ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 2

ГРИБОВ
ВИТАЛИЙ АРКАДЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КЛЮШНИКОВА НИКИТУ СЕРГЕЕВИЧА

Оглавление

Семинар 1. Биномиальное распределение.

Задача 1. Среднее число частиц в идеальном газе.

Рассматриваем равновесную систему (конкретно - равновесный идеальный нерелятивистский газ) в отсутствие внешнего поля (пространственно однородный случай). Система находится в объёме V и имеет N частиц. Выделяется произвольный объем V_1 (смотри рис. 1.1) внутри V с воображаемыми стенками. В этом объёме случайным образом оказывается N_1 частиц. Найти среднее число частиц $\overline{N_1}$, его

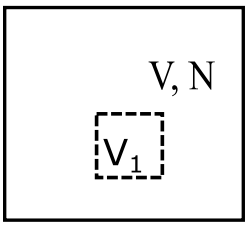

Рис. 1.1: Графическое представление объёма с частицами газа и пробной области.

дисперсию $\overline{(\Delta N_1)^2}$ и относительную флуктуацию в объёме V_1. Относительная флуктуация:

$$\delta N_1 = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta N_1)^2}}}{\overline{N_1}} \tag{1.1}$$

Решение: Для начала построим рецепты для получения первых двух выражений. Система термодинамическая, значит число частиц сравнимо с числом Авогадро, значит нельзя просто посчитать сколько там частиц за обозримое время. Согласно началу термодинамики, которое говорит, что существуют либо аддитивные величины, либо интенсивные, либо никакие. Здесь конечно не термодинамика, но N_1 - это аддитивная величина. Тогда можно определить N_1:

$$N_1 = \sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}_i) \tag{1.2}$$

Где $f(\vec{r}_i)$ - некая функция координат. Далее такое определение позволит всё очень выгодно свернуть $f(\vec{r}_i)$:

$$f(\vec{r}_i) = \begin{cases} 1, \vec{r}_i \in V_1 \\ 0, \vec{r}_i \bar{\in} V_1 \end{cases} \tag{1.3}$$

Усреднение N_1 будет:

$$\overline{N_1} = \sum_{i=1}^{N} \overline{f(\vec{r}_i)} \tag{1.4}$$

Распишем дисперсию:

$$\overline{(\Delta N_1)^2} = \overline{(N_1 - \overline{N_1})^2} = \overline{N_1^2 - 2N_1\overline{N_1} + (\overline{N_1})^2} = \overline{N_1^2} - (\overline{N_1})^2 \tag{1.5}$$

Тогда нужно посчитать просто вот эти два последних слагаемых. Посчитаем сначала просто квадрат N_1^2:

$$N_1^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(\vec{r_i})f(\vec{r_j}) = \sum_{i=1}^{N} f^2(\vec{r_i}) + \sum\sum_{i\neq j} f(\vec{r_i})f(\vec{r_j}) \tag{1.6}$$

В последнем равенстве учтено, что, так как газ идеальный, то при равенстве индексов в двойной сумме - это одна и та же частица, при несовпадении - это две невзаимодействующих частицы. Далее, учитывая, что $f^2 = f$, а значит и $\overline{f^2} = \overline{f}$. Кроме того $\overline{f(\vec{r_i})f(\vec{r_j}} = \overline{f(\vec{r_i})f(\vec{r_j}}$. Тогда можем выписать средний квадрат:

$$\overline{N_1^2} = \sum_{i=1}^{N} \overline{f^2(\vec{r_i})} + \sum\sum_{i\neq j} \overline{f(\vec{r_i})f(\vec{r_j}} \tag{1.7}$$

Таким образом, вся задача свелась к нахождению $\overline{f(\vec{r_i})}$. Ранее были введены равновесные корреляционные функции, тогда (F_1 - одночастичная корреляционная функция):

$$\overline{f(\vec{r_i})} = \frac{1}{V}\int f(\vec{r_i})F_1(\vec{r_i})d^3r_i \tag{1.8}$$

Вспомнив, что вероятность того, что частица попадает в избранный объем d^3r около точки r, притом, что все частицы заключены в объем V - это:

$$\frac{F_1(\vec{r})d^3r}{V} \tag{1.9}$$

В данном случаем $F_1 = 1$. Тогда, интегрируя, получаем, что:

$$\overline{f(\vec{r_i})} = \frac{1}{V}\int 1\cdot 1\cdot dV = \frac{V_1}{V} \tag{1.10}$$

Теперь подставим в формулы средних значений:

$$\overline{N_1} = \sum_{i=1}^{N}\overline{f(\vec{r_i})} = N\frac{V_1}{V} \tag{1.11}$$

$$\overline{N_1^2} = N\frac{V_1}{V} + N(N-1)\left(\frac{V_1}{V}\right)^2 \tag{1.12}$$

Итого получаем дисперсию и относительную флуктуацию:

$$\overline{(\Delta N_1)^2} = \overline{(N_1 - \overline{N_1})^2} = N\frac{V_1}{V} + N(N-1)\left(\frac{V_1}{V}\right)^2 - N^2\left(\frac{V_1}{V}\right)^2 = N\frac{V_1}{V}\left(1 - \frac{V_1}{V}\right) \tag{1.13}$$

$$\delta N_1 = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta N_1)^2}}}{\overline{N_1}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{V_1}{V}}{N\frac{V_1}{V}}} = \frac{\sqrt{\frac{V_1}{V} - 1}}{\sqrt{N}} \tag{1.14}$$

Выяснилось, что дисперсия пропорциональна только первой степени N, как и просто среднее значение N_1. Тогда относительная флуктуация при раздутии системы в предельном переходе стремится к нулю, потому что пропорциональна $\sqrt{N}$.

Рассмотрим несколько предельных случаев:

1. Раздутие объёма: $V_1 \to V$. Тогда $\overline{N_1} = N$, $\overline{(\Delta N_1)^2} = 0$. Ответ естественный.
2. Уменьшение объёма: $V_1 \to 0$. Тогда $\overline{N_1} \to 0$, $\overline{(\Delta N_1)^2} \to 0$. А относительная флуктуация $\delta N_1 \to \infty$. Чем меньше конечный объем, тем меньше число частиц можно сосчитать, тогда посчитанный результат отклоняется на 1, но среднее стремится к нулю, на этом фоне флуктуация огромна.

Задача 2. Построение биномиального распределения.

Имеем равновесный классический идеальный газ в отсутствии внешнего поля. Имеем такую же схему, как и в задаче 1. Требуется найти вероятность обнаружить в пробном объёме V_1 - N_1 штук частиц ($w(N_1)$).

Решение: Пусть есть одна частица. Вероятность, что она попадёт в объем V_1, будучи в объёме V равна

$$p = \frac{V_1}{V} \tag{1.15}$$

Введём $q = 1 - p$. Назовём набор $\{N_1\}$ - N_1 штук частиц в с выбранными нами номерами. Это классический газ, поэтому нумерация частиц возможна. Так как p не зависит от номера частицы, то вероятность обнаружить весь этот набор в объёме V_1:

$$w(\{N_1\}) = p^{N_1} q^{N-N_1} \tag{1.16}$$

Однако это не ответ на вопрос задачи, так как в условии неважно какие частицы выбираются. По сути тут представлена формула сочетания. Тогда для любого набора (любой из $\{N_1\}$) можно сказать, что это сумма вероятностей(независимые события), т.е. надо домножить на число сочетаний:

$$w(N_1) = C_N^{N_1} p^{N_1} q^{N-N_1} \tag{1.17}$$

Это является ответом на вопрос задачи. Однако, числа N и N_1 - порядка числа Авогадро, поэтому вычислять факториалы будет очень плохо. Распишем вероятность:

$$w(N_1) = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}\left(\frac{V_1}{V}\right)^{N_1}\left(1-\frac{V_1}{V}\right)^{N-N_1} \tag{1.18}$$

Это биномиальное распределение Бернулли. Биномиальное, потому что:

$$(a+b)^N = \sum_{i=0}^{N} C_N^i a^i b^{N-i} \tag{1.19}$$

Теперь просуммируем вероятность для всех N_1:

$$\sum_{N_1=0}^{N} w(N_1) = \sum_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1} p^{N_1} q^{N-N_1} = (p+q)^N = 1^N = 1 \tag{1.20}$$

Получили единицу. Таким образом нам известна нормировка. Из прошлой задачи знаем среднее $\overline{N_1}$. Сравним со средним через вероятность:

$$\overline{N_1} = \sum_{N_1=0}^{N} N_1 w(N_1) = \sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!N_1}{N_1!(N-N_1)!} p^{N_1} q^{N-N_1} = \sum_{N_1=1}^{N} \frac{N!p^{N_1-1}q^{(N-1)-(N_1-1)}}{(N_1-1)!((N-1)-(N_1-1))!}p \tag{1.21}$$

Переобозначим $N_1 - 1 \equiv N_2$. Получаем (последняя сумма равна 1, так как это нормировочное условие по сути):

$$\overline{N_1} = Np\sum_{N_2=0}^{N-1} \frac{(N-1)!p^{N_2}q^{N-1-N_2}}{N_2!((N-1)-N_2)!} = Np = n\frac{V_1}{V}$$

Получили ответ, совпадающий с таковым в первой задаче.

Распределение Пуассона и распределение Гаусса.

Рассмотрим предельные случаи для предыдущей задачи (задача 2):

1. Пусть $N >> 1$, $\frac{V_1}{V} << 1$, значит $\overline{N_1} << N$. Получаем, что:

$$N! \simeq \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N\left[1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right] \tag{1.22}$$

   Отметим, что $N_1!$ в принципе может быть близок к $N!$, поэтому, пусть число частиц N_1 сопоставимо с $\overline{N_1}$ для исходов, реализуемых с заметной вероятностью. Тогда

запишем:

$$(N-N_1)! \simeq \sqrt{2\pi(N-N_1)}\left(\frac{N-N_1}{e}\right)^{N-N_1}\left[1+O\left(\frac{1}{N-N_1}\right)\right] \tag{1.23}$$

Тог получается, что, переписывая в данных условиях асимптотически вероятность:

$$w(N_1) \simeq \sqrt{\frac{N}{N-N_1}}\frac{N^{N_1}}{e^{N_1}}\frac{\left(1-\frac{V_1}{V}\right)^{N-N_1}}{\left(1-\frac{N_1}{N}\right)^{N-N_1}}\left(\frac{V_1}{V}\right)^{N_1}\frac{1}{N_1!} \tag{1.24}$$

Первый корень стремится к единице. Перепишем вероятность:

$$w(N_1) \simeq \frac{1}{N_1!}\left(N\frac{V_1}{V}\right)^{N_1} e^{-N_1}\frac{\left[\left(1-\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{V}{V_1}}\right]^{\frac{V_1}{V}(N-N_1)}}{\left[\left(1-\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{N}{N_1}}\right]^{\frac{N_1}{N}(N-N_1)}} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{N_1!}\left(N\frac{V_1}{V}\right)^{N_1} e^{-N_1-\frac{V_1}{V}(N-N_1)\frac{N_1}{N}(N-N_1)} \tag{1.25}$$

Обозначив $p = \frac{V_1}{V}$, а также учтя, что одна скобка в показателе экспоненты сильно меньше другой:

$$w(N_1) \simeq \frac{1}{N_1!}\left(N\frac{V_1}{V}\right)^{N_1} e^{-N\frac{V_1}{V}+N_1(\frac{V_1}{V}-\frac{N_1}{N})} \simeq \frac{1}{N_1!}\left(N\frac{V_1}{V}\right)^{N_1} e^{-N\frac{V_1}{V}} = \frac{1}{N_1!}(pN)^{N_1}e^{-pN} \tag{1.26}$$

Итак, это распределение Пуассона.

2. Пусть $N >> \overline{N_1} >> 1$. Есть отклонение между измеренным и среднем значением N_1:

$$\Delta N_1 = N_1 - \overline{N_1}^{\frac{\Delta N_1}{\overline{N_1}}} << 1 \tag{1.27}$$

Другими словами, распределение узко-локализовано. Эта ситуация по сути лежит внутри предыдущей (то есть тут просто ещё одно дополнительное условие). Понятно, что в данной ситуации получится распределение Гаусса. Получается:

$$w(N_1) \simeq \frac{(pN)^{N_1}}{\sqrt{2\pi N_1}\left(\frac{N_1}{e}\right)^{N_1}}e^{-pN} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_1}}exp\left\{N_1 - pN - N_1 ln\left(\frac{N_1}{pN}\right)\right\} \tag{1.28}$$

Обозначим $pN = \overline{N_1}$. Вообще такое надо проверять, но в действительности ещё в исходной ситуации получили данный ответ (предыдущий случай), а мы в рамках той

ситуации сужаем случаи, как уже говорилось выше. Тогда $N_1 - pN = \Delta N_1$, получаем:

$$\frac{N_1}{pN} = \frac{\overline{N_1} + \Delta N_1}{\overline{N_1}} = 1 + \frac{\Delta N_1}{\overline{N_1}} \tag{1.29}$$

Тем самым, для вероятности получаем:

$$w(N_1) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi N_1}} exp\left\{\Delta N_1 - N_1 ln\left(1 + \frac{\Delta N_1}{\overline{N_1}}\right)\right\} \tag{1.30}$$

Пусть теперь:

$$\frac{\Delta N_1}{\overline{N_1}} \equiv x, |x| << 1 \tag{1.31}$$

Тогда снова переписываем вероятность:

$$w(N_1) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi N_1}} exp pN \left\{x - (1+x)ln(1+x)\right\} \tag{1.32}$$

Распишем то, что в показателе экспоненты в скобках:

$$x - (1+x)ln(1+x) = x - (1+x)(1 - \frac{x^2}{2} + ...) = x - x - x^2 + \frac{x^2}{2} + ... = -\frac{x^2}{2} \tag{1.33}$$

Тогда получаем вероятность, которая распределение Гаусса:

$$w(N_1) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi N_1}} exp\left(-\frac{1}{2} pN \frac{(\Delta N_1)^2}{(pN)^2}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi pN}} e^{-\frac{(\Delta N_1)^2}{2pN}} \tag{1.34}$$

Семинар 2. Микроскопическая теория флуктуаций.

Задачи. Большое каноническое распределение Гиббса.

С помощью большого канонического распределения Гиббса вычислить дисперсию числа частиц $\overline{(\Delta N)^2}$, дисперсию энергии $\overline{(\Delta E)^2}$ и корреляцию флуктуаций энергии числа частиц $\overline{(\Delta E \Delta N)}$ в термодинамической системе.

Решение: Представление большого канонического распределения (вероятность для реализации заданного числа частиц и заданного состояния):

$$w_{nN} = \frac{1}{\zeta} e^{\frac{\mu N - E_{nN}}{\theta}} = \frac{1}{\zeta} e^{\alpha N - \beta E_{nN}} \tag{2.1}$$

Где:

$$\zeta = \sum_{n,N} e^{\frac{\mu N - E_{nN}}{\theta}} = \sum_{n,N} e^{\alpha N - \beta E_{nN}} \tag{2.2}$$

Выше переобозначили $\beta = \frac{1}{\theta}$, $\alpha = \frac{\mu}{\theta}$. Распишем, что надо посчитать:

$$\begin{cases} \overline{(\Delta N)^2} = \overline{N^2} - (\overline{N})^2 \\ \overline{(\Delta E)^2} = \overline{E^2} - (\overline{E})^2 \\ \overline{(\Delta E \Delta N)} = \overline{(EN)} - \overline{E} \cdot \overline{N} \end{cases} \tag{2.3}$$

Становится понятно, что надо посчитать. Некоторые величины уже были ранее посчитаны.

1. Выпишем среднее значение $\overline{N}$:

$$\overline{N} = \sum_{n,N} N w_{nN} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n,N} N e^{\alpha N - \beta E_{nN}} = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n,N} e^{\alpha N - \beta E_{nN}} = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\beta, V} \tag{2.4}$$

   Таким образом, последнее выражение считается при постоянном β и V. Первое очевидно, а второе потому что для канонического распределения внешними параметрами служат температура, объём, химический потенциал. Температуру и химический потенциал учли в параметрах α, β. Таким образом, постоянный объём повлияет на вычисления. Если мы задали объём, то спектр - это набор констант, уровни стоят на месте.

   Попутно мы убеждались в том, что перед нами термодинамическое число частиц. Для этого вспомним, что большой термодинамический потенциал Ω:

$$\Omega = -\theta ln(\zeta) \tag{2.5}$$

Продолжив равенство для $\overline{N}$:

$$\overline{N} = \frac{\partial}{\partial \frac{\mu}{\theta}} ln\zeta = \theta \frac{\partial}{\partial \mu}\left(-\frac{\Omega}{\theta}\right) = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)\Big|_{\beta,V} = \mathcal{N} \tag{2.6}$$

Последнее $\mathcal{N}$ - это термодинамическое N. Таким образом, среднее $\overline{N}$ - это то самое N, которое фигурирует в термодинамике. Похожим образом вычисляется среднее квадрата:

$$\overline{N^2} = \sum_{n,N} N^2 w_{nN} = \frac{1}{\zeta}\sum_{n,N} N^2 e^{\alpha N - \beta E_{nN}} = \frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2}\right)\Big|_{\beta,V} \tag{2.7}$$

Итак, получаем дисперсию числа частиц:

$$\overline{(\Delta N)^2} = \overline{N^2} - (\overline{N})^2 = \frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2}\right)\Big|_{\beta,V} - \frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}\right)^2\Big|_{\beta,V} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\beta,V}\right] \tag{2.8}$$

В иных обозначения, используя $\mathcal{N}$, получаем:

$$\overline{(\Delta N)^2} = \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\beta,V} = \theta\left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mu}\right)\Big|_{\theta,V} \tag{2.9}$$

Ответ получен в рамках термодинамики. Если, например, рассматривается система фермионов, то известно как ведёт себя химический потенциал в области низких температур. Он ведёт себя как функция объёма, числа частиц, всё это известно. Значит будет известна функция μ, как функция $\mathcal{N}$ и всё хорошо. Если имеется случай классического идеального газа, то это не самая лучшая форма ответа, потому что придётся сначала строить химический потенциал. Однако, хоть и непросто, ответ можно будет построить.

2. Теперь будем рассчитывать $\overline{E}$. Аналогично пользуемся общим рецептом:

$$\overline{E} = \sum_{n,N} E_{nN} w_{nN} = \frac{1}{\zeta}\sum_{n,N} E_{nN} e^{\alpha N - \beta E_{nN}} = -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \beta}\sum_{n,N} e^{\alpha N - \beta E_{nN}} = -\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \beta}\right)\Big|_{\alpha,V} \tag{2.10}$$

Интересный вопрос вопрос состоит в том, что $\alpha = \frac{\mu}{\theta}$, значит мы дифференцируем, поддерживая постоянной дробь, а химический потенциал не измеряется прямо, а вычисляется. Это чрезвычайно сложный вопрос, в том плане, чтобы технически поддерживать дробь постоянной в процессе измерения. Поэтому позже выражение преобразуется в измеряемые величины.

Запишем $\overline{E^2}$:

$$\overline{E} = \sum_{n,N} E_{nN}^2 w_{nN} = \frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2}\right)\Big|_{\alpha,V} \tag{2.11}$$

Теперь можем записать дисперсию E:

$$\overline{(\Delta E)^2_{\alpha V}} = \frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\beta^2}\right)\Big|_{\alpha,V} - \frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right)^2\Big|_{\alpha,V} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[-\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right)\Big|_{\alpha,V}\right] \tag{2.12}$$

Видно, что в последнем выражении в квадратных скобках стоит $\overline{E}$, которое в свою очередь является внутренней энергией (данное утверждение доказывалось для канонического распределения, здесь доказательство сильно длиннее и не будет приведено). Поэтому:

$$\overline{(\Delta E)^2_{\alpha V}} = \theta^2\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta}\right)\Big|_{\alpha,V} \tag{2.13}$$

Производная является по размерности теплоёмкостью, однако не какая-то конкретная теплоёмкость, а просто теплоёмкость в процессе при фиксированном α.

Однако снова появляется вопрос о техническом исполнении. Наиболее удобная система является с равным нулю химическим потенциалом (это будет равновесное излучение например или любой бозонный газ ниже температуры конденсации).

3. Вычислим $\overline{(\Delta E\Delta N)}$. Сначала надо вычислить $\overline{E\cdot N)}$. Снова, аналогично предыдущим двум случаям, записываем сумму и так далее:

$$\overline{E\cdot N)} = \sum_{n,N} E\cdot N\cdot w_{nN} = \frac{1}{\zeta}\sum_{n,N} E\cdot N\cdot e^{\alpha N-\beta E_{nN}} = -\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\beta\partial\alpha}\right) \tag{2.14}$$

Тогда можем получить:

$$\overline{(\Delta E\Delta N)} = \overline{(EN)} - \overline{E}\cdot\overline{N} = -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right) \tag{2.15}$$

Аналогично мы сворачиваем итоговую разность в производную какой-то термодинамической величины (в данном случае существует два варианта):

$$\overline{(\Delta E\Delta N)} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[-\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right)\right] \tag{2.16}$$

Значит, для корреляции энергии и числа частиц есть два ответа. В первом можно перейти к дифференцированию по температуре, а во второй дифференцирование идёт по μ, тогда запишем соответственно:

$$\overline{(\Delta E\Delta N)} = \theta^2\left(\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial\theta}\right)\Big|_{\alpha,V} = \theta\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mu}\right)\Big|_{\theta,V} \tag{2.17}$$

Посмотрим насколько привычны эти два ответа в рамках знакомства с

термодинамикой. В первом случае снова нужно держать постоянный отношение $\frac{\mu}{\theta}$. Во втором случае тоже непросто. Химический потенциал обычно не строили как функцию энергии, конечно можно преобразовать, но, получается, что пока, во всех трёх рассмотренных случаях ответы являются некими “полуфабрикатами”.

Далее определимся с последовательностью действий. В задаче ещё сказано рассмотреть результаты для такой или иной термодинамической системы, но для начала преобразуем полученные “полуфабрикаты” в более знакомые выражения. Имеем “полуфабрикаты”:

$$\begin{cases} \overline{(\Delta N)^2} = \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\beta,V} = \theta\left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mu}\right)\Big|_{\theta,V} \\ \overline{(\Delta E)^2} = \theta^2\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}\right)\Big|_{\alpha,V} \\ \overline{(\Delta E \Delta N)} = \theta^2\left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \theta}\right)\Big|_{\alpha,V} = \theta\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu}\right)\Big|_{\theta,V} \end{cases} \tag{2.18}$$

Для начала рассмотрим дисперсию энергии. Пусть внутренняя энергия рассматривается как функция температуры, объёма и числа частиц, т.е. $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\theta, V, N)$. Кроме того, N - внутренний параметр. Система подчиняется большому каноническому распределению, поэтому:

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\Big|_{\theta,V} = N(V, \Omega, \mu) = N(V, \alpha, \beta) = N(V, \alpha, \theta) \tag{2.19}$$

Тогда видно, что внутреннюю энергию придётся дифференцировать по температуре дважды (потому что она сама зависит от температуры, а также N зависит от температуры). Таким образом:

$$\overline{(\Delta E)^2_V} = \theta^2\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}\right)_{\alpha,V} = \theta^2\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}\right)_{V,N} + \theta^2\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right)_{\theta,V}\left(\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)_{V,\alpha} \tag{2.20}$$

Отметим, что $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}\right)_{V,N}$ - это C_{VN}. Теперь распишем что означает последняя производная:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)_{V,\alpha} = -\left(\frac{\partial N}{\partial \alpha}\right)_{\theta,V}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right)_{N,V} \tag{2.21}$$

Тогда можем переписать $\overline{(\Delta E)^2_V}$:

$$\overline{(\Delta E)^2_V} = \theta^2 C_{VN} - \theta^2\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right)_{\theta,V}\left(\frac{\partial N}{\partial \alpha}\right)_{\theta,V}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right)_{N,V} \tag{2.22}$$

Кроме того, можем переписать и формулу для корреляции энергии и числа частиц:

$$\overline{(\Delta E \Delta N)} = \theta^2\left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \theta}\right)\Big|_{\alpha,V} = \theta\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu}\right)\Big|_{\theta,V} = -\theta^2\left(\frac{\partial N}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\theta,V}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right)\Big|_{N,V} \tag{2.23}$$

Зная, что $\alpha = \frac{\mu}{\theta}$, можем посчитать производную:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right)_{N,V} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\mu}{\theta}\right)\right)_{N,V} \tag{2.24}$$

Для второй производной (так как у нас термодинамическая система, поэтому в записях заменили везде $\mathcal{N}$ на N) получается, что:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \alpha}\right)_{\theta,V} = \overline{(\Delta N)^2} \tag{2.25}$$

Итак, перепишем ещё раз дисперсию E:

$$\overline{(\Delta E)^2_V} = \theta^2 C_{VN} - \theta^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right)_{\theta,V} \overline{(\Delta N)^2} \left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\theta^2}\right)\right] =$$

$$= \theta^2 C_{VN} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right)_{\theta,V} \overline{(\Delta N)^2}_{\theta V} \left[\mu - \theta\left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta}\right)_{V,N}\right] \tag{2.26}$$

Вернёмся к корреляции энергии и числа частиц, можем теперь переписать в виде:

$$\overline{(\Delta E \Delta N)} = \left[\mu - \theta\left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta}\right)_{V,N}\right] \overline{(\Delta N)^2}_{V,N} \tag{2.27}$$

Заметим, что в последних двух выражениях то, что стоит в квадратных скобках с точностью равняется $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right)_{\theta,V}$. Таким образом, можем переписать два последних равенства. Для дисперсии энергии получим:

$$\overline{(\Delta E)^2_V} = \theta^2 C_{VN} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right)^2_{\theta,V} \overline{(\Delta N)^2}_{\theta,V} \tag{2.28}$$

А для корреляции энергии и числа частиц:

$$\overline{(\Delta E \Delta N)} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right)_{\theta,V} \overline{(\Delta N)^2}_{V,N} \tag{2.29}$$

Теперь можем сказать, что получили удобную запись тождественными преобразованиями.

Отметим, что можно получить такие же результаты в квазидинамической теории флуктуаций элементарным образом, но дело в том, что эта теория приближённая, а выше был получен точный результат.

Проиллюстрируем примером (получим такой же результат). Запишем формулу вероятности для малых флуктуаций:

$$w_\Delta \sim e^{\frac{1}{2\theta}(\Delta p \Delta V - \Delta\theta \Delta S - \Delta\mu \Delta N)} \tag{2.30}$$

Зафиксировав θ и V, получим:

$$w_\Delta \sim e^{-\frac{\Delta\mu\Delta N}{2\theta}} \tag{2.31}$$

Учтём, что (посчитаем линейный вклад):

$$\Delta\mu = \left(\frac{\partial\mu}{\partial N}\right)_{\theta,V} \Delta N + \ldots \tag{2.32}$$

Тогда вероятность будет:

$$w_\Delta \sim e^{\frac{1}{2\theta}\left(\frac{\partial\mu}{\partial N}\right)_{\theta,V}(\Delta N)^2} \tag{2.33}$$

Последнее выражение похоже на распределение Гаусса. Так как для него:

$$w(x)dx = ce^{-\frac{\lambda x^2}{2}}dx \tag{2.34}$$

То дисперсия x:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\lambda} \tag{2.35}$$

Итого получаем для дисперсии числа частиц:

$$\overline{(\Delta N)^2}_{\theta,V} = \theta\left(\frac{\partial N}{\partial\mu}\right)_{\theta,V} \tag{2.36}$$

Таким образом, приближённая теория даёт полное совпадение с большим каноническим распределением и его подходом. Однако, с помощью этого канонического распределения можно посчитать далеко не всё то, что можно посчитать с помощью квазитермодинамической теории.

Дисперсия числа частиц идеального ферми-газа в вырожденном случае

Теперь применим полученные формулы в конкретном случае. Так как нужно получить дисперсию числа частиц, то нужно знать, как будет выглядеть химический потенциал $\mu = \mu(\theta, V, N)$. В выражении ниже $\mathcal{E}_F$ - это энергия Ферми.

$$\mu = \mu(\theta, V, N)\Big|_{\frac{\theta}{\mathcal{E}_F}<<1} \simeq \mathcal{E}_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{2.37}$$

Теперь запишем производную химического потенциала:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial N}\right)_{\theta,V} \simeq \left(\frac{\partial\mathcal{E}_F}{\partial N}\right)_V = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}_F}{N} \tag{2.38}$$

Тогда дисперсия числа частиц в системе с постоянной температурой и объёмом:

$$\overline{(\Delta N)^2}_{\theta,V} \simeq \frac{\theta}{\frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}_F}{N}} = \frac{3}{2}\frac{N\theta}{\mathcal{E}_F} \tag{2.39}$$

Получили дисперсию числа частиц. Нужно получить относительную флуктуацию. Мы знаем N для одного кубического сантиметра, знаем, знаем плотность и молярную массу меди(в задаче медь). Тогда корень из дисперсии делим на N для всей меди и получаем ответ.

Если надо корреляцию флуктуации энергии и числа частиц, то, согласно формулам, полученным ранее, нужно посчитать производную $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right)_{\theta,V}$. Итак, энергию $\mathcal{E}$ можно заменить на энергию основного состояния $\mathcal{E}_{\prime}$ (так как температурные добавки ничтожны). Так как:

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_{\prime} = \frac{3}{5}N\mathcal{E}_F \tag{2.40}$$

Тогда:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial N}\right)_V = \mathcal{E}_F \tag{2.41}$$

Тогда можем получить корреляцию флуктуации энергии и числа частиц:

$$\overline{(\Delta E \Delta N)_V} = \mathcal{E}_F \frac{3}{2}\frac{N\theta}{\mathcal{E}_F} = \frac{3}{2}N\theta \tag{2.42}$$

Удивительно, но для вырожденной системы получается результат как для классического идеального газа.

Дисперсия энергии равновесного излучения

В данном случае, так как имеется равновесное излучение, можно использовать тот факт, что $\alpha = 0$. Для корреляции флуктуации энергии и числа частиц будем использовать другую формулу (их было выведено две):

$$\overline{(\Delta E \Delta N)_V} = \theta^2 \left(\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)_{\alpha,V} \tag{2.43}$$

Рассчитаем внутреннюю энергию равновесного излучения:

$$\mathcal{E} = V \int_0^\infty \hbar\omega \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{\theta}} - 1} \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \tag{2.44}$$

Отдельно рассчитаем число фотонов:

$$N = V \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{\theta}} - 1} \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \sim \theta^3 \tag{2.45}$$

Таким образом, рассчитав N и подставив всё в формулы, можно рассчитать ответ.

Дисперсия энергии вырожденного электронного газа

В данном случае нужно применить формулу для дисперсии энергии, которая была выведена выше:

$$\overline{(\Delta E)_V^2} = \theta^2 C_{VN} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right)_{\theta,V}^2 \overline{(\Delta N)^2}_{\theta,V} \tag{2.46}$$

Производную от энергии уже посчитали, в асимптотическом случае она будет просто энергией Ферми с добавкой, соответствующей температурной добавке:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N}\right) \simeq \mathcal{E}_F \left(1 + O\left(\frac{\theta}{\mathcal{E}_F}\right)^2\right) \tag{2.47}$$

Дисперсию числа частиц тоже рассчитали ранее, напомним:

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{3}{2}\frac{N\theta}{\mathcal{E}_F} \tag{2.48}$$

Кроме того, известно выражение для C_{VN}:

$$C_{VN} = N\frac{\pi^2}{2}\frac{\theta}{\mathcal{E}_F} \tag{2.49}$$

Подставляя всё вместе, получаем:

$$\overline{(\Delta E)_V^2} = \theta^2 N\frac{\pi^2}{2}\frac{\theta}{\mathcal{E}_F} + \mathcal{E}_F^2\frac{3}{2}\frac{N\theta}{\mathcal{E}_F} \tag{2.50}$$

Отметим, что первое слагаемое стремится к нулю на фоне второго. Тогда:

$$\overline{(\Delta E)_V^2} = \frac{3}{2}N\theta\mathcal{E}_F \tag{2.51}$$

Семинар 3. Квазитермодинамическая теория флуктуаций.

Задача о дисперсии чисел заполнения в идеальном ферми-, бозе- и больцман-газе.

Рассмотрим задачу: определить дисперсию и относительную флуктуацию чисел заполнения равновесного идеального бозе-газа выше температуры его конденсации. То же самое для ферми-газа и для невырожденного классического идеального газа.

Решение: большое каноническое распределение даёт результат (было построено на предыдущем семинаре):

$$\overline{(\Delta N)^2}_{\theta,V} = \theta \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mu}\right)_{\theta,V} \tag{3.1}$$

Посмотрим теперь как строится прямое N (все три модели являются идеальным газом, поэтому можно пользоваться представлением чисел заполнения, таким образом, получим, что это будет суммой по состояниям одночастичного гамильтониана от чисел заполнения):

$$N = \sum_p N_p \tag{3.2}$$

Усредним, получим термодинамическое N:

$$\mathcal{N} = \overline{N} = \sum_p n_p \tag{3.3}$$

Теперь, можно подставить и написать:

$$\overline{(\Delta N)^2}_{\theta,V} = \theta \sum_p \left(\frac{\partial n_p}{\partial \mu}\right)_{\theta,V} \tag{3.4}$$

Таким образом, для описания заданного состояния одночастичного гамильтониана получаем формулу, аналогичную той, которая работает на всю систему сразу:

$$\overline{(\Delta N_p)^2}_{\theta,V} = \theta \left(\frac{\partial n_p}{\partial \mu}\right)_{\theta,V} \tag{3.5}$$

Теперь посмотрим на средние числа заполнения для различных случаев.

1. Для бозонов:

$$n_p = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_p - \mu}{\theta}} - 1} \tag{3.6}$$

   Отметим, что ε_p тоже считаем константой, хотя бы потому что объём фиксирован. Тогда частица, попадая в этот объём получает определённый спектр собственных

значений оператора Гамильтона. Получается, что:

$$\overline{(\Delta N_p)^2}_{\theta,V} = \theta \frac{1}{(e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{\theta}}-1)^2} e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{\theta}} \frac{1}{\theta} \tag{3.7}$$

Преобразуем, учитывая, что:

$$\frac{1}{n_p} + 1 = e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{\theta}} \tag{3.8}$$

И получаем:

$$\overline{(\Delta N_p)^2}_{\theta,V} = n_p^2 \left(\frac{1}{n_p} + 1\right) = n_p(1+n_p) \tag{3.9}$$

2. Для фермионов:

$$n_p = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{\theta}}+1} \tag{3.10}$$

Аналогично дифференцируем:

$$\overline{(\Delta N_p)^2}_{\theta,V} = \theta \frac{1}{(e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{\theta}}+1)^2} e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{\theta}} \frac{1}{\theta} \tag{3.11}$$

Преобразуем, учитывая, что знак теперь другой:

$$\frac{1}{n_p} - 1 = e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{\theta}} \tag{3.12}$$

Получаем:

$$\overline{(\Delta N_p)^2}_{\theta,V} = n_p^2 \left(\frac{1}{n_p} - 1\right) = n_p(1-n_p) \tag{3.13}$$

Таким образом, можно обобщить результаты двух пунктов и получить:

$$\overline{(\Delta N_p)^2}_{\theta,V} = n_p(1 \pm n_p) \tag{3.14}$$

И относительная флуктуация будет:

$$\delta N_p = \frac{\sqrt{n_p(1 \pm n_p)}}{n_p} = \sqrt{\frac{1}{n_p} \pm 1} \tag{3.15}$$

3. Теперь рассмотрим случай классического газа. Единая классическая асимптотика в терминах n_p реализуется, когда утрачивается разница между двумя предыдущими случаями. Получается, что в таком случае n_p малы ($n_p << 1$). Получаем:

$$\left(\overline{(\Delta N_p)^2}_{\theta,V}\right)_{Boltzmann} \simeq n_p \tag{3.16}$$

Кроме того, можно получить такой же результат, продифференцировав асимптотику (хотя дифференцировать асимптотику не всегда безопасно, можно получить скачки производной). Запишем n_p:

$$(n_p)_{Boltzmann} \simeq e^{\frac{\mu-\varepsilon_p}{\theta}} \tag{3.17}$$

Продифференцировав, получим n_p в точности. Теперь найдём относительную флуктуацию:

$$\delta N_p = \sqrt{\frac{1}{n_p}} \to \infty \tag{3.18}$$

Так как n_p мало, то флуктуация стремится к бесконечности. Система состоит из N частиц, даже если фермионы, то по одной частице они где- то должны быть. Но одна частица очень сильно отличается от среднего. Как только попадаем на состояние, в котором действительно одна частица, это состояние очень сильно отличается от среднего, получаем в этом случае большую флуктуацию. Так что ответ логичен с точки зрения физики.

Оценка амплитуды дрожания "зайчика" зеркального гальванометра

Задача. Зеркало баллистического гальванометра подвешено на тонкой нити на расстоянии 5 м от шкалы. Какова должна быть величина коэффициента крутильной жёсткости нити, чтобы амплитуда дрожания светового зайчика, связанного с тепловыми флуктуациями в системе имела порядок 1 мм.

Решение. На рисунке 3.1 изображена схема зеркального гальванометра. Расстояние L задано и равно 5 м, звёздочка означает источник света (например лазер), луч отражается и попадает на шкалу. Координата отражённого пятна равнаx. Угол поворота зеркала φ. Из геометрии получаем, что $x \simeq L \cdot 2\varphi$. Ещё до включения гальванометра пятно дрожит. Тогда:

$$\overline{\varphi} = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi \tag{3.19}$$

Нас интересует дисперсия x. Так как (из-за отражения) средняя координата x будет нуль, то:

$$\overline{x} = 0 \Rightarrow x = \Delta x \tag{3.20}$$

Тогда дисперсия:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{x^2} = 4L^2\overline{\varphi^2} \tag{3.21}$$

Определим новое значение:

$$\delta x = \sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} = 2L\sqrt{\overline{\varphi^2}} \tag{3.22}$$

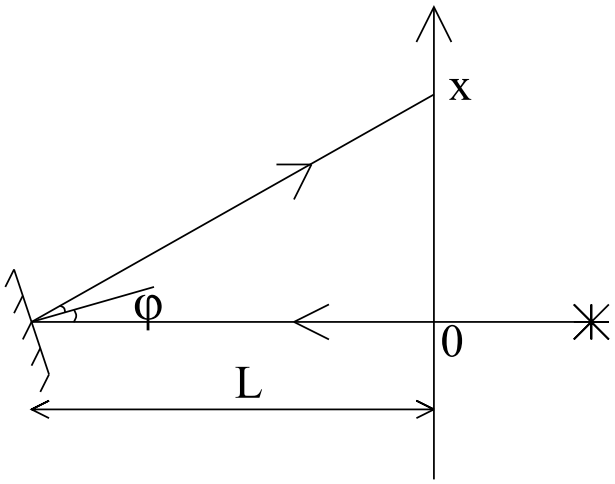

Рис. 3.1: Схема зеркального гальванометра.

Отметим, что нить упругая. Тогда момент упругих сил, возникающих в нитке:

$$M = -D \cdot \varphi \tag{3.23}$$

Где D - коэффициент пропорциональности. Тогда потенциальная энергия будет:

$$E_n = \frac{D\varphi^2}{2} \tag{3.24}$$

Движение нужно рассматривать как классическое (закручивание нити и поворот зеркала). Существует теорема о равнораспределении энергии оп степеням свободы классической системы:

$$\overline{\left(x_k \frac{\partial H}{\partial x_k}\right)} = \theta \tag{3.25}$$

Подставим соответствующие величины в нашем случае:

$$\overline{\left(\varphi \frac{\partial E_n}{\partial \varphi}\right)} = \overline{(\varphi D \varphi)} = 2\overline{E_n} = \theta \tag{3.26}$$

Тогда средняя энергия равна:

$$\overline{E_n} = \frac{\theta}{2} = \frac{D\overline{\varphi^2}}{2} \tag{3.27}$$

Тогда получаем ответ:

$$\delta x = 2L\sqrt{\frac{\theta}{D}} \tag{3.28}$$

В последнем выражении известно всё, кроме D. Нить должна быть ничтожно малого диаметра. Не получается померить точное положение светового пятна не из-за термодинамики, не из-за тепловых флуктуаций молекул. Причины вероятнее всего

механические, например перемещение масс вокруг установки (люди ходят).

Корреляции флуктуаций температуры и объёма

Итак, нужно найти:

$$\overline{(\Delta\theta \cdot \Delta V)}_N \tag{3.29}$$

Запишем вероятность малой флуктуации:

$$w_\Delta \sim exp\left\{\frac{1}{2\theta}(\Delta\theta \cdot \Delta S + \Delta p \cdot \Delta V - \Delta\mu \cdot \Delta N)\right\} \tag{3.30}$$

Причём, так как N фиксировано, то $\Delta N = 0$. Формула получена для малых флуктуаций, значит, можем воспользоваться линейным приближением для величин, входящих в выражение. Запишем:

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{V,N} \Delta\theta + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{\theta,N} \Delta V \tag{3.31}$$

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{V,N} \Delta\theta + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\theta,N} \Delta V \tag{3.32}$$

Тогда разложим показатель экспоненты:

$$\Delta p \cdot \Delta V - \Delta\theta \cdot \Delta S = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{V,N} \Delta\theta \cdot \Delta V + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\theta,N} (\Delta V)^2 -$$

$$- \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{V,N} (\Delta\theta)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{\theta,N} \Delta\theta \cdot \Delta V \tag{3.33}$$

Теперь, для приведения подобных слагаемых необходимо вспомнить систему уравнений для вычислений энтропии, из которой надо взять одну строку:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{\theta,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{V,N} \tag{3.34}$$

Отметим, что данное равенство возникает из записи дифференциала свободной энергии:

$$dF = -Sd\theta - pdV + \mu dN \tag{3.35}$$

Тогда:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{\theta,N} = -\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial \theta} = -\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial V} = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{V,N} \tag{3.36}$$

Итого, в показателе экспоненты можно сократить друг с другом первое и четвёртое слагаемое. Перепишем вероятность флуктуации:

$$w_N \sim exp^{\frac{1}{2\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\theta,N}(\Delta V)^2} exp^{\left(-\frac{1}{2\theta}\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{V,N}(\Delta\theta)^2} \tag{3.37}$$

Видно, что получили два Гауссовых распределения. Достаточно увидеть, что:

$$w_\Delta \sim w(\Delta V) \cdot w(\Delta\theta) \tag{3.38}$$

То есть функция распределения представляет собой два независимых сомножителя. Теперь сразу можно сказать, что корреляция флуктуаций становится произведением средних, каждое из которых является нулём:

$$\overline{(\Delta\theta \cdot \Delta V)} = \overline{\Delta\theta} \cdot \overline{\Delta V} = 0 \tag{3.39}$$

Флуктуации теплоёмкости C_{VN} электронного газа при комнатной температуре

Задача ставится так, что надо найти дисперсию теплоёмкости системы и оценить эту величину для газа электронов в металле при комнатной температуре и для твёрдого тела при температуре много ниже температуры Дебая. Запишем теплоёмкость:

$$C_{VN} = C_{VN}(\theta, V, N) \tag{3.40}$$

Так как число частиц фиксировано ($N = const$), то отклонение теплоёмкости от равновесного значения можно построить через отклонения температуры и объёма. Также отметим, что из-за малости флуктуаций можем ограничиться линейным приближением. Отклонение будет:

$$\Delta C_{VN} = \left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial \theta}\right)_{V,N} \Delta\theta + \left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial V}\right)_{\theta,N} \Delta V \tag{3.41}$$

Тогда дисперсия теплоёмкости будет:

$$\overline{\Delta C_{VN}^2} = \left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial \theta}\right)^2_{V,N} \overline{(\Delta\theta)^2} + \left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial V}\right)^2_{\theta,N} \overline{(\Delta V)^2} + \left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial \theta}\right)_{V,N} \left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial V}\right)_{\theta,N} \overline{(\Delta\theta \cdot \Delta V)_N} \tag{3.42}$$

Ранее было показано, что $\overline{(\Delta\theta \cdot \Delta V)_N} = 0$, таким образом, последнее слагаемое будет равно нулю. Преобразуем, используя лекционный материал:

$$\overline{\Delta C_{VN}^2} = \left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial \theta}\right)^2_{V,N} \frac{\theta^2}{C_{VN}} + \left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial V}\right)^2_{\theta,N} \theta \left(-\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\theta,N} \tag{3.43}$$

Таким образом, построена модель.

Рассмотрим конкретный случай - газ электронов проводимости в металле при комнатной температуре. В этом случае $\frac{\theta}{\varepsilon_F} << 1$. Для теплоёмкости в данной системе имеем:

$$C_{VN} = N\frac{\pi^2}{2}\frac{\theta}{\varepsilon_F}\left[1 + O\left(\frac{\theta}{\varepsilon_F}\right)^2\right] \tag{3.44}$$

Для первой производной:

$$\left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial \theta}\right)_{V,N} = \frac{C_{VN}}{\theta} \tag{3.45}$$

Далее, учитывая, что $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$, получаем для второй производной:

$$\left(\frac{\partial C_{VN}}{\partial V}\right)_{\theta,N} = \frac{2}{3}\frac{C_{VN}}{V} \tag{3.46}$$

Кроме того, нужно раскрыть последний множитель. Для энергии можем записать:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}pV \Rightarrow p = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{V} \simeq \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0}{V} = \frac{2}{3}\frac{3}{5}\frac{N\varepsilon_F}{V} = \frac{2}{5}\frac{N\varepsilon_F}{V} \sim V^{-\frac{5}{3}} \tag{3.47}$$

Тогда:

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\theta,N} \simeq \frac{5}{3}\frac{p}{V} = \frac{2}{3}\frac{N\varepsilon_F}{V^2} \tag{3.48}$$

Подставляя всё в дисперсию теплоёмкости, получаем:

$$\overline{\Delta C_{VN}^2} = \frac{C_{VN}^2}{\theta^2}\frac{\theta^2}{C_{VN}} + \frac{4}{9}\frac{C_{VN}^2}{V^2}\frac{\theta}{\frac{2}{3}\frac{N\varepsilon_F}{V^2}} = C_{VN} + \frac{2}{3}C_{VN}^2\frac{\theta}{N\varepsilon_F} = C_{VN}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\theta}{\varepsilon_F}\right)^2\right] \simeq C_{VN} \tag{3.49}$$

Последнее приблизительное равенство пишем, так как второе слагаемое уже выше, чем установленный изначально порядок точности. Второй конкретный случай можно рассмотреть похожим образом.

Семинар 4. Квазитермодинамическая теория флуктуаций.

Задача. Получить формулу для дисперсии свободной энергии в единице объёма системы, считая, что флуктуируют число частиц и температура. Оценить результат относительной флуктуации свободной энергии для газа электронов в единице объёма металла при комнатной температуре (т.е. это сильно вырожденный идеальный ферми-газ).

Решение. Объём фиксирован ($V = const$). Тогда, отклонение свободной энергии от равновесного значения:

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{V,N} \Delta\theta + \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\theta,V} \Delta N \tag{4.1}$$

Отметим, что последнее равенство является только таковым в данном линейном приближении (на самом деле это лишь приблизительное равенство). Частные производные - известные величины, поэтому перепишем равенство:

$$\Delta F = -S\Delta\theta + \mu\Delta N \tag{4.2}$$

Усредним и возведём в квадрат:

$$\overline{(\Delta F)^2} = S^2\overline{(\Delta\theta)^2_{V,N}} + \mu^2\overline{(\Delta N)^2_{\theta,V}} - 2S\mu\overline{\Delta\theta\Delta N} \tag{4.3}$$

Отметим, что последнее слагаемое равняется нулю. Тогда остаётся процитировать результат, используя знания из прошлого семестра:

$$\overline{(\Delta F)^2_V} = S^2\frac{\theta^2}{C_{VN}} + \mu^2\theta\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{\theta,V} \tag{4.4}$$

Далее учтём, что мы рассматриваем вырожденный идеальный ферми-газ. Можно записать калорическое уравнение состояния и энергию ферми:

$$C_{VN} = N\frac{\pi^2}{2}\frac{\theta}{\varepsilon_F} \tag{4.5}$$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{4.6}$$

Также запишем что такое S, воспользовавшись тем, что задача поставлена в области низких температур:

$$S = \int_0^\theta \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{V,N} d\theta = \int_0^\theta \frac{C_{VN}}{\theta} d\theta = C_{VN} \tag{4.7}$$

Кроме того, учитывая, что:

$$\mu = \varepsilon_F \left[1 + O\left(\frac{\theta}{\varepsilon_F}\right)^2\right] \simeq \varepsilon_F \tag{4.8}$$

Распишем частную производную:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{\theta,V} = \frac{1}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{\theta,V}} \simeq \frac{1}{\left(\frac{\partial \varepsilon_F}{\partial N}\right)_V} = \frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_F} \tag{4.9}$$

Итого получаем:

$$\overline{(\Delta F)_V^2} = C_{VN}^2 \frac{\theta^2}{C_{VN}} + \varepsilon_F^2 \theta \frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_F} = C_{VN}^2 \theta^2 + \frac{3}{2} N\theta\varepsilon_F = \frac{3}{2} N\theta\varepsilon_F \left[1 + O\left(\frac{\theta^2}{\varepsilon_F^2}\right)\right] \tag{4.10}$$

Так как работаем в линейном приближении, то в итоге получается, что:

$$\overline{(\Delta F)_V^2} = \frac{3}{2} N\theta\varepsilon_F \tag{4.11}$$

В случаи меди, объёма 1 кубического сантиметра, температура комнатная. В этом случае энергия ферми будет $\varepsilon_F \simeq 10^{-18}$Дж. Тогда $\frac{3}{2}\theta \simeq 630 \cdot 10^{-23}$ Дж. Знаем плотность и молярную массу меди, частиц около $N \simeq 10^{23}$ штук. Тогда получим (в квадратных джоулях):

$$\overline{(\Delta F)_V^2} \simeq 6.3 \cdot 10^{-16} \tag{4.12}$$

Теперь оценим среднее значение свободной энергии (в Дж):

$$F\Big|_{\theta\to 0} \simeq \varepsilon_0 = \frac{3}{5} N\varepsilon_F \simeq 0.6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-18} = 6 \cdot 10^4 \tag{4.13}$$

Тогда:

$$\delta F = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}}}{F} \simeq \frac{2.5 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^4} \simeq 0.4 \cdot 10^{-11} \tag{4.14}$$

Получилось, что относительная флуктуация чрезвычайно мала. Это правдивый результат, так как система объёмом 1 кубический сантиметр очень велика.

Среднее время взаимодействия броуновской частицы со средой

Задача. Имеется броуновская частица с размерами порядка 10^{-6} м. Она находится в равновесии со средой типа газа или жидкости. Нужно оценить среднее время между отдельными взаимодействиями среды с броуновской частицей, а также среднее время взаимодействия частицы среды с броуновской частицей и время установления для

броуновской частицы максвелловского распределения по скоростям. Далее будут разобраны только первые два вопроса.

Решение: Частица такого размера находится на грани прямого наблюдения в оптический микроскоп. Таким способом ограждаемся от артефактов других методов детектирования.

Рассмотрим некую площадку на плоскости (рисунок 4.1). Считаем, сколько частиц за

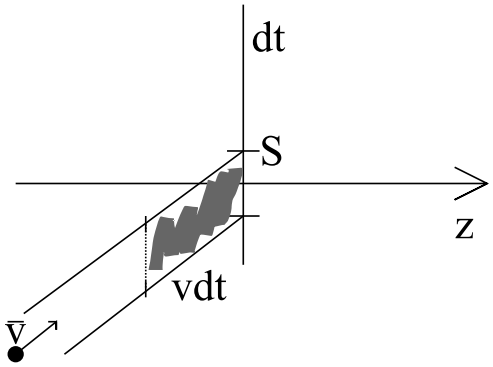

Рис. 4.1: Количество частиц, падающих на площадку S за время dt.

время dt падает на площадку S. Полное число частиц в цилиндрическом объёме $(V_z \cdot dt \cdot S)$ будет равно этому объёму, помноженному на концентрацию этих частиц. Далее нас интересуют скорости частиц. Нужно найти частицы, которые имеют скорости в заданном интервале. Тогда, вероятность того, что частица обладает скоростью в интервале d^3V около V - это $w(\vec{v})d^3V$. Таким образом, имеем событие - частица с определённой скоростью упала на площадку:

$$[n(V_z \cdot dt \cdot S)]w(\vec{v})d^3V \tag{4.15}$$

Тогда интеграл от этого - будет событием, что частица просто упала на площадку. Тогда число частиц, упавших на площадку:

$$dN = \int_{V_z>0} [n(V_z \cdot dt \cdot S)]w(\vec{v})d^3V \tag{4.16}$$

Чтобы найти искомое время, посмотрим сколько таких падающих частиц dN получается за заданный интервал времени. Тогда потом можно будет поделить на этот интервал и получить среднее время взаимодействия. Посчитаем сначала интеграл:

$$dN = S \cdot dt \cdot n \int_0^\infty V_z w(V_z) dV_z \int_{-\infty}^\infty w(V_x) dV_x \int_{-\infty}^\infty w(V_y) dV_y \tag{4.17}$$

Каждый из последних двух интегралов равен единице. Тогда остаётся посчитать лишь

первый интеграл. Перепишем:

$$dN = S \cdot dt \cdot n \int_0^\infty V_z \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_0^2}{2\theta}} dV_z = S \cdot dt \cdot n \left(\frac{\theta}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-u} du = S \cdot dt \cdot n \quad (4.18)$$

Из распределения Максвелла, среднее от модуля скорости:

$$\overline{v} = \left(\frac{8\theta}{\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

Тогда можем ещё раз переписать:

$$dN = S \cdot dt \cdot n \frac{\overline{v}}{4} \quad (4.20)$$

Теперь представим поверхность броуновской частицы как совокупность таких площадок. Положим, что $dt = 1$ секунда. Концентрация находится из того, что система представляет собой воздух при нормальных условиях, тогда один моль занимает 22.4 литра. Средняя скорость около 500 метров в секунду. Тогда:

$$dN = 4\pi \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \frac{6 \cdot 10^{23}}{22.4 \cdot 10^{-3}} \frac{500}{4} \simeq 4 \cdot 10^{16} \quad (4.21)$$

Тогда время от столкновения до столкновения τ:

$$\tau \sim 10^{-16} \quad (4.22)$$

Данный ответ получен для воздуха (разреженная среда). Для броуновской частицы в воде, то концентрация возрастёт примерно на 3 порядка, тогда время между столкновениями будет меньше на три порядка.

Теперь попробуем оценить время одного столкновения. Для этого нужно ответить на вопрос, сколько времени нужно, чтобы молекула прошла мимо относительно большой броуновской частицы? Размеры молекулы порядка 3 ангстремов. Скорость около 500 метров в секунду. Тогда время столкновения будет порядка $0.6 \cdot 10^{-12}$ секунд.

Получается, что броуновская частица параллельно испытывает по меньшей мере 10000 столкновений.

Семинар 5. Броуновское движение.

Уравнение Эйнштейна-Фоккера-Планка

Рассматриваются броуновские частицы. Они обладают свойствами:

1. Частицы крупные (видимые). Их характерный размер $r \gtrsim 10^{-6}$ метра.
2. Присутствует среда мелких частиц (молекулы, имеющие характерный размер $r_0 \gtrsim 10^{-10}$ м).
3. Идеальный газ броуновских частиц (так как эти большие частицы в основном взаимодействуют только со средой и очень редко между собой).
4. Количество вещества сохраняется (частицы могут слипаться и крошиться, но химические превращения отсутствуют).

Если следовать принципам статистики, то нужно задать функцию распределения частиц. Однако, задача рассмотрения частиц упрощается в данном случае - из рассмотрения выкидывается поведение по скоростям. То есть, достаточно задать только распределение по координатам. Речь идёт о классической системе, значит можно пронумеровать и отличить друг от друга частицы. Даже при столкновении понятно, что есть что (в случае двух сталкивающихся волн на поверхности нельзя с точностью сказать, проходят они друг сквозь друга или отражаются). Таким образом, распределение по скоростям будет являться распределением Максвелла. По этой причине остаётся решить задачу того, как будет выглядеть распределение по координатам. В перспективе, в равновесии, это будет распределение Больцмана. Однако, дело в том, что рассматривается случай (интервал времени), когда уже установилось распределение Максвелла, но не установилось распределение Больцмана (ещё совсем не равновесная система). Так как количество вещества сохраняется, то для распределения по координатам, для $\rho(t, \vec{r})$ можно записать уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0 \tag{5.1}$$

Вообще ρ может быть плотностью вещества, а может быть концентрацией частиц. Если нормировка производится на число частиц (в данном случае предполагаем, что частицы не крошатся - иначе нормировка производится на количество вещества), то ρ - концентрация.

Частицы при попадание в среду распределяются по ней. Они распределяются под воздействием внешних сил, а также в результате процесса диффузии. В таком случае плотность потока частиц $\vec{j}$ является суммой двух компонент - диффузионной $\vec{j}_{diff}$ и гидродинамической $\vec{j}_{hd}$:

$$\vec{j} = \vec{j}_{diff} + \vec{j}_{hd} \tag{5.2}$$

Расшифруем каждую из величин в сумме. Для диффузионной составляющей постулируем такой вид:

$$\vec{j}_{diff} = -D \cdot grad(\rho) - \rho grad(D) \tag{5.3}$$

Дело в том, что это далеко не общий вид. Можно сказать только то, что диффузия наблюдается, если мы упростим ситуацию, при постоянном коэффициенте диффузии, если концентрация меняется от точки к точке. Но это конечное изменение на конечном расстоянии может вовсе не сводится к тому, что есть лишь один $grad(\rho)$. Могут наблюдаться и более тонкие эффекты. Например, градиент может быть просто аргументом в какой-то более сложной конструкции (функция от $grad(\rho)$). Кроме того, при приращении какой-то функции не обязательно есть только производная первого порядка, линейное приближение может и не сработать. Отметим, что, постулировав таким образом, можем пренебречь вторым слагаемым ($\rho grad(D)$).

$$\vec{j}_{hd} = \rho \vec{u}_{hd} \tag{5.4}$$

Здесь $\vec{u}_{hd}$ - скорость регулярного гидродинамического течения.

Рассмотрим крупную броуновскую частицу, которую бомбардируют мелкие частицы среды (рисунок 5.1). Ранее было посчитано, что одновременно происходит порядка 10^4 столкновений, даже если броуновская частица находится на грани видимости в довольно разрежённой среде. Так как частица довольно крупная, она подчиняется классической

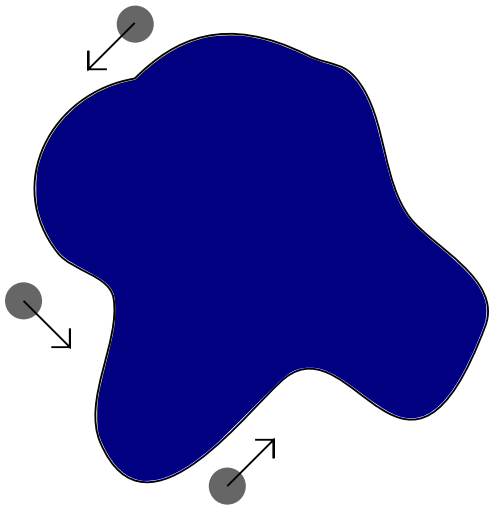

Рис. 5.1: Броуновская частица испытывает столкновения с молекулами среды.

механике, можем записать второй закон Ньютона:

$$m\dot{\vec{v}} = -gradU + \vec{F}_{fr} + \vec{F}_{rnd} \tag{5.5}$$

Где U - потенциальная энергия потенциальных сил. Отметим, что сила Архимеда может быть потенциальной, однако её учёт является довольно сложным вопросом. Дело в

том, что тогда надо ещё учитывать то, что сама среда тоже будет совершать движения. Кроме потенциальных сил, учтём ещё силу трения $\vec{F_{fr}}$ и случайную добавку $\vec{F_{rnd}}$, так как частицы бомбардируют броуновскую частицу случайным образом. В среднем эта случайная добавка будет давать нуль:

$$< \vec{F_{rnd}} >_{\Delta t1} = 0 \tag{5.6}$$

Интервал усреднения $\Delta t1$ должен быть хотя бы порядка времени одного столкновения (было ранее рассчитано), он будет много меньше одной секунды.

Далее необходимо построить силу трения. Сила трения может быть как при затухающих колебаниях в вязкой среде, тогда она пропорциональна относительной скорости $\vec{v}_{rel}$ с коэффициентом $\gamma = 6\pi a\nu$.

$$\vec{F_{fr}} = -\gamma\vec{v}_{rel} \tag{5.7}$$

Так как среда покоится (каждый макроскопический объект среды покоится), то $\vec{v}_{rel} = \vec{v}$. Тогда, собирая всё вместе и усредняя по периоду $\Delta t1$, получаем:

$$m\dot{\vec{v}} = -gradU - \gamma\vec{v} \tag{5.8}$$

Преобразуем:

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\gamma}{m}\vec{v} = -\frac{gradU}{m} \tag{5.9}$$

Далее можно сказать, что существует общее решение однородного уравнения. Обозначим $\Gamma = \frac{\gamma}{m}$:

$$\dot{\vec{v}} + \Gamma\vec{v} = 0 \tag{5.10}$$

Тогда решение однородного:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\Gamma t} \tag{5.11}$$

Далее необходимо получить частное решение неоднородного уравнения. Если положить, что внешняя сила постоянна, то можно получить установившееся движения, объявив, что силы уравновешивают друг друга, то есть ускорение будет равно нулю. Другими словами, если $-gradU - \gamma\vec{v}$ не является постоянной величиной, то эти две внешние силы сами по себе велики, а их сумма мала. Это тоже будет считаться установившемся движением. В каждой точке скорость этого движения будет своя, а значит при переходе из точки в точку будет ускорение, просто оно маленькое на фоне того, что могла бы сделать каждая из этих сил по отдельности. Тогда, если это так, получаем, что:

$$-gradU - \gamma\vec{v} = 0 \tag{5.12}$$

Тогда:

$$\vec{v} = -\frac{gradU}{\gamma} \tag{5.13}$$

Теперь вернёмся к гидродинамическому течению. Необходимо выбрать, чему будет равная гидродинамическая скорость $\vec{u_{hd}}$. Будем считать, что данная скорость является скоростью установившегося течения (это довольно сильное допущение). Таким образом:

$$\vec{u_{hd}} = -\frac{gradU}{\gamma} \tag{5.14}$$

Такое допущение возможно тогда, когда решение однородного уравнения для $\vec{v}$ успеет затухнуть. То есть, такой результат имеет место быть, когда $\Gamma t >> 1$. Такой интервал времени будет сильно превышать интервал усреднения.

Отметим, что в данном случае скорость пропорциональна силе - это механика Аристотеля (которая подвергается критике).

Теперь, после усреднение и допущении о том, что $\Gamma t >> 1$, вернёмся к исходному уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left[-Dgrad(\rho) - \frac{\rho}{\gamma}grad(U)\right] \tag{5.15}$$

Получили **Уравнение Эйнштейна-Фоккера-Планка**.

Следствия уравнения Эйнштейна-Фоккера-Планка

Рассмотрим, что можно почерпнуть из данного уравнения для решения практических задач. Получилось, что имеется уравнение первого порядка по t и второго по координатам. Это уравнение параболического типа. Попробуем сформулировать задачу, упростив уравнение, начав со свободной диффузии. То есть, это уравнение можно охарактеризовать, как диффузию крупных частиц среди мелких. Таким образом, положим $grad(U) \equiv 0$, а также $D = const$. Таким образом, получаем уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - Ddiv(grad(\rho)) = 0 \tag{5.16}$$

Для простоты рассмотрим одномерный случай. Получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \\ t \geqslant 0 \\ x \in (-\infty, \infty) \end{cases} \tag{5.17}$$

Значит, задав диапазон времени и координаты, получили свободную диффузию на числовой прямой. Теперь необходимо дописать дополнительные условия к данному

уравнению, чтобы решить его.

Граничные условия получаются из нормировки на константу. Так как уравнение линейное, то имеем право поделить всё на эту константу и производить нормировку просто на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t,x)dx = 1 \tag{5.18}$$

Итак, граничные условия получаются из того, что интеграл должен сходиться, поэтому на $\pm\infty$ $\rho \to 0$. Специфика уравнения и выбора интервала позволяет сказать, что в таком случае нет конечной производной от ρ по x при $\rho \to 0$.

Теперь необходимо, чтобы **начальные условия** соотносились с граничными, то есть они тоже должны подчиняться нормировке, это можно сделать по-разному. Выберем δ - функцию:

$$\rho(t,x)\Big|_{t=0} = \delta(x - x_0) \tag{5.19}$$

Таким образом полностью сформулирована задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \\ t \geqslant 0 \\ x \in (-\infty, \infty) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t,x)dx = 1 \\ \rho(t,x)\Big|_{t=0} = \delta(x - x_0) \end{cases} \tag{5.20}$$

Ответом к данной задаче будет являться функция Грина, благодаря начальному условию. В данном случае есть явный вид этого решения (сам путь решения связан с прямым и обратным Фурье-преобразованием, здесь не приводится):

$$\rho(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi Dt}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} \tag{5.21}$$

Видно, что это распределение Гаусса.

Теперь посчитаем среднее значение координаты:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t,x) \cdot x dx = x_0 \tag{5.22}$$

Ответ получается из следующих соображений. Представим x в виде: $x = (x - x_0) + x_0$. Первое слагаемое вместе с чётной функцией по $(x - x_0)$ даст нуль, во втором слагаемом x_0 вытаскивается из-под интеграла, а интеграл от ρ будет равен единице. Тогда среднее значение координаты будет x_0.

Если говорить о дисперсии x, то:

$$D_x = \overline{(x - \overline{x})^2} = \overline{(x - x_0)^2} \tag{5.23}$$

Тогда, сославшись на свойства распределения Гаусса (выкладки были приведены на лекциях), можно получить ответ:

$$D_x = 2Dt \tag{5.24}$$

С одной стороны получается, что пятно расплывается достаточно медленно, потому что скорость расширения пятна будет:

$$v = \frac{d}{dt}\sqrt{\overline{(x - x_0)^2}} = \frac{d}{dt}\sqrt{2Dt} = \frac{\sqrt{2D}}{2t^{\frac{1}{2}}} \tag{5.25}$$

Если в данном случае говорить о больших временах, то всё хорошо, пятно медленно расширяется, что соответствует наблюдению. Однако для малых значений времени получается бесконечная скорость, что неверно. Дело в том, что начальный процесс описывается чем-то похожим на волновое уравнение - это распространение сигнала. То есть в начале совершенно другое уравнение.

Задача Предлагается самостоятельная задача. Сформулировать краевую задачу для одномерной диффузии в поле $U = \frac{kx^2}{2}$ на отрезке $[a, b]$, ограниченном непроницаемыми стенками.

Семинар 6. Спектральные разложения в теории случайных процессов.

Корреляционная функция процесса, являющегося производной по времени другого стационарного случайного процесса

Имеется задача. Есть стационарный случайный процесс, характеризующийся своей корреляционной функцией. Требуется найти корреляционную функцию для другого процесса, который является производной по времени от исходного процесса.

Для начала выделим определения без конкретики задачи. Имеется стационарный случайный процесс $x(t)$. Тогда среднее значение будет константным (если он стационарен в узком смысле, то функция w_1 не зависит от времени, если же стационарен в широком смысле, то постоянное среднее значение равное константе просто постулируется):

$$\overline{x} = \int x_1 w_1(x_1, t_1) dx_1 = const = x_0 \tag{6.1}$$

Введём какой-то $y = x - x_0$, тогда $\overline{y} = 0$. То есть, если какой-то процесс оказался стационарным, то всегда можно перевести его в процесс со средним равным нулю, а это называется центрированным процессом.

Если говорить о временной корреляционной функции, то получаем (считаем, что процесс стационарен и центрирован):

$$F_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} - \overline{x(t_1)} \cdot \overline{x(t_2)} \tag{6.2}$$

Причём, как только что было отмечено, $\overline{x(t_1)} = 0$ и $\overline{x(t_2)} = 0$. Теперь можно ввести процесс $y = \frac{dx}{dt}$ (как в условии задачи) и получить:

$$F_y(t_1, t_2) = \overline{y(t_1)y(t_2)} \tag{6.3}$$

Снова последние два слагаемых нули (здесь даже не написаны). Теперь перепишем равенство, подставив y:

$$F_y(t_1, t_2) = \overline{\frac{dx(t_1)}{dt_1}\frac{dx(t_2)}{dt_2}} \tag{6.4}$$

Теперь раскроем более подробно F_x:

$$F_x(t_1, t_2) = \int x_1 x_2 w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \tag{6.5}$$

А теперь F_y (теперь видно, что операции дифференцирования можно вынести из-под

интеграла):

$$F_y = \frac{d^2}{dt_1 dt_2}(\overline{x(t_1)x(t_2)}) = \frac{d^2 F_x}{dt_1 dt_2} \tag{6.6}$$

Теперь надо учесть, что процесс является стационарным (до этого использовалась только центрированность). Итак, если процесс x стационарен, то временная корреляционная функция:

$$F_x(t_1, t_2) = F_x(t) \tag{6.7}$$

Тут $t = t_2 - t_1$. Тогда получается, что F_x зависит от t - от одной переменной, тогда можно переписать производные:

$$\frac{d}{dt_1} = -\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt_2} = \frac{d}{dt} \tag{6.8}$$

Тогда окончательно получаем:

$$F_y(t) = -\frac{d^2 F_x(t)}{dt^2} \tag{6.9}$$

Далее, явно задано F_x (на рисунке 6.1 отражён примерный вид графика $F_x(t)$):

$$F_x(t) = F(0)e^{-\Gamma|t|} \tag{6.10}$$

Первую производную легко построить (рисунок 6.2). У второй производной в нуле будет

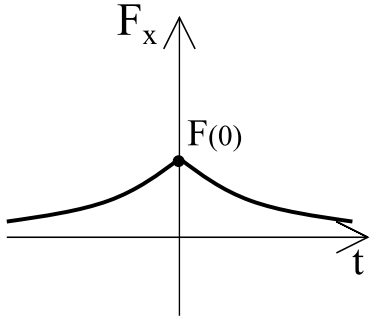

Рис. 6.1: Примерный вид зависимости $F_x(t)$.

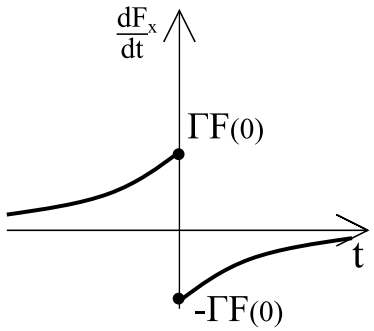

Рис. 6.2: Примерный вид зависимости $\frac{dF_x}{dt}$.

δ - функция с амплитудой $-2\Gamma F(0)$. (рисунок 6.2).

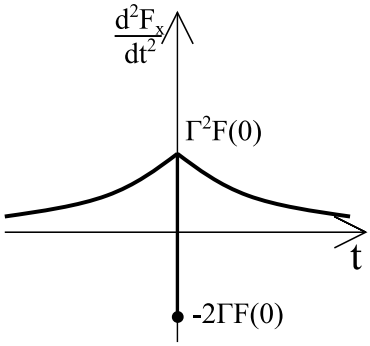

Рис. 6.3: Примерный вид зависимости $\frac{d^2F_x}{dt^2}$.

Тогда можем явно выразить F_y:

$$F_y(t) = -\Gamma^2 F_x(t) + 2\Gamma F(0)\delta(t) \tag{6.11}$$

Это результат, полученный из графического дифференцирования. Получилось, что во временной корреляционной функции процесса y возникла δ - функция, то есть, возник белый шум. Получается, что процесс y имеет шум, а x - не имеет. При решении уравнения Ланжевена тоже неожиданно может наоборот исчезнуть белый шум.

Теперь проверим аналитически данное решение. Также имеем $x(t)$ - стационарный процесс, а также $(t = t_2 - t_1)$:

$$F_x(t_1, t_2) = F_x(t) \tag{6.12}$$

Если строить F_x до учёта стационарности процесса, то это будет функция двух переменных. Ей соответствует свой Фурье-образ, который получится, если сделать двойное Фурье преобразование по двум частотам. Таким образом, так как:

$$F_x(t_1, t_2) = \overline{x^*(t_1)x(t_2)} \tag{6.13}$$

Тогда это можно представить как:

$$F_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_w^* x_{w'}} e^{+iwt_1} e^{-iw't_2} dw dw' = F_x(t) \tag{6.14}$$

Теперь нужно избавиться от двух переменных и перейти к одной. Если это функция одной переменной, значит у неё есть соответствующий Фурье-образ. Запишем требование, называемое условием стационарности случайного процесса в спектральном представлении:

$$\overline{x_w^* x_{w'}} = g_x(w)\delta(w - w') \tag{6.15}$$

Подставив, получаем выражение для F_x:

$$F_x = \int_{-\infty}^{\infty} g_x(w) e^{-iwt} dw \tag{6.16}$$

А также можно получить g_x:

$$g_x(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(t) e^{iwt} dt \tag{6.17}$$

Теперь подставим в формулу для F_y:

$$F_y(t) = -\frac{d^2 F_x(t)}{dt^2} = -F_y(t) = -\frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} g_x(w) e^{-iwt} dw = \int_{-\infty}^{\infty} w^2 g_x(w) e^{-iwt} dw \tag{6.18}$$

Кроме того, для F_y также можно записать:

$$F_y = \int_{-\infty}^{\infty} g_y(w) e^{-iwt} dw \tag{6.19}$$

Если посмотреть на последние два равенства, то имеем два представления одной и той же функции, тогда Фурье-образы совпадают:

$$g_y(w) = w^2 g_x(w) \tag{6.20}$$

Отметим, что последнее соотношение верно не всегда, а только тогда, когда y является производной процесса x.

Теперь нужно посчитать g_x:

$$g_x(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(0) e^{-\Gamma|t|} e^{iwt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} F(0) e^{(\Gamma+iw)t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} F(0) e^{(-\Gamma+iw)t} dt =$$

$$= \frac{F(0)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\Gamma + iw} + \frac{-1}{-\Gamma + iw} \right\} = \frac{F(0)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\Gamma + iw} + \frac{1}{\Gamma - iw} \right\} = \frac{F(0)\Gamma}{\pi(\Gamma^2 + w^2)} \tag{6.21}$$

Теперь запишем g_y:

$$g_y(w) = \frac{F(0)\Gamma w^2}{\pi(\Gamma^2 + w^2)} = \frac{F(0)\Gamma[(w^2 + \Gamma^2) - \Gamma^2]}{\pi(\Gamma^2 + w^2)} = \frac{F(0)\Gamma}{\pi} - \Gamma^2 \cdot \frac{F(0)\Gamma}{\pi(\Gamma^2 + w^2)} \tag{6.22}$$

Теперь видно, что первое слагаемое - это константа, а второе слагаемое уже было (это известная функция, умноженная на константу, значит в ответе, при Фурье-преобразовании, будет функция, умноженная на ту же константу). Фурье образ первого слагаемого будет δ - функцией. Итак, запишем:

$$F_y(t) = -\Gamma^2 F_x(t) + 2F(0)\Gamma\delta(t) \tag{6.23}$$

Таким образом, получилось, что результат совпадает с графическим методом.

Задача для самостоятельного решения. Пусть $x(t)$ - стационарный случайный процесс. Пусть $y(t)$ такой процесс:

$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} x(t')dt' \tag{6.24}$$

Требуется найти отношение (в вышеописанных терминах) $\frac{g_y(w)}{g_x(w)}$.

Семинар 7. Спектральные разложения в теории случайных процессов.

Формула Найквиста

Имеется источник ЭДС $\mathcal{E}$(именно тот самый случайный шум, с которым надо бороться). Шум генерируется в цепи. Так как шум надо рассматривать в полосе, то поставим в цепи фильтр, а затем конденсатор C (который изображает разомкнутую цепь) и резистор R (схема на рисунке 7.1). Моделирование белым шумом будет происходить в полосе,

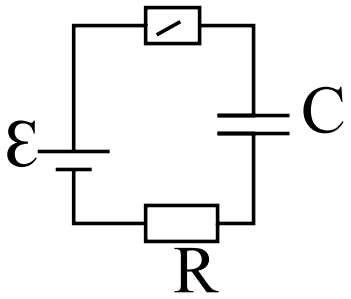

Рис. 7.1: Схема цепи, состоящей из источника ЭДС $\mathcal{E}$, фильтра, конденсатора C и резистора R.

потому что, в рамках данного курса, хочется иметь дело с конечным результатом, потому что только тогда средний квадрат модуля ЭДС будет конечен. Кроме того, реальность такова, что почти любая радиотехническая цепь имеет определённую полосу пропускания. Говорим, что $\mathcal{E}(t)$ - белый шум в полосе $\Delta\omega$.

Можем записать закон Кирхгофа:

$$\mathcal{E} = IR + \frac{q}{C} \tag{7.1}$$

Так как $I = \dot{q}$, то можем переписать уравнение:

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{1}{R}\mathcal{E} \tag{7.2}$$

Это уравнение похоже на уравнение Ланжевена. Решением этого уравнения является сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Имеем однородное уравнение, и зададим начальное условие:

$$\begin{cases} \dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0 \\ q(t=0) = q_0 \end{cases} \tag{7.3}$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{7.4}$$

Пусть $t >> RC$. Значит, общее решение однородного уравнения успеет уйти к нулю, в таком случае останется частное решение неоднородного. Аналогично решению уравнения Ланжевена, построим частное решение неоднородного уравнения через его Фурье-образ:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q_\omega e^{-i\omega t} d\omega \tag{7.5}$$

Для ЭДС тоже запишем выражение в форме, связанной с Фурье-образом:

$$\mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega \tag{7.6}$$

Теперь подставим всё вместе в исходное уравнение и получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\omega + \frac{1}{RC}\right) q_\omega e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} \mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega \tag{7.7}$$

Таким образом, так как равенство функций означает равенство Фурье-образов, получаем, что:

$$q_\omega = \frac{\frac{1}{R}\mathcal{E}_\omega}{-i\omega + \frac{1}{RC}} \tag{7.8}$$

Цель - связать дисперсию ЭДС (средний квадрат модуля, так как $\overline{\mathcal{E}} = 0$) с параметрами схемы. Однако, видно, что понадобится и дисперсия заряда, которая является средним от модуля q в квадрате. Есть теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы классической системы, тогда, так как энергия конденсатора - это $\frac{q^2}{2C}$, а конденсатор считается классическим объектом, то тогда в среднем, согласно теореме, это будет $\frac{\theta}{2}$. Тогда, температуру можно связать с соответствующей конструкцией, где присутствует q_ω. Тогда температура сказывается на результате в виде дисперсии ЭДС.

Теперь можно записать:

$$\overline{\mathcal{E}} = 0 \Rightarrow \overline{q(t)} = 0 \tag{7.9}$$

Как было ранее сказано:

$$\frac{\overline{|q(t)|^2}}{2C} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \overline{|q(t)|^2} = C\theta \tag{7.10}$$

Тогда дисперсия:

$$C\theta = \overline{|q(t)|^2} = \overline{q^*(t)q(t)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{q_\omega^* q_{\omega'}} e^{i\omega t - i\omega' t} d\omega d\omega' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\mathcal{E}_\omega^* \mathcal{E}_{\omega'}} e^{i\omega t - i\omega' t}}{R^2\left(\frac{1}{RC}+i\omega\right)\left(\frac{1}{RC}-i\omega'\right)} d\omega d\omega' \tag{7.11}$$

Теперь отметим, что, так $\mathcal{E}(t)$ - стационарен, то:

$$\overline{\mathcal{E}_\omega^* \mathcal{E}_{\omega'}} = g_{\mathcal{E}}(\omega)\delta(\omega-\omega') \tag{7.12}$$

Тогда средний квадрат модуля заряда:

$$\overline{|q(t)|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\mathcal{E}}(\omega)}{R^2\left[\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2\right]} d\omega \tag{7.13}$$

Теперь используем тот факт, что ЭДС представляет собой именно белый шум. Тогда:

$$g_{\mathcal{E}}(\omega) = \begin{cases} g_{\mathcal{E}}(0), |\omega| \le \Delta\omega \\ 0, |\omega| > \Delta\omega \end{cases} \tag{7.14}$$

Теперь запишем квадрат модуля ЭДС:

$$\overline{|\mathcal{E}(t)|^2} = lim_{t'\to t} F_{\mathcal{E}}(t,t') = lim_{t'\to t} \int g_{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\mathcal{E}}(\omega) d\omega =$$

$$= \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} g_{\mathcal{E}}(0) d\omega = g_{\mathcal{E}}(0)\cdot 2\Delta\omega \tag{7.15}$$

И квадрат модуля заряда:

$$\overline{|q(t)|^2} = \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{g_{\mathcal{E}}(0) d\omega}{R^2\left[\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2\right]} \tag{7.16}$$

Вычислим вспомогательный интеграл:

$$I = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x^2+\Gamma^2} = \left\{\frac{x}{\Gamma} = y\right\} = \int_{\frac{-a}{\Gamma}}^{\frac{a}{\Gamma}} \frac{\Gamma dy}{\Gamma^2(y^2+1)} = \frac{1}{\Gamma}\int_{\frac{-a}{\Gamma}}^{\frac{a}{\Gamma}} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2arctg\frac{a}{\Gamma}}{\Gamma} \tag{7.17}$$

Введём новое требование $\Delta\omega >> \frac{1}{RC}$. Тогда, получается (так как в $arctg$ появляется в этом случае бесконечность), что:

$$I = \frac{\pi}{\Gamma} \tag{7.18}$$

Итого, используя результат вспомогательного интеграла, получаем:

$$\overline{|q(t)|^2} = \frac{g_{\mathcal{E}}(0)}{R^2}\cdot \pi RC = C\theta \tag{7.19}$$

Тогда можем найти $g_{\mathcal{E}}(0)$:

$$g_{\mathcal{E}}(0) = \frac{\theta R}{\pi} \tag{7.20}$$

А также, учитывая, что $\omega = 2\pi f$:

$$\overline{|\mathcal{E}(t)|^2} = 2\Delta\omega\frac{\theta R}{\pi} = 4\theta R\Delta f \tag{7.21}$$

Отметим, что полученный результат не универсален, а справедлив при л=двух допущениях:

$$t >> RC >> \frac{1}{\Delta\omega} \tag{7.22}$$

Получается, что для снижения шума, входные цепи должны быть низкоомными.

Явления переноса

Задача. С помощью решения стационарного кинетического уравнения с релаксационным членом, рассчитать коэффициенты диффузии и термодиффузии.

На лекции было выведено первое уравнение цепочки Боголюбова для кинетических функций распределения. Запишем результат:

$$\frac{\partial F_1(t,\vec{r},\vec{p})}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{V}\int \frac{\partial \Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|)}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F_2(t,\vec{r},\vec{p},\vec{r}',\vec{p}')}{\partial \vec{r}} d\vec{r}'\vec{p}' \tag{7.23}$$

Это уравнение выведено из уравнения Лиувилля, которое инвариантно относительно выбора гамильтониана. Однако то, что написано выше, не обладает такой инвариантностью. В нём учтено только парное взаимодействие. Уравнение не замкнуто относительно F_1, но, выразив F_2, можно такого добиться. Однако замкнутости недостаточно для того, чтобы уравнение называлось кинетическим. Должна происходить эволюция к равновесию необратимым образом. Можно замкнуть уравнение, поставив нуль в правую часть. В правую часть можем поставить то, что нужно и перейти к уравнению с релаксационным членом. Тогда:

$$\frac{\partial F_1(t,\vec{r},\vec{p})}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}} = -\frac{F_1 - (F_1)_0}{\tau} \tag{7.24}$$

Здесь выше τ и $(F_1)_0$ не зависят от t, то есть это функции от координаты и импульса. Запишем что такое F_1:

$$F_1(t,\vec{r},\vec{p}) = V\int w_n(t,p,q)d\vec{r}_1 d\vec{p}_2 ... d\vec{r}_n d\vec{p}_n \tag{7.25}$$

Получилось, что имеется замкнутое относительно F_1 уравнение. Осталось проверить, есть ли эволюция к равновесию. Упростим уравнение (так как внешние поля не играют

роли в переходе к равновесию). Пусть $\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \equiv 0$. Теперь, чтобы избавиться от второго слагаемого, следует перейти к локальному описанию. То есть, выбираем настолько маленький объём, в котором считаем частицы, что при переходе к другому такому маленькому объёму, погрешность подсчёта количества частиц будет сопоставима с разницей в одном и в другом, тогда производная $\frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} = 0$.

Перепишем уравнение с начальным условием:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{F_1 - (F_1)_0}{\tau} \\ F_1(t=0) = F(0) \end{cases} \tag{7.26}$$

Решаем, сделав замену $F_1(t) - (F_1)_0 = y$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{y}{\tau} \\ y(0) = F_1(0) - (F_1)_0 \end{cases} \tag{7.27}$$

Решая, получаем:

$$F_1(t) = (F_1)_0 + [F_1(0) - (F_1)_0]\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7.28}$$

Получается, что τ - это **период перехода к локальному равновесию**, а $(F_1)_0$ - это **локальное равновесное распределение.**

Теперь введём по определению:

$$F(t, \vec{r}, \vec{p}) = m^3 \frac{N}{V} F_1(t, \vec{r}, \vec{p}) \tag{7.29}$$

Причём $\vec{p} = m\vec{v}$. По смыслу F - это функция от координат и скоростей, она должна быть нормирована. Запишем нормировочный интеграл:

$$\int F(t, \vec{r}, \vec{p}) d\vec{r} d\vec{v} = \frac{N}{V} \int F_1(t, \vec{r}, \vec{p}) d\vec{r} (m^3 d\vec{v}) = \frac{N}{V} \int F_1(t, \vec{r}, \vec{p}) d\vec{r} \vec{p} = N \tag{7.30}$$

Тогда, получается, что нормировочный интеграл равен N. Тогда можно записать:

$$\int F(t, \vec{r}, \vec{p}) d\vec{v} = n(t, \vec{r}) \tag{7.31}$$

То есть, последний интеграл равен концентрации частиц.

Теперь перепишем исходное уравнение в терминах F:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} = -\frac{F - F_0}{\tau} \tag{7.32}$$

Теперь рассмотрим решение стационарного уравнения. То есть, пусть $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Тогда

уравнение будет:

$$F = F_0 - \tau \left(\vec{v} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} \right) \tag{7.33}$$

Теперь рассмотрим слабую неравновесную систему, тогда $|F - F_0| << F_0$. Тогда, используя итерационную процедуру (до второго шага), получаем:

$$F = F_0 - \tau \left(\vec{v} \frac{\partial F_0}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \frac{\partial F_0}{\partial \vec{v}} \right) \tag{7.34}$$

Отметим, что сначала нужно записать F_0. Оно не зависит от времени, так как F - не зависит. Так как рассматривается разреженный классический газ, то F_0 - это конструкция, которая, в частности, должна содержать распределение Максвелла. Учитывая, что оно отнормированно на число частиц, можно представить его в виде:

$$F_0 = nw(\vec{v}, \vec{r}) \tag{7.35}$$

Здесь w - функция распределения по скоростям, но она также содержит и температуру в нормировочной константе, а температура может быть функцией координат (благодаря этому возникает термодиффузия). Раскроем выражение:

$$F_0 = n(\vec{r}) \left[\frac{m}{2\pi\theta(\vec{r}} \right] e^{-\frac{m[\vec{v} - \vec{u}_{hd}(\vec{r})]^2}{2\theta(\vec{r})}} \tag{7.36}$$

Здесь u_{hd} - гидродинамическая скорость. Последнее выражение называется локально - равновесным распределением Максвелла, умноженным на концентрацию.

Расчёт коэффициента диффузии и термодиффузии

Рассматриваем плотность потока частиц j. Плотность потока складывается из двух составляющих. Одна по причине разной концентрации в разных местах, а вторая по причине разной температуры. Получается:

$$\vec{j_N} = -D \frac{\partial n}{\partial \vec{r}} - D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial \vec{r}} \tag{7.37}$$

Здесь n - концентрация частиц, D_θ - коэффициент термодиффузии, D - коэффициент диффузии.

Плотность потока частиц была получена в теме броуновского движения:

$$\vec{j_N} = \int \vec{v} \cdot (n \cdot w) d^3 v \tag{7.38}$$

Видно, что $n \cdot w = F$. В данной задаче F будет немного другой (внешних полей нет, но

происходит диффузия):

$$F = F_0 - \tau \left(\vec{v} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} \right) \tag{7.39}$$

Будем считать, что ось z параллельна производной F, то есть $O_z || \frac{\partial F}{\partial \vec{r}}$. Тогда можно упростить скалярное произведение в последнем выражении:

$$F = F_0 - \tau v_z \frac{\partial F_0}{\partial z} = F_0 - \tau v_z \left(\frac{\partial n}{\partial z} \cdot w + n \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \tag{7.40}$$

Последний переход справедлив (F_0 вывели ранее), потому что скорость гидродинамического течения нулевая и производная v по r тоже, то есть $\frac{\partial v}{\partial \vec{r}} \equiv 0$ и $\vec{u}_{hd} = 0$.

Так как задача стала одномерной (взяли проекцию по z), тогда можно записать проекцию плотности потока:

$$j_z = \int v_z \cdot n \cdot w(\vec{v}) d^3v - \frac{\partial n}{\partial z} \int \tau \cdot v_z^2 \cdot w(\vec{v}) d^3v - \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot n \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \int \tau \cdot v_z^2 \cdot w(\vec{v}) d^3v \tag{7.41}$$

Первое слагаемое равняется нулю, так как интегрирование идёт по всему пространству скоростей, получается нечётная функция на чётную. Интеграл во втором слагаемом будет коэффициентом диффузии, а интеграл помноженный на концентрацию и производная по θ в третьем слагаемом - коэффициентом термодиффузии:

$$D = \int \tau \cdot v_z^2 \cdot w(\vec{v}) d^3v \tag{7.42}$$

$$D_\theta = n \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \int \tau \cdot v_z^2 \cdot w(\vec{v}) d^3v \tag{7.43}$$

Семинар 8. Явления переноса.

Вычисление коэффициента термодиффузии в классическом разреженном газе при условии постоянства давления

Вычислим коэффициент термодиффузии в классическом разреженном газе при условии $p = const$. Будем считать, что $\tau = const$.

$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t}^{t+\tau} x(t')dt' \tag{8.1}$$

$$\alpha = t' - t, \quad d\alpha = dt' \tag{8.2}$$

$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{\tau} x(\alpha + t)d\alpha \tag{8.3}$$

$$y(\omega) = \frac{1}{2\pi\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{0}^{\tau} x(\alpha+t)d\alpha\right]e^{i\omega t}dt = \frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{\tau} d\alpha\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\alpha+t)e^{i\omega(t+\alpha-\alpha)}dt =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{\tau} d\alpha \cdot e^{-i\omega\alpha}\cdot\chi(\omega) = \frac{1}{\tau}\chi(\omega)\cdot\frac{1}{-i\omega}\left[e^{-i\omega\tau}-1\right] \tag{8.4}$$

$$\frac{\overline{\chi^*_\omega x_{\omega'}}}{\overline{y^*_\omega y_{\omega'}}} = \frac{g_x(\omega)}{g_y(\omega)} = \frac{\overline{\chi^*_\omega x_{\omega'}}}{\overline{\frac{x^*\omega}{i\omega\tau}}\left[e^{i\omega\tau}-1\right]\cdot\overline{\frac{x_{\omega'}}{-i\omega'\tau}}\cdot\left[e^{-i\omega'\tau}-1\right]} = [\omega = \omega'] =$$

$$= \frac{-1}{\frac{e^{i\omega\tau}-1}{(i\omega\tau)^2}\cdot\left(e^{-i\omega\tau}-1\right)} = \frac{e^{\frac{i\omega\tau}{2}}\left[e^{\frac{i\omega\tau}{2}} - e^{\frac{-i\omega\tau}{2}}\right]}{\frac{i\omega\tau}{2}\cdot 2} = e^{\frac{i\omega\tau}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\cdot\frac{2}{\omega\tau} \tag{8.5}$$

Окончательно получаем:

$$\frac{g_y(\omega)}{g_x(\omega)} = sinc^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{8.6}$$

Изобразим график. Сначала рассмотрим график $sinc(x)$ (см. рис. 8.1). Отсюда получаем, что график $sinc(x)^2$ имеет вид, изображённый на рис. 8.2.

При этом область, в которой сосредоточен спектр - между двумя первыми нулями функции. Далее функция быстро убывает. Таким образом, если сигнал усредняется по времени, то его спектр эффективно сужается.

$sinc(x) = \frac{sinx}{x}$

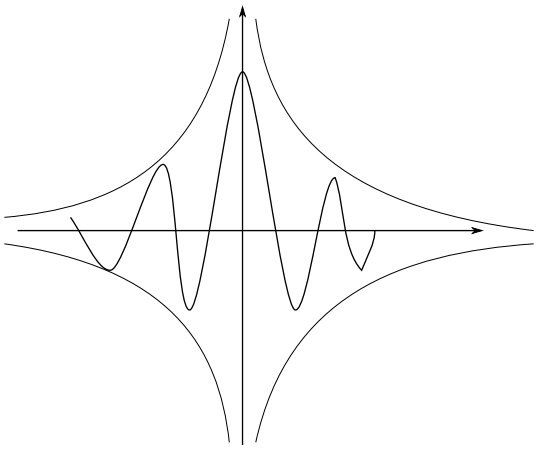

Рис. 8.1: График $sinc(x)$

$sinc^2(x)$

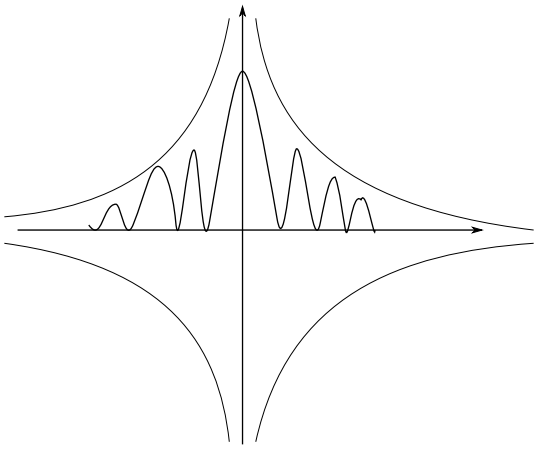

Рис. 8.2: График $sinc^2(x)$

Расчёт коэффициента внутреннего трения

Задача. Рассчитать коэффициент внутреннего трения в термически однородном классическом газе.

Запишем выражение:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_z \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial v_z} = -\frac{F - F_0}{\tau} \tag{8.7}$$

Внешнее полу отсутствует, поэтому:

$$\frac{\partial U}{\partial z} \equiv 0 \tag{8.8}$$

Так как случай стационарный:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0 \tag{8.9}$$

Учитывая это, выразим функцию F:

$$F = F_0 - \tau v_z \frac{\partial F}{\partial z} \tag{8.10}$$

В случае слабой неравновестности будем считать, что

$$\tau v_z \frac{\partial F}{\partial z} \ll F \tag{8.11}$$

Тогда получим:

$$F = F_0 - \tau v_z \frac{\partial F_0}{\partial z} \tag{8.12}$$

Рассмотрим возникновение коэффициента внутреннего трения. Пусть вдоль оси z нарастает скорость регулярного течения (рис. 8.3).

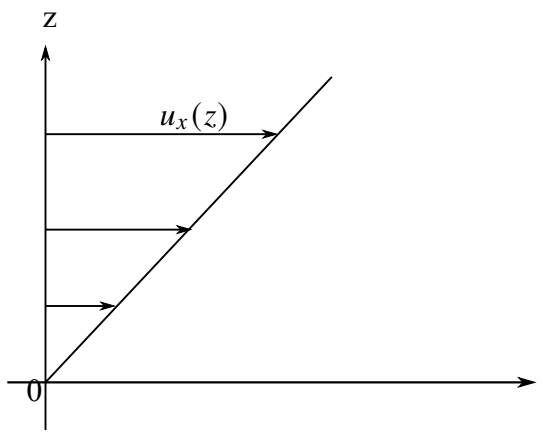

Рис. 8.3: Иллюстрация к решению задачи

Таким образом, гидродинамическая скорость - вектор

$$\vec{U}_{\text{гд}} = (U_x, 0, 0) = (\alpha z, 0, 0) \tag{8.13}$$

При этом считаем, что U_x прямо пропорционально z.

Тогда

$$F_0 = n \cdot w(\vec{v}, z) \tag{8.14}$$

Где функция распределения

$$w(\vec{v}, z) = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(\vec{v}-\vec{u})^2}{2\theta}} = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2\theta}\left[(v_x-\alpha z)^2+v_y+v_z\right]} \tag{8.15}$$

Слои движутся друг относительно друга, между ними есть трение. Сила трения связана с изменением импульса системы. Рассмотрим перенос горизонтальной составляющей импульса:

$$\overline{\left(j_{p_x}\right)_z} = \int m v_x \cdot v_z F d^3 v \tag{8.16}$$

Подставим значение для F:

$$\overline{\left(j_{p_x}\right)_z} = \int m v_x \cdot v_z F d^3 v = \int m v_x v_z \cdot n w(\vec{v}, z) d^3 v - \int m v_x v_z \tau v_z n w(\vec{v}) \frac{m}{\theta} \cdot \alpha (v_x - \alpha z) d^3 v \tag{8.17}$$

где было учтено, что

$$\frac{\partial F_0}{\partial z} = n \frac{\partial w}{\partial z} = n \cdot w \cdot \left(-\frac{m}{2\theta}\right) \cdot 2 \cdot (v_x - \alpha z)\,(-\alpha)$$

Отметим, что α - это отношение изменения скорости U_x к изменению высоты:

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} = \alpha$$

Учтём, что первое слагаемое в (8.17) равно нулю (как интеграл от чётной функции в симметричных пределах).

Для вычисления интеграла во втором слагаемом введём вектор:

$$\vec{v_1} = \vec{v} - \vec{u} = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}) \tag{8.18}$$

При этом

$$v_{1x} = v_x - \alpha z \tag{8.19}$$

и

$$v_{1y} = v_y,\ v_{1z} = v_z \tag{8.20}$$

Тогда

$$w(\vec{v_1}) = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v_1^2}{2\theta}} \tag{8.21}$$

Тогда плотность потока

$$\left(j_{p_x}\right)_z = -\int m(v_{1x} + \alpha z) v_{1x} \cdot v_{1z}^2 \tau \frac{n \cdot m}{\theta} w(\vec{v_1}) d^3 v_1 \cdot \alpha = -\eta\alpha \tag{8.22}$$

Тогда для коэффициента внутреннего трения получаем:

$$\eta = \frac{m^2 n}{\theta} \overline{\tau v_x^2 v_z^2} \tag{8.23}$$

Если учесть, что $\tau = const$, то среднее произведения распадается на произведение средних:

$$\overline{v_x^2 v_z^2} = \overline{v_x^2} \cdot \overline{v_z^2} = \left(\frac{\theta}{m}\right)^2 \tag{8.24}$$

Тогда

$$\eta_{\tau=const} = n\tau\theta \tag{8.25}$$

Семинар 9. Явления переноса.

Разбор задачи

С одной стороны, можно представить давление в виде произведения концентрации на температуру:

$$p = n\theta = const \tag{9.1}$$

Получим:

$$\frac{\partial n}{\partial z} \cdot \theta + n \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{9.2}$$

Отсюда выразим градиент концентрации:

$$\frac{\partial n}{\partial z} = -\frac{n}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{9.3}$$

Тогда проекция плотности потока частиц на ось z:

$$j_z = -D\frac{\partial n}{\partial z} - D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{9.4}$$

Учтём (9.2) и получим:

$$j_z = -\frac{\partial \theta}{\partial z}\left(D_\theta - \frac{n}{\theta}D\right) = -\frac{\partial \theta}{\partial z} D_\theta \Big|_{p=const} \tag{9.5}$$

где было учтено, что

$$\tau = const \tag{9.6}$$

Тогда получаем:

$$D_\theta \Big|_{\substack{p=const \\ \tau=const}} \tag{9.7}$$

Электронный газ в металле

Задача. Электронный газ в металле считаем классическим газом. На основе стационарного решения кинетического уравнения с релаксационным членом рассчитать теплопроводность электронного газа при отсутствии электрического тока и его проводимость.

Выпишем кинетическое уравнение в форме

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} = -\frac{F - F_0}{\tau} \tag{9.8}$$

Объявим:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{9.9}$$

Выразим функцию F:

$$F = F_0 - \tau \left(\vec{v} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} \right) \tag{9.10}$$

Предположим слабую неравновесность:

$$\left| \frac{F - F_0}{F_0} \right| \ll 1 \tag{9.11}$$

Тогда можно осуществить итерационную процедуру. Тогда в первом приближении можно получить:

$$F = F_0 - \tau \left(\vec{v} \frac{\partial F_0}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\partial F_0}{\partial \vec{v}} \right) \tag{9.12}$$

При этом

$$F_0 = n \cdot w(\vec{v}, \vec{r}) \tag{9.13}$$

Запишем закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{9.14}$$

где E - напряжённость поля.

Если есть градиент температуры, то теплоперенос. Однако нужно учесть, что градиент температуры вызывает перенос не только тепла, но и частиц. Частицы заряжены, значит из перенос - это электрический ток. По условию данного переноса не должно быть.

Рассчитаем проводимость, опираясь на закон Ома в дифференциальной форме. Будем считать, что концентрация и температура постоянны: $n,\ \theta - const$ Тогда

$$F_0 = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\theta}} \tag{9.15}$$

Направим ось z вдоль поля:

$$\vec{E} = (0, 0, E) \tag{9.16}$$

Тогда

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{eE}{m} \tag{9.17}$$

Здесь было учтено, что внешнее поле однородно, а для электрона $q_e = -e < 0$. Отсюда получаем:

$$F = F_0 + \tau \frac{eE}{m} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial v_z} = nw(\vec{v}) + \tau \frac{eE}{m} \cdot n \cdot w(\vec{v}) \left(-\frac{m}{\theta} v_z \right) \tag{9.18}$$

Посчитаем проекцию на ось z плотности электрического тока:

$$\left(\vec{j}_e\right)_z = (-e) \cdot j_z = -e \int v_z F d^3v \tag{9.19}$$

где j_z – плотность потока частиц.

Тогда получаем:

$$\left(\vec{j}_e\right)_z = -e \int v_z n w(\vec{v}) d^3v + e\frac{m}{\theta} \cdot n \frac{eE}{m} \int \tau w(\vec{v}) v_z^2 d^3v = \sigma E \tag{9.20}$$

Первый интеграл в (9.20) равен нулю, как интеграл в симметричных пределах от произведения чётной функции $w(\vec{v})$ на нечётную функцию v_z.

Окончательно получаем:

$$\sigma = \frac{e^2 n}{\theta} \cdot \overline{\tau v_z^2} \tag{9.21}$$

Пусть $\tau = const$. Тогда получим:

$$\sigma = \frac{e^2 n}{\theta} \tau \frac{\theta}{m} = \frac{e^2 n \tau}{m} \tag{9.22}$$

Рассмотрим вторую часть задачи. Далее мы введём внешнее поле (чтобы обнулить перенос заряда). Учтём вклад от градиента:

$$F = F_0 - \tau \left(v_z \frac{\partial F_0}{\partial z} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right) \tag{9.23}$$

Учтём, что температура зависит от координаты:

$$F_0 = n w(\vec{v}, \theta(z)) \tag{9.24}$$

Тогда

$$\frac{\partial F_0}{\partial z} = n \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{9.25}$$

Тогда выражение для F имеет вид:

$$F = n \cdot w - \tau v_z \cdot n \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \tau \frac{eE}{m} n \cdot w(\vec{v}) \left(-\frac{m}{\theta}\right) v_z \tag{9.26}$$

По условию, плотность электрического тока $j_z = 0$. Тогда

$$j_z = \int v_z F d^3v = \int v_z \cdot n \cdot w d^3v - \frac{\partial \theta}{\partial z} n \cdot \int \tau v_z^2 \frac{\partial w}{\partial \theta} d^3v - \frac{eE}{m} n \frac{m}{\theta} \int \tau v_z^2 w(\vec{v}) d^3v = 0 \tag{9.27}$$

Первое слагаемое в (9.27) равен нулю. В результате получаем:

$$-\frac{\partial\theta}{\partial z}n\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\tau v_z^2}\right)-\frac{eE}{\theta}n\left(\overline{\tau v_z^2}\right)=0 \tag{9.28}$$

Отсюда можем получить напряжённость поля:

$$E=-\frac{\partial\theta}{\partial z}\cdot\frac{\theta}{e}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\tau v_z^2}\right)}{\overline{\tau v_z^2}} \tag{9.29}$$

Тогда

$$F=n\cdot w-\tau v_z n\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\tau v_z\frac{en}{\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}\cdot\frac{\theta}{e}\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\tau v_z^2}\right)}{\overline{\tau v_z^2}}w \tag{9.30}$$

Посчитаем проекцию на ось z от плотности потока тепла:

$$\left(\vec{j}_Q\right)_z=\int\frac{mv^2}{2}\cdot v_zFd^3v=\int\frac{mv^2}{2}v_znw(\vec{v})d^3v-$$
$$-\frac{\partial\theta}{\partial z}n\int\frac{mv^2}{2}\tau v_z^2\frac{\partial w}{\partial\theta}d^3v+n\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\tau v_z^2}\right)}{\overline{\tau v_z^2}}\int\frac{mv^2}{2}\tau v_z^2w(\vec{v})d^3v \tag{9.31}$$

Первое слагаемое в (9.31) равно нулю как интеграл в симметричных пределах от чётной функции. В оставшихся двух слагаемых фигурирует $\frac{\partial\theta}{\partial z}$. Вынесем общий множитель за скобки, а оставшееся назовём теплопроводностью (при условии, что отсутствует электрический ток):

$$\left(\vec{j}_Q\right)_z=-\frac{\partial\theta}{\partial z}\varkappa_0 \tag{9.32}$$

где

$$\varkappa_0=n\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\left(\frac{mv^2}{2}\tau v_z^2\right)}-\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\tau v_z^2}\right)}{\left(\overline{\tau v_z^2}\right)}\cdot\left(\overline{\frac{mv^2}{2}\cdot\tau v_z^2}\right)\right] \tag{9.33}$$

Рассмотрим случай $\tau=const$. Тогда

$$\overline{\tau v_z^2}=\tau(\overline{v_z^2})=\tau\frac{\theta}{m} \tag{9.34}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\left(\tau v_z^2\right)}=\frac{\tau}{m} \tag{9.35}$$

Учтём, что

$$\overline{\left(\frac{mv^2}{2}\tau v_z^2\right)}=\frac{1}{3}\overline{\left(\frac{mv^2}{2}\tau v^2\right)}=\frac{m\tau}{6}\overline{v^4} \tag{9.36}$$

При этом

$$\overline{v^2} = \overline{(\Delta\vec{v})^2} = 3\frac{\theta}{m} \tag{9.37}$$

Посчитаем:

$$\overline{v^2} = \int\limits_0^\infty 4\pi v^2 v^2 \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\theta}} dv \tag{9.38}$$

Введём переменную

$$\frac{mv^2}{2\theta} \equiv x \tag{9.39}$$

Тогда

$$v^2 = \frac{2\theta}{m}x \tag{9.40}$$

$$vdv = \frac{\theta}{m}dx \tag{9.41}$$

Тогда выражение (9.38) принимает вид

$$\overline{v^2} = \int\limits_0^\infty 4\pi \left(\frac{2\theta}{m}\right)^{3/2} x^{3/2} \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-x}\frac{\theta}{m}dx \tag{9.42}$$

После преобразования получим:

$$\overline{v^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{\theta}{m}\int\limits_0^\infty x^{3/2}e^{-x}dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{\theta}{m}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{\theta}{m}\frac{3}{4}\sqrt{\pi} = 3\frac{\theta}{m} \tag{9.43}$$

Здесь было учтено, что

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

Аналогично:

$$\overline{v^4} = \int\limits_0^\infty v^4 \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\theta}} dv = \int\limits_0^\infty \left(\frac{2\theta}{m}\right)^{5/2} \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \cdot x^{5/2} \cdot e^{-x} \cdot \frac{\theta}{m}dx =$$

$$= 2\left(\frac{\theta}{m}\right)^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty x^{5/2}e^{-x}dx = 2\left(\frac{\theta}{m}\right)^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{5}{2}\frac{3}{4}\sqrt{\pi} = 15\left(\frac{\theta}{m}\right)^2 \tag{9.44}$$

Тогда получаем

$$\overline{\left(\frac{mv^2}{2}\tau v_z^2\right)} = \frac{1}{3}\overline{\left(\frac{mv^2}{2}\tau v^2\right)} = \frac{m\tau}{6}15\left(\frac{\theta}{m}\right)^2 \tag{9.45}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\frac{mv^2}{2}\tau v_z^2}\right) = \frac{5}{2}m\tau\frac{2\theta}{m^2} = 5\frac{\theta\tau}{m} \tag{9.46}$$

Окончательно получаем:

$$\varkappa_0 = n\left[5\frac{\tau\theta}{m} - \frac{1}{\theta}\frac{5}{2}m\tau\frac{\theta^2}{m^2}\right] = \frac{5}{2}\frac{n\tau\theta}{m} \tag{9.47}$$

Уравнение с релаксационным членом

Рассмотрим случай вырожденного электронного газа (в остальном задача аналогична предыдущей).

Запишем уравнение с релаксационным членом:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F}{\partial\vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\frac{\partial F}{\partial\vec{v}} = -\frac{F - F_0}{\tau} \tag{9.48}$$

Задача является стационарной:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{9.49}$$

Выразим:

$$F = F_0 - \tau\left(\vec{v}\frac{\partial F}{\partial\vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\frac{\partial F}{\partial\vec{v}}\right) \tag{9.50}$$

В случае слабой неравновестности:

$$\left|\frac{F - F_0}{F_0}\right| \ll 1 \tag{9.51}$$

Тогда в результате итерационной процедуры получим:

$$F = F_0 - \tau\left(\vec{v}\frac{\partial F_0}{\partial\vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\frac{\partial F_0}{\partial\vec{v}}\right) \tag{9.52}$$

Заметим, что если проинтегрировать

$$\int F_0(t,\vec{r},\vec{v})d^3r d^3v = N \tag{9.53}$$

получим число частиц N.

При этом средние числа заполнения

$$n_p = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{\theta}} + 1} = n(\varepsilon) \tag{9.54}$$

Нормировка которых имеет вид

$$\sum_p n_p = N = 2\int n_p \frac{d^3p d^3r}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2m^3}{(2\pi\hbar)^3}\int n_p d^3v d^3r \tag{9.55}$$

В (9.55) мы перешли от суммирования по состояниям к интегрированию в соответствующем фазовом пространстве. В последнем равенстве мы перешли к пространству скоростей, полагая $\vec{p} = m\vec{v}$.

Тогда

$$F_0 = \frac{2m^3}{(2\pi\hbar)^3} n(\varepsilon) \tag{9.56}$$

Далее учтём, что

$$\theta = \theta(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \mu = \mu(\vec{r}) \tag{9.57}$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial F_0}{\partial v_z} = \frac{2m^3}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\right) m v_z \tag{9.58}$$

здесь было учтено, что

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$$

Обозначим

$$\frac{\varepsilon - \mu}{\theta} = \alpha \tag{9.59}$$

Далее вычислим

$$\frac{\partial F_0}{\partial z} = \frac{2m^3}{(2\pi\hbar)^3}\frac{\partial n}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right] \tag{9.60}$$

Учтём, что

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon} \tag{9.61}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = \frac{\varepsilon - \mu}{\theta}\frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon} \tag{9.62}$$

Окончательно получаем:

$$F = \frac{2m^3}{(2\pi\hbar)^3} n(\varepsilon) - \tau \frac{2m^3}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\right)\left[v_z\left(-\frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\varepsilon - \mu}{\theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \frac{eE}{m} m v_z\right] \tag{9.63}$$

здесь мы учли (9.60) и (9.61)-(9.62).

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ