\gamma \ldots r_\beta r_\alpha \in W$. Постепенно уменьшая до пустого множества пересечение $w\Delta^+ \cap \widetilde{\Delta^-}$, в итоге получим $w\Delta^+ = \widetilde{\Delta^+}$. Транзитивность доказана.

2) Уточнение: можно считать, что $w \in W' = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Pi\rangle$. Далее индукция по $|\Delta^+ \cap \widetilde{\Delta^-}|$ с очевидной базой.

Шаг:

$$\Delta^+ \xrightarrow{w'} \widetilde{\widetilde{\Delta^+}} \xrightarrow{r_\gamma} \widetilde{\Delta^+} ,$$

где $w = r_\gamma w'$. По предположению индукции можно считать, что $w' \in W'$, $\gamma \in \widetilde{\widetilde{\Pi}}(= w'\Pi)$ — система простых корней в $\widetilde{\widetilde{\Delta^+}}$. Следовательно, $\exists \delta \in \Pi$: $\gamma = w'\delta$ $\Longrightarrow r_\gamma = w' r_\delta (w')^{-1} \Longrightarrow w = w' r_\delta \in W'$.

3) Докажем, что $W = W'$. Для любого $\alpha \in \Delta$ $\exists \widetilde{\Delta^+} \supset \widetilde{\Pi} \ni \alpha$. С другой стороны $\exists w \in W'$: $\widetilde{\Delta^+} = w\Delta^+$, $\widetilde{\Pi} = w\Pi$.

Следовательно, $\exists \beta \in \Pi$: $\alpha = w\beta \Longrightarrow r_\alpha = w r_\beta w^{-1} \in W'$.

4) Тривиальность стабилизатора.

Пусть $w \in W$, $w \neq e$. Найдем такой положительный корень α такой, что $w\alpha \in \Delta^- \Longrightarrow w\Delta^+ \neq \Delta^+$. Выберем среди разложений w минимальное по длине:

$$w = r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_l}, \quad r_{\alpha_1}, \ldots, r_{\alpha_l} \in \Pi, \quad l = \min .$$

Докажем, что $w\alpha_l \in \Delta^-$. От противного: иначе $\exists k$:

$$r_{\alpha_k} \ldots r_{\alpha_l}(\alpha_l) \in \Delta^+,$$
$$\underbrace{r_{\alpha_k} \ldots}_{w'} r_{\alpha_l}(\alpha_l) \in \Delta^-.$$

$\Longrightarrow w'\alpha_l = \beta \in \Delta^+$, $r_{\alpha_k}(\beta) \in \Delta^- \Longrightarrow \beta = \alpha_k$.

Следовательно,

$$w = w'' r_{\alpha_k} w' r_{\alpha_l} = w'' r_{\alpha_k} \underbrace{w' r_{\alpha_l} (w')^{-1}}_{r_{\alpha_k}} w' = w'' w'.$$

Получили более короткое разложение. Противоречие с минимальностью длины.

□

Следствие 21. *Система корней восстанавливается по системе простых корней*

$$\Delta = W\Pi.$$

Итак, мы по каждой полупростой $\mathbb{C}$–алгебре Ли построили систему корней, а по этой СК — систему простых корней однозначно с точностью до эквивалентности и обратно. Тогда закономерны вопросы:

- Какие существуют системы простых корней, и как их описать?
- Насколько однозначно построение системы корней по полупростой $\mathbb{C}$–алгебре Ли, и верно ли обратное соответствие?

Эквивалентность систем корней

Определение 27. Системы корней $\Delta \subset E$ и $\Delta' \subset E'$ *эквивалентны*, если существует линейный изоморфизм $\varphi : E \longrightarrow E'$ (не обязательно изометрия), что $\varphi(\Delta) = \Delta'$ и сохраняет числа Картана, то есть $\forall \alpha, \beta \in \Delta$: $\langle \alpha \mid \beta \rangle = \langle \varphi(\alpha) \mid \varphi(\beta) \rangle$.

Определение 28. Множество векторов $S \subset E$ *разложимо*, если $E = E_1 \overset{\perp}{\bigoplus} E_2$, $S = S_1 \sqcup S_2$, и $S_i = S \cap E_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$.

Существует единственное разложение $\Delta = \Delta_1 \sqcup \ldots \sqcup \Delta_s$, где Δ_i неразложимы, и $\Delta_i \perp \Delta_j$ при $i \neq j$.

Соответственно, $E = E_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \ldots \overset{\perp}{\bigoplus} E_s$, где $E_i = \langle \Delta_i \rangle$. Каждая Δ_i — система корней в E_i.

Лемма 26. *Линейный изоморфизм* $\varphi : E \longrightarrow E'$ *задает* $\Delta \sim \Delta' \Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, s$: $\varphi(\Delta_i) = \Delta'_i$ *неразложимо,* $\Delta'_i \perp \Delta'_j$ *и* $\varphi : E_i \longrightarrow E'_i = \langle \Delta'_i \rangle$ *— преобразование подобия.*

Доказательство. Неразложимость $\Longleftrightarrow$ любые два вектора α и β можно соединить цепочкой $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k = \beta$ так, что $\forall i$: $(\alpha_i \mid \alpha_{i+1}) \neq 0 \Longleftrightarrow$

$$\langle \alpha_i \mid \alpha_{i+1} \rangle = \frac{2(\alpha_i \mid \alpha_{i+1})}{(\alpha_{i+1} \mid \alpha_{i+1})} \neq 0.$$

Изоморфизм φ сохраняет $\langle \alpha_i \mid \alpha_{i+1} \rangle$ и $\langle \alpha_{i+1} \mid \alpha_i \rangle \Longrightarrow$ сохраняет

$$\frac{\langle \alpha_i \mid \alpha_{i+1} \rangle}{\langle \alpha_{i+!} \mid \alpha_i \rangle} = \frac{|\alpha_i|^2}{|\alpha_{i+1}|^2} \Longrightarrow \text{ сохраняет } \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Знаем, что

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle = 2\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cos\angle(\alpha\beta) \Longrightarrow \text{ сохраняет } \angle(\alpha\beta).$$

□

Лемма 27. *Система корней Δ неразложима $\Longleftrightarrow$ когда система простых корней $\Pi \subset \Delta$ неразложима.*

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$: $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, $\Delta_1 \perp \Delta_2$, где Δ_1, Δ_2 — тоже системы корней $\Longrightarrow \Delta^+ = \Delta_1^+ \sqcup \Delta_2^+$ и $\Pi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2$, где $\Pi_i = \Pi \cap \Delta_i$ — система простых корней в Δ_i.

$\boxed{\Longrightarrow}$: $\Pi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2$, $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longrightarrow \Delta = W\Pi$, $W = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle = W_1 \times W_2$, где $W_i = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Pi_i \rangle$.

Получаем $\Delta = W\Pi = W_1\Pi_1 \sqcup W_2\Pi_2 = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, $\Delta_1 \perp \Delta_2$. □

Диаграммы Дынкина

Пусть дана система простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

- Π — базис пространства E.
- Простые корни расположены друг относительно друга под тупым или прямым углом, т.е. $a_{ij} = \langle \alpha_i \mid \alpha_j \rangle = 2$ (при $i = j$) или $\leqslant 0$ (при $i \neq j$).
- $\{a_{ij}, a_{ji}\} = \{0, 0\}, \{-1, -1\}, \{-1, -2\}, \{-1, -3\}$.

Определение 29. *Матрица Картана*

$$A = A(\Pi) = A(\Delta) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \frac{2(\alpha_i \mid \alpha_j)}{(\alpha_j \mid \alpha_j)}$$

$$\Longrightarrow A = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,\mathrm{diag}(\frac{2}{|\alpha_1|^2}, \ldots, \frac{2}{|\alpha_n|^2}),$$

где G — матрица Грамма. Отсюда следует, что $\det A > 0$.

Определение 30. *Диаграмма (или схема) Дынкина $D(\Pi) = D(\Delta)$* — граф с вершинами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, которые соединены ребрами по соответствующему правилу:

α_i $\quad$ α_j	Условие
$\bullet \qquad \bullet$	$a_{ij} = a_{ji} = 0$
$\bullet$ —— $\bullet$	$a_{ij} = a_{ji} = -1$
$\bullet \Longleftarrow \bullet$	$a_{ij} = -1$, $a_{ji} = -2$
$\bullet \Lleftarrow \bullet$	$a_{ij} = -1$, $a_{ji} = -3$

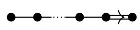
Стрелки ведут от более длинного корня к более короткому. Если ребро простое, то длины равны. Если ребра нет, то между длинами нет никаких соотношений.

Замечание 9. Диаграмма Дынкина определяет A, Π, Δ (с точностью до эквивалентности).

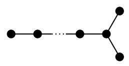
Замечание 10. Диаграмма Дынкина связна $\iff$ Π неразложима ($\iff$ Δ неразложима).

Теорема 15 (без доказательства)**.** *Неразложимые системы корней классифицируются с точностью до эквивалентности диаграммами Дынкина следующего вида:*

A_n

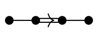
B_n 

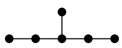
C_n 

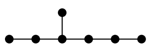
D_n 

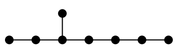
Для A_n — ($n \geqslant 1$), B_n — ($n \geqslant 2$), C_n — ($n \geqslant 2$), D_n — ($n \geqslant 3$). Также есть пять отдельных случаев:

G_2 

F_4 

E_6 

E_7 

E_8 

Пример 9. Пусть

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \supset \mathfrak{t} = \mathfrak{t}_n \cap \mathfrak{sl}_n = \{\zeta = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_n \end{pmatrix} \mid z_1 + \ldots + z_n = 0\}.$$

Тогда система корней такова:

$$\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}, \quad \varepsilon_i(\zeta) = z_i.$$

Инвариантное скалярное умножение: $(\xi \mid \eta) = \operatorname{tr}(\xi\eta)$ — можно рассматривать на всей $\mathfrak{t}_n$.

$$E_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, \ldots, n) \text{ — о/н базис в } \mathfrak{t}_n.$$

Тогда $\varepsilon_i(\zeta) = (E_{ii} \mid \zeta)$. $\Longleftarrow \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — о/н базис в $\mathfrak{t}_n^*$. Нас интересуют матрицы со следом ноль:

$$\mathfrak{t}_n = \mathfrak{t} \bigoplus_{\perp} \mathfrak{z} \Longrightarrow \mathfrak{t}_n^* = \mathfrak{t}^* \bigoplus_{\perp} \mathfrak{z}^*$$

где $\mathfrak{t}$ — диагональные матрицы со следом 0, $\mathfrak{z}$ — скалярные матрицы, $\mathfrak{t}^*$ — аннулятор $\mathfrak{z}$, а $\mathfrak{z}$ — аннулятор $\mathfrak{t}$.

$$\mathfrak{t}^* = \langle \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j \rangle_{\mathbb{C}},$$
$$\mathfrak{t}^* \supset E = \langle \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Если есть корень $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \Longrightarrow r_\alpha : \varepsilon_i \longleftrightarrow \varepsilon_j$, $\varepsilon_k \longmapsto \varepsilon_k$ $(k \neq i, j)$. Следовательно, $W \simeq \{\text{перестановки} \varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n\} = S_n$. Выбираем гиперплоскость H:

$$E \supset H = \{\lambda \in E \mid \lambda(\zeta) = 0\}, \quad H \cap \Delta = \varnothing \Longleftrightarrow z_1, \ldots, z_n \text{ все попарно различны.}$$

Пусть $z_{k_1} > z_{k_2} > \ldots > z_{k_n}$. Тогда

$$\Delta^+ = \{\varepsilon_{k_i} - \varepsilon_{k_j} \mid i < j\}.$$

Подействовав группой Вейля W, можно считать, что $z_1 > z_2 > \ldots > z_n$ и

$$\Delta^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\},$$
$$\Pi = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n\}.$$

Посчитаем число Картана:

$$\langle \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2} \rangle = \frac{2(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2})}{|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}|^2} = -1 \Longrightarrow \text{все ребра простые.}$$

Получили диаграмму Дынкина типа A_{n-1}, где в качестве узлов набор Π. Соответственно, матрица Картана будет равна

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Доказать, что система корней $\mathfrak{so}_{2n+1}$ имеет тип B_n, $\mathfrak{sp}_{2n}$ имеет тип C_n, $\mathfrak{so}_{2n}$ имеет тип D_n.

Лекция 10

Вопрос об однозначности системы корней

Вопросы, возникшие при изучении абстрактных систем корней и получения их классификации:

- Однозначно ли определена система корней данной полупростой $\mathbb{C}$–алгебры Ли?
- Восстанавливается ли полупростая $\mathbb{C}$–алгебра Ли по своей системе корней?
- Всякая ли абстрактная система корней соответствует некоторой полупростой $\mathbb{C}$–алгебре Ли?

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая $\mathbb{C}$–алгебра Ли, а Δ — ее система корней.

$$\mathfrak{g} \quad \underbrace{\rightsquigarrow}_{\text{выбор подалгебры Картана}} \quad \Delta.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, G — полупростая $\mathbb{C}$–группа Ли, действует на $\mathfrak{g}$ внутренними автоморфизмами, т.е. посредством Ad.

Теорема 16. *Все картановские подалгебры в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ сопряжены группой* $\mathrm{Ad}(G)$*, т.е. переводятся друг в друга внутренними автоморфизмами*

Доказательство теоремы будет приведено позже.

Следствие 22. *Все системы корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающие разным картановским подалгебрам эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) : \mathfrak{t}_1 \longrightarrow \mathfrak{t}_2$ сохраняет $(\cdot \mid \cdot)$. Корневые подпространства для $\mathfrak{t}_1$ переходят в Корневые подпространства для $\mathfrak{t}_2$. Изоморфизм $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) : \mathfrak{t}_1 \longrightarrow \mathfrak{t}_2$ индуцирует $\mathfrak{t}_1^* \longrightarrow \mathfrak{t}_2^*$ и $\mathfrak{t}_1^* \supset \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2 \subset \mathfrak{t}_2^*$. ☐

Итак, все системы корней данной алгебры Ли эквивалентны.

Подготовительные леммы для доказательства теоремы 16

Пусть $\xi \in \mathfrak{g}$ — полупростой элемент $\Longrightarrow$ существует картановская подлалгебра $\mathfrak{t} \ni \xi \Longrightarrow \mathfrak{z}(\xi) \supset \mathfrak{t}$.

Определение 31. Полупростой элемент $\xi \in \mathfrak{g}$ называется *регулярным*, если $\mathfrak{z}(\xi)$ — картановская подалгебра (единственная, содержащая ξ).

Множество регулярных полупростых элементов будем обозначать $\mathfrak{g}^{rs} \subset \mathfrak{g}$.

Упражнение 4. Элемент $\xi \in \mathfrak{g}^{rs} \Longleftrightarrow \xi$ содержится в единственной подалгебре Картана.

Как выглядят регулярные элементы в данной картановской подалгебре?

Пусть $\xi \in \mathfrak{t} \Longrightarrow \mathfrak{z}(\xi) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus\limits_{\alpha(\xi)=0} \mathfrak{g}_\alpha$. Таким образом, множество регулярных элементов в $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t}^{reg} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}^{rs} = \{\xi \in \mathfrak{t} \mid \alpha(\xi) \neq 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}.$$

Лемма 28. *Множество регулярных полупростых элементов $\mathfrak{g}^{rs}$ является открытым подмножеством нашей алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathfrak{g}^{rs}$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\xi)$. Рассмотрим отображение действия

$$\varphi : G \times \mathfrak{t}^{reg} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad \varphi(g, \zeta) = \mathrm{Ad}(g)\zeta.$$

Группа G действует умножением слева на $G \times \mathfrak{t}^{reg}$ и через Ad на алгебре $\mathfrak{g}$. Итак, отображение φ является G–эквивариантным.

Докажем, что φ — субмерсия. Достаточно проверить в точках вида (e, ξ) — это следует из эквивариантности.

$$\mathrm{d}_{(e,\xi)}\,\varphi : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{g},$$
$$(\eta, \zeta) \longmapsto \mathrm{ad}(\eta)\xi + \zeta = [\eta, \xi] + \zeta.$$

Возьмем корневой вектор

$$(e_\alpha, 0) \longmapsto [e_\alpha, \xi] = -\alpha(\xi)e_\alpha \Longrightarrow \mathrm{Im}\,\mathrm{d}\,\varphi \supset \mathfrak{g}_\alpha,$$
$$(0, \zeta) \longmapsto \zeta \Longrightarrow \mathrm{Im}\,\mathrm{d}\,\varphi \supset \mathfrak{t}.$$

Следовательно, φ — субмерсия $\Longrightarrow \varphi$ — открыто. Таким образом, образ является открытым: $\xi \in \mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathfrak{g}^{rs}$. □

Определение 32. Элемент $\xi \in \mathfrak{g}$ (не обязательно полупростой) называется *регулярным* существует окрестность $\xi \in U \subset \mathfrak{g}$ такая, что $\forall \eta \in U$: $\dim \mathfrak{z}(\eta) = \dim \mathfrak{z}(\xi)$.

Множество регулярных элементов $\mathfrak{g}^{reg} \subset \mathfrak{g}$ открыто в силу определения. Кроме того, $\mathfrak{g}^{rs} \subset \mathfrak{g}^{reg}$ — следует из доказательства леммы 28: $\forall \eta \in U = \mathrm{Im}\,\varphi$, $\eta = \mathrm{Ad}(g)\zeta$, $\zeta \in \mathfrak{t}^{reg} \Longrightarrow \zeta(\eta) = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{z}(\zeta) = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}$. Централизатор $\mathfrak{z}(\eta)$ имеет ту же размерность, что и $\mathfrak{z}(\xi) = \mathfrak{t}$.

Вообще говоря, $\mathfrak{g}^{rs}$ — множество всех полупростых элементов в $\mathfrak{g}^{reg}$.

Лемма 29. *Множество регулярных элементов можно определить так:*

$$\mathfrak{g}^{reg} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \dim \mathfrak{z}(\xi) = \min = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}\}.$$

Это множество является открытым, плотным и связным.

Доказательство. Обозначим через $r := \min\limits_{\xi \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{z}(\xi)$, $\dim \mathfrak{g} = n$.

$$\mathfrak{z}(\xi) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}(\xi) \Longrightarrow \dim \mathfrak{z}(\xi) = n - \mathrm{rk}\,\mathrm{ad}(\xi),$$
$$\dim \mathfrak{z}(\xi) = \min = r \Longleftrightarrow \mathrm{rk}\,\mathrm{ad}(\xi) = \max = n - r.$$

Введем обозначение:

$U = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \dim \mathfrak{z}(\xi) = r\} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \exists$ ненулевой минор м–цы $\mathrm{ad}(\xi)$ порядка $n - r\}$.

Для доказательства второй части утверждения используем вспомогательную лемму:

Лемма 30. *Пусть задан набор многочленов $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \Longrightarrow$*

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\}$$

замкнуто, нигде не плотно. $U = \mathbb{C}^n \setminus X$ открыто, плотно, связно.

Доказательство вспомогательной леммы. Замкнутость X и открытость U очевидна. Докажем, что U всюду плотно.

Для любых $\xi \in \mathbb{C}^n$, $y \in U$ рассмотрим $\mathbb{C}$–прямую $L = \{tx + (1-t)y \mid t \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$. Тогда $\forall i$: $f_i|_L \in \mathbb{C}[t]$ имеет конечное число корней или $\equiv 0 \Longrightarrow X \cap L$ конечно. Следовательно, существует непрерывная кривая $C \subset L$, $C \ni x, y$ и $C \setminus \{x\} \subset U$. Отсюда следуют остальные утверждения леммы.

Доказательство вспомогательной леммы завершено. ☐

В основной лемме $U = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \dim \mathfrak{z}(\xi) = r\}$ открыто, плотно и связно по лемме 30. Следовательно, $U \subseteq \mathfrak{g}^{reg}$.

Допустим, что $g^{reg} \setminus U \neq \varnothing$. Пусть $\xi \in \mathfrak{g}^{reg}$, тогда по определению существует окрестность $\xi \in U' \subset \mathfrak{g}$, $\eta \in U'$ такая, что $\dim \mathfrak{z}(\eta) = \dim \mathfrak{z}(\xi)$. Тогда $U \cap U' \neq \varnothing$. Возьмем $\eta \in U \cap U' \Longrightarrow \dim \mathfrak{z}(\xi) = \dim \mathfrak{z}(\eta) = r$. Следовательно, $\mathfrak{g}^{reg} = U$.

Доказательство леммы завершено. ☐

Следствие 23. *Все картановские подалгебры в $\mathfrak{g}$ имеют* $\dim = r$. *(т.к. $\mathfrak{g}^{rs} \subset \mathfrak{g}^{reg}$).*

Упражнение 5. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ описать $\mathfrak{g}^{rs}$ и $\mathfrak{g}^{reg}$ в терминах ЖНФ.

Лемма 31. *Множество регулярных полупростых элементов*

$$\mathfrak{g}^{rs} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(\xi) \text{ имеет с.зн. 0 кртаности } r\}.$$

Более того, r — это наименьшая возможная кратность.

Доказательство. Элемент $\xi \in \mathfrak{g}^{rs} \Longleftrightarrow \mathrm{ad}(\xi)$ диагонализуем и $\mathrm{rk} = n - r$. Отсюда следует, что собственное значение имеет кратность r.

В обратную сторону: $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ набор собственных значений для $\mathrm{ad}(\xi)$ и $\mathrm{ad}(\xi_s)$ одинаков (с учетом кратности). Если 0 имеет кратность r для оператора $\mathrm{ad}(\xi)$, то $\xi_s \in \mathfrak{g}^{rs}$ $\Longrightarrow \mathfrak{z}(\xi_s)$ — картановская подалгебра, содержащая ξ_n. Но картановская подалгебра состоит только из полупростых элементов $\Longrightarrow \xi_n = 0$, и $\xi = \xi_s$, что и требовалось доказать. ☐

Лемма 32. *Множество регулярных полупростых элементов $\mathfrak{g}^{rs}$ открыто, плотно и связно.*

Доказательство. Для любого $\xi \in \mathfrak{g}$ рассмотрим характеристический многочлен $\mathrm{ad}(\xi)$

$$\chi_{\mathrm{ad}(\xi)}(t) = T^n + f_1(\xi)t^{n-1} + \ldots + f_n(\xi),$$

где коэффициенты таковы

$$f_1(\xi) = -\operatorname{tr}\mathrm{ad}(\xi), \ldots, f_n(\xi) = (-1)^n \det \mathrm{ad}(\xi), f_i \text{ — многочлены от координат } \xi.$$

По лемме 31

$$\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}^{rs} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid f_{n-r}(\xi) = \ldots = f_n(\xi) = 0\} \text{ — замкнуто и нигде не плотно.}$$

Тогда его дополнение $\mathfrak{g}^{rs}$ открыто, всюду плотно и связно по лемме 30. ☐

Доказательство теоремы 16

Напомним формулировку теоремы 16:

Все картановские подалгебры в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ сопряжены группой $\mathrm{Ad}(G)$, т.е. переводятся друг в друга внутренними автоморфизмами.

Доказательство. Для любой картановской подалгебры $\mathfrak{t}_i \subset \mathfrak{g}$ рассмотрим отображение действия $\varphi_i : G \times \mathfrak{t}_i^{reg} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Ранее мы доказали, что φ_i — субмерсии. Следовательно, их образы являются открытыми подмножествами. Но

$$\mathfrak{g}^{rs} = \bigcup_i \mathrm{Im}\,\varphi_i,$$

где $\mathrm{Im}\,\varphi_i$ открыты, $\mathfrak{g}^{rs}$ связно. Докажем, что $\mathrm{Im}\,\varphi_i$ либо не пересекаются, либо совпадают.

Для любых $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$: $\mathrm{Im}\,\varphi_1 \cap \mathrm{Im}\,\varphi_2 \neq \varnothing$. Пусть $\xi \in \mathrm{Im}\,\varphi_1 \cap \mathrm{Im}\,\varphi_2$:

$$\xi = \mathrm{Ad}(g_1)\zeta_1 = \mathrm{Ad}(g_2)\zeta_2, \quad g_1, g_2 \in G, \quad \zeta_i \in \mathfrak{t}_i^{reg}.$$

Тогда

$$\mathfrak{z}(\xi) = \mathrm{Ad}(g_1)\mathfrak{t}_1 = \mathrm{Ad}(g_2)\mathfrak{t}_2$$

$\Longrightarrow \mathfrak{t}_1 = \mathrm{Ad}(g_1^{-1}g_2)\mathfrak{t}_2 \Longrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi_1 = \mathrm{Im}\,\varphi_2$.

Итак, получили, что разбиение $\mathfrak{g}^{rs} = \bigcup\limits_i \mathrm{Im}\,\varphi_i$ — это разбиение на открытые компоненты. Если таких попарно не пересекающихся компонент будет несколько, то возникнет противоречие со связностью $\mathfrak{g}^{rs}$. То есть $\forall i, j$: $\mathrm{Im}\,\varphi_i = \mathrm{Im}\,\varphi_j$. Отсюда следует, что все картановские подалгебры сопряжены ($\forall i, j$ $\mathfrak{t}_i$ сопряжена с $\mathfrak{t}_j$).

Теорема 16 доказана. □

Итак, в начале лекции мы поставили три вопроса. На первый из них получен ответ:

«Однозначно ли определена система корней данной полупростой $\mathbb{C}$–алгебры Ли?»
— Все системы корней друг другу эквивалентны.

Теорема единственности для полупростых алгебр Ли

Второй вопрос этой лекции звучит так:

«Восстанавливается ли полупростая $\mathbb{C}$–алгебра Ли по своей системе корней»

Ответ дает следующая теорема.

Теорема 17 (для п/п алгебр Ли)**.** *Полупростая $\mathbb{C}$–алгебра Ли однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется своей системой корней. Тем самым соответствие между полупростыми $\mathbb{C}$–алгебрами Ли и их системами корней взаимно–однозначно.*

Доказательство теоремы 17 приведем далее.

Обозначения:

- $\mathfrak{g}$ — полупростая $\mathbb{C}$–алгебра Ли,
- $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{t}$ — картановская подалгебра,
- $\mathfrak{t}^* \supset \Delta$ — система корней,
- $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$ — $\mathfrak{sl}_2$–тройка, соответствующая $\alpha \in \Delta$.
- $\Delta \supset \Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ — множество простых корней
- A — матрица Картана, $a_{ij} = \langle \alpha_i \mid \alpha_j \rangle = \alpha_i(h_{\alpha_j})$.

Лемма 33. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается (как алгебра Ли) элементами e_{α_i}, f_{α_i}, h_{α_i} $\forall i = 1, \ldots, r$.*

Элементы e_{α_i}, f_{α_i}, h_{α_i} называются образующими Шевалле.

Доказательство. Во–первых, $\langle h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_r} \rangle = \mathfrak{t}$. Остается породить $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta$.

Возьмем произвольный корень α и постараемся этот корневой вектор/все корневое подпространство получить с помощью образующих Шевалле. Пусть сначала $\alpha \in \Delta^+$. Если он является простым, то соответствующее корневое подпространство порождается e_{α_i}.

Теперь пусть $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Pi \implies \exists i$ $(\alpha_i \mid \alpha) > 0$. Если бы это было не так, то $\alpha = \sum\limits_i k_i \alpha_i$, $k_i \geqslant 0 \implies (\alpha \mid \alpha) = \sum\limits_i k_i (\alpha_i \mid \alpha) \leqslant 0$ — противоречие. Итак, $\exists i$ $(\alpha_i \mid \alpha) > 0$.

Следовательно, $\beta = \alpha - \alpha_i \in \Delta^+$ (иначе $\beta = -\gamma$, $\gamma \in \Delta^+$, $\alpha_i = \alpha + \gamma \notin \Pi$). Значит, $\alpha = \alpha_i + \beta$. Тоже самое делаем с положительным корнем β. В какой–то момент мы получим разложение корня α в сумму простых корней такую, что любая ее подсумма — тоже положительный корень:

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \underbrace{\alpha_{i_k} + \ldots + \alpha_{i_l}}_{\in \Delta^+}.$$

Тогда

$$\mathfrak{g}_\alpha = [\mathfrak{g}_{\alpha_{i_1}}, [\mathfrak{g}_{\alpha_{i_2}}, \ldots, [\mathfrak{g}_{\alpha_{i_{l-1}}}, \mathfrak{g}_{\alpha_{i_l}}] \ldots]], \quad \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \langle e_{\alpha_i} \rangle.$$

Аналогично,

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} = [\mathfrak{g}_{-\alpha_{i_1}}, [\mathfrak{g}_{-\alpha_{i_2}}, \ldots, [\mathfrak{g}_{-\alpha_{i_{l-1}}}, \mathfrak{g}_{-\alpha_{i_l}}] \ldots]], \quad \mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \langle f_{\alpha_i} \rangle.$$

Лемма доказана. □

Некоторые соотношения между образующими Шевалле:

$$[e_{\alpha_i}, f_{\alpha_j}] = \begin{cases} h_{\alpha_i}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Кроме того,

$$\alpha_i - \alpha_j \notin \Delta.$$

(Иначе, например, $\alpha_i - \alpha_j = \alpha \in \Delta^+ \Longrightarrow \alpha_i = \alpha + \alpha_j \notin \Pi$ — противоречие).

$$[h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}] = 0.$$

$$[h_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}] = a_{ji} e_{\alpha_j}.$$

$$[h_{\alpha_i}, f_{\alpha_j}] = -a_{ji} f_{\alpha_j}.$$

Данные соотношения обозначим символом $(*)$.

Лекция 11

Линейные представления полупростых алгебр Ли

Обозначения остаются прежними:

- $\mathfrak{g}$ — полупростая $\mathbb{C}$–алгебра Ли,
- $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — линейное представление $\mathfrak{g}$,
- «Треугольное разложение»:

$$\mathfrak{g} = u^- \oplus \underbrace{\mathfrak{t} \oplus u}_{\mathfrak{b}},$$

где u^- — подалгебра, порожденная корневыми векторами, отвечающими отрицательным корням при некотором выборе отрицательных корней, u — подалгебра, порожденная корневыми векторами, отвечающими положительным корням, $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра. Подалгебра $\mathfrak{b}$ — борелевская подалгебра, максимальная разрешимая подалгебра (одна из, так как их, вообще говоря, много).

Утверждение 12. *Пусть $v \in V$ — старший вектор веса λ.*

$$v_{i_1,\ldots,i_k} = \rho(f_{\alpha_{i_1}})\ldots\rho(f_{\alpha_{i_k}})v.$$

1) $\widetilde{V} = \langle v, v_{i_1,\ldots,i_k} \mid 1 \geqslant i_1,\ldots,i_k \leqslant r\rangle$ — инвариантное подпространство

2) $\rho|_{\widetilde{V}}$ неприводимо

3) v — единственный (с точностью до пропорциональности) старший вектор в $\widetilde{V}$.

Доказательство.

1) Вектор $v_{i_1,\ldots,i_k}$ — весовой вектор для $\mathfrak{t}$ веса $(\lambda - \alpha_{i_1} - \ldots - \alpha_{i_k}$.

$$\rho(f_{\alpha_i})v_{i_1,\ldots,i_k} = v_{i,i_1,\ldots,i_k},$$

$$\rho(e_{\alpha_i})v_{i_1,\ldots,i_k} = \rho(e_{\alpha_i})\rho(f_{\alpha_{i_1}})v_{i_2,\ldots,i_k} = \rho(f_{\alpha_{i_1}})\rho(e_{\alpha_i})v_{i_2,\ldots,i_k} + \rho[e_{\alpha_i}, f_{\alpha_{i_1}}]v_{i_2,\ldots,i_k}.$$

Если действуем индукцией по k, то $\rho(e_{\alpha_i})v_{i_2,\ldots,i_k} \in \widetilde{V}$. Кроме того, $[e_{\alpha_i}, f_{\alpha_{i_1}}] = 0$ или h_{α_i}, тогда $\rho[e_{\alpha_i}, f_{\alpha_{i_1}}]v_{i_2,\ldots,i_k} \in \widetilde{V}$.

2) Вектор v — единственный (с точностью до пропорциональности) весовой вектор веса λ в $\widetilde{V}$.

$\widetilde{V} \supseteq V'$ — $\mathfrak{g}$–инвариантное подпространство $\Longrightarrow \widetilde{V} = V' \oplus V''$, где V', V'' инвариантны. Следовательно, $v = v' + v''$ — прямая сумма. Так как вектор v старший, то v' и v'' — тоже весовые векторы веса λ. Следовательно, можно считать, что $v = v'$, $v'' = 0$ в силу единственности весового вектора веса $\lambda \Longrightarrow \widetilde{V} = V'$.

3) Пусть есть другой старший вектор $\widetilde{V} \ni v'$ с другим весом λ'.

$$\widetilde{V} \supseteq V' = \langle v', \rho(f_{\alpha_{j_1}}, \ldots, \rho(f_{\alpha_{j_l}})v' \rangle \text{ — инвариантное подпространство,}$$

$\Longrightarrow V' = \widetilde{V}$. Следовательно,

$$\lambda = \lambda' - \alpha_{j_1} - \ldots - \alpha_{j_l}$$

для некоторых $j_1, \ldots, j_l$. Получается, что $\lambda = \lambda'$ и $v \sim v'$.

□

Следствие 24. *В неприводимом представлении существует единственный с точностью до пропорциональности старший вектор.*

Следовательно, корректно говорить о *старшем весе неприводимого представления.*

Теорема 18 (о единственности для линейного представления)**.** *Неприводимое представление $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ однозначно с точностью до изоморфизма определяется своим старшим весом λ.*

Обозначения: $\rho = \rho_\lambda$, $V = V(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V')$ — другое неприводимое представление старшего веса λ.

$V \ni v$, $V' \ni v'$ — старшие векторы.

$$V \oplus V' \ni v'' = v + v' \text{ — тоже старший вектор веса } \lambda.$$

Пусть $V \oplus V' \supset V''$ — инвариантное подпространство, порожденное старшим вектором v'' с неприводимым представлением $\mathfrak{g}$.

Пусть $\pi : V'' \longrightarrow V$, $\pi' : V'' \longrightarrow V'$ — проекции, $\pi, \pi' \neq 0$. По лемме Шура π, π' — изоморфизмы. Следовательно, $V = V'$. □

Теорема 19 (существования для линейных представлений)**.** *Для любого $\lambda \in P_+$ (множество доминантных весов) существует неприводимое представление $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V(\lambda))$ со старшим весом λ.*

Идея доказательства. Сначала построим неприводимое представление всех фундаментальных весов $\rho_{\omega_1} \ldots, \rho_{\omega_r}$, $(r \equiv \operatorname{rk} \mathfrak{g})$. $V(\omega_k) \ni v_{\omega_k}$ — старший вектор.

Для любого $\lambda \in P_+$

$$\lambda = l_1\omega_1 + \ldots l_r\omega_r$$

рассмотрим

$$V = V(\omega_1)^{\oplus l_1} \oplus \ldots \oplus V(\omega_r)^{\oplus l_r}$$

$$V \ni v_\lambda = v_{\omega_1}^{\oplus l_1} \oplus \ldots \oplus v_{\omega_r}^{\oplus l_r} \text{ — старший вектор веса } \lambda.$$

Этот старший вектор порождает инвариантное подпространство $V(\lambda) \subseteq V$ с неприводимым представлением ρ_λ.

Фундаментальные представления ρ_{ω_k} строятся для каждой простой алгебры Ли отдельно. А для полупростых алгебр — это фундаментальные представления одного из простых идеалов, на котором остальные простые идеалы действуют нулем. □

Пример 10. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

$$\text{Борелевская подалгебра } \mathfrak{b} = \{\text{верхнетреугольные} \mid \mathrm{tr} = 0\},$$

$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(\ldots) \mid \mathrm{tr} = 0\}.$$

$$\omega_k = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

$$V(\omega_k) = \Lambda^k \mathbb{C}^n.$$

$$V(\omega_k) \ni v_{\omega_k} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_k.$$

$V(\omega_k)$ — неприводимо, т.к. действие $SL_n(\mathbb{C})$ на $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$ порождает все пространство $\Lambda^k \mathbb{C}^n$.

Полупростые комплексные группы Ли и их устройство

Обозначения:

- G — полупростая $\mathbb{C}$–группа Ли,
- «Треугольное разложение»:

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G = u^- \oplus \underbrace{\mathfrak{t} \oplus u}_{\mathfrak{b}}.$$

Фиксируем локально точное (т.е. с дискретным ядром) линейное представление $R : G \longrightarrow GL(V)$. Например, $R = \mathrm{Ad}$.

Положим $\rho = \mathrm{d}R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — точное представление алгебры Ли.

Утверждение 13. *Подалгебры треугольного разложения u^-, u, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}$ замкнуты по Мальцеву в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Можно так выбрать базис V, что $\mathfrak{t} = \rho^{-1}(\mathfrak{t}_n)$, $u = \rho^{-1}(u)$, $u^{-1} = \rho^{-1}(u_n^{-1})$, $\mathfrak{b} = \rho^{-1}(\mathfrak{b}_n)$.

Соответствующие подгруппы Ли: $T = R^{-1}(T_n)^0$, $U = R^{-1}(U_n)^0$, $U^- = R^{-1}(U_n^-)^0$, $B = R^{-1}(B_n)^0$.

$$T_n = \{\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}, \det \neq 0\}, \quad U_n = \{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\},$$

$$U_n^- = \{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}\}, \quad B_n = \{\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}, \det \neq 0\}.$$

□

Рассмотрим отображение $\mathfrak{t} \xrightarrow{\exp} T \subset G$. $\mathfrak{g} \supset \langle e_{\alpha_i}, f_{\alpha_i} h_{\alpha_i}\rangle \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Так как $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ односвязна, то существует гомоморфизм φ_i. Кроме того есть отображение φ и оно таково:

$$\varphi(g_1, \ldots, g_r) = \varphi_1(g_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_r(g_r).$$

В данной диаграмме обозначения таковы: φ — не гомоморфизм, а φ_{Hom} — гомоморфизм ($\varphi_{Hom} \equiv \varphi$).

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{t} \arrow[r, "\exp"] & T \subset G & & \\
\underbrace{\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}}_{r} \arrow[u, "\mathrm{d}\varphi"] \arrow[r, "\exp"] & \underbrace{\mathbb{C}^\times \times \ldots \times \mathbb{C}^\times}_{r} \subset \arrow[u, "\varphi_{Hom}"] & \underbrace{SL_2 \times \ldots \times SL_2}_{r} \arrow[ul, "\varphi"] & SL_2(\mathbb{C}) \arrow[ull, "\varphi_i"']
\end{tikzcd}$$

Напомним, что $\mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$.

$$SL_2(\mathbb{C}) \supset \{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{C}^\times\} \simeq \mathbb{C}^\times.$$

$$\exp(x_1, \ldots, x_r) = (e^{x_1}, \ldots, e^{x_r}).$$

Отображение $\mathrm{d}\varphi$ задается так:

$$\mathrm{d}\varphi(x_1, \ldots, x_r) = x_1 h_{\alpha_1} + \ldots + x_r h_{\alpha_r}.$$

Следовательно, $\mathrm{d}\varphi : (\mathbb{C})^r \longrightarrow \mathfrak{t}$ — изоморфизм. Если дифференциал гомоморфизма групп Ли является изоморфизмом, то сам гомоморфизм является накрытием. Значит, $\varphi : (\mathbb{C}^\times)^r \longrightarrow T$ — накрытие.

Более того, $(\mathbb{C}^\times)^r \simeq (\mathbb{C})^r/(2\pi i \mathbb{Z}^r)$ — факторизация по решетке.

Таким образом, $T \simeq \mathfrak{t}/2\pi i \Lambda^*$ — тоже факторизация по решетке, где $\Lambda^* \subset \mathfrak{t}$ — подрешетка.

Рассмотрим снова гомоморфизм $\mathrm{d}\varphi$:

$$\mathrm{d}\varphi : \mathbb{Z}^r \longrightarrow \langle h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_r}\rangle_{\mathbb{Z}} = P^* \Longrightarrow \Lambda^* \supseteq P^*.$$

где P — решетка весов. Напомним, что решетка весов состоит из весов, то есть линейных функциях на картановской подалгебре, которые принимают целые значения на всех h_{α_i}, а значит, и на всех их целочисленных линейных комбинациях.

С другой стороны, $x \in 2\pi i \Lambda^* \iff \exp x = e \iff \mathrm{Ad}(\exp x) = E$. Но $E = \mathrm{Ad}(\exp x) = \exp(\mathrm{ad}\, x)$. Оператор $\exp(\mathrm{ad}\, x)$ действует на $\mathfrak{g}_\alpha$ умножением на $e^{\alpha(x)}$, и $\exp(\mathrm{ad}\, x) = E$. Следовательно, $e^{\alpha(x)} = 1 \Longrightarrow \alpha(x) \in 2\pi i \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in \Delta$.

Отсюда следует, что $\Lambda^* \subseteq Q^*$, где Q^* — решетка, двойственная к решетке корней.

Итак,

$$P^* \subseteq \Lambda^* \subseteq Q^* \subseteq \mathfrak{t}(\mathbb{R}).$$

Двойственные решетки:

$$Q \subseteq \Lambda \subseteq P \subseteq \mathfrak{t}^*(\mathbb{R}) = \mathbb{E}.$$

Здесь все решетки максимального ранга r. Это означает, что каждая из этих решеток является подгруппой конечного индекса в большей решетке.

Более того, решетка Λ^* порождена некоторым базисом в пространстве $\mathbb{C}^r$. То есть путем выбора базиса можно отождествить решетку Λ^* с решеткой $\mathbb{Z}^r$.

Следствие 25. *Группа $T \simeq \mathfrak{t}/2\pi i\Lambda^* \simeq (\mathbb{C}^\times)^r$, Λ^* порождена базисом $\mathbb{C}$–векторного пространства $\mathfrak{t}$.*

Алгебраический тор

Определение 33. Группа Ли $(\mathbb{C}^\times)^r \simeq T_r$ называется *алгебраическим тором.*

Вещественная форма $\mathbb{T}^r \subset (\mathbb{C}^\times)^r$ — компактный тор.

Замечание 11 (о характерах). Характер $\chi : T \longrightarrow \mathbb{C}^\times$. Мы можем рассмотреть его дифференциал $\lambda = \mathrm{d}\chi : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{C}$. Имеется коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{C}^\times \\
\mathfrak{t} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{d}\chi"] & \mathbb{C} \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

$$\chi(\exp x) = e^{\lambda x}.$$

Какие линейные функции на картановской подалгебре являются дифференциалами характеров?

Ответ: для того, чтобы линейная функция λ была дифференциалом какого–то характера χ, т.е. $\lambda = \mathrm{d}\chi$, необходимо и достаточно, чтобы $e^{\lambda(x)}$ было равна единице на ядре отображения $\mathfrak{t} \longrightarrow T$, т.е. чтобы $\lambda(x) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ при $x \in 2\pi i\Lambda^*$ ($2\pi i\Lambda^*$ — ядро левого на диаграмме экспоненциального отображения, а $2\pi i\mathbb{Z}$ — ядро правого) $\Longleftrightarrow$ $\lambda \in \Lambda$ — решетка характеров тора T.

Замечание 12 (про координаты). Если $t = \exp x = (t_1, \ldots, t_r)$, $t_j = e^{x_j}$, то

$$\chi(t) = e^{\lambda(x)} = e^{l_1x_1+\ldots+l_rx_r} = ||\ l_j \in \mathbb{Z}\ (\text{т.к. } \lambda \in \Lambda)|| = t_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot t_r^{l_r},\ l_j \in \mathbb{Z}.$$

Утверждение 14. *Тор являетcя максимальным (алгебраическим) тором в группе G. Любой максимальный тор в G сопряжен с T.*

Доказательство. <u>Максимальность:</u> Если бы T содержался в каком–то большем торе T', то включение $T \subseteq T' \subseteq G$ имело бы место и для алгебр Ли: $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{t}' \subseteq \mathfrak{g}$. Но поскольку тор — это абелева группа, то его алгебра Ли абелева, т.е. $\mathfrak{t}'$ абелева. Тогда $\mathfrak{t}'\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$. Следовательно, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \Longrightarrow T' = T$.

Вспомогательная лемма:

Лемма 34. *Любое линейное представление тора T_r диагонализуемо.*

Доказательство вспомогательной леммы. Рассмотрим произвольное представление $R : T_r \longrightarrow GL(V)$. Существует $T_r \supset \mathbb{T}^r \supset \mathbb{T}^r_{tor}$ — подгруппа кручения, она плотна. Образ $\mathbb{T}^r_{tor}$ — $R(\mathbb{T}^r_{tor})$ состоит из коммутирующих операторов конечного порядка. Но линейный оператор конечного порядка полупрост, т.е. все эти операторы полупросты. Следовательно, в некотором базисе $R(\mathbb{T}^r_{tor}) \subseteq T_n(\mathbb{C})$. Переходя к замыканию, получим, что $R(\mathbb{T}^r) \subseteq T_n(\mathbb{C})$.

Следовательно, $\mathrm{d}R(i\mathbb{R}^r) \subseteq \mathfrak{t}_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \mathrm{d}R(\mathbb{C}^r) \subseteq \mathfrak{t}_n(\mathbb{C})$. Возвращаясь к группам Ли, видим, что если алгебра Ли тора отображается в алгебру Ли диагональных матриц, то то же самое верно для групп. Значит, $R(T_r) \subseteq T_n$.

Доказательство вспомогательной леммы завершено. □

Сопряженность: отображение $R : G \longrightarrow GL(V)$ — локально точное представление, $\rho = \mathrm{d}R$.

Если $T' \subset G$ — это некоторый максимальный тор, то по вспомогательной лемме $R(T')$ диагонализуем. Тогда и $\rho(\mathfrak{t}')$ диагонализуем. Следовательно, $\mathfrak{t}'$ состоит из полупростых элементов и является абелевой алгеброй Ли $\Longrightarrow \exists$ подалгебра Картана, содержащая $\mathfrak{t}'$. Но все подалгебры Картана сопряжены с $\mathfrak{t}$: $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t} \supseteq \mathfrak{t}'$.

Значит, тор $gTg^{-1} \supseteq T' \Longrightarrow T' = gTg^{-1}$ из–за максимальности T'.

□

Вывод: имеется взаимно–однозначное соответствие между подалгебрами Картана в полупростой алгебре Ли и максимальными торами в соответствующей полупростой группе Ли — и те, и другие сопряжены между собой.

Лекция 12

Свойства треугольного разложения

Утверждение 15. *Экспоненциальные отображения из алгебр Ли* $\mathfrak{u}$ *и* $\mathfrak{u}^-$ *в соответствующие группы Ли являются диффеоморфизмами:*

$$\exp : \mathfrak{u} \longrightarrow U,$$
$$\exp : \mathfrak{u}^- \longrightarrow U^-.$$

Доказательство. 1) Случай $G = SL_n$, $U = U_n$ — верхние унитреугольные, $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_n$ — верхние нильтреугольные матрицы.

$$exp : \mathfrak{u} \longrightarrow U, \quad \exp(X) = E + X + \frac{X^2}{2} + \ldots + \underbrace{\frac{X^n}{n!} + \ldots}_{=0}.$$

$$\ln(E+Y) = |Y - \frac{Y^2}{2} + \ldots + \underbrace{(-1)^{n-1}\frac{Y^n}{n!} + \ldots}_{=0}.$$

Взаимно обратные полиномиальные диффеоморфизмы.

Аналогично для U^-.

2) Общий случай.

$$G \xrightarrow{R} GL_n$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] & U_n \\
\mathfrak{u} \arrow[u, hook, "\exp"] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, hook, "\rho"] & \mathfrak{u}_n \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

где f — замкнутое вложение.

Следовательно, $exp : \mathfrak{u} \longrightarrow U$ — открытое вложение. Далее: оно сюръективно, а значит, диффеоморфизм.

□

Утверждение 16. *$B = T \leftthreetimes U$.*

Доказательство. $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$, где $\mathfrak{u}$ — идеал. Следовательно, $T \leftthreetimes U \longrightarrow B$ — накрытие ($(t,u) \longmapsto tu$).

Утверждается, что

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] & U_n \\
\mathfrak{u} \arrow[u, hook, "\exp"] \arrow[r, hook, "\rho"] & \mathfrak{u}_n \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Следовательно, $T \cap U \hookrightarrow T_n \cap U_n = \{E\}$. Значит, $B = T \cdot U$, $U \lhd B$. Так как пересечение тривиально,то $B = T \leftthreetimes U$. □

Определение 34. Подгруппа B является *связной максимальной подгруппой Ли* в группе G. Такие подгруппы называются *подгруппами Бореля*. Все они сопряжены.

Треугольное разложение в группе

Теорема 20 (Треугольное разложение в группе)**.** *Подмножество*

$$G \supset \Omega = U^- \cdot T \cdot U \approx U^- \times T \times U \approx \mathbb{C}^N \times (\mathbb{C}^\times)^r \times \mathbb{C}^N$$

является открытым, плотным и связным. Его называют большой клеткой.

Доказательство.

1) Треугольное разложение в GL_n.

   Пусть $\Omega_n = \{g \in GL_n \mid \Delta_1(g), \ldots \Delta_n(g) \neq 0\}$. Оно равно $\Omega_n = U_n^- \cdot T_n \cdot U_n = U_n^- \cdot B_n$.

   Заметим, что группа U_n^- действует на Ω_n умножениями слева, а B_n — умножениями справа. Это действие транзитивно. Стабилизатор E состоит из пар (g, g^{-1}), $g \in U_n^- \cap B_n = \{E\}$. Следовательно, стабилизатор тривиален и действие свободно.

   Значит, $\Omega_n \approx U_n^- \times B_n \approx U_n^- \times T_n \times U_n$.

   Множество Ω_n открыто, плотно и связно во всем пространстве матриц $Mat_n(\mathbb{C})$ $\Longrightarrow$ и в GL_n по лемме 29 о дополнении к множеству, задаваемому алгебраическими уравнениями в векторном пространстве над $\mathbb{C}$.

2) Общий случай. Положим $\Omega := R^{-1}(\Omega_n)$.

   Действие $U_n^- \times B_n$ на Ω свободно, так как $U_n^- \times B_n$ действует на Ω_n свободно.

$$\Omega \supseteq \Omega^0 = U^- \cdot B \approx U_n^- \times B_n \approx U_n^- \times T_n \times U_n,$$
$$\dim \Omega^0 = \dim U^- + \dim T + \dim U = \dim G = \dim \Omega.$$

   Следовательно, Ω^0 — открытая орбита в Ω, и остальные орбиты тоже открыты. Орбиты действия $U^- \times B$ на Ω совпадают с компонентами связности.

   Докажем, что $\Omega = R^{-1}(\Omega_n)$ открыто, плотно и связно.

$$\Omega^0 \approx \mathbb{C}^N \times (\mathbb{C}^\times)^r \times \mathbb{C}^N \subset \mathbb{C}^{2N+r}.$$

   Это открыто подмножество задается алгебраическими неравенствами (т.е. дополнение к множеству, заданному алгебраическими уравнениями).

   Рассмотрим $\forall g \in G$: $g^{-1}\Omega \cap \Omega^0$. Оно задается неравенствами

$$f_1(\omega), \ldots, f_n(\omega) \neq 0,$$

   где $f_k(\omega) = \Delta_k(R(g\omega)) = \Delta_k(R(g)R(\omega))$ — лорановский многочлен от координат $\omega \in \Omega^0 \subset \mathbb{C}^{2N+r}$.

   Следовательно, $g^{-1}\Omega \cap \Omega^0$ открыто, плотно и связно в Ω^0. Значит, $\Omega \cap g\Omega^0$ открыто, плотно и связно в $g\Omega^0$. Заметим, что множества $g\Omega^0$ образуют открытое покрытие G.

   Следовательно, Ω открыто, плотно и связно в группе G, и $\Omega = \Omega^0$.

□

Теоремы о нормализаторе и централизаторе

Теорема 21 (о нормализаторе)**.** $N_G(B) = B$.

Доказательство. 1) Алгебры Ли: $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$: иначе $\exists \xi \in \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{b}) \setminus \mathfrak{b}$. Следовательно, $\mathfrak{k} = \mathfrak{b} \oplus \langle \xi \rangle$ — большая разрешимая подалгебра $\mathfrak{g}$ — противоречие.

2) Группы Ли: $n \in N_G(B) \Longrightarrow \Omega \cap \Omega n \neq 0$.

Следовательно, $\exists u_1, u_2 \in U^-$, $b_1, b_2 \in B$:

$$u_1 b_1 = u_2 b_2 n \Longrightarrow u_2^{-1} u_1 = b_2 n b_1^{-1} \in U^- \cap N_G(B).$$

Видно, что $u = \exp \xi = u_2^{-1} u_1$, $\xi \in u^-$. Тогда $\mathrm{Ad}(u) = \exp(\mathrm{ad}\,\xi)$ сохраняет борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}$ и унипотентен. Следовательно, $\mathrm{ad}\,\xi = \ln \mathrm{Ad}(u)$ тоже сохраняет $\mathfrak{b} \Longrightarrow \xi \in \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \Longrightarrow \xi = 0 \Longrightarrow u = e$.

Итого, $b_2 n b_1^{-1} = e \Longrightarrow n = b_2^{-1} b_1 \in B$.

□

Теорема 22 (о централизаторе)**.** $Z_G(T) = T$.

Доказательство. Централизатор $Z_G(T)$ действует тривиально (через Ad) на $\mathfrak{t} \Longrightarrow$ и на $\mathfrak{t}^* \Longrightarrow$ и на Δ, следовательно, сохраняет $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta \Longleftarrow$ сохраняет $\mathfrak{b}$.

Значит, $Z_G(T) \subseteq N_G(\mathfrak{b}) = N_G(B) = B = T \leftthreetimes U$. Следовательно, $Z_G(T) = T \leftthreetimes Z_U(T)$. Так как $u = \exp \xi \in Z_U(T)$, $\xi \in u$, и $\forall t \in T$: $\exp(\mathrm{Ad}(t)\xi) = tut^{-1} = u = \exp(\xi)$, то $(\mathrm{Ad}(t)\xi) = \xi$. Следовательно, $\xi \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \cap u = \mathfrak{t} \cap u = 0 \Longrightarrow \xi = 0$, $u = e$.

Значит, $Z_U(T) = \{e\} \Longrightarrow Z_G(T) = T$. □

Следствие 26. $Z(G) \subset T$.

Классификация полупростых комплексных групп Ли

Утверждение 17. *1) Если группа G односвязна, то $\Lambda = \Pi$.*

2) В общем случае $Q \subseteq \Lambda \subseteq \Pi$, $\Pi^* \subseteq \Lambda^* \subseteq Q^*$.

$$Z(G) \simeq Q^*/\Lambda^* \simeq \Lambda/Q.$$

$$\pi_1(G) \simeq \Lambda^*/\Pi^* \simeq \Pi/\Lambda.$$

Доказательство.

1) $\Lambda \subseteq \Pi = \langle \omega_1, \ldots, \omega_r \rangle_\mathbb{Z}$.

Отображение $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V(\omega_i))$ — фундаментальное представление. Оно интегрируется до $R_{\omega_i} : G \longrightarrow GL(V(\omega_i))$. Следовательно, $\omega_i \in \Lambda\ \forall i = 1, \ldots, r \Longrightarrow \Lambda = \Pi$.

2) Утверждение доказывает следующая коммутативная диаграмма:

$$\widetilde{G} \xrightarrow{/\pi_1(G)} G \xrightarrow{/Z(G)} G/Z(G) \simeq \mathrm{Ad}(G)$$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{T} \arrow[r] & T \arrow[r] & \mathrm{Ad}(T) \\
\widetilde{\mathfrak{t}} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\sim"] & \mathfrak{t} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{ad}(\mathfrak{t}) \arrow[u, "\exp"]
\end{tikzcd}$$

Кроме того $2\pi i\Pi^* \subset 2\pi i\Lambda^* \subset 2\pi iQ^*$, где $2\pi i\Pi^* \subset \widetilde{\mathfrak{t}}$, $2\pi i\Lambda^* \subset \mathfrak{t}$, $2\pi iQ^* \subset \mathrm{ad}(\mathfrak{t})$.

$\square$

Классификация полупростых комплексных групп Ли

Имеется взаимно–однозначное соответствие между полупростыми $\mathbb{C}$–группами Ли G (с точностью до изоморфизма) и следующими данными абстрактными системами корней Δ вместе с решетками $Q \subseteq \Lambda \subseteq \Pi$ (с точностью до эквивалентности).

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ