



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И СОЛИТОНЫ

ДОМРИН  
АНДРЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**МИХЕЕНКО МИХАИЛА АЛЕКСАНДРОВИЧА**



## Содержание

<b>Лекция 1: Эллиптические функции. Часть 1</b>	<b>5</b>
1 Описание $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$ . . . . .	5
2 Определение и свойства эллиптических функций . . . . .	7
3 Определение и свойства $p$ -функции Вейерштрасса . . . . .	10
4 Описание $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ . . . . .	11
<b>Лекция 2: Эллиптические функции. Часть 2</b>	<b>13</b>
1 Предельные случаи (вырождения) $p$ -функций . . . . .	13
2 Решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде бегущих волн (и не только)	14
3 Описание главных дивизоров на торе . . . . .	16
4 Восстановление эллиптической функции на торе по её главным частям в полюсах . . . . .	17
<b>Лекция 3: Тэта-функции и римановы поверхности</b>	<b>19</b>
1 Определение общей тэта-функции . . . . .	19
2 Определение римановой поверхности . . . . .	22
3 Обращение эллиптических интегралов . . . . .	24
<b>Лекция 4: Накрытия. Риманова поверхность аналитической функции</b>	<b>27</b>
1 Примеры обращения эллиптических интегралов . . . . .	27
2 Накрытия . . . . .	30
3 Риманова поверхность аналитической функции . . . . .	32
<b>Лекция 5: Алгебраические функции</b>	<b>35</b>
1 Доказательство теоремы 2 . . . . .	35
2 Алгебраические функции . . . . .	39
<b>Лекция 6: Нормализация алгебраической кривой</b>	<b>43</b>
1 Нормализация алгебраической кривой . . . . .	43
2 Понятие рода. Формула Римана-Гурвица . . . . .	44
3 Примеры . . . . .	47
<b>Лекция 7: Доказательство теорем существования</b>	<b>51</b>
1 Выводы из описания мероморфных и голоморфных 1-форм на гиперэллиптической кривой . . . . .	51
2 Оператор Ходжа и гильбертово пространство 1-форм . . . . .	51

3	Теорема о существовании гармонических функций . . . . .	55
<b>Лекция 8: Гармонические функции</b>		<b>58</b>
1	Лемма о существовании первообразной для 1-формы . . . . .	58
2	Доказательство теоремы 4 о существовании гармонических функций . .	59
3	Примеры гармонических функций и мероморфных 1-форм . . . . .	59
4	Теорема Коши о вычетах и теорема о полной сумме вычетов. Их следствия	62
<b>Лекция 9: Голоморфные 1-формы</b>		<b>63</b>
1	Общая формула Римана-Гурвица и её следствия . . . . .	63
2	Канонический $4g$ -угольник . . . . .	66
3	Формула $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^1(X) = g(X)$ . . . . .	70
<b>Лекция 10: Теорема Римана-Роха</b>		<b>72</b>
1	Поверхности рода 0 . . . . .	72
2	Поверхности рода 1 . . . . .	72
3	Формулировка теоремы Римана-Роха . . . . .	72
4	Поверхности рода 2 . . . . .	74
5	Гиперэллиптические римановы поверхности и каноническое отображение	75
6	Билинейные соотношения Римана . . . . .	76
<b>Лекция 11: Следствия билинейных соотношений Римана. Доказательство теоремы Римана-Роха</b>		<b>79</b>
1	Следствия билинейных соотношений Римана . . . . .	79
2	Доказательство теоремы Римана-Роха (теорема 6) . . . . .	81
3	Определение якобиева многообразия, якобиева тора $\text{Jac}(X)$ и отображения Абеля . . . . .	84
<b>Лекция 12: Теорема Абеля</b>		<b>86</b>
1	Доказательство теоремы Абеля . . . . .	86
2	Постановка задачи обращения Якоби . . . . .	87
3	Тэта-функция Римана . . . . .	89
4	Решение КдФ в терминах тэта-функции . . . . .	89
5	Уравнение Кадомцева-Петвиашвили и гипотеза Новикова . . . . .	90

## Лекция 1: Эллиптические функции. Часть 1

**Определение.** Сфера Римана —  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ .

**Определение.** Тор рассматривается как факторгруппа  $\mathbb{C}/\Lambda$ , где

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \in \mathbb{C} \mid k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

— целочисленная решётка с узлами решётки  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , линейно независимыми над  $\mathbb{R}$ . Порядок между  $\omega_1$  и  $\omega_2$  выбирается так, что  $\text{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ . Это соответствует положительному углу поворота от  $\omega_1$  к  $\omega_2$ .

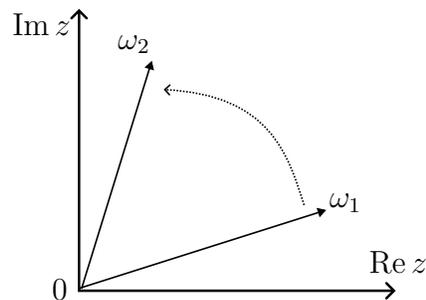


Рис. 1.1: Расположение  $\omega_1$  и  $\omega_2$

Топология на  $\mathbb{C}/\Lambda$  вводится следующим образом: подмножество  $A \subset \mathbb{C}/\Lambda$  открыто, если его прообраз в  $\mathbb{C}$  при факторизации на  $\mathbb{C}/\Lambda$  открыт.

**Определение.** Мероморфная функция на  $\bar{\mathbb{C}}$  — функция  $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , не имеющая особых точек, кроме полюсов. Полюсов конечное число, так как иначе у множества особых точек была бы предельная точка на сфере Римана, что повлекло бы наличие неизолированной особой точки у  $f$ .

Обозначение —  $f \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$

**Определение.** Множество  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  мероморфных функций на торе  $\mathbb{C}/\Lambda$  — это множество таких функций  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ , что для любых  $z \in \mathbb{C}$  и  $\omega \in \Lambda$  верно  $f(z + \omega) = f(z)$ .

### 1 Описание $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$

**Утверждение 1.1.**  $f$  мероморфна на сфере  $\bar{\mathbb{C}} \iff f$  — рациональная функция  $\frac{P}{Q}$  для некоторых многочленов  $P(z), Q(z)$ , и  $Q(z) \not\equiv 0$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  Функции такого вида являются мероморфными. (Нули  $Q(z)$ , порядок которых больше порядка этого же нуля для  $P(z)$ , будут полюсами, в остальных точках не будет особенности.)

$\Rightarrow$  Пусть  $f \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$ . Тогда множество полюсов  $f$  не имеет предельных точек (так как все полюсы  $f$  изолированы). Значит, оно конечно (в силу компактности  $\bar{\mathbb{C}}$ ).

Пусть  $\{a_1, \dots, a_n\}$  — все полюсы  $f$  в  $\mathbb{C}$  и пусть  $P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$  — главная часть ряда Лорана  $f(z)$  в точке  $a_j$  (то есть  $P_j(\zeta)$  — полином без свободного члена и  $f(z) - P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right) \in \mathcal{O}(a_j)$ ),

а  $P_\infty(z)$  — полином без свободного члена, представляющий главную часть ряда Лорана функции  $f$  на бесконечности.

Тогда

$$g(z) := f(z) - P_\infty(z) - \sum_{j=1}^n P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$$

голоморфна (и непрерывна) всюду. Значит, она непрерывна на компакте  $\bar{\mathbb{C}}$ , поэтому  $g(z)$  ограничена. Тогда по теореме Лиувилля  $g(z) \equiv \text{const}$ .

Следовательно,

$$f(z) = \text{const} + P_\infty(z) + \sum_{j=1}^n P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right),$$

то есть является рациональной функцией.  $\square$

Эта теорема также говорит, что рациональную функцию можно однозначно восстановить по её особенностям.

**Пример** (Восстановление рациональной функции по её особенностям). Рассмотрим функцию

$$f(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\ln z + 2\pi in)^2},$$

где  $\ln z$  — любое фиксированное значение (от выбора этого значения сумма ряда не зависит, так как среди членов ряда встретятся все из них).

Ряд сходится равномерно на компактах (если отбросить конечное число членов, возможно, имеющих полюсы на этом компакте) в  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  в силу стандартной оценки

$$\frac{1}{|\ln z + 2\pi in|^2} \leq \frac{\text{const}(\mathcal{K})}{n^2}$$

при  $z \in \mathcal{K}$ , а ряд  $(z-1)^2 f(z)$  — даже равномерно на компактах в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Итак,  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$

Из оценки

$$\frac{1}{|\ln z + 2\pi in|^2} \leq \frac{1}{(\ln R)^2 + (2\pi(|n| - 1))^2}$$

при  $|z| \geq R, |n| \geq 2$  вытекает, что  $f(z) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .

Аналогично,  $f(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow 0$ .

$(z-1)^2 f(z) \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow 1$ .

Следовательно,  $f(z)$  имеет устранимые особые точки при  $z = 0$  и  $z = \infty$ , а также полюс второго порядка при  $z = 1$  с главной частью  $R(z) := \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{c}{z-1}$  для некоторого числа  $c \in \mathbb{C}$ .

По доказательству утверждения 1.1  $f(z) = R(z)$ .

$c$  можно найти из равенства  $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ , а именно  $c = 1$ . Тогда

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Полагая  $\zeta = \frac{1}{2\pi i} \ln z$ , перепишем равенство

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\ln z + 2\pi in)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

в виде

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\zeta + n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi \zeta)^2}. \quad (1.1)$$

Это верно для всех  $\zeta \notin \mathbb{Z}$ .

## 2 Определение и свойства эллиптических функций

**Определение.** Функция  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  называется эллиптической, если  $f \neq \text{const}$  и  $f$  мероморфна на торе  $\mathbb{C}/\Lambda$  для некоторой решётки  $\Lambda$ .

Для описания свойств эллиптических функций нужно ввести фундаментальный параллелограмм.

**Определение.** Фундаментальный параллелограмм  $\Pi$  для решетки  $\Lambda$  — это полуоткрытый параллелограмм  $\{z_0 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid t_1 \in [0, 1), t_2 \in [0, 1)\}$  в комплексной плоскости, где  $z_0$  — это комплексное число, а  $\omega_1, \omega_2$  — периоды решетки  $\Lambda$ .

**Определение.** Число полюсов функции  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  в фундаментальном параллелограмме  $\Pi$  (с учетом кратности) не зависит от выбора  $z_0$  и называется порядком функции  $f$ .

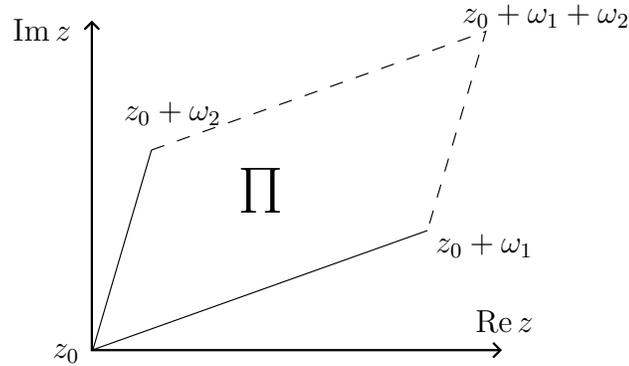


Рис. 1.2: Фундаментальный параллелограмм

**Утверждение 1.2.**

(A) Функции  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  порядка 0 — константы и только они.

(B) Функций  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  порядка 1 не существует.

(C) Любое значение  $a \in \mathbb{C}$  принимается функцией  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  в параллелограмме  $\Pi$  одно и то же число раз (с учетом кратности), равное порядку.

(D) Если  $\{a_1, \dots, a_n\}$  — все нули функции  $f$  в параллелограмме  $\Pi$  (с учетом кратности), а  $\{b_1, \dots, b_n\}$  — все её полюсы в  $\Pi$  (также с учетом кратности), то  $\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j \in \Lambda$  (то есть эта разность сравнима с нулём по модулю  $\Lambda$ ).

*Доказательство.*

(A) Следует из теоремы Лиувилля.

(B) Заметим, что сумма вычетов любой функции  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  по всем полюсам в  $\Pi$  равна 0.

Действительно, если на  $\partial\Pi$  нет полюсов, то эта сумма вычетов равна (по теореме Коши о вычетах)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} f(z) dz.$$

В силу периодичности функции  $f(z)$  и противоположности направлений обхода по противоположным сторонам  $\partial\Pi$  этот интеграл равен 0.

Если же на  $\partial\Pi$  есть полюсы, то в  $\Pi$  есть только конечное число полюсов (так как все они изолированы, а  $\Pi$  ограничен), поэтому  $\Pi$  можно сдвинуть на небольшое расстояние так, чтобы на  $\partial\Pi$  больше не было нулей, а далее — аналогично.

Так как сумма вычетов по полюсам в  $\Pi$  равна 0, у  $f$  в  $\Pi$  не может быть только одного полюса первого порядка (так как вычет в таком полюсе был бы не равен 0).

(C) Для  $a \in \mathbb{C}$  рассмотрим  $f(z) - a$ .

Для  $f(z) - a$  по принципу аргумента имеем

$$N(f(z) - a) - P(f(z) - a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{(f(z) - a)'}{f(z) - a} dz = 0.$$

Принимая во внимание то, что  $\forall a \in \mathbb{C} \quad P(f(z)) = P(f(z) - a)$ , заключаем, что  $\forall a \in \mathbb{C} \quad N(f(z) - a) = N(f(z))$ , то есть каждое значение принимается одинаковое число раз, равное порядку. Значение  $a = \infty$  принимается функцией  $P(f(z))$  раз (с учетом кратности), что тоже равно порядку.

(D) Применим теорему Коши о вычетах для функции  $z \frac{f'(z)}{f(z)}$  в параллелограмме  $\Pi$ . Сумма вычетов будет равна

$$\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Рассмотрим часть интеграла, соответствующую сторонам  $[z_0, z_0 + \omega_1]$  и  $[z_0 + \omega_2, z_0 + \omega_1 + \omega_2]$ .

$$\begin{aligned} \left( \int_{z_0}^{z_0+\omega_1} - \int_{z_0+\omega_2}^{z_0+\omega_1+\omega_2} \right) z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \left| \zeta = z + \omega_2 \right| = \int_{z_0}^{z_0+\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{z_0}^{z_0+\omega_1} (\zeta - \omega_2) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \\ &= \int_{z_0}^{z_0+\omega_1} \omega_2 \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \omega_2 2\pi i n_2, \end{aligned}$$

где  $n_2 = \frac{1}{2\pi} \Delta_{[z_0, z_0+\omega_1]} \arg f(z) \in \mathbb{Z}$ .

Аналогично с интегралом по двум оставшимся сторонам, он будет равен  $\omega_1 2\pi i n_1$ , где  $n_1 \in \mathbb{Z}$ .

В итоге получаем, что

$$\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2.$$

□

Это показывает, что не любому набору особенностей можно предписать эллиптическую функцию.

### 3 Определение и свойства $p$ -функции Вейерштрасса

Рассмотрим ряд  $\Phi(z) := \sum_{\omega \in \Lambda} -\frac{2}{(z-\omega)^3}$ . Он сходится равномерно на компактах в  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  (если отбросить член с  $\omega = z$ ) в силу оценки

$$\frac{1}{|z-\omega|^3} \leq \frac{1}{\left|\frac{\omega}{2}\right|^3}$$

при  $|\omega| > 2 \max_{z \in K} |z|$ .

В свою очередь, ряд

$$\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{|\frac{\omega}{2}|^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \Gamma_n} \frac{1}{|\frac{\omega}{2}|^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{|nh|^3} < \infty,$$

где

$$\Gamma_n = \{k_1\omega_2 + k_2\omega_1 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \max(|k_1|, |k_2|) = n\},$$

а  $h$  — ненулевая константа.  $|\Gamma_1| = 8n$ , а  $hn \leq |\omega| \leq Cn$  при  $\omega \in \Gamma_n$  для некоторых констант  $h$  и  $C$  (не зависящих от  $n$ ).

Следовательно,  $\Phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  (в точках из  $\Lambda$  будет полюс, создаваемый соответствующим слагаемым  $-\frac{2}{(z-\omega)^3}$ ). Ясно, что она периодична, то есть  $\Phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ .

Также  $\Phi(z) = -\Phi(z)$ .

Рассмотрим функцию  $p(z) := \frac{1}{z^2} + \int_0^z \left( \Phi(\zeta) + \frac{2}{\zeta^3} \right) d\zeta$ , где интегрирование ведётся по

любому пути.<sup>1</sup>

В силу свойств  $\Phi(z)$  функция  $p(z)$  будет чётной, а также мероморфной в  $\mathbb{C}$ .  $p(z)$  можно переписать иначе:

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right). \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Вычет  $\Phi(\zeta)$  в любой особенности равен нулю, поэтому значение  $p(z)$  от выбора пути интегрирования не зависит. Слагаемое  $\frac{2}{\zeta^3}$  нужно для того, чтобы у подынтегральной функции в нуле не было полюса.

Для любого  $\omega \in \Lambda$  имеем  $p(z + \omega) - p(z) \equiv \text{const}$  в силу того, что производная этой разности равна 0 (из интегральной записи она равна  $\Phi(z + \omega) - \Phi(z) \equiv 0$ , так как  $\Phi$  —  $\Lambda$ -периодическая функция).

При подстановке  $z = -\frac{\omega}{2}$  можно видеть, что эта константа равна 0.

Вывод:

Функция  $p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$  мероморфна на торе  $\mathbb{C}/\Lambda$ , также эта функция чётная, имеет порядок 2 и единственный полюс в  $\Pi$  при  $z = 0$ .

Также у функции  $p(z)$  есть следующее свойство:

Для любого  $a \in \mathbb{C}$  множество  $p^{-1}(a)$  в  $\Pi_0$  состоит из двух точек (в силу чётности  $p(z)$  оно равно  $\{\pm z_0\}$  по модулю  $\Lambda$ ). Они совпадают только при  $z_0 = \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$  или  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ .

Значения  $e_1 = p\left(\frac{\omega_1}{2}\right), e_2 = p\left(\frac{\omega_2}{2}\right), e_3 = p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$  имеют кратность 2, то есть  $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  — это нули  $p'$ .

#### 4 Описание $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$

**Утверждение 1.3.** Любая чётная эллиптическая функция  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  имеет вид  $R(p(z))$  для некоторой рациональной функции  $R(w)$ .

*Доказательство.* В силу чётности  $f$ , если  $z_0$  — её нуль (или полюс) порядка  $n$ , то  $-z_0$  — тоже нуль (полюс) порядка  $n$ , а если  $z_0 = -z_0$  по модулю  $\Lambda$  (то есть  $z_0 + z_0 = 2z_0 \in \Lambda$ ), то  $n$  чётно.

(Чётность  $n$  в данном случае ясна из формулы  $f^{(k)}(-z_0) = (-1)^k f^{(k)}(z_0)$ : все нечётные производные тогда будут равны нулю, а значит, первая ненулевая производная будет при чётном  $k$ ).

Следовательно, все нули (и полюсы) функции  $f$  имеют вид

$$a_1, \dots, a_k, -a_1, \dots, -a_k, b_1, \dots, b_k, -b_1, \dots, -b_k.$$

Допустим, что ни один из этих нулей не лежит в  $\Lambda$ .

Тогда функция

$$g(z) := \frac{\prod_{j=1}^k (p(z) - p(a_j))}{\prod_{j=1}^k (p(z) - p(b_j))}$$

имеет те же нули и полюсы, что и  $f$ , и она не имеет особенностей в точках из решётки  $\Lambda$ .

Следовательно,  $\frac{g(z)}{f(z)} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  не имеет нулей и полюсов, значит (по теореме Лиувилля) она постоянна.  $\square$

**Упражнение 1.1.** Если одна из точек  $a_j$  лежит в  $\Lambda$ , то в доказательстве нужно вычеркнуть соответствующий множитель, в остальном доказательство не поменяется.

**Пример.**  $p'^2$  — чётная эллиптическая функция.

У неё есть единственный полюс 6 порядка при  $z = 0$  и 3 нуля второго порядка в точках  $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ .

Рассмотрим функцию  $(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)$ . У неё те же нули и тот же полюс (порядки также совпадают). Следовательно, их отношение — это ненулевая константа (по доказательству последнего утверждения).

Из разложения в ряд Лорана видно, что

$$\frac{p'^2}{(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)} = 4.$$

Действительно,  $p(z) = \frac{1}{z^2} + O(1)$ , а  $p'(z) = \frac{-2}{z^3} + O(1)$ .

В итоге получаем

$$p'^2 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3). \quad (1.3)$$

Вывод:

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda) \cong \mathbb{C}(x, y),$$

где  $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ ,  $g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-4}$ , а  $g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-6}$ .

То есть  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$  — риманова поверхность.

## Лекция 2: Эллиптические функции. Часть 2

### 1 Предельные случаи (вырождения) $p$ -функций

Утверждение 2.1.

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} p(z, \omega_1, c\omega_2) = \left( \frac{A}{\sin Az} \right)^2 - \frac{A^2}{3}, \quad (2.1)$$

где  $A := \frac{\pi}{\omega_1}$ , причём сходимость равномерна на компактах в  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\omega_1$ .

Доказательство. Ряд

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z} \\ k^2 + l^2 \neq 0}} \left( \frac{1}{z - k\omega_1 - cl\omega_2} - \frac{1}{(k\omega_1 + cl\omega_2)^2} \right)$$

в силу оценки

$$\left( \frac{1}{z - k\omega_1 - cl\omega_2} - \frac{1}{(k\omega_1 + cl\omega_2)^2} \right) \leq \frac{\text{const}}{|\omega|^3}$$

сходится равномерно на компактах в  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\omega_1$ , причём равномерно по  $c \geq 1$ .

Поэтому переход к пределу при  $c \rightarrow +\infty$  можно выполнить почленно.

При этом переходе все члены с  $l \neq 0$  обращаются в 0, остаётся

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - k\omega_1)^2} - \frac{1}{(k\omega_1^2)^2} \right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{(z - k\omega_1)^2} - \frac{2}{(\omega_1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \\ &= \left( \frac{A}{\sin Az} \right)^2 - \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{2}{\omega_1^2} = \left( \frac{A}{\sin Az} \right)^2 - \frac{A^2}{3}. \end{aligned}$$

□

**Упражнение 2.1.** Доказать, что

$$\lim_{\substack{c_1 \rightarrow +\infty \\ c_2 \rightarrow +\infty}} p(z, c_1\omega_1, c_2\omega_2) = \frac{1}{z^2}, \quad (2.2)$$

причём сходимость равномерна на компактах в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Упражнение 2.2.** Пусть  $c \rightarrow +\infty$ . Доказать, что

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda'_c} \omega^{-4} \rightarrow \frac{4}{3} A^4,$$

где  $\Lambda'_c := (\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}c\omega_2) \setminus \{0\}$ .

В частности, в уравнении

$$p'^2 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3) = 4p^3 - g_2p - g_3 \quad (2.3)$$

$$e_1 \rightarrow \frac{2A^2}{3}; e_2, e_3 \rightarrow -\frac{A^2}{3}.$$

**Упражнение 2.3.** Пусть  $k, l > 0$ . Доказать, что

$$\begin{array}{ccc}
 & \left(\frac{A}{\sin Az}\right)^2 - \frac{A^2}{3} & \\
 \nearrow^{l \rightarrow +\infty} & & \searrow^{k \rightarrow +\infty} \\
 p(z, k, il) & & \frac{1}{z^2} \\
 \searrow^{k \rightarrow +\infty} & & \nearrow^{l \rightarrow +\infty} \\
 & \left(\frac{B}{\operatorname{sh} Bz}\right)^2 - \frac{B^2}{3} & 
 \end{array}$$

Здесь  $B = \frac{\pi}{l}$ .  
В частности,

$$p\left(x + \frac{il}{2}, k, il\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\left(\frac{B}{\operatorname{ch} Bx}\right)^2 + \frac{B^2}{3}.$$

## 2 Решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде бегущих волн (и не только)

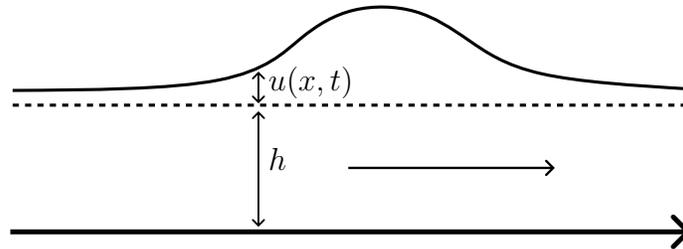


Рис. 2.1: Бегущая волна

Физическое уравнение Кортевега-де Фриза (сокращённо КдФ) описывает движение бегущей волны в канаве и имеет следующий вид:

$$u_t = \sqrt{\frac{g}{h}} \left( \frac{\sigma}{2} u_{xxx} + \alpha u_x + \frac{3}{2} uu_x \right), \quad (2.4)$$

где  $\sigma, \alpha, g > 0$  — физические константы,  $h$  — высота уровня воды.

**Утверждение 2.2.** Пусть  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Тогда  $\forall A, B, C \in \mathbb{C}, A \neq 0$ , следующие функции удовлетворяют уравнению КдФ, записанному после некоторых замен,

$$u_t = au_{xxx} + buu_x :$$

- $u_1(x, t) = -\frac{12aA^2}{b}p(Ax + Bt + C) + \frac{B}{Ab}$  (конечнозонные решения с одной зоной)
- $u_2(x, t) = \frac{12aA^2}{b} \frac{1}{\operatorname{ch}(Ax + 4aA^3t + C)}$  (односолитонные решения)
- $u_3(x, t) = -\frac{12a}{b} \frac{1}{(x + C)^2}$  (рациональные решения)
- $u_4(x, t) = \frac{x + B}{b - Ct}$  (решение Концевича-Виттена)

*Доказательство для первых двух решений.* 1. Если искать решение в виде  $u(x, t) = \varphi(Ax + Bt + C)$ , то для  $\varphi(s)$  получится уравнение

$$B\varphi' = aA^3\varphi''' + bA\varphi\varphi'.$$

Выбором  $\varphi(s) = kp(s) + l$  это уравнение можно свести к следующему:

$$p''' = 12pp'$$

в силу того, что  $p^2 = 4p^3 - g_2p - g_3$ .  $u_1$  — это решения такого вида. Далее посчитаем, что периоды функции  $p$  — это  $k$  и  $il$ .

2. В силу упражнения 2.3  $u_2(x, t)$  — это предельный случай  $u_1(x + \frac{il}{2}, t)$  при  $\omega_2 = il, \omega_1 \rightarrow +\infty$ . При этом новые константы (которые затем переобозначаются как  $A$  и  $B$  соответственно)  $A' := \frac{\pi}{l}A$  и  $B' := \frac{\pi}{l}B$  выбираются так, чтобы дополнительное слагаемое было равно 0.

□

**Теорема 1** (Без доказательства). Для любого голоморфного в точке  $(x_0, t_0)$  решения  $u(x, t)$  уравнения

$$u_t = au_{xxx} + buu_x$$

существует такая функция  $\tau(\cdot, t) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_x^1)$ , что

$$u(x, t) = \frac{12a}{b} (\ln \tau(\cdot, t))_{xx}.$$

То есть любое решение можно аналитически продолжить на полосу.

### 3 Описание главных дивизоров на торе

**Утверждение 2.3.** Пусть  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$  — точки из  $\Pi$ . Тогда

Эллиптическая функция  $f$ , такая, что  $a_1, \dots, a_m$  — её нули, а  $b_1, \dots, b_n$  — её полюсы, существует тогда и только тогда, когда  $m = n$ , а также

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \in \Lambda.$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Свойства 3 и 4 из утверждения 1.2

$\Leftarrow$  Ряд

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z + \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) \quad (2.5)$$

сходится на компактах в  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  и удовлетворяет равенству

$$-\zeta'(z) = p(z). \quad (2.6)$$

Следовательно,  $\zeta$  — мероморфная функция на  $\mathbb{C}$  с полюсами 1 порядка в точках решётки  $\Lambda$ .

Эта функция не обязательно периодичная, но верно следующее равенство:

$$\zeta(z + \omega_j) - \zeta(z) \equiv \eta_j = \text{const}, \quad j = 1, 2. \quad (2.7)$$

Далее рассмотрим решение  $\sigma(z)$  уравнения<sup>2</sup>

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \zeta, \quad (2.8)$$

а именно

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \exp \left\{ \ln z + \int_0^z \left( \zeta(u) - \frac{1}{u} \right) du \right\} = \\ &= z \prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{z - \omega}{-\omega} \exp \left\{ \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right\}. \end{aligned}$$

Получаем целую функцию  $\sigma(z)$  с нулями 1 порядка в точках решётки  $\Lambda$  и со свойствами:

1.  $(\ln \sigma)'' = -p$ ;  $\frac{\sigma'}{\sigma} = \zeta$ ;
2.  $\sigma(-z) = -\sigma(z)$ ; (Доказательство: замена  $z \rightarrow -z, \omega \rightarrow -\omega$  в произведении)

<sup>2</sup>По-другому оно записывается как  $(\ln \sigma)' = \zeta$

$$3. \sigma(z + \omega_j) = -\sigma(z) \exp \left\{ \eta_j \left( z + \frac{\omega_j}{2} \right) \right\}, \quad j = 1, 2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'}{\sigma}(z + \omega_j) - \frac{\sigma'}{\sigma}(z) &= \eta_j, \\ \ln \sigma(z + \omega_j) - \ln \sigma(z) &= \eta_j z + c_j, \\ \sigma(z + \omega_j) &= \sigma(z) \exp \{ \eta_j z + c_j \}. \end{aligned}$$

$c_j$  находятся подстановкой  $z = -\frac{\omega_j}{2}$  с учётом нечётности  $\sigma$ .)

Следовательно, функция  $\varphi_{ab}(z) := \frac{\sigma(z-a)}{\sigma(z-b)}$  удовлетворяет свойствам

$$\varphi_{ab}(z + \omega_j) = \varphi_{ab}(z) \exp \{ \eta_j (a - b) \}. \quad (2.9)$$

Теперь для  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  выберем такие их сдвиги на векторы решётки, что  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$  в точности (а не только по модулю  $\Lambda$ ).

Тогда функция

$$f(z) := \frac{\prod_{k=1}^n \sigma(z - a_k)}{\prod_{k=1}^n \sigma(z - b_k)}$$

— искомая функция.

Действительно,  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ , а

$$f(z + \omega_j) = f(z) \exp \left\{ \eta_j \left( \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i \right) \right\} = f(z).$$

□

#### 4 Восстановление эллиптической функции на торе по её главным частям в полюсах

**Упражнение 2.4.** Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — произвольные различные точки,  $P_j \left( \frac{1}{z - a_j} \right)$  — полиномы с  $P_j(0) = 0$ . Доказать, что

Функция  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ , такая, что главная часть ряда Лорана функции  $f$  в точке  $z = a_j$  равна  $P_j \left( \frac{1}{z - a_j} \right)$ , существует тогда и только тогда, когда сумма вычетов, то есть коэффициентов при первых степенях  $P_j$ , равна 0.

Указание.

$\Rightarrow$  Свойство 2 из утверждения 1.2.

$\Leftarrow$  Использовать выражение вида  $\sum_{k=1}^n c_k \zeta(z - a_k)$  для коэффициентов при первых степенях  $\frac{1}{z - a_j}$ ;  
 $\sum_{k=1}^n c_k p(z - a_k)$  для коэффициентов при вторых степенях,  
 $p^l$  для третьих степеней и так далее.

## Лекция 3: Тэта-функции и римановы поверхности

### 1 Определение общей тэта-функции

**Определение.** Тэта-функции — это целые функции, которые при сдвиге аргумента на вектор из  $\Lambda$  умножаются на  $\exp\{\text{полином первой степени от } z\}$ . Иными словами, это элементы векторного пространства

$$T(a_1, b_1, a_2, b_2) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \mid f(z + \omega_j) = f(z) \exp(a_j z + b_j), j = 1, 2, \forall z \in \mathbb{C}\}.$$

**Пример.**  $\sigma(z)$  с  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \frac{\eta_1 \omega_1}{2} + \pi i \\ \eta_2 & \frac{\eta_2 \omega_2}{2} + \pi i \end{pmatrix}$

*Замечание.* Из каждой такой функции, не равной тождественному нулю, получается эллиптическая функция по формуле  $(\ln f)''$ , либо (как для  $\sigma(z)$ ) по формуле

$$\prod_{i=1}^n \frac{f(z - a_i)}{f(z - b_i)}, \text{ где } \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i.$$

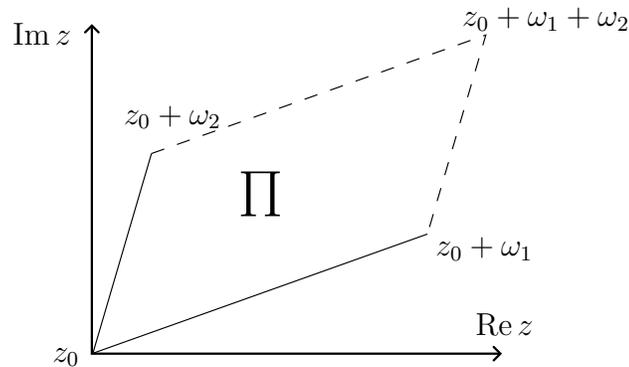


Рис. 3.1: Фундаментальный параллелограмм

**Утверждение 3.1.** Если  $f$  — не тождественный ноль, то  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix} = 2\pi i N$ , где  $N$  — число нулей функции  $f$  в параллелограмме  $\Pi$  с учетом кратности.

*Доказательство.* Обе части равенства равны  $\int_{\partial \Pi} \frac{f'}{f} dz$ .

Правая часть равна интегралу по принципу аргумента. Левая часть равна ему в силу „квазипериодичности“ функции  $f$ :

$$\frac{f'}{f}(z + \omega_j) = (\ln f(z + \omega_j))' = (\ln(f(z)e^{a_j z + b_j}))' = (\ln f(z) + a_j z + b_j)' = \frac{f'}{f}(z) + a_j.$$

□

**Упражнение 3.1** (Соотношение Лежандра). Чему равно  $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1$ ?

**Утверждение 3.2.** Если  $a_1, b_1, a_2, b_1 \in \mathbb{C}$  удовлетворяют  $a_1\omega_2 - a_2\omega_1 = 2\pi iN$  для некоторого  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , то

$$\dim_{\mathbb{C}} T(a_1, b_1, a_2, b_2) = N.$$

*Доказательство.* Заменяя  $z$  на  $\frac{z}{\omega_1}$ , можно считать, что  $\omega_1 = 1, \omega_2 = \tau, \text{Im } \tau > 0$ .

Умножая  $f(z)$  на  $e^{-(Az^2+Bz+C)}$ , можно считать, что  $a_1 = b_1 = 0$ .

Тогда

$$f(z + \tau) = e^{a'_2 z + b'_2} f(z),$$

где  $-a'_2 \cdot 1 = 2\pi iN$  по условию.

Переобозначим для удобства  $a'_2, b'_2$  как  $a_2, b_2$ .

Итак,

$$f(z + 1) = f(z); \tag{3.1}$$

$$f(z + \tau) = e^{-2\pi iNz + b_2} f(z). \tag{3.2}$$

Из 3.1 вытекает, что  $f(z) = g(e^{2\pi iz})$  для некоторой функции  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ .

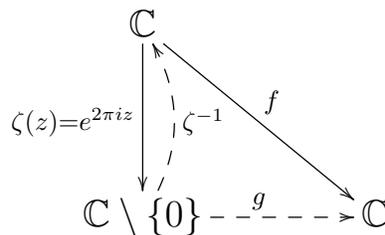


Рис. 3.2: Диаграмма для равенства  $f = g(e^{2\pi iz})$

Действительно, определим  $g$  в точке  $\zeta$  как композицию  $f \circ \zeta^{-1}$ , то есть

$$g(\zeta) := f\left(\frac{\ln \zeta}{2\pi i}\right). \tag{3.3}$$

В выборе  $\ln \zeta$  есть произвольность, однако если выбрать другую ветвь логарифма, к  $\ln \zeta$  прибавится  $2\pi in$ , а значит, к аргументу  $f$  прибавится  $n$ , что не изменит значения функции  $g(\zeta)$ . Это значит, что функция  $g(\zeta)$  корректно определена в каждой точке  $\zeta$ .

Также в окрестности любой точки  $\zeta_0$  ветвь логарифма можно выбрать голоморфной. Следовательно,  $g(\zeta)$  будет голоморфна в каждой точке  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , и  $f(z) = g(e^{2\pi iz})$ . По теореме о разложении в ряд Лорана,

$$\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad g(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \zeta^n,$$

и следовательно,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inz}. \quad (3.4)$$

Подставим это разложение в формулу 3.2:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi in(z+\tau)} = e^{-2\pi iN + b_2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inz}.$$

Переобозначив в правой части  $n - N$  за  $n$ , получим

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi in(z+\tau)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{n+N} \cdot e^{b_2} e^{2\pi inz},$$

То есть

$$c_n e^{2\pi in\tau} = c_{n+N} \cdot e^{b_2}. \quad (3.5)$$

Что означает, что  $N$  коэффициентов можно выбрать произвольно, а остальные будут выбраны автоматически по полученным соотношениям.  $\square$

**Определение.** Функция  $\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi in^2 \tau + 2\pi inz}$  называется тэта-функцией (Якоби).

**Упражнение 3.2.** Доказать, что

1.  $\theta(\cdot, \tau) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_z^1)$  и

$$\theta(z + 1) = \theta(z); \quad (3.6)$$

$$\theta(z + \tau) = e^{-2\pi i(z + \frac{\tau}{2})} \theta(z), \quad (3.7)$$

2. Причём любая целая функция  $f$ , удовлетворяющая свойствам 3.6 и 3.7, есть  $c \cdot \theta(z)$ , где  $c \equiv \text{const}$ .
3. Доказать прямой подстановкой и применением свойств чётности и нечётности что у неё есть нуль в точке  $z = \frac{1 + \tau}{2}$ .
4. Доказать, что других нулей у функции  $\theta(\cdot, \tau)$  в  $\Pi$  нет.

**Упражнение 3.3.** Доказать, что любая тэта-функция без нулей (то есть с  $N = 0$ ) имеет вид  $e^{Az^2+Bz+C}$ .

**Упражнение 3.4.** Доказать, что любая общая тэта-функция  $f$  с  $N$  нулями  $a_1, \dots, a_n$  в  $\Pi$  имеет вид

$$f(z) = e^{Az^2+Bz+C} \cdot \sigma(z - a_1) \dots \sigma(z - a_n).$$

В частности,

$$\theta(z, \tau) = e^{Az^2+Bz+C} \cdot \sigma\left(z - \frac{1 + \tau}{2}\right),$$

где  $A, B, C$  зависят от  $\tau$ .

**Упражнение 3.5.** Доказать, что

$$\lim_{\text{Im } \tau \rightarrow 0} \sigma(z, 1, \tau) = e^{\frac{(\pi-z)^2}{6}} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi},$$

но

$$\lim_{\text{Im } \tau \rightarrow 0} \theta(z, \tau) = 1.$$

Это показывает, что с помощью тэта-функции нельзя исследовать предельные случаи.

## 2 Определение римановой поверхности

**Определение.** Риманова поверхность - это линейно связное одномерное комплексное многообразие, то есть:

линейно связное хаусдорфово топологическое пространство  $X$  со счётной базой, снабжённое открытым покрытием  $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  и набором таких гомеоморфизмов  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow D_\alpha$  (где  $D_\alpha \subset \mathbb{C}$  — открытые множества), что для любой пары индексов  $\alpha, \beta \in A$  отображение

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

голоморфно на  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Пара  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  называется картой.

*Замечание.*

- Если заменить  $\mathbb{C}$  на  $\mathbb{C}^n$ , то получится определение  $n$ -мерного комплексного многообразия.
- Если заменить голоморфность на гладкость, то получится определение двумерного вещественного многообразия.

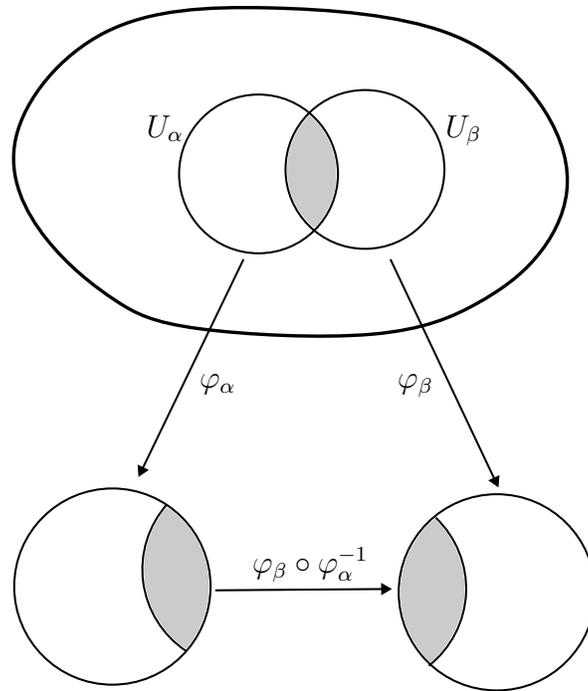


Рис. 3.3: Отображение  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$

- Если заменить голоморфность на гладкость и положительность якобиана отображений  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ , то получится определение гладкой ориентированной двумерной поверхности.

(Все римановы поверхности таковы по условию Коши-Римана, определитель отображений  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  не равен 0 по критерию локальной обратимости.)

*Замечание.* Условие счётности базы можно опустить.

**Определение.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  римановых поверхностей  $(X, \{U_\alpha, \varphi_\alpha \mid \alpha \in A\})$  и  $(Y, \{V_\beta, \psi_\beta \mid \beta \in B\})$  называется голоморфным, если для любых  $\alpha \in A, \beta \in B$  отображение  $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  голоморфно на  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \subset \mathbb{C}$ .

Отображение называется биголоморфным, если  $f: X \rightarrow Y$  голоморфно, биективно, и  $f^{-1}$  тоже голоморфно.

**Пример.** Любая область  $D \subset \mathbb{C}$  является римановой поверхностью с единственной тождественной картой.

**Пример.**  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  является римановой поверхностью с двумя картами:

$$(\mathbb{C}, \text{id}) \text{ и } (\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \varphi), \text{ где } \varphi(z) = \begin{cases} 0, & z = \infty \\ \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{cases}$$

**Пример.** Тор  $\mathbb{C}/\Lambda$  является римановой поверхностью с картами  $(D, \varphi_D)$ ,  $\varphi_D: \pi(D) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi_D = (\pi|_D)^{-1}$ , где

$D \subset \mathbb{C}$  — любое открытое связное множество, не содержащее точек, равных по модулю  $\Lambda$ ,

а  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  — отображение  $\mathbb{C}$  на тор.

(Топология на  $\mathbb{C}/\Lambda$  задаётся так:  $U \subset \mathbb{C}/\Lambda$  открыто на торе  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$  открыто в  $\mathbb{C}$ .)

**Определение.** Голоморфная функция на римановой поверхности  $X$  — это голоморфное отображение  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ .

Мероморфная функция на  $X$  — это голоморфное отображение  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ , не равное тождественной бесконечности,<sup>3</sup> или (эквивалентное определение) такая голоморфная функция  $f$  на  $X \setminus M$ , где  $M \subset X$  — дискретное замкнутое множество, что для любой точки  $p \in M$   $\lim_{q \rightarrow p} f(q) = \infty$ .

**Упражнение 3.6.** Проверить эквивалентность этих определений для одномерного случая.

**Определение.** Гладкая  $\mathbb{C}$ -значная 1-форма  $\alpha$  на римановой поверхности  $X$  (локально записываемая как  $f(z)dz + g(z)d\bar{z}$ , где  $f, g \in C^1(X)$ ) называется голоморфной (мероморфной), если локально  $\alpha = f(z)dz$ , где  $f(z)$  — голоморфная (мероморфная) функция.

### 3 Обращение эллиптических интегралов

**Теорема 2.** Пусть  $X$  — компактная риманова поверхность и  $\alpha$  — голоморфная 1-форма на  $X$  без нулей. Пусть  $p_0 \in X$  — произвольная точка. Тогда есть решётка  $\Lambda$  такая, что отображение Абеля

$$\mathcal{A}(p) = \int_{p_0}^p \alpha \quad \text{mod } \Lambda \quad (3.8)$$

корректно определено и является биголоморфизмом  $X$  на  $\mathbb{C}/\Lambda$ .

В частности,  $\mathcal{A}^*(dz) = \alpha$ .

<sup>3</sup> Данное определение подходит только для одномерного случая

Доказательство. Лекция 5, раздел 1. □

**Следствие 3.1.** Компактная риманова поверхность  $X$  биголоморфна тору  $\mathbb{C}/\Lambda$  для некоторой решётки  $\Lambda$  тогда и только тогда, когда на  $X$  существует голоморфная 1-форма без нулей.

**Пример.** Пусть  $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}$  такие, что все нули полинома  $P_3(x) = 4x^3 - \gamma_2x + \gamma_3$  различны (то есть  $\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 \neq 0$ ).

Тогда

$$X_0 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = P_3(x)\}$$

является римановой поверхностью (подмногообразием в  $\mathbb{C}^2$ ).

Действительно, если  $(x_0, y_0) \in X_0$  такова, что  $y_0 \neq 0$ , то  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , где  $\Phi(x, y) = y^2 - P_3(x)$ .

Значит, по теореме о неявной функции  $X_0$  локально есть график функции  $y = \varphi(x)$ . (То есть  $y$  однозначно выражается через  $x$  в окрестности  $(x_0, y_0)$ .)

Если же  $y_0 = 0$ , то  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) = -P_3'(x_0) \neq 0$ , и локально уже  $x = \psi(y)$ .

**Упражнение 3.7.** Для любых двух полиномов  $P, Q$  рассмотрим

$$X_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x) = Q(y)\},$$

и пусть нигде на  $X_0$  функции  $P'(x)$  и  $Q'(y)$  одновременно не равны 0.

Тогда  $X_0$  — одномерное комплексное подмногообразие в  $\mathbb{C}^2$  по критерию локальной обратимости.

Это можно применить и к случаю  $y^2 = P_3(x)$ .

Пусть теперь  $X$  — замыкание  $X_0$  из предыдущего примера в  $\mathbb{C}P^2$ , то есть  $X = X_0 \cup \{\infty\}$ .

$\mathbb{C}P^2$  (двумерная комплексная проективная плоскость) состоит из классов эквивалентности  $(x : y : z)$  точек  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  по отношению пропорциональности (или, что эквивалентно, из прямых, проходящих через  $(0, 0, 0)$ ).

Она имеет 3 карты:  $(\{x \neq 0\}, (1 : y : z) \mapsto (y, z))$ ,  $(\{y \neq 0\}, (x : 1 : z) \mapsto (x, z))$ ,  $(\{z \neq 0\}, (x : y : 1) \mapsto (x, y))$ .

Обозначим  $(x : y : 1) = (u : 1 : v) = (1 : s : t)$ .

$$x = \frac{u}{v}, y = \frac{1}{v};$$

$$y^2 = 4x^3 - \gamma_2x - \gamma_3.$$

Подставим первое выражение во второе и получим

$$\frac{1}{v^2} = 4\frac{u^3}{v^3} - \frac{\gamma_2 u}{v} - \gamma_3,$$

или (при  $v \neq 0$ )

$$v = 4u^3 - \gamma_2 uv^2 - \gamma_3 v^3. \quad (3.9)$$

Если продолжить это соотношение на случаи  $v = 0$ , то „ $\infty$ “ =  $(0 : 1 : 0)$  подходит, то есть бесконечность соответствует прямой, направленной вдоль оси  $Oy$ .

Также можно заметить, что в этой точке (если переписать последнее соотношение как  $\Phi(u, v) = 0$ )  $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 1 \neq 0$ , то есть в окрестности этой точки  $v = \varphi(u)$ , причём  $\varphi$  голоморфна и имеет в  $u = 0$  нуль какого-то порядка  $m > 0$ , так как  $v = 0$  при  $u = 0$ .

1-форма  $\alpha = \frac{dx}{y}$  голоморфна на  $X_0$  и не имеет там нулей.

В точку  $\infty = (0 : 1 : 0)$  она продолжается как

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{\frac{1}{v}} = v \left( \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} \right) = du - \frac{u}{v} dv = du - \frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)} du = ((1 - m) + o(1)) du, \quad (3.10)$$

так как при  $u \rightarrow 0$   $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{m}{u} + o(1)$ , что следует из разложения в ряд Тейлора.

**Упражнение 3.8.** Проверить, что  $m \neq 1$ , и следовательно,  $\alpha$  не имеет нуля на бесконечности.

## Лекция 4: Накрытия. Риманова поверхность аналитической функции

### 1 Примеры обращения эллиптических интегралов

**Пример.** Биголоморфизм

$$F: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \bar{X}_1 = X_1 \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C}P^2,$$

где  $X_1 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid \eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3\}$ , заданный формулой

$$\begin{cases} \xi = p(z - z_0) \\ \eta = p'(z - z_0) \end{cases}, F(z_0) = \infty,$$

является обратным к отображению Абеля

$$\mathcal{A}(p) = \int_{p_0}^p \alpha \pmod{\Lambda}$$

для  $\alpha = \frac{d\xi}{\eta} = \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}}$ .

Если  $\xi = p(z - z_0), \eta = p'(z - z_0)$ , то

$$\frac{d\xi}{\eta} = \frac{d(p(z - z_0))}{p'(z - z_0)} = dz.$$

$p_0$  выбирается так, что

$$z_0 = \int_{p_0}^{\infty} \alpha.$$

В частности, если  $z_0 = 0$ , то  $p_0 = \infty$ . Равенство  $\xi = p(z)$  эквивалентно равенству

$$z = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi'}{\sqrt{4\xi'^3 - g_2\xi' - g_3}}.$$

**Определение.** Эллиптический интеграл — интеграл вида

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{Q(x)}{\sqrt{P(x)}} dx,$$

где  $\deg(P) = 3$  или  $4$ .

**Утверждение 4.1.** Для любых  $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}$  таких, что  $\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 \neq 0$ , существует решётка  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  такая, что  $\gamma_2 = g_2, \gamma_3 = g_3 \pmod{\Lambda}$ .

*Доказательство.* По условию все нули полинома  $P_3(x) = 4x^3 - \gamma_2x - \gamma_3$  простые (не кратные), поэтому  $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$  является римановой поверхностью, а 1-форма  $\alpha = \frac{dx}{y}$  голоморфна и не имеет нулей на  $X$ . (Это было показано в конце предыдущей лекции.)

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{X} = X \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{F} & X_1 \cup \{\infty\} \\
 \downarrow \pi(x,y)=x, \pi(\infty)=\infty & \nearrow \pi^{-1} & & & \downarrow \pi(\xi,\eta)=\xi, \pi(\infty)=\infty \\
 \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\varphi} & & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \cup \{\infty\}
 \end{array}$$

Рис. 4.1: Диаграмма к утверждению 4.1

в которой покажем, что  $\varphi$  (то есть  $\pi(\xi, \eta) \circ F \circ \mathcal{A} \circ \pi^{-1}(x)$ ) — это тождественное отображение. Здесь

$$\mathcal{A}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dx}{y} \pmod{\Lambda}, \text{ а}$$

$$F(z) = \left( p(z - \mathcal{A}(\infty)), p'(z - \mathcal{A}(\infty)) \right) -$$

биголоморфизм из предыдущего примера.

Выберем  $p_0$  такое, что  $\sigma(p_0) = p_0$ , где  $\sigma(x, y) := (x, -y)$  — биголоморфное отображение  $X$  на себя (так как  $y^2 = 4x^3 - \gamma_2x - \gamma_3$  не зависит от знака  $y$ ).

Тогда  $\mathcal{A}(p) = -\mathcal{A}(p)$  для всех  $p \in X$ .

Действительно,

$$\mathcal{A}(\sigma(p)) = \int_{p_0}^{\sigma(p)} \frac{dx}{y} = \int_{p_0}^p \sigma^* \left( \frac{dx}{y} \right) = - \int_{p_0}^p \frac{dx}{y} = -\mathcal{A}(p).$$

Поскольку  $\sigma(\infty) = \infty$ , получаем  $\mathcal{A}(\infty) = -\mathcal{A}(\infty) \pmod{\Lambda}$ , что позволяет заключить, что функция  $p(z - \mathcal{A}(\infty))$  — чётная, а функция  $p'(z - \mathcal{A}(\infty))$  — нечётная.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Действительно,  $p(-z - \mathcal{A}(\infty)) = p(-z + \mathcal{A}(\infty) + k_1\omega_1 + k_2\omega_2) = p(-z + \mathcal{A}(\infty)) = p(-(z - \mathcal{A}(\infty))) = p(z - \mathcal{A}(\infty))$ .

С  $p'$  аналогично

То есть  $F(-z) = \sigma_0(F(z))$ , где  $\sigma_0(\xi, \eta) = (\xi, -\eta)$  — такое же, как  $\sigma$ , отображение уже  $X_1$  на себя.

В итоге получаем  $F \circ \mathcal{A} \circ \sigma = \sigma_0 \circ F \circ \mathcal{A}$ .

Следовательно,  $\varphi$  — корректно определённое отображение. Действительно, при выборе прообраза  $\pi^{-1}(x)$  есть два возможных варианта выбора:  $(x, y)$  и  $(x, -y)$ , отличающихся на применение  $\sigma$ . После применений отображений  $\mathcal{A}$  и  $F$  это отличие превратится в отличие на применение  $\sigma_0$  к полученному результату, то есть отличие на знак  $\eta$ . Но от знака  $\eta$  не зависит  $\pi(\xi, \eta)$ . Значит, результат отображения  $\varphi$  не зависит от произвольности выбора  $\pi^{-1}(x)$ .

Локально отображение  $\varphi$  голоморфно, а также  $\varphi(\infty) = \infty$  по выбору  $p(z - \mathcal{A}(\infty))$ . Значит,  $\varphi(z)$  — полином.

Его степень равна 1, так как верхняя строчка диаграммы — это два биголоморфизма. Следовательно,

$$\xi = \varphi(x) = Ax + B.$$

Покажем теперь что  $A = 1, B = 0$ .

Так как  $F$  и  $\mathcal{A}$  сохраняют 1-формы, должно выполняться

$$\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2x - \gamma_3}}$$

при подстановке  $\xi = \varphi(x) = Ax + B$ .

Подставив  $\xi = Ax + B$ , возведя обе части равенства в квадрат и сократив на  $dx^2$ , получаем

$$A^2(4x^3 - \gamma_2x - \gamma_3) = 4(Ax + B)^3 - g_2(Ax + B) - g_3.$$

Это выражение должно быть тождественным, то есть должны совпадать коэффициенты при всех степенях  $x$ .

- При  $x^3$  имеем  $4A^2 = 4A^3$ , то есть  $A = 1$ ;
- При  $x^2$  имеем  $0 = 4 \cdot 3A^2B$ , то есть  $B = 0$ ;
- Подставляя  $A = 1$  и  $B = 0$ , при младших степенях имеем  $\gamma_2 = g_2, \gamma_3 = g_3$ .

□

**Пример.** Пусть  $X = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a \\ c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2 = b \end{array} \right\}$ , где числа  $a, b, c_1, c_2, c_3 > 0$  таковы, что все  $c_i$  различны и отличны от  $\frac{b}{a}$ .

Тогда  $X \subset \mathbb{C}^3$  — риманова поверхность (то есть комплексное подмногообразие) по теореме о неявной функции.

Действительно, матрица Якоби равна  $\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 2c_1x_1 & 2c_2x_2 & 2c_3x_3 \end{pmatrix}$ , её старшие миноры равны  $m_3 = 4x_1x_2(c_2 - c_1)$ ,  $m_2 = 4x_1x_3(c_3 - c_1)$  и  $m_1 = 4x_2x_3(c_3 - c_2)$ .

Они все одновременно равны 0 тогда и только тогда, когда два из чисел  $x_1, x_2, x_3$  равны 0. Но в таком случае получаем, если, например,  $x_1 = x_2 = 0$ , систему

$$\begin{cases} x_3^2 = a \\ c_3x_3^2 = b \end{cases}$$

Из неё следует, что  $c_3 = \frac{a}{b}$ , но такой случай был нами исключён. Значит, теорема о неявной функции выполняется во всех точках из  $X$ .

**Упражнение 4.1.** Доказать, что замыкание  $\bar{X} = X \cup \{4 \text{ точки}\} \subset \mathbb{C}P^3$  является римановой поверхностью, а 1-форма  $\alpha = \frac{dx_1}{m_1} = \frac{dx_2}{m_2} = \frac{dx_3}{m_3}$  голоморфно продолжается в добавленные точки и не имеет нулей на  $\bar{X}$ .

## 2 Накрытия

**Определение.** Пусть  $X, Y$  — римановы поверхности.

Отображение  $\pi: Y \rightarrow X$  называется (неразветвлённым голоморфным) накрытием, если:

- $\pi$  сюръективно;
- Для любой точки  $p \in X$  существует окрестность  $U \subset X$  такая, что  $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$  для некоторых открытых множеств  $V_\alpha \subset Y$ , и  $\pi|_{V_\alpha}$  является биголоморфизмом на окрестность  $U$  для каждого  $\alpha \in A$ .

*Замечание.* Такое отображение  $\pi$  автоматически голоморфно и локально обратимо.

**Пример.**  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $z \mapsto e^z$  — накрытие.

**Пример.**  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $z \mapsto z^n$  — накрытие.

**Пример.**  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $z \mapsto e^{e^z}$  — сюръективное, голоморфное и локально обратимое отображение, которое не является накрытием.

Действительно,  $\{z \mid \operatorname{Re} z < \ln|\ln \varepsilon|\}$  переходит в  $\varepsilon$ -окрестность точки 1, но не биголоморфно.

**Утверждение 4.2** (Поднятие путей на накрытии). Для любого непрерывного отображения  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  и точки  $q \in Y$  такой, что  $\pi(q) = \gamma(a)$  существует единственное непрерывное отображение  $\Gamma: [a, b] \rightarrow Y$  такое, что  $\Gamma(a) = q$  и  $\pi \circ \Gamma = \gamma$ .

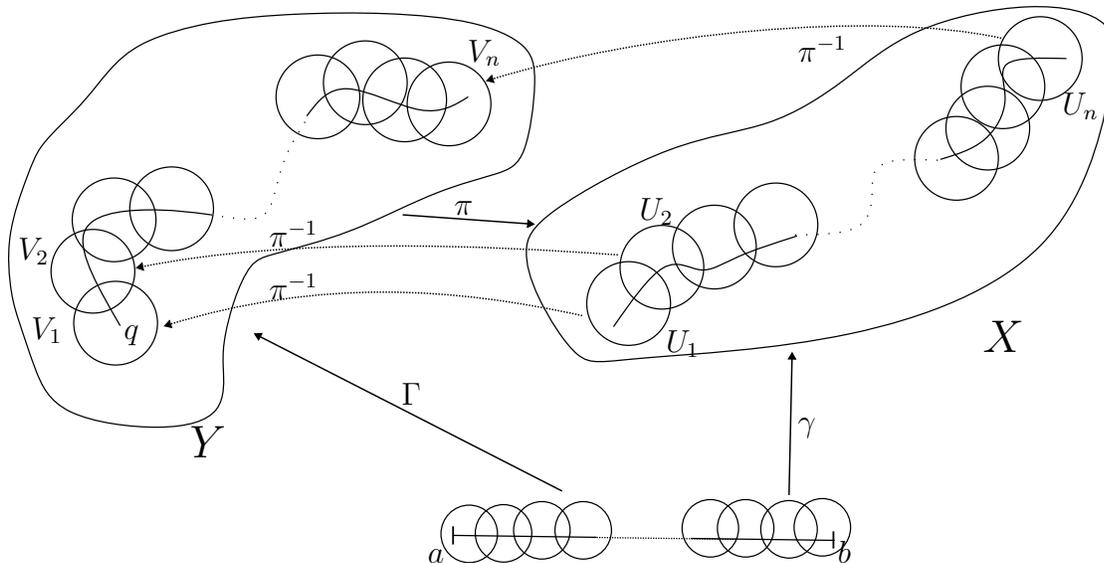


Рис. 4.2: Поднятие пути  $\gamma$  на накрытие  $\pi$

*Доказательство.* Покроем  $\gamma([a, b])$  окрестностями из определения накрытия. Выберем из них конечное число (что можно сделать в силу компактности  $\gamma([a, b])$ ). Назовём их  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , где  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset, U_2 \cap U_3 \neq \emptyset$  и так далее. Среди прообразов окрестности  $U_1$  (которая будет содержать точку  $a$ ) выберем ту окрестность, которая содержит точку  $q$ . Назовём её  $V_1$ . На этой окрестности  $\pi$  — гомеоморфизм, поэтому часть  $\Gamma$  в  $V_1$  определяется однозначно по части  $\gamma$  в  $U_1$ . Эта же часть будет пересекаться с одним (и только одним) из прообразов окрестности  $U_2$ , назовём этот прообраз  $V_2$ . В силу гомеоморфности  $\pi|_{V_2}$  часть отображения  $\Gamma$  в  $V_2$  определяется также однозначно по расположению  $\gamma$  в  $U_2$ . Повторяя это рассуждение, получаем, что  $\Gamma$  целиком определяется однозначно по  $\gamma$  и начальной точке  $q$ .  $\square$

**Следствие 4.1.** Мощность множества  $\pi^{-1}(p)$  одна и та же для всех точек  $p \in X$  и называется числом листов накрытия.

Например, у  $e^z$  бесконечное (счётное) число листов.

У  $z^n$   $n$  листов.

**Утверждение 4.3** (Теорема о монодромии). Если  $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow X$  гомотопны в  $X$  с фиксированным началом и фиксированным концом:

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = p;$$

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = q,$$

то их поднятия  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с совпадающими началами имеют совпадающие концы.<sup>5</sup>

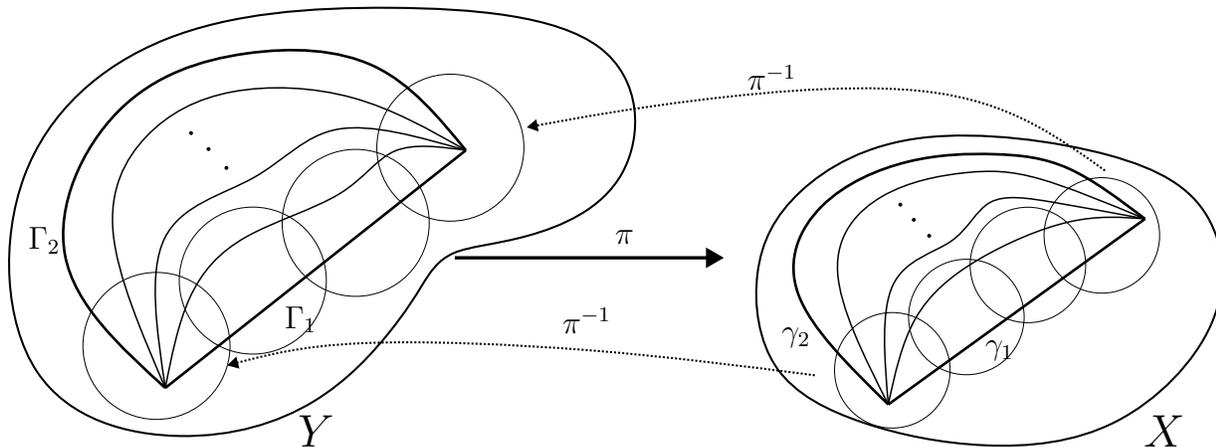


Рис. 4.3: Поднятие близких путей на  $Y$

*Доказательство.* Возьмём путь  $\gamma_1$  на  $X$  и рассмотрим близкие (по параметру гомотопии) к нему пути. Покроем образ пути  $\gamma_1$  окрестностями из определения накрытия. Тогда близкие к  $\gamma_1$  пути будут целиком лежать в тех же окрестностях, а значит, их поднятия будут лежать в тех же окрестностях, что и поднятие  $\Gamma_1$  пути  $\gamma_1$ . Следовательно, у поднятий близких к  $\gamma_1$  путей будет тот же конец, что и у  $\Gamma_1$ . Аналогично для любого другого пути в этой гомотопии. Получаем, что для любого пути с параметром гомотопии  $s$  его поднятие и поднятия близких<sup>6</sup> к нему путей заканчиваются в одной точке. Далее, в силу компактности отрезка  $[0, 1]$ , который пробегается параметром гомотопии, получаем, что от  $\gamma_1$  к  $\gamma_2$  можно пройти по конечной цепочке из близких друг к другу путей. А так как поднятия близких друг к другу путей заканчиваются в одной точке, получаем, что  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  также заканчиваются в одной точке.  $\square$

**Следствие 4.2.** *Накрытие односвязной римановой поверхности - это биголоморфизм.*

### 3 Риманова поверхность аналитической функции

**Определение.** Пусть  $X$  — риманова поверхность. Росток голоморфной функции в точке  $a \in X$  — это класс эквивалентности пар  $(U, f)$ , где  $X \supset U$  — открытое множество,

<sup>5</sup>И, вообще говоря, гомотопны

<sup>6</sup>Опять же, по параметру гомотопии, то есть это пути с параметрами гомотопии из  $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — какое-то малое число

$a \in U, f \in \mathcal{O}(U)$ , по отношению эквивалентности „совпадение в какой-то окрестности точки  $a$ “ (то есть  $(U, f) \sim (V, g)$ , если  $f \equiv g$  в некоторой окрестности точки  $a$ ).

Множество всех ростков обозначается  $\mathcal{O}(a)$ . Росток функции  $f \in \mathcal{O}(a)$  в точке  $a \in D$  обозначается  $[f]_a$ . Точка  $a$  называется точкой приложения ростка.

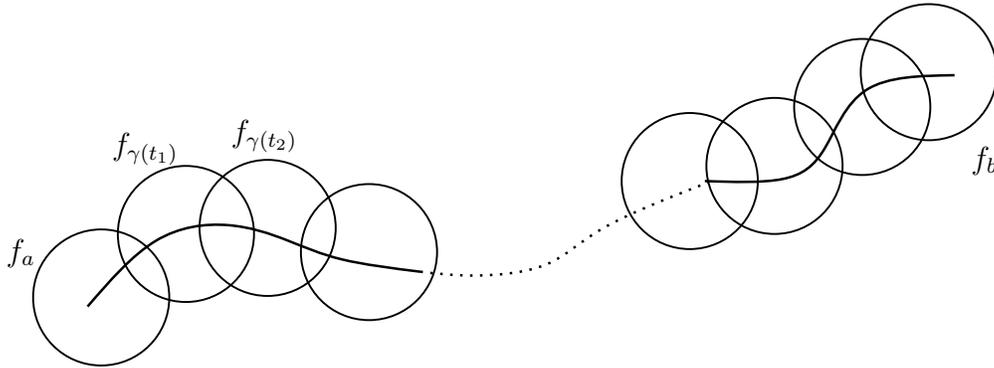


Рис. 4.4: Аналитическое продолжение

**Определение.** Аналитическое продолжение ростка  $[f]_a \in \mathcal{O}(p)$  вдоль непрерывного пути  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  с  $\gamma(a) = p$  — это семейство ростков  $\{f_t \in \mathcal{O}(\gamma(t)) \mid t \in [a, b]\}$  такое, что для любого  $\tau \in [a, b]$  есть окрестность  $u_\tau \subset [a, b]$  точки  $\tau$  и  $U_\tau \subset X$  точки  $\gamma(t)$ , а также функция  $f \in \mathcal{O}(U_\tau)$ , такие, что  $f_t = [f]_{\gamma(t)} \forall t \in u_\tau$ .

**Пример.**  $\mathcal{F}(w) = \ln w = \pi^{-1}(w)$  — аналитическая функция на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , обратная к  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\pi(z) = e^z$ .

**Пример.**  $\mathcal{F}(w) = \sqrt[n]{w}$  — аналитическая функция на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , обратная к  $\pi(z) = z^n$ .

**Определение.** Мощность множества всех ростков функции  $f \in \mathcal{F}$  с точкой приложения  $a \in X$  одна и та же для всех  $a$  и называется числом листов аналитической функции  $\mathcal{F}$  на римановой поверхности  $X$ .

**Утверждение 4.4.** Пусть  $\mathcal{F}$  — аналитическая функция на римановой поверхности  $X$ .

Положим  $X_{\mathcal{F}} := \mathcal{F}$ , и пусть  $\pi_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow X$  сопоставляет каждому ростку  $f \in \mathcal{F}$  его точку приложения.

Тогда на  $X_{\mathcal{F}}$  есть такая структура римановой поверхности, что  $\pi_{\mathcal{F}}: X_{\mathcal{F}} \rightarrow X$  является накрытием, а  $\mathcal{F}$  поднимается на это накрытие  $\pi_{\mathcal{F}}$  до однозначной функции  $\Phi_{\mathcal{F}}$  в том смысле, что  $\mathcal{F} = \Phi_{\mathcal{F}} \circ \pi_{\mathcal{F}}^{-1}$ .

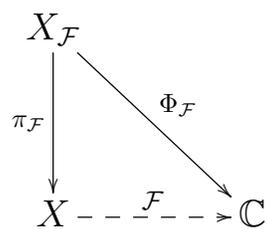


Рис. 4.5: Накрытие аналитической функции  $\mathcal{F}$

## Лекция 5: Алгебраические функции

### 1 Доказательство теоремы 2

**Теорема.** Пусть  $X$  — компактная риманова поверхность и  $\alpha$  — голоморфная 1-форма на  $X$  без нулей. Пусть  $p_0 \in X$  — произвольная точка. Тогда есть решётка  $\Lambda$  такая, что отображение Абеля

$$\mathcal{A}(p) = \int_{p_0}^p \alpha \pmod{\Lambda}$$

корректно определено и является биголоморфизмом  $X$  на  $\mathbb{C}/\Lambda$ .

*Доказательство.* 1 часть:

Пусть  $\mathcal{F}$  — аналитическая функция на  $X$ , заданная формулой

$$\mathcal{F}(p) = \int_{p_0}^p \alpha. \quad (5.1)$$

Её ростки в любой точке  $p \in X$  с точностью до прибавления константы имеют вид

$$f_p(x) = \int_p^x \alpha.$$

Так как  $\alpha$  нигде не равна нулю,  $f_p(x)$  локально обратимо и биголоморфно отображает некоторую окрестность точки  $p$  на некоторую окрестность нуля  $B(0, R_p) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_p\}$ , причём  $f_p(p) = 0$ .

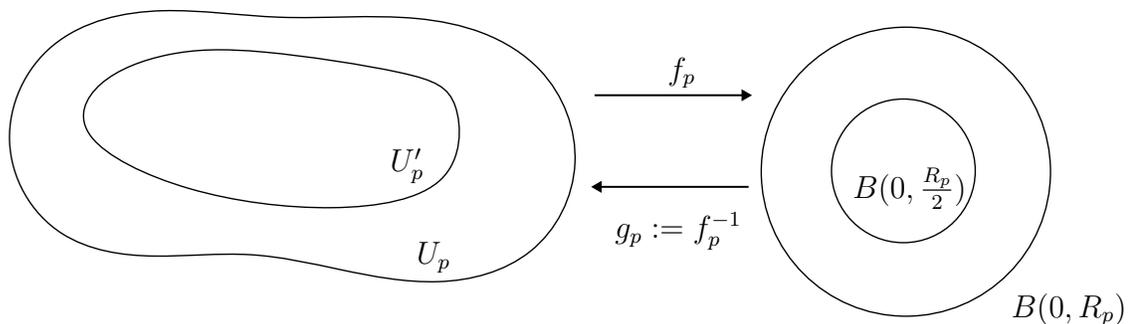


Рис. 5.1: Биголоморфизм между  $U_p$  и кругом радиуса  $R$

Пусть  $U'_p := f_p^{-1}\left(B\left(0, \frac{R_p}{2}\right)\right)$  для каждой точки  $p$ , и  $\{U'_{p_1}, \dots, U'_{p_N}\}$  — конечное подпокрытие  $X$  из покрытия  $\{U'_p\}_{p \in X}$ . Определим  $2R := \min\left(\frac{R_{p_1}}{2}, \dots, \frac{R_{p_N}}{2}\right)$ . Тогда

для любой точки  $p \in X$  функция  $g_p$  (определённая на  $B(0, R_p)$  как  $f_p^{-1}$ ) биголоморфно отображает круг  $B(0, 2R)$  на некоторую окрестность точки  $p$ .

Теперь рассмотрим риманову поверхность аналитической функции  $\mathcal{F}$ .

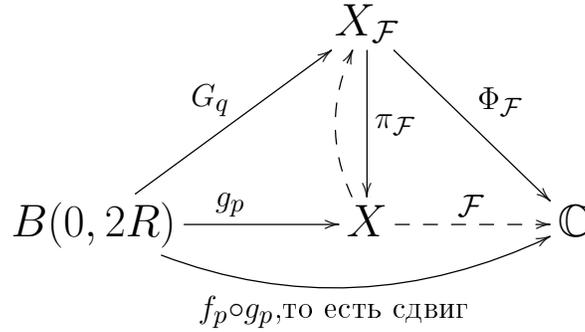


Рис. 5.2: Диаграмма к доказательству теоремы

По теореме о монодромии, в силу односвязности  $B(0, 2R)$ , для любой точки  $p \in X$  и любой точки  $q \in \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(p)$  существует голоморфное отображение  $G_q: B(0, 2R) \rightarrow X_{\mathcal{F}}$  такое, что  $G_q(0) = q$  и диаграмма сверху коммутативна (то есть  $g_p = \pi_{\mathcal{F}} \circ G_q$ ). В частности, из коммутативности диаграммы следует, что  $\Phi_{\mathcal{F}} \circ G_q$  — сдвиг.

Определим  $V_q := G_q(B(0, R))$ .

Тогда:

1.  $\Phi_{\mathcal{F}}$  биголоморфно отображает  $V_q$  на  $B(\Phi_{\mathcal{F}}, R)$ .
2.  $r \in V_q \Leftrightarrow q \in V_r$ .

Покажем, что  $\Phi_{\mathcal{F}}: X_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{C}$  является накрытием.

Сначала покажем сюръективность:

Пусть  $w_0 \in \mathbb{C}$ , и есть точка  $q \in X_{\mathcal{F}}$  такая, что  $\Phi_{\mathcal{F}} \in B(w_0, R)$ . Тогда  $w_0 \in B(w_0, R)$  и, следовательно,  $w_0 \in \Phi_{\mathcal{F}}(X_{\mathcal{F}})$  по свойству 1. Следовательно, любая точка входит в образ  $\Phi_{\mathcal{F}}$  с окрестностью радиуса  $R$ , то есть образ  $\Phi_{\mathcal{F}}$  — это всё  $\mathbb{C}$ .

Теперь пусть  $w_0 \in \mathbb{C}$  — произвольная точка.

Покажем, что  $\Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(B(w_0, R)) = \bigcup_{q \in \Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(w_0)} V_q$ .

Действительно, включение правой части в левую ясно из свойства 1.

Докажем обратное включение. Пусть  $r \in \Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(B(w_0, R))$ . Тогда  $\Phi_{\mathcal{F}}(r) \in B(w_0, R)$ . Следовательно,  $w_0 \in B(\Phi_{\mathcal{F}}(r), R)$ , то есть существует такая точка  $q \in V_r$ , что  $w_0 = \Phi_{\mathcal{F}}(q)$  (в силу свойства 1). Тогда  $r \in V_q$  по свойству 2, то есть  $r \in \bigcup_{q \in \Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(w_0)} V_q$ .

**Упражнение 5.1.** Показать, что окрестности  $V_q$  для  $q \in \Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(w_0)$  — непересекающиеся.

Итак, показано, что  $\Phi_{\mathcal{F}}$  — накрытие. Тогда по теореме о монодромии, в силу односвязности  $\mathbb{C}$ ,  $\Phi_{\mathcal{F}}$  — биголоморфизм.

2 часть:

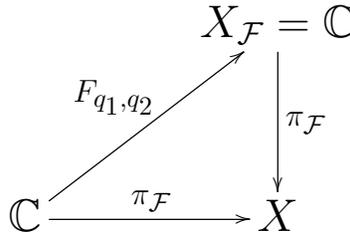


Рис. 5.3: Автоморфизмы  $\mathbb{C}$ , сохраняющие накрытие  $\pi_{\mathcal{F}}$

Пусть  $p \in X$  — произвольная точка, и  $q_1, q_2 \in \pi_{\mathcal{F}}^{-1}$  — её произвольные прообразы. Тогда по теореме о монодромии (и в силу односвязности  $\mathbb{C}$ ) существует единственное голоморфное отображение  $F_{q_1, q_2} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  такое, что  $F_{q_1, q_2}(q_1) = q_2$  и  $\pi_{\mathcal{F}} \circ F_{q_1, q_2} = \pi_{\mathcal{F}}$ .

$F_{q_1, q_2} \circ F_{q_2, q_3} = F_{q_1, q_3}$ , а также  $F_{q_1, q_1} = id$  в силу единственности  $F_{q_i, q_j}$ .

Это значит, что на множестве  $\{F_{q_i, q_j} \mid q_i, q_j \in \pi_{\mathcal{F}}^{-1}\}$  есть групповая структура, а также то, что  $F_{q_i, q_j}$  — биголоморфизмы.

Так как  $F_{q_1, q_2}$  — биголоморфизм  $\mathbb{C}$  на себя, заключаем, что  $F_{q_1, q_2}(z) = Az + B$ . В силу того, что у  $F_{q_1, q_2}$  нет неподвижных точек (иначе  $F_{q_1, q_2} = id$  в силу единственности), заключаем, что  $A = 1$ .

Следовательно,  $F_{q_i, q_j}$  — это сдвиги. Группа из этих сдвигов будет подгруппой аддитивной группы в  $\mathbb{C}$ . Также эта подгруппа будет дискретной (так как слой  $\pi_{\mathcal{F}}^{-1}$  состоит из изолированных точек).

Тогда она равна:

- Либо  $\{id\}$ ,
- либо  $\mathbb{Z}\omega, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,
- либо  $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ , где  $\text{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$  (то есть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$ ).

Других случаев (то есть большего числа порождающих) быть не может, иначе в этой подгруппе было бы всюду плотное в  $\mathbb{C}$  множество. Тогда  $X$  — это факторгруппа  $\mathbb{C}$  по этой группе, то есть:

- Либо  $\mathbb{C}$ ,
- либо  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega$ ,
- либо  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$ .

Но первые два случая соответствуют некомпактным пространствам, а  $X$  по условию компактно. Значит,  $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$  или, что то же самое,  $\mathbb{C}/\Lambda$ .  $\square$

*Замечание.* Рассмотрим диаграмму

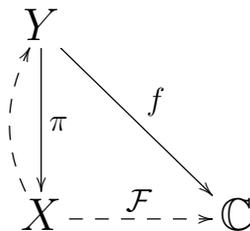


Рис. 5.4: Поднятие аналитической функции на накрытие

Скажем, что аналитическая функция  $\mathcal{F}$  на римановой поверхности  $X$  поднимается на накрытие  $\pi$  до однозначной функции  $f \in \mathcal{O}(Y)$ , если  $\mathcal{F} = f \circ \pi^{-1}$ .

Минимальное из таких поднятий — это риманова поверхность аналитической функции  $\pi_{\mathcal{F}}: X_{\mathcal{F}} \rightarrow X$ , а максимальное — это универсальное накрытие ( $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow X$  такое, что  $\tilde{X}$  односвязно). Любое поднятие аналитической функции накрывается универсальным накрытием и накрывает риманову поверхность аналитической функции:

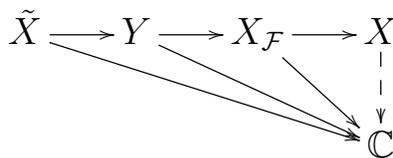


Рис. 5.5: Отношение разных накрытий аналитической функции между собой

При этом теорема показывает, что  $\tilde{X} = X_{\mathcal{F}}$ .

## 2 Алгебраические функции

**Утверждение 5.1.** Пусть  $P(z, w) = c_0(z)w^m + c_1(z)w^{m-1} + \dots + c_m(z)$  — неприводимый многочлен от двух комплексных переменных,  $m \geq 1$  и  $c_0 \neq 0$ .

Тогда есть конечное множество  $K \subset \mathbb{C}_z^1$  и аналитическая функция (или совокупность аналитических функций)  $\mathcal{F}$  на  $\mathbb{C} \setminus K$  такие, что

$$P(z, w) = 0 \Leftrightarrow w \text{ — одно из значений } \mathcal{F}(z)$$

для всех  $z \in \mathbb{C} \setminus K, w \in \mathbb{C}$ .

**Пример.**  $w = \mathcal{F}(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$  можно записать как  $P(z, w) = z - (w^2 - 1)^2 = 0$ .

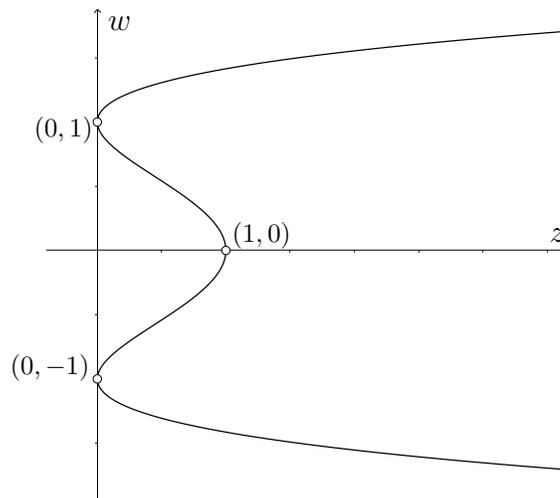


Рис. 5.6: График функции  $w = \mathcal{F}(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$  при вещественных  $w$  и  $z$

В данном случае  $K = \{0, 1\}$ , то есть точки, где касательная к графику вертикальна (что мешает выражению  $w$  через  $z$  в окрестностях этих точек). Над  $(0, 1)$  при этом видны все 4 листа аналитической функции  $\mathcal{F}(z)$ .

*Доказательство.* Вычисление НОД полиномов  $P(z, w)$  и  $\frac{\partial P}{\partial w}(z, w)$  в кольце  $\mathbb{C}(z)[w]$  даёт полином  $D$  от коэффициентов  $c_0, c_1, \dots, c_m$  (и, следовательно, от  $z$ ) такой, что:

1.  $D(z) \equiv 0$  тогда и только тогда, когда  $P(z, w)$  приводим;
2. если  $D(z) \neq 0$ , то

$D(z_0) = 0$  тогда и только тогда, когда полином  $P(z_0, w)$  имеет кратный корень.

Теперь определим множество  $K := c_0^{-1}(0) \cup D^{-1}(0)$ .

Тогда для любой точки  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K$  полином  $P(z_0, w)$  имеет ровно  $m$  простых корней (то есть корней 1 порядка).

Пусть  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K, p(z_0, w_0) = 0$ . Тогда  $P'_w(z_0, w_0) \neq 0$ . Значит, найдётся  $\varepsilon > 0$  такой, что  $P(z_0, w) \neq 0$  при  $|w - w_0| = \varepsilon$ . То есть  $\rho := \min_{|w-w_0|=\varepsilon} |P(z_0, w)| > 0$ . Выберем  $\delta > 0$  такой, что  $\max_{\substack{|z-z_0|<\delta \\ |w-w_0|\leq\varepsilon}} |P(z_0, w) - P(z, w)| < \rho$ . Это можно сделать в силу равномерной непрерывности функции  $P(z, w)$ . Тогда для любого  $z \in B(z_0, \delta)$

$$N(P(z, w), B(w_0, \varepsilon)) = N(P(z, w) - P(z_0, w) + P(z_0, w), B(w_0, \varepsilon)).$$

Так как на границе  $\{|w - w_0| = \varepsilon\}$  круга  $B(w_0, \varepsilon)$

$$|P(z, w) - P(z_0, w)| < \rho < |P(z_0, w)|,$$

можно применить теорему Руше, то есть

$$N(P(z, w) - P(z_0, w) + P(z_0, w), B(w_0, \varepsilon)) = N(P(z_0, w), B(w_0, \varepsilon)) = 1,$$

так как  $w_0$  — нуль первого порядка, а других нулей у  $P(z_0, w)$  в этой окрестности нет (при достаточно малом  $\varepsilon$ ). Следовательно, для любого  $z \in B(z_0, \delta)$  есть единственное решение  $w = \varphi(z)$  уравнения  $P(z, w) = 0$  в круге  $\{|w - w_0| < \varepsilon\}$ . При этом функция  $\varphi$  голоморфна в этом круге, так как по теореме Коши о вычетах верно равенство

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta-w_0|=\varepsilon} \eta \frac{Q(z, \eta)}{P(z, \eta)} d\eta,$$

где  $Q(z, w) := \frac{\partial P}{\partial w}(z, w)$ . По теореме о голоморфной зависимости интеграла от параметра имеем, что  $\varphi(z)$  голоморфна.

Получаем над каждой точкой  $z_0$   $m$  кусков графиков функций  $\varphi(z)$  — по одному на каждый корень  $w_0$  многочлена  $P(z_0, w)$ . При достаточно малом  $\delta$  эти куски графиков не пересекаются.

Следовательно, сужение отображения  $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \pi(z, w) = z$  на множество  $\{(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus K) \times \mathbb{C} \mid P(z, w) = 0\}$  есть накрытие с числом листов  $m$ , то есть график аналитической функции (или нескольких аналитических функций)  $\mathcal{F}$  на  $\mathbb{C} \setminus K$ .

□

**Утверждение 5.2.** Для любой точки  $a \in K \cup \{\infty\}$  и любой аналитической функции  $\mathcal{F}_j$  на такой окрестности

$$U_\varepsilon(a) := \begin{cases} \left\{ |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}, & a = \infty \\ \{0 < |z - a| < \varepsilon\}, & a \in K \end{cases},$$

что

$$\mathcal{F}|_{U_\varepsilon} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s\}, \quad j = 1, \dots, s,$$

существует предел  $\lim_{z \rightarrow a} \mathcal{F}_j = b_j \in \bar{\mathbb{C}}$  для всех значений аналитической функции  $\mathcal{F}_j$ , а также голоморфное отображение

$$f_j: B\left(0, \varepsilon^{\frac{1}{k_j}}\right) \rightarrow (\text{Окрестность точки } b_j \text{ в } \bar{\mathbb{C}})$$

такое, что  $\mathcal{F}_j(z) = f_j\left((z - a)^{\frac{1}{k_j}}\right) \forall z \in U_\varepsilon$ .  $k_j$  здесь — это число листов функции  $\mathcal{F}_j$  на  $U_\varepsilon$ , то есть то, сколько раз аналитическая функция  $\mathcal{F}$  принимает значение  $\mathcal{F}_j$ . Если  $b_j = \infty$ , то надо заменить  $z - a$  на  $\frac{1}{z}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим аналитическую функцию  $\mathcal{F}_j$  на окрестности  $U_\varepsilon$  и отображение  $\pi: B(0, \varepsilon^{\frac{1}{k_j}}) \rightarrow U_\varepsilon$ .

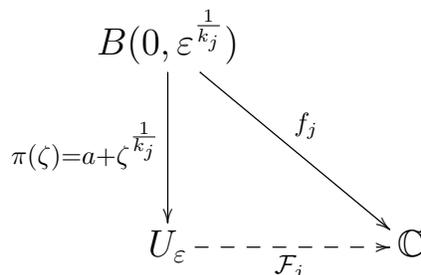


Рис. 5.7: Диаграмма к доказательству утверждения 5.2

Композиция  $\mathcal{F}_j \circ \pi$  распадается на однозначные функции. Действительно, попробуем сделать в  $B\left(0, \varepsilon^{\frac{1}{k_j}}\right)$  один оборот вокруг нуля. Это (при отображении  $\pi$ ) будет эквивалентно  $k_j$  оборотам вокруг точки  $a$  в  $U_\varepsilon$ . При этом  $k_j$  — это листность аналитической функции  $\mathcal{F}_j$  на окрестности  $U_\varepsilon$ . Это значит, что после  $k_j$  оборотов аргумента аналитическая функция  $\mathcal{F}_j$  будет представлена таким же элементом, как и до обхода. А значит, и функция  $f_j$  после одного оборота будет представлена тем же элементом, что и показывает её однозначность.

Пусть теперь  $f_j \in \mathcal{O}\left(B\left(0, \varepsilon^{\frac{1}{k_j}}\right)\right)$  — любая из этих однозначных функций. Тогда  $\mathcal{F}_j(z) = f_j\left((z-a)^{\frac{1}{k_j}}\right)$  на  $U_\varepsilon$ . Для доказательства существования предела  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} f_j(\zeta) = b_j$  достаточно доказать, что особенность функции  $f_j(\zeta)$  в точке  $\zeta = 0$  — либо устранимая, либо полюс. Для этого достаточно показать, что есть такое число  $N \in \mathbb{N}$ , что  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^N \mathcal{F}_j(z) = 0$  для всех значений функции  $\mathcal{F}_j$ . Но  $\eta := (z-a)^N \mathcal{F}_j$  удовлетворяет уравнению

$$c_0(z) \left(\frac{\eta}{(z-a)^N}\right)^m + c_1(z) \left(\frac{\eta}{(z-a)^N}\right)^{m-1} + \dots + c_m(z) = 0,$$

то есть

$$\eta^m + \frac{c_1(z)}{c_0(z)} (z-a)^N \eta^{m-1} + \dots = 0. \quad (5.2)$$

Выберем число  $N$  так, что все коэффициенты последнего уравнения стремятся к нулю при  $z \rightarrow a$ . Теперь осталось применить лемму:

**Лемма.** Если  $|c_1| + \dots + |c_m| \rightarrow 0$ , то все нули уравнения

$$P(\eta) = \eta^m + c_1 \eta^{m-1} + \dots + c_m = 0$$

также стремятся к нулю.

*Доказательство.* Для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что если  $|c_1| + \dots + |c_m| < \delta$ , то  $\varepsilon^m > |c_1| \varepsilon^{m-1} + \dots + |c_m|$ .

Тогда число нулей  $N(P(\eta), |\eta| < \varepsilon)$  будет равно (по теореме Руше)  $N(\eta^m, |\eta| < \varepsilon)$ , то есть  $m$ . Это означает, что все корни уравнения по модулю меньше  $\varepsilon$ .  $\square$

Применяя лемму к выражению 5.2, получаем, что все значения  $\eta$  стремятся к 0.  $\square$

## Лекция 6: Нормализация алгебраической кривой

### 1 Нормализация алгебраической кривой

**Утверждение 6.1** (Оно же — и определение). Пусть неприводимый многочлен

$$P(z, w) = c_0(z)w^m + c_1(z)w^{m-1} + \dots + c_m(z)$$

от двух комплексных переменных,  $m \geq 1$ ,  $c_0 \not\equiv 0$ , конечное множество  $K \subset \mathbb{C}$  и аналитическая функция  $\mathcal{F}$  на  $\mathbb{C}^1 \setminus K$  определены как в предыдущей лекции.

Тогда добавляя к графику

$$X_{reg} := \{(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus K) \times \mathbb{C} \mid P(z, w) = 0\}$$

аналитической функции  $\mathcal{F}$  все точки вида  $(a, b_j)$ , где  $a \in K$ ,  $b_j = \lim_{z \rightarrow a} \mathcal{F}_j(z)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , и  $\mathcal{F}|_{U_\varepsilon(a)} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\}$ , с картами, обратными к отображениям  $\zeta \mapsto (a + \zeta^{k_j}, f_j(\zeta))$ ,  $|\zeta| < \varepsilon^{\frac{1}{k_j}}$ , и определяя на этих картах  $\mathcal{F}_j(z) = f_j\left((z - a)^{\frac{1}{k_j}}\right)$ , получим компактную риманову поверхность  $X = X_{reg} \sqcup \{(a, b_j)\}$ .

Эта поверхность  $X$  называется нормализацией алгебраической кривой

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}.$$

*Доказательство.* Согласованность новых карт с картами  $(z, w) \mapsto z$  пространства  $X_{reg}$  вытекает из их определений (и утверждения 5.2).

Компактность вытекает из утверждения 5.2, так как пределы последовательностей точек из  $X_{reg}$  — либо точки вида  $(a, b_j)$  (если первая координата стремится к точке из  $K$ ), либо точки из  $X_{reg}$  (иначе).

Осталось доказать линейную связность  $X$ . Для этого достаточно доказать линейную связность  $X_{reg}$ , так как  $X$  отличается от него на конечное число точек.

Пусть это не так. Тогда есть две точки  $A, B \in X_{reg}$ , не соединимые кривой. Не нарушая общности, можем считать, что  $\pi(A) = \pi(B)$ , где  $\pi(z, w) = z$ . Действительно, можно соединить точку  $\pi(A)$  с точкой  $\pi(B)$  в  $\mathbb{C} \setminus K$ , а далее поднять эту кривую на  $X_{reg}$ , получив таким образом, что точка  $A$  соединима кривой с какой-то точкой  $\tilde{A}$  (а это значит, что  $\tilde{A}$  и  $B$  несоединимы), и  $\pi(\tilde{A}) = \pi(B)$ .

Это значит, что над одной точкой из  $\mathbb{C} \setminus K$  есть два элемента многозначной функции  $\mathcal{F}$ , один из которых не может быть получен из другого путём аналитического продолжения. То есть  $\mathcal{F}$  — это на самом деле совокупность нескольких аналитических функций (соответствующих компонентам связности  $X_{reg}$ ).

Рассмотрим произвольную аналитическую функцию  $\mathcal{F}_0$  из этой совокупности. Число её листов  $m < n$ , и пусть её ростки в точке  $z \in \mathbb{C} \setminus K$  — это  $f_1, \dots, f_m$ . Тогда рассмотрим функцию  $F(z, w) := \prod_{j=1}^m (w - f_j(z))$  — полином степени  $m$  от переменной  $w$ . Верна эквивалентность

$$F(z, w) = 0 \Leftrightarrow w \in \mathcal{F}_0(z). \quad (6.1)$$

Коэффициенты функции  $F(z, w)$  как многочлена от  $w$  — симметрические функции  $\sigma_k(z)$  ( $\sigma_k(z)$  стоит перед  $w^{m-k}$ ) от  $f_1(z), \dots, f_m$ . Все функции  $\sigma_i(z)$  голоморфны (то есть однозначны) на  $\mathbb{C} \setminus K$ , так как аналитическое продолжение вдоль любой кривой приводит в ту же функцию (при таком продолжении все  $f_j$  просто переставятся местами между собой).

Особенности функции  $\sigma_j(z)$  в точках  $a \in K \cup \{\infty\}$  — устранимые или полюса, так как для любой точки  $a$  есть такой номер  $n_j$ , что  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^{n_j} \sigma_j(z) = 0$  (это свойство вытекает из аналогичного свойства функций  $f_j(z)$ ).

Следовательно,  $\sigma_1(z), \dots, \sigma_m(z)$  — рациональные функции от  $z$  (так как они мероморфны на  $\bar{\mathbb{C}}$ ). Умножая  $F(z, w)$  на произведение их знаменателей, получим полином  $Q(z, w) = b_0(z)w^m + \dots + b_m(z)$  такой, что для точек  $(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus K) \times \mathbb{C}$  верна эквивалентность:

$$Q(z, w) = 0 \Leftrightarrow w \in \mathcal{F}_0(z).$$

Проделав так с каждой аналитической функцией, получим эквивалентность

$$w \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists j : w \in \mathcal{F}_j \Leftrightarrow Q_1(z, w) \cdot Q_2(z, w) \cdots Q_k(z, w) = 0 \Leftrightarrow P(z, w) = 0, \quad (6.2)$$

то есть  $P(z, w) = c \cdot Q_1(z, w) \cdot Q_2(z, w) \cdots Q_k(z, w)$ , где  $c$  — константа. Это противоречит неприводимости многочлена  $P(z, w)$ . Значит,  $\mathcal{F}$  — это одна аналитическая функция, то есть  $X_{reg}$  линейно связан.  $\square$

## 2 Понятие рода. Формула Римана-Гурвица

**Определение.** Пусть  $X$  — компактная триангулируемая гладкая поверхность (триангулируемость здесь понимается в том смысле, что есть представление  $X = \cup_{j=1}^n \bar{T}_j$ , где  $T_j \subset X$  — непересекающиеся открытые подмножества, гомеоморфные треугольнику, причём разные треугольники либо не пересекаются, либо пересекаются по общей вершине, либо пересекаются по общей стороне). Тогда число  $2 - 2g(X) := V - P + \Gamma$  не зависит от выбора триангуляции  $X$  и называется эйлеровой характеристикой поверхности  $X$ , а число  $g(X)$  — родом поверхности.

Если  $X$  гомеоморфна сфере с  $g$  ручками, то её род равен  $g$ .

**Утверждение 6.2** (Формула Римана-Гурвица). Пусть  $P(z, w) = c_n(z)w^n + \dots$  — неприводимый многочлен,  $n \geq 1$ . Пусть  $\mathcal{F}$  — аналитическая функция на  $\mathbb{C} \setminus K$ , графиком которой является  $X_{reg} = \{(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus K) \times \mathbb{C} \mid P(z, w) = 0\}$ , а  $X = X_{reg} \sqcup \{\text{конечное множество точек}\}$  — нормализация алгебраической кривой  $P(z, w) = 0$ .

Тогда

$$2 - 2g(X) = 2n - \sum_j (k_j - 1), \quad (6.3)$$

где суммирование проводится по всем точкам из  $X \setminus X_{reg}$ .

**Пример.**  $\mathcal{F}(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$ .  $n = 4$ .  $P(z, w) = z - (w^2 - 1)^2$ . В точках  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$  порядок ветвления равен 2, на бесконечности порядок ветвления (обозначим его  $k_6$ ) равен 4. Две остальные точки — точки однозначности функции, то есть порядок ветвления равен 1.

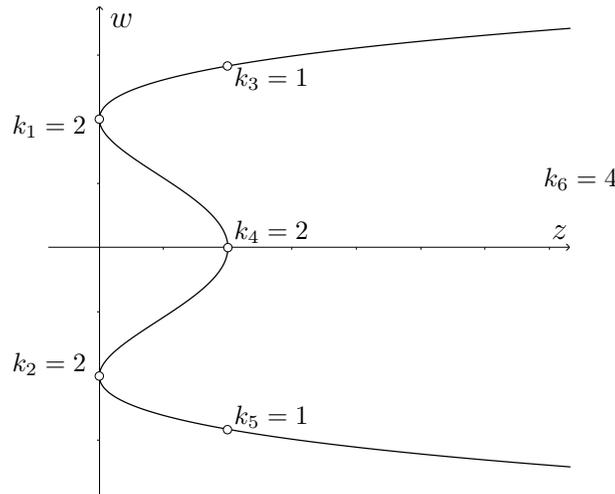


Рис. 6.1: Ветвления алгебраической функции  $w = \mathcal{F}(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$

$$2 - 2g(X) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 2.$$

То есть  $g(X) = 0$ . Или, проще говоря,  $X$  гомеоморфно сфере. И действительно, гомеоморфизм со сферой — это проекция  $X$  на плоскость  $w$  (а бесконечность отображается в бесконечность).

*Доказательство утверждения.* Рассмотрим такую триангуляцию множества  $\mathbb{C}_z^1 \cup \{\infty\}$ , что все точки из множества  $K \cup \{\infty\}$  являются вершинами треугольников. Тогда по

теореме о монодромии прообраз  $\pi^{-1}(T) \subset X_{reg}$  каждого треугольника  $T$  состоит из  $n$  непересекающихся графиков голоморфных функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{O}(T)$ .

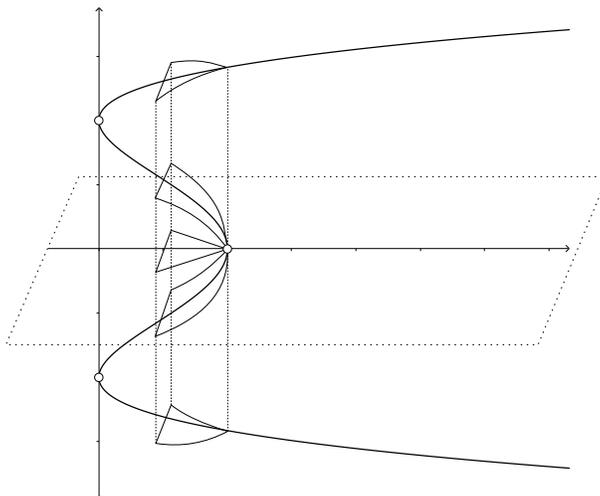


Рис. 6.2: „Поднятие“ триангуляции на  $X$

Все эти графики образуют триангуляцию  $X_{reg}$ , а также её нормализации  $X = X_{reg} \sqcup \{\text{конечное множество точек}\}$ . Обозначим число вершин в триангуляциях  $\mathbb{C}$  и  $X$  как  $V$  и  $V'$  соответственно, количество рёбер — как  $P$  и  $P'$ , а количество граней как  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ . Тогда:

- Количество граней в триангуляции  $X$  в  $n$  раз больше, чем для сферы ( $\Gamma' = n \cdot \Gamma$ );
- Рёбер также в  $n$  раз больше ( $P' = n \cdot P$ );
- Вершин могло стать ровно в  $n$  раз больше, но некоторые вершины (а именно точки ветвления) разбиваются не на  $n$  частей, а на  $n - \sum_j (k_j - 1)$ , где суммирование для каждой вершины  $p$  из  $K \cup \{\infty\}$  ведётся по всем прообразам точки  $p$ , а для остальных вершин не ведётся (над ними нет особых точек). Иными словами, изначально каждая вершина из  $K \cup \{\infty\}$  разбилась на  $n$  частей, а далее какие-то группы этих частей (состоящие каждая из  $k_j$  точек, для каждой группы своё  $k_j$ ) склеились каждая в одну, а значит, из  $n$  частей „выжило“ только  $n - \sum (k_j - 1)$ . В итоге  $V'$  будет равно  $n \cdot V - \sum_j (k_j - 1)$ , где суммирование ведётся уже по всем особым точкам.

Эйлерова характеристика  $X$  равна  $B' - P' + \Gamma'$ , то есть

$$n \cdot (B - P + \Gamma) - \sum_j (k_j - 1).$$

Следовательно,

$$2 - 2g(X) = n \cdot 2 - \sum_j (k_j - 1).$$

□

### 3 Примеры

**Пример** (Гиперэллиптическая кривая). Пусть  $P(z, w) = w^2 - \prod_{j=1}^{2g+1} (z - e_j)$ , где  $g \in \mathbb{N}$ , а  $e_i$  различны. Тогда  $K = \{e_1, \dots, e_{2g+1}\}$ , в каждой из этих точек порядок ветвления  $k_j$  алгебраической функции равен 2, так как  $w = \sqrt{\prod_{j=1}^{2g+1} (z - e_j)}$ .  $X = X_{reg} \cup K \cup \{\infty\}$ . Порядок ветвления в точке  $\infty$  (обозначим его  $k_{2g+2}$ ) также равен 2. Тогда

$$2 - 2g(X) = 2 \cdot 2 - \sum_{j=1}^{2g+2} (k_j - 1) = 2 - 2g - 2 = 2 - 2g.$$

То есть  $g(X) = g$ .

Рассмотрим теперь функции  $f_1(z, w) = z$  и  $f_2(z, w) = w$  на этой поверхности. Они мероморфны на ней. Функция  $f_1$  имеет два нуля первого порядка в точках  $\left(0, \pm \sqrt{\prod_{j=1}^{2g+1} (-e_j)}\right)$ , если нуля нет среди  $e_1, \dots, e_{2g+1}$ , а также полюс порядка 2 в  $\infty$ .

Рассмотрим параметризацию  $X$  в окрестности бесконечности, а именно

$$z = \frac{1}{\zeta^2}. \tag{6.4}$$

Тогда

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} \left( \frac{1}{\zeta^2} - e_j \right) = \frac{P(\zeta)}{\zeta^{2(2g+1)}}, \quad P(1) = 1.$$

Следовательно,

$$w = \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{2g+1}}, \tag{6.5}$$

где  $\varphi(\zeta)$  — однозначная (в какой-то окрестности нуля) ветвь функции  $\sqrt{P(\zeta)}$ , которую можно выбрать, так как  $P(0) \neq 0$ . Поэтому же  $\varphi(0) \neq 0$ .

Отсюда виден полюс второго порядка у  $f_1$  в бесконечности.

У функции  $f_2(z, w)$  будет  $2g + 1$  нуль первого порядка в точках  $e_i$ , а также полюс порядка  $2g + 1$  в бесконечности (что тоже можно увидеть из параметризации).

**Утверждение 6.3.** *Любая мероморфная функция на  $X$  имеет вид  $R_1(z) + R_2(z)w$ , где  $R_1, R_2$  — рациональные функции.*

*Доказательство.* Функция  $\frac{1}{2}(f + f \circ \sigma)$ , где  $\sigma(z, w) = (z, -w)$ , также мероморфна на  $X$ . Также она зависит только от  $z$  (потому что от выбора одного из двух значений  $\pm w$  эта функция не будет зависеть). Следовательно, она мероморфна на  $\bar{\mathbb{C}}_z^1$ . Тогда, по классификации мероморфных функций на сфере (то есть, по утверждению 1.1), она рациональна.

А функция  $\frac{1}{2}(f - f \circ \sigma)$  меняет знак вместе с  $w$ . Значит, поделив её на  $w$ , получим уже функцию, не зависящую от  $w$ , то есть рациональную функцию от  $z$ . Иными словами,  $\frac{1}{2}(f - f \circ \sigma) = wR_2(z)$ , где  $R_2$  — рациональная.  $\square$

Теперь опишем мероморфные 1-формы на  $X$ . Пусть  $\alpha, \beta$  — две мероморфные 1-формы, причём  $\beta \neq 0$ . Тогда  $\alpha = f \cdot \beta$  для какой-то мероморфной функции  $f$ . Из этого следует, что все мероморфные 1-формы на  $X$  имеют вид

$$(R_1(z) + R_2(z)w) dz. \quad (6.6)$$

Теперь найдём среди них голоморфные (то есть не имеющие полюсов). Пусть  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K = \mathbb{C} \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+1}\}$ , и  $R_1(z)$  имеет полюс в точке  $z_0$ . Тогда возможный полюс функции  $wR_2(z)$  может сократиться с полюсом функции  $R_1$  либо в точке  $(z_0, w_0)$ , либо в точке  $(z_0, -w_0)$ , но не в обеих сразу. Значит, такая 1-форма будет иметь полюс в одной из этих точек.

Следовательно,  $R_1(z)$  не должна иметь полюсов в  $\mathbb{C} \setminus K$ . Отсюда же вытекает, что  $wR_2(z)$  также не будет иметь полюсов в этих точках. Рассмотрим теперь случай с полюсом в точке из  $K$ . Не нарушая общности, скажем, что это точка  $e_1$ . тогда обратимся к параметризации поверхности  $X$  по определению нормализации:

$$z = e_1 + \zeta^2. \quad (6.7)$$

Тогда

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (z - e_j) = \zeta^2 \prod_{j=2}^{2g+1} (e_1 - e_j + \zeta^2).$$

$\prod_{j=2}^{2g+1} (e_1 - e_j + \zeta^2) \neq 0$  в точке  $\zeta = 0$ , что позволяет однозначно извлечь корень для  $w$ :

$$w = \zeta \cdot \varphi(\zeta),$$

где  $\varphi(0) \neq 0$ . Тогда

$$\alpha = \left( R_1(e_1 + \zeta^2) + R_2(e_1 + \zeta^2)\zeta\varphi(\zeta) \right) 2\zeta d\zeta. \quad (6.8)$$

$R_1$  имеет в точке  $e_1$  полюс хотя бы первого порядка, а значит,  $R_1(e_1 + \zeta^2)\zeta$  имеет полюс нечётного порядка.  $R_2(e_1 + \zeta^2)\zeta^2\varphi(\zeta)$ , в свою очередь, может иметь полюс только чётного порядка. То есть если одно из этих слагаемых действительно имеет полюс, то их полюса не сократятся. Значит, в точках из  $K$   $R_1$  не может иметь полюсов, а  $R_2$  может иметь полюса максимум первого порядка (чтобы у слагаемого  $R_2(e_1 + \zeta^2)\zeta^2\varphi(\zeta)$  не было полюса).

В таком случае  $wR_2(z)$  будет иметь в этих точках устранимую особенность. Также  $wR_2(z)$  голоморфна в остальных точках  $\mathbb{C}$ . Тогда и  $w^2R_2(z)$  не будет иметь полюсов, кроме, возможно, бесконечности. Так как  $w^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (z - e_j)$ , заключаем, что  $w^2R_2(z) = P_2(z)$  — рациональная функция от  $z$ , не имеющая полюсов на  $\mathbb{C}_z^1$ . То есть  $P_2(z)$  — полином.  $R_1(z)$  в силу отсутствия полюсов на  $\mathbb{C}_z^1$  тоже является полиномом  $P_1(z)$ .

Следовательно, голоморфные 1-формы имеют вид

$$\alpha = \left( P_1(z) + \frac{P_2(z)}{w} \right) dz. \quad (6.9)$$

Осталось проверить, когда форма  $\alpha$  будет голоморфна на бесконечности. Используя параметризацию 6.4 и 6.5, получаем

$$\alpha = \left( P_1 \left( \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{P_2 \left( \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\varphi(\zeta)} \zeta^{2g+1} \right) \left( -\frac{2}{\zeta^3} \right) d\zeta.$$

Найдём номер старшей отрицательной степени переменной  $\zeta$  (или наибольшую степень  $\frac{1}{\zeta}$ ) перед  $d\zeta$ :

- у слагаемого с  $P_1 \left( \frac{1}{\zeta^2} \right)$  получается  $2 \deg P_1 + 3$ ;
- у слагаемого с  $\frac{P_2 \left( \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\varphi(\zeta)} \zeta^{2g+1}$  получается  $2 \deg P_2 - 2g + 2$ .

Они снова получились разной чётности, значит, сократиться они не могут. Следовательно, эти номера оба должны быть не больше 0 (то есть  $\zeta$  должна встречаться

только в неотрицательных степенях). Для этого  $P_1$  должен быть тождественным нулём, так как иначе даже в случае  $\deg P_1 = 0$  (то есть  $P_1 \equiv \text{const} \neq 0$ ) номер старшей отрицательной степени  $\zeta$  будет не меньше 1. Для  $P_2$  же должно выполняться  $2 \deg P_2 - 2g + 2 \leq 0$ , то есть  $\deg P_2 \leq g - 1$ .

Итак, все голоморфные 1-формы на гиперэллиптической кривой  $X$  — это:

$$\alpha = \frac{P_2(z)}{w} dz, \quad \deg P_2 \leq g - 1. \quad (6.10)$$

В частности, они образуют векторное пространство над  $\mathbb{C}$  с базисом  $\frac{dz}{w}, \frac{zdz}{w}, \dots, \frac{z^{g-1}dz}{w}$ .

**Упражнение 6.1.** Прodelать то же самое для:

- алгебраической кривой  $w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - e_j)$ , где все  $e_i$  различны;
- кривой Ферма  $w^n + z^n = 1$ .

## Лекция 7: Доказательство теорем существования

### 1 Выводы из описания мероморфных и голоморфных 1-форм на гиперэллиптической кривой

1. Векторное пространство голоморфных 1-форм на  $X$  имеет размерность  $g$  (совпадающую с родом  $X$ ).
2. Любая голоморфная 1-форма имеет ровно  $2g - 2$  нуля (с учётом кратности).

**Упражнение 7.1.** Проверить эти утверждения для  $X$ , а также для нормализации  $X_1$  кривой  $\left\{ w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - e_j), e_i \neq e_j \forall i \neq j \right\}$ .

### 2 Оператор Ходжа и гильбертово пространство 1-форм

**Определение.** Оператор Ходжа  $*$  — оператор на пространстве вещественных 1-форм, сопоставляющий форме  $\alpha = u(z)dx + v(z)dy$  форму  $*\alpha := -vdx + udy$  (то есть  $dx \mapsto dy, dy \mapsto -dx$ ).

На пространство комплекснозначных 1-форм оператор  $*$  можно продолжить по  $\mathbb{C}$ -линейности. Тогда

$$*dz = *(dx + idy) = dy - idx = -i(dx + idy) = -idz.$$

Аналогично

$$*d\bar{z} = id\bar{z}.$$

Этот оператор не зависит от выбора карты, а также

$$*^2 = -\text{Id}.$$

Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — путь. Обозначим касательный вектор к его образу в какой-то точке за  $\dot{\gamma}(t)$ . Теперь пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфное отображение. Тогда касательный вектор  $\dot{\gamma}(t)$  к кривой  $\gamma([a, b])$  перейдёт в касательный вектор  $df(\dot{\gamma}(t))$  к кривой  $f \circ \gamma(t)$ . Иными словами, к вектору  $\dot{\gamma}(t)$  применяется 1-форма  $df$ . Применим теперь оператор Ходжа к  $df$ , а затем результат применим к  $\dot{\gamma}(t)$ . Получим вектор  $*df(\dot{\gamma}(t))$ , перпендикулярный касательному. Иными словами, произойдёт поворот  $df(\dot{\gamma}(t))$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ . То есть оператор Ходжа сопоставляет касательному вектору вектор нормали.

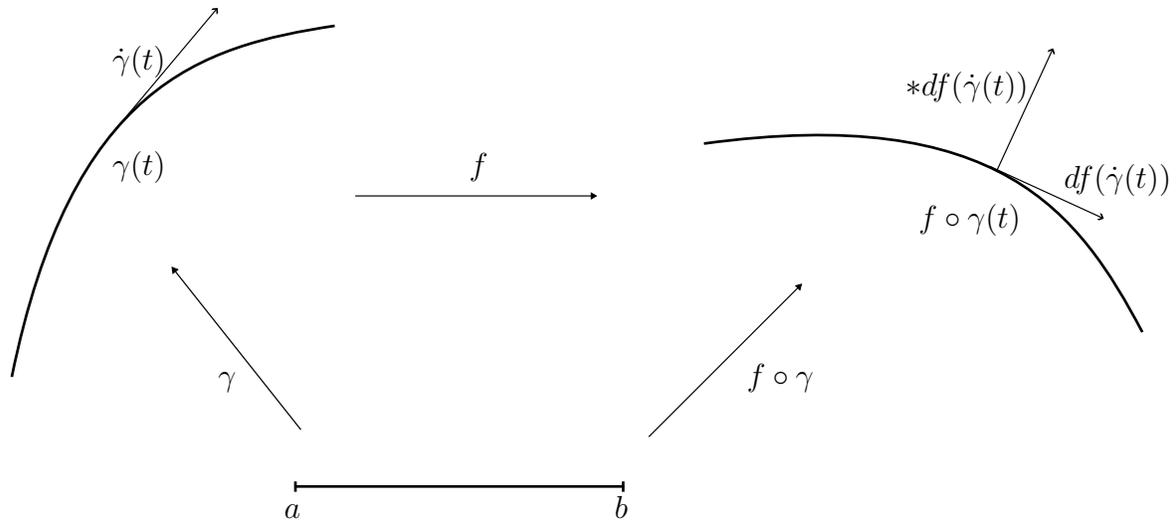


Рис. 7.1: Геометрический смысл оператора Ходжа

Для любых 1-форм  $\alpha_1 = u_1 dx + v_1 dy$  и  $\alpha_2 = u_2 dx + v_2 dy$  класса  $C_0^\infty(x, \mathbb{R})$ <sup>7</sup> корректно определено число  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \int_X \alpha_1 \wedge * \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , и эта функция задаёт скалярное произведение на  $C_0^\infty(X, \mathbb{R})$ .

Действительно, если носители 1-форм  $\alpha_1, \alpha_2$  лежат в одной карте  $z = x + iy$ , то

$$\alpha_1 \wedge * \alpha_2 = (u_1 dx + v_1 dy) \wedge (u_2 dy - v_2 dx) = (u_1 u_2 + v_1 v_2) dx \wedge dy.$$

В общем случае с помощью разбиения единицы можно разбить формы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на формы с носителями в одной карте.

Следовательно,  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  — это билинейная и положительно определённая операция.

Если формы комплекснозначные, то  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle := \int_X \alpha_1 \wedge * \bar{\alpha}_2$ . Это задаёт эрмитово скалярное произведение на  $C_0^\infty(X, \mathbb{C})$ .

**Определение.** Пополнение пространства  $C_0^\infty(X, \mathbb{R})$  1-форм по норме  $\|\alpha\| := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$  обозначается  $L_0^2(X, \mathbb{R})$  или  $L_0^2$ .

Оно является гильбертовым пространством 1-форм.

Его подпространства:

- Точные формы  $E :=$  замыкание пространства  $\{\alpha \mid \exists f \in C_0^\infty(X, \mathbb{R}) : \alpha = df\}$ ;
- Коточные формы  $C :=$  замыкание пространства  $\{\alpha \mid \exists f \in C_0^\infty(X, \mathbb{R}) : \alpha = *df\}$ ;

<sup>7</sup>0 внизу означает компактность носителя

- Гармонические формы  $H := \{\text{все гармонические 1-формы на } X\} \cap L_0^2$ .

**Определение.** 1-форма  $\alpha \in C^2(X, \mathbb{R})$  называется гармонической, если  $d\alpha = 0$  и  $d(*\alpha) = 0$ .

**Упражнение 7.2.** Это определение эквивалентно тому, что локально  $\alpha = df$  для некоторой гармонической (то есть  $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$ , и это условие не зависит от выбора карты) функции  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Упражнение 7.3.** Следующие условия на гладкую  $\mathbb{C}$ -значную 1-форму  $\omega$  эквивалентны:

1.  $\omega$  — голоморфная 1-форма;
2.  $d\omega = 0$  и  $*\omega = -i\omega$  (подобно тому, как  $*dz = -idz$ );
3.  $\omega = \alpha + i(*\alpha)$  для некоторой гармонической вещественнозначной 1-формы.

**Теорема 3** (О разложении Ходжа для пространства 1-форм). Пусть  $X$  — риманова поверхность. Тогда имеет место разложение в ортогональную прямую сумму:

$$L_0^2(X, \mathbb{R}) = E \oplus C \oplus H. \quad (7.1)$$

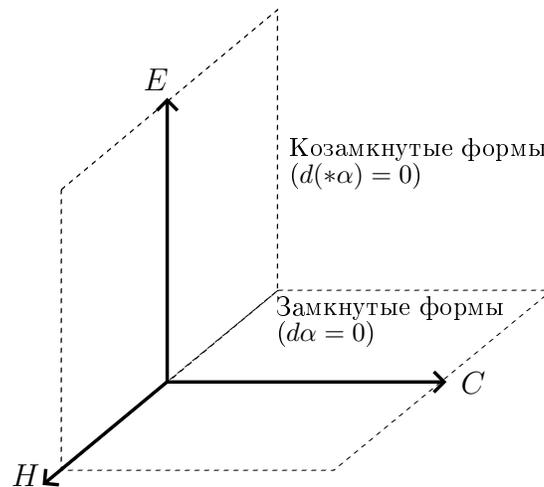


Рис. 7.2: Разложение Ходжа

*Доказательство.* 1) Докажем сначала, что  $C \perp E$ .

Достаточно доказать, что  $\langle d\varphi, *d\psi \rangle = 0$  для всех функций  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(X, \mathbb{R})$ , на замыкания соответствующих пространств это равенство продолжится по непрерывности. Рассмотрим это скалярное произведение. Оно равно

$$\langle d\varphi, *d\psi \rangle = \left| *^2 = -\text{Id} \right| = - \int_X d\varphi \wedge d\psi = - \int_X d(\varphi d\psi) \quad (7.2)$$

Если  $X$  — некомпактное пространство, то этот интеграл берётся не по всему пространству  $X$  и равен

$$- \int_D d(\varphi \wedge d\psi) = \left| \text{Теорема Стокса} \right| = - \int_{\partial D} \varphi \wedge d\psi = \left| \varphi = 0 \text{ на } D \right| = 0$$

для некоторой области  $D$ , содержащей оба носителя функций  $\varphi$  и  $\psi$ . На границе  $D$ , соответственно, эти функции равны нулю.

Если же  $X$  — компактное пространство, то интеграл по  $X$  можно приближать интегралами по  $X \setminus D_\varepsilon$ , где  $D_\varepsilon$  — области, сжимающиеся в точку. Тогда получим интеграл

$$- \int_{\partial D_\varepsilon} \varphi \wedge d\psi.$$

Этот интеграл по модулю не больше, чем  $\text{const} \cdot |D_\varepsilon|$ . Так как области  $D_\varepsilon$  сжимаются в точку,  $|D_\varepsilon| \rightarrow 0$ , значит и интеграл стремится к 0. То есть и в этом случае, и в предыдущем получаем

$$- \int_X d\varphi \wedge d\psi = 0. \quad (7.3)$$

Следовательно,  $C \perp E$ .

2) Осталось доказать, что  $C^\perp \cap E^\perp = H$ . (Так как  $C \oplus E \oplus (C^\perp \cap E^\perp)$  — это всё пространство).

Докажем, что если  $\alpha \in L_0^2$  и  $\langle \alpha, d\varphi \rangle = 0, \langle \alpha, *d\varphi \rangle = 0$  для любой функции  $\varphi \in C_0^\infty(X, \mathbb{R})$ , то  $\alpha \in H$ . Локально  $\alpha = udx + vdy$ ,  $d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy$ ,  $*d\varphi = -\varphi_y dx + \varphi_x dy$ .

$\langle \alpha, d\varphi \rangle = 0$  означает

$$\int_X (u\varphi_y - v\varphi_x) dx dy = 0. \quad (7.4)$$

$\langle \alpha, *d\varphi \rangle = 0$  означает

$$\int_X (u\varphi_x + v\varphi_y) dx dy = 0. \quad (7.5)$$

Положим  $\varphi = \psi_y$ , для некоторой  $\psi \in C_0^\infty$ . Тогда

$$\int_X u\psi_{yy} dx dy = \left| (7.4) \right| = \int_X v\psi_{yx} dx dy = \left| (7.5) \right| = - \int_X u\psi_{xx} dx dy,$$

то есть

$$\int_X u\Delta\psi dx dy = 0. \quad (7.6)$$

**Лемма** (Вейля, без доказательства). Пусть  $D \subset \mathbb{R}^2$  — открытое множество, а функция  $u \in L_{loc}^1(D)$  такова, что

$$\int_D u\Delta\psi dx dy = 0$$

для всех  $\psi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R})$ . Тогда  $u$  — почти всюду гармоническая функция.

Из леммы Вейля получаем, что  $u$  можно считать гармонической и гладкой. Аналогично с  $v$ . Это значит, что из формулы 7.4 при помощи интегрирования по частям<sup>8</sup> можно получить:

$$\int_X (u_y - v_x)\varphi dx dy = 0$$

для любой функции  $\varphi \in C_0^\infty(X, \mathbb{R})$ . Иными словами,

$$u_y = v_x. \quad (7.7)$$

Аналогично из 7.5 можно получить другое условие на  $u$  и  $v$ :

$$u_x = -v_y. \quad (7.8)$$

Эти два условия дают гармоничность формы  $\alpha$ .

Итак, доказано включение  $C^\perp \cap E^\perp \subset H$ . Доказать обратное включение предлагается читателю в качестве упражнения (воспользовавшись интегрированием по частям, доказать равенства 7.4 и 7.5, исходя из гармоничности формы).  $\square$

### 3 Теорема о существовании гармонических функций

**Теорема 4.** Пусть  $X$  — риманова поверхность. Пусть  $D \subset X$  — прообраз единичного круга относительно некоторой карты  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ . Пусть  $K \subset D$  — конечное множество, а  $h: D \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  — гармоническая функция такая, что  $\frac{\partial h}{\partial r} = 0$  на  $\partial D$ .

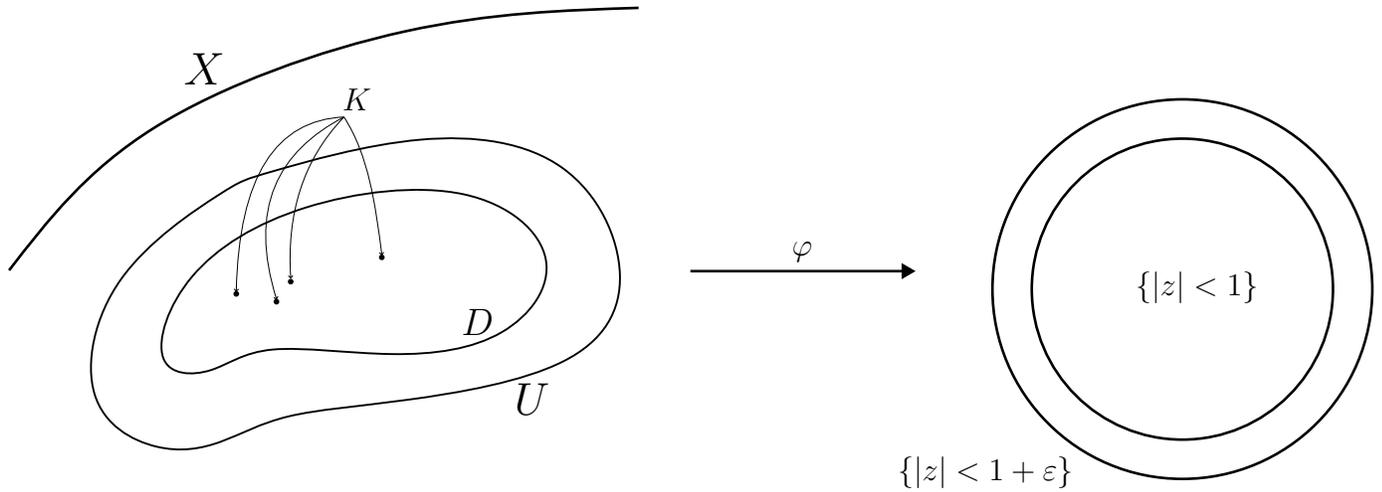


Рис. 7.3: Карта, при которой  $D$  переходит в единичный круг

Тогда существует гармоническая функция  $u: X \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $u - h$  является гармонической в  $D$ .

Доказательство. 1) Пусть  $V \subset D$  — малая окрестность множества  $K$ , а  $v: D \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция, равная  $h$  на  $D \setminus V$ .

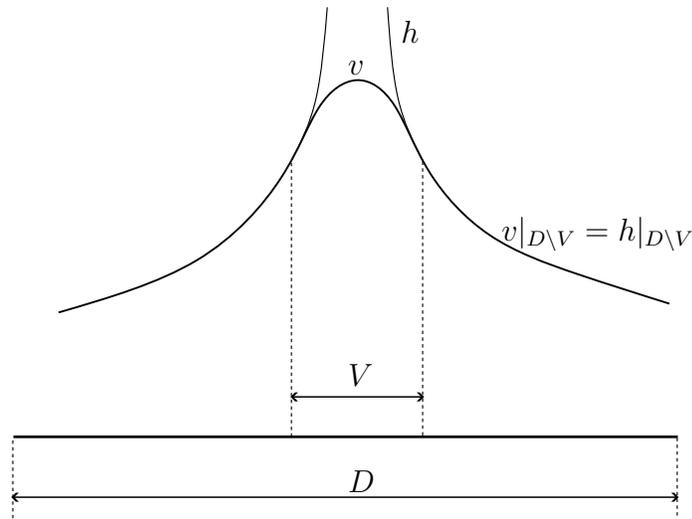


Рис. 7.4: Замена функции с особенностями  $h$  на гладкую функцию  $v$

<sup>8</sup>В первом слагаемом — по  $y$ , во втором слагаемом — по  $x$

Тогда 1-форма  $\beta := \begin{cases} dv, z \in D \\ 0, z \notin D \end{cases}$  принадлежит  $L_0^2(X, \mathbb{R})$ . Следовательно, по разложению Ходжа, существует представление

$$\beta = \alpha + \alpha_1 \in E \oplus E^\perp, \quad \alpha \in E, \alpha_1 \in E^\perp.$$

2)  $\alpha$  — гармоническая 1-форма на  $X \setminus V$ .

Действительно, для любой функции  $\psi \in C_0^\infty(X \setminus V, \mathbb{R})$  имеем  $\langle \alpha, *d\psi \rangle = 0$ , так как  $*d\psi \in C$ , а  $\alpha \in E$ , а также имеем

$$\begin{aligned} \langle \alpha, d\psi \rangle &= \langle \beta - \alpha_1, d\psi \rangle = \langle \beta, d\psi \rangle = \left| \beta|_{X \setminus D} = 0 \right| = \int_D d\psi \wedge * \beta = \\ &= \left| \psi|_V = 0, \text{ а } \beta \text{ на } X \setminus V \text{ гармоническая} \right| = \int_D d(\psi * \beta) = \int_{\partial D} \psi (*\beta) = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство верно, так как  $*\beta = 0$  на  $\partial D$ . Действительно, на  $\partial D$

$$*\beta = *dv = *dh.$$

В свою очередь, в полярных координатах карты  $\varphi$  граница  $\partial D$  превращается в  $\{|z| = 1\} = \{r = 1\}$ , а  $*dh = -h_\theta dr + h_r d\theta$ . Второе слагаемое равно нулю по условию, а проверка того, что первое слагаемое равно нулю на  $\{|z| = 1\}$ , предлагается читателю в качестве упражнения.

3)  $\alpha_1$  — гармоническая в  $D$ .

Действительно, для любой функции  $\psi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R})$  имеем  $\langle \alpha_1, d\psi \rangle = 0$  в силу  $\alpha_1 \in E^\perp$ . Также

$$\langle \beta - \alpha, *d\psi \rangle = \left| \alpha \in E, *d\psi \in C \right| = \langle \beta, *d\psi \rangle = \left| *^2 = -\text{Id} \right| = \int_D d(\psi \beta) = \int_{\partial D} \psi \beta = 0.$$

4) Из пунктов 2) и 3) доказательства вытекает, что  $\alpha$  — гладкая 1-форма всюду на  $X$ .

**Лемма.** В этих условиях существует функция  $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$  такая, что  $\alpha = df$

*Доказательство.* В разделе 1 следующей лекции. □

Доказательство теоремы будет завершено в разделе 2 следующей лекции. □

## Лекция 8: Гармонические функции

### 1 Лемма о существовании первообразной для 1-формы

**Лемма.** Если  $\mathbb{R}$ -значная 1-форма  $\alpha$  принадлежит  $E \cap C^\infty(X)$  и  $d\alpha = 0$ , то существует функция  $f \in C^\infty(X)$  такая, что  $\alpha = df$ .

*Доказательство.* Положим  $f(p) := \int_{p_0}^p \alpha$ . Достаточно показать, что  $\int_c \alpha = 0$  для любого замкнутого кусочно-гладкого пути  $c: [0, 1] \rightarrow X$ . Действительно, тогда функция  $f(p)$  не будет зависеть от пути интегрирования и будет корректно определена. При этом  $f$  будет гладкой, и  $df = \alpha$ .

В силу теоремы Коши о гомотопии<sup>9</sup> интегралы формы  $\alpha$  по гомотопным (с фиксированными концами) путям равны. Поэтому при интегрировании по какому-либо пути можно этот путь свести к ломаной при помощи локальных гомотопий. Далее можно при помощи гомотопий сгладить углы. Поэтому можно считать, что путь  $c: [0, 1] \rightarrow X$  — гладкий с  $c(0) = c(1)$  и  $c'(0) = c'(1)$ , а также  $c'(t) \neq 0$  при  $t \in [0, 1]$ .

Далее рассмотрим касательный вектор  $c'$  к пути  $c$  в какой-то точке. Этот вектор вместе с вектором  $i \cdot c'$  образует базис касательного пространства к  $X$  в точке приложения этих векторов, так как  $c' \neq 0$ . Если проследить за такой парой векторов по всему пути до той же самой точки, то будет видно, что это базис из  $\{c', i \cdot c'\}$  перейдёт в  $\{c', i \cdot c'\}$ , то есть останется таким же и не поменяет ориентацию<sup>10</sup>.

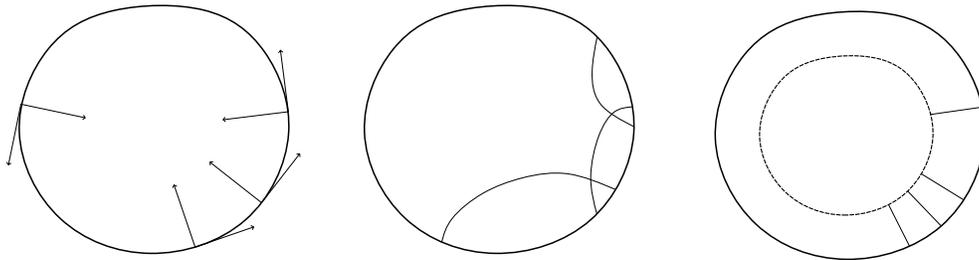


Рис. 8.1: Нахождение левой стороны кривой

Это значит, что относительно пути  $c$  можно выбрать левую сторону. Далее покроем

<sup>9</sup>В курсе ТФКП она доказывается для голоморфных комплексных 1-форм, но для неё достаточно условий гладкости и  $d\alpha = 0$

<sup>10</sup>Кстати, это альтернативное доказательство ориентируемости комплексной римановой поверхности  $X$  — базис касательного пространства при перемещении по любому пути сохраняет ориентацию, что и является критерием ориентируемости поверхности

образ пути  $c$  окрестностями и выберем у каждой окрестности левую половину. В силу компактности образа пути  $c$  из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, а значит из левых половин также достаточно взять только конечное число. Назовём объединение этого конечного числа полукругов  $N$ . Тогда граница  $N$  — это две кривые:  $c$  (правая граница) и  $\tilde{c}$  (левая граница). Сама же окрестность  $N$  гомеоморфна  $c \times (-\delta, 0)$ , где  $c \times \{-\delta\}$  — это  $\tilde{c}$ , а  $c \times \{0\}$  — это  $c$ .

Для отрезка  $[-\delta, 0]$  существует гладкая функция  $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , которая равна 0 при аргументе меньше  $-\delta$  и равна 1 при аргументе больше нуля. Сделаем из этой функции функцию  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  таким образом: на  $N = c \times (-\delta, 0)$  она равна  $g(c(t), s) = \tilde{g}(t(s))$ , а на остальном пространстве  $X$  она постоянна<sup>11</sup>.

Далее рассмотрим  $\langle \alpha, *dg \rangle$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \alpha \in E \right| = \int_X \alpha \wedge ** dg = - \int_X \alpha \wedge dg = \left| \text{supp}(dg) \subset N, d\alpha = 0 \right| = \\ &= \int_N d(\alpha g) = \left| \text{Теорема Стокса} \right| = \int_{\partial N} g\alpha = \int_c g\alpha - \int_{\tilde{c}} g\alpha = \int_c \alpha - 0 \end{aligned}$$

□

## 2 Доказательство теоремы 4 о существовании гармонических функций

*Доказательство.* Уже показано, что  $\alpha$  — гладкая гармоническая на  $X \setminus V$  1-форма и  $d\alpha = 0$ . По только что доказанной лемме существует такая гладкая функция  $f$ , что  $\alpha = df$ . Также известно, что  $dv - \alpha$  — гармоническая в  $D$ . Тогда определим функцию  $u := h - v + f$  и покажем, что она искомая. Действительно,

1. То, что  $u$  гармонична на  $X \setminus K$ , вытекает из гармоничности формы  $\alpha$  на  $X \setminus V$ , а также из гармоничности функций  $u - h$  в  $D$  и  $h$  на  $X \setminus K$ ;
2. То, что  $u - h$  гармонична в  $D$ , вытекает из гармоничности формы  $dv - \alpha$  в  $D$ .

□

## 3 Примеры гармонических функций и мероморфных 1-форм

1) Пусть  $X$  — риманова поверхность,  $p \in X$ ,  $z$  — локальная карта в окрестности  $D \supset \bar{U} = \{|z| \leq 1\}$  с  $z(p) = 0$ . Для каждого  $n \in \mathbb{Z}$  рассмотрим функцию  $h_0(z) = \text{Re} \frac{1}{z^n}$ .

<sup>11</sup>Это можно сделать при помощи разбиения единицы

Функция  $h(z) := h_0(z) + h_1(z)$ , где  $h_1(z) := \operatorname{Re} z^n$ , будет гармонической в  $D \setminus K$ , где  $K = \{0\} = \{p\}$ , и

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \cos \theta + \frac{1}{r^n} \cos \theta \right) = 0$$

при  $r = 1$ . Следовательно, по теореме 4 существует гармоническая функция  $u: X \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $u - h$  гармонична в  $D$ . 1-форма  $\omega_p := du + i * du$  голоморфна там, где  $u$  гармонична, то есть на  $X \setminus \{p\}$ . Действительно, в локальных координатах

$$du + i * du = (u_x - iu_y)dz = f'(z)dz, \quad (8.1)$$

где  $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{0\})$  такова, что  $\operatorname{Re} f = u$ . Также  $\omega_p - \frac{n}{z^{n+1}}dz$  будет голоморфна при  $z = 0$ .

**Обозначение:** для любого числа  $m = 2, 3, \dots$  и для любой точки  $p \in X$  существует мероморфная 1-форма  $\omega_p^{(m)}$  на  $X$  такая, что она голоморфна всюду кроме точки  $p$ , а в точке  $p$  имеет полюс порядка  $m$  с главной частью ряда Лорана  $\frac{dz}{z^m}$  в какой-то карте окрестности точки  $p$ .

Будем обозначать за  $\mathcal{O}^1(X)$  множество всех голоморфных 1-форм на  $X$ , а за  $\mathcal{M}^1(X)$  — множество всех мероморфных 1-форм на  $X$ .

**Определение.** Мероморфная 1-форма  $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$  называется:

- дифференциалом первого рода, если  $\omega \in \mathcal{O}^1(X)$ ;
- дифференциалом второго рода, если все полюсы формы  $\omega$  имеют нулевые вычеты;
- дифференциалом третьего рода, если она имеет полюсы только первого порядка.

**Определение.** Пусть  $\omega$  — голоморфная 1-форма в проколотой окрестности точки  $p$ . Тогда в любой карте  $z$  с  $z(p) = 0$  можно записать

$$\omega = \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k \right) dz.$$

Число

$$\operatorname{res}_p \omega := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \omega$$

не зависит от выбора карты и называется вычетом формы  $\omega$  в точке  $p$ .

2) Пусть  $X$  — произвольная риманова поверхность,  $p, q \in X$  — точки из одной координатной окрестности  $U \subset X$  с  $z(p) = a, z(q) = b$ , и  $a, b$  лежат в единичном круге  $U = \{|z| < 1\}$ .

Функция

$$h(z) = \operatorname{Re} \ln \frac{(z-a)(1-\bar{a}z)}{(z-b)(1-\bar{b}z)} = \ln \left| \frac{(z-a)(1-\bar{a}z)}{(z-b)(1-\bar{b}z)} \right|$$

— гармоническая в  $U \setminus \{a, b\}$ , и  $\frac{\partial h}{\partial r} = 0$  при  $|z| = 1$ .

Следовательно, по теореме 4 существует гармоническая функция  $u: X \setminus \{p, q\} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $u(z) - h(z)$  гармоническая в  $U$ . Тогда 1-форма

$$\omega_{pq} := du + i * du \tag{8.2}$$

представляется как

$$\left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right) dz + \text{элемент пространства } \mathcal{O}^1(X).$$

Если же точки  $p$  и  $q$  лежат в разных картах, то найдётся конечное число таких точек  $p_1, \dots, p_n$ , что соседние в последовательности  $p, p_1, \dots, p_n, q$  точки лежат в одной карте (так как произвольный путь между  $p$  и  $q$  можно покрыть конечным число карт). Тогда  $\omega_{pq} := \omega_{pp_1} + \dots + \omega_{p_n q}$  будет также голоморфна всюду, кроме точек  $p$  и  $q$ , а в них будет иметь вычеты 1 и  $-1$  соответственно.

**Упражнение 8.1.** Пусть  $h_0(z) = \operatorname{Im} \ln \frac{z-a}{z-b}$ , то есть  $h_0(z) = \arg \left( \frac{z-a}{z-b} \right) \in (-\pi, \pi)$ .

Найти такую гармоническую на  $\bar{U}$  функцию  $h_1(z)$ , что функция

$$h(z) := h_0 + h_1$$

имеет  $\frac{\partial h}{\partial r} = 0$  на  $\partial U$ . Построить (пользуясь теоремой 4, в которой конечное множество  $K$  заменено на компактное — в таком случае она тоже верна) гармоническую функцию  $u: X \setminus [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  такую, что  $u - h_0$  гармонична на  $U$ . Показать, что  $u(z)$  имеет скачок  $2\pi$  вдоль отрезка  $[a, b]$ , но 1-форма  $du + i * du$  не имеет разрыва и является дифференциалом третьего рода с вычетами  $\pm i$  в полюсах  $a, b$  первого порядка.

**Упражнение 8.2** (Общая теорема о существовании мероморфных 1-форм). Пусть  $X$  — произвольная риманова поверхность,  $p_1, \dots, p_n \in X$  — любые точки,  $P_1, \dots, P_n$  — произвольные полиномы без свободного члена и с суммой коэффициентов<sup>12</sup> при первой степени, равной 0.

Доказать, что существует мероморфная на  $X$  1-форма  $\omega$ , голоморфная на  $X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  и с главными частями рядов Лорана в точках  $p_j$ , равными  $P_j \left( \frac{1}{z_j} \right) dz_j$ .

<sup>12</sup>То есть, сумма вычетов равна 0

**4** Теорема Коши о вычетах и теорема о полной сумме вычетов.  
Их следствия

**Теорема 5.** Пусть  $X$  — произвольная риманова поверхность,  $D$  — область с кусочно-гладкой границей,  $\omega$  — голоморфная 1-форма на  $\bar{D} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ . Тогда

$$\int_{\partial D} \omega = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{p_j} \omega. \quad (8.3)$$

*Доказательство.* Для каждой точки  $p_j$  рассмотрим малую окрестность  $U_j$ , не содержащую других точек  $p_i$ . По определению

$$\int_{\partial U_j} \omega = 2\pi i \operatorname{res}_{p_j} \omega.$$

Теперь рассмотрим область  $D_1 = D \setminus \bigcup_{j=1}^n \bar{U}_j$ , в которой форма  $\omega$  голоморфна. Найдём интеграл формы  $\omega$  по её границе.

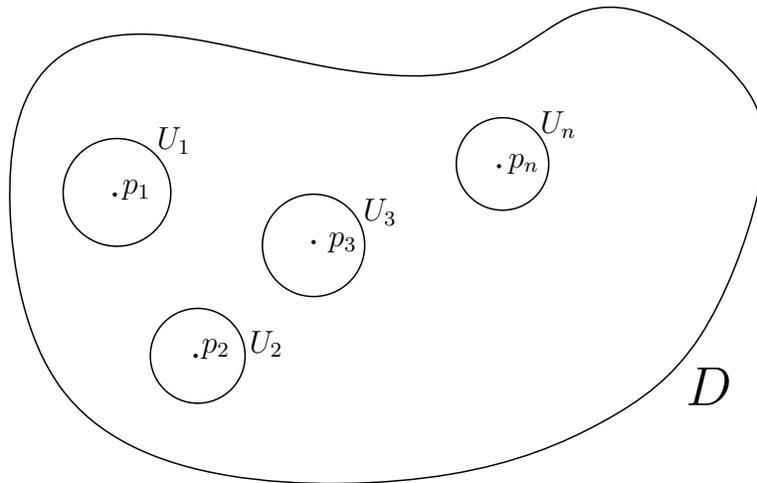


Рис. 8.2: Область  $D_1$

$$0 = \left| \text{Теорема Стокса} \right| = \int_{D_1} d\omega = \int_{\partial D_1} \omega = \int_{\partial D} \omega - \sum_{j=1}^n \int_{\partial U_j} \omega = \int_{\partial D} \omega - 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{p_j} \omega.$$

□

## Лекция 9: Голomorphicные 1-формы

### 1 Общая формула Римана-Гурвица и её следствия

**Утверждение 9.1.** Пусть  $X, Y$  — компактные римановы поверхности, и  $f: X \rightarrow Y$  — голоморфное отображение,  $f \neq \text{const}$ . Тогда

$$2 - 2g(X) = m \cdot (2 - 2g(Y)) + \sum_{p \in X} (\text{ord}_p f - 1), \quad (9.1)$$

где  $m$  — число прообразов почти любой точки  $y \in Y$ , а  $n := \text{ord}_p f$  — такое натуральное число, что

$$f(z) - f(0) = z^n g(z), \quad g \in \mathcal{O}(0), g(0) \neq 0$$

для любых таких карт  $z$  в окрестности точки  $p$  и  $w$  в окрестности точки  $f(p)$ , что  $z(p) = 0 = w(f(p))$ .

*Доказательство.* Для начала рассмотрим произвольную точку  $p$  и найдём „удобный“ вид функции  $f$  в её окрестности.

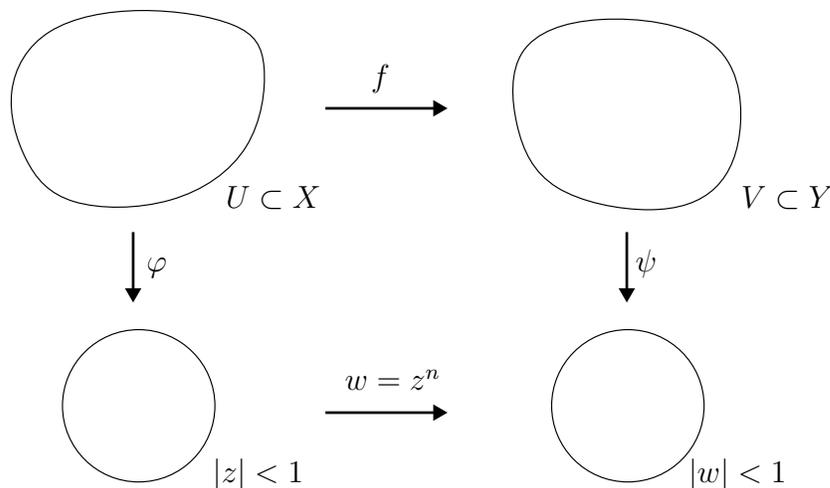


Рис. 9.1: „Удобный“ вид функции  $f$

Для произвольных карт  $\varphi: U \rightarrow \{|z| < 1\}$  и  $\psi: V \rightarrow \{|w| < 1\}$ , где  $p \in U \subset X$ ,  $f(p) \in V \subset Y$ , с условиями  $\varphi(p) = 0 = \psi(f(p))$  выполнено

$$f(z) - f(0) = z^n g(z), \quad g \in \mathcal{O}(0), g(0) \neq 0$$

для некоторого натурального числа  $n$ . Это число не зависит от выбора карт, так как оно определяется как

$$n := (\text{порядок нуля функции } df \text{ в точке } p) + 1.$$

Тогда есть такая функция  $h \in \mathcal{O}(0)$ , что  $h^n = g$  в окрестности нуля (так как  $g(0) \neq 0$ ). Положим (с последующим переобозначением  $z'$  на  $z$  и  $w'$  на  $w$ )

$$z' = z \cdot h(z), w' = w.$$

Тогда в таких картах  $f$  имеет вид  $w = z^n$ .

Теперь определим число  $m$ .

Определим множество  $M := \{p \in X \mid \text{ord}_p f > 1\}$ . Оно конечно, так как бесконечные множества на поверхности  $X$  имеют хотя бы одну предельную точку (в силу компактности  $X$ ).  $M$  же — это множество нулей  $f'$ , а наличие предельной точки у  $M$  означало бы равенство  $f' \equiv 0$ , то есть  $f \equiv \text{const}$ .

Рассмотрим множества  $W := f(M) \subset Y$  и  $C := f^{-1}(W) \subset X$ . Оба эти множества конечны.  $W$  конечно как образ конечного множества, а  $C$  конечно, так как иначе у него была бы предельная точка, что в силу конечности множества  $W$  означало бы наличие предельной точки у  $f^{-1}(w)$  для какой-то точки  $w \in W$ . Тогда сужение  $f|_{X \setminus C}: X \setminus C \rightarrow Y \setminus W$  является неразветвлённым голоморфным накрытием. Действительно, в любой точке  $p \in f^{-1}(Y \setminus W)$   $\text{ord}_p f = 1$ , то есть отображение  $f|_{X \setminus C}$  везде локально обратимо, и для него выполняется определение накрытия.

Из этого следует, что число прообразов любой точки из  $Y \setminus W$  одно и то же, оно равно числу листов накрытия  $f|_{X \setminus C}$ . Возьмём это число в качестве определения  $m$ .

Получив знания относительно чисел  $n(p)$  и  $m$ , докажем верность формулы 9.1:

Для начала рассмотрим случай  $Y = \bar{\mathbb{C}}$ . В этом случае, по аналогии с доказательством частного случая формулы Римана-Гурвица (утверждения 6.2), из триангуляции сферы  $\bar{\mathbb{C}}$  получаем триангуляцию поверхности  $X^{13}$ , а также формулу

$$2 - 2g(X) = m \cdot 2 - \sum_{p \in X} (\text{ord}_p f - 1), \quad (9.2)$$

так как  $\text{ord}_p f - 1$  — также и порядок ветвления локально обратной к  $f$  функции в соответствующей точке  $f(p)$ .

В случае произвольной поверхности  $Y$  можно, пользуясь существованием на ней непостоянной мероморфной функции (то есть голоморфного отображения  $Y \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ ), получить триангуляцию  $Y$  и, снова воспользовавшись доказательством утверждения 6.2, получить формулу 9.2, в которой 2, идущая после  $m$ , будет заменена на  $2 - 2g(Y)$ . В итоге получаем формулу 9.1.  $\square$

**Упражнение 9.1.** Доказать, что любое голоморфное отображение компактных римановых поверхностей  $f: X \rightarrow Y$  в случае  $g(X) < g(Y)$  является константой.

<sup>13</sup>поднятием триангуляции сферы  $\bar{\mathbb{C}}$  по отображению  $f$

**Упражнение 9.2.** Пусть  $X, Y$  — компактные римановы поверхности рода 1, и  $f: X \rightarrow Y$  — голоморфное отображение. Доказать, что  $f$  — неразветвлённое голоморфное накрытие.

**Следствие 9.1.** Если  $X$  — компактная риманова поверхность, то для любой мероморфной 1-формы  $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ , не равной тождественному нулю, верно равенство

$$N(\omega) - P(\omega) = 2g(X) - 2, \quad (9.3)$$

где  $N(\omega)$  — число нулей формы  $\omega$  на поверхности  $X$ , а  $P(\omega)$  — число её полюсов.

*Доказательство.* Для любых двух мероморфных 1-форм  $\omega_1 \neq 0 \neq \omega_2$  на поверхности  $X$  их отношение  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  после сокращения  $dz$  является корректно определённой (не зависящей от карты) мероморфной функцией  $f \in \mathcal{M}(X)$ . По теореме из прошлой лекции

$$N(f) - P(f) = 0.$$

Следовательно,

$$N(\omega_2) - P(\omega_2) = N(\omega_1) - P(\omega_1)$$

и достаточно проверить равенство 9.3 для какой-то одной формы.

Будем искать эту форму в виде  $df$ . На  $X$  есть мероморфная функция  $f \neq \text{const}$ . Можно считать, что все её полюсы имеют порядок 1 (то есть в этом случае  $\infty$  лежит в регулярной части  $Y \setminus W$ ). Если это не так, то можно перенести в  $\infty$  какую-то точку из регулярной части при помощи дробно-линейного отображения. Тогда в формуле Римана-Гурвица при отображении на сферу 9.2

$$2 - 2g(X) = 2m - \sum_{p \in X} (\text{ord}_p f - 1)$$

$2m$  — это число полюсов формы  $df$ , а  $\sum_{p \in X} (\text{ord}_p f - 1)$  — это число её нулей.

Действительно, каждый из  $m$  полюсов первого порядка 1 функции  $f$  является полюсом второго порядка формы  $df$ , так как если  $f = \frac{1}{z} + \dots$ , то  $df = \left(-\frac{1}{z^2} + \dots\right) dz$ .

Других полюсов у  $df$  нет.

А число  $\text{ord}_p f - 1$  — это порядок нуля  $df$  в точке  $p$  (если оно равно 0, то нуля  $df$  в этой точке нет).

Следовательно,  $2 - 2g(X) = P(df) - N(df)$ . □

## 2 Канонический $4g$ -угольник

**Утверждение 9.2.** Любая компактная риманова поверхность  $X$  гомеоморфна сфере с  $g(X)$  ручками, которая при  $g \geq 1$  получается склеиванием сторон  $4g$ -угольника по схеме  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ , то есть стороны склеиваются по парам так, чтобы в каждой паре направления обходов склеенных сторон были противоположны.

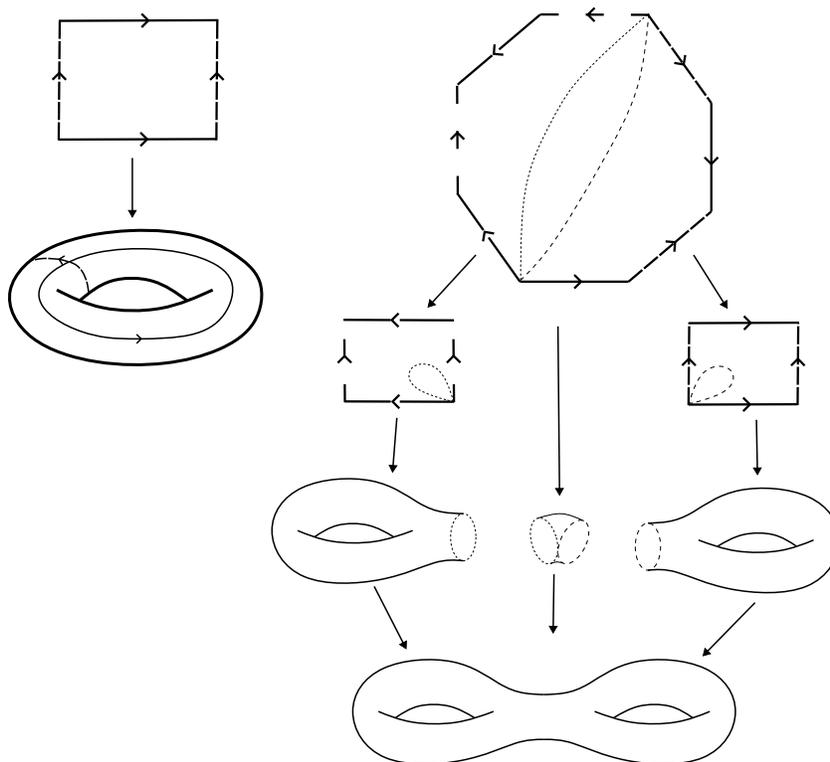


Рис. 9.2: Примеры: канонический 4-угольник и канонический 8-угольник

*Доказательство.* Рассмотрим триангуляцию поверхности  $X$  и разложим её на плоскости следующим образом:

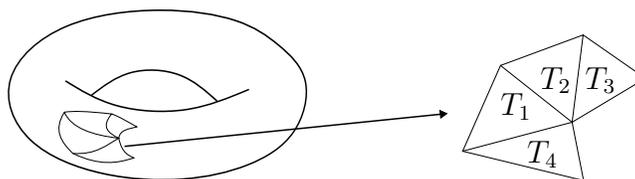


Рис. 9.3: Раскладка триангуляции римановой поверхности

1. Отообразим какой-то треугольник (назовём его  $T_1$ ) на плоскость.
2. Отообразим смежный с ним треугольник  $T_2$  на плоскость, приклеив его к  $T_1$  по одной стороне, по которой эти два треугольника смежны в триангуляции  $X$ .
3. Отообразим смежный с каким-то треугольником из уже имеющейся раскладки таким же образом (если он смежен более чем с одним треугольником из раскладки, всё равно приклеиваем только по одной стороне).

Таким образом, мы получим многоугольник (который можем сделать выпуклым), из которого  $X$  получается попарным склеиванием сторон. Так как  $X$  ориентируемо, эти стороны проходятся в разных направлениях (если задать на сторонах многоугольника направления в соответствии с какими-то направлениями на сторонах на поверхности  $X$ ).

Можно считать, что соседние стороны между собой не склеиваются. В противном случае можно развернуть раскладку так, чтобы склеивающиеся соседние стороны сомкнулись, а далее склеить их. Получится снова выпуклый многоугольник, но уже с меньшим числом сторон. После нескольких таких шагов получится многоугольник без соседних склеивающихся сторон.

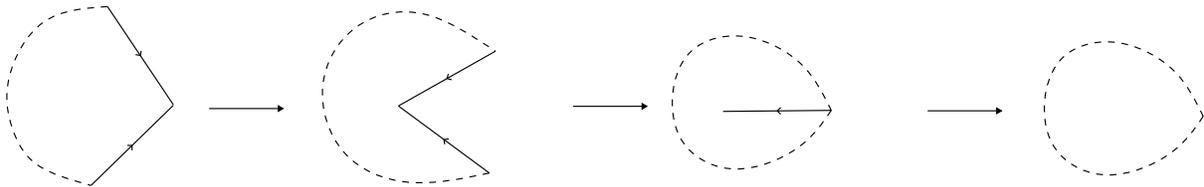


Рис. 9.4: Случай, когда две соседние стороны склеиваются

Также можно считать, что все вершины склеиваются в одну.

Действительно, иначе рассмотрим какую-то вершину  $a$  многоугольника, начнём обходить его границу против часовой стрелки и найдём первую вершину  $b$ , которая с ней не склеится. Она является вершиной какого-то ребра, вторая вершина которого склеивается с  $a$ . Не нарушая общности, назовём её тоже  $a$ . Рассмотрим ребро, которое следует сразу после вершины  $b$ , назовём его  $K$ . Где-то на границе многоугольника найдётся ребро  $K^{-1}$ . Оно не будет соседним с  $K$  (об этом мы уже позаботились), и также не будет примыкать к  $a$ , так как иначе ребро  $K$  будет начинаться из вершины  $b$ , а  $K^{-1}$  — заканчиваться в точке  $a$ , и при склейке  $K$  с  $K^{-1}$  вершины  $a$  и  $b$  склеятся. В таком случае можно разрезать многоугольник по отрезку между вершиной  $a$  и концом ребра  $K$ . Далее склеим две получившихся фигуры по ребру  $K$ , сохраняя ориентацию. После такой

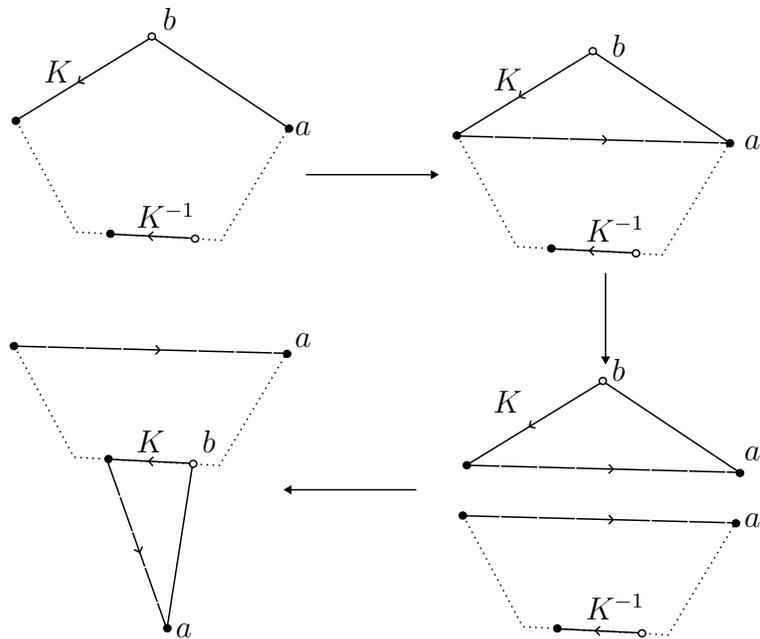


Рис. 9.5: Случай, когда не все вершины склеиваются в одну

операции вместо двух вершин, не склеивающихся с  $a$ , мы получили одну. (А вершин, склеивающихся с  $a$ , стало на одну больше.) При этом новая пара рёбер будет также состоять из рёбер, проходящихся в разных направлениях. Также этот многоугольник можно сделать выпуклым при помощи гомеоморфизма. То есть ситуация аналогична имевшейся. Таким образом можно уменьшать число „плохих“ вершин до случая, когда такая вершина останется одна, чего не может быть.

Далее можно считать, что есть четвёрка рёбер  $K, L, K^{-1}, L^{-1}$ , идущая именно в таком порядке.

Действительно, пусть такой четвёрки нет. Рассмотрим какую-то пару рёбер  $K, K^{-1}$ . Она разбивает границу многоугольника на две части. По предположению, любая пара рёбер  $L$  и  $L^{-1}$  находится целиком в одной из этих двух частей. То есть рёбра из этих двух частей не могут склеиться. Тогда склеим этот многоугольник. При склейке границы мы получим две кривых, между собой не склеивающихся и соединённых одним ребром  $K$ . В таком случае вершины из двух частей не будут склеиваться между собой, то есть не все вершины склеятся в одну, что запрещено.

Теперь возьмём „хорошую“ четвёрку  $K, L, K^{-1}, L^{-1}$ . Можно считать, что рёбра  $K, L, K^{-1}$  идут подряд (не прерываясь другими рёбрами).

Действительно, пусть это не так. Тогда разрежем многоугольник между концом ребра  $K$  и началом ребра  $K^{-1}$  (назовём ребро разреза  $L_1$ ) и склеим получившиеся

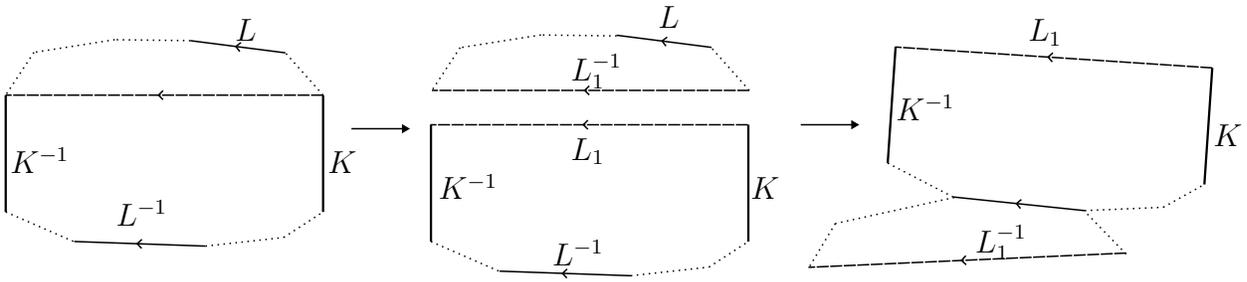


Рис. 9.6: Рёбра  $K, L_1, K^{-1}$ , идущие подряд

половины по  $L$ , совмещая направления. В получившемся многоугольнике появится новая пара рёбер  $L_1, L_1^{-1}$ , причём рёбра идут по порядку  $K, L_1, K^{-1}, L_1^{-1}$ , и теперь рёбра  $K, L_1, K^{-1}$  идут подряд. Сделав прямоугольник выпуклым путём гомеоморфизмов и переобозначив  $L_1$  как  $L$ , получим ту же ситуацию, что была изначально, но уже с условием, что  $K, L, K^{-1}$  идут подряд.

Можно также считать, что ребро  $L^{-1}$  идёт сразу после них.

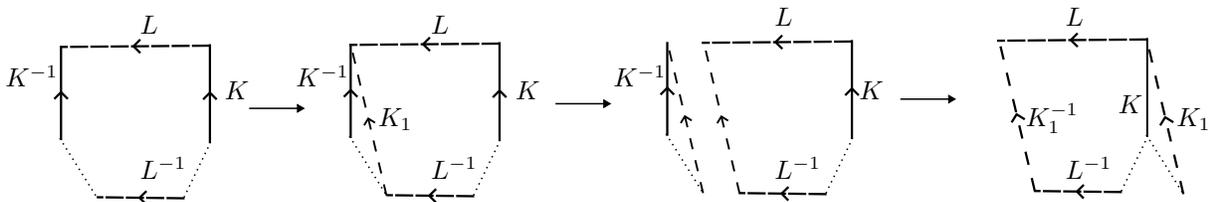


Рис. 9.7: Рёбра  $K_1, L, K_1^{-1}, L^{-1}$ , идущие подряд

Действительно, пусть не так. Тогда разрежем многоугольник по диагонали  $K_1$  и склеим получившиеся части по  $K$ . Получим четвёрку  $K_1, L, K_1^{-1}, L^{-1}$ , идущую целиком подряд.

Далее можно зафиксировать четвёрку  $K, L, K^{-1}, L^{-1}$  (то есть далее не разрывать<sup>14</sup> её) и делать такие же преобразования, получая новые четвёрки вида  $K, L, K^{-1}, L^{-1}$  с подряд идущими рёбрами. Таким образом получается канонический  $4g$ -угольник.  $\square$

**Следствие 9.2.** Представим риманову поверхность  $X$  как  $X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2$ , где  $X_2$  — это внутренность канонического  $4g$ -угольника,  $X_1$  — его стороны (точнее, их образ на поверхности  $X$  при склейке), а  $X_0$  — единственная вершина  $X$ , в которую склеиваются все вершины  $4g$ -угольника.

<sup>14</sup>Например, считая единым отрезком

Тогда любой путь  $c: [0, 1] \rightarrow X$  с началом и концом в точке  $p_0$  гомотопен (с фиксированными началом и концом в  $p_0$ ) пути вида  $c_1^{\varepsilon_1} \dots c_n^{\varepsilon_n}$ , где  $c_j \in \{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ , а  $\varepsilon_j$  — либо 1, либо  $-1$ .

*Доказательство.* Можно разбить отрезок  $[0, 1]$  на такие достаточно малые подотрезки, что на любом подотрезке разбиения путь  $c$  находится в одной координатной карте и гомотопен линейному.

Это позволяет не нарушая общности полагать, что  $c$  — ломаная.

Далее можно считать, что все пересечения пути  $c$  с рёбрами из  $X_1$  происходят не в вершинах. Иначе можно слегка отодвинуть путь  $c$  от вершины.

Далее рассмотрим части ломаной  $c$ , которые лежат между пересечениями с  $X_1$ . Каждая такая часть гомотопна отрезку между двумя точками пересечения.

А каждый такой отрезок гомотопен куску границы. То есть, путь  $c$  гомотопен пути, содержащемуся целиком в  $X_1$ , а такой путь гомотопен пути вида  $c_1^{\varepsilon_1} \dots c_n^{\varepsilon_n}$ .  $\square$

**Следствие 9.3.** Пусть  $\omega$  — замкнутая 1-форма, и все числа

$$A_j := \int_{a_j} \omega, \quad B_j := \int_{b_j} \omega, \quad j = 1, \dots, g.$$

равны 0. Тогда форма  $\omega$  точна, то есть существует такая функция  $f \in C^\infty(X)$ , что  $\omega = df$ .

*Доказательство.* По теореме Коши о гомотопии и следствию 9.3 из условия вытекает, что  $\int_c \omega = 0$  для любого замкнутого кусочно-гладкого пути  $c$ . Следовательно,

$$f(p) := \int_{p_0}^p \omega$$

не зависит от выбора пути от  $p_0$  к  $p$  и удовлетворяет условию  $df = \omega$ .  $\square$

### **3** Формула $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^1(X) = g(X)$

**Утверждение 9.3.** Для любой компактной римановой поверхности  $X$  верна формула

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^1(X) = g(X). \quad (9.4)$$

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $\Phi: \mathcal{O}^1(X) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$ , заданное следующим образом:

$$\omega \mapsto (\operatorname{Re} A_1, \dots, \operatorname{Re} A_g, \operatorname{Re} B_1, \dots, \operatorname{Re} B_g).$$

Это отображение линейно. Если  $\Phi(\omega) = 0$ , то  $h(p) := \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \omega$  — это корректно определённая гармоническая функция на  $X$ . В силу компактности  $X$  и принципа максимума получаем  $h \equiv \operatorname{const} = 0$ .

Следовательно,  $\ker \Phi = \{0\}$ , и  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^1(X) \leq g(X)$ .

Для доказательства равенства достаточно построить такую форму  $\omega \in \mathcal{O}^1(X)$ , что  $A_1 \neq 0$ , а все остальные  $A_i$  и  $B_i$  равны 0 (Для остальных  $A_i, B_i$  можно поступить аналогичным образом). Для этого будем считать, что путь  $b_1$  является ломаной  $[p_0, p_1] \cup [p_1, p_2] \cup \dots \cup [p_n, p_0]$ , и положим

$$\omega := \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j = \sum_{j=0}^{n-1} (du_{p_j p_{j+1}} + i * du_{p_j p_{j+1}}),$$

где  $p_n = p_0$ , а  $u_{pq} \in \operatorname{Harm}(X \setminus [p, q])$  такая, что

$$u_{pq} = \arg \frac{z-p}{z-q} + (\text{гармоническая функция в окрестности } [p, q])$$

и имеет скачок  $2\pi$  вдоль  $[p, q]$ .

$\omega_j$  — голоморфная на  $X \setminus \{p_j, p_{j+1}\}$  форма с вычетами  $i$  и  $-i$  в точках  $p_j$  и  $p_{j+1}$  соответственно. Эти вычеты при суммировании сокращаются, и  $\omega$  голоморфна всюду на  $X$ .

При этом форма  $\omega_j$  точна на  $X \setminus [p_j, p_{j+1}]$ , следовательно, все  $A_k, B_k$  кроме  $A_1$  для  $\omega_j$  равны 0 ( $B_1 = 0$ , так как путь  $b_1$ , немного сдвинутый от отрезка  $[p_j, p_{j+1}]$ , гомотопен в  $X \setminus [p_j, p_{j+1}]$  путям  $a_k, b_k$  при  $k \neq 1$ ).

При этом  $A_1$  не может быть равно 0, так как иначе форма  $\omega$  точна на  $X \setminus \{b_1\}$ , то есть для неё существует первообразная  $f$ , что противоречит наличию скачка у  $\operatorname{Re} f$  с разных сторон пути  $b_1$ .  $\square$

## Лекция 10: Теорема Римана-Роха

### 1 Поверхности рода 0

**Утверждение 10.1.** Любая компактная риманова поверхность  $X$  рода 0 биголоморфна  $\bar{\mathbb{C}}$ .

*Доказательство.* Зафиксируем точку  $p_0 \in X$ . Тогда существует такая мероморфная 1-форма  $\omega$  на  $X$ , что она голоморфна всюду кроме  $p_0$  и  $\omega - \frac{dz}{z^2}$  голоморфна в точке  $p_0$ , где  $z$  — локальная карта, равная нулю в точке  $p_0$ . По условию  $X \setminus \{p_0\}$  — односвязная область (так как  $X$  гомеоморфна сфере). Следовательно,  $f(p) := \int_{p_1}^p \omega$  будет голоморфна в  $X \setminus \{p_0\}$ , а в точке  $p_0$  будет иметь единственный полюс первого порядка. То есть,  $P(f) = 1$ . Из этого по формуле 9.3 получаем, что  $N(f - a) = P(f) = 1$  для всех комплексных чисел  $a$ . Следовательно,  $f$  — голоморфная биекция  $X \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ , то есть биголоморфизм (обратная функция голоморфна по критерию локальной обратимости).  $\square$

### 2 Поверхности рода 1

**Утверждение 10.2.** Любая компактная риманова поверхность  $X$  рода 1 биголоморфна тору  $\mathbb{C}/\Lambda$  для некоторой целочисленной решётки  $\Lambda \subset \mathbb{C}$ , а также кубической кривой — замыканию в  $\mathbb{C}P^2$  множества  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)\}$ .

*Доказательство.* По формуле 9.4 в данном случае имеем  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^1(X) = 1$ , поэтому на  $X$  существует голоморфная 1-форма, не равная тождественному нулю. По формуле 9.3  $N(\omega) = P(\omega) = 0$ , при этом  $P(\omega) = 0$ , значит  $N(\omega) = 0$ . Наличие голоморфной 1-формы без нулей по теореме 2 об обращении эллиптических интегралов указывает на то, что  $X$  биголоморфна тору (а также указанной кубической кривой).  $\square$

### 3 Формулировка теоремы Римана-Роха

**Определение.** Дивизор на римановой поверхности  $X$  — это формальная конечная линейная комбинация точек из  $X$  с целыми коэффициентами, то есть

$$D = \sum_{j=1}^a m_j p_j - \sum_{k=1}^b n_k q_k,$$

где  $p_j, q_k$  — различные точки из  $X$ , а  $m_j, n_k$  — коэффициенты.

Эквивалентное определение дивизора — целочисленная функция  $X \rightarrow \mathbb{Z}$ , не равная нулю только на конечном множестве точек.

Степень дивизора  $D$  — это сумма коэффициентов:

$$\deg(D) := \sum_{j=1}^a m_j - \sum_{k=1}^b n_k.$$

Введём также неотрицательные целые числа  $l(D)$  и  $i(D)$ .

$$l(D) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D), \text{ где}$$

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathcal{M}(X) \mid f \equiv 0 \text{ или } (f) + D \geq 0\}.$$

$$(f) := (\text{порядок нуля в точке}) - (\text{порядок полюса в точке})$$

— главный дивизор, его степень равна 0.

$$i(D) := \dim_{\mathbb{C}} J(D), \text{ где}$$

$$J(D) := \{\omega \in \mathcal{M}^1(X) \mid \omega \equiv 0 \text{ или } (\omega) \geq D\}.$$

$$(\omega) := (\text{порядок нуля в точке}) - (\text{порядок полюса в точке})$$

— канонический дивизор, его степень равна  $2g - 2$  по формуле 9.3.

**Теорема 6** (Римана-Роха). *Для любого дивизора на компактной римановой поверхности  $X$  верна формула*

$$l(D) - i(D) = \deg(D) - g(X) + 1. \quad (10.1)$$

*Доказательство.* Лекция 11, раздел [2]. □

**Упражнение 10.1.** Доказать теорему для отрицательных дивизоров при помощи теоремы о существовании мероморфной 1-формы с заданными главными частями рядов Лорана.

**Следствие 10.1.** *Если  $X$  — компактная риманова поверхность рода не менее 1, то на ней не существует такой точки  $p$ , что  $\omega(p) = 0$  для любой голоморфной 1-формы  $\omega$  на  $X$ .*

*Доказательство.* Пусть такая точка  $p$  нашлась. Тогда рассмотрим дивизор  $(p)$ , состоящий из одной точки  $p$ . По теореме Римана-Роха (теорема 6)

$$l(p) - i(p) = \deg(p) - g + 1,$$

где по условию  $i(p) \geq g$  (так как все голоморфные 1-формы равны нулю в точке  $p$ , то есть  $(\omega) \geq (p)$  в точке  $p$ , а во всех остальных точках  $(\omega) \geq 0 = (p)$ , и поэтому  $\mathcal{O}^1(X) \subset J(p)$ , что влечёт  $g = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^1(X) \leq \dim_{\mathbb{C}} J(p) = i(p)$ ).

Тогда  $l(p) \geq 2$ , то есть найдутся как минимум две линейно независимые функции  $f \in \mathcal{M}(X)$  с полюсом не более чем первого порядка в точке  $p$  (и голоморфные в других точках). Одна из них не постоянна и поэтому имеет в точке  $p$  полюс, а не устранимую особенность (в силу компактности поверхности  $X$ ). При этом этот полюс — единственный и первого порядка, то есть  $P(f) = 1$ . Но такая функция осуществляет биголоморфизм на  $\bar{\mathbb{C}}$ , как в доказательстве утверждения 10.1, что невозможно (так как род поверхности  $X$  не равен нулю).  $\square$

#### 4 Поверхности рода 2

**Утверждение 10.3.** Любая компактная риманова поверхность рода 2 биголоморфна нормализации  $S(e_1, \dots, e_5)$  гиперэллиптической кривой  $\left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = \prod_{j=1}^5 (z - e_j) \right\}$  для некоторых попарно различных точек  $e_1, \dots, e_5 \in \mathbb{C}$ , а также нормализации  $S(e'_1, \dots, e'_6)$  гиперэллиптической кривой чётного порядка  $\left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = \prod_{j=1}^6 (z - e'_j) \right\}$  для некоторых попарно различных точек  $e'_1, \dots, e'_6 \in \mathbb{C}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\omega_1, \omega_2$  — произвольный базис пространства  $\mathcal{O}^1(X)$  над  $\mathbb{C}$ . Тогда функция  $f := \frac{\omega_2}{\omega_1}$  корректно определена (в силу следствия 10.1 нет неопределённостей вида  $\frac{0}{0}$ ) как отображение  $X \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  и мероморфна на  $X$ .  $P(f) = N(\omega_1) = 2g - 2 = 2$ , то есть  $f$  имеет  $m = 2$  в формуле Римана-Гурвица (утверждение 9.1):

$$2 - 2g(X) = 2m - \sum_{x \in X} (ord_x f - 1)$$

Отсюда число критических точек (то есть нулей  $df$  или, что эквивалентно, число точек, для которых  $ord_x f > 1$ ) равно 6 и все они различны, то есть  $ord_c f = 2$ , так как  $ord_c f \leq m = 2$ .

Обозначим критические точки  $p_1, \dots, p_6$ , а значения функции  $f$  — как  $e_1, \dots, e_6$ .  $e_1, \dots, e_6$  попарно различны, так как число прообразов точек вблизи  $e_j$  не больше, чем 2, а в случае равенства двух точек  $e_j = e_k$  таких прообразов было бы 4. Также можно считать (подбирая подходящее ДЛО  $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ ), что  $e_6 = \infty$ . Тогда имеет место неразветвлённое голоморфное накрытие  $X \setminus \{p_1, \dots, p_6\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{e_1, \dots, e_5\}$ , задаваемое функцией  $f$ .

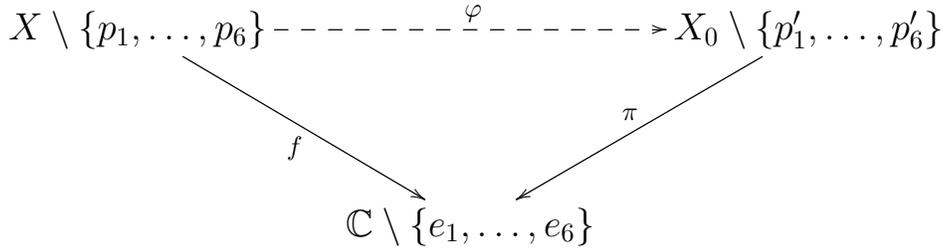


Рис. 10.1: Диаграмма к доказательству утверждения 10.3

Рассмотрим также другое накрытие  $\pi: X_0 \setminus \{p'_1, \dots, p'_6\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{e_1, \dots, e_6\}$ , где  $X_0 := S(e_1, \dots, e_5)$ . Покажем, что есть такой биголоморфизм  $\varphi: X \setminus \{p_1, \dots, p_6\} \rightarrow X_0 \setminus \{p'_1, \dots, p'_6\}$ , что  $f = \pi \circ \varphi$ .

Для этого рассмотрим произвольную точку  $p_0 \in X \setminus \{p_1, \dots, p_6\}$ , её образ  $f(p_0)$  и любой из двух прообразов значения  $f(p_0)$  при обращении  $\pi$ . Локально в окрестности каждой точки определён росток голоморфного отображения  $\pi^{-1} \circ f$ . Он допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в  $X \setminus \{p_1, \dots, p_6\}$  до функции  $\varphi: X \setminus \{p_1, \dots, p_6\} \rightarrow X_0 \setminus \{p'_1, \dots, p'_6\}$ . При этом один обход в  $X$  вокруг точки  $p_i$  при отображении  $f$  переходит в два обхода в  $\mathbb{C}$  вокруг точки  $e_i$ , и после поднятия  $\pi^{-1}$  по накрытию  $\pi$  переходит в один обход  $X_0$  вокруг точки  $p'_i$ . Последнее следует из того, что все точки ветвления при накрытии  $\pi: X_0 \setminus \{p'_1, \dots, p'_6\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{e_1, \dots, e_6\}$  имеют второй порядок. То есть получившаяся аналитическая функция  $\varphi$  — однозначна, то есть это голоморфная функция. Отсюда же (и из свойства поднятия пути на накрытие) вытекает и взаимная однозначность функции  $\varphi$  на  $X \setminus \{p_1, \dots, p_6\}$ . При этом в точках  $p_1, \dots, p_6$  эта функция имеет устранимые особенности (так как существует предел  $\varphi(p) \rightarrow p'_i$ , это доказывается аналогично утверждению 5.2). В итоге получается, что  $\varphi$  — биголоморфизм уже поверхностей  $X$  и  $X_0$ .

Для  $S(e'_1, \dots, e'_6)$  доказательство аналогично, только отображение  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  выбирается (при помощи применения ДЛЮ к  $\bar{\mathbb{C}}$ ) так, что все особые точки отображаются в конечные числа.  $\square$

## 5 Гиперэллиптические римановы поверхности и каноническое отображение

**Определение.** Компактная риманова поверхность называется гиперэллиптической, если на ней существует мероморфная функция  $f$  степени 2 (то есть  $m = 2$  в формуле

Римана-Гурвица).

**Упражнение 10.2.** 1. Доказать, что любая гиперэллиптическая поверхность рода  $g \geq 1$  биголоморфна поверхности  $S(e_1, \dots, e_{2g+1})$  для некоторых попарно различных точек  $e_1, \dots, e_{2g+1}$ , а также поверхности  $S(e'_1, \dots, e'_{2g+2})$  для попарно различных точек  $e'_1, \dots, e'_{2g+2}$ .

2. Доказать, что для любого базиса  $\omega_1, \dots, \omega_g$  пространства  $\mathcal{O}^1(X)$  на гиперэллиптической поверхности  $X$  с функцией  $f$  корректно определено голоморфное отображение  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}P^{g-1}$  по формуле  $\varphi(p) = (\omega_1(p) : \dots : \omega_g(p))$ , причём оно постоянно на слоях функции  $f$  (то есть  $\varphi = h \circ f$  для некоторого мероморфного отображения  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^{g-1}$ ), и степень отображения  $\varphi: X \rightarrow \varphi(X)$  равна 2 (то есть  $h$  инъективно).

Отображение  $\varphi$  называется каноническим отображением.

3. Доказать, что нормализация  $X$  кривой  $\{z^4 + w^4 = 1\}$  не является гиперэллиптической (проверить, что каноническое отображение инъективно).

4. \* Доказать, что любая компактная риманова поверхность рода 3 либо гиперэллиптическая (и тогда она биголоморфна  $S(e_1, \dots, e_7)$ ), либо биголоморфна гладкой карте в  $\mathbb{C}P^2$ .

5. \* Доказать (посредством канонического отображения), что любая компактная риманова поверхность рода 4 либо гиперэллиптическая, либо биголоморфна трансверсальному пересечению гладких кубики и квадрики в  $\mathbb{C}P^2$ .

## 6 Билинейные соотношения Римана

**Утверждение 10.4.** Пусть  $\omega, \omega'$  — голоморфные 1-формы на компактной римановой поверхности  $X$  с каноническим  $4g$ -угольником  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ ,  $g \geq 1$  Тогда числа

$$A_j := \int_{a_j} \omega, \quad B_j := \int_{b_j} \omega,$$

$$A'_j := \int_{a_j} \omega', \quad B'_j := \int_{b_j} \omega'$$

удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{j=1}^g (A_j B'_j - A'_j B_j) = 0; \quad (10.2)$$

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^g \bar{A}_j B_j > 0, \omega \neq 0. \quad (10.3)$$

*Замечание* (Пояснение для случая  $g = 1$ ). Если поверхность  $X$  — это тор  $\mathbb{C}/\Lambda = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$ , то  $\omega = dz$ ,

$$A_1 = \int_{a_1} dz = \omega_1, \quad B_1 = \int_{b_1} dz = \omega_2,$$

и соотношение 10.3 сводится к  $\operatorname{Im}(\bar{\omega}_1 \omega_2) > 0$ , то есть к соглашению об ориентации  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\operatorname{Im} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) > 0.$$

*Доказательство.* Обозначим<sup>15</sup> канонический  $4g$ -угольник через  $\Pi$ , а его же за исключением  $\varepsilon$ -окрестности границы — через  $\Pi_\varepsilon$ . Пусть  $G$  — образ внутренности  $\Pi$ , а  $G_\varepsilon$  — образ внутренности  $\Pi_\varepsilon$  при отображении  $\Pi$  на поверхность  $X$  (то есть при склейке одноимённых сторон). Внутренность  $\Pi$  — односвязная область, поэтому 1-форма  $\omega$  имеет первообразную  $f$  на  $G$ . Тогда по интегральной теореме Коши

$$\int_{\partial G_\varepsilon} f \omega' = 0$$

для любого  $\varepsilon > 0$ . В силу предельного перехода получаем

$$\int_{\partial G} f \omega' = 0.$$

Далее введём параметризации  $a_j(t)$  и  $a_j^{-1}(t)$  так, чтобы при всех  $t$  точки  $a_j(t)$  и  $a_j^{-1}(t)$  склеивались (на поверхности  $X$ ). Пусть  $\varphi(t)$  — предельное значение функции  $f$  изнутри  $\Pi$  в точке  $a_j(t)$ . Тогда предельное значение  $f$  изнутри  $\Pi$  в точке  $a_j^{-1}(t)$  равно  $\varphi(t) + B_j$ . Действительно, образ отрезка  $[a_j(t), a_j^{-1}(t)]$  на поверхности  $X$  образует с  $b_j$  границу области в  $X$ , интеграл от  $\omega$  по которой равен 0. Это значит, что предельное значение  $f$  изнутри  $\Pi$  в точке  $a_j^{-1}(t)$  равно

$$f(a_j(t)) + \int_{a_j(t)}^{a_j^{-1}(t)} df = \varphi(t) + \int_{b_j} \omega = \varphi(t) + B_j.$$

<sup>15</sup>Как и в случае  $g = 1$

Тогда

$$\int_{a_j} f\omega' + \int_{a_j^{-1}} f\omega' = \int_0^1 (\varphi(t) - (\varphi(t) + B_j)) a_j^*(\omega') = -B_j \int_{a_j(t)} \omega' = -B_j A'_j,$$

где  $\int_{t_1}^{t_2} a_j^*(\omega') = \int_{a_j([t_1, t_2])} \omega'$ .

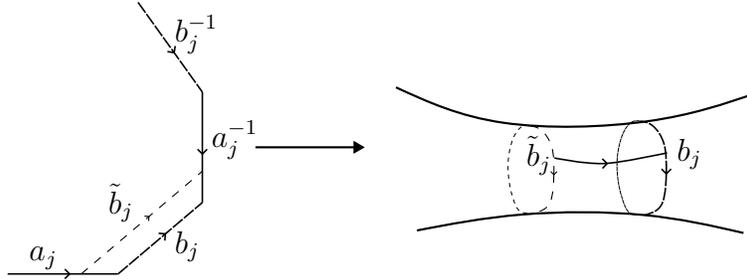


Рис. 10.2: Отрезок  $\tilde{b}_j = [a_j(t), a_j^{-1}(t)]$  на поверхности  $X$

Аналогично (с поправкой на то, что отрезки  $[b_j(t), b_j^{-1}(t)]$  будут „эквивалентны“ уже  $a_j^{-1}$ ) получаем

$$\int_{b_j} f\omega' + \int_{b_j^{-1}} f\omega' = A_j B'_j.$$

Теперь, суммируя по  $j = 1, \dots, g$  и принимая во внимание, что  $\partial G = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ , получаем соотношение 10.2.

Теперь докажем соотношение 10.3. С одной стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \bar{f}\omega &= \int_G d\bar{f} \wedge df = \int_G (\bar{f}'(z) d\bar{z}) \wedge (f(z) dz) = \\ &= \int_G \left( \bar{f}'(x + iy) \cdot (dx - idy) \right) \wedge \left( f(x + iy) \cdot (dx + idy) \right) = 2i \int_G |f'(x + iy)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

С другой стороны (как в доказательстве соотношения 10.2),

$$\int_{\partial G} \bar{f}\omega = \sum_{j=1}^g (\bar{A}_j B_j - A_j \bar{B}_j).$$

□

## Лекция 11: Следствия билинейных соотношений Римана. Доказательство теоремы Римана-Роха

### 1 Следствия билинейных соотношений Римана

**Следствие 11.1.** Если голоморфная на  $X$  1-форма  $\omega$  имеет все  $A$ -периоды, равные 0, то она сама тождественно равна нулю.

*Доказательство.* По второму билинейному соотношению Римана 10.3

$$\operatorname{Im} \left( \sum_{i=1}^g \bar{A}_i B_i \right) > 0 \text{ при } \omega \neq 0.$$

По условию  $\operatorname{Im} \left( \sum_{i=1}^g \bar{A}_i B_i \right) = 0$ , следовательно,  $\omega \equiv 0$ .  $\square$

**Следствие 11.2.** Существует единственный базис  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  пространства  $\mathcal{O}^1(X)$  над полем  $\mathbb{C}$ , для которого верно

$$A_k(\alpha_j) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, g.$$

*Доказательство.* По следствию 11.1 отображение

$$\omega \mapsto (A_1(\omega), \dots, A_g(\omega))$$

является изоморфизмом векторных пространств над  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Следствие 11.3.** Для любой точки  $p \in X$  и натурального числа  $n \in \mathbb{N}$ , не меньшего двух, обозначим через  $\omega_p^{(n)}$  единственную (по следствию 11.1 возможность отличия на голоморфную часть устраняется определённостью  $A$ -периодов) 1-форму  $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ , голоморфную везде кроме точки  $p$ , в точке  $p$  имеющую полюс порядка  $n$  с главной частью ряда Лорана  $\frac{dz}{z^n}$  и с  $A$ -периодами, равными 0. Тогда для всех  $j = 1, \dots, g$  имеем

$$B_j(\omega_p^{(n)}) = \frac{2\pi i}{n-1} c_{j,n-2}, \quad (11.1)$$

где числа  $c_{jm}$  — коэффициенты в разложении

$$\alpha_j = \left( \sum_{m=0}^{\infty} c_{jm} z^m \right) dz$$

вблизи  $z = 0$  при такой карте, что  $z(p) = 0$ , а  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  — базис из следствия 11.2.

*Доказательство.* Введём канонический  $4g$ -угольник  $\Pi$ . Можно считать, что точка  $p$  не лежит на границе  $\partial\Pi$  многоугольника  $\Pi$ . Так как внутренность  $\Pi$  односвязна, на её образе (при склейке в пространство  $X$ )  $G$  для каждого  $j = 1, \dots, g$  существует первообразная  $f_j$  1-формы  $\alpha_j$ .

Тогда, во-первых,

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} f_j \omega_p^{(n)} &= \left| \text{Как в доказательстве соотношения 10.2} \right| = \\ &= \sum_{k=1}^g (A_k(\alpha_j) B_k(\omega_p^{(n)})) - \sum_{k=1}^g (B_k(\alpha_j) A_k(\omega_p^{(n)})) = \\ &= \left| A_k(\alpha_j) = \delta_{jk}, A_k(\omega_p^{(n)}) = 0 \right| = B_j(\omega_p^{(n)}). \end{aligned}$$

Во-вторых же,

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} f_j \omega_p^{(n)} &= \left| \text{Теорема Коши о вычетах (теорема 5)} \right| = 2\pi i \operatorname{res}_p f_j \omega_p^{(n)} = \\ &= 2\pi i \left( \text{коэффициент при } z^{-1} \text{ ряда } \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{jm}}{m+1} z^{m+1} \right) \left( \frac{1}{z^n} + O(1) \right) \right) = \\ &= \left| \text{Этот коэффициент будет при } m = n-2 \right| = 2\pi i \frac{c_{j,n-2}}{n-1}. \end{aligned}$$

В итоге

$$B_j(\omega_p^{(n)}) = \int_{\partial G} f_j \omega_p^{(n)} = 2\pi i \frac{c_{j,n-2}}{n-1}.$$

□

**Следствие 11.4.** Для двух произвольных точек  $p, q \in X, p \neq q$  обозначим через  $\omega_{pq}$  единственную мероморфную 1-форму на  $X$ , голоморфную везде кроме точек  $p$  и  $q$ , в них имеющую полюсы первого порядка с вычетами 1 и  $-1$  соответственно, а также с  $A$ -периодами, равными 0. Тогда для всех  $j = 1, \dots, g$  верно

$$B_j(\omega_{pq}) = 2\pi i \int_q^p \alpha_j, \quad (11.2)$$

где путь от  $q$  до  $p$  берётся любой, не пересекающий  $a_j$  и  $b_j$ . В силу односвязности области  $G$  интеграл по любому такому пути будет один и тот же.

*Доказательство.* Во-первых,

$$\int_{\partial G} f_j \omega_{pq} = \left| \text{Как в доказательстве следствия 11.3} \right| = B_j(\omega_{pq}).$$

Во-вторых,

$$\int_{\partial G} f_j \omega_{pq} = 2\pi i (\operatorname{res}_p f_j \omega_{pq} + \operatorname{res}_q f_j \omega_{pq}) = 2\pi i (f_j(p) - f_j(q)) = 2\pi i \int_q^p \alpha_j.$$

□

## 2 Доказательство теоремы Римана-Роха (теорема 6)

План доказательства:

1. Докажем теорему для случая, когда дивизор  $D = p_1 + \dots + p_m$  — сумма различных точек;
2. Докажем для любого положительного дивизора;
3. Докажем теорему для нулевого дивизора;
4. Введя линейную эквивалентность, докажем, что  $i(D) = l(K - D)$ , где  $K$  — любой канонический дивизор, и покажем, что случаи  $l(D) > 0$  и  $l(K - D) > 0$  уже разобраны;
5. Докажем, наконец, теорему в случае  $l(D) = l(K - D) = 0$ .

*Доказательство.* 1. Пусть  $D = p_1 + \dots + p_n$ . Любая функция  $f \in \mathcal{L}(D)$  имеет не более чем полюс первого порядка в каждой из точек  $p_1, \dots, p_n$ . Следовательно,  $df$  имеет полюсы не более чем второго порядка в этих точках, и вычеты в них равны 0 (так как вычет производной равен нулю).

Можно подобрать такие коэффициенты  $k_1, \dots, k_m$ , что

$$\alpha := df - \sum_{\mu=1}^m k_\mu \omega_\mu$$

будет голоморфной 1-формой на всей поверхности  $X$ .  $\omega_\mu$  здесь — это  $\omega_{p_\mu}^{(2)}$  из следствия 11.3.  $A$ -периоды форм  $df$  и  $\omega_\mu$  равны нулю: у  $df$  это верно в силу замкнутости формы, а

у  $\omega_\mu$  это верно в силу выбора таких форм. Следовательно, у формы  $\alpha$   $A$ -периоды также равны 0, следовательно,  $\alpha \equiv 0$ .

Интегрируя равенство  $df - \sum_{\mu=1}^m k_\mu \omega_\mu = 0$  по путям  $b_j$  и пользуясь следствием 11.3, имеем

$$B_j(df) = 0 = \sum_{\mu=1}^m k_j B_j(\omega_\mu) = \sum_{\mu=1}^m k_j 2\pi i \Gamma_{j0}^\mu, \quad (11.3)$$

где  $\Gamma_{j0}^\mu$  — коэффициенты из разложения  $\alpha_j = (\sum_{\nu=0}^\infty \Gamma_{j\nu}^\mu z_\mu^\nu) dz_\mu$  базисной 1-формы (базис из следствия 11.2) вблизи точки  $p_\mu$ .

Обратно, любой набор чисел  $(k_1, \dots, k_m)$ , удовлетворяющий равенствам 11.3, задаёт мероморфную 1-форму с полюсами не более чем второго порядка в точках  $p_1, \dots, p_m$  и с нулевыми вычетами по формуле  $\omega = \sum_{\mu=1}^m k_\mu \omega_\mu$ . Так как её вычеты нулевые, интегрирование этой формы не зависит от пути, поэтому у этой формы есть первообразная, причём с полюсами не более чем первого порядка в точках  $p_\mu$ , то есть в итоге мы получаем функцию из  $\mathcal{L}(D)$ .

Этим устанавливается изоморфизм векторных пространств  $\{df \mid f \in \mathcal{L}(D)\} \cong \ker(\Gamma)$ , где  $\Gamma$  — это линейное отображение  $(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^g$  с матрицей  $(\Gamma_{j0}^\mu)$ .

Следовательно,

$$\dim\{df \mid f \in \mathcal{L}(D)\} = l(D) - 1 = \dim \ker \Gamma.$$

При этом ядро  $\{\sum_{j=1}^g l_j \Gamma_{j0}^\mu, \mu = 1, \dots, m\}$  транспонированного оператора  $\Gamma$  изоморфно пространству  $J(D)$ , то есть пространству  $\{\omega \in \mathcal{O}^1(X) \mid \omega(p_1) = \dots = \omega(p_m) = 0\}$ . Здесь 1-формы голоморфны в силу положительности дивизора. Соответствие проводится таким образом:  $\omega = \sum_{j=1}^g l_j \alpha_j$ . Тогда  $\Gamma_{j0}^\mu = \alpha_j(p_\mu)$ , и условие на форму  $\omega$  — в точности условие на набор чисел  $(l_1, \dots, l_g)$ .

Строчный ранг матрицы равен её столбцовому рангу, поэтому

$$\text{rk } \Gamma = m - \dim \ker \Gamma = g - \dim \ker \Gamma^T = \text{rk } \Gamma^T.$$

Из этого следует, что  $l(D) - i(D) = m - g + 1$ .

2. Пусть теперь  $D$  — положительный дивизор  $\sum_{\mu=1}^m N_\mu p_\mu$ . В этом случае рассуждение останется прежним для отображения  $\Gamma: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^g$  с коэффициентами  $\Gamma_{j\nu}^\mu$ , где  $M = \sum_{\mu=1}^m N_\mu$ , а  $\nu_\mu = 0, \dots, N_\mu - 1$ . Все соотношения также сохраняются.

3. Рассмотрим отдельно случай  $D = 0$ . В этом случае  $\mathcal{L}(D) = \mathbb{C}$ , то есть единственные мероморфные функции без полюсов на  $X$  — это константы. Тогда  $l(D) = 1$  Также

$J(D) = \mathcal{O}^1(X)$ , то есть  $i(D) = \dim \mathcal{O}^1(X) = g$ .  $\deg D = 0$ . В таком случае получаем

$$1 - g = 0 - g + 1.$$

4. Введём понятие линейной эквивалентности. Будем называть дивизоры  $D_1$  и  $D_2$  линейно эквивалентными, если их разность — главный дивизор, то есть существует такая функция  $f \in \mathcal{M}(X), f \neq 0$ , что  $D_1 - D_2 = (f)$ . Несложно проверить, что это отношение эквивалентности на множестве всех дивизоров на  $X$ . При этом числа  $l(D), i(D), \deg D$  одинаковы для дивизоров из одного класса эквивалентности. Любые два канонических дивизора линейно эквивалентны (то есть отношение любых 1-форм — мероморфная функция), обозначим их класс эквивалентности за  $K$ .

Дивизор  $D$  линейно эквивалентен неотрицательному дивизору тогда и только тогда, когда  $l(D) > 0$ . (Действительно, пусть  $l(D) > 0$ , тогда найдётся функция такая, что  $(f) \geq -D$ , и  $(f) + D \geq 0$ .)

Следовательно, теорема Римана-Роха доказана для случая  $l(D) > 0$ .

Также для любого дивизора выполнено равенство  $i(D) = l(K - D)$  в силу изоморфизма  $J(D) \cong \mathcal{L}(K - D)$  (1-форме  $\omega$  сопоставим функцию  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , где  $\omega_0$  — фиксированная мероморфная 1-форма, не равная тождественному нулю).

В этих терминах теорема Римана-Роха эквивалентна равенству

$$2l(D) - \deg(D) = 2l(K - D) - \deg(K - D),$$

так как  $\deg(K - D) = 2g - 2 - \deg(D)$ . Тогда, заменяя дивизор  $D$  на дивизор  $K - D$ , получаем, что теорема Римана-Роха доказана и для случая  $l(K - D) > 0$ .

5. Остался случай  $l(D) = l(K - D) = 0$ . В таком случае  $i(D) = l(K - D) = 0$ , и нужно доказать, что

$$0 + 0 = \deg(D) - g + 1,$$

то есть, что  $\deg(D) = g - 1$ .

Пусть это неверно, и пусть  $\deg(D) \geq g$ . Тогда запишем  $D = P - N$ , где  $P \geq 0, N > 0$ . (Случай  $N = 0$  уже рассмотрен.) Тогда

$$l(P) = i(P) + \deg(P) - g + 1 \geq \deg(P) - g + 1 = \deg(D) + \deg(N) - g + 1 \geq \deg(N) + 1,$$

где первое равенство — уже доказанное равенство для положительного дивизора  $P$ , а последнее неравенство — сделанное предположение. В итоге имеем  $l(P) \geq \deg(N) + 1$ . То есть если на функции из пространства  $\mathcal{L}(P)$  наложить  $\deg(N)$  условий обращения в ноль в точках дивизора  $N$  с учётом кратности, среди них всё равно будет нетривиальная функция.

Иными словами,  $l(P-N) = \dim \mathcal{L}(P-N) \geq 1$ , что противоречит выбранному случаю.

Аналогично (с заменой  $D$  на  $K-D$ ) показывается, что  $\deg(D)$  не может быть строго меньше, чем  $g-1$ .  $\square$

### 3 Определение якобиева многообразия, якобиева тора $\text{Jac}(X)$ и отображения Абеля

В пространстве  $(\mathcal{O}^1(X))^*$  всех линейных функционалов от голоморфных 1-форм рассмотрим подмножество  $\Lambda(X)$  функционалов вида

$$\omega \mapsto \int_{\gamma} \omega,$$

где  $\omega$  — гладкий замкнутый путь.

Множество  $\Lambda(X)$  содержит функционалы  $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$  и фактически равно  $\mathbb{Z}A_1 + \dots + \mathbb{Z}A_g + \mathbb{Z}B_1 + \dots + \mathbb{Z}B_g$ , так как любой гладкий путь  $\gamma$  гомотопен слову из символов  $a_j, b_j, a_j^{-1}, b_j^{-1}$ .

Функционалы  $A_j, B_j$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$ , так как отображение  $\omega \mapsto (\text{Re } A_1(\omega), \dots, \text{Re } A_g(\omega), \text{Re } B_1(\omega), \dots, \text{Re } B_g(\omega))$  —  $\mathbb{R}$ -линейный изоморфизм  $\mathcal{O}^1(X)$  на  $\mathbb{R}^{2g}$ . Поэтому  $\Lambda(X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ . Это решётка в пространстве  $(\mathcal{O}^1(X))^* \cong \mathbb{C}^g$ .

**Определение.** Якобиев тор  $\text{Jac}(X)$  — это факторгруппа  $(\mathcal{O}^1(X))^*/\Lambda(X) = \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}$ .

Зафиксировав точку  $p_0$  на  $X$ , определим отображение Абеля.

**Определение.** Отображение Абеля — это голоморфное отображение  $\mathcal{A}_{p_0}: X \rightarrow \text{Jac}(X)$ , заданное формулой

$$p \mapsto \left( \omega \mapsto \int_{p_0}^p \omega \right) \text{ mod } \Lambda(X).$$

По модулю  $\Lambda(X)$  результат отображения Абеля не зависит от пути между  $p$  и  $p_0$ .

По  $\mathbb{Z}$ -линейности продолжим  $\mathcal{A}_{p_0}$  на группу дивизоров до гомоморфизма  $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$  и заметим, что сужение отображения  $\mathcal{A}_{p_0}$  на подгруппу  $\text{Div}_0(X)$  всех дивизоров нулевой степени не зависит от выбора точки  $p_0$ . Обозначим это сужение как  $\mathcal{A}: \text{Div}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$ .

**Теорема 7 (Абеля).** Дивизор  $D$  степени 0 является главным тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A}(D) = 0$ .

*Замечание.* В случае  $g = 1$  это эквивалентно теореме о том, что

Эллиптическая функция с нулями  $N$  и полюсами  $P$  существует тогда и только тогда, когда количество нулей равно количеству полюсов и  $\sum N = \sum P \pmod{\Lambda}$ .

## Лекция 12: Теорема Абеля

### 1 Доказательство теоремы Абеля

**Теорема.** Дивизор  $D = p_1 + \dots + p_m - (q_1 + \dots + q_m)$  степени 0 на компактной римановой поверхности  $X$  является главным тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A}(D) = 0$ .

*Замечание.* В координатной форме отображение  $\mathcal{A}: \text{Div}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$  имеет вид

$$\mathcal{A}(D) = \left( \underbrace{\sum_{\mu=1}^m \left( \int_{p_0}^{p_\mu} \alpha_1 - \int_{p_0}^{q_\mu} \alpha_1 \right)}_{\xi_1}, \dots, \underbrace{\sum_{\mu=1}^m \left( \int_{p_0}^{p_\mu} \alpha_g - \int_{p_0}^{q_\mu} \alpha_g \right)}_{\xi_g} \right) \pmod{\Lambda(X)}, \quad (12.1)$$

где  $\Lambda(X) = (A \mid B) \mathbb{Z}^{2g}$ ,  $A$  и  $B$  — матрицы  $g \times g$  с компонентами  $A_{jk} = \int_{a_k} \alpha_j$ ,  $B_{jk} = \int_{b_k} \alpha_j$ .  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  здесь — произвольный базис пространства  $\mathcal{O}^1(X)$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $D = (f)$ . Тогда 1-форма  $\frac{df}{f} - \omega$ , где  $\omega := \sum_{\mu=1}^m (\omega_{p_\mu p_0} - \omega_{q_\mu p_0})$ , а  $\omega_{pp_0}$  — форма из следствия 11.4, голоморфна на всей  $X$ .

Запишем

$$\frac{df}{f} - \omega = \sum_{j=1}^g c_j \alpha_j, \quad (12.2)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  — уже нормированный базис (в смысле следствия 11.2). Проинтегрируем это равенство по  $a_k$ :

$$2\pi i n_k - 0 = c_k, \quad (12.3)$$

то есть все коэффициенты  $c_k$  принадлежат  $2\pi i \mathbb{Z}$ .

Теперь проинтегрируем это же равенство по  $b_k$ :

$$2\pi i m_k - 2\pi i \xi_k = \sum_{i=1}^g c_j B_k(\alpha_j) = \sum_{j=1}^g 2\pi i n_j B_{kj}. \quad (12.4)$$

То есть  $m_k - \xi_k = \sum_{j=1}^g n_j B_{kj}$ . Следовательно,  $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_g)$  лежит в решётке  $I \cdot \mathbb{Z}^g + B \cdot \mathbb{Z}^g$ , а это и есть решётка периодов  $\Lambda(X)$ , то есть  $\mathcal{A}(D) \equiv 0 \pmod{\Lambda(X)}$ .

$\Leftarrow$  Пусть  $\xi \in I \cdot \mathbb{Z}^g + B \cdot \mathbb{Z}^g$ . Тогда есть такие целые числа  $n_k, m_k$ , что выполнено равенство 12.4, то есть все периоды формы  $\Omega := \omega + \sum_{j=1}^g c_j \alpha_j$ , где  $c_j = 2\pi i n_j$ , равны нулю,

а вычеты принадлежат  $2\pi i\mathbb{Z}$ . Следовательно, функция

$$f(p) := \exp \left( \int_{p_0}^p \Omega \right)$$

будет однозначно определена, мероморфна и будет иметь нужные нули и полюсы.  $\square$

**Следствие 12.1.** *Отображение  $\mathcal{A}_{p_0}: X \rightarrow \text{Jac}(X)$  инъективно, если  $g(X) \geq 1$ .*

*Доказательство.* Если есть две различные точки  $p_1, p_2$  с  $\mathcal{A}_{p_0}(p_1) = \mathcal{A}_{p_0}(p_2)$ , то дивизор  $p_1 - p_2$  — главный для некоторой функции  $f$  (по теореме Абеля). Тогда  $P(f) = 1$ , то есть  $f$  задаёт биголоморфизм поверхности  $X$  на сферу  $\bar{\mathbb{C}}$  (как в доказательстве утверждения 10.1), что противоречит условию  $g(X) \geq 1$ .  $\square$

**Следствие 12.2.** *Если  $g(X) = 1$ , то  $\mathcal{A}_{p_0}: X \rightarrow \text{Jac}(X)$  — биголоморфизм.*

*Доказательство.* Образ  $\mathcal{A}_{p_0}(X) \subset \text{Jac}(X)$  открыт (по принципу открытости голоморфных отображений) и замкнут (как непрерывный образ компакта). В силу связности якобиана это означает, что  $\mathcal{A}(X) = \text{Jac}(X)$ .  $\square$

## 2 Постановка задачи обращения Якоби

**Утверждение 12.1.** *Отображение  $\mathcal{A}_{p_0}: X^{(g)} \rightarrow \text{Jac}(X)$  сюръективно, где  $X^{(g)} = X^g/S_g$  — множество всех положительных дивизоров степени  $g$ , то есть наборов из  $X^g$  с точностью до перестановок элементов из  $X$ .*

*Доказательство.* Покажем, что есть такой дивизор  $P = p_1 + \dots + p_g$  (где  $p_1, \dots, p_g$  — точки из малой окрестности точки  $p_0$ ), что матрица Якоби  $\left( \frac{\partial(\mathcal{A}_{p_0})_j}{\partial z_k} \right)_{j,k=1}^g$  отображения  $\mathcal{A}_{p_0}$  в точке  $P$  имеет ранг  $g$  (то есть обратима).

Из теоремы 6 вытекает, что нет такой точки  $q$ , что  $\omega(q) = 0$  для любой голоморфной 1-формы  $\omega$ . Следовательно, для любой точки  $q$  из  $X$  условие  $\omega(q) = 0$  задаёт  $(g-1)$ -мерную гиперповерхность в  $\mathcal{O}^1(X) \cong \mathbb{C}^g$ . В частности, есть базис  $\omega_1, \dots, \omega_g$  в  $\mathcal{O}^1(X)$  и точка  $p_1 \in X$  такая, что  $\omega_1(p_1) \neq 0$ . Отнимая от остальных  $\omega_j$  форму  $\omega_1$  с нужным коэффициентом, можно считать, что  $\omega_j(p_1) = 0$  при  $j \neq 1$ . Далее выберем точку  $p_2$  так, что  $\omega_2(p_2) \neq 0$ , и отнимем от остальных  $\omega_j$  (кроме  $\omega_1$ ) форму  $\omega_2$  с таким коэффициентом, что  $\omega_j(p_2) = 0$ . Продолжая этот процесс до конца, получаем верхнетреугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_1(p_1)}{dz} & \cdots & \frac{\omega_1(p_g)}{dz} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_g(p_1)}{dz} & \cdots & \frac{\omega_g(p_g)}{dz} \end{pmatrix}$$

с ненулевыми элементами на диагонали. Однако это также и матрица Якоби отображения  $\mathcal{A}_{p_0}$  в точке  $P$ , так как

$$\mathcal{A}_{p_0}(P) = \left( \sum_{\mu=1}^g \int_{p_0}^{p_\mu} \omega_1, \dots, \sum_{\mu=1}^g \int_{p_0}^{p_\mu} \omega_g \right).$$

Поэтому отображение  $\Phi := \mathcal{A}_{p_0}$  локально обратимо в точке  $P$ . Следовательно, есть окрестность  $U \subset \text{Jac}(X)$  точки  $\Phi(P)$ , на которой есть обратная функция. Теперь рассмотрим любой вектор  $\xi \in \text{Jac}(X)$ . Есть число  $N \in \mathbb{N}$  такое, что  $\Phi(P) + \frac{\xi}{N} \in U$ .

Поэтому есть такой дивизор  $Q = q_1 + \dots + q_g$  вблизи  $P$ , что  $\Phi(P) + \frac{\xi}{N} = \Phi(Q)$ . Пусть теперь  $D := (Q - P)N + gp_0$ . Степень этого дивизора равна  $g$ , и по теореме 6  $l(D) \geq 1 + \deg D - g = 1$ , то есть существует такая мероморфная на  $X$  функция  $f$ , что  $(f) + D = 0$ . Это положительный дивизор степени  $g$ , и

$$\Phi((f) + D) = \Phi(D) = \left| \Phi(p_0) = 0 \right| = \Phi((Q - P)N) = \xi.$$

□

**Пример** (Неинъективности отображения Абеля). При  $g = 2$  риманова поверхность  $X$  гиперэллиптическая, и на  $X$  есть проекция  $\pi: X \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  — отображение степени 2. Следовательно,  $X^{(2)}$  содержит множество дивизоров  $Y \cong \bar{\mathbb{C}} := \{\pi^{-1}(x_0) \mid x_0 \in \bar{\mathbb{C}}\}$ , которые попарно линейно эквивалентны.

По теореме 7  $\mathcal{A}_{p_0}(Y)$  — одна точка, и отображение не инъективно.

Других случаев линейно эквивалентных дивизоров степени 2 нет (без доказательства).

То есть локально отображение  $\mathcal{A}_{p_0}$  устроено как

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\mapsto (z_1, z_1 z_2) \\ \left( w_1, \frac{w_2}{w_1} \right) &\leftarrow (w_1, w_2) \end{aligned}$$

Оно обратимо везде, кроме множества  $\{w_1 = 0, w_2 \neq 0\}$ .

**Задача обращения Якоби.** Построить такие мероморфные функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_g$  (аналоги эллиптических функций), что отображение  $(\varphi_1, \dots, \varphi_g): \text{Jac}(X) \rightarrow X^{(g)}$  обратно к  $\mathcal{A}_{p_0}$ .

### 3 Тэта-функция Римана

**Определение.** Пусть  $\tau \in GL_g(\mathbb{C})$  — симметричная матрица с положительно определённой мнимой частью  $\text{Im } \tau > 0$ . Например, это может быть решётка  $B$ -периодов для римановой поверхности рода  $g$ . В таком случае эти свойства — в точности билинейные соотношения Римана (соотношения 10.2 и 10.3).

Тогда тэта-функция Римана — это функция

$$\theta(z, \tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(2\pi i m^T z + \pi i m^T \tau m).$$

Так как  $\text{Im } \tau > 0$ ,  $\text{Re}(\pi i m^T \tau m) < 0$ , поэтому такой ряд сходится равномерно на компактах, и  $\theta$  — голоморфная функция от  $z \in \mathbb{C}^g$ . Также эта функция — не тождественный ноль (что можно проверить разложением в ряд Фурье).

Основные свойства тэта-функции:

1.  $\theta(z + e_j) = \theta(z)$ ,  $j = 1, \dots, g$ ;
2.  $\theta(z + \tau_j) = \theta(z) \exp\left\{2\pi i \left(z_j + \frac{\tau_{jj}}{2}\right)\right\}$ .

Задача обращения Якоби решается с помощью тэта-функции:

Для любой точки  $u \in \mathbb{C}^g$  рассмотрим функцию  $f_u := \theta(\tilde{\mathcal{A}}_{p_0}(p) - u)$ , где  $\tilde{\mathcal{A}}_{p_0}(p)$  — любой из прообразов точки  $p \in \text{Jac}(X)$  при отображении  $\mathcal{A}_{p_0}$ . Такая функция многозначна, но её нули определены корректно, так как  $\tilde{\mathcal{A}}_{p_0}(p)$  определена с точностью до прибавления столбцов  $e_j$  (столбец единичной матрицы) и  $\tau_j$  (столбец матрицы  $\tau$ ), которые не влияют на равенство тэта-функции нулю.

Либо  $f_u$  — тождественный ноль, либо выполняются два утверждения:

**Утверждение 12.2.** Число нулей функции  $f_u$  в каноническом  $4g$ -угольнике равно  $g$ .

**Утверждение 12.3.** Если  $p_1(u), \dots, p_g(u)$  — эти нули, то  $\mathcal{A}(p_1 + \dots + p_g) = u - K$  для некоторого постоянного вектора  $K \in \text{Jac}(X)$ , не зависящего от  $u$ .

Таким образом, задача обращения Якоби в данном случае решена.

### 4 Решение КдФ в терминах тэта-функции

Для любой компактной римановой поверхности  $X$  с матрицей периодов  $(I, \tau)$  и соответствующей тэта-функцией  $\theta(z, \tau)$  существуют такие векторы  $U, V, W \in \mathbb{C}^g \setminus \{0\}$ , что мероморфная функция

$$2(\ln \theta(Ux + Vt + W, \tau))''_{xx} \tag{12.5}$$

от  $x$  и  $t$  является решением уравнения

$$4u_t = u_{xxx} - 6uu_x.$$

При этом функция определена корректно, так как квазипериодичность функции  $\theta$  при взятии логарифма превращается в неоднозначность с точностью до прибавления полинома первой степени, а такая неоднозначность исчезает при взятии второй производной.

Среди этих решений содержатся решения, которые обсуждались в утверждении 2.2, а также  $n$ -солитонные решения, получающиеся как предельные случаи решения 12.5.

Например, если

$$(I, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & ib \\ 0 & 1 & ib & a \end{pmatrix},$$

то

$$\lim_{a \rightarrow 0} \theta \left( z - \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tau \right) = 1 + e^{a\pi iz_1} + e^{2\pi iz_2} + e^{2\pi i(z_1+z_2+b)}.$$

$(\ln \dots)''$  от этой функции — двухсолитонное решение, описывающее процесс взаимодействия двух солитонов.

$$u(x, t) = 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \ln (1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + 2B_{12}e^{\eta_1 \eta_2}),$$

где  $\eta_j := A_j x - 4A_j^3 t + c$ .

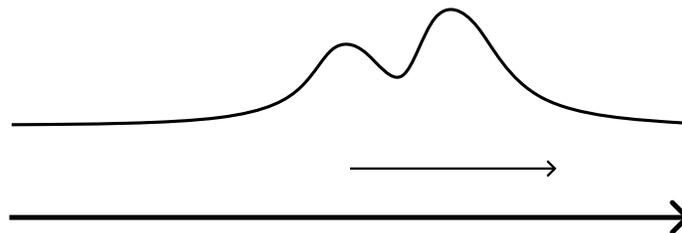


Рис. 12.1: Взаимодействие двух солитонов

## 5 Уравнение Кадомцева-Петвиашвили и гипотеза Новикова

**Утверждение 12.4.** Для любой компактной римановой поверхности  $X$  с матрицей периодов  $(I, \tau)$  и соответствующей тэта-функцией  $\theta(z, \tau)$  есть такие векторы  $U, V, W \in \mathbb{C}^g \setminus \{0\}$ , что функция

$$u(x, y, t) := 2 (\ln \theta (Ux + Vy + Wt + Z))''_{xx}$$

удовлетворяет уравнению КП

$$u_{yy} = (4u_t - u_{xxx} + 6uu_x)_x$$

для любого постоянного вектора  $Z \in \mathbb{C}^g$ .

**Гипотеза** (Новиков, доказана в 1986 году). Верно обратное: если  $\tau \in GL_g(\mathbb{C})$  — симметричная матрица с  $\text{Im } \tau > 0$  и выполнено заключение утверждения 12.4, то существует компактная риманова поверхность  $X$  рода  $g$  с матрицей периодов  $(I, \tau)$ .



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ