Наумов Дмитрий Вадимович

Конспект лекций

РЕНОРМИРОВКА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Конспект выполнен студенткой физфака МГУ
Андреевой Анной Сергеевной

Оглавление

Лекция 1. Введение в идею ренормировки 7

Введение 7
Бесконечный провод с линейной плотностью электрического заряда λ 8
Способ 1 9
Способ 2 9
Случай с границами от -Λ до Λ 10
Алгоритм 12
Разница потенциалов в двух разных точках 12
Недостатки 13

Лекция 2. Метод размерной регуляризации 15

Идея метода 15
Г-функция 15
Пример с n=1 17
Примеры с n=2, 3, 4 17
Метод размерной регуляризации 18
B-функция 20
Случай с d=1+ε, ε→0 20
Вычисление разности потенциалов и напряженности электрического поля 22
Схемы вычитания $\boldsymbol{MS}$ и $\boldsymbol{MS}$ 22
Ренормгруппа 23

Лекция 3. Ренормировка без тумана 25

Упрощенная модель 25
Алгоритм: регуляризация, ренормировка, избавление от регурятора 25
Ренормировка в разных порядках теории возмущений 26
Пример 28
Ренормгруппа 28
Уравнение ренормгруппы 30
Генератор группы 30
Полюс Ландау 33

Лекция 4. Собственная энергия электрона. Часть 1 34

Расходимости в квантовой электродинамике 34
Ультрафиолетовые расходимости 35
Метод размерной регуляризации 36
Уравнение Дайсона 38
Решение уравнения Дайсона 39

Лекция 5. Собственная энергия электрона. Часть 2 43

Вычисление интеграла методом размерной регуляризации 43
Виковский поворот 44
α-представление 45
Г-функции 47

Лекция 6. Собственная энергия электрона. Часть 3 49

Вычисление $\boldsymbol{\Sigma v}$ 49
Выход в нецелую размерность 49
Выводы из предыдущих вычислений (регуляризации) 51
Ренормировка 52
Итоги 55

Лекция 7. Ренормировака пропагатора электрона с ненулевой массой 57

Нулевая масса электрона 57
Ненулевая масса электрона 58
Вычисление $\boldsymbol{\Sigma s}$ 59
Вычисление ренормировочной константы для массы 60
Бегущая масса электрона 61
Алгоритм по шагам 63

Лекция 8. Поляризация вакуума. Часть 1 65

Тождество Уорда 65
Уравнение Дайсона для пропагатора фотона 66
Вычисление функции П$\boldsymbol{\mu\nu}$ и $\boldsymbol{D\mu\nu}$ 69
Фейнмановская $\boldsymbol{\alpha}$-параметризация 70
Ренормировка 72
Бегущий электрический заряд 74
Итоги 76

Лекция 9. Поляризация вакуума. Часть 2 78

$\boldsymbol{\beta}$-функция 78
Изменение потенциала 80
Поправка к лэмбовскому сдвигу 81

Лекция 10. Потенциал Юлинга 83

Потенциал 83
Нерелятивисткое приближение 83
Многозначный логарифм 85
Вычисление интеграла 86

Лекция 11. Вычисление g-2. Часть 1 90

Введение 90
Вершина взаимодействия электрона с электромагнитным полем 91
Природа форм-фактор $\boldsymbol{F1(q2)}$ 93
Природа форм-фактор $\boldsymbol{F2(q2)}$ 95

Лекция 12. Вычисление g-2. Часть 2 98

Вычисление матричного элемента 98
Вычисление g-2 100
Вычисление интеграла 103

Лекция 13. Загадки нейтральных каонов. Часть 1 107

Историческая справка 107
Современное объяснение 107
Пара нейтральных каонов 108
CP ($\boldsymbol{2\pi}$) 109
CP ($\boldsymbol{3\pi}$) 110
Оценка времени жизни $\boldsymbol{K1}, \boldsymbol{K2}$ 111

Лекция 14. Загадки нейтральных каонов. Часть 2 114

Осцилляции странности 114
Как обнаружить осцилляции странности? 116
Разность масс $\boldsymbol{K1}$ и $\boldsymbol{K2}$ 117

Лекция 15. Загадки нейтральных каонов. Часть 3 120

Механизм ГИМ 120
Замена пропагаторов на 4-фермионные приближения 121
Вычисление интеграла 122
Преобразования Фирца 123

Лекция 16. Квантовые аномалии 126

Что такое квантовые аномалии 126
Векторный ток виртуального фермиона 127
Треугольные диаграммы 129
Векторный ток 131
Аксиальный ток 133
Киральная квантовая аномалия 134
Итоги 135

Лекция 17. Распад π0 → γγ 136

Введение 136
Как распадается пион 137
Поляризация фотонов в распаде $\boldsymbol{\pi 0 \to \gamma\gamma}$ 140
Киральная аномалия в Стандартной модели 142

Лекция 18. Математические приемы 145

Телесный угол в d-мерном пространстве 145
$\boldsymbol{\alpha}$-параметризация 146
Пример 147
Метод Швингера 148
Как вычислять интегралы 149
«Переход к Евклиду» или Виковский поворот 150
Метод Швингера 151

Лекция 19. Сечение рассеяния с волновыми пакетами (часть 1) 153

Введение 153
Определения: волновая функция, состояние с плоскими волнами, волновой пакет 154
Амплитуда 155
От чего зависит волновая функция 156

Лекция 20. Сечение рассеяния с волновыми пакетами (часть 1) 160

Приближение гауссова волнового пакета 160
Число состояний 161
Упражнение 162
Формула для плотности числа взаимодействий 163

Лекция 1. Введение в идею ренормировки

Введение

В предыдущих двух курсах были подробно изучены разнообразные многочисленные процессы в квантовой механике, в квантовой электродинамике и электрослабой теории. Также для процессов было проведено сравнение результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными и показано, что теория хорошо согласуется с экспериментом. Однако теория содержит еще один более глубокий пласт: определенный класс диаграмм, который интуитивно должен был приводить к малым поправкам, при вычислении сечений, на практике приводит к бесконечности.

Проблема, связанная с бесконечностями, сохранялась в квантовой теории поля на протяжении нескольких десятилетий, теоретики стремились найти в этом явлении физический смысл. Постепенно ситуация изменилась, важную роль сыграли физики Гелл-Манн и Лоу, одними из первых продемонстрировавших способ избавиться от бесконечностей. До них в упрощенном виде подобную процедуру реализовал Дайсон. Также стоит упомянуть работы Боголюбова и Вильсона. В результате работы теоретиков возник строгий математический способ, называемый **ренормировкой**, позволяющий избавляться от бесконечностей математически корректным способом.

Процедура ренормировки изменила представление о том, что такое электрический заряд, масса частицы и некоторые другие вещи. Оказывается, что квантовую теорию поля можно сделать внутренне самосогласованной, только если отказаться от классического интуитивного представления, основанного на повседневном опыте, что электрический заряд электрона является константой. Значение, заряда электрона, которое регулярно используется, является низкоэнергетическим пределом. При переходе к высоким энергиям, когда частицы или квантовые поля проникают все ближе друг к другу, оказывается, что вакуум, заполняющий все пространство, модифицируется и меняет свойства (такие как масса и электрический заряд) самих взаимодействующих полей. Так, новое предсказание заключается в следующем: масса и электрический заряд зависят от расстояния между частицами. Эксперименты подтверждают эту теорию.

Стоит отметить, что теория ренормировки в квантовой теории поля требует сложной математики. В действительности только небольшая часть теоретиков занимается ренормировками в квантовой теории поля. Однако сами идеи теории ренормировки достаточно просты. В курсе теория будет рассмотрена шаг за шагом, начиная с простейших примеров, объясняющих основные идеи, до перенормировки квантовой электродинамики.

Одним из важнейших применений полученных знаний станет вычисление отклонения ***гиромагнитного фактора***. Заряженная частица со спином обладает внутренним «орбитальным моментом». Рассмотрим заряженную частицу в виде бесконечно малого вращающегося тела (например, сферы или эллипсоида). При

вращении такой частицы возникает электрический ток, который обязательно порождает магнитный момент, пропорциональный внутреннему орбитальному моменту, степени кручения. Коэффициент пропорциональности называется магнетоном бора, он выражается через отношение электрического заряда к двум массам частицы. Если для произвольного тела предположить, что распределение массы и распределение электрического заряда по объему тела – одно и то же, тогда связь магнитного и орбитального моментов через магнетон бора сохраняется для любого тела. Еще 100 лет назад было обнаружено, что для электрона это отношение необходимо увеличить в два раза, такое соотношение назвали ***гиромагнитным***, обозначили как g. В конце сороковых годов прошлого века выяснили, что если измерять g точнее, то окажется, что оно отличается от 2 на уровне одной тысячной. Первым, кто вычислил g и понял, с чем связано отклонение от 2, был Юлиан Швингер:

$$\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

где $\alpha = \frac{1}{137}$ – константа интенсивности электромагнитного взаимодействия. В курсе это вычисление будет воспроизведено из первых принципов. Приведенная формула является только первой поправкой, на сегодняшний день эта величина для электрона измерена с точностью до десятого знака после запятой.

Бесконечный провод с линейной плотностью электрического заряда λ

Поскольку тема содержит ряд нетривиальных идей и математических техник, которые необходимо освоить, материал будет введен постепенно. Для начала рассмотри пример бесконечный провод с некоторой линейной плотностью электрического заряда $\lambda = \frac{dq}{dx}$ (рис 1.1)[1].

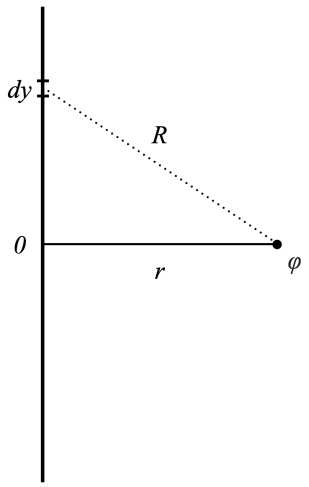


Рис. 1.1. Бесконечный провод с линейной плотностью электрического заряда λ.

[1] В видео-лекции допущена опечатка, корректный вариант: $\lambda = \frac{dq}{dx}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Вычислим напряженность электрического поля, создаваемую таким проводником на расстоянии r от него. Рассмотрим двумерную задачу. Из соображений симметрии компонента напряженности электрического поля, направленная вдоль оси y нулевая:

$$E_y = 0, \qquad E_x = E.$$

Выражение для напряженности распишем следующим образом:

$$E_x = -\frac{d}{dx}\varphi \cong -\frac{d}{dr}\varphi.$$

Способ 1

Запишем $\varphi(r)$ в виде интеграла:

$$\varphi(r) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dy}{R} = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + r^2}}.$$

Введем замену:

$$\begin{aligned} y &= r\,\mathrm{sh}\,t\,, \\ dy &= r\,\mathrm{ch}\,t\,dt, \\ y^2 + r^2 &= r^2(1 + \mathrm{sh}^2\,t) = r^2\,\mathrm{ch}^2\,t\,, \end{aligned}$$

тогда перепишем интеграл в виде

$$\varphi(r) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,\mathrm{ch}\,t\,dt}{r\,\mathrm{ch}\,t},$$

пределы интегрирования не изменяются, поскольку

$$y = \frac{r}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Так, после интегрирования получаем бесконечно большой ответ:

$$\varphi(r) = \lambda t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lambda \cdot 2\infty.$$

Таким образом, при вычислении потенциала для рассматриваемого случая, получено бесконечно большое фиксированное значение. При этом вспомним, что производная от фиксированного значения равна нулю. В результате таких вычислений был бы получен неверный ответ для напряженности электрического поля.

Способ 2

Рассмотрим теперь напряженность электрического поля, вычисляемую по формуле

$$E = -\frac{d}{dr}\varphi = -\frac{d}{dr}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dy}{\sqrt{y^2 + r^2}}.$$

Продифференцируем по r:

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{\sqrt{y^2+r^2}} = -\frac{1}{2}\frac{2r}{(y^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

тогда

$$E = -\frac{d}{dr}\varphi = \lambda r \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

При больших y^2 можно пренебречь r^2 в знаменателе, тогда подынтегральное выражение сводится к $\frac{dy}{y^3}$, что при интегрировании переходит в $\frac{1}{y^2}$ с точностью до коэффициента. На больших пределах $\frac{1}{y^2}$ обращается в ноль. Так, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$ сходится. Проделаем вычисление подробно, введем замену переменных:

$$\begin{aligned} y &= r\,tg\,t\,, \\ y^2+r^2 &= r^2(1+\mathrm{tg}^2\,t) = \frac{r^2}{\cos^2 t}, \\ dy &= r(\mathrm{tg}\,t)'dt = \frac{rdt}{\cos^2 t}, \end{aligned}$$

поскольку

$$(\mathrm{tg}\,t)' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \frac{\cos t}{\cos t} - \frac{-\sin t\cdot\sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Тогда интеграл примет следующий вид:

$$E = \lambda r \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{rdt}{\cos^2 t}\,\frac{\cos^3 t}{r^3} = \frac{\lambda}{r}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt\cos t = \frac{\lambda}{r}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\lambda}{r}.$$

Так, напряженность равна некоторой конечной величине, убывает с увеличением расстояния до провода.

Пример показывает, что в промежуточных вычислениях могут возникать бесконечности, но наблюдаемая величина при этом может оставаться конечной. Концептуально то же самое происходит в квантовой теории поля.

Случай с границами от -Λ до Λ

Рассмотрим ту же проблему на языке, близком к языку квантовой теории поля. Рассмотрим проводник с границами от $-\Lambda$ до Λ (рис. 1.2). Вычислим потенциал и напряженность электрического поля.

Запишем выражение для потенциала:

$$\varphi(r,\Lambda) = \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} dy\frac{\lambda}{\sqrt{y^2+r^2}},$$

введем замену $y = r\,\mathrm{sh}\,t$, тогда

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

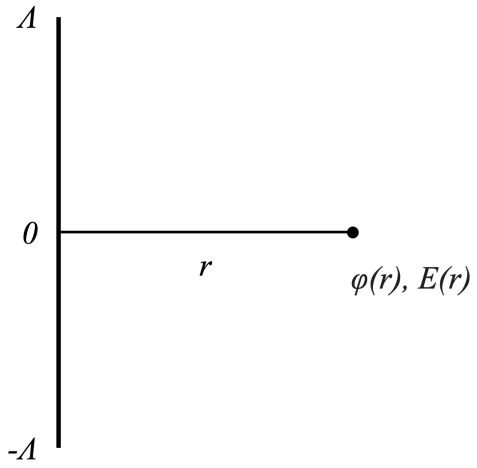


Рис. 1.2. проводник с границами $-\Lambda$ и Λ.

$$\varphi(r,\Lambda) = \lambda \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{dt\, r \operatorname{ch} t}{r \operatorname{ch} t} = \lambda(t_{max} - t_{min}).$$

Запишем выражение для t:

$$\frac{y}{r} = \operatorname{sh} t \rightarrow \quad t = arcsh\left(\frac{y}{r}\right) = \ln\left(\frac{y}{r} + \sqrt{\frac{y^2}{r} + 1}\right),$$

тогда

$$\varphi(r,\Lambda) = \lambda \ln \frac{\frac{\Lambda}{r} + \sqrt{\frac{\Lambda^2}{r} + 1}}{\frac{-\Lambda}{r} + \sqrt{\frac{(-\Lambda)^2}{r} + 1}} = \lambda \ln \frac{\sqrt{\Lambda^2 + r^2} + \Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + r^2} - \Lambda}.$$

Так, потенциал конечен при конечной величине Λ. В пределе при $\Lambda \to \infty$ получим

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \varphi(r,\Lambda) = \lambda \ln \frac{2\Lambda}{r^2/2\Lambda}\Big|_{\Lambda \to \infty}$$

поскольку при $\Lambda \gg r$ справедливо

$$\Lambda\left(1 + \frac{r^2}{\Lambda^2}\right) \approx \Lambda\left(1 + \frac{r^2}{2\Lambda^2} + \cdots\right) = \Lambda + \frac{r^2}{2\Lambda},$$

тогда

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \varphi(r,\Lambda) = \lambda \ln \frac{4\Lambda^2}{r^2}\Big|_{\Lambda \to \infty} = \infty.$$

В пределе для потенциала получен бесконечно большой ответ, однако для вычисления напряженности можно воспользоваться промежуточной формулой.

Распишем напряженность электрического поля:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$E(r,\Lambda) = -\frac{d}{dr}\varphi(r,\Lambda) = -\frac{d}{dr}\left(\lambda \ln\frac{4\Lambda^2}{r^2}\right) = -\lambda\frac{d}{dr}(\ln 4\Lambda^2 - \ln r^2),$$

так как

$$\frac{d}{dr}(\ln 4\Lambda^2) = 0,$$

то

$$E(r,\Lambda) = \lambda\frac{d}{dr}(\ln r^2) = 2\lambda\frac{d}{dr}(\ln r) = \frac{2\lambda}{r}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля при больших Λ не зависит от Λ. При вычислении наблюдаемой величины бесконечно большой логарифм исчезает при дифференцировании.

Алгоритм

В квантовой теории поля фигурируют более сложные математические объекты, однако принцип аналогичен. Общий алгоритм можно расписать следующим образом:

1. регуляризовать расходящиеся величины: $\varphi(r) \to \varphi(r,\Lambda)$,
2. вычислить наблюдаемую величину: $E(r,\Lambda) = -\frac{d}{dr}\varphi(r,\Lambda)$,
3. вычислить предел при регуляторе, стремящемся к бесконечности: $\Lambda \to \infty$.

После этих операций будет получена конечная наблюдаемая величина.

Стоит отметить, что алгоритм не работает для произвольной теории. Для случайной теории можно получить бесконечные значения, что будет свидетельствовать о расхождении рассматриваемой теории и эксперимента, поскольку все наблюдаемые величины конечны. Такую теорию можно считать неправильной.

Квантовая электродинамика, ренормировки в которой будут рассмотрены в курсе лекций, является ренормируемой теорией, в которой возможно регулярным образом избавиться от бесконечностей и получить конечные наблюдаемые величины. *Стандартная модель* также является ренормируемой теорией без внутренних противоречий, как и *квантовая хромодинамика*.

Разница потенциалов в двух разных точках

Итак, было показано, что в результате ренормировки можно получить конечную наблюдаемую величину. Разовьем эту идею, рассмотрим разность потенциалов двух точек, воспользуемся выражением, выведенным для $\Lambda \gg r$:

$$\varphi(r_1,\Lambda) - \varphi(r_2,\Lambda) = \lambda\big(\ln 4\Lambda^2 - 2\ln r_1 - (\ln 4\Lambda^2 - 2\ln r_2)\big),$$

параметр, который регуляризовал интеграл, сокращается:

$$\varphi(r_1,\Lambda) - \varphi(r_2,\Lambda) = 2\lambda\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Так, регуляризатор не влияет ни на наблюдаемую напряженность, ни на разность потенциалов. При этом разность потенциалов двух точек зависит от отношения $\frac{r_2}{r_1}$ и с точки зрения физики определяет работу, которую проделывает поле по перемещению заряда из точки r_1 в точку r_2. Работа также является наблюдаемой.

Полученный результат наталкивает на мысль зафиксировать потенциал на некотором расстоянии и рассматривать его в качестве точки отсчета. Тогда вместо абсолютного потенциала всегда будет вычислена разность потенциалов. Точку r_1 назовем параметром масштаба μ:

$$r_1 \equiv \mu,$$

и введем переобозначение:

$$r_2 = r.$$

Тогда

$$\varphi(\mu, \Lambda) - \varphi(r, \Lambda) = 2\lambda \ln\left(\frac{r}{\mu}\right),$$

несмотря на то, что потенциал в пределе бесконечный, при сколь угодно большой Λ такая разность оказывается конечной и делает возможными переходы между разными точками. Похожие уравнения будут встречаться в квантовой теории поля.

Недостатки

В предложенном подходе есть существенный недостаток. При обрезании интеграла до Λ и введении замены переменных необходимо внимательно следить за пределами интегрирования. Поэтому такой способ в современной квантовой теории поля практически не используется, а используется **метод размерной регуляризации**.

Кроме замены переменных в предложенном способе есть еще одна проблема. Если сдвинуть начало координат на величину a по оси y, тогда справедлива замена:

$$y => y + a.$$

При такой замене

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow \Lambda + a, \\ -\Lambda &\rightarrow -\Lambda + a, \end{aligned}$$

тогда для потенциала можно записать

$$(r, \Lambda) = \lambda \ln \frac{\sqrt{(\Lambda + a)^2 + r^2} + (\Lambda + a)}{\sqrt{(\Lambda + a)^2 + r^2} - (\Lambda - a)}.$$

При таком преобразовании была потеряна трансляционная инвариантность исходной задачи. Конкретно в этих вычислениях в результате зависимость от a исчезнет, однако если пользоваться этими приемами обрезания по импульсу в квантовой теории поля, то возникнет более глубокая проблема: выражения становятся неинвариантными при релятивистских преобразованиях. Так, необходимо найти способ регуляризации

подобных выражений инвариантным образом с сохранением релятивистской инвариантности и калибровочной инвариантности.

Лекция 2. Метод размерной регуляризации

Идея метода

Идея метода размерной регуляризации принадлежит т'Хофту и Вельтману, а также Джамбиаджи и Боллони. В современной литературе метод зачастую связывают с именами т'Хофта и Вельтмана, получившим нобелевскую премию за доказательство ренормируемости Стандартной модели. Они предложили рассматривать интегралы, которые изначально в квантовой теории поля записываются для четырехмерного пространства-времени, в d-мерном пространстве. Интересно, что *d может быть нецелым числом*.

Применим эту идею для одномерного проводника, заряженного с электрической плотностью λ. Для этого заменим интегрирование по dx заменим интегрированием по одномерному объему, а следующим шагом перейдем в d-мерное пространство:

$$\int dx \to \int dV_1 \to \int dV_d,$$

где $d = 1 + \varepsilon$, ε – бесконечно мало отличающийся от нуля параметр. Оказывается, такой подход сохраняет все интересные для квантовой теории поля симметрии - калибровочную симметрию и симметрию относительно преобразований Лоренца. И то, что было получено обычным методом с конечными пределами, устремленными к бесконечности, в виде логарифмической расходимости сменится расходимостью в виде полюса в методе размерной регуляризации:

$$\ln \Lambda \to \frac{1}{\varepsilon}.$$

Далее принцип действий аналогичен алгоритму, приведенному в предыдущей лекции. По методу регуляризации следует зафиксировать промежуточную вычисляемую величину на некотором масштабе $r = \mu$, после чего в результате математических преобразований $\frac{1}{\varepsilon}$ сократится. Для проведения дальнейших вычислений следует вспомнить Г- и B-функции.

Г-*функция*

Первым шагом распишем элементарный объем:

$$\begin{aligned} dV_1 &= dx = dr, \\ dV_2 &= dxdy = rdrd\varphi = rdrd\Omega_2, \\ dV_3 &= dxdydz = r^2 dr \sin\theta \, d\theta d\varphi = r^2 drd\Omega_3, \end{aligned}$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла, обобщим записанное на случай произвольного d-мерного пространства в виде следующей формулы:

$$dV_d = r^{d-1} drd\Omega_d.$$

Элемент телесного угла может быть найден из первых принципов, однако проведем вычисления наиболее быстрым образом. Запишем гауссов интеграл:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

если таких интегралов *d* штук, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - x_2^2 - \dots - x_d^2} dx_1 dx_2 \dots dx_d = \sqrt{\pi}^d = \pi^{\frac{d}{2}}.$$

Определим интеграл в *d*-мерном пространстве:

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_d^2 \\ \vec{r} &= r(n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_d}) \rightarrow \\ dV_d &= dx_1 dx_2 \dots dx_d \end{aligned}$$

$$\int_{V_d} e^{-r^2} dV_d = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{d-1} dr \int d\Omega_d.$$

Поскольку экспонента зависит только от квадрата радиус-вектора и не зависит от углов, поэтому

$$\int d\Omega_d = \Omega_d,$$

то есть полный телесный угол, величина, которая и необходима на практике. Преобразуем интеграл от экспоненты:

$$\int_{V_d} e^{-r^2} dV_d = \frac{\Omega_d}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \frac{r^{d-1}}{r} dr^2,$$

введем замену переменных:

$$t = r^2,$$

тогда

$$\frac{\Omega_d}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \frac{r^{d-1}}{r} dr^2 = \frac{\Omega_d}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{d}{2}-1} dt.$$

Интегралы такого типа хорошо изучены математиками и представляют собой Γ-функции:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt\, t^{z-1} e^{-t},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

причем функция $\Gamma(z)$ определена для $Re(z) > 0$[2]. Аналогично переходу к пространству с нецелой размерностью можно обобщить факториалы на нецелые числа. Так, для интеграла можно записать ответ

$$\frac{\Omega_d}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{d}{2}-1}dt = \frac{\Omega_d}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right).$$

Для Г-функции можно ввести обобщение:

$$\Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z).$$

Выведем итоговую формулу для полного телесного угла:

$$\begin{aligned}\frac{\Omega_d}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) &= \pi^{\frac{d}{2}} \quad \rightarrow \\ \Omega_d &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Рассмотрим несколько примеров, чтобы ответить на вопрос, чему равен телесный угол, например, в четырехмерном пространстве.

Пример с n=1

Запишем формула для $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, где n – целое число:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

например, при $n = 5$:

$$(n-2)!! = 3!! = 1\cdot 3,$$

при этом для $\Gamma(n)$ справедливо следующее:

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Пусть $n = 1$, вычислим Ω_1:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}/2^0} = 2,$$

поскольку $(-1)!! = 1$. Интуитивно можно представить, что есть направление вдоль оси направо, и направление вдоль оси налево, полный телесный угол учитывает оба направления.

Примеры с n=2, 3, 4

Пусть $n = 2$, вычислим Ω_2:

[2] В видео-лекции допущена ошибка, формула $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1}e^{-t}$ справедлива только для $Re(z) > 0$. Не существует аналитического продолжения на всю комплексную плоскость.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\Omega_2 = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = \frac{2\pi}{0!} = 2\pi.$$

Пусть $n = 3$, вычислим Ω_3:

$$\Omega_3 = \frac{2\pi}{\Gamma(3/2)} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}/2} = 4\pi.$$

Рассмотрим теперь новый случай, пусть $n = 4$, вычислим Ω_4:

$$\Omega_3 = \frac{2\pi}{\Gamma(2)} = \frac{2\pi^2}{1!} = 2\pi^2.$$

Метод размерной регуляризации

Зная, как вычисляется телесный угол, проведем вычисления для провода с зарядом методом размерной регуляризации. Запишем потенциал в одномерном случае:

$$\varphi(r) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r^2}},$$

перейдем к *d*-мерному пространству произвольной размерности:

$$\varphi(r) = \lambda \frac{1}{\mu^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV_d}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \lambda \frac{1}{\mu^{d-1}} \int_0^{\infty} \frac{dx\, x^{d-1} d\Omega_d}{\sqrt{x^2 + r^2}},$$

где теперь

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_d), \\ x &= |\vec{x}|(n_1, n_2, \dots, n_d), \end{aligned}$$

μ – размерный параметр, введенный для сохранения размерности интеграла, для которого справедливо следующее:

$$[\mu] = [x].$$

Сведем записанный интеграл к табличному в виде B-функции. Заметим, что в подынтегральной функции нет зависимости от углов:

$$\varphi(r) = \lambda \Omega_{\mathrm{d}} \frac{1}{\mu^{d-1}} \int_0^{\infty} \frac{dx\, x^{d-1}}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Введем замену переменных:

$$y = \frac{x}{r}, \qquad dy = \frac{dx}{r},$$

тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{dx\, x^{d-1}}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \int_0^{\infty} \frac{dy \cdot r\, (yr)^{d-1}}{\sqrt{y^2 r^2 + r^2}} = \frac{r^d}{r} \int_0^{\infty} \frac{dy\, y^{d-1}}{\sqrt{y^2 + 1}}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Потенциал может быть переписан в следующем виде:

$$\varphi(r) = \lambda\Omega_d \left(\frac{r}{\mu}\right)^{d-1} \int\limits_0^\infty \frac{dy\, y^{d-1}}{\sqrt{y^2+1}},$$

где $\frac{r}{\mu}$ и y безразмерны. Для сведения интеграла к B-функции введем еще две замены:

1) $y^2 = u,\ du = 2ydy \rightarrow\ y = u^{\frac{1}{2}}$, тогда

$$\int\limits_0^\infty \frac{dy\, y^{d-1}}{\sqrt{y^2+1}} = \int\limits_0^\infty \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}} \frac{\left(u^{\frac{1}{2}}\right)^{d-1}}{\sqrt{u+1}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{du\, u^{\frac{d-2}{2}}}{\sqrt{u+1}},$$

так как

$$\frac{\left(u^{\frac{1}{2}}\right)^{d-1}}{u^{\frac{1}{2}}} = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)^{d-2} = u^{\frac{d-2}{2}};$$

2) $u = \frac{z}{1-z}$, тогда

$$du = \frac{dz}{1-z} - \frac{(-1)z\, dz}{(1-z)^2} = \frac{dz}{(1-z)^2}[1-z+z] = \frac{dz}{(1-z)^2};$$

выразим z:

$$u(1-z) = z\ \rightarrow\ u = z(1+u) \rightarrow$$
$$z = \frac{u}{1+u},$$

следовательно, можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned} 1-z &= 1 - \frac{u}{1+u} = \frac{1+u-u}{1+u} = \frac{1}{1+u}, \\ \frac{1}{(1-z)^2} &= (1+u)^2; \end{aligned}$$

выразим теперь dz:

$$dz = du\,(1-z)^2 = \frac{du}{(1+u)^2};$$

подставим замены в подынтегральные выражения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{du\, u^{\frac{d-2}{2}}}{\sqrt{u+1}} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dz}{(1-z)^2} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{d-2}{2}} (1-z)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dz\, z^{\frac{d-2}{2}} (1-z)^{-2-\frac{d-2}{2}+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dz\, z^{\frac{d-2}{2}} (1-z)^{-\frac{d+1}{2}}. \end{aligned}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

B-функция

Интеграл вида

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dz\, z^{\frac{d-2}{2}}(1-z)^{-\frac{d+1}{2}}$$

представляет собой B-функцию:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dz\, z^{\frac{d-2}{2}}(1-z)^{-\frac{d+1}{2}} = \frac{1}{2}B\left(\frac{d}{2},\frac{1-d}{2}\right).$$

B-функция будет играть немалую роль и в дальнейшем, к ней сводятся интегралы Фейнмана. Кроме того, B-функцию можно перевыразить через Г-функцию, введенную ранее:

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{d}{2},\frac{1-d}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right).$$

Запишем выражение для потенциала через Г-функции:

$$\varphi(r) = \lambda\Omega_d\left(\frac{r}{\mu}\right)^{d-1}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right) = \lambda\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\left(\frac{r}{\mu}\right)^{d-1}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right) =$$

$$= \lambda\pi^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{r}{\mu}\right)^{d-1}\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right) = \lambda\left(\frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}\right)^{d-1}\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right).^{3}$$

Итак, методом размерной регуляризации получен ответ для потенциала.

Случай с d=1+ε, ε→0

Вычислим в явном виде $\varphi(r)$ при $d = 1+\varepsilon$, когда размерность пространства отличается от единицы на малую величину:

$$\varphi(r) = \lambda\left(\frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}\right)^{d-1}\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right).$$

Распишем a^{d-1} при $d = 1+\varepsilon, \varepsilon \to 0$

$$a^{d-1} = a^{\varepsilon},$$

где $a = \frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}$. Воспользуемся разложением степенной функции в ряд Тейлора:

$$a^x = a^0 + (a^x)^1_{x=0} + x + \cdots,$$

Пусть $y = a^x$, тогда

$$\ln y = \ln a^x = x\ln a.$$

[3] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $\lambda\left(\frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}\right)^{d-1}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Продифференцируем полученное равенство по x:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}(x \ln a) \to \\ \frac{y'}{y} &= \ln a \to \\ y' &= y \ln a\,. \end{aligned}$$

Тогда для a^x можно записать следующее:

$$a^x = 1 + a^x \ln a \Big|_{x=0} \cdot x + \cdots = 1 + x \cdot \ln a,$$

тогда

$$a^{d-1} = a^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon \ln a + \cdots,$$

то есть

$$\left(\frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}\right)^{d-1} = 1 + \varepsilon \ln\left(\frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}\right) + \cdots.$$

Распишем теперь $\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Воспользуемся разложением Г-функции при малом аргументе:

$$\Gamma(1+t) = t\Gamma(t),$$

при $t \ll 1$

$$\Gamma(1+t) \approx 1 - t\gamma + \cdots,$$

где γ – константа Эйлера, численно $\gamma = 0{,}5772$. Тогда для исходной функции можно записать

$$\frac{\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{-\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}\gamma + \cdots}{-\frac{\varepsilon}{2}} = -\frac{2}{\varepsilon} + \gamma + \cdots,$$

то есть

$$\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right) = -\frac{2}{\varepsilon} + \gamma + \cdots.$$

Расходимость в методе размерной регуляризации появляется не в виде логарифмической расходимости, а в виде полюса $\frac{1}{\varepsilon}$, где ε – малая разница между размерностью d и 1.

Завершим вычисление для потенциала:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(r) &= \lambda\left(1+\varepsilon\ln\left(\frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}\right)\right)\left(-\frac{2}{\varepsilon}+\gamma\right)= \\ &= -\frac{2\lambda}{\varepsilon}-2\lambda\ln\left(\frac{r}{\mu}\right)-2\lambda\ln\sqrt{\pi}+\lambda\gamma+\gamma\varepsilon\lambda\ln\left(\frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}\right)+\cdots.\end{aligned}$$

В пределе $\varepsilon \to 0$

$$\gamma\varepsilon\lambda\ln\left(\frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}\right)\to 0,$$

выражения $2\lambda\ln\sqrt{\pi}$ и $\lambda\gamma$ являются константами. Второе слагаемое является потенциалом, который необходимо вычислить. Первое слагаемое представляет собой расходимость. Здесь заканчивается метод размерной регуляризации. При вычислениях в квантовой теории поля выкладки будут аналогичными, но для $d = 4$.

Вычисление разности потенциалов и напряженности электрического поля

Вычислим разность потенциалов, которая определяет работу, затрачиваемую полем для перемещения заряда:

$$\varphi_\varepsilon(r_1)-\varphi_\varepsilon(r_2)=-2\lambda\ln\left(\frac{r_1}{\mu}\right)+-2\lambda\ln\left(\frac{r_2}{\mu}\right)=-2\lambda\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right).$$

Так, физически наблюдаемая величина, работа, не зависит ни от параметра μ, введенного для сохранения размерности, ни от параметра ε, регуляризующего расходящийся интеграл.

Запишем также выражение для напряженности электрического поля:

$$E=-\frac{d}{dr}\varphi_\varepsilon(r)=\frac{2\lambda}{r}.$$

Так, получен такой же ответ, какой был получен ранее другим методом. Предложенный способ сохраняет все симметрии, при этом является достаточно общим и простым.

Схемы вычитания $\boldsymbol{MS}$ и $\boldsymbol{\overline{MS}}$

На этом же примере можно разобрать еще две схемы вычитания, применяемые в квантовой теории поля. Если продолжать говорить о потенциалах, то физически наблюдаемая величина всегда зависит от разности потенциалов. Эта идея используется в ренормировках – промежуточные вычисления не являются наблюдаемыми, поэтому из потенциала можно вычесть некоторую константу, после чего потенциал станет конечным:

$$\varphi_\varepsilon(r)\to\varphi_\varepsilon(r)+\frac{2\lambda}{\varepsilon}=-2\lambda\ln\left(\frac{r}{\mu}\right)-\lambda(\ln\pi+\gamma).$$

Такое добавление некоторой константы к потенциалу в литературе обозначается как MS (Minimal Subtraction).

Чаще встречается другое обозначение. Вклад в наблюдаемую величину вносят только слагаемые, зависящие от r, поэтому остальные константы тоже могут быть отброшены:

$$\varphi_\varepsilon(r) \to \varphi_\varepsilon(r) + \frac{2\lambda}{\varepsilon} + \lambda(\ln\pi + \gamma) = -2\lambda \ln\left(\frac{r}{\mu}\right).$$

Такое вычитание называется $\overline{MS}$.

Ренормгруппа

На основе примера с проводником введем еще одно важнейшее понятие – **ренормгруппа**. Явным образом было показано, что если рассмотреть разницу потенциалов $\Delta\varphi_\varepsilon(r)$ или напряженность электрического поля $E(r) = -\frac{\partial}{\partial r}\varphi_\varepsilon(r,\mu)$, то видно, что эти величины не зависят от ε и μ. Это значит

$$\frac{\partial E}{\partial \ln\mu} = 0 \to \frac{\partial}{\partial \ln\mu}\frac{\partial}{\partial r}\varphi_\varepsilon(r,\mu) = 0,$$

что можно интерпретировать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\,\varphi_\varepsilon(r,\mu)}{\partial \ln\mu}\right) = 0,$$

то есть $\frac{\partial\,\varphi_\varepsilon(r,\mu)}{\partial \ln\mu}$ не зависит от r:

$$\frac{\partial\,\varphi_\varepsilon(r,\mu)}{\partial \ln\mu} = \beta(\mu).$$

Записанное уравнение является **уравнением ренормгруппы**, определяет, как меняется потенциал с изменением масштаба μ, функция $\beta(\mu)$ – **генератор ренормгруппы**.

Для провода с зарядом можно записать

$$\varphi_\varepsilon(r,\mu) = -\frac{2\lambda}{\varepsilon} - 2\lambda\ln\left(\frac{r}{\mu}\right) + C \to$$

$$\frac{\partial\,\varphi_\varepsilon(r,\mu)}{\partial \ln\mu} = 2\lambda = \beta(\mu).$$

Действительно, полученная функция $\beta(\mu)$ не зависит от r, однако в данном конкретном случае она не зависит и от μ, поскольку пример простой.

Решим записанное уравнение:

$$\int_{\ln\mu_1}^{\ln\mu_2} d\ln\mu\ \frac{\partial\,\varphi_\varepsilon(r,\mu)}{\partial\ln\mu} = \int_{\ln\mu_1}^{\ln\mu_2} 2\lambda\, d\ln\mu \to$$

$$\varphi_\varepsilon(r,\mu_2) - \varphi_\varepsilon(r,\mu_1) = 2\lambda(\ln\mu_2 - \ln\mu_1) = 2\lambda\ln\frac{\mu_2}{\mu_1} \to$$

$$\varphi_\varepsilon(r,\mu_2) = \varphi_\varepsilon(r,\mu_1) + 2\lambda\ln\frac{\mu_2}{\mu_1}.$$ [4]

Это решение ренормгруппового уравнения показывает, как изменяется потенциал при переходе от логарифма, зафиксированного в точке μ_1, к логарифму, зафиксированному в точке μ_2.

Группа – математический аппарат, который описывает преобразование некоторых элементов, не меняющих эти элементы, но обладающее рядом свойств. Например, повороты сторон кубика Рубика оставляют кубик единым объектом, поэтому повороты сторон образуют группу. Или в качестве группы может быть рассмотрено вращение спинора в трехмерном пространстве. Для того, чтобы полностью описать все, что может произойти с элементами группы, необходимо знать *генераторы групп*, то, что определяет изменения групповых элементов. β-функция является генератором, зная ее можно определит эволюцию величины с элементами группы. В рассматриваемом случае параметр $\ln\mu$ входит в группу. В приведенном примере вычисления могут быть проведены без использования ренормгруппы, поскольку задача решается точно. При переходе к квантовой теории поля вычисления возможно будет проводить только порядок за порядком, поэтому ренормгрупповое уравнение становится крайне важным. Несмотря на то, что при вычислении процессов в квантовой теории β-функцию можно будет вычислить только приблизительно в виде разложения в ряд, но даже в таком варианте пропадает необходимость вычислять большое число диаграмм Фейнмана для получения ответа.

[4] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $\varphi_\varepsilon(r,\mu_2)$ и $\varphi_\varepsilon(r,\mu_1)$.

Лекция 3. Ренормировка без тумана

Упрощенная модель

Рассмотрим упрощенную модель, на которой будут отработаны новые механизмы ренормировки. Пусть есть некоторая величина $F(x)$, где x не координата, а, например, квадрат импульса или другая Лоренц-инвариантная величина. $F(x)$ не может быть вычислена точно, как в предыдущей лекции для проводника с линейной плотностью заряда. $F(x)$ может быть найдена только в виде разложения в асимптотический ряд[5]:

$$F(x) = g_0 + g_0^2 F_1(x) + g_0^3 F_2(x) + \cdots.$$

Аналогичные ряды по константе взаимодействия встречаются в квантовой теории поля. В квантовой электродинамике в роли g_0 мог бы выступать электрический заряд, однако, как будет показано, электрический заряд и масса во внутренне непротиворечивой квантовой теории поля обязаны сами зависеть от масштаба, на котором они фиксированы. Поэтому пусть g_0 – затравочная константа. $F_1(x)$, $F_2(x)$ и так далее – это кинематические функции, результаты вычисления соответствующего порядка по теории возмущений. Несмотря на то, что функция $F(x)$ может быть сравнена с экспериментом и должна быть конечной, $F_1(x)$, $F_2(x)$ и так далее в действительности расходятся, притом их сумма такого бесконечного ряда оказывается конечной. Современные теоретические расчеты заканчиваются на уровне 4-5 петли.

Для избавления от бесконечностей существует процедура ренормировки, первая упрощенная версия которой была введена в прошлой лекции. Применим теперь процедуру ренормировки к случаю, более близкому к квантовой теории поля.

$F(x)$ может быть измерена для некоторого значения $x = \mu$. Зафиксируем

$$F(\mu) = g,$$

где g – конечная величина, также как и весь ряд. Идея, которая будет реализована в ходе лекции заключается в следующем: порядок за порядком будем перевыражать g_0 через g и значение функции $F(\mu)$ в точке μ.

Алгоритм: регуляризация, ренормировка, избавление от регурятора

Алгоритм можно записать следующим образом:

1) Регуляризация: необходимо сделать все функции конечными, как в случае заряженного проводника, введем замену
$$F_i(x) \to F_i(x, \Lambda),$$
где Λ – регулятор.
2) Ренормировка: аналог процедуры вычитания, примененной в предыдущем примере, запишем константу g_0 в виде ряда

[5] В лекции ошибочно утверждается, что используется разложение в ряд Тейлора, однако это разложение в асимптотический ряд.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$g_0 = z_1 g + z_2 g^2 + z_3 g^3 + \cdots,$$

где g – конечная величина, а g_0 будет расходиться при $\Lambda \to \infty$.

3) Избавление от регулятора: перепишем функцию в виде предела

$$\begin{aligned} F(x,\mu) &= \lim_{\Lambda\to\infty} F(x, g(\mu), \Lambda), \\ F(x, g(\mu), \Lambda) &= g_0 + g_0^2 F_1(x,\Lambda) + g_0^3 F_2(x,\Lambda) + \cdots, \end{aligned}$$

где g_0 перевыражено через g.

Если величина $F(x,\mu)$ оказывается конечной, то теория ренормируем. Заранее неизвестно, как ведет себя теория. Так, например, создатели Стандартной модели не смогли доказать, что теория ренормируема. Ренормируемость Стандартной модели показали т'Хофт и Вельтман, что являлось достаточно сложной задачей.

В рассматриваемом упрощенном примере рассмотрена теория с одной единственной функцией, выраженной в виде ряда. Реальная теория, как правило, записывается в виде Лагранжиана, позволяющего вычислять множество разнообразных процессов. В действительности нет необходимости вычислять каждый процесс, реализовать введенный алгоритм и показывать, что сечение каждого процесса конечно. В квантовой теории поля, например, выделяется некоторый класс величин, за которыми следует наблюдать. Если эти величины оказываются конечными, то можно показать, что любые процессы в теории оказываются конечными.

Ренормировка в разных порядках теории возмущений

Перейдем к постепенному усложнению задачи, проведем последовательно ренормировку для порядков теории возмущений. Порядок теории возмущений будем указывать сверху следующим образом:

$$F^{(i)},$$

где i – порядок по константе g, в котором ведется ренормировка теории.

Распишем в общем случае $F(x,\Lambda)$:

$$\begin{aligned} F(x,\Lambda) &= (z_1 g + z_2 g^2 + z_3 g^3 + \cdots) + (z_1 g + z_2 g^2 + z_3 g^3 + \cdots)^2 F_1(x,\Lambda) + \\ &+ (z_1 g + z_2 g^2 + z_3 g^3 + \cdots)^3 F_2(x,\Lambda) + \cdots \end{aligned}$$

Зафиксируем $x = \mu$, тогда

$$\begin{aligned} F(\mu,\Lambda) = g &= (z_1 g + z_2 g^2 + z_3 g^3 + \cdots) + (z_1 g + z_2 g^2 + z_3 g^3 + \cdots)^2 F_1(\mu,\Lambda) + \\ &+ (z_1 g + z_2 g^2 + z_3 g^3 + \cdots)^3 F_2(\mu,\Lambda) + \cdots \end{aligned}$$

Обратим внимание, что слева стоит функция в первом порядке по g, в правой части второе слагаемое обладает вторым порядком, третье третьим и так далее. Так, из всего ряда в первом порядке сработает единственный элемент:

$$F^{(1)}(\mu,\Lambda) = g = z_1 g.$$

Отсюда следует

$$z_1 = 1.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Для второго порядка справедливо

$$F^{(2)}(\mu,\Lambda) = g = g + z_2 g^2 + g^2 F_1(\mu,\Lambda).$$

Это уравнение позволяет вычислить z_2:

$$z_2 = -F_1(\mu,\Lambda).$$

Действуя аналогично, можно вычислить z_3, z_4 и так далее до любого интересующего порядка. В третьем порядке:

$$F^{(3)}(\mu,\Lambda) = g = g - g^2 F_1(\mu,\Lambda) + z_3 g^3 + [g^2 - 2F_1(\mu,\Lambda)g^3]F_1(\mu,\Lambda) + g^3 F_2(\mu,\Lambda),$$

сгруппируем слагаемые по степеням g:

$$\begin{aligned} g^2[-F_1(\mu,\Lambda) + F_1(\mu,\Lambda)] + g^3[z_3 - 2F_1^2(\mu,\Lambda) + F_2(\mu,\Lambda)] &= 0 \to \\ g^3[z_3 - 2F_1^2(\mu,\Lambda) + F_2(\mu,\Lambda)] &= 0 \to \\ z_3 &= 2F_1^2(\mu,\Lambda) - F_2(\mu,\Lambda). \end{aligned}$$

Так, прослеживается структура ряда: коэффициент z_1 не зависел ни от каких функций, коэффициент z_2 содержит $F_1(\mu,\Lambda)$ из второго порядка, z_3 содержит и $F_1(\mu,\Lambda)$, и $F_2(\mu,\Lambda)$ из второго и третьего порядков. Переходя к более высоким порядкам, будем получать выражения, содержащие функции из всех предыдущих порядков.

Итак, найдены коэффициенты для первых трех порядков. Перейдем к третьему пункту алгоритма, найдем $F(x,\Lambda)$:

$$\begin{aligned} F(x,\mu) &= \lim_{\Lambda\to\infty} \big[g - F_1(\mu,\Lambda)g^2 + \big(2F_1^2(\mu,\Lambda) - F_2(\mu,\Lambda)\big)g^3 + \\ &\quad + \big(g^2 + 2\big(-F_1(\mu,\Lambda)\big)g^3\big)F_1(x\,,\Lambda) + \mathrm{g}^3 F_2(x,\Lambda)\big] = \\ &= \lim_{\Lambda\to\infty} [g + g^2\{F_1(x\,,\Lambda) + F_1(\mu,\Lambda)\} + \\ &\quad + g^3\{2F_1^2(\mu,\Lambda) - F_2(\mu,\Lambda) - 2F_1(\mu,\Lambda)F_1(x\,,\Lambda) + F_2(x,\Lambda)\}]^{6}. \end{aligned}$$

Записанное выражение справедливо до третьего порядка по g. Преобразуем коэффициент перед g^3:

$$\begin{aligned} 2F_1^2(\mu,\Lambda) - F_2(\mu,\Lambda) - 2F_1(\mu,\Lambda)F_1(x\,,\Lambda) + F_2(x,\Lambda) = \\ = 2F_1(\mu,\Lambda)[F_1(\mu,\Lambda) - F_1(x,\Lambda)] + F_2(x,\Lambda) - F_2(\mu,\Lambda). \end{aligned}$$

Исходный ряд, который выражался в виде ряда по константе g_0 и функциям $F_1(x)$, $F_2(x)$ и так далее, суммировался в конечное число по гипотезе о том, что функция $F(x)$ соответствует наблюдаемой величине и должна быть конечной. При этом ряд устроен так, что каждое из слагаемых, является расходящейся величиной. Даже в примере с заряженным проводом, относящимся к школьной физике, возникают расходимости. Тем не менее, поскольку итоговая сумма конечна, возможно перевыразить все имеющиеся параметры, а именно g_0 через конечную величину g порядок за порядком. Если процедура удается, то можно ожидать, что в записи (x,μ) коэффициент перед, например, g^2 будет конечной функцией в пределе $\Lambda \to \infty$, также можно ожидать и конечности

[6] В видео-лекции допущена ошибка, пропущен коэффициент 2 перед произведением $F_1(\mu,\Lambda)F_1(x\,,\Lambda)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

коэффициента перед g^3 и далее. Это справедливо для ренормируемой фундаментальной теории, поскольку коэффициенты не случайны, а диктуются исходным Лагранжианом.

Пример

В качестве примера рассмотрим функцию, часто встречающуюся в диаграммах Фейнмана:

$$F_1(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t+x},$$

при $t \to \infty$ такая функция, очевидно, логарифмически расходится:

$$F_1(x) = \ln(t+x)\Big|_0^\infty = \infty.$$

При введении параметра обрезания Λ функция принимает вид

$$F_1(x,\Lambda) = \int_0^\Lambda \frac{dt}{t+x} = \ln(t+x)\Big|_0^\Lambda = \ln\frac{\Lambda+x}{x} \approx \ln\frac{\Lambda}{x} \text{ при } \Lambda \gg x.$$

Вычислим $F_1(x,\Lambda) - F_1(\mu,\Lambda)$:

$$F_1(x,\Lambda) - F_1(\mu,\Lambda) = \ln\frac{\Lambda}{x} - \ln\frac{\Lambda}{\mu} = \ln\frac{\mu}{x},$$

так, разность, фигурирующая в качестве коэффициента перед g^2 в записи функции $F(x,\mu)$ является конечной величиной.

Ренормгруппа

Итак, изначальная функция $F(x)$ выражалась в виде ряда по степеням ряда g_0 и функций $F_i(x)$. Функции $F_i(x)$ оказались расходящимися, при этом по гипотезе $F(x)$ конечно, поскольку может быть измерена экспериментально. Функция была переписана в виде ряда по конечной константе g. Коэффициенты перед g в степени представляют собой полиномы из функций $F_i(x)$, такие полиномы также должны быть конечными.

Вспомним, что g_0 был расходящимся параметром, поскольку

$$g_0 = z_1 g + z_2 g^2 + \cdots = g - F_1(\mu,\Lambda)g^2 + \cdots,$$

в то время как

$$\lim_{\Lambda\to\infty} F_1(\mu,\Lambda) = \infty \to$$
$$g_0 \to \infty.$$

До сих пор действия были алгоритмическими. Вернемся на шаг назад и определим, что происходит с физической точки зрения. Хотя параметр g_0 был записан не как электрический заряд, а как некоторая константа, в квантовой электродинамике возникнет полное соответствие тому, что было проделано в ходе этой лекции, а роль g_0

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

будет играть электрический заряд. И этот заряд оказывается бесконечно большим, но при этом выражается через конечный заряд электрона в виде ряда. В результате вся теория оказывается конечной.

Рассмотрим ситуацию с другой стороны. Теория был ренормирована путем определения на некотором масштабе μ константы g. Тогда масштабу μ' соответствует константа g'. Аналогично может быть введена и третья пара чисел g'', μ''. Так, теория может быть параметризована любой из пар чисел и при этом все три варианта будут описывать одну и ту же теорию и возможно реализовать переходы между парами точек как последовательно

$$(g, \mu) \to (g', \mu') \to (g'', \mu''),$$

так и напрямую

$$(g, \mu) \to (g'', \mu'').$$

Такая картина является утверждением о том, что пара чисел составляет группу преобразований. Следует обратить внимание на то, что изначальная теория зависела от единственного параметра g_0, параметризованная теория зависит от двух параметров, число степеней свободы стало избыточным. Избыточность компенсируется тем, что можно найти бесконечное число таких пар чисел и переходить между этими парами за счет группового преобразования.

Прежде чем записать уравнение, которое стоит за преобразованием, рассмотрим пользу, которую принесет обнаружение такого уравнения, с практической точки зрения. Рассмотрим пример:

$$F_1(x) = \alpha \int_0^\infty \frac{dt}{t + x},$$

где α – константа. Из такого определения следует

$$F_1(x, \Lambda) = \alpha \ln \frac{\Lambda}{x} \quad \text{при} \quad \Lambda \gg x.$$

Запишем ряд до второго порядка двумя альтернативными способами:

1) $F(x, \Lambda) = g_0 + g_0^2 F_1(x, \Lambda) + \cdots$
2) при $x = \mu$: $g = F(\mu, \Lambda) = \lim\limits_{\Lambda \to \infty} \left(g_0 + g_0^2 \alpha \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \cdots \right)$,
   при $x = \mu'$: $g' = F(\mu', \Lambda) = \lim\limits_{\Lambda \to \infty} \left(g_0 + g_0^2 \alpha \ln \frac{\Lambda}{\mu'} + \cdots \right)$,
   исключим из полученной системы g_0 и получим зависимость $g' = f(g)$, вычтем из второго уравнения первое:
   $$g' - g = g_0^2 \alpha \ln \frac{\mu}{\mu'} = g^2 \alpha \ln \frac{\mu}{\mu'} + o(g^3),$$
   так, найдена связь между парами констант (g', μ') и (g, μ) во втором порядке теории возмущений:

$$g' = g + g^2\alpha \ln\frac{\mu}{\mu'}.$$

В третьем порядке теории возмущений и далее прямым способом получить подобные соотношения становится затруднительно. Ренормгруппа позволяет найти связь между парами параметров в общем виде.

Уравнение ренормгруппы

Найдем уравнение ренормгруппы для рассматриваемого примера и решим его. Предположим, что

$$g' = f\left(g, \ln\frac{\mu}{\mu'}\right),$$

причем при $\mu' = \mu$: $g' = g$. Отсюда следует

$$f(g, 0) = g.$$

Опишем переходы между парами точек в виде уравнений:

$$g'' = f\left(g, \ln\frac{\mu}{\mu''}\right) = f\left(g', \ln\frac{\mu'}{\mu''}\right) = f\left(f\left(g, \ln\frac{\mu}{\mu'}\right), \ln\frac{\mu'}{\mu''}\right),$$

то есть

$$f\left(g, \ln\frac{\mu}{\mu''}\right) = f\left(f\left(g, \ln\frac{\mu}{\mu'}\right), \ln\frac{\mu'}{\mu''}\right).$$

Записанное уравнение является **уравнением ренормгруппы**. Решение уравнения ренормгруппы позволит найти связь между парами точек без вычислений порядок за порядком.

Генератор группы

Разберем такое понятие как **генератор группы**. Пусть есть некоторая группа G, зависящая от параметра θ, если параметр равен нулю, то

$$G(\theta) = I,$$

где I – единичный оператор. В случае малости параметра, группу можно разложить в ряд:

$$G(\theta) = I + \delta\theta \cdot T,$$

где T – генератор, генерирующий соответствующее преобразование, T может быть как единичным параметром, так и вектором из параметров. Также при малом θ группу можно записать в виде ряда Тейлора:

$$G(\theta) = I + \delta\theta \cdot \frac{dG}{d\theta}\Big|_{\theta = 0}.$$

Поэтому генератор группы может быть определен следующим образом:

$$T = \frac{dG}{d\theta}\Big|_{\theta = 0}.$$

В рассматриваемом примере фигурирует параметр $\ln\mu$, пусть этот параметр варьируется на бесконечно малую величину:

$$\ln\mu \to \ln\mu + \delta\ln\mu.$$

При таких изменениях для константы g реализуется переход:

$$g \to g' = f(g, \delta\ln\mu) = f(g,0) + \frac{\partial f}{\partial\ln\mu}\delta\ln\mu,$$

где

$$\begin{aligned} f(g,0) &= g, \\ \left.\frac{\partial f}{\partial\ln\mu}\right|_{\ln\mu=0} \cdot \delta\ln\mu &\equiv \beta(g,\ln\mu), \end{aligned}$$

Если сравнить полученное выражение с самым общим определением генератора группы, то видно, что β-функция и является генератором группы:

$$T = \beta(g,\ln\mu).$$

Так, β-функция играет фундаментальную роль в определении группы, поскольку, зная, как выполнить бесконечно малое преобразование, можно перейти к сколь угодно большому преобразованию.

Вспомним формулу, связывающую g' и g во втором порядке:

$$g' = g + g^2\alpha\ln\frac{\mu}{\mu'} = f\left(g, \ln\frac{\mu}{\mu'}\right)$$

тогда β-функция во втором порядке

$$\beta = \alpha g^2.$$

Несмотря на то, что β-функция вычислена только для второго порядка, теперь можно решить уравнение для произвольного порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\ln\mu} &= \alpha g^2 \to \\ \frac{\partial g}{\partial\ln\mu} &= \alpha g^2, \end{aligned}$$

разделим переменные:

$$\frac{\partial g}{g^2} = \alpha\,\partial\ln\mu \to$$

$$\int_g^{g'}\frac{dg}{g^2} = \int_\mu^{\mu'}\alpha\,\partial\ln\mu = \alpha\ln\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{g}\Big|_g^{g'} = -\frac{1}{g'} + \frac{1}{g},$$

тогда

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g'} &= -\frac{1}{g} + \alpha \ln\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{g}\left(1 - \alpha g \ \ln\frac{\mu'}{\mu}\right) \to \\ \frac{1}{g'} &= \frac{1}{g}\left(1 - \alpha g \ \ln\frac{\mu'}{\mu}\right) \to \\ g' &= \frac{g}{1 - \alpha g \ \ln\frac{\mu'}{\mu}}. \end{aligned}$$

Полученный результат нетривиален. Хотя во втором порядке между g' и g была связь вида

$$g' = g + g^2 \alpha \ln\frac{\mu}{\mu'},$$

и эта связь была использована для вычисления β-функции, совпадающей с генератором группы, в результате получена более богатая зависимость для g' и g. Если разложить полученную зависимость в ряд Тейлора до второго порядка, то будет получена изначальная связь.

На рисунке 3.1 представлено графическое решение уравнения $g' = \frac{g}{1-\alpha g \ \ln\frac{\mu'}{\mu}}$. График описывает такое явление, как бег константы взаимодействия. Если зафиксировать точку $\mu' = \mu$, то $\ln\frac{\mu'}{\mu} = 0$, а $g' = g$. Изначально все устроено так, что $\alpha g \ \ln\frac{\mu'}{\mu} \ll 1$, потому что именно в этом приближении есть смысл говорить о разложении в ряд. Далее все зависит от знака константы α:

1) Пусть $\alpha > 0$, тогда $\alpha g \ \ln\frac{\mu'}{\mu}$ растет, знаменатель уменьшается, соответственно g' растет. Существует точка, в которой $\alpha g \ \ln\frac{\mu'}{\mu} = 1$, тогда $g' = \infty$.
2) Если $\alpha < 0$, тогда знаменатель растет, соответственно g' уменьшается.

Так, в зависимости от того, что предсказывает теория – положительное или отрицательное значение константы α, будет совершенно разное поведение на больших масштабах μ'. Зависимость с $\alpha > 0$ характерна для квантовой электродинамики, с $\alpha < 0$ для квантовой хромодинамики.

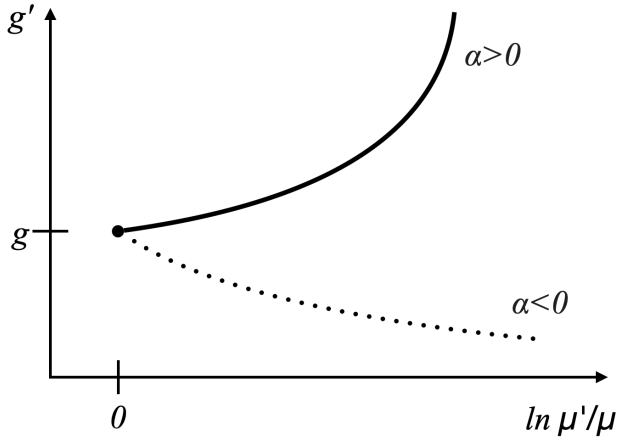


Рис. 3.1. Графики зависимостей $g'\left(\ln\frac{\mu'}{\mu}\right)$ для разных знаков параметра α.

Полюс Ландау

Точка, в которой g' устремляется к бесконечности в случае $\alpha > 0$ называется ***полюсом Ландау***. С этим полюсом связана интересная история. Теория, в которой константа уходит в бесконечность, не может считаться физической. Ландау проинтерпретировал это решение следующим образом: единственный способ сохранить теорию без бесконечностей – положить числитель g равным нулю. Иными словами полюс Ландау называется «нуль заряд»: квантовая электродинамика самосогласована только в том случае, если электрический заряд электрона равен нулю. Такая теория бесполезна, поскольку описывает свободные невзаимодействующие частицы.

Проблема просуществовала некоторое время, пока в работах Боголюбова и Ширкова не было вычислено, на каком масштабе происходит взрывообразное достижение бесконечности – масштаб порядка 10^{280} ГэВ, подобных энергий во Вселенной не существует. Кроме того, если $\alpha g \ln\frac{\mu'}{\mu}$ становится сравнима с единицей, возможно, следовало бы учесть третий порядок и появятся другие члены. Тем не менее, область, в которой проводятся эксперименты, мала по сравнению с этим масштабом. В этой области действительно прослеживаются выведенные зависимости на уровне нескольких процентов.

После выводов Ландау был закрыт семинар Померанчука по квантовой теории поля. Поток теоретиков, которые занимались квантовой теорией поля, значительно уменьшился. А именно в те годы в других странах происходил взрыв интереса к этой теме, вскоре последовали экспериментальные открытия, и теория приобрела основание.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Лекция 4. Собственная энергия электрона. Часть 1

Расходимости в квантовой электродинамике

В прошлых лекциях были рассмотрены упрощенные примеры. Концептуально то, что будет проделано в ходе лекции в рамках квантовой электродинамики, практически не отличается от двух уже рассмотренных примеров проводника и тестовой модели. Однако будет ряд усложнений и будет необходимо освоить некоторые математические приемы.

Следует начать с вопроса о том, какие расходимости встречаются в квантовой электродинамике. Их существует два вида:

1) инфракрасные расходимости, бесконечности в математических выражениях появляются при длине волны фотона $\lambda \to \infty$, или, что то же самое, при энергии $\omega \to 0$.
2) ультрафиолетовые расходимости, бесконечности возникают при длине волны фотона или электрона $\lambda \to 0$, или, что то же самое, при энергии $\omega \to \infty$.

Проблемы решаются абсолютно разными способами. При правильном подходе в квантовой электродинамике инфракрасные расходимости уничтожаются автоматически, ренормировки не требуются. Если рассмотреть некоторый процесс, например, пусть электрон рассеивается на кулоновском потенциале ядра

$$e^- + \text{ядро} \to e^- + \text{ядро},$$

в результате электрон изменяет направление своего движения при прохождении мимо ядра. Если в результате такого взаимодействия электрон излучает фотон с энергий, близкой к нулю, то с экспериментальной точки зрения такой фотон обнаружить нельзя. Но при добавлении к конечному электрону фотона с бесконечно малой энергией, то сечение окажется бесконечно большим, решение будет логарифмически расходиться. Результат кажется парадоксальным и означает, что существует проблема с постановкой задачи, потому что фотон с нулевой энергией – это отсутствие фотона. В действительности такие расходимости легко устраняются, поскольку необходимо учесть виртуальный фотон, который рождается и поглощается, и тоже может обладать нулевой энергией. Оказывается, если проделать вычисления с виртуальными фотонами с энергиями, близкими к нулю, такие фотоны тоже дадут вклад в сечение, причем расходимость будет противоположного знака и точно компенсирует расходимость в сечении, которая возникает при излучении фотона с энергией, близкой к нулю. Поэтому для полного сечения с учетом виртуальных фотонов с нулевой виртуальностью и реальных фотонов с нулевой энергией расходимости сокращаются, сечение оказывается конечным.

Ультрафиолетовые расходимости потребуют глубокого пересмотра того, что нам известно об электрических зарядах, массах и самих квантовых полях. Потребуется переопределение полей и величин таким образом, чтобы сечения процессов оказались

конечными, то есть необходимо процедура ренормировки. Сразу стоит подчеркнуть, что будут введены следующие замены: заряд e_0 и массу m_0 электрона заменим на наблюдаемые заряд и массу e и m соответственно:

$$e_0 \to e, \qquad m_0 \to m.$$

Для квантовых полей замены будут выглядеть следующим образом:

$$\psi_0, A_0^\mu \to \psi, A^\mu.$$

Ультрафиолетовые расходимости

Итак, переходя к ультрафиолетовым расходимостям, вспомним, какие диаграммы встречаются в квантовой электродинамике и приводят к таким расходимостям. Можно выделить три такие диаграммы.

Первая диаграмма имеет вид, представленный на рисунке 4.1. Пропагатор электрона с некоторым импульсом p описывает свободное распространение электрона. Если электрон излучает виртуальный фотон, который математически находится в состоянии пропагатора, и поглощает его через некоторое время, то такая диаграмма окажется бесконечной. Такая диаграмма потребует переопределения пропагатора электрона на ренормированный пропагатор:

$$S_0 \to S_r(\mu),$$

далее в этой лекции диаграмма 4.1 будет рассмотрена подробно.

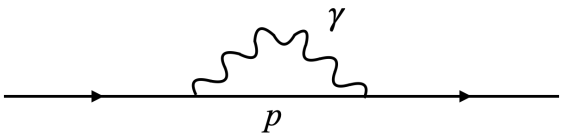


Рис. 4.1. Распространение электрона с излучением виртуального фотона.

Вторая расходящаяся диаграмма имеет вид, представленный на рис. 4.2. Рассмотрим фотон в виде свободного пропагатора. На время такой фотон может превратиться в пару электрон-позитрон, которые будут находиться в виртуальном состоянии. Схлопываюсь в точку, виртуальные электрон и позитрон превращаются в исходный фотон. В этом случае свободный пропагатор фотона будет необходимо заменить на ренормированный пропагатор:

$$D_0^{\mu\nu} \to D_r^{\mu\nu}(\mu).$$

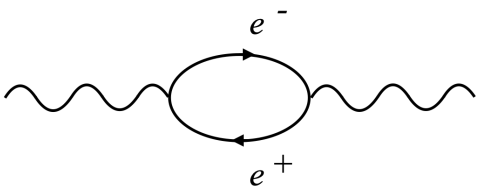


Рис. 4.2. Распространение фотона с преобразованием в виртуальную пару электрон-позитрон.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Третья диаграмма, представленная на рисунке 4.3, является древесной диаграммой, которым были посвящены предыдущие два курса по квантовой теории поля и Стандартной модели. Пусть электрон посредствам виртуального фотона провзаимодействовал с другой частицей. Для такой диаграммы можно вычислить сечение взаимодействия. Однако теперь начальный электрон излучает виртуальный фотон, который поглотится конечным электроном. Интуитивно кажется, что это просто возмущение вакуума: по электромагнитному полю распространилась волна, которая в одном месте была инициирована движущейся волной электрона, а затем этим же движущимся электроном поглотилась. Однако в промежутке электрон провзаимодействовал с ругой частицей. Кажется, что такие маленькие излучающиеся волны ни на что не должны влиять, поскольку они всегда присутствуют в вакууме и в любом взаимодействии. Однако появление такой петли приводит к расходимости. Для решения этой проблемы необходимо пересмотреть такое фундаментальное понятие, как заряд электрона и переопределить наблюдаемым электрическим зарядом:

$$e_0 \to e(\mu).$$

И также, как было показано во втором примере (лекция 3), теорию можно сделать самосогласованной только если предположить, что величина e_0 бесконечно большая. И в результате будет очевидно, что наблюдаемая величина e зависит от параметра масштаба μ, который имеет размерность массы. Соответственно S_r и $D_r^{\mu\nu}$ также будут зависеть от масштаба μ.

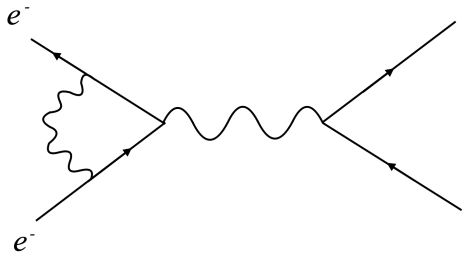


Рис. 4.3. Диаграмма взаимодействия электрона с другой частицей посредствам виртуального фотона (с излучением начальным электроном дополнительного виртуального фотона, поглощаемого конечным электроном).

Метод размерной регуляризации

Метод размерной регуляризации, который будет использован при вычислениях диаграмм, не единственно возможный, но считается наиболее устоявшимся и общепринятым. Уточним этот метод относительно квантовой электродинамики:

1) поскольку метод размерной регуляризации предполагает переход из четырехмерного пространства-времени в d-мерное, то необходимо выяснить, какова в d-мерном пространстве-времени размерность всех составляющих квантовой электродинамики (фермионного поля ψ, электромагнитного поля A, электрического заряда e);

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

2) поскольку в квантовой электродинамике присутствуют γ-матрицы Дирака, необходимо уточнить формулы, связанные с ними.

Начнем с размерностей, выпишем первооснову – действие:

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L} \to \int d^dx\, \mathcal{L}.$$

Размерность действия

$$[S] = m^0,$$

соответственно

$$[d^4x] = m^{-4} \;\to\; [\mathcal{L}] = m^4.$$

При переходе к d-мерному пространству

$$[d^dx] = m^{-d} \;\to\; [\mathcal{L}] = m^d.$$

Распишем Лагранжиан в квантовой электродинамике:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{q}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

где $\hat{\partial}$ – квантовая реализация 4-импульса, второе слагаемое введено со знаком «+», поскольку в электродинамике всегда можно заменить 4-импульс на смещенный 4-импульс

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu,$$

где $q = -e$.

Определим размерности величин, входящих в Лагранжиан:

$$\left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] = m^d = m^2[A^\mu]^2,$$

поскольку $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, где $\left[\partial_\mu\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] = m$, тогда

$$[A^\mu] = m^{\frac{d-2}{2}} = m^{\frac{d}{2}-1}.$$

Затем определим размерность поля фермионов:

$$[\bar{\psi}m\psi] = m[\bar{\psi}\psi] = m[\psi]^2 = m^d,$$

тогда

$$[\psi] = m^{\frac{d-1}{2}}.$$

Для четырехмерного пространства получаем хорошо известный результат:

$$[A^\mu] = m^1, \qquad [\psi] = m^{\frac{3}{2}}.$$

Остается определить размерность электрического заряда:

$$\left[e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\right] = [e][\bar{\psi}\psi]\left[A_\mu\right] = [e]m^{d-1}m^{\frac{d}{2}-1} = m^d,$$

тогда

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$[e] = m^{d-d+1-\frac{d}{2}+1} = m^{-\frac{d}{2}+2} = m^{\frac{4-d}{2}}.$$[7]

В четырехмерном случае

$$[e] = 1.$$

Остается уточнить формулы для γ-матриц. Будем считать, что основное антикоммутационное соотношение, определяющее алгебру γ-матриц остается справедливым при переходе к d-мерному пространству:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I_{d\times d}.$$

Обратим внимание, что в четырехмерном случае $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$, тогда в d-мерном пространстве $\gamma^\mu\gamma_\mu = d$. Пересмотра потребую соотношения, которые будут фигурировать в вычислениях. В первую очередь следует обратить внимание на следующую формулу

$$\gamma^\mu\hat{A}\gamma_\mu = -2\hat{A},$$

где $\hat{A} = \gamma^\nu A_\nu = \gamma_\nu A^\nu$ – свертка γ-матрицы с 4-вектором. Для перехода в d-мерное пространство воспользуемся главным коммутационным соотношением:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\hat{A}\gamma_\mu &= \gamma^\mu\gamma^\nu A_\nu\gamma_\mu = (\,2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)A_\nu\gamma_\mu = 2A^\mu\gamma_\mu - \gamma^\nu A_\nu\gamma^\mu\gamma_\mu = \\ &= 2\hat{A} - d\hat{A} = -(d-2)\hat{A}.\end{aligned}$$

Действуя аналогичным образом, можно переопределить и другие конструкции. Самостоятельно предлагается вычислить следующие конструкции в d-мерном случае:

$$\gamma^\mu\hat{A}\hat{B}\gamma_\mu, \qquad \gamma^\mu\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_\mu.$$

Уравнение Дайсона

Рассмотрим свободную теорию, пусть есть электрон, который может свободно распространяться между двумя точками. Это распространение, как известно, описывается свободным пропагатором, который для фермиона записывается следующим образом:

$$iS_0(p) = \frac{i}{\hat{p} - m} = i(\hat{p} - m)^{-1}.$$

Рассмотрим тот же процесс под другим углом: пусть электрон летит в электромагнитном поле. Вспомним, что все квантовые поля пересекаются друг с другом и каждое поле обладает возможностью возбудить другое поле. Это означает, что полная амплитуда распространения электрона из одной точки в другую – это сумма амплитуды свободного распространения и амплитуды распространения с учетом взаимодействия с электромагнитным полем с участием виртуального фотона. Диаграмм второго типа в разных вариациях можно добавить бесконечное множество (рис. 4.4). Интуитивно должно казаться, что, когда распространяется волна электронного поля, и возбуждает

[7] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $m^{\frac{4-d}{2}}$.

волну электромагнитного поля, в конечном итоге возвращающуюся в волну электронного поля, все это будут малые поправки к свободному распространению электронной волны. Однако будет показано, что наивный учет бесконечных рассеяний приведет к тому, что электрон не сможет распространяться. Этот парадокс можно разрешить только используя ренормировки.

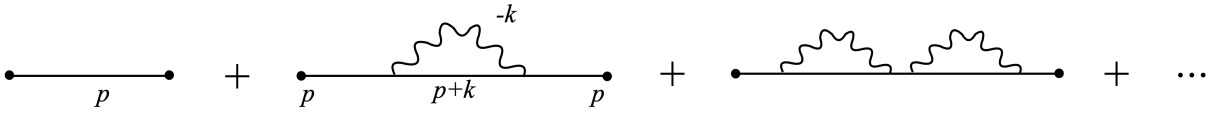


Рис. 4.4. Распространение электрона в электромагнитном поле.

Рассмотрим вторую диаграмму из ряда с рисунка 4.4, и обозначим петлю с виртуальным фотоном как $-i\Sigma(p)$. Пусть сам электрон распространяется с импульсом p, импульс виртульного фотона обозначим как $-k$, тогда в петле импульс электрона $p+k$. Аналогично можно расписать и все другие диаграммы. Весь бесконечный ряд диаграмм можно графически изобразить в виде толстой линии, которую назовем ***«одетым» пропагатором*** и обозначим как iS:

$$iS = iS_0 + iS_0 \cdot (-i\Sigma) \cdot iS_0 + iS_0 \cdot (-i\Sigma) \cdot iS_0 \cdot (-i\Sigma) \cdot iS_0 + \cdots,$$

сократим выражение и получим

$$S = S_0 + S_0\Sigma S_0 + S_0\Sigma S_0\Sigma S_0 + \cdots = S_0 + S_0\Sigma(\mathrm{S}_0 + S_0\Sigma\mathrm{S}_0 + \cdots) = S_0 + S_0\Sigma\mathrm{S}.$$

Полученное выражение является уравнением на S, **уравнением Дайсона**:

$$S = S_0 + S_0\Sigma\mathrm{S}.$$

Решение уравнения Дайсона

Решим уравнение, учитывая, что компоненты являются матрицами:

$$\begin{aligned} S_0 &= S - S_0\Sigma S = (1 - S_0\Sigma)\mathrm{S} = \mathrm{S}_0(S_0^{-1} - \Sigma)\mathrm{S} \rightarrow \\ S &= (\mathrm{S}_0^{-1} - \Sigma)^{-1}. \end{aligned}$$

Подставим $S_0 = (\hat{p} - m)^{-1}$:

$$S = (\hat{p} - m - \Sigma)^{-1}.$$

Распишем $\Sigma(p)$:

$$\Sigma(p) = \hat{p}\Sigma_{\mathrm{v}} + m\Sigma_{\mathrm{s}},$$

где функции Σ_{v} и Σ_{s} являются скалярными и могут зависеть только от квадрата импульса. Так, решение для S в общем виде будет иметь вид:

$$S = \left(\hat{p}(1 - \Sigma_{\mathrm{v}}) - m(1 + \Sigma_{\mathrm{s}})\right)^{-1}.$$

Видно, что с одной стороны переопределяется 4-импульс, с другой стороны в общем случае переопределяется масса, что дает повод задуматься, какие массы фигурировала в двух предыдущих курсах при расчетах древесной диаграммы. Оказывается, что к древесной диаграмме необходимо было добавить бесконечное число диаграмм с петлями с участием виртуальных электрона и фотона (рис. 4.5). То есть, массы электронов и

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

фотонов эффективно уже включали все бесконечные взаимодействия, но это совершенно не та масса, которая фигурировала в вводном пропагаторе S_0. Так, за счет взаимодействия электрона с вакуумным электромагнитным полем масса электрона переопределяется. Поэтому всюду следует ввести переобозначение:

$$m = m_0,$$

а реальной массой электрона окажется

$$m_0(1 + \Sigma_s) \sim m.$$

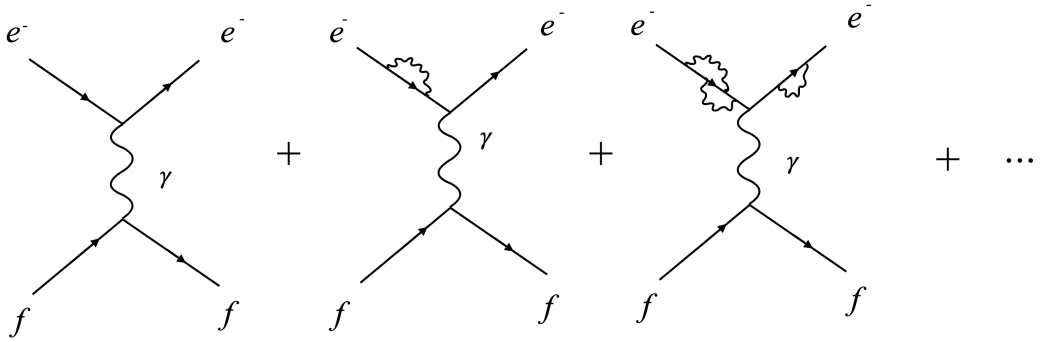


Рис. 4.5. Добавки к стандартной древесной диаграмме.

Распишем явным образом вторую диаграмму с рисунка 4.4., точнее петлю. Запишем для нее правило Фейнмана в 4-мерном пространсве-времени:

$$-i\Sigma(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (ie\gamma^\nu) \frac{i}{\left(\hat{p} + \hat{k} - m_0\right)} (ie\gamma^\mu) \frac{(-i)g_{\mu\nu}}{(-k)^2}.$$

Записанный интеграл является расходящимся, покажем это двумя способами.

1) Быстрый способ:

$$-i\Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{1}{\left(\hat{p} + \hat{k} - m_0\right)} \frac{\gamma_\mu}{k^2} = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu\left(\hat{p} + \hat{k} + m_0\right)}{(p+k)^2 - m_0^2} \frac{\gamma_\mu}{k^2}.$$

Пусть $k \to \infty$, тогда

$$-\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu\left(\hat{p} + \hat{k} + m_0\right)}{(p+k)^2 - m_0^2} \frac{\gamma_\mu}{k^2} \underset{k \to \infty}{\sim} \int d^4k \, \frac{k}{k^2 k^2} = \int^{\Lambda} \frac{dk \, k^3 \, k}{k^4} \sim \Lambda,$$

так, интеграл линейно расходится. Этой проблемой теоретики занимались несколько десятилетий.

2) Рассмотрим интеграл, не пренебрегая γ-матрицами, покажем, что линейная расходимость исчезает, остается только логарифмическая. Введем упрощение, положим $m_0 = 0$, тогда можно ожидать, что электрон движется со скоростью света. Однако в результате будет получен парадокс – электрон окажется покоящимся. Вспомним, что «одетый» пропагатор имеет следующий вид:

$$S(p) = \left(\hat{p} - m_0 - \Sigma(p)\right)^{-1} \to \left(\hat{p} - \Sigma(p)\right)^{-1}.$$

Распишем $\Sigma(p)$ в том же приближении:

$$\Sigma(p) = \hat{p}\Sigma_v(p^2).$$

Тогда для пропагатора можно записать

$$S(p) = \left(\hat{p} - \hat{p}\Sigma_v(p^2)\right)^{-1} = (\hat{p})^{-1}\left(1 - \Sigma_v(p^2)\right)^{-1} = \frac{(\hat{p})^{-1}}{1 - \Sigma_v(p^2)}.$$

Вернемся к $\Sigma(p)$, перепишем в интегральном виде:

$$-i\Sigma(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(ie\gamma^\nu)\frac{i(\hat{p}+\hat{k})}{(p+k)^2}\frac{(-ig_{\mu\nu})}{k^2}(ie\gamma^\mu) = i^2e^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu(\hat{p}+\hat{k})\gamma_\mu}{(p+k)^2k^2}.$$ [8]

Воспользуемся антикоммутационными соотношениями

$$\gamma^\mu \hat{A}\gamma_\mu = -2\hat{A},$$

тогда

$$-\Sigma(p) = -2i^2e^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+\hat{k}}{(p+k)^2k^2}.$$

Воспользуемся приемом, который будет использоваться в дальнейшем достаточно часто, введем обозначения:

$$D_1 = D_1(k^2) = k^2,$$
$$D_2 = (p+k)^2 = p^2 + 2p\cdot k + k^2,$$

тогда для $\Sigma(p)$ справедливо

$$-i\Sigma(p) = -2i^2e^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+\hat{k}}{D_1D_2}.$$

Домножим теперь левую и правую части на $\hat{p}$ и возьмем след:

$$Tr[\hat{p}\hat{p}\Sigma_v] = 2e^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{Tr\left[\hat{p}(\hat{p}+\hat{k})\right]}{D_1D_2}.$$

Вспомним, что $Tr\left[\hat{A}\hat{B}\right] = 4A\cdot B$, тогда

$$4p^2\Sigma_v = 2e^2\cdot 4\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{p^2+(p\cdot k)}{D_1D_2} \rightarrow$$

$$\Sigma_v = \frac{2e^2}{p^2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{p^2+(p\cdot k)}{D_1D_2}.$$

Решив полученное уравнение, получим Σ_v. Для этого перевыразим скалярное произведение $(p\cdot k)$ через D_1 и D_2:

$$2(p\cdot k) = D_2 - p^2 - k^2 = D_2 - D_1 - p^2 \rightarrow$$

$$\frac{p^2+p\cdot k}{D_1D_2} = \frac{p^2}{D_1D_2} + \frac{p\cdot k}{D_1D_2} = \frac{p^2}{D_1D_2} + \frac{D_2-D_1-p^2}{2D_1D_2} = \frac{p^2}{2D_1D_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right),$$

отсюда следует, что

[8] В видео-лекции допущена ошибка, выписано выражение для $-\Sigma(p)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\Sigma_v = \frac{2e^2}{2p^2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{p^2}{D_1 D_2} + \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right)\right].^{9}$$

Распишем второе слагаемое интегрального выражения:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(p+k)^2}\right) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p+k)^2},$$

введем замену $k \to k + p$ во втором слагаемом, тогда

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2} - \int \frac{d^4(k+p)}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p+k)^2} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2} = 0.$$

Однако стоит учитывать, что для расходящихся интегралов подобные замены не являются безобидными, пока этот факт не будет учтен. Несмотря на это, ответ будет получен правильный, позднее будут реализованы подробные, более корректные вычисления. Итак, вернемся к Σ_v:

$$\Sigma_v = \frac{e^2}{p^2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{p^2}{k^2(p+k)^2}.$$

Расходимости возникали при больших импульсах k, рассмотрим случай $k \gg p$:

$$\Sigma_v = e^2\int^{\Lambda} \frac{dk\, k^3}{k^4} = e^2 \ln \Lambda.$$

Логарифмические расходимости уже встречались, в таких случаях можно успешно воспользоваться ренормировкой.

Следующим шагом будет необходимо перейти из 4-мерного пространства в d-мерное для реализации ренормировки методом размерной регуляризации.

[9] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $\Sigma_v = \frac{2e^2}{2p^2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{p^2}{D_1 D_2} + \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right)\right]$.

Лекция 5. Собственная энергия электрона. Часть 2

Вычисление интеграла методом размерной регуляризации

Вычислим интеграл методом размерной регуляризации

$$\Sigma(p) = \hat{p}\Sigma_v(p^2) = e_0^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu(\hat{p}+\hat{k})\gamma_\mu}{D_1 D_2},$$

где e_0 – электрический заряд, который переопределится в результате ренормировки. Домножим левую и правую части на $\hat{p}$ и возьмем следы:

$$Tr[\hat{p}\hat{p}]\Sigma_v(p^2) = e_0^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{Tr[\hat{p}\gamma^\mu(\hat{p}+\hat{k})\gamma_\mu]}{D_1 D_2}.$$

Можно записать, что

$$\gamma^\mu(\hat{p}+\hat{k})\gamma_\mu = -(d-2)(\hat{p}+\hat{k}), \qquad \text{т.к.}\, \gamma^\mu \hat{A}\gamma_\mu = -(d-2)\hat{A},$$

при этом

$$Tr[\hat{p}(\hat{p}+\hat{k})] = d(p^2 + p\cdot k).$$

Тогда верно следующее равенство:

$$p^2 \cdot d \cdot \Sigma_v(p^2) = -e_0^2 d(d-2) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p^2 + p\cdot k}{D_1 D_2}.$$

Вспомним, что

$$\begin{aligned} D_2 &= (p+k)^2 = p^2 + 2p\cdot k + k^2, \\ p\cdot k &= \frac{D_2 - p^2 - D_1}{2}, \end{aligned}$$

тогда

$$-e_0^2 d(d-2) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p^2 + p\cdot k}{D_1 D_2} = -\frac{e_0^2 d(d-2)}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\frac{p^2}{D_1 D_2} + \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right)\right],$$

где после замены переменных слагаемое с $\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right)$ зануляется. Запишем выражение для $\Sigma_v(p^2)$, которое теперь необходимо вычислить в d-мерном пространстве:

$$\Sigma_v(p^2) = -\frac{e_0^2(d-2)}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_1 D_2}.$$

Первым шагом необходимо научиться вычислять интегралы вида

$$\int d^d k \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}}$$

для произвольных степеней n_1 и n_2. Сначала следует определить размерность интеграла:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\left[\int d^d k \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}}\right] = m^d m^{-2n_1-2n_2} = m^{d-2n_1-2n_2}.$$

Тогда можно записать

$$\int d^d k \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = i\pi^{\frac{d}{2}} (-p^2)^{\frac{d}{2}-n_1-n_2} G(n_1, n_2),$$

где $G(n_1, n_2)$ – некоторая функция, независящая от p^2. Далее для решения потребуется несколько приемов.

Виковский поворот

Виковский поворот назван в честь итальянского теоретика Вика. Формально виковский поворот заключается в переходе от вектора в пространстве Минковского к вектору в евклидовом пространстве:

$$k_0 \to i\left(\vec{k}_d\right)_0,$$

если в пространстве Минковского вектор имел вид

$$k = \left(k_0, \vec{k}_{d-1}\right), \qquad k^2 = k_0^2 - \vec{k}_{d-1}^2,$$

то в евклидовом пространстве

$$\vec{k}_d = (k_0, k_1, \dots, k_d), \qquad \vec{k}_d^2 = k_0^1 + k_1^2 + \cdots + k_d^2.$$

При рассмотрении введения в квантовую теорию поля необходимо было проинтегрировать по нулевой компоненте вектора Минковского k_0. Было показано, что при обходе полюсов, один из которых смещен вверх, а другой вниз на бесконечно малую ε, контур интегрировании можно деформировать контур непрерывным образом так, чтобы он шел ровно вдоль мнимой оси. При таком повороте новых полюсов не появляется, *является поворотом на* $\frac{\pi}{2}$ *и называется виковским*. Фактически поворот сводится к замене $k_0 \to i\left(\vec{k}_d\right)_0$. Теперь при такой замене

$$\begin{aligned} D_1 &= k^2 = k_0^2 - \vec{k}_{d-1}^2 = -\left((k_d)_0^2 + \left(\vec{k}_{d-1}\right)^2\right) = -\vec{k}_d^2, \\ D_2 &= (p+k)^2 = -\left(\vec{p}_d + \vec{k}_d\right)^2, \end{aligned}$$

тогда

$$\int d\vec{k}_d \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = i \int d\vec{k}_d \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{\left(\vec{k}_d\right)^{2n_1} \left(\vec{p}_d + \vec{k}_d\right)^{2n_2}} = i\pi^{\frac{d}{2}} \left(\vec{p}_d{}^2\right)^{\frac{d}{2}-n_1-n_2} G(n_1, n_2),$$

итак,

$$G(n_1, n_2) = \pi^{-\frac{d}{2}} \left(\vec{p}_d{}^2\right)^{-\frac{d}{2}+n_1+n_2} (-1)^{n_1+n_2} \int d\vec{k}_d \frac{1}{\left(\vec{k}_d\right)^{2n_1} \left(\vec{p}_d + \vec{k}_d\right)^{2n_2}}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Для того, чтобы вычислить этот интеграл потребуется еще несколько математических приемов.

α-представление

Для получения $G(n_1, n_2)$ необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\int d\vec{k}_d \frac{1}{\left(\vec{k}_d\right)^{2n_1}\left(\vec{p}_d + \vec{k}_d\right)^{2n_2}}.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся переходом к α-представлению, позволяющим перенести знаменатели в показатели экспонент. Затем будут возникать гауссовы интегралы и Г-функции.

Вспомним, что Г-функция определяется следующим образом:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha}\alpha^{n-1}.$$

Такое представление позволяет получить полезную формулу. Введем замену:

$$\alpha \to \alpha D,$$

тогда

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty d(\alpha D)e^{-\alpha D}(\alpha D)^{n-1} = D^n \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha D}\alpha^{n-1} \to$$

$$\frac{1}{D^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha D}\alpha^{n-1}.$$

Записанная формула и является α-представлением.

Для интеграла в выражении для $G(n_1, n_2)$ воспользуемся формулой α-представления дважды:

$$\int d\vec{k}_d \frac{1}{\left(\vec{k}_d\right)^{2n_1}\left(\vec{p}_d + \vec{k}_d\right)^{2n_2}} = \int d\vec{k}_d \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} e^{-\alpha_1 D_1}\alpha_1^{n_1-1} e^{-\alpha_2 D_2}\alpha_2^{n_2-1}.$$

Вынесем константы:

$$\int d\vec{k}_d \frac{1}{\left(\vec{k}_d\right)^{2n_1}\left(\vec{p}_d + \vec{k}_d\right)^{2n_2}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \int d\vec{k}_d\, e^{-\alpha_1\vec{k}_d^2 - \alpha_2\left(\vec{p}_d+\vec{k}_d\right)^2}\alpha_1^{n_1-1}\alpha_2^{n_2-1},$$

легко определить, что экспонента $e^{-\alpha_1\vec{k}_d^2-\alpha_2\left(\vec{p}_d+\vec{k}_d\right)^2}$ является квадратичной функцией $\vec{k}_d$ и сведется к гауссову интегралу, α в степенях затем сведутся к Г-функциям.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Начнем с экспоненты, вынесем в показателе полный квадрат:

$$\alpha_1\vec{k}_d^2+\alpha_2\left(\vec{p}_d^2+2\vec{p}_d\cdot\vec{k}_d+\vec{k}_d^2\right)=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2)\left(\vec{k}_d^2+2\frac{\vec{p}_d\cdot\vec{k}_d}{\alpha_1+\alpha_2}\alpha_2+\left(\frac{\alpha_2\vec{p}_d}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2\right)-\frac{\alpha_2^2\vec{p}_d^2}{\alpha_1+\alpha_2}+\alpha_2\vec{p}_d^2=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2)\left(\vec{k}_d+\frac{\alpha_2\vec{p}_d}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2+\frac{\vec{p}_d^2}{\alpha_1+\alpha_2}(\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_2^2)=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2)\left(\vec{k}_d+\frac{\alpha_2\vec{p}_d}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{p}_d^2.$$

Тогда интеграл можно переписать в виде

$$\int d\vec{k}_d\, e^{-\alpha_1\vec{k}_d^2-\alpha_2\left(\vec{p}_d+\vec{k}_d\right)^2}=\int d\vec{k}_d\, e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\left(\vec{k}_d+\frac{\alpha_2\vec{p}_d}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{p}_d^2}.$$

Сделаем замену $\vec{k}_d+\frac{\alpha_2\vec{p}_d}{\alpha_1+\alpha_2}\to\vec{k}_d$:

$$\int d\vec{k}_d\, e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\left(\vec{k}_d+\frac{\alpha_2\vec{p}_d}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{p}_d^2}=e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{p}_d^2}\int d\vec{k}_d\, e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\vec{k}_d^2}=$$
$$=e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{p}_d^2}(\alpha_1+\alpha_2)^{-\frac{d}{2}}\int d\vec{k}_d\, e^{-\vec{k}_d^2}.$$

Вспомним, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-x^2}=\sqrt{\pi},$$

Тогда

$$e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{p}_d^2}(\alpha_1+\alpha_2)^{-\frac{d}{2}}\int d\vec{k}_d\, e^{-\vec{k}_d^2}=e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{p}_d^2}(\alpha_1+\alpha_2)^{-\frac{d}{2}}\pi^{\frac{d}{2}}.$$

Таким образом, исходный интеграл приобретает следующий вид:

$$\int d\vec{k}_d\frac{1}{\left(\vec{k}_d\right)^{2n_1}\left(\vec{p}_d+\vec{k}_d\right)^{2n_2}}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{p}_d^2}(\alpha_1+\alpha_2)^{-\frac{d}{2}}\pi^{\frac{d}{2}}\alpha_1^{n_1-1}\alpha_2^{n_2-1},$$

многомерный интеграл сведен к двумерному интегралу. Сделаем пару замен и сведем интеграл к Г-функциям.

Вернемся к определению $G(n_1,n_2)$:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$G(n_1,n_2)=\pi^{-\frac{d}{2}}\left(\vec{p}_d{}^{\,2}\right)^{-\frac{d}{2}+n_1+n_2}(-1)^{n_1+n_2}\int d\vec{k}_d\,\frac{1}{D_1^{n_1}D_2^{n_2}}=$$

$$=\frac{\pi^{-\frac{d}{2}}\left(\vec{p}_d{}^{\,2}\right)^{-\frac{d}{2}+n_1+n_2}(-1)^{n_1+n_2}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)}\pi^{\frac{d}{2}}\int\limits_0^\infty d\alpha_1\int\limits_0^\infty d\alpha_2 e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{p}_d^{\,2}}\,\alpha_1^{n_1-1}\alpha_2^{n_2-1}(\alpha_1+\alpha_2)^{-\frac{d}{2}}.$$

Введем замены:

$$\alpha_1=\eta\cdot x,\qquad \alpha_1=\eta\cdot(1-x),$$

тогда

$$d\alpha_1 d\alpha_2 \;=\; d\eta\,dx\begin{vmatrix}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\eta} & \frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial\eta} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\end{vmatrix}=d\eta\,dx\begin{vmatrix}x & \eta\\ 1-x & -\eta\end{vmatrix}=$$
$$=\; d\eta\,dx\left|\left(-x\eta-\eta(1-x)\right)\right|=d\eta\,\eta\,dx,$$

где $\eta\in(0,\infty), x\in(0,1)$. Перевыразим некоторые компоненты:

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}=\frac{\eta x\eta(1-x)}{\eta}=\eta x(1-x).$$

Для $G(n_1,n_2)$ можно записать следующее:

$$G(n_1,n_2)=\frac{(-1)^{n_1+n_2}\left(\vec{p}_d{}^{\,2}\right)^{-\frac{d}{2}+n_1+n_2}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^\infty d\eta\,\eta\,e^{-\eta x(1-x)\vec{p}_d^{\,2}}\,(\eta x)^{n_1-1}[\eta(1-x)]^{n_2-1}\eta^{-\frac{d}{2}}.$$

Г-функции

Вспомним определение Г-функции:

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty dt\,e^{-t}t^{z-1}.$$

Выделим Г-функции в интеграле по $d\eta$ в $G(n_1,n_2)$:

$$\int\limits_0^\infty d\eta\,e^{-\eta x(1-x)\vec{p}_d^{\,2}}\,\eta^{n_1+n_2-2-\frac{d}{2}+1}=\begin{bmatrix}t=\eta x(1-x)\vec{p}_d^{\,2}\\ dt=d\eta x(1-x)\vec{p}_d^{\,2}\end{bmatrix}=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{dt}{x(1-x)\vec{p}_d^{\,2}}\,e^{-t}\left(\frac{t}{x(1-x)\vec{p}_d^{\,2}}\right)^{n_1+n_2-\frac{d}{2}-1}=\frac{1}{(x(1-x)\vec{p}_d^{\,2})^{n_1+n_2-\frac{d}{2}}}\Gamma\left(n_1+n_2-\frac{d}{2}\right).$$

Тогда в выражении для $G(n_1,n_2)$ остается только интегрирование по dx:

$G(n_1,n_2)=$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$= \frac{(-1)^{n_1+n_2}\left(\vec{p}_d{}^2\right)^{-\frac{d}{2}+n_1+n_2}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \frac{\Gamma\left(n_1+n_2-\frac{d}{2}\right)}{(\vec{p}_d^2)^{n_1+n_2-\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx\, x^{n_1-1-n_1-n_2+\frac{d}{2}}(1-x)^{n_2-1-n_1-n_2+\frac{d}{2}}.$$

Полученный интеграл является B-функцией, которую можно перевыразить через Γ-функцию:

$$\int_0^1 dx\, x^{n-1}(1-x)^{m-1} = B(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)},$$

тогда для $G(n_1, n_2)$ справедливо

$$G(n_1,n_2) = \frac{(-1)^{n_1+n_2}\Gamma\left(n_1+n_2-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-n_1\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-n_2\right)}{\Gamma(d-n_1-n_2)}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Лекция 6. Собственная энергия электрона. Часть 3

Вычисление Σ_v

Вычисленная в прошлой лекции функция $G(n_1, n_2)$ входит в выражение для $-i\Sigma_v(p^2)$. Перейдем к вычислению непосредственно $-i\Sigma_v(p^2)$:

$$-i\Sigma_v(p^2) = -\frac{(d-2)}{2} e_0^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_1 D_2}.$$ [10]

Было показано, что

$$\int d^d k \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = \pi^{\frac{d}{2}} (-p^2)^{\frac{d}{2} - n_1 - n_2} G(n_1, n_2).$$

Подставим $G(n_1, n_2)$ при $n_1 = n_2 = 1$ и запишем выражение для $-i\Sigma_v(p^2)$:

$$\begin{aligned} -i\Sigma_v(p^2) &= -\frac{(d-2)e_0^2}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} (-p^2)^{\frac{d}{2} - n_1 - n_2} G(n_1, n_2) \Big|_{n_1 = n_2 = 1} = \\ &= -\frac{(d-2)e_0^2}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} (-p^2)^{\frac{d}{2} - 2} G(1,1). \end{aligned}$$

Для $G(n_1, n_2)$ справедливо

$$G(n_1, n_2) = \frac{(-1)^{n_1+n_2} \Gamma\left(n_1 + n_2 - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - n_1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - n_2\right)}{\Gamma(d - n_1 - n_2)},$$

тогда

$$-i\Sigma_v(p^2) = -\frac{(d-2)e_0^2}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} (-p^2)^{\frac{d}{2} - 2} \frac{\Gamma\left(-\frac{d}{2} + 2\right)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \frac{\Gamma^2\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma(d-2)}.$$

Выход в нецелую размерность

Перейдем в нецелую размерность. Переход возможен, поскольку Г-функция может существовать даже при комплексном аргументе. Пусть

$$d = 4 - 2\varepsilon,$$

тогда

$$\begin{aligned} &d - 2 = 2(1 - \varepsilon), \quad \frac{d}{2} - 2 = -\varepsilon, \quad -\frac{d}{2} + 2 = +\varepsilon, \\ &\frac{d}{2} - 1 = 1 - \varepsilon, \qquad \frac{d}{2} = 2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Вспомним, что $\Gamma(1) = 1$, перепишем выражение для $\Sigma_v(p^2)$:

[10] В видео-лекции допущена ошибка, выписанное выражение соответствует $-i\Sigma_v(p^2)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$-i\Sigma_v(p^2) = -\frac{2(1-\varepsilon)e_0^2}{2(4\pi)^{2-\varepsilon}}(-p^2)^{-\varepsilon}\,\frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)}.$$

Выражение является расходящимся в связи с наличием компоненты $\Gamma(\varepsilon)$. Для Г-функции справедливо

$$\begin{aligned}\Gamma(t+1) &= t\Gamma(t),\\ \Gamma(1+\varepsilon) &= 1-\gamma\varepsilon+\cdots,\end{aligned}$$

где γ – константа Эйлера, тогда

$$(1+\varepsilon) = \varepsilon\Gamma(\varepsilon) \;\rightarrow\; \Gamma(\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1-\gamma\varepsilon}{\varepsilon},$$

что является расходящимся полюсом при $\varepsilon \to 0$. Так, при $\varepsilon \to 0$ в 4-мерном пространстве-времени возникает расходимость функции $-i\Sigma_v(p^2)$.

Закончим вычисление $-i\Sigma_v(p^2)$, явным образом выделим конечную и расходящуюся части.

$$-i\Sigma_v(p^2) = -\frac{e_0^2(-p^2)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\frac{2(1-\varepsilon)}{2}\frac{1-\gamma\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{(1+\gamma\varepsilon)^2}{(1+2\gamma\varepsilon)(1-2\varepsilon)},$$

поскольку

$$\Gamma(2-2\varepsilon) = \Gamma(1+(1-2\varepsilon)) = (1-2\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon) = (1-2\varepsilon)(1+2\gamma\varepsilon).$$

Вспомним, что функция $f(x) = a^x$ при $x \to 0$ при разложении в ряд Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots,$$

поскольку

$$\ln f = x\ln a\,, \qquad \frac{f'}{f} = \ln a \to f' = f\ln a,$$

тогда

$$f(x) = f(0) + f(0)\ln a\, x + \cdots.$$

В таком случае, для $(-p^2)^{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$ справедливо

$$(-p^2)^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon\ln(-p^2).$$

Запишем ответ для $-i\Sigma_v(p^2)$:

$$-i\Sigma_v(p^2) = -\frac{e_0^2(-p^2)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}\frac{(1-\varepsilon)(1-\gamma\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)},$$ [11]

с точностью до второго порядка

$$\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} = (1-\varepsilon)(1+2\varepsilon) = 1-\varepsilon+2\varepsilon+\cdots,$$

[11] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $(4\pi)^{2-\varepsilon}$ в знаменателе.

тогда

$$-i\Sigma_v(p^2) = -\frac{e_0^2(-p^2)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\frac{(1+\varepsilon)(1-\gamma\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Выводы из предыдущих вычислений (регуляризации)

Итак, подведем некоторые итоги:

- «Одетый» пропагатор для безмассового фермиона имеет вид:
$$S(p) = (\hat{p} - m_0 - \Sigma)^{-1},$$
при введении упрощения $m_0 = 0$
$$\Sigma = \hat{p}\Sigma_v, \qquad S(p) = \frac{\hat{p}^{-1}}{1-\Sigma_v}.$$
«Одетый» пропагатор $S(p)$ учитывает взаимодействие электрона с электромагнитным полем при прохождении электрона через вакуум, заполненный квантовыми полями. При возбуждении этих квантовых полей электроном возникают волны, описываемые петлевыми диаграммами и переопределяющими пропагатор электрона. При $\varepsilon \to 0$ $\Sigma_v \to \infty$, что означает равенство нулю «одетого» пропагатора – амплитуда перехода электрона из одной точки в другую обращается в ноль. То есть электрон, который по введенной гипотезе должен был двигаться со скоростью света, остается неподвижным.
- Было определено, что Σ_v является d-мерным интегралом
$$\Sigma_v = N\int d^d k \frac{1}{D_1 D_2}\ldots,$$
виковский поворот позволяет преобразовать интеграл в пространстве Минковского к интегралу в евклидовом пространстве:
$$\int d\vec{k}_d \frac{1}{D_1 D_2}.$$
α-представление позволило преобразовать интеграл к виду
$$\int d\alpha_1 d\alpha_2 d\vec{k}_d e^{-\alpha_1 D_1 - \alpha_2 D_2}\ldots.$$
Интеграл по $d\vec{k}_d$ свелся к гауссову интегралу. Интегралы по $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ путем замены переменных были сведены к известным табличным интегралам.
- При $d = 4 - 2\varepsilon$ была получена формула для $\Sigma_v(p^2)$.

Все эти шаги относятся к первому пункту алгоритма – регуляризации: бесконечный интеграл превращен в конечный (пока ε не устремлено к нулю).

Ренормировка

Второй пункт алгоритма – ренормировка, которая заключается в том, что все исходные параметры теории, которые считались физическими, необходимо выразить через действительно наблюдаемые параметры, которые будут конечными.

Электрический заряд e_0 заменим на наблюдаемый электрический заряд с множителем $Z_\alpha(\varepsilon)$:

$$e_0 \to Z_\alpha^{\frac{1}{2}} e,$$

фермионное поле переопределим как

$$\psi \to Z_\psi^{\frac{1}{2}} \psi,$$

для фотонного поля аналогично

$$A_0^\mu \to Z_A^{\frac{1}{2}} A^\mu.$$

Для полей будем использовать правило: полный пропагатор, который расходится, запишем следующим образом:

$$S = Z_\psi S^r,$$

где Z_ψ – расходящаяся величина, S^r – ренормированный пропогатор, конечная величина. Для фотонного поля аналогично

$$D^{\mu\nu} = Z_A D_r^{\mu\nu}.$$

При рассмотрении примера в вводной лекции, константа была одна:

$$g_0 = z_1 g + z_2 g^2 + z_3 g^3 + \cdots,$$

теперь необходимо перенормировать три величины, введем для них общую формулу:

$$Z_i = 1 + \frac{z_{11}}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) + \left(\frac{z_{22}}{\varepsilon^2} + \frac{z_{21}}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2 + \cdots,$$

где α – ренормированная конечная константа, при этом $\alpha = \alpha(\mu)$. Распишем ренормировку для заряда:

$$\frac{e_0^2}{4\pi} = Z_\alpha \frac{e^2}{4\pi},$$

Если e_0 – затравочный заряд, он не может зависеть от масштабных факторов, то все наблюдаемый заряд должен зависеть от параметра масштаба μ. То же самое касается полей.

Несколько лекций назад стартовала серия лекций о распространении электрона, одним из первых упражнений было вычисление размерности всех полей и электрического заряда в d-мерном пространстве. Повторим выкладки, например, для электрического заряда. Распишем ковариантную производную:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - eA_\mu \to \\ [eA_\mu] &= [\partial_\mu] = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] = m. \end{aligned}$$

Размерность Лагранжиана

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}] &= m^d, \\ [\mathcal{L}] &= \left[F_{\mu\nu}^2\right] = \left[\left(\partial_\mu A\right)^2\right] = m^2[A]^2, \end{aligned}$$

тогда для поля можно записать

$$[A] = m^{\frac{d-2}{2}},$$

тогда размерность заряда определяется как

$$\begin{aligned} [e]m^{\frac{d-2}{2}} &= m \to \\ [e] &= m^{1+1-\frac{d}{2}} = m^{2-\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Подставим $d = 4 - 2\varepsilon$:

$$[e] = m^{2-2+\varepsilon} = m^\varepsilon.$$

Действительно, если пространство четырехмерное, то заряд оказывается безразмерным.

Хотелось бы, чтобы константа $\alpha(\mu)$ была безразмерной, однако при выходе в d-мерное пространство e становится величиной, обладающей размерностью. Тогда необходимо домножение на размерный параметр для компенсации размерности:

$$\frac{\alpha(\mu)}{4\pi} = \mu^{-2\varepsilon}\frac{e^2}{4\pi}e^{-\gamma\varepsilon},$$

экспонента $e^{-\gamma\varepsilon}$ в выражении присутствует для того, чтобы α не зависела от константы Эйлера γ (схема $\overline{MS}$). Таким образом,

$$\frac{e_0^2}{(4\pi)^2} = Z_\alpha\frac{e^2}{(4\pi)^2} = Z_\alpha\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\mu^{2\varepsilon}e^{\gamma\varepsilon}.$$

Запишем теперь $-i\Sigma_v$:

$$-i\Sigma_v = -Z_\alpha\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\mu^{2\varepsilon}e^{\gamma\varepsilon}(-p^2)^{-\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon)(1-\gamma\varepsilon)}{\varepsilon},$$

где

$$\mu^{2\varepsilon}(-p^2)^{-\varepsilon} = \left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^\varepsilon,$$

при $\varepsilon \to 0$

$$e^{\gamma\varepsilon}(1-\gamma\varepsilon) = (1+\gamma\varepsilon)(1-\gamma\varepsilon) + \cdots = 1 - (\gamma\varepsilon)^2 + \cdots = 1 + \cdots.$$

Тогда для $-i\Sigma_v$ справедливо следующее выражение:

$$-i\Sigma_v = -Z_\alpha\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^\varepsilon\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Воспользуемся формулой для «одетого» пропагатора:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$S(p) = \frac{\hat{p}^{-1}}{1-\Sigma_v} \to$$
$$\hat{p}S(p) = \frac{1}{1-\Sigma_v} = \hat{p}Z_\psi S^r.$$

Рассмотрим отдельно равенство

$$\frac{1}{1-\Sigma_v} = \hat{p}Z_\psi S^r,$$

где S^r – конечный нерасходящийся пропагатор, описывающий распространение электрона с учетом вакуумных флуктуаций, $\hat{p}$ нерасходящаяся величина, в Z_ψ и $\frac{1}{1-\Sigma_v}$ есть расходимость. Разделим обе части уравнения на Z_ψ:

$$\hat{p}S^r = \frac{1}{Z_\psi(1-\Sigma_v)}.$$

Поскольку слева записана конечная величина, значит и справа величина конечная. Из этого условия найдем константу Z_ψ.

Перепишем $-i\Sigma_v$ через экспоненту:

$$-i\Sigma_v = -\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\, e^{\varepsilon \ln\frac{\mu^2}{-p^2}} Z_\alpha \frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\left(1+\varepsilon\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\right)Z_\alpha(1+\varepsilon),$$

выделим все слагаемые, в которых появляется полюс вида $\frac{1}{\varepsilon}$, при этом Z_α положим равным 1:

$$-i\Sigma_v = -\frac{\alpha(\mu)}{4\pi\varepsilon}\left(1+\varepsilon\ln\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)+\varepsilon\right) = -\frac{\alpha(\mu)}{4\pi\varepsilon} - \frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\left(1+\varepsilon\ln\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)\right),$$

первое слагаемое расходящееся, сокращается при ренормировке; второе – конечное, попадет в наблюдаемое поведение электрона. Когда процедуры ренормировки и регуляризации только находили свое место, казалось, что бесконечности отбрасываются, в действительности они сокращаются. Иными словами, вводится переопределение величин, которые ранее математически были плохо определены, предполагая, что наблюдаемая величина конечна.

Определим константу Z_ψ:

$$Z_\psi = 1 + \frac{z_{11}}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) + \cdots,$$

перемножим Z_ψ и $(1-\Sigma_v)$:

$$Z_\psi(1-\Sigma_v) = \left[1+\frac{z_{11}}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\right)\right]\left[1+\frac{\alpha(\mu)}{4\pi\varepsilon}+\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\left(1+\varepsilon\ln\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)\right)\right]$$
$$= 1+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}(z_{11}+1)+\cdots$$

из условия конечности записанного произведения можно сделать вывод, что

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$z_{11} = -1.$$

Таким образом, известна константа ренормировки фермионного поля. Запишем теперь ответ для пропагатора:

$$\hat{p}S^r = 1 + \left[\ln -\frac{p^2}{\mu^2} - 1\right]\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}.$$

Итоги

Итак, получен ренормированный конечный пропагатор:

$$S^r = \frac{1}{\hat{p}}\left(1 + \left[\ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) - 1\right]\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\right),$$

в котором появились поправки с зависимостью от p^2, что может быть проверено экспериментально. Вспомним схематично все шаги.

- Был рассмотрен свободный пропагатор фермиона с нулевой массой, к которому были добавлены поправки, являющиеся результатом взаимодействия электрона с полями вакуума м иллюстрируемые диаграммами с петлями. Таких диаграмм может быть построено бесконечно много. В результате вместо «голого» пропагатора вводится «одетый» пропагатор:
$$S_0(p) = \frac{1}{\hat{p}} \rightarrow S(p) = \frac{1}{\hat{p}(1 - \Sigma_v)},$$
где Σ_v расходится.
- Вычисление Σ_v заняло довольно много времени, поскольку требует освоения дополнительных математических методов (виковский поворот, α-представление, гауссов интеграл, Г-функции). В методе размерной регуляризации Σ_v приобрело полюс $\frac{1}{\varepsilon}$:
$$\Sigma_v = \frac{1}{\varepsilon} + \text{конечнечная часть}.$$
Ренормированный пропагатор оказался зависящим от конечной части Σ_v, бесконечная часть исчезает за счет переопределения фермионного поля.
- Так, в изначальном вычислении неверным было следующее: считалось, что можно взять свободное фермионное поле в качестве физически наблюдаемой величины. Это было бы верно для фермиона в вакууме в отсутствии любых других полей. Однако свободное распространение электрона сквозь квантовое электромагнитное поле не аналогично распространению электрона в отсутствии полей. Поэтому поле и пропагатор обращаются в ноль после взаимодействия с электромагнитным полем обращается в ноль, безмассовый электрон покоится, хотя должен был двигаться со скоростью света. Поэтому было потребовано, чтобы появилось новое ренормированное электронное поле $S^r(p)$, которое отвечает электрону без

взаимодействия с учетом бесконечного числа взаимодействий с электромагнитным полем. При этом исходный пропагатор зависит от константы Z_ψ, содержащей расходимости:

$$\begin{aligned} S(p) &= Z_\psi S^r(p), \\ S^r &= \frac{1}{\hat{p}}\left(1+\left[\ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right)-1\right]\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\right). \end{aligned}$$

Так, при безмассовом электроне пропагатор является сложным, справедливость зависимости может быть проверена экспериментально. В следующих лекциях будет рассмотрена аналогичная ситуация. Зададимся вопросом: что происходит с фотоном? Будет показано, что для фотона явления похожи – при взаимодействии с электронным полем фотон обездвижен, что противоречит опыту и указывает на ошибку в интерпретации свободных полей как реально наблюдаемых полей. Кроме того, будет показано, как переопределяется электрический заряд и как появляется поляризация вакуума и экранирование заряда.

Лекция 7. Ренормировака пропагатора электрона с ненулевой массой

Нулевая масса электрона

Кратко вспомним материал предыдущих лекций. В рамках курса уже был ренормирован пропагатор электрона, для простоты был рассмотрен безмассовый электрон:

- Пропагатор электрона можно записать в виде
$$iS_0(p) = \frac{i}{\hat{p} - m}.$$
В предыдущих двух курсах использовались такие древесные пропагаторы без учета других возможных переходов электрона из одной точки в другую. В действительности к такому пропогатору необходимо добавить бесконечный ряд пропагаторов с петлями (ряд Дайсона). Такой ряд сводится к обыкновенной геометрической прогрессии, то есть
$$S(p) = (S_0^{-1} - \Sigma)^{-1},$$
где Σ – собственная энергия петлевого участка, переопределяет и импульс, и массу, являющуюся энергией покоя.
- Σ является логарифмически расходящейся величиной. В методе размерной регуляризации Σ имеет вид
$$\Sigma = \frac{1}{\varepsilon} + \text{конечная часть}.$$
- При этом $\frac{1}{\varepsilon}$ сокращается при введении затравочных параметров, в данном случае поля электронов:
$$\psi_0 = Z_\psi^{\frac{1}{2}}\psi,$$
где ψ – ренормированное поле, являющееся наблюдаемым, константа $Z_\psi^{\frac{1}{2}}$ содержит в себе все бесконечные компоненты.
- Для всех констант в методе $\overline{MS}$ принят следующий вид таких констант:
$$Z = 1 + \frac{z_1}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) + \cdots.$$
Требование конечности ренормированного пропагатора можно записать следующим образом:
$$Z_\psi \hat{p} S(p) = \hat{p} S_r(p) = \text{конечное число},$$
где $S(p)$ – одетый пропагатор, $S_r(p)$ – ренормированный пропагатор, Z_ψ – константа.
Первая поправка для константы была вычислена на предыдущей лекции и имеет вид
$$z_{1,\psi} = -1.$$

Так, электрон, являющийся возбуждением электронного поля или волной, который был полностью парализован из-за того, что пропагатор обращался в ноль (амплитуда перехода из одной точки в другую нулевая), теперь снова подвижен, но обладает

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

скоростью света за счет нулевой массы. Принципиально все вычисления довольно простые, но среди них есть несколько классов, которые надо освоить.

Ненулевая масса электрона

Рассмотрим теперь более реалистичный случай с электроном ненулевой массы. Затравочную ненулевую массу электрона обозначим как m_0. Наивно предполагалось, что m_0 – масса, которой обладает электрон, в действительности она оказывается бесконечно большой. На самом деле m_0 не является наблюдаемым параметром, поскольку описывает распространение частицы только в теории без взаимодействия. При подключении взаимодействия необходимо учитывать бесконечный набор диаграмм, при рассмотрении которого становиться очевидно, что электрон обладает другой массой.

Распишем m_0:

$$m_0 = Z_m m,$$

где m – наблюдаемая величина, $m = m(\mu)$ поскольку переход к ренормированным величинам всегда связан с возникновением зависимости наблюдаемой от масштаба. Так, масса перестает быть константой. В ходе лекции будет показано, что с ростом масштаба масса становится меньше, то есть электрон становится легче при больших энергиях. Эффект не является сильным, но концептуально крайне важен.

Перейдем к математическим выкладкам, матрицу 4×4 $\Sigma(p)$ можно разложить на две структуры:

$$\Sigma(p) = \Sigma_v(p^2)\,\hat{p} + m_0\Sigma_s(p^2),$$

где $\Sigma_v(p^2)$ – векторная Σ, $\Sigma_s(p^2)$ – скалярная. Тогда «одетый» затравочный пропагатор перепишем следующим образом:

$$S(p) = \frac{1}{\hat{p} - m_0 - \hat{p}\Sigma_v - m_0\Sigma_s} = \frac{1}{\hat{p}(1-\Sigma_v) - m_0(1+\Sigma_s)} = \frac{1}{1-\Sigma_v}\cdot\frac{1}{\hat{p} - m_0\dfrac{1+\Sigma_s}{1-\Sigma_v}}.$$

$S(p) \to 0$, поскольку по крайней мере $\frac{1}{1-\Sigma_v} \to 0$. Перепишем $S(p)$ через ренормированный пропагатор:

$$S(p) = S_r(p)Z_\psi^{-1} = \frac{1}{Z_\psi(1-\Sigma_v)}\cdot\frac{1}{\hat{p} - m_0\dfrac{1+\Sigma_s}{1-\Sigma_v}}.$$

В случае безмассового электрона для того, чтобы конструкция была конечной, было введено требование конечности выражения $Z_\psi(1-\Sigma_v)$. Поэтому и сейчас потребуем

$$Z_\psi(1-\Sigma_v) = \text{конечн.}$$

Однако одного этого условия недостаточно, введем замену

$$m_0 = Z_m m(\mu) \to$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$S(p) = \frac{1}{Z_\psi(1-\Sigma_v)} \cdot \frac{1}{\hat{p} - m(\mu)\frac{1+\Sigma_s}{1-\Sigma_v}\frac{Z_m Z_\psi}{Z_\psi}},$$

тогда потребуем, чтобы

$$Z_m Z_\psi (1+\Sigma_s) = \text{конечн.}$$

В одной петле Σ_v и Σ_s будут интегралами, тогда явные выражения для них своим образом будут содержать расходящуюся часть и конечную часть. Соотношения для констант Z_m и Z_ψ заданы, $z_{1,\psi}$ найдено. Остается определить $z_{1,m}$. Так, концептуально задача является простой.

Вычисление Σ_s

Вычислим сначала функцию Σ_s для диаграммы на рисунке 7.1.

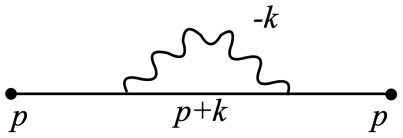
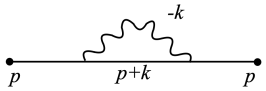


Рис. 7.1. Распространение электрона с излучением виртуального фотона.

Пропагатор в таком случае можно записать в виде



$$= iS_0(p)\big(-i\Sigma(p)iS_0(p)\big), \qquad \text{где}$$

$$-i\Sigma(p) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} ie_0\gamma^\mu \frac{i}{\hat{p}+\hat{k}-m_0} ie_0\gamma^\nu \frac{-ig_{\mu\nu}}{(-k)^2} \rightarrow$$

$$\Sigma(p) = -ie_0^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\gamma^\mu \frac{\hat{p}+\hat{k}+m_0}{\big(\hat{p}+\hat{k}\big)^2 - m_0^2}\gamma_\mu \frac{1}{k^2}.$$

Разобьем интеграл на 2 части – содержащую m_0 и несодержащую. Вспомним, что интеграл расходится в пределе $k \to \infty$, на этом пределе m_0 в знаменателе роли не играет, тогда справедливо упрощение:

$$\Sigma(p) = -ie_0^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\gamma^\mu \frac{\hat{p}+\hat{k}+m_0}{\big(\hat{p}+\hat{k}\big)^2 - m_0^2}\gamma_\mu \frac{1}{k^2} = \hat{p}\Sigma_v(p^2) + m_0\Sigma_s(p^2) \rightarrow$$

$$\Sigma_s(p^2) = -ie_0^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu\gamma_\mu}{\big(\hat{p}+\hat{k}\big)^2 k^2}.$$

Здесь

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = d, \qquad D_1 = (p+k)^2, \qquad D_2 = k^2,$$

тогда выражение для $\Sigma_s(p^2)$ можно переписать в виде

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\Sigma_s(p^2) = -ie_0^2 d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_2 D_1}.$$

На предыдущей лекции был вычислен более общий интеграл:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = i(-1)^{n_1+n_2} \pi^{\frac{d}{2}} (-p^2)^{\frac{d}{2}-n_1-n_2} G(n_1, n_2),$$

где $G(n_1, n_2)$ – безразмерная функция,

$$G(n_1, n_2) = \frac{\Gamma\left(-\frac{d}{2} + n_1 + n_2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - n_1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - n_2\right)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(d - n_1 - n_2)}.$$

Так, Σ_v имела вид

$$\Sigma_v = -ie_0^2 \frac{d-2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_1 D_2},$$

Следовательно, для перехода от Σ_v к Σ_s необходимо $(d-2)$ заменить на d. Выпишем ответ для $\Sigma_s(p^2)$:

$$\Sigma_s(p^2) = 4\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon} + o(\varepsilon).$$

Вычисление ренормировочной константы для массы

Следующим шагом определим ренормировочную константу для массы, вспомним, что конечным должно быть выражение $Z_m Z_\psi (1 + \Sigma_s)$, где

$$\begin{aligned} 1 + \Sigma_s &= 1 + 4\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon} + \cdots, \\ Z_\psi &= 1 - \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon} + \cdots, \\ Z_m &= 1 + \frac{z_{1,m}}{\varepsilon}\frac{\alpha}{4\pi} + \cdots \end{aligned}$$

Все выражение в первом порядке можно переписать в виде

$$Z_m Z_\psi (1 + \Sigma_s) = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left(4 - 1 + z_{1,m}\right)\frac{\alpha}{4\pi} + o(\alpha).$$

Поскольку полученное выражение должно быть конечно, тогда

$$\begin{aligned} 4 - 1 + z_{1,m} &= 0 \rightarrow \\ z_{1,m} &= -3. \end{aligned}$$

Таким образом, ренормировочная константа для массы имеет вид

$$Z_m = 1 - 3\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon} + \cdots.$$

Подведем промежуточные итоги. В результате вычислений были найдены константы, которые позволяют сократить расходимости. полученные константы имеет

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

глубокое следствие – определим, как масса электрона зависит от масштабного параметра.

Бегущая масса электрона

Записав массу m_0 в виде

$$m_0 = Z_m m,$$

ожидаем, что наблюдаемая будет зависеть от масштабного параметра, определим эту зависимость.

m_0 не зависит от параметров, воспользуемся этим. Поскольку m_0 не зависти и от $\ln\mu$, тогда верно следующе:

$$\begin{aligned}\frac{dm_0}{d\ln\mu} = 0 = \frac{dZ_m}{d\ln\mu}\cdot m(\mu) + Z_m\frac{dm(\mu)}{d\ln\mu} \rightarrow \\ \frac{dm(\mu)}{d\ln\mu} + m(\mu)\frac{1}{Z_m}\frac{dZ_m}{d\ln\mu} \quad = \quad 0 \rightarrow \\ \frac{dm(\mu)}{d\ln\mu} + \frac{d\ln Z_m}{d\ln\mu}\, m(\mu) \quad = \quad 0.\end{aligned}$$

Решим полученное уравнение, однако при решении будем использовать информацию, которую получим только в следующей лекции.

В среде теоретиков введено обозначение

$$\frac{d\ln Z_m}{d\ln\mu} \equiv \gamma_m,$$

где γ_m – аномальная размерность массы, вычислим ее. Вспомним, что Z_m зависит от α, которое в свою очередь связано с μ:

$$\gamma_m = \frac{d\ln Z_m}{d\ln\mu} = \frac{\partial\ln Z_m}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\ln\mu} = \frac{\partial\ln Z_m}{\partial\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{d\ln\mu}.$$

Распишем $\ln Z_m$:

$$Z_m = 1 - 3\frac{\alpha(\mu)}{4\pi\varepsilon} + \cdots \rightarrow \ln Z_m = \ln\left(1 - 3\frac{\alpha(\mu)}{4\pi\varepsilon} + \cdots\right).$$

Поскольку $\alpha(\mu)$ малое число, разложим логарифм в ряд по α:

$$\ln Z_m \approx -\frac{3\alpha}{4\pi\varepsilon},$$

тогда

$$\frac{\partial\ln Z_m}{\partial\alpha} = -\frac{3}{4\pi\varepsilon}.$$

Вычисление для $\frac{\partial\alpha}{\partial\ln\mu}$ будет реализовано на следующей лекции, отметим, что это выражение является β-функцией:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \ln \mu} = \beta(\alpha) = -2\varepsilon\alpha + o(\alpha^2),$$

а β-функция в теории ренормировки – другое название для генератора ренормгруппы. Зная генератор группы, знаем все о группе. Подставим полученные выражения в формулу для γ_m:

$$\gamma_m = \left(-\frac{3}{4\pi\varepsilon}\right)(-2\varepsilon\alpha) = \frac{6\alpha}{4\pi}.$$

Решим теперь дифференциальное уравнение:

$$\frac{dm(\mu)}{d\ln\mu} + \gamma_m(\alpha)m(\mu) = 0.$$

Разделим уравнение на $m(\mu)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\ln m(\mu)}{d\ln\mu} &= -\gamma_m(\alpha) \rightarrow \\ d\ln m(\mu) &= -\gamma_m(\alpha)\, d\ln\mu = -\gamma_m(\alpha)\frac{d\alpha}{\left(\frac{d\alpha}{d\ln\mu}\right)} = -\frac{\gamma_m(\alpha)}{\beta(\alpha)}d\alpha. \end{aligned}$$

На следующей лекции будет показано не только что $\beta(\alpha) = -2\varepsilon\alpha + o(\alpha^2)$, но и

$$\beta(\alpha) = \frac{2}{3\pi}N_f\alpha^2,$$

где N_f – число поколений фермионов, воспользуемся этим результатом:

$$d\ln m(\mu) = -\frac{6\alpha}{4\pi}\frac{3\pi}{2N_f\alpha^2}d\alpha = -\frac{9}{4N_f}\frac{d\alpha}{\alpha} = d\ln\left(\alpha^{-\frac{9}{4N_f}}\right).$$

Проинтегрируем левую и правую части:

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^{\mu'} d\ln m(\mu) &= \int_{\alpha}^{\alpha'} d\ln\left(\alpha^{-\frac{9}{4N_f}}\right) \rightarrow \\ \ln\frac{m(\mu')}{m(\mu)} &= \ln\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{9}{4N_f}}. \end{aligned}$$

Окончательно запишем зависимость наблюдаемой массы от параметра масштаба:

$$m(\mu') = m(\mu)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{9}{4N_f}}.$$

Определим, как изменяется масса с ростом μ'. Для этого снова воспользуемся результатами следующей лекции: электромагнитная константа α' растет с ростом параметра масштаба. При низких энергиях $\alpha = \frac{1}{137}$, на уровне массы Z-бозона (~90 ГэВ)

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$\alpha = \frac{1}{128}$. Так, $\frac{\alpha'}{\alpha} > 0$, следовательно $\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{9}{4N_f}}$ с ростом μ уменьшается. Поэтому масса с ростом μ будет уменьшаться степенным образом (рис. 7.2).

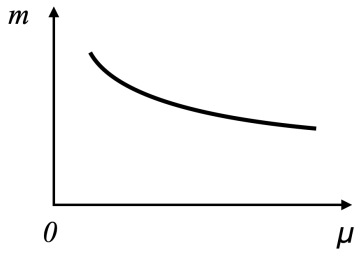


Рис. 7.2. Зависимость массы частицы от параметра масштаба μ.

Алгоритм по шагам

Резюмируем результаты, касающиеся ренормировки электронного поля.

- Пошагово была вычислена серия диаграмм, показано, что «голый» пропагатор преобразуется в «одетый»:
$$S_0 \to S = (S_0^{-1} - \Sigma)^{-1},$$
где Σ – собственная энергия для петли, отвечает возбуждению электромагнитного поля электронным полем. В общем случае
$$\Sigma(p) = \Sigma_v(p^2)\,\hat{p} + m_0\Sigma_s(p^2),$$
где Σ_v и Σ_s расходятся, что приводит к парадоксу: амплитуда равна нулю, волна не распространяется.
- Следующим шагом была выполнена ренормировка, поскольку величины, которые ранее считались наблюдаемыми, в действительности являются затравочными величинами теории и справедливы только в случае отсутствия взаимодействия:
$$\begin{aligned} \psi_0 &= Z_\psi^{\frac{1}{2}}\psi(\mu), \\ m_0 &= Z_m m(\mu). \end{aligned}$$
Здесь $\psi(\mu)$ и $m(\mu)$ – наблюдаемые величины, зависящие от параметра масштаба μ. В результате длинных, но простых вычислений методом размерной регуляризации было показано, что
$$\begin{aligned} Z_\psi &= 1 - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha}{4\pi} + o(\alpha^2), \\ Z_m &= 1 - \frac{3}{\varepsilon}\frac{\alpha}{4\pi} + o(\alpha^2). \end{aligned}$$
- Далее было показано, что зависимость массы электрона от масштабного параметра выражается следующим образом:
$$m(\mu') = m(\mu)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{9}{4N_f}},$$
масса электрона с ростом масштабного параметра уменьшается.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

- Для вычисления амплитуды необходимо рассмотреть конечную часть, оставшуюся после устранения всех бесконечностей. Ренормированный пропагатор имеет теперь вид:

$$S_r(p) = \frac{Z_2(p,\mu)}{\hat{p} - m(\mu)}.$$

При $Z_2(p,\mu) = 1$ выражение аналогично формуле для старого пропагатора, не учитывающего взаимодействия. Так, то что ранее называлось наблюдаемой массой действительно является массой, но возникает зависимость от масштабного параметра μ. Кроме того, функция $Z_2(p,\mu)$ отлична от единицы:

$$Z_2(p,\mu) = 1 + \frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\left[\ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right) - 1\right] + o(\alpha^2).$$

Так, ренормированный пропагатор отличен от наивного представления. Интересно, что полученный результат является физически проверяемым и приводит к точному совпадению теоретических расчетов с экспериментальными данными.

Итак, учет взаимодействия электрона с электромагнитным фоновым полем приводит к парадоксу – амплитуда перехода из одной точки в другую становится нулевой. Решение парадокса заключается в том, что то, что называлось массой, электрическим зарядом, полем или любыми другими наблюдаемыми величинами, на самом деле должно зависеть от *временного окна*. В предыдущих курсах упоминалось, что электрон (или любая другая частица) окружен «шубой» из фотонов, электронов, позитронов и других частиц. Эта «шуба» существенно изменяется на разных масштабах времени – чем выше энергия возбуждений, тем короче время жизни такого возбуждения. Если рассматривать «шубу» в течение долгого времени, где все малые флуктуации усредняются, то заметны только медленные изменения. Такое временное окно соответствует повседневной жизни. При уменьшении временного окна становится заметна более быстрая структура, на таком коротком масштабе масса электрон, например, будет отлична от случая, соответствующего повседневной жизни. Так, с ростом временного окна τ масштаб μ уменьшается, соответственно видим более легкий электрон с большей величиной электрического заряда.

Физическая суть ренормировки заключается в следующем: при некотором масштабном параметре необходимо зафиксировать параметры теории, затем возможно предсказывать, как при другом масштабном параметре μ' ведет себя рассматриваемая теория. То есть, необходимо задание начального условия.

Лекция 8. Поляризация вакуума. Часть 1

Тождество Уорда

На прошлых лекциях было показано, что электрон, распространяющийся в электромагнитном поле, возбуждает это поле. Если это явление не учитывать, то можно прийти к выводу, что электрон не может распространяться в электромагнитном поле. Решение парадокса технически заключается в ренормировке, физически это означает необходимость указывать временной масштаб, в течение которого происходит наблюдение за электроном.

В этой серии лекций изучим процесс распространения фотона через электронное поле. Из общих соображений можно предположить, что качественно будет получена похожая картина. Технически выкладки будут также аналогичны случаю распространения электрона в электромагнитном поле, но будут и отличия, которые необходимо освоить.

Первый прием, которым воспользуемся, называется **«тождество Уорда»**. Рассмотрим характерную диаграмму (рис. 8.1), пусть один из фермионов испускает γ-квант. Тогда такой диаграмме соответствует алгебраическое выражение

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}'^{\mu} \cdot \varepsilon_{\mu}^{*},$$

где ε_{μ}^{*} - волновая функция испускаемого фотона. Уорд заметил, что произведение матричного элемента $\mathcal{M}'^{\mu}$ на импульс k_{μ} вылетающего фотона равно нулю:

$$\mathcal{M}'^{\mu} \cdot k_{\mu} = 0.$$

Так, видно, что 4-импульс выходящего или входящего фотона ортогонален оставшемуся факторизованному матричному элементу. Можно доказать и более общее утверждение. Если фотонов сколь угодно и $\widetilde{\mathcal{M}} \equiv \mathcal{M}'$, то

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\alpha\beta\dots\mu} k_{\alpha} k_{\beta} \dots k_{\mu} = 0.$$

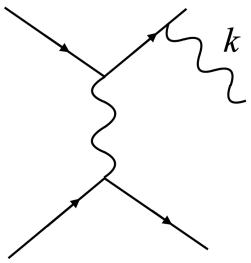


Рис. 8.1. Диаграмма взаимодействия фермионов с испусканием дополнительного γ-кванта.

Тождество Уорда важно, поскольку позволяет упростить формулы в квантовой теории поля и квантовой электродинамике. *Природа тождества связана с калибровочной инвариантностью*. Калибровочная инвариантность заключается в том, что 4-вектор электромагнитного поля можно заменить по следующему правилу:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu f,$$

где $\partial^\mu f$ – частная производная от произвольной функции f, при такой замене наблюдаемые величины не изменятся.

Докажем тождество Уорда, используя калибровочную инвариантность. Распишем 4-вектор электромагнитного поля:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[a_{k\lambda}\varepsilon^\mu_\lambda(k)e^{-ik\cdot x} + \text{эрмитово сопр.}\right],$$

произвольную функцию распишем подобным образом:

$$f(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[b(k)e^{-ik\cdot x} + \text{эрмитово сопр.}\right],$$

где $b(k)$ – вещественная функция. Для частной производной $\partial^\mu f$ справедливо следующее:

$$\begin{aligned}\partial^\mu f(x) &= \partial^\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[b(k)e^{-ik\cdot x} + \text{эрмитово сопр.}\right] = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[b(k)|-ik^\mu|e^{-ik\cdot x} + \text{эрмитово сопр.}\right].\end{aligned}$$

Тогда при калибровке замена

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu f$$

сводится к замене

$$\varepsilon^\mu_\lambda(k) \to \varepsilon^\mu_\lambda(k) + f(k)k^\mu,$$

которая не изменит наблюдаемых. В квантовой теории поля, в квантовой электродинамике наблюдаемые связаны с матричным элементом – квадрат матричного элемента дает нормированную вероятность процесса. Так, условие замены означает, что

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'^\mu\left(\varepsilon_\mu + f(k)k_\mu\right) &= \mathcal{M}'^\mu\varepsilon_\mu \to \\ \mathcal{M}'^\mu \cdot k_\mu &= 0.\end{aligned}$$

Так, было доказано тождество Уорда для фотона на массовой поверхности. Чуть более громоздкое доказательство можно провести и для виртуальных фотонов.

Уравнение Дайсона для пропагатора фотона

Рассмотрим, как будет выглядеть ряд Дайсона для пропагатора фотона, определим, как тождество Уорда поможет его упростить. Пропагатор фотона хорошо известен и может быть распи сан следующим образом:

$$-iD^0_{\mu\nu}(p) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{p^2}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Важно, что такая формула будет справедлива только в свободной теории без взаимодействия.

Пусть электромагнитная волна распространяется в пространстве-времени, заполненном электронным полем. Также, как электронная волна, распространяющаяся через электромагнитное поле, она может возбуждать поле, через которое проходит. Тогда должны появляться диаграммы вида, где электромагнитная волна на время рождает возбуждение электронного поля – виртуальную пару электрон-позитрон. Можно ожидать, что появление таких диаграмм приведет к появлению «одетого» пропагатора. Подобных вставок можно сделать бесконечное число (рис. 8.2), также как и для электрона, рассмотренного на предыдущих лекциях.

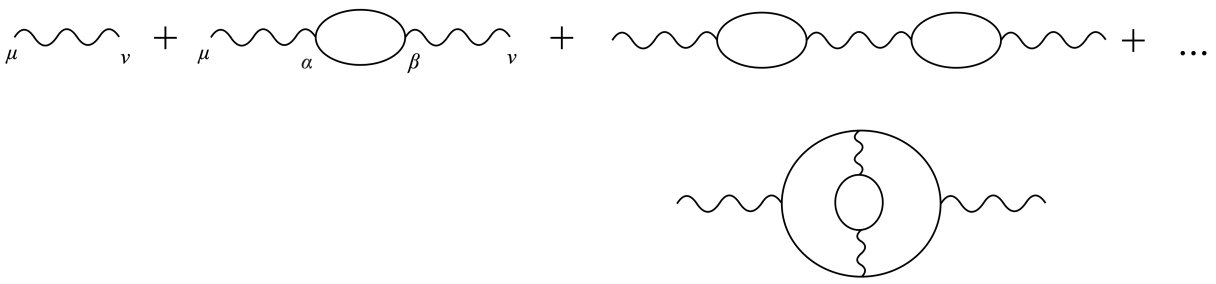


Рис. 8.2. Добавки к «голому» пропагатору.

Запишем выражение для одетого пропагатора:

$$(-i)D_{\mu\nu} = (-i)D^0_{\mu\nu} + (-i)D^0_{\mu\alpha}\left(i\Pi_{\alpha\beta}\right)(-i)D^0_{\beta\nu} + \cdots,$$

$\left(i\Pi_{\alpha\beta}\right)$ соответствует петле электро-позитрон. Сократив $(-i)$, получим

$$D_{\mu\nu} = D^0_{\mu\nu} + D^0_{\mu\alpha}\Pi_{\alpha\beta}D^0_{\beta\nu} + \cdots.$$

$D_{\mu\nu}$ описывает матрицу 4×4, опустив индексы, запишем

$$\begin{aligned} D &= D^0 + D^0\Pi D^0 + \cdots = D^0 + D^0\Pi(D^0 + D^0\Pi D^0 + \cdots) = D^0 + D^0\Pi D \rightarrow \\ D^{-1}_{\mu\nu} &= (D^0)^{-1}_{\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы определить $D_{\mu\nu}$, необходимо записать обратный тензор. Можно проверить, что

$$(D^0)^{-1}_{\mu\nu} = p^2 g_{\mu\nu},$$

поскольку

$$(D^0)^{-1}_{\mu\alpha}D^{0\alpha\nu} = p^2 g_{\mu\alpha}\frac{g_{\alpha\nu}}{p^2} = \delta^\nu_\mu,$$

где δ^ν_μ – единичная матрица.

Что если тензор имеет более сложную структуру? Рассмотрим абстрактный тензор $A^{\mu\nu}$, вспомним, что любой тензор можно разложить на сумму двух структур - параллельную p и перпендикулярную p:

$$A^{\mu\nu} = A_T(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) + A_L p^\mu p^\nu.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

A_T, A_L – безразмерные константы, поперечная и продольная соответственно, поскольку

- структура $p^\mu p^\nu$ является вектором, продольным вектору p:
$$p^\mu p^\nu p_\mu = p^2 p^\nu,$$
- структура $(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$ является вектором, ортогональным вектору p:
$$(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)p_\mu = p^2 p^\nu - p^2 p^\nu = 0.$$

Тогда для обратного тензора справедливо

$$(A^{-1})^{\mu\nu} = A_T^{-1}(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) + A_L^{-1} p^\mu p^\nu.$$

Тождество доказывается элементарно перемножением двух структур:

$$\begin{aligned}(A \cdot A^{-1})^\mu_\nu = A^{\mu\alpha} \cdot A^{-1}_{\alpha\nu} = \\ = \ & [A_T(g^{\mu\alpha}p^2 - p^\mu p^\alpha) + A_L p^\mu p^\alpha][A_T^{-1}(g_{\alpha\nu}p_\alpha p_\nu - p_\alpha p_\nu) + A_L^{-1} p_\alpha p_\nu] = \\ = \ & A_T \cdot A_T^{-1}(g^{\mu\alpha}p^2 - p^\mu p^\alpha)(g_{\alpha\nu}p^2 - p_\alpha p_\nu) + A_L \cdot A_L^{-1} p^\mu p^\alpha p_\alpha p_\nu = \\ = \ & A_T \cdot A_T^{-1}\left(\delta^\mu_\nu p^4 - p^2 p^\mu p_\nu - p^2 p^\mu p_\nu + p^2 p^\mu p_\nu\right) + A_L \cdot A_L^{-1} p^2 p^\mu p_\nu,\end{aligned}$$

поскольку

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu.$$

Если $A_T \cdot A_T^{-1} = A_L \cdot A_L^{-1} = 1$, то

$$(A \cdot A^{-1})^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu p^4.$$

Несложно сообразить, что для того, чтобы p^4 не было, необходимо улучшить базис, а именно разделить его на p^2:

$$\begin{cases} A^{\mu\nu} = A_T\left(g^{\mu\nu} - \dfrac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) + A_L \dfrac{p^\mu p^\nu}{p^2} \\ (A^{-1})^{\mu\nu} = A_T^{-1}\left(g^{\mu\nu} - \dfrac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) + A_L^{-1} \dfrac{p^\mu p^\nu}{p^2} \end{cases},$$

где $A_T^{-1} = \frac{1}{A_T}$, $A_L^{-1} = \frac{1}{A_L}$.

Вернемся к задаче о пропагаторе фотона. решение уравнения Дайсона можно представить в виде:

$$D^{-1}_{\mu\nu} = (D^0)^{-1}_{\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu} = p^2 g_{\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu}.$$

Для следующего шага необходимо сообразить, что $\Pi_{\mu\nu}$ можно расписать как тензор в виде двух слагаемых:

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi_T\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) + \Pi_L \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}.$$

Вспомним про тождество Уорда, можно доказать, что каждая вершина будет обладать таким свойством. Поэтому второе слагаемое зануляется, перепишем оставшуюся часть:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \Pi(p^2)\left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right),$$

где $\Pi(p^2) = \frac{\Pi_T}{p^2}$. Тогда

$$D_{\mu\nu}^{-1} = p^2 g_{\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu} = p^2 g_{\mu\nu} - \Pi(p^2)\left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right).$$

Разложим полученную структуру по ортогональному базису:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{-1} &= p^2 g_{\mu\nu}(1-\Pi) + \Pi p_\mu p_\nu = \\ &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) p^2(1-\Pi) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} p^2(1-\Pi) + p^2 \Pi \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} = \\ &= p^2(1-\Pi)\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) + p^2 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \end{aligned}$$

где $p^2(1-\Pi) = D_T^{-1}$, $p^2 = D_L^{-1}$. Таким образом, для «одетого» пропогатора фотона можно выписать выражение:

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{p^2(1-\Pi)}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) + \frac{1}{p^2}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}.$$

В силу тождества Уорда второе слагаемое зануляется, тогда

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{p^2(1-\Pi)}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right).$$

Вспомним, что свободный пропагатор фотона обладает полюсом при $p^2 = m^2 = 0$, где m – масса фотона, равная нулю. Если $(1-\Pi)$ не содержит в себе $\frac{1}{p^2}$, то полюс $p^2 = 0$ сохраняется. Это означает, что *в результате «одевания» пропагатора фотон остается безмассовой частицей*.

Вычисление функции $\Pi_{\mu\nu}$ и $D_{\mu\nu}$

Вспомним выражение для $D_{\mu\nu}$:

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{p^2(1-\Pi)}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) + \frac{1}{p^2}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}.$$

По тождеству Уорда зануляется второе слагаемое, кроме того, в ноль обращается часть первого слагаемого, тогда пропагатор может быть записан в короткой форме:

$$D_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2(1-\Pi)}.$$

Так как $\Pi(p^2)$ будет расходиться, то «одетый» пропагатор $D_{\mu\nu}$ также будет стремиться к нулю, фотон перестанет распространяться.

Выпишем часть, отвечающую за фермионную петлю:

$$i\Pi_{\mu\nu} = i\left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right)\Pi(p^2).$$

Пусть электрон обладает импульсом $p+k$, а позитрон импульсом k (рис. 8.3)[12], тогда в интегральном виде

[12] В видео-лекции допущена ошибка, импульс позитрона должен быть равен k, иначе 4-импульс в вершине не сохраняется.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$i\Pi_{\mu\nu} = (-1)Tr\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left(ie_0\gamma_\mu\right)\frac{i}{\hat{p}+\hat{k}-m_0}\left(ie_0\gamma_\nu\right)\frac{i}{\hat{k}-m_0}.$$

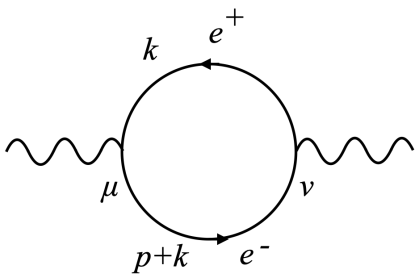


Рис. 8.3. Диаграмма Фейнмана с одной электрон-позитронной петлей.

Примем эту запись за правило Фейнмана для фермионной петли. Без алгебраических вычислений видно, что интеграл расходится, что подтверждает догадку $\Pi_{\mu\nu} \to \infty$ и $D_{\mu\nu} \to 0$.

Выполним простые преобразования, избавимся от тензорных структур и получим $\Pi(p^2)$:

$$\left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right)\Pi(p^2) = ie_0^2\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,Tr\left[\gamma_\mu\frac{\hat{p}+\hat{k}+m_0}{(p+k)^2-m_0^2}\gamma_\nu\frac{\hat{k}+m_0}{k^2-m_0^2}\right].$$ [13]

Домножим слева и справа на тензор $g^{\mu\nu}$ и просуммируем по индексам $\mu\nu$:

$$\Pi(p^2) = \frac{-ie_0^2}{(-p^2)(d-1)}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,Tr\left[\gamma_\mu\frac{\hat{k}+m_0}{k^2-m_0^2}\gamma^\mu\frac{\hat{p}+\hat{k}+m_0}{(p+k)^2-m_0^2}\right],$$

поскольку $\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)g^{\mu\nu} = d-1$. Для γ-матриц ранее были выведены соотношения:

$$\gamma^\mu\hat{A}\gamma_\mu = -(d-2)\hat{A}, \qquad \gamma_\mu\gamma^\mu = d$$

Вычислим след:

$$\begin{aligned} Tr\left[\gamma_\mu\left(\hat{k}+m_0\right)\gamma^\mu\left(\hat{k}+\hat{p}+m_0\right)\right] &= Tr\left[\gamma_\mu\hat{k}\gamma^\mu\left(\hat{k}+\hat{p}\right)\right] + m_0^2 Tr\left[\gamma_\mu\gamma^\mu\right] = \\ &= -(d-2)Tr\left[\hat{k}\left(\hat{k}+\hat{p}\right)\right] + 4m_0^2 d = \\ &= (2-d)4\left(k^2+(k\cdot p)\right) + 4m_0^2 d. \end{aligned}$$

Перепишем $\Pi(p^2)$:

$$\Pi(p^2) = \frac{-ie_0^2 4}{(d-1)(-p^2)}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{(2-d)\left(k^2+(k\cdot p)\right)+m_0^2 d}{(k^2-m_0^2)((p+k)^2-m_0^2)}.$$

Фейнмановская α-параметризация

[13] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Для вычисления полученного интеграла воспользуемся приемом фейнмановской α-параметризации. Идея заключается в том, что произведение в знаменателе можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{A\cdot B}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)=\frac{1}{B-A}\int\limits_A^B dx\frac{1}{x^2},$$

поскольку

$$\int\limits_A^B dx\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_A^B=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}.$$

Введем замену $x=\alpha\cdot A+B\cdot(1-\alpha)$, $dx=d\alpha(A-B)$, тогда

если $\alpha=0$, то $x=B$;

если $\alpha=1$, то $x=A$.

Следовательно,

$$\frac{1}{B-A}\int\limits_A^B dx\frac{1}{x^2} = \frac{1}{B-A}\int\limits_1^0\frac{d\alpha(A-B)}{[\alpha\cdot A+B\cdot(1-\alpha)]^2}=\int\limits_0^1\frac{d\alpha}{[\alpha\cdot A+B\cdot(1-\alpha)]^2}\rightarrow$$

$$\frac{1}{A\cdot B} = \int\limits_0^1\frac{d\alpha}{[\alpha\cdot A+B\cdot(1-\alpha)]^2}.$$

Применим полученную формулу для упрощения знаменателя в выражении для $\Pi(p^2)$. Пусть

$$A=(p+k)^2-m_0^2,\qquad B=k^2-m_0^2,$$

тогда знаменатель подынтегрального выражения приобретает вид

$$\frac{1}{(k^2-m_0^2)((p+k)^2-m_0^2)}=\int\limits_0^1 dx\frac{1}{[x((p+k)^2-m_0^2)+(1-x)(k^2-m_0^2)]^2}.$$

Введем переменную $l=k+xp\rightarrow\ \ k=l-xp$, тогда

$$A = \left(k_p\right)^2-m_0^2=(l+p-xp)^2-m_0^2=l^2+2lp(1-x)+p^2(1-x)^2-m_0^2,$$
$$B = k^2-m_0^2=(l-xp)^2-m_0^2=l^2-2lxp+x^2p^2-m_0^2.$$

Следовательно, для знаменателя справедливо

$$\begin{aligned}Ax+B(1-x) &= \underline{l^2x}+\underline{\underline{2lp(1-x)x}}+p^2(1-x)^2x-\underline{\underline{\underline{m_0^2x}}}+\\ &\quad+\underline{l^2(1-x)}-\underline{\underline{2lxp(1-x)}}+x^2p^2(1-x)-\underline{\underline{\underline{m_0^2(1-x)}}}=\\ &= l^2-m_0^2+p^2x(1-x)(1-x+x)=l^2-m_0^2+p^2x(1-x)\rightarrow\end{aligned}$$

$$Ax+B(1-x) = l^2-\Delta^2,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

где $\Delta^2 = m_0^2 - p^2 x(1-x)$.

Преобразуем числитель:

$$(2-d)\left(k^2 + (k\cdot p)\right) + m_0^2 d = (2-d)((l-xp)^2 + l\cdot p - xp^2) + dm_0^2,$$

поскольку

$$k^2 = (l-xp)^2, \qquad k\cdot p = (l-xp)\cdot p = l\cdot p - xp^2.$$

Упростим выражение:

$$\begin{aligned}(l-xp)^2 + l\cdot p - xp^2 &= l^2 - 2xl\cdot p + x^2p^2 + l\cdot p - xp^2 = \\ &= l^2 + l\cdot p(1-2x) + p^2x(x-1) = \\ &= l^2 + l\cdot p(1-2x) - x(1-x)p^2.\end{aligned}$$

Выпишем теперь полностью выражение для $\Pi(p^2)$:

$$\Pi(p^2) =$$

$$= \frac{-ie_0^2 4}{(d-1)(-p^2)} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)(l^2 - x(1-x)p^2) + m_0^2 d + (2-d)l\cdot p(1-2x)}{(l^2-\Delta^2)^2},$$

где $d^d l = d^d k$. Такие интегралы достаточно легко берутся, выпишем полезные результаты (выводы будут приведены в отдельной лекции):

$$\begin{aligned}\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2-\Delta^2)^2} &= -\frac{id}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}}, \\ \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2-\Delta^2)^2} &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{d}{2}-2}, \\ \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l}{(l^2-\Delta^2)^2} &= 0.\end{aligned}$$ [14]

Воспользуемся этими результатами, и сделав предельный переход $d = 4 - 2\varepsilon,\ \varepsilon \to 0$, получим выражение для $\Pi(p^2)$ с расходящейся и конечной частями:

$$\Pi(p^2) = -\frac{2\alpha(\mu)}{\pi} \int_0^1 dx\, x(1-x) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln\frac{m_0^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} - \gamma + \ln 4\pi\right] + o(\varepsilon),$$

где $\alpha(\mu)$ – константа, зависящая от масштабного параметра. Следующая задача – ренормировка электромагнитного поля для получения конечного пропагатора.

Ренормировка

Вспомним, что «одетый» неренормированный пропагатор имеет вид:

$$D_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2\left(1 - \Pi(p^2)\right)}.$$

[14] В видео-лекции табличные интегралы приведены некорректно.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Присутствие в $\Pi(p^2)$ компоненты, пропорциональной $\frac{1}{\varepsilon}$ превращает $\Pi(p^2)$ в бесконечность и $D_{\mu\nu}$ в ноль, так, фотон перестает распространяться. Ренормируем поле фотона:

$$A_{\mu,0} \to Z_A^{\frac{1}{2}} A_\mu,$$

записанное условие эквивалентно тому, что

$$D_{\mu\nu} Z_A^{-1} = D^r_{\mu\nu},$$

где $D^r_{\mu\nu}$ – ренормированный пропагатор, конечная величина. Тогда для $D^r_{\mu\nu}$ справедливо слудующее:

$$D^r_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 Z_A\big(1 - \Pi(p^2)\big)}.$$

Для того, чтобы ренормированный пропагатор был конечным, необходимо

$$Z_A\big(1 - \Pi(p^2)\big) = \text{конечн.}$$

Любая расходящаяся величина в рассматриваемой теории может быть представлена в виде

$$\Pi(p^2) = \frac{a}{\varepsilon} + f(p^2),$$

где a – константа, $f(p^2)$ – конечная функция. Иначе можно записать

$$\Pi(0) = \frac{a}{\varepsilon} + f(0),$$

тогда

$$\begin{aligned} \Pi(p^2) - \Pi(0) &= f(p^2) - f(0) \to \\ 1 - \Pi(p^2) &= 1 - \Pi(0) - \big(\Pi(p^2) - \Pi(0)\big), \end{aligned}$$

здесь $1 - \Pi(0)$ – расходящаяся часть, $\big(\Pi(p^2) - \Pi(0)\big)$ – конечная. В таком случае, чтобы $Z_A\big(1 - \Pi(p^2)\big)$ была конечной, необходимо выполнение следующего условия:

$$Z_A\big(1 - \Pi(p^2)\big) = Z_A\big(1 - \Pi(0)\big) - Z_A\big(\Pi(p^2) - \Pi(0)\big) = \text{конечн.}$$

Распишем Z_A в виде:

$$Z_A = 1 + \frac{c}{\varepsilon},$$

где c – константа, тогда

$$Z_A \left(1 - \frac{a}{\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{c}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{c - a}{\varepsilon} - \frac{ca}{\varepsilon^2}.$$

Будем работать с только с первым порядком по ε, это означает, что для конечности $Z_A\big(1 - \Pi(0)\big)$ должно быть выполнено условие

$$c = a \quad \text{или} \quad Z_A = 1 + \Pi(0).$$

Для того, чтобы определить ренормировочную константу пропагатора фотона, необходимо определить $\Pi(0)$:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\Pi(0) = -\frac{2\alpha(\mu)}{\pi}\int_0^1 dx\, x(1-x)\left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln\frac{m_0^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} - \gamma + \ln 4\pi\right] + o(\varepsilon).$$

Поскольку

$$\int_0^1 dx\, x(1-x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

то в схеме $\overline{MS}$

$$\Pi(0) = -\frac{2\alpha(\mu)}{\pi}\frac{1}{6}\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{\alpha(\mu)}{3\pi\varepsilon}.$$

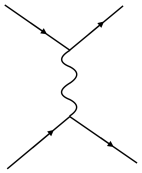
Тогда для константы ренормировки справедливо

$$Z_A = 1 - \frac{4\alpha(\mu)}{3\pi\varepsilon 4} \;\rightarrow\; z_{1,A} = -\frac{4}{3}.$$

Зная константу ренормировки, можно выписать конечный ренормированный пропагатор.

Бегущий электрический заряд

Рассмотрим диаграмму с виртуальным фотоном. Амплитуда такой диаграммы пропорциональна квадрату электрического заряда и «голому» пропагатору фотона. К такой диаграмме необходимо добавить бесконечное число диаграмм с петлями, что приводит к «одеванию» пропагатора:



$$\sim e_0^2 \cdot D_{\mu\nu}^0 = e_0^2 \cdot \frac{g_{\mu\nu}}{p^2} \quad \rightarrow \quad e_0^2 D_{\mu\nu} = e_0^2 \frac{D_{\mu\nu}^0}{1 - \Pi(p^2)},$$

где $\Pi(p^2)$ расходится. Затем необходимо перейти к ренормированному полю

$$e_0^2 D_{\mu\nu} = e_0^2 \frac{D_{\mu\nu}^0}{1 - \Pi(p^2)} \;\rightarrow\; e_0^2 \frac{D_{\mu\nu}^0}{Z_A\big(1 - \Pi(p^2)\big)} = e^2 \frac{D_{\mu\nu}^0}{Z_A\big(1 - \Pi(p^2)\big)},$$

такой пропагатор уже является конечной величиной. Сравнивая исходный древесный пропагатор с «одетым» ренормированным пропагатором, можно прийти к выводы, что во всех рассматриваемых процессах с участием виртуальных фотонов «одевание» пропагатора эквивалентно замене:

$$\frac{\frac{e^2}{4\pi}}{Z_A\big(1 - \Pi(p^2)\big)} = \frac{\alpha}{Z_A\big(1 - \Pi(p^2)\big)}.$$

И если бы $Z_A\big(1 - \Pi(p^2)\big) = 1$, то в результате была бы получена константа электромагнитного взаимодействия, но поскольку есть зависимость от p^2, то получаем эффективную константу электромагнитного взаимодействия:

$$\frac{\alpha}{Z_A\left(1-\Pi(p^2)\right)} = \alpha_{eff}(p^2,\mu^2).$$

Обратим внимание, к тому же результату возможно прийти и другим путем. Можно рассмотреть амплитуду процесса, в которой фигурирует электрический заряд, «голый» пропагатор и расходящаяся часть в знаменателе, и пойти путем ренормировки заряда:

$$e_0^2 \to e^2,$$

где $e_0^2 = Z_\alpha e^2$. В таком случае

$$e_0^2 D_{\mu\nu} = e_0^2 \frac{D_{\mu\nu}^0}{1-\Pi(p^2)} \;\to\; Z_A e^2 \frac{D_{\mu\nu}^0}{1-\Pi(p^2)},$$

тогда можно сказать, что

$$\frac{Z_\alpha}{1-\Pi(p^2)} = \text{конечн.}$$

Следовательно, в электродинамике справедлива формула

$$Z_\alpha = \frac{1}{Z_A}.$$

Возвращаясь к эффективной константе электромагнитного взаимодействия, стоит отметить, что она зависит не только от параметра масштаба, но и от квадрата импульса. Зависимость от квадрата импульса может быть измерена. Для этого необходимо найти конечную часть выражения $Z_A\left(1-\Pi(p^2)\right)$:

$$\text{конечная часть } Z_A\left(1-\Pi(p^2)\right) = 1 - \frac{2\alpha(\mu)}{\pi}\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\frac{m_0^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2}.$$

Рассмотрим предел $p^2 \gg m_0^2$, для всех лептонов кроме t-кварка такое приближение будет хорошим. Тогда можно упростить логарифм:

$$\ln\frac{m_0^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} = \ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right) + \ln x(1-x).$$

Интегралы принимают следующий вид:

$$\int_0^1 dx\, x(1-x) = \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln x(1-x) = -\frac{5}{18}.$$

Конечную часть выражения $Z_A\left(1-\Pi(p^2)\right)$ можно переписать как

$$\text{конечная часть } Z_A\left(1-\Pi(p^2)\right) = 1 - \frac{2\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{6}\ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right) - \frac{5}{18}\right].$$

Теперь можно выписать эффективную электромагнитную константу:

$$\alpha_{eff}\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right)=\frac{\alpha(\mu)}{1-\frac{\alpha(\mu)}{3\pi}\left[\ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right)-\frac{5}{3}\right]}.$$

Общая зависимость от $\alpha_{eff}(-p^2)$ имеет вид, представленный на рисунке 8.4. При малых энергиях $\alpha_{eff}=\frac{1}{137}$, при энергиях порядка квадрата массы Z-бозона $\alpha_{eff}\approx\frac{1}{128}$. Выполнив это упражнение самостоятельно, можно получить $\alpha_{eff}<\frac{1}{128}$, это связано с учетом только одного поколения фермионов, в которое может превращаться виртуальный фотон. Учет всевозможных поколений фермионов (всех лептонов и кварков) приводит к значению эффективной электромагнитной константы $\alpha_{eff}\approx\frac{1}{128}$. Для этого удобно использовать β-функцию.

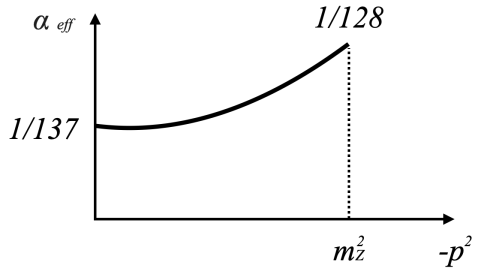


Рис. 8.4. Зависимость от эффективной константы электромагнитного взаимодействия α_{eff} от квадрата 4-мерного импульса с обратным знаком $-p^2$.

Итоги

Итак, в ходе лекции был рассмотрен пропагатор виртуального фотона, который математически описывает амплитуду распространения фотона из одной точки в другую. Показано, что к такому пропагатору при распростарении фотона в фермионных полях необходимо добавить бесконечный ряд, содержащий всевозможные фермионные петли вида частица-античастица. Тогда итоговый пропагатор принимает вид:

$$\frac{g_{\mu\nu}}{p^2\left(1-\Pi(p^2)\right)},$$

где $\Pi(p^2)$ соответствует фермионной петле, является результатом вычисления интеграла по импульсу k, бегущему в петле. $\Pi(p^2)$ расходится, содержит в себе $\frac{1}{\varepsilon}$ и конечную часть. Для устранения расхождения следует воспользоваться методом ренормировки:

$$\frac{g_{\mu\nu}}{p^2\left(1-\Pi(p^2)\right)}\to\frac{g_{\mu\nu}}{p^2Z_A(1-\Pi)},$$

где $Z_A(1-\Pi)$ – конечная величина. Из рассмотрения диаграммы 8.3 следует переопределение электрического заряда:

$$e_0\to e^2,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

что приводит к возникновению эффективной константы электромагнитного взаимодействия $\alpha_{eff}\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right)$. Зависимость $\alpha_{eff}\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right)$ проверена экспериментально в нескольких точках. Таким образом, тбория правильно воспроизводит эксперимент.

Лекция 9. Поляризация вакуума. Часть 2

β-функция

Можно провести аналогичные вычисления для поляризации вакуума без интуитивных соображений – из первых принципов. Для этого необходимо вычислить β-функию, являющуюся генератором ренормгруппы. β-функию можно определить следующим образом:

$$\beta \equiv \frac{d\alpha}{d\ln\mu}.$$

Как и в случае вычисления аномальной размерности массы фермиона следует начать с определения константы α_0, независящей от μ:

$$\alpha_0 = \alpha(\mu) Z_\alpha \mu^{2\varepsilon},$$

тогда

$$\frac{d\alpha_0}{d\ln\mu} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{d\alpha}{d\ln\mu}\cdot Z_\alpha \cdot \mu^{2\varepsilon} + \alpha\frac{\partial Z_\alpha}{\partial\ln\mu}\cdot\mu^{2\varepsilon} + \alpha\cdot Z_\alpha\cdot\mu^{2\varepsilon}\cdot 2\varepsilon = 0,$$

поскольку

$$\begin{aligned}\mu^{2\varepsilon} &= e^{\ln\mu^{2\varepsilon}} = e^{2\varepsilon\ln\mu},\\ \frac{d\mu^{2\varepsilon}}{d\ln\mu} &= \mu^{2\varepsilon}2\varepsilon.\end{aligned}$$

Разделим полученное выражение на $Z_\alpha\cdot\mu^{2\varepsilon}$:

$$\frac{d\alpha}{d\ln\mu} + \alpha\cdot\frac{\partial\ln Z_\alpha}{\partial\ln\mu} + \alpha\cdot 2\varepsilon = 0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{d\alpha}{d\ln\mu},\\ \frac{\partial\ln Z_\alpha}{\partial\ln\mu} &= \frac{\partial\ln Z_\alpha}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\ln\mu} = \beta\frac{\partial\ln Z_\alpha}{\partial\alpha}.\end{aligned}$$

Подставим полученные результаты в исходное уравнение:

$$\beta + \alpha\cdot\beta\,\frac{\partial\ln Z_\alpha}{\partial\alpha} + \alpha\cdot 2\varepsilon = 0 \rightarrow$$

$$\beta = -\frac{2\varepsilon\alpha}{1+\alpha\,\frac{\partial\ln Z_\alpha}{\partial\alpha}}.$$

Константа Z_α вычислена в прошлой лекции и имеет вид

$$Z_\alpha = Z_\alpha(\alpha,\mu) = 1 + \frac{Z_{1,\alpha}}{\varepsilon}\frac{\alpha}{4\pi} + \cdots \rightarrow$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Возьмем логарифм от обоих частей выражения, воспользуемся разложением при малом α:

$$\ln Z_\alpha = \ln\left(1 + \frac{z_{1,\alpha}}{\varepsilon}\frac{\alpha}{4\pi}\right) \approx \frac{z_{1,\alpha}}{\varepsilon}\frac{\alpha}{4\pi},$$

тогда

$$\frac{\partial \ln Z_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{z_{1,\alpha}}{4\pi\varepsilon}.$$

Подставим полученный результат в выражение для β:

$$\beta = -\frac{2\varepsilon\alpha}{1 + \alpha\,\frac{z_{1,\alpha}}{4\pi\varepsilon}} \approx -2\varepsilon\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{4\pi}\frac{z_{1,\alpha}}{\varepsilon}\right) = -2\varepsilon\alpha + \frac{z_{1,\alpha}}{2\pi}\alpha^2.$$

В пределе $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\beta \to \frac{z_{1,\alpha}}{2\pi}\alpha^2.$$

В предыдущей лекции было получено важное соотношение:

$$Z_A = \frac{1}{Z_\alpha}.$$

Для Z_A была вычислена константа для первого порядка:

$$Z_A = 1 + \frac{z_{1,A}}{\varepsilon}\frac{\alpha}{4\pi}, \qquad z_{1,A} = -\frac{4}{3}.$$

Тогда

$$Z_\alpha = \frac{1}{Z_A} = \frac{1}{1 + \frac{z_{1,A}}{\varepsilon}\frac{\alpha}{4\pi}} = 1 - \frac{z_{1,A}}{\varepsilon}\frac{\alpha}{4\pi} \to$$

$$z_{1,\alpha} = -z_{1,A} = \frac{4}{3}.$$

Выпишем итоговый ответ для β-функции:

$$\beta = \frac{4}{3}\,\frac{\alpha^2}{2\pi} = \frac{2}{3\pi}\alpha^2.$$

Эта функция управляет изменением электромагнитной константы.

Вернемся к исходному уравнению:

$$\frac{d\alpha}{d\ln\mu} \equiv \beta = \frac{2}{3\pi}\alpha^2.$$

Решим уравнение путем разделения переменных:

$$\frac{d\alpha}{\alpha^2} = \frac{2}{3\pi}d\ln\mu \;\to\; \int_\alpha^{\alpha'}\frac{d\alpha}{\alpha^2} = \frac{2}{3\pi}\int_\mu^{\mu'} d\ln\mu \;\to\; -\frac{1}{\alpha}\Big|_\alpha^{\alpha'} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} = \frac{2}{3\pi}\ln\frac{\mu'}{\mu},$$

Выразим итоговый ответ для константы электромагнитного взаимодействия:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{1 - \frac{2}{3\pi}\alpha \ln \frac{\mu'}{\mu}}.$$

Если теперь сравнить полученный ответ с результатом предыдущей лекции

$$\alpha_{eff}\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right) = \frac{\alpha(\mu)}{1 - \frac{\alpha(\mu)}{3\pi}\left[\ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right) - \frac{5}{3}\right]},$$

можно заметить, что результаты аналогичны.

Выражения получены для одного поколения фермионов. Для N_f поколений фермионов можно ввести переопределение:

$$\beta = \frac{2}{3\pi}\alpha^2 N_f.$$

Тогда всюду $\frac{2}{3\pi}$ заменяется на $\frac{2}{3\pi}N_f$:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi}N_f \ln\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}.$$

Так, с ростом масштаба константа α увеличивается, что соответствует экспериментальным данным.

Изменение потенциала

Полученные результаты соответствуют ультрарелятивистскому случаю $p^2 \gg m^2$. Рассмотрим теперь другой предел – нерелятивистский случай, $p^2 \ll m^2$. В таком случае удобнее говорить о потенциалах взаимодействия. Следующая часть лекции будет посвящена экранировке электрического заряда. будет рассмотрено изменение потенциала за счет рождения пары электрон-позитрон.

В квантовой теории поля вид потенциала взаимодействия определяется пропагатором. Если есть диаграмма, которая описывается обменом некоторым фотоном или квантом, то правильный нормированный Фурье-образ матричного элемента, описывающего такую диаграмму, будет потенциалом взаимодействия:

$$\frac{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} i\mathcal{M}}{\sqrt{\prod_i 2E_i}\sqrt{\prod_f 2E_f}} \to \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{e^2}{\vec{p}^2}$$

где $\prod_i 2E_i$ – произведение по всем начальным частицам, $\prod_f 2E_f$ – произведение по всем конечным частицам. Вычисление приведет к зависимости вида

$$\frac{\alpha}{r}, \qquad r = |\vec{x}|.$$

Если обменная частица массивная, то пропагатор будет иметь вид

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{e^2}{\vec{p}^2 + m_A^2} = \frac{\alpha}{r} e^{-m_A r},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

так, *потенциал становится короткодействующим*.

Пропагатор был переопределен в предыдущей лекции, конечная часть знаменателя приобрела вид

$$\text{конечная часть } Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big) = 1+\frac{2\alpha(\mu)}{\pi}\int\limits_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2-x(1-x)p^2}\right).$$ [15]

Вычисление конечной части пропагатора и взятие интеграла приведет к поправке к потенциалу.

Поправка к лэмбовскому сдвигу

Будем рассматривать только изменение импульса, считая взаимодействие упругим:

$$p^2 = -\vec{p}^2.$$

В конечной части пропагатора присутствует масштабный фактор μ, говоря о низкоэнергетичной физике следует рассматривать μ порядка массы электрона m, тогда

$$\ln\left(\frac{m^2}{m^2+x(1-x)\vec{p}^2}\right).$$

При[16] $-p^2 \ll m^2$

$$\frac{m^2}{m^2+x(1-x)\vec{p}^2} = \frac{1}{1+x(1-x)\dfrac{\vec{p}^2}{m^2}} = 1-x(1-x)\frac{\vec{p}^2}{m^2},$$

тогда

$$\ln\left(1-x(1-x)\frac{\vec{p}^2}{m^2}\right) = -x(1-x)\frac{\vec{p}^2}{m^2}.$$

Найдем теперь конечную часть $Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big)$:

$$Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big) = 1-\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dx\, x(1-x)(-x)(1-x)\frac{\vec{p}^2}{m^2} = 1-\frac{2\alpha}{\pi}\frac{\vec{p}^2}{30m^2},$$

поскольку

$$\int\limits_0^1 dx\, x^2(1-x)^2 = \int\limits_0^1 dx\, x^2(1-2x+x^2) = \frac{x^3}{3}-\frac{2x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

В таком случае для потенциала справедливо следующее выражение:

[15] В видео-лекции допущена ошибка в знаке, корректный вариант конечная часть $Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big) = 1+\frac{2\alpha(\mu)}{\pi}\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2-x(1-x)p^2}\right)$.

[16] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $-p^2 \ll m^2$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$V(r) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{e^2}{\vec{p}^2 Z_A\left(1-\Pi(p^2)\right)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{e^2}{\vec{p}^2 Z_A\left(1+\frac{\alpha}{15\pi}\frac{\vec{p}^2}{m^2}\right)} \to$$

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{15\pi m^2}\delta^3(\vec{x}).$$

Поправка для потенциала приведет к поправке энергетических уровней, для разности энергий можно записать

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \delta V = |\psi(0)|^2 \frac{\alpha^2}{15\pi m^2}.$$

Так, достаточно абстрактные вычисления применимы к наблюдаемым величинам. Аналогичным образом можно вычислить и другие поправки. В следующей лекции будет вычислена поправка Юлинга, связанная с экранированием заряда.

Лекция 10. Потенциал Юлинга

Потенциал

В этой лекции будет рассмотрен эффект от экранирования вакуума виртуальными парами электронов и позитронов, первым такой потенциал получил Юлинг. Рассмотрим потенциале в нерелятивистком приближении:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{\vec{p}^2 Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big)},$$

из конструкции $Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big)$ необходимо взять конечную часть, которая будет наблюдаемой. В прошлой лекции было рассмотрено первое приближение, где возникла δ-функция с коэффициентом. Трехмерная δ-функция, например дает вклад в лэмбовский сдвиг. Распишем подробно конструкцию $Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big)$:

$$Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big) = 1 + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2}\right).$$[17]

Масштаб ренормировки – произвольная величина, выберем масштаб μ равный массе электрона m:

$$\mu = m.$$

Выбор физически можно обосновать тем, что работать будем в нерелятивистском пределе.

Нерелятивисткое приближение

Перейдем к нерелятивисткому приближению:

$$p^2 = -\vec{p}^2,$$

тогда преобразуем интеграл:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{\vec{p}^2 Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big)}.$$

Заметим, что интеграл с $\vec{p}^2$ в знаменателе требует аккуратности – необходимо временно добавить регулятор, который позволит вычислить интеграл без промежуточных расходимостей. Введем замену:

$$\vec{p}^2 \to \vec{p}^2 + m_\gamma^2,$$

где m_γ – масса фотона, в ответе устремим ее к нулю[18].

[17] В видео-лекции допущена ошибка, корректное выражение $Z_A\big(1-\Pi(p^2)\big) = 1 + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2-x(1-x)p^2}\right)$.

[18] В видео-лекции допущена ошибка, корректная замена $\vec{p}^2 \to \vec{p}^2 + m_\gamma^2$.

Возьмем интеграл по углам. Перейдем к сферической системе координат:

$$d^3p = p^2 dp\, d\Omega = p^2 dp\, d\cos\theta\ d\varphi.$$

где $\cos\theta \in (-1, 1)$. Возьмем интеграл по углам от экспоненты:

$$\int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi\, e^{+i|\vec{p}||\vec{x}|\cos\theta} = 2\pi \frac{1}{i|\vec{p}|r} e^{i|\vec{p}|r\cos\theta}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{i|\vec{p}|r}\left(e^{i|\vec{p}|r} - e^{-i|\vec{p}|r}\right),$$

где $r \equiv |\vec{x}|$. Заметим, что исходный интеграл можно переписать в следующем виде:

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} dp \frac{p^2}{\left(p^2 + m_\gamma^2\right)p}\, f(p)\, e^{ipr} - \int\limits_{0}^{\infty} dp \frac{p^2}{\left(p^2 + m_\gamma^2\right)p}\, f(p)\, e^{-ipr},$$

где p – переменная интегрирования. При замене $p \to -p$ во втором интеграле можно преобразовать выражение к виду

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp\, p}{p^2 + m_\gamma^2}\, f(p)\, e^{ipr}.$$

Теперь вернемся к исходному определению:

$$V(\vec{x}) = -\frac{e^2}{i(2\pi)^2 r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp\, p}{p^2 + m_\gamma^2} \frac{1}{Z_A\left(1 - \Pi(-p^2)\right)}\, e^{ipr},$$

во избежание путаницы переименуем переменную интегрирования $p \equiv Q$:

$$V(\vec{x}) = -\frac{e^2}{i(2\pi)^2 r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dQ\, Q}{Q^2 + m_\gamma^2} \frac{1}{Z_A\left(1 - \Pi(-Q^2)\right)}\, e^{iQr}.$$

Перейдем в комплексную плоскость, пусть теперь Q – комплексная переменная. Исходный интеграл идет вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$. Если бы в подынтегральном выражении не было бы логарифма, контур интегрирования можно было бы замкнуть сверху, поскольку на мнимой оси показатель экспоненты приобрел бы вид

$$iQr = i \cdot i\, Im\, Q \cdot r = -Im\, Q \cdot r,$$

если $Im\, Q > 0$, то $-Im\, Q \cdot r < 0$. Экспонента от отрицательной величины меньше 1. Тогда в пределе, где радиус контура стремится к бесконечности и, соответственно, $Im\, Q \to \infty$, экспонента уменьшает значение интеграла горазда быстрее, чем растет радиус контура интегрирования. Таким образом, интеграл может быть замкнут сверху (рис. 10.1). При таком подходе исходный интеграл будет преобразован к интегралу по замкнутому контуру:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dQ\, F(Q) = \oint\limits_{C} dQ\, F(Q) = 2\pi i\, Res\, F(Q).$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Рассмотрев подынтегральное выражение, можно определить, что вычет необходимо взять в полюсе $Q = m_\gamma$. При отсутствии компоненты $\frac{1}{Z_A(1-\Pi(-Q^2))}$ в результате был бы получен обычный кулоновский потенциал:

$$2\pi i \, Res \, F(Q) = -\frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$. Наличие $Z_A\left(1 - \Pi(-Q^2)\right)$ в знаменателе изменит ответ, поскольку содержит логарифм, являющийся многозначной функцией.

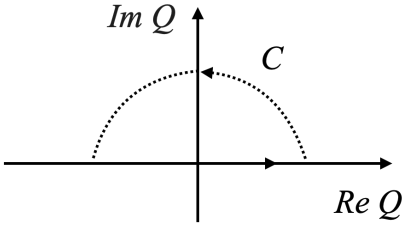


Рис. 10.1. Контур интегрирования в верхней полуплоскости.

Многозначный логарифм

Следует подчеркнуть, что логарифм является многозначной функцией, а у многозначных функций при обходе по контуру могут появляться разрезы.

Пусть Z – комплексное число:

$$Z = |z|e^{i\varphi},$$

где φ – фаза комплексного числа. Тогда для логарифма комплексного числа можно записать

$$\ln Z = \ln|z| + i\varphi.$$

Однако выписанное соотношение не учитывает, что

$$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi n)},$$

где n – целое число. Поэтому выражение для логарифма принимает вид

$$\ln Z = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi n).$$

В теории функции комплексной переменной принято соотношение: когда Z находится на положительной части вещественной оси, $\ln Z$ должно совпадать с обычным логарифмом, встречающимся в математическом анализе. Неоднозначность переводится на отрицательную часть вещественной оси, где определяем разрез по вещественной оси. Если Z находится над разрезом, то будем считать фазу равно π, если ниже, то фазу будем считать равной $-\pi$. Так, при обходе сверху и при обходе снизу будут разные фазы.

Выясним, встречается ли такая ситуация для логарифма в выражении для $Z_A\left(1 - \Pi(-Q^2)\right)$. Рассмотрим аргумент логарифма:

$$\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)p^2},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

где p^2 – квадрат 4-импульса:

1) если $p^2 < 0$, то знаменатель всегда будет положительным, тогда
$$\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)p^2} > 0,$$
разрезов не будет;
2) если $p^2 > 0$, то существует область, в которой знаменатель может быть отрицательным, появляется разрез.

Второй случай необходимо рассматривать подробнее, поскольку через разрез нельзя провести контур интегрирования, необходим обход.

Определим, при каких условиях аргумент логарифма отрицательный, найдем такие x, при которых
$$m^2 - x(1-x)p^2 < 0,$$
считая $p^2 > 0$. Решим квадратное неравенство:
$$x^2 - x + \frac{m^2}{p^2} < 0,$$
$$x_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{p^2}} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}\right).$$

Выражение $\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} = \beta$ соответствует выражению для скорости электрона при рождении пары электрон-позитрон. Тогда
$$x_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \beta).$$
Неравенство верно между двумя решениями:
$$x^2 - x + \frac{m^2}{p^2} < 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(\frac{1}{2}(1-\beta), \frac{1}{2}(1+\beta)\right).$$
В этом интервале появляется разрез. Перейдем к вычислению интеграла.

Вычисление интеграла

В выражении для β перейдем к переменной интегрирования Q:
$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} = \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}}.$$
Определим контур интегрирования в верхней полулоскости. Подынтегральная функция в комплексной плоскости имеет две особенности:

1) полюс $Q = im_\gamma$,
2) особенность от $Z_A\big(1 - \Pi(-Q^2)\big)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Сделаем замену $Q = iq$, тогда

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}},$$

где q – положительная величина. Так, аргумент логарифма становится отрицательным на мнимой оси для Q или на вещественной оси для q. Разрез возникает со значения $Q = i2m$. Контур интегрирования C изображен на рис. 10.2.

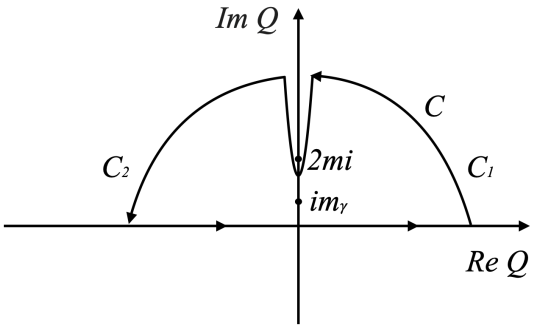


Рис. 10.2. Контур интегрирования C.

Запишем выражение для интегрирования по контуру C в виде отдельных вкладов:

$$\oint\limits_C dQ\, f(Q) = 2\pi i\, Res f(Q)\Big|_{Q = im_\gamma} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2} + \int\limits_{i\infty}^{i2m} dQ\, f(Q_+) + \int\limits_{i2m}^{i\infty} dQ\, f(Q_-).$$

Отсюда можно вычислить исходный интеграл по вещественной оси:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} = 2\pi i\, Res f(Q)\Big|_{Q = im_\gamma} - \int\limits_{C_1} - \int\limits_{C_2} - \int\limits_{i\infty}^{i2m} dQ\, f(Q_+) - \int\limits_{i2m}^{i\infty} dQ\, f(Q_-).$$

Если бы функции $Z_A\big(1 - \Pi(-Q^2)\big)$ не было, то интегралы $\int_{i\infty}^{i2m} dQ\, f(Q_+)$ и $\int_{i2m}^{i\infty} dQ\, f(Q_-)$ взаимно компенсировали бы друг друга. Тогда в результате вычислений был бы получен потенциал кулона. Поэтому можно записать поправку к этому потенциалу:

$$\delta V(r) = \frac{e^2}{i(2\pi)^2 r}\left[-\int\limits_{i2m}^{i\infty} \frac{dQ\, Q}{Q^2 + m_\gamma^2} \frac{e^{iQr}}{Z_A\big(1 - \Pi(-Q^2)\big)} - \int\limits_{i\infty}^{i2m} \frac{dQ\, Q}{Q^2 + m_\gamma^2} \frac{e^{iQr}}{Z_A\big(1 - \Pi(-Q^2)\big)}\right].^{19}$$

Интегралы неидентичны, поскольку логарифм в выражении для $Z_A\big(1 - \Pi(-Q^2)\big)$ имеет разное значение на левом и правом берегах разреза. Перейдем к переменной q и рассмотрим только мнимую часть выражения $Z_A\big(1 - \Pi(-Q^2)\big)$:

[19] В видео-лекции пропущен знак «минус» перед первым интегралом.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\delta V(r) = \frac{e^2}{i(2\pi)^2 r}\int\limits_{2m}^{\infty}\frac{dq\,q}{q^2}e^{-qr}\,i\,Im\left[Z_A\left(1-\Pi(q^2)\right)\right].$$

Вычислим разницы двух мнимых частей $Z_A\left(1-\Pi(q^2)\right)$:

$$\begin{aligned} Im\left[Z_A\left(1-\Pi(q^2)\right)\right] &= \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dx\,x(1-x)\,Im[\ln(m^2-x(1-x)q^2)] = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi}2\pi\int\limits_{x_-}^{x_+} dx\,x(1-x) = 4\alpha\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_-}^{x_+} = \\ &= 4\alpha\left(\frac{x_+^2-x_-^2}{2}-\frac{x_+^3-x_-^3}{2}\right) = \frac{2\alpha}{3}\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\left(1+\frac{2m^2}{q^2}\right).\end{aligned}$$ [20]

Подставим полученное выражение в формулу для поправки к потенциалу:

$$\delta V(r) = \frac{e^2}{(2\pi)^2 r}\int\limits_{2m}^{\infty}\frac{dq}{q}e^{-qr}\frac{2\alpha}{3}\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\left(1+\frac{2m^2}{q^2}\right).$$

Введем приближение, будем рассматривать $r \geq \frac{1}{m}$, которое позволяет легко закончить вычисления. Заметим, что чем больше q, тем меньше вклад дает подынтегральное выражение. Можно считать, что интеграл насыщается при $q = 2m$. Введем замену:

$$q = 2m + t,$$

где $t \in (0, \infty)$. Перепишем выражение для поправки к потенциалу:

$$\delta V(r) = \frac{2\alpha}{3}\frac{e^2}{(2\pi)^2 r}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{2m+t}e^{-2mr}e^{-tr}\sqrt{1-\frac{4m^2}{(2m+t)^2}}\left(1+\frac{2m^2}{(2m+t)^2}\right).$$

Распишем некоторые выражения при малом t:

$$\begin{aligned} 1-\frac{4m^2}{(2m+t)^2} &= \frac{(2m+t)^2-4m^2}{(2m+t)^2} = \frac{2\cdot 2mt+t^2}{(2m+t)^2} \approx \frac{t}{m}, \\ 1+\frac{2m^2}{(2m+t)^2} &\approx \frac{3}{2}\end{aligned}$$

тогда

$$\delta V(r) \approx \frac{3}{2}\frac{2\alpha}{3}\frac{e^2}{(2\pi)^2 r}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{2m}e^{-2mr}e^{-tr}\sqrt{\frac{t}{m}} = \frac{\alpha e^2}{4\pi^2 r}\frac{e^{-2mr}}{m^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{\infty} dt\,e^{-tr}\sqrt{t}.$$

[20] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $Im\left[Z_A\left(1-\Pi(q^2)\right)\right] = 4\alpha\left(\frac{x_+^2-x_-^2}{2}-\frac{x_+^3-x_-^3}{2}\right)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Интеграл сводится к Г-функции:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty dx\, e^{-x} x^{t-1}.$$

Перейдем к безразмерной переменной

$$u \equiv tr, \qquad du = dt\, r,$$

тогда

$$\delta V(r) \approx \frac{\alpha e^2}{4\pi^2 r} \frac{e^{-2mr}}{m^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{du}{r}\, e^{-u} \sqrt{\frac{u}{r}} = \frac{\alpha e^2}{4\pi^2 r^{\frac{5}{2}}} \frac{e^{-2mr}}{m^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty du\, e^{-u} \sqrt{u}$$
$$= \frac{\alpha e^2}{8r(mr)^{\frac{3}{2}}} e^{-2mr} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).^{21}$$

Полученная поправка к потенциалу – потенциал Юлинга. Этот потенциал экранирует исходный заряд электрона, поправка убывает на расстояниях $r > \frac{1}{2m}$.

Рассмотрим физику потенциала Юлинга. Электрический заряд e производит потенциал Кулона, такой электрический заряд, являющийся возбуждением электронного поля, взаимодействует с вакуумным электромагнитным полем. В результате такого взаимодействия рождается пара электрон-позитрон. Такие пары возникают вокруг электрона, который в свою очередь притягивает позитроны и отталкивать электроны. Поэтому пары электрон-позитрон будут выстраиваться в виде диполей (рис. 10.3). На расстояниях, сопоставимых с расстоянием между электроном и рожденными парами $\left(\frac{1}{2m}\right)$, заряд исходного электрона будет частично экранироваться. Эта экранировка описывается потенциалом Юлинга.

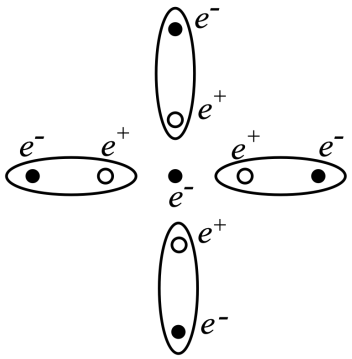


Рис. 10.3. Расположение пар электрон-позитрон вокруг начального электрона.

[21] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $\delta V(r) \approx \frac{\alpha e^2}{8r(mr)^{\frac{3}{2}}} e^{-2mr} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Лекция 11. Вычисление g-2. Часть 1

Введение

Рассмотрим электрически заряженное тело, которое распределено в пространстве (сфера, тор, эллипсоид и т.д.) и вращается. Такое тело обладает *орбитальным моментом* $\vec{L}$. При вращении электрический заряд производит ток, а ток производит *магнитный момент* $\vec{\mu}$. Орбитальный и магнитный моменты обладают линейной связью. Предположим, что распределение массы в пространстве $m(\vec{r})$ и распределение электрического заряда $q(\vec{r})$ описываются одной и той же функцией с разными нормировочными множителями, то связь между магнитным и орбитальным моментом принимает следующий вид:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$$

где $q = \int d^3r\, q(\vec{r})$ – полный заряд, а $m = \int d^3r\, m(\vec{r})$ – масса. Это утверждение можно доказать в общем виде.

Перейдем теперь к *внутренним орбитальным моментам*. Так, например, фермион обладает спином ½ при единичной постоянной Планка. Если отождествить внутренний орбитальный момент и спин, то следует ожидать, что спин будет связан с магнитным моментом также, как связаны орбитальный и магнитный моменты. Однако еще 100 лет назад эксперименты показали, что для электрона

$$\vec{\mu} = g\frac{q}{2m}\vec{S}, \qquad g = 2.$$

Долгие годы такое поведение оставалось загадкой, пока не появилось уравнения Дирака. Из уравнения Дирака следует, что при переходе в нерелятивистский предел

$$g = 2.$$

Позднее появились эксперименты, в которых было показано, что g отличатся от 2 примерно на одну тысячную:

$$\frac{g-2}{2} \approx 10^{-3}.$$

Эксперимент был достаточно точным, чтобы можно было утверждать, что полученный результат не ошибка эксперимента, а физически наблюдаемый эффект. Первыми, кто догадался, как можно получить этот результат были Швингер и Фейнман. В своих версиях электродинамики они получили, что в первой поправке

$$\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

В этих лекциях воспроизведем этот результат из первых принципов. Квантовая теория поля, а именно петлевые поправки, действительно этот результат воспроизводят.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Если вспомнить квантовую теорию поля, квантовая электродинамика формулируется практически определением Лагранжиана взаимодействия, который имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\widehat{D} - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

где $\widehat{D}$ – ковариантная производная, второе слагаемое связано с кинетическим слагаемым электромагнитного поля. Ковариантная производная содержит частную производную и взаимодействие с электромагнитным полем:

$$\widehat{D} = \partial_\mu - qA_\mu.$$

Тогда можно выделить Лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,$$

где A_μ – векторный потенциал электромагнитного поля. Для электрона Лагранжиан взаимодействия принимает вид

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,$$

поскольку $q = -e$, где e – положительная величина. Интересно, что в этом соотношении не фигурирует g.

Вершина взаимодействия электрона с электромагнитным полем

Для того, чтобы выяснить, где появляется g, необходимо вспомнить, что g – характеристика интенсивности взаимодействия магнитного момента с электромагнитным полем. Тогда следует рассмотреть вершину взаимодействия электрона с электромагнитным полем. Элемент диаграммы с такой вершиной изображен на рисунке 11.1. Первая диаграмма древесная, другие три содержат петли с виртуальными фотонами. Такие диаграммы с петлями переопределяют вершину взаимодействия.

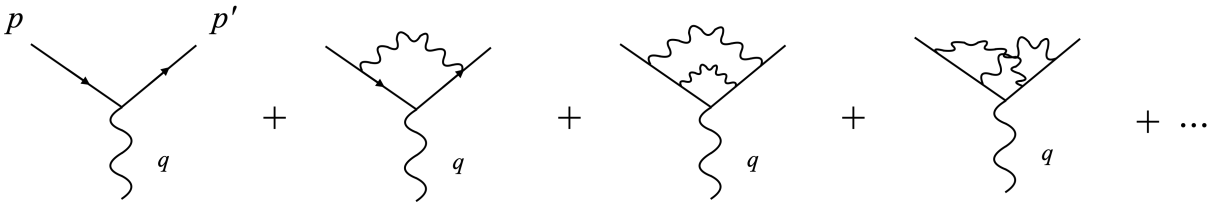


Рис. 11.1. Ряд диаграмм взаимодействия электрона с электромагнитным полем.

Запишем математические выражения (без учета спина) для первой диаграммы:

$$\bar{u}_{p'} ie\gamma^\mu u_p \tilde{A}_\mu(q),$$

где $q = p' - p$. Для второй диаграммы с одной петлей можно записать следующее выражение:

$$\bar{u}_{p'}\, ie\delta\Gamma^\mu(p,p')\, u_p \tilde{A}_\mu(q),$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$\delta\Gamma^{\mu}(p,p')$ - структура, описывающая петлю. Такая запись будет справедлива и для следующих диаграмм рассматриваемого ряда. Видно, что такие диаграммы переопределяют вершину взаимодействия, поскольку теперь в вершине стоит выражение $ie\delta\Gamma^{\mu}(p,p')$. Позднее будет показано, что такое взаимодействие переопределяет g.

Распишем $\delta\Gamma^{\mu}(p,p')$ через возможные структур. $\delta\Gamma^{\mu}(p,p')$ - матрица 4×4, поскольку находится между двумя спинорами. Распишем интересующую структуру через известные матрицы:

$$\delta\Gamma^{\mu}(p,p') = A\gamma^{\mu} + B(p+p')^{\mu} + C(p-p')^{\mu} + D\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}p_{\alpha}p'_{\beta}q_{\gamma},$$

где A, B, C – коэффициенты, которые могут быть матрицами.

Рассмотрим последнюю структуру, $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}p_{\alpha}p'_{\beta}q_{\gamma}$ – антисимметричный тензор, свернутый с объектами, от которых зависит левая часть. Присутствие такого слагаемого нарушает пространственную четность, в то время как электродинамика сохраняет пространственную четность. Поэтому в действительности такой структуры не может быть.

Коэффициенты A, B, C могут зависеть, например, от $\hat{p}, \hat{p}'$. Пусть

$$B = b\hat{p},$$

тогда для выражения

$$Bu_p = b\hat{p}u_p$$

можно воспользоваться уравнением Дирака:

$$\begin{aligned}(\hat{p}-m)u_p &= 0 \rightarrow \\ Bu_p &= bmu_p\end{aligned}$$

Так, коэффициенты A, B, C – матрицы, которые внутри обкладок $\bar{u}_{p'} \ldots u_p$ можно считать константами.

Воспользуемся теперь симметриями. Одна из них – тождество Уорда. Если есть диаграмма, которой отвечает матричный элемент, и этот матричный элемент можно расфакторизовать в виде

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cdot \varepsilon(k),$$

где ε – вектор поляризации виртуального или реального фотона, тогда

$$\mathcal{M}' \cdot k = 0.$$

Физически тождество Уорда связано с калибровочной инвариантностью. Воспользуемся тождеством:

$$q_{\mu} \cdot \bar{u}_{p'}\, ie\delta\Gamma^{\mu}(p,p')\, u_p = 0.$$

q_{μ} – 4-вектор, он проходит через спинор к $\delta\Gamma^{\mu}$, тогда

$$q_{\mu}\delta\Gamma^{\mu} = 0.$$

Распишем теперь компоненты:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

1)

$$\begin{aligned} q_\mu \gamma^\mu &= \hat{q} = \hat{p}' - \hat{p} \rightarrow \\ \bar{u}_{p'}(\hat{p}' - \hat{p})u_p &= m\bar{u}_{p'}u_p - m\bar{u}_{p'}u_p = 0, \end{aligned}$$

2)

$$q_\mu (p + p')^\mu = (p' - p)(p' + p) = (p')^2 - p^2 = m^2 - m^2 = 0,$$

3)

$$\begin{aligned} q_\mu (p - p')^\mu &= (p' - p)(p - p') = -(p' - p)^2 = -\left(p'^2 + p^2 - 2p \cdot p'\right) = \\ &= -(2m^2 - 2p \cdot p'), \end{aligned}$$

В общем случае произведение $p \cdot p'$ не нулевое, что приводит к противоречию. Это означает, что третье слагаемое противоречит тождеству Уорда. Единственный способ устранения противоречия:

$$C = 0.$$

Таким образом, оставшаяся структура содержит только две компоненты:

$$\delta\Gamma^\mu(p, p') = A\gamma^\mu + B(p + p')^\mu.$$

Можно воспользоваться тождеством Гордона:

$$\bar{u}_{p'}\gamma^\mu u_p = \bar{u}_{p'}\left[\frac{(p + p')^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_\nu\right]u_p.$$

Тогда перепишем $\Gamma^\mu(p, p')$:

$$\Gamma^\mu(p, p') = F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\,\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_\nu.$$

где F_1, F_2 – веса, скалярные функции. Далее рассмотрим физический смысл форм-факторов F_1, F_2 и увидим, что в одной из них присутствует коэффициент g.

Природа форм-фактор $\boldsymbol{F_1(q^2)}$

Рассмотрим рассеяние электрона на классическом потенциале, где есть только электростатический потенциал:

$$A^\mu(x) = \left(\varphi(\vec{x}), \vec{0}\right),$$

его Фурье-образ

$$\tilde{A}^\mu(q) = \int d^4x\, e^{-iq\cdot x}A^\mu(x) = 2\pi\delta(q_0)\left(\tilde{\varphi}(\vec{q}), \vec{0}\right).$$

Матричный элемент в таком случае имеет вид:

$$i\mathcal{M} = ie\bar{u}_{p'}\Gamma^\mu(p, p')u_p \cdot \tilde{A}_\mu(q) = ie\bar{u}_{p'}\Gamma^0(p, p')u_p \cdot 2\pi\delta(q_0)\tilde{\varphi}(\vec{q}).$$

Найдем $\Gamma^0(p, p')$:

$$\Gamma^0(p, p') = F_1(q^2)\gamma^0 + F_2(q^2)\,\frac{i\sigma^{0\nu}}{2m}q_\nu,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

где $\sigma^{\mu\nu}$ имеет вид

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$$

и является антисимметричной матрицей относительно перестановки индексов. Поскольку для $\sigma^{0\nu}$ первый индекс нулевой, вторая компонента пространственная: $\sigma^{0i}q_i$, i – пространственный индекс.

Весь матричный элемент пропорционален Фурье-образу от электростатического потенциала. Если электростатический потенциал отвечает достаточно большой области, в которой он определен, например, много больше атомного размера, то чем он больше в конфигурационном пространстве x, тем уже он будет в импульсном пространстве (рис. 11.2). Так, выживают только слагаемые с q, близкими к нулю. В таком случае слагаемое $F_2(q^2)\ \frac{i\sigma^{0\nu}}{2m}q_\nu$ будет зануляться, поскольку явно содержит q. Поэтому в макроскопическом приближении $q^2 \to 0$

$$i\mathcal{M} = ie\bar{u}_{p'}\gamma^0 u_p\ F_1(q^2)\cdot 2\pi\delta(q_0)\tilde{\varphi}(\vec{q}).$$

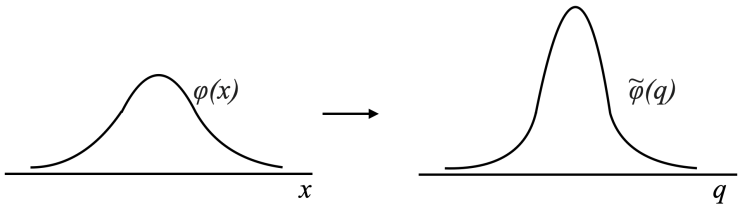


Рис. 11.2. Ширина потенциала в координатном и импульсном пространствах.

Если известен матричный элемент, то в нерелятивистском пределе знаем и потенциал. Вспомним, что в нерелятивистском пределе

$$\bar{u} = u^+\gamma^0, \qquad u^+u \approx 2m\chi'^+\chi,$$

где χ'^+, χ – спиноры, спинор Дирака имеет вид

$$\begin{aligned} u_p &= \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m}\chi \\ \sqrt{E_p - m}\vec{\sigma}\vec{n}_p\chi \end{pmatrix} \approx \sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi \\ 0\end{pmatrix}, \\ u^+_{p'} &\approx \sqrt{2m}(\chi'^+, 0). \end{aligned}$$

Тогда матричный элемент можно записать в следующем виде:

$$i\mathcal{M} = ieF_1(q^2)\ u^+_{p'}u_p\cdot 2\pi\delta(q_0)\tilde{\varphi}(\vec{q}) = ieF_1(q^2)2m\chi'^+\chi\ \cdot 2\pi\delta(q_0)\tilde{\varphi}(\vec{q}).$$

Для потенциала справедливо

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\ e^{i\vec{q}\vec{x}}\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{2m}\sqrt{2m}} = eF_1(0)\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\ e^{i\vec{q}\vec{x}}\tilde{\varphi}(\vec{q})2\pi\delta(q_0) \to \\ V(\vec{x}) &= eF_1(0)\varphi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Можно ожидать, что $eF_1(0)$ должено совпадать с e:

$$F_1(0) = 1.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Тогда $eF_1(q^2) \equiv e_{eff}(q^2)$ – ***эффективный заряд электрона***.

Таким образом, получена физическая интерпретация одного из форм-факторов: $F_1(q^2)$ – форм-фактор электрического заряда, показывает перераспределение электрического заряда электрона в импульсном пространстве.

Природа форм-фактор $F_2(q^2)$

Для того, чтобы обсудить второй форм-фактор, необходимо рассмотреть взаимодействие с векторным потенциалом. Рассмотрим классический векторный потенциал

$$A^\mu = \left(0, \vec{A}(\vec{x})\right).$$

Теперь электрон взаимодействует с магнитным полем, для которого справедливо

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Определим связь между Фурье-образами напряженности магнитного поля и векторного потенциала:

$$\vec{B}_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j \vec{A}_k,$$

поскольку

$$\begin{aligned} \nabla_j \vec{A}_k &= \nabla_j \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}} \tilde{A}_k(\vec{q}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} i q_j e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \tilde{A}_k(\vec{q}) \to \\ \vec{B}_i &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \left[\varepsilon_{ijk} i q_j \tilde{A}_k(\vec{q})\right], \end{aligned}$$

где по определению $\left[\varepsilon_{ijk} i q_j \tilde{A}_k(\vec{q})\right] \equiv \tilde{B}_i(\vec{q})$ – Фурье-образ напряженности магнитного поля.

Распишем теперь матричный элемент:

$$\bar{u}_{p'} \Gamma^\mu ie u_p \cdot \tilde{A}_\mu = ie \bar{u}_{p'} \Gamma^i u_p \cdot \tilde{A}_i = -ie \bar{u}_{p'} \left[F_1 \gamma^i + F_2 \frac{i\sigma^{iv}}{2m} q_v\right] u_p \cdot \vec{\tilde{A}}_i,$$ [22]

поскольку $\tilde{A}_i = -\vec{\tilde{A}}_i$.

При $\vec{q} \to 0$ второе слагаемое зануляется, поскольку оно пропорционально $\vec{q}$. Однако в нерелятивистском пределе

$$\bar{u}_{p'} \gamma^i u_p \to \bar{u}_p \gamma^i u_p,$$

что обозначает компоненту тока электрона, если электрон не изменил своего движения, то

$$\bar{u}_p \gamma^i u_p = 0.$$

[22] Знак «минус» перед $ie\bar{u}_{p'}\Gamma^i u_p \cdot \tilde{A}_i$ не нужен.

Так, в пределе $\vec{q} \to 0$ весь матричный элемент исчезает. Поэтому необходимо рассмотреть малые $\vec{q}$ и сделать разложение.

Воспользуемся тем, что матричный элемент является релятивистским инвариантом, который можно вычислить в любой удобной системе отсчета. Удобно выбрать систему центра масс будущего и прошлого состояний электрона, где

$$\vec{p} = -\frac{\vec{q}}{2}, \qquad \vec{p}' = \frac{\vec{q}}{2} \;\to\; \vec{p}' - \vec{p} = \vec{q}.$$

Вычислим спиноры[23]:

$$u_p \;=\; u_{-\frac{\vec{q}}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{-\frac{\vec{q}}{2}} + m}\,\chi_{-\frac{\vec{q}}{2}} \\ \sqrt{E_{-\frac{\vec{q}}{2}} - m}\,\vec{\sigma}\hat{n}_{-\frac{\vec{q}}{2}}\chi_{-\frac{\vec{q}}{2}} \end{pmatrix},$$

$$u_{p'} \;=\; u_{\frac{\vec{q}}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\frac{\vec{q}}{2}} + m}\,\chi_{\frac{\vec{q}}{2}} \\ \sqrt{E_{\frac{\vec{q}}{2}} - m}\,\vec{\sigma}\hat{n}_{\frac{\vec{q}}{2}}\chi_{\frac{\vec{q}}{2}} \end{pmatrix}.$$

Распишем энергии и разложим ее в ряд по $\vec{q}$:

$$E_{-\frac{\vec{q}}{2}} = E_{\frac{\vec{q}}{2}} = \sqrt{\left(-\frac{\vec{q}}{2}\right)^2 + m^2} = m\sqrt{1 + \frac{\vec{q}^2}{4m^2}} = m\left(1 + \frac{\vec{q}^2}{8m^2} + \cdots\right) \to$$

$$E_{\frac{\vec{q}}{2}} + m = 2m + \frac{\vec{q}^2}{8m} \approx 2m, \qquad E_{\frac{\vec{q}}{2}} - m = \frac{\vec{q}^2}{8m}.$$

Тогда можно переписать выражения для спиноров:

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{2m}\,\chi_{-\frac{\vec{q}}{2}} \\ \sqrt{\frac{\vec{q}^2}{8m}}\,\vec{\sigma}\hat{n}_{-\frac{\vec{q}}{2}}\chi_{-\frac{\vec{q}}{2}} \end{pmatrix}, \qquad u_{p'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2m}\,\chi_{\frac{\vec{q}}{2}} \\ \sqrt{\frac{\vec{q}^2}{8m}}\,\vec{\sigma}\hat{n}_{\frac{\vec{q}}{2}}\chi_{\frac{\vec{q}}{2}} \end{pmatrix}.$$

Упростим полученные выражения:

$$\sqrt{\frac{\vec{q}^2}{8m}}\,\vec{\sigma}\hat{n}_{-\frac{\vec{q}}{2}}\chi_{-\frac{\vec{q}}{2}} = \frac{|\vec{q}|}{\sqrt{8m}}\,\vec{\sigma}\hat{n}_{-\vec{q}}\chi_{-\vec{q}} = -\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{\sqrt{8m}}\chi_{-\vec{q}} \to$$

$$u_p = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_{-\vec{q}} \\ -\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\chi_{-\vec{q}} \end{pmatrix}, \qquad u_{p'} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_{\vec{q}} \\ +\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\chi_{\vec{q}} \end{pmatrix}.$$

[23] В видео-лекции допущена ошибка, верно выражение $u_p = u_{-\frac{\vec{q}}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{-\frac{\vec{q}}{2}} + m}\,\chi_{-\frac{\vec{q}}{2}} \\ \sqrt{E_{-\frac{\vec{q}}{2}} - m}\,\vec{\sigma}\hat{n}_{-\frac{\vec{q}}{2}}\chi_{-\frac{\vec{q}}{2}} \end{pmatrix}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Рассмотрим теперь $\sigma^{i\nu}q_\nu$, где ν может принимать значения 0 или $j = 1,2,3$. Если $\nu = 0$, то возникает q_0, но это разница энергий конечного и начального электронов, нулевая в нерелятивистском приближении. Поэтому остаются только пространственные компоненты:

$$\sigma^{i\nu}q_\nu = \sigma^{ij}q_j,$$

где q_j – 4-вектор. Вспомним, что

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ijk}\sigma_k.$$

Такая конструкция похожа на связь Фурье-образов вектора напряженности магнитного поля и векторного потенциала. Следующий шаг – собрать все результаты, получить формулы для матричного элемента и энергии взаимодействия.

Лекция 12. Вычисление g-2. Часть 2

Вычисление матричного элемента

Продолжим вычисление второго форм-фактора. Ранее для этого мы рассмотрели рассеяние электрона на классическом потенциале и получили матричный элемент вида

$$i\mathcal{M} = ie\bar{u}_{p'}\left[\gamma_i F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{ij}q^j}{2m}F_2(q^2)\right]u_p\vec{\tilde{A}}_i(\vec{q}),$$

где в импульсном представлении

$$\tilde{B}_i = i\varepsilon_{ijk}q_j\tilde{A}_k,$$

а для спиноров в системе центра масс справедливы выражения

$$u_p = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi_{-\vec{q}}\\ -\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\chi_{-\vec{q}}\end{pmatrix}, \qquad u_{p'} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi_{\vec{q}}\\ +\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\chi_{\vec{q}}\end{pmatrix}.$$

Введем обозначения: $\chi_{-\vec{q}} = \chi$, $\chi_{\vec{q}} = \chi'$ и распишем компоненты матричного элемента.

1) Поскольку спинор $\bar{u}_{p'}$ имеет вид

$$\bar{u}_{p'} = u^+_{p'}\gamma^0 = \sqrt{2m}\left(\chi'^+, \chi'^+\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \sqrt{2m}\left(+\chi'^+, -\chi'^+\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\right),$$

а γ^i и γ_i соответствуют следующие выражения

$$\gamma^i = \gamma^0\alpha^i = \gamma^0\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix},$$
$$\gamma_i = \begin{pmatrix}0 & -\sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix},$$

то первое слагаемое матричного элемента можно переписать как

$$\bar{u}_{p'}\gamma_i u_p = 2m\left(\chi'^+, -\chi'^+\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\right)\begin{pmatrix}0 & -\sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ -\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\chi\end{pmatrix} =$$
$$= 2m\left(\chi'^+, -\chi'^+\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\right)\begin{pmatrix}\sigma_i\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\chi\\ \sigma_i\chi\end{pmatrix} = 2m\chi'^+\sigma_i\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\chi - 2m\chi'^+\frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{4m}\sigma_i\chi.$$

Отдельно рассмотрим конструкцию

$$\sigma_i(\vec{q}\cdot\vec{\sigma}) - (\vec{q}\cdot\vec{\sigma})\sigma_i = \sigma_i q_j\sigma_j - q_j\sigma_j\sigma_i = q_j[\sigma_i, \sigma_i],$$

где $[\sigma_i, \sigma_i]$ – коммутатор матриц Паули. Поскольку

$$\sigma_i\sigma_i = \delta_{ij}I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad \rightarrow \quad [\sigma_i, \sigma_i] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k,$$

то

$$\sigma_i(\vec{q}\cdot\vec{\sigma}) - (\vec{q}\cdot\vec{\sigma})\sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}q_i\sigma_k.$$

Перепишем выражение для $\bar{u}_{p'}\gamma_i u_p$:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\bar{u}_{p'}\gamma_i u_p = i\varepsilon_{ijk}q_j(\chi')^+\sigma_k\chi.$$

Поскольку для фермиона оператором спина является

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma},$$

а его среднее между квантовыми состояниями

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\langle f|\vec{S}|i\rangle,$$

где f и i – конечное и начальное состояния соответственно, тогда

$$\bar{u}_{p'}\gamma_i u_p = 2i\varepsilon_{ijk}q_j\langle S_k\rangle.$$

2) Рассмотрим теперь второе слагаемое:

$$\bar{u}_{p'}\sigma_{ij}q^j u_p = 2m\cdot(\chi')^+\varepsilon_{ijk}\sigma_k\vec{q}_j\chi = 2m\cdot 2\varepsilon_{ijk}q_j\langle S_k\rangle,$$

остальные компоненты приводят к следующему порядку малости.

Запишем теперь весь матричный элемент:

$$i\mathcal{M} = ie\cdot 2i\varepsilon_{ijk}q_j\langle S_k\rangle[F_1(q^2) + F_2(q^2)]\vec{\tilde{A}}_i(\vec{q}),$$

поскольку

$$i\varepsilon_{ijk}q_j\vec{\tilde{A}}_i = i\varepsilon_{kij}q_j\vec{\tilde{A}}_i = -i\varepsilon_{kji}q_j\vec{\tilde{A}}_i = -\tilde{B}_k,$$

тогда

$$i\mathcal{M} = -ie\cdot 2m\vec{\tilde{B}}_k\frac{\langle S_k\rangle}{m}[F_1(0) + F_2(0)].$$

Вспомним, что магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{e}{2m},$$

магнитный момент электрона в древесном приближении, не учитывающем вакуумные возмущения,

$$\vec{\mu}_0 = g\mu_B\vec{S} = g\frac{e}{2m}\vec{S},$$

тогда матричный элемент можно переписать в следующем виде:

$$i\mathcal{M} = -i(2m)\vec{\tilde{B}}_k\cdot\langle\vec{\mu}_{0k}\rangle[F_1(0) + F_2(0)].$$

Следующим шагом определим потенциальную энергию взаимодействия:

$$V = -\vec{\mu}\cdot\vec{B},$$

где $\langle\vec{\mu}_{0k}\rangle[F_1(0) + F_2(0)] = \vec{\mu}$. Так, множитель $[F_1(0) + F_2(0)]$ дает вклад в магнитный момент:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{m}\vec{S}\cdot[F_1(0) + F_2(0)] = g\frac{e}{2m}\vec{S}\rightarrow$$

$$\frac{g}{2} = F_1(0) + F_2(0) = 1 + F_2(0)\rightarrow$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$F_2(0) = \frac{g-2}{2}.$$

Таким образом, форм-фактор F_2 при $q^2 = 0$ дает поправку к гиромагнитному отношению g. В отсутствии виртуальных фотонов, которыми обмениваются электроны в начальном и конечном состоянии $F_2 \equiv 0$ и $g \equiv 2$, что и предсказывает уравнение Дирака в рамках релятивисткой квантовой механики. При переходе в квантовую теорию поля, то уравнение Дирака становится не уравнением на волновую функцию, а уравнением, описывающим эволюцию квантового поля. Квантовое поле способно взаимодействовать с электромагнитным полем, что приводит к небольшим поправкам к распределению как электрического заряда, так магнитного заряда. Итак, физический смысл форм-фактора $F_2(q^2)$ можно сформулировать следующим образом: $F_2(q^2)$ – формфактор, описывающий магнитное взаимодействие, его значение в нуле описывает отклонение магнитного момента от древесного магнитного момента.

Вычисление g-2

Перейдем к прямому вычислению $F_2(0) = \frac{g-2}{2}$. Вычислим первую поправку, к которой приводит диаграмма с рисунка 12.1. Поскольку есть виртуальный фотон, связывающий электрон из прошлого и электрон из будущего, при взаимодействии с фотоном в точке μ электрон отличается от электрона древесной диаграммы. Пусть начальный электрон обладает импульсом p, виртуальный фотон обладает импульсом k. Электрон между точками $\beta\mu$ и $\mu\alpha$ оказывается в виртуально состоянии с импульсами $p - k$ и $p - k + q \equiv k' = p' - k$ соответственно, поскольку фотон входит с импульсом q. Конечный электрон будет обладать импульсом $p' = p + q$.

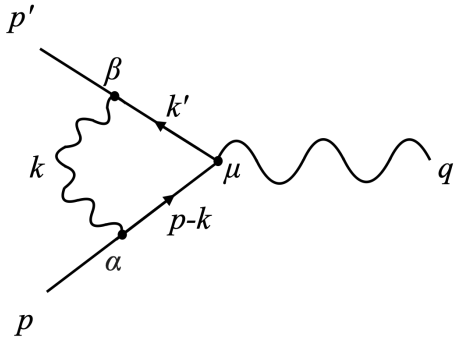


Рис. 12.1. Первая поправка взаимодействия электрона с фотоном (диаграмма с одной петлей).

Запишем алгебраическое выражение, соответствующее диаграмме на рис. 12.1:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{u}_{p'} \left[ie\gamma^\alpha \frac{i}{\hat{k}' - m} ie\gamma^\mu \frac{i}{\hat{p} - \hat{k} - m} ie\gamma^\beta \right] u_p \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \tilde{A}_\mu(q) \equiv \bar{u}_{p'} \delta\Gamma^\mu ieu_p \cdot \tilde{A}_\mu(q).$$

Выражения в d-мерном пространстве, как правило расходятся, что приводит к необходимости использовать регуляризацию и ренормировку. В предыдущих лекциях

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

уже были ренормированы масса m, заряд e, поле фермиона ψ и поле фотона A_μ с использованием констант $Z_m, Z_\alpha, Z_\psi, Z_A$ соответственно. В рассматриваемой теории все эти величины являются наблюдаемыми. В данном случае несмотря на то, что записанный из первых принципов интеграл, возможно, расходится, если g – наблюдаемая величина, то в результате получим сокращение всех расходимостей. Воспользовавшись этим соображением, можно сказать, что если в d-мерном пространстве ответ будет конечным, то и в обычном 4-мерном пространстве результат должен быть конечным. Тогда сразу рассмотрим случай $d = 4$.

Запишем выражение в квадратных скобках, используя представление для γ - матриц в 4-мерном пространстве:

$$[\dots] = -(ie)^3 \left[\gamma^\alpha \frac{(\hat{p}' - \hat{k} + m)}{(p' - k)^2 - m^2}\gamma^\mu \frac{(\hat{p} - \hat{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2}\gamma^\beta\right] \to$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^\mu u_p &= -(ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \bar{u}_{p'} \frac{\gamma^\alpha(\hat{p}' - \hat{k} + m)\gamma^\mu(\hat{p} - \hat{k} + m)\gamma_\alpha}{[(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]k^2} u_p(-i) = \\ &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}_{p'}\left[\gamma^\alpha(\hat{p}' - \hat{k} + m)\gamma^\mu(\hat{p} - \hat{k} + m)\gamma_\alpha\right]u_p}{[(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]k^2}.\end{aligned}$$

Следующим шагом вычислим выражение в квадратных скобках из числителя:

$$[\dots] = \gamma^\alpha(\hat{p}' - \hat{k} + m)\gamma^\mu(\hat{p} - \hat{k} + m)\gamma_\alpha =$$
$$= \gamma^\alpha\left[\hat{p}'\gamma^\mu\hat{p} - \hat{p}'\gamma^\mu\hat{k} + m\hat{p}'\gamma^\mu - \hat{k}\gamma^\mu\hat{p} + \hat{k}\gamma^\mu\hat{k} - m\hat{k}\gamma^\mu + m\gamma^\mu\hat{p} - m\gamma^\mu\hat{k} + m^2\gamma^\mu\right]\gamma_\alpha.$$

Вспомним некоторые формулы:

$$\gamma^\alpha\gamma_\alpha = 4, \qquad \gamma^\alpha\hat{A}\gamma_\alpha = -2\hat{A},$$
$$\gamma^\alpha\hat{A}\hat{B}\gamma_\alpha = 4A\cdot B, \qquad \gamma^\alpha\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_\alpha = -2\hat{C}\hat{B}\hat{A},$$

тогда

$$\begin{aligned}[\dots] &= -2\hat{p}\gamma^\mu\hat{p}' + 2\hat{k}\gamma^\mu\hat{p}' + 2\hat{k}\gamma^\mu\hat{p} - 2\hat{k}\gamma^\mu\hat{k} + \\ &\quad +4p'^\mu m - 4mk^\mu + 4mp^\mu - 4mk^\mu - 2m^2\gamma^\mu.\end{aligned}$$

Упростим полученное выражение. Если $\hat{p}$ в слагаемом стоит справа, то

$$2\hat{k}\gamma^\mu\hat{p}u_p = 2m\hat{k}\gamma^\mu u_p.$$

Если справа записано $\hat{p}'$, то так как $\hat{p}' = \hat{p} + \hat{q}$

$$\hat{p}'u_p = (\hat{p} + \hat{q})u_p = (m + \hat{q})u_p.$$

Для $\bar{u}_{p'}\hat{p}$ выражение можно расписать аналогично:

$$\bar{u}_{p'}\hat{p} = \bar{u}_{p'}(\hat{p}' - \hat{q}) = \bar{u}_{p'}(m - \hat{q}).$$

Таким образом, числитель можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{p'}[\dots]u_p &= \bar{u}_{p'}[-2(m - \hat{q})\gamma^\mu(m + \hat{q}) + 2\hat{k}\gamma^\mu(m + \hat{q}) - 2\hat{k}\gamma^\mu\hat{k} + \\ &\quad +m\left(2\hat{k}\gamma^\mu + 4\left(p'^\mu + p^\mu\right) - 8k^\mu\right) - 2m^2\gamma^\mu]u_p.\end{aligned}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Перепишем интегральное выражение:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}u_p = -ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(p'-k)^2-m^2][(p-k)^2-m^2]k^2}\,\bar{u}_{p'}[2\hat{k}\gamma^{\mu}(m+\hat{q})-$$
$$-2(m-\hat{q})\gamma^{\mu}(m+\hat{q})-2\hat{k}\gamma^{\mu}\hat{k}+m\big(2\hat{k}\gamma^{\mu}+4\big(p'^{\mu}+p^{\mu}\big)-8k^{\mu}\big)-2m^2\gamma^{\mu}]\,u_p.$$

Упростим знаменатель, воспользуемся новым приемом – приемом Швингера, который будет доказан в отдельной лекции, посвященной математическим обоснованиям в теории нормировок:

$$\frac{1}{A\cdot B\cdot C}=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 dz\,\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3},$$

где $D=xA+yB+zC$. В выражении для D выделим общий импульс, найдем такую замену, которая приведет к виду с полным квадратом. Распишем знаменатель:

$$\frac{1}{[(p'-k)^2-m^2][(p-k)^2-m^2]k^2}=$$
$$=\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\frac{2}{[x\cdot[(p'-k)^2-m^2]+y\cdot[(p-k)^2-m^2]+z\cdot k^2]^3}.$$

Выделим полный квадрат:

$$x\cdot[(p'-k)^2-m^2]+y\cdot[(p-k)^2-m^2]+z\cdot k^2$$
$$=k^2[x+y+z]+2k\cdot(-xp'-yp)+x(p')^2-xm^2+y(p^2-m^2).$$

Поскольку

$$(p')^2=m^2\rightarrow\ x(p')^2-xm^2=0,$$
$$p^2=m^2\rightarrow y(p^2-m^2)=0,$$

а $[x+y+z]$ обращается в 1 из-за δ-функции. Тогда перепишем выражение:

$$x\cdot[(p'-k)^2-m^2]+y\cdot[(p-k)^2-m^2]+z\cdot k^2=$$
$$=k^2-2k\cdot(-xp'-yp)+(xp'+yp)^2-(xp'+yp)^2=$$
$$=(k-xp'-yp)^2-(x^2m^2+y^2m^2+2xyp\cdot p').$$

Введем обозначение $k-xp'-yp\equiv l$, и поскольку

$$p'=p+q,\qquad p\cdot p'=p\cdot(p+q)=m^2+p\cdot q,$$

то знаменатель принимает вид

$$x\cdot[(p'-k)^2-m^2]+y\cdot[(p-k)^2-m^2]+z\cdot k^2=$$
$$=l^2-\big(m^2(x^2+y^2)+2x\cdot y(m^2+p\cdot q)\big)\equiv l^2-\Delta^2.$$

Так, знаменатель представляет собой разность квадратов импульса l, являющегося линейной функцией k, и добавки, состоящей из x, y и внешних импульсов p, q.

Существуют еще упрощения, которые можно ввести. Если перевыразить все составляющие, содержащие импульс k, через l, то возникнут слагаемые, линейные по l,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

квадратичные и независящие от l. Интеграл, который предстоит вычислить, будет содержать следующие компоненты:

$$\int d^4l \left\{\frac{1}{D^3}, \frac{l_\alpha}{D^3}, \frac{l_\alpha l_\beta}{D^3}\right\},$$

где первая и третья компоненты дадут вклад, а второй интеграл будет нулевым. Так, при переписывании интеграла сразу можно будет отбросить функции, линейные по l.

Вычисление интеграла

Запишем выражение для поправки в вершинную функцию $\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^\mu u_p$ в виде интеграла через l, исключив из числителя слагаемые, линейные по l:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^\mu u_p = 2ie^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx\, dy\, dz\, \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} *$$

$$* \bar{u}_{p'} \left[\gamma^\mu \left(-\frac{l^2}{2} + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2\right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} 2m^2 z(1-z)\right] u_p,$$

где $D = l^2 - \Delta^2$. Выражение в квадратных скобках приведено к виду, напоминающему ранее использованное разложение:

$$\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2).$$

Так, интеграл от первого слагаемого даст вклад в $F_1(0)$, а второе слагаемое – вклад в $F_2(0)$. Поскольку интересно найти поправку к гиромагнитному отношению, будем рассматривать второе слагаемое:

$$F_2(q^2) = 2ie^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx\, dy\, dz\, \delta(x+y+z-1) \frac{2}{(l^2-\Delta^2)^3} 2m^2 z(1-z).$$

Вычислим интеграл вида:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2-\Delta^2)^3}$$

Перейдем из пространства Минковского в евклидово пространство, где

$$l_0 = il_E^0, \qquad l^2 = -(l_E^0)^2 - \vec{l}^2 = -l_E^2, \qquad d^4l = dl_0 d^3l = i dl_E^0 d^3l_E = i d^4l_E.$$

Тогда

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2-\Delta^2)^3} = -i \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2+\Delta^2)^3}.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$d^4l_E = d\Omega_4 l_E^3 dl_E \rightarrow$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$-i\int\frac{d^4l_E}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l_E^2+\Delta^2)^3}=-\frac{i\Omega_4}{(2\pi)^4}\int_0^\infty\frac{dl_E l_E^3}{(l_E^2+\Delta^2)^3}.$$

Такой интеграл сходится, для наглядности можно перейти к безразмерным переменным:

$$t\equiv\frac{l_E}{\Delta},\qquad l_E=\Delta\cdot t\ \rightarrow$$

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\Delta^2)^3}=-\frac{i\Omega_4}{(2\pi)^4\Delta^2}\int_0^\infty\frac{dt\,t^3}{(t^2+1)^3}.$$

Введем переменную u:

$$u=t^2,\qquad du=2tdt,$$

тогда подынтегральная функция примет вид

$$\frac{dt\,t\,t^2}{(t^2+1)^3}=\frac{du}{2}\frac{u}{(u+1)^3}\rightarrow$$

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\Delta^2)^3}=-\frac{i\Omega_4}{2(2\pi)^4\Delta^2}\int_0^\infty\frac{du\,u}{(u+1)^3}.$$

Рассмотрим интеграл вида

$$I(\alpha)=\int_0^\infty\frac{du}{(\alpha u+1)^2},$$

заметим, что производная по α такого интеграла имеет вид

$$I'(\alpha)=-2\int_0^\infty\frac{du\,u}{(\alpha u+1)^3}\rightarrow\quad\int_0^\infty\frac{du\,u}{(\alpha u+1)^3}=-\frac{1}{2}I'(\alpha).$$

Такой интеграл легко вычислить, введем новую переменную

$$z=\alpha u+1,\qquad dz=\alpha\,du\rightarrow$$

$$I(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_1^\infty\frac{dz}{z^2}=\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{z}\right)\Big|_1^\infty=\frac{1}{\alpha},$$

тогда

$$\int_0^\infty\frac{du\,u}{(\alpha u+1)^3}=\frac{1}{2\alpha^2}.$$

Для исходного рассматриваемого интеграла $\alpha=1$, и поскольку $\Omega_4=2\pi^2$, то

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\Delta^2)^3}=-\frac{i\Omega_4}{2(2\pi)^4\Delta^2}\int_0^\infty\frac{du\,u}{(u+1)^3}=-\frac{i2\pi^2}{64\pi^4\Delta^2}=-\frac{i}{32\pi^2\Delta^2}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Вернемся к вычислению $F_2(q^2)$, подставим полученные результаты:

$$F_2(q^2) = \frac{e^2m^2}{4\pi^2}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\frac{1}{\Delta^2}z(1-z),$$

где $\Delta^2 = -xyq^2 + m^2(1-z)^2$. При произвольном q взять такой интеграл аналитически не просто. Сейчас рассмотрим предел $q^2 = 0$:

$$F_2(0) = \frac{e^2m^2}{4\pi^2}\int_0^1 dx\,dy\,dz\frac{z(1-z)}{m^2(1-z)^2}\delta(x+y+z-1).$$

С помощью δ-функции снимем интегрирование по x:

$$x = 1-y-z,$$

причем необходимо ввести

$$\theta(x)\theta(1-x) = \theta(1-y-z)\theta(1-1+y+z) = \theta(1-y-z)\theta(y+z) = \theta(1-y-z),$$

$$\theta(1-y-z) = \begin{cases} 1-z-y > 0 \\ y < 1-z \end{cases},$$

тогда

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^1 dy\int_0^1 dz\,\theta(1-y-z)\frac{z}{1-z} = \frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^1 dz\frac{z}{1-z}\int_0^1 dy\,\theta(1-y-z) = \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^1 dz\frac{z}{1-z}\int_0^{1-z} dy = \frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^1 dz\,z = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned}$$

Определим g:

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad \rightarrow \\ g &= 2\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

Так, поскольку электрон может излучить виртуальный фотон до того, как электрон провзаимодействует с внешним фотоном или электромагнитным полем, и поглотить этот рожденный виртуальный фотон после взаимодействия, значение магнитного момента изменяется. Значение магнитного момента выглядит так, будто электрон сходит с массовой поверхности: если плотности распределения массы и электрического заряда совпадают, то $g = 2$; в рассмотренном случае электрон сходит с массовой поверхности, поскольку превращается в виртуальную частицу, и для него распределение массы отличается от распределения заряда. Таким образом, возникает отличие в связи между магнитным моментом и спином или орбитальным моментом – магнитный момент становится немного больше.

Итак, в этом курсе уже рассмотрены ренормировки квантовых полей технически и с точки зрения физики. Получены предсказания, которые проверяются

экспериментально, и показывают хорошее соответствие, например, лэмбовский сдвиг и гиромагнитное отношение. Гиромагнитное отношение экспериментально измерено и теоретически вычислено с самой высокой точностью – 11 знаков после запятой. С точки зрения вычислений нужно учитывать более 12 тысяч диаграмм Фейнмана, тогда как в ходе лекции была рассмотрена одна. Для расчетов используется компьютерное моделирование, которое также содержит множество технических деталей, единицы в мире на сегодняшний день могут выполнять такие расчеты. С точки зрения эксперимента необходимо провести высокоточные измерения гиромагнитного отношения, где электрон месяцами крутится в ускорителе, чтобы накопить малейшее отклонение и уменьшить экспериментальные неопределенности.

Лекция 13. Загадки нейтральных каонов. Часть 1

Историческая справка

В 1947 году были экспериментально обнаружены K-мезоны. Существует 4 вида K-мезонов: K^+, K^-, K^0, $\overline{K}^0$. Каоны возникают в реакциях сильно взаимодействующих частиц, например:

$$p + A \to \Lambda + K^0 + \cdots.$$

Каоны вели себя странным образом, предоставляя исследователям 3 загадки.

1) Частицы рождались на масштабах, характерных для сильных взаимодействий:
$$\tau_{\text{рождения}} \sim 10^{-23} \text{ с};$$
при этом время распада было значительно медленнее:
$$\tau_{\text{распада}} \sim (10^{-8} - 10^{-10}) \text{ с}.$$
2) Каоны всегда рождаются парами вместе с другими характерными частицами:
$$\Lambda K^0, \qquad K^+K^-, \qquad \ldots$$
3) В распадах нейтральных K-мезонов нарушалась пространственная четность, в одной части случаев K^0 распадался на 2 π-мезона, в другой части случае на 3 π-мезона:
$$K^0 \to 2\pi, \qquad K^0 \to 3\pi.$$
Если обозначить собственное значение оператора пространственной четности P, то пространственная четность π-мезона $P(\pi) = -1$, тогда
$$P(2\pi) = (-1)^2 = +1,$$
$$P(3\pi) = (-1)^3 = -1,$$
так, нейтральный каон может распадаться на состояния с противоположной пространственной четностью.

Современное объяснение

На сегодняшний день все 3 загадки объясняются довольно просто. «Странные» свойства каонов связаны с наличием в их составе s или $\bar{s}$ кварков. Кварковый состав каонов следующий:

$$|K^+\rangle = |u\bar{s}\rangle, \qquad |K^-\rangle = |\bar{u}s\rangle, \qquad |K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle.$$

1) Медленный распад связан с тем, что в сильных и электромагнитных взаимодействиях элементарные частицы не могут менять тип. Если бы существовали только такие взаимодействия, то рожденный нейтральный каон оставался бы стабильной частицей. Распад K^0 происходит в результате слабого взаимодействия, которое может изменять тип частицы, например:
$$K^0 \to \pi^0\pi^0, \qquad \pi^+\pi^-.$$
Диаграмма на рисунке 13.1 изображает распад $K^0 \to \pi^+\pi^-$. Реакции со слабым взаимодействием протекают гораздо медленнее реакций с сильным взаимодействиям. Поэтому время распада каонов значительно больше времени рождения.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

2) Реакцию $p + A \to \Lambda + K^0 + \cdots$ можно расписать в следующем виде:

$$|p\rangle + |A\rangle = |uds\rangle + |d\bar{s}\rangle + \cdots,$$

тогда вторая загадка объясняется тем, что в реакции, происходящей за счет сильного взаимодействия, должна родиться пара $s\bar{s}$. Таким образом, кварк s и антикварк $\bar{s}$ расходятся по разным конечным состояниям.

3) Поскольку причина распадов – слабые взаимодействия, в которых нарушается пространственная четность, неудивительно, что при распадах каонов наблюдается нарушение пространственной четности.

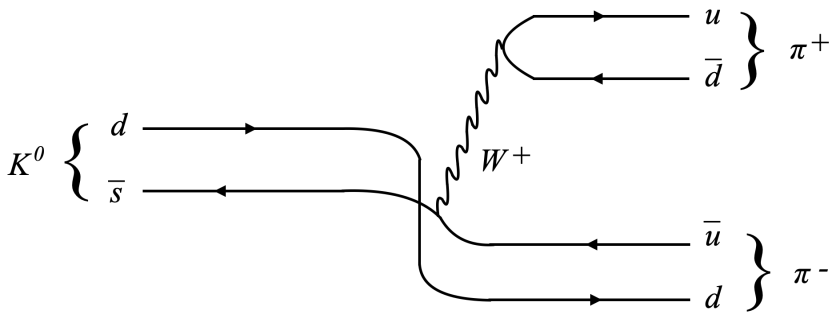


Рис. 13.1. Диаграмма Фейнмана распада $K^0 \to \pi^+\pi^-$.

Пара нейтральных каонов

Таким образом, то, что волновало и удивляло физиков конца сороковых годов прошлого века постепенно с развитием Стандартной модели и теории элементарных частиц стало тривиальной темой. Тем не менее, система из нейтральных K-мезонов проявляет еще более удивительные свойства, которые позволят заглянуть глубже в физику мезонов и увидеть осцилляции между K^0 и $\overline{K}^0$ (аналогичные осцилляциям нейтрино) с нарушением CP-четности. В таких процессах также появляются петли и расходимости.

Выпишем наивные кварковые составы каонов K^0 и $\overline{K}^0$:

$$|K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle, \qquad |\overline{K}^0\rangle = |\bar{d}s\rangle.$$

Системы отличаются странностью на 2 единицы:

$$\Delta S = 2.$$

Экспериментально эти нейтральные каоны ведут себя по-разному. Например, система, содержащая странный кварк s может взаимодействовать с веществом с рождением Λ-гиперона, то есть могут происходить глубоко неупругие процессы. Мезоны, содержащие $\bar{s}$ взаимодействуют в основном упругим образом. Пара частиц K^0 и $\overline{K}^0$ – идеальная квантовая система, на которой можно изучить принципы квантовой механики.

Если говорить о частицах и античастицах, можно выделить 2 больших класса:

1) Совершенно разные частица и античастица, которые отличаются, например, электрическим зарядом (пара e^+e^-);

2) Истинно нейтральные частицы, состояния, для которых частица и античастица являются тождественными ($\gamma, \pi^0, \eta^0, ...$).

K-мезоны находятся между двумя этими классами. С одной стороны, K^0 и $\overline{K}^0$ проявляют разные свойства. С другой стороны, поскольку каоны K^0 и $\overline{K}^0$ могут переходить друг в друга, осциллировать, такая система близка к истинно нейтральной.

Определим теперь CP-четность (четность относительно пространственного и зарядового сопряжения) пары $K^0\overline{K}^0$. Несмотря на то, что в действительности CP-четность нарушается, но на уровне порядка 0.001, будем работать в гипотезе, предполагающей сохранение CP-четность в системе нейтральных каонов:

$$\begin{aligned} C|K^0\rangle &= C|d\bar{s}\rangle = \left|\bar{d}s\right\rangle = |\overline{K}^0\rangle \qquad P|K^0\rangle = P|d\bar{s}\rangle = (-1)|\overline{K}^0\rangle \\ C|\overline{K}^0\rangle &= C\left|\bar{d}s\right\rangle = |d\bar{s}\rangle = |K^0\rangle' \qquad P|\overline{K}^0\rangle = P\left|\bar{d}s\right\rangle = (-1)|K^0\rangle' \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} CP|K^0\rangle &= CP|d\bar{s}\rangle = -|\overline{K}^0\rangle \\ CP|\overline{K}^0\rangle &= CP\left|\bar{d}s\right\rangle = -|K^0\rangle' \end{aligned}$$

Очевидно, что $|K^0\rangle$ и $|\overline{K}^0\rangle$ не являются собственными состояниями оператора CP. Собственные состояния оператора CP будут две линейные суперпозиции:

$$\begin{aligned} |K_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle - |\overline{K}_0\rangle), \\ |K_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle + |\overline{K}_0\rangle), \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} CP|K_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\overline{K}_0\rangle + |K_0\rangle) = (+1)|K_1\rangle, \\ CP|K_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\overline{K}_0\rangle - |K_0\rangle) = (-1)|K_2\rangle. \end{aligned}$$

$|K_1\rangle$ обладает собственным значением $+1$, $|K_2\rangle$ обладает собственным значением -1. Воспользуемся полученным результатам для вывода того, на какие пары и тройки пионов могут распадаться состояния $|K_1\rangle$ и $|K_2\rangle$.

CP (2π)

Вычислим CP-четность двух пионов.

1) В случае двух нейтральных пионов $\pi^0\pi^0$, поскольку

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\bar{u}\rangle - \left|d\bar{d}\right\rangle\right),$$

то для зарядовой четности

$$\begin{aligned} C(\pi^0) &= +1, \\ C(\pi^0\pi^0) &= +1, \end{aligned}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

для пространственной четности

$$P(\pi^0) = -1,$$
$$P(\pi^0\pi^0) = (-1)^2(-1)^l = (-1)^l,$$

где l – орбитальный момент. Объединим вычисления, для CP-четности запишем

$$CP(\pi^0\pi^0) = (-1)^l.$$

2) В случае пары $\pi^+\pi^-$

$$C|\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^-\pi^+\rangle = P|\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^l|\pi^+\pi^-\rangle,$$

тогда

$$CP(\pi^+\pi^-) = (-1)^{2l} = +1.$$

Тогда можно определить CP-четность для двух пионов в распаде K_0-мезонов. Поскольку K_0-мезон – частица с нулевым орбитальным моментом, а орбитальный момент в распадах сохраняется, пара пионов должна обладать нулевым орбитальным моментом. Если $l = 0$, то

$$CP(2\pi) = +1,$$

независимо от того, заряженные пионы или нейтральные.

CP (3π)

Рассмотрим CP-четность трех пионов.

1) Пусть все три пиона нейтральные, тогда

$$C|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = (+1)|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle,$$
$$P|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = (-1)^3|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$CP(\pi^0\pi^0\pi^0) = -1.$$

Так, CP-четность трех пионов отлична от CP-четности двух пионов.

2) Следует рассмотреть также случай, когда два пиона заряжены, а третий нейтральный:

$$C|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = C_{\pi^0}C_{\pi^+\pi^-}|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = (-1)^l|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle,$$
$$P|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = (-1)^3(-1)^l(-1)^L|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = (-1)(-1)^{2l}|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle,$$

где l – орбитальный момент пары $\pi^+\pi^-$, и если L – орбитальный момент π^0, то суммарный момент

$$\vec{l} + \vec{L} = 0 \quad \rightarrow \quad l = L.$$

Тогда для CP-четности

$$CP|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = (-1)^{l+1}|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle.$$

Так, в случае трех пионов ситуация сложнее. В случае трех нейтральных пионов CP-четность не зависит от орбитального момента, в случае двух заражённых и одного нейтрального пионов CP-четность зависит от орбитального момента пары $\pi^+\pi^-$. С точки зрения физики необходимо учесть, что если конечное состояние обладает ненулевым орбитальным моментом, то, например, в квантовой механике в потенциале взаимодействия возникает центробежный барьер, связанный с орбитальным моментом, препятствующий туннелированию через барьер. Вероятность туннелирования

уменьшается. В случае распадов в рамках квантовой теории поля, вероятность распада, где конечное состояние обладает ненулевым орбитальным моментом, будет подавлена по сравнению с ситуациями, где орбитальный момент равен нулю. Поэтому будем считать $l = 0$, тогда

$$CP|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = -|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle.$$[24]

Вспомним, что

$$\begin{cases} CP(K_1) = +1 \\ CP(K_2) = -1' \end{cases}$$

и если предположить, что CP-четность сохраняется, то справедливы следующие распады:

$$\begin{aligned} |K_1\rangle &\rightarrow 2\pi, \\ |K_2\rangle &\rightarrow 3\pi. \end{aligned}$$

При этом существуют подавленные распады

$$|K_1\rangle \rightarrow |\pi^+\pi^-\pi^0\rangle (l \neq 0).$$

Оценка времени жизни K_1, K_2

Одним из практических применений вышеизложенного материала является оценка времени жизни состояний $|K_1\rangle$ и $|K_2\rangle$. K_1 преимущественно распадается на два пиона, K_2 – на три пиона. Можно формально записать выражение для ширины распада, в нем будут фигурировать квадрат матричного элемента и фазовый объем. Если квадраты матричных элементов для обоих случаев будут похожими, то фазовые объемы будут различны. В случае распада K_1 фазовый объем будет соответствовать двум конечным частицам, в случае K_2 – трем конечным частицам. Ранее для слабых распадов была выведена формула:

$$\Gamma \sim G_F^2 \Delta^5,$$

где Δ - фазовый объем или разница масс начальной и конечных частиц. Это выражение можно получить из размерных соображений:

$$G_F \sim \frac{1}{m^2}, \qquad G_F^2 \sim \frac{1}{m^4}, \qquad \Gamma \sim m \quad \rightarrow \quad \Delta \sim m.$$

Δ для двухчастичного и трехчастичного распадов отличаются. Состояния K_1 и K_2 отличаются друг от друга по массе на величину порядка 10^{-16} ГэВ, поэтому можно с хорошей точностью сказать, что

$$m_{K_1} = m_{K_2} \approx m_{K^0} = 499 \text{ МэВ},$$

если не учитывать квантовые тонкости. Тогда для двухчастичного распада

$$\Delta_2 \sim m_{K^0} - 2m_\pi \approx 220 \text{ МэВ}.$$

Для трехчастичного распада

[24] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $CP|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = -|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle$.

$$\Delta_3 \sim m_{K^0} - 3m_\pi \approx 80 \text{ МэВ}.$$

Из этих соображений можно определить отношение ширин распадов:

$$\frac{\Gamma(K \to 2\pi)}{\Gamma(K \to 3\pi)} \sim \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\right)^5 \sim 10^3,$$

что и наблюдается экспериментально. Теперь можно связать отношение ширин распадов с временами жизни:

$$\frac{\tau(K_2 \to 3\pi)}{\tau(K_1 \to 2\pi)} = \frac{\Gamma(K \to 2\pi)}{\Gamma(K \to 3\pi)} \sim 10^3.$$

Так, экспериментально состояния K_1 и K_2 очень отличаются, поскольку обладают совершенно разными временами жизни. состояние K_1 экспериментаторы отождествляют с короткоживущим состоянием:

$$|K_1\rangle = |K_S\rangle.$$

Состояние K_2 отождествляют с долгоживущим:

$$|K_2\rangle = |K_L\rangle.$$

Так, если CP-четность сохраняется, то у состояний K_1 и K_2 есть определенные времена жизни и определенные массы τ_1, m_1 и τ_2, m_2 соответственно.

Рассмотрим массы частиц с точки зрения квантовомеханического вычисления:

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv \langle K_1 | \hat{H} | K_1 \rangle, \\ m_2 &\equiv \langle K_2 | \hat{H} | K_2 \rangle, \end{aligned}$$

где $\hat{H}$ – гамильтониан взаимодействия. Поскольку

$$\begin{aligned} |K_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle - |\overline{K}_0\rangle), \\ |K_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle + |\overline{K}_0\rangle), \end{aligned}$$

тогда при подстановке в выражения для масс получим следующее:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}\left(\{\langle K_0| - \langle \overline{K}_0|\}\hat{H}\{|K_0\rangle - |\overline{K}_0\rangle\}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle K_0|\hat{H}|K_0\rangle + \langle \overline{K}_0|\hat{H}|\overline{K}_0\rangle - \langle K_0|\hat{H}|\overline{K}_0\rangle - \langle \overline{K}_0|\hat{H}|K_0\rangle\right), \\ m_2 &= \frac{1}{2}\left(\{\langle K_0| + \langle \overline{K}_0|\}\hat{H}\{|K_0\rangle + |\overline{K}_0\rangle\}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle K_0|\hat{H}|K_0\rangle + \langle \overline{K}_0|\hat{H}|\overline{K}_0\rangle + \langle K_0|\hat{H}|\overline{K}_0\rangle + \langle \overline{K}_0|\hat{H}|K_0\rangle\right). \end{aligned}$$

Определим разность масс состояний K_1 и K_2:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \langle K_0|\hat{H}|\overline{K}_0\rangle + \langle \overline{K}_0|\hat{H}|K_0\rangle.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Если гамильтониан, описывающий систему, имеет возможность переводить K_0 в $\overline{K}_0$, то есть, говоря на языке квантовой теории поля, существует такая диаграмма Фейнмана, тогда выкладки предсказывают разность между массами m_1 и m_2.

Процесс перехода K_0 в $\overline{K}_0$связан со слабыми взаимодействиями. Дополнительным и сильнейшим аргументом в пользу слабого взаимодействия при распаде K-мезонов является необходимость смены типа частиц. На рисунке 13.2 представлена диаграмма, описывающая переход K_0 в $\overline{K}_0$. Возникает вопрос, почему в переходе возникают именно u-кварки? В те годы, когда рождалось понимание физики нейтральных каонов, про существование c-кварков не было известно. Но если полученную диаграмму применить к вычислению разности масс Δm, то ответ не будет сходиться с экспериментом. При прямолинейных вычислениях диаграмма с рисунка 13.2 предсказывает бесконечно большую разность масс, при обрезании можно получить разность, отличающуюся от эксперимента на семь порядков. Если предположить существование c-кварка, то в диаграмме на рис. 13.2 возникают дополнительные слагаемые, сокращающие бесконечности. Итоговый результат будет совпадать с экспериментальными данными и приведет к оценке массы c-кварка.

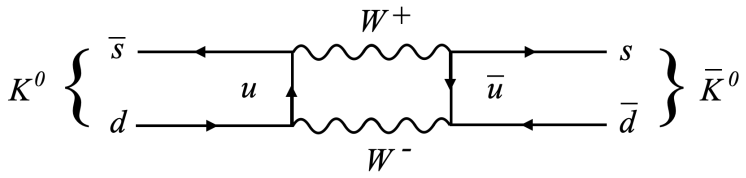


Рис. 13.2. Диаграмма Фейнмана перехода K_0 в $\overline{K}_0$.[25]

[25] В видео-лекции допущена ошибка, справа в диаграмме необходимо записать $\bar{u}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Лекция 14. Загадки нейтральных каонов. Часть 2

Осцилляции странности

Состояния с определенной CP-четностью обладают определенными массами и временами жизни. Состоянию $|K_1\rangle$ соответствует τ_1, m_1, состоянию $|K_2\rangle$ соответствует τ_2, m_2. Если в нулевой момент времени рождается состояние $|K_1\rangle$, то с течением времени волновая функция этого состояния будет даваться следующей формулы:

$$|K_1(t)\rangle = e^{-im_1 t - \frac{\Gamma_1 t}{2}}|K_1(0)\rangle.$$

Аргумент $\frac{\Gamma_1 t}{2}$ описывает затухание волновой функции:

$$|\psi_1(t)|^2 = |\langle K_1|K_1(t)\rangle|^2 = e^{-\frac{t}{\tau_1}} = e^{-\Gamma_1 t}.$$

Аналогичным образом можно расписать волновую функцию для $|K_2\rangle$:

$$|K_2(t)\rangle = e^{-im_2 t - \frac{\Gamma_2 t}{2}}|K_2(0)\rangle.$$

Тот факт, что состояния $|K_1\rangle$ и $|K_2\rangle$ являются суперпозициями состояний $|K_0\rangle$ и $|\overline{K}_0\rangle$ приводит к такому явлению как осцилляция странности.

Представим, что в эксперименте, где протон рассеивается на некотором ядре, в начальный момент времени $t = 0$ рождаются Λ-гиперон и K_0. Поскольку

$$\begin{cases} |K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle - |\overline{K}_0\rangle) \\ |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle + |\overline{K}_0\rangle) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |K_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle + |K_2\rangle) \\ |\overline{K}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle - |K_2\rangle) \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |K_0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1(t)\rangle + |K_2(t)\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-im_1 t - \frac{\Gamma_2 t}{2}}|K_1(0)\rangle + e^{-im_2 t - \frac{\Gamma_2 t}{2}}|K_2(0)\rangle\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[e^{-im_1 t - \frac{\Gamma_1 t}{2}} + e^{-im_2 t - \frac{\Gamma_2 t}{2}}\right]|K_0\rangle + \left[e^{-im_2 t - \frac{\Gamma_2 t}{2}} - e^{-im_1 t - \frac{\Gamma_1 t}{2}}\right]|\overline{K}_0\rangle\right). \end{aligned}$$

Так, итоговый пучок состоит из суперпозиции двух состояний:

$$|K_0\rangle = |d\bar{s}\rangle, \qquad |\overline{K}_0\rangle = |\bar{d}s\rangle.$$

Вычислим вероятность выживания K_0:

$$\begin{aligned} P_{K_0 \to K_0}(t) &= |\langle K_0|K_0(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-im_1 t - \frac{\Gamma_1 t}{2}} + e^{-im_2 t - \frac{\Gamma_2 t}{2}}\right|^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + e^{-\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)t}{2}}\left[e^{i(m_2-m_1)t} + e^{-i(m_2-m_1)t}\right]\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + e^{-\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)t}{2}} \cdot 2\cos(\Delta m \cdot t)\right), \end{aligned}$$

где $\Delta m = m_2 - m_1$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Если бы каоны были стабильными частицами и их ширины распада были бы нулевыми, то каждая из экспонент обращалась бы в единицу:

$$P_{K_0\to K_0}(t)=\frac{1}{4}(2+2\cos(\Delta m\cdot t))=\frac{1}{2}(1+\cos(\Delta m\cdot t)).$$

Полученная в таком пределе формула похожа на формулу осцилляций нейтрино. В таком случае наблюдались бы постоянные осцилляции между K_0 и $\overline{K}_0$. В реальности ширины распадов отличны от нуля, поэтому осцилляции накладываются на экспоненциальное затухание (рис. 14.1, сплошная линия). Такой график также наблюдается экспериментально. Из анализа распределений можно оценить разницу масс, наблюдаемую в эксперименте:

$$\Delta m\sim 10^{-16}\ \text{ГэВ}\sim 10^{-13}\ \text{МэВ}.$$

По сравнению со значениями масс каонов разность мала, поэтому в кинематике можно считать массы каонов одинаковыми. Для тонких эффектов, таких как осцилляции странности, разница масс должна быть учтена. Из-за того, что разность масс мала осцилляции проявляются на макроскопическом масштабе, что делает осцилляции каонов уникальной системой.

Аналогичную величину можно вычислить для вероятности появления $\overline{K}_0$:

$$P_{K_0\to\overline{K}_0}(t)=\frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_1 t}+e^{-\Gamma_2 t}-e^{-\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)t}{2}}\cdot 2\cos(\Delta m\cdot t)\right).$$

Эта вероятность представлена на графике 14.1 в виде пунктирной линии.

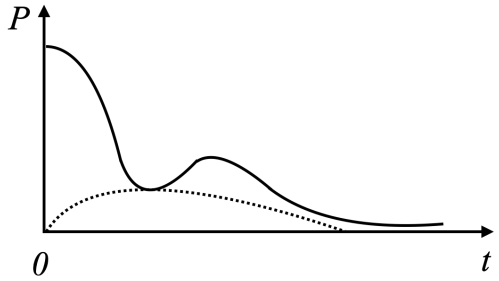


Рис. 14.1. Временные зависимости вероятностей $P_{K_0\to K_0}(t)$ (сплошная линия) и $P_{K_0\to\overline{K}_0}(t)$ (пунктирная линия).

При осцилляциях между K_0 и $\overline{K}_0$ происходят осцилляции странности $\bar{s}$ и s. Кроме того, система нейтральных каонов напоминает мысленный эксперимент с двумя щелями, который часто практикуется в квантовой механике. Роль щелей выполняют состояния с определенной массой. Если после рождения K_0 вести наблюдение за K_1 и K_2, состояниями с определенными массами, то при рассмотрении проекции на одно из этих состояний интерференция пропадает. Так, после рождения K_0 в зависимости от объекта наблюдения осцилляции либо наблюдаются, либо нет.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Как обнаружить осцилляции странности?

Перейдем от математических формул к вопросу о том, как обнаружить осцилляции странности в эксперименте. Рассмотрим эксперимент, пусть на некоторую мишень падает пучок протонов. При взаимодействии с мишенью образуется пучок частиц K_0 или $\overline{K}_0$. Затем в какой-то точке каон распадается на частицы, по которым можно определить, является ли предшествующее распаду состояние состоянием с определенной странностью. При проецировании на состояния с определенной CP-четностью K_1 и K_2 в распаде каона наблюдается 2 или 3 пиона (рис. 14.2). Экспериментально можно установить, что пионы исходят из одной точки и выяснить, что произошел распад K_1 или K_2.

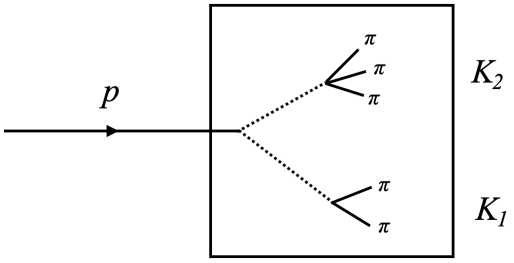


Рис. 14.2. Определение компонент распада протона по числу пионов при распадах K_1 и K_2.

Аналогичным образом можно установить, что произошел распад K_0, для этого исследуют конечные состояния K_{l3}-распадов. В K_{l3}-распадах присутствуют лептон, нейтрино и пион:

$$K^0 \rightarrow l^+ \nu_l \pi^-,$$
$$\overline{K}^0 \rightarrow l^- \bar{\nu}_l \pi^+.$$

Можно однозначно связать знак электрического заряда лептона с тем, распадается K_0 или $\overline{K}_0$. Диаграммы, соответствующие таким распадам представлены на рис. 14.3. Так, достаточно поместить детектор (рис. 14.4) в электромагнитное поле, чтобы, например, искривлялась траектория электрона или мюона. В зависимости от стороны искривления трека и радиуса кривизны можно восстановить электрический знак и момент или импульс, тем самым восстановив кинематику события.

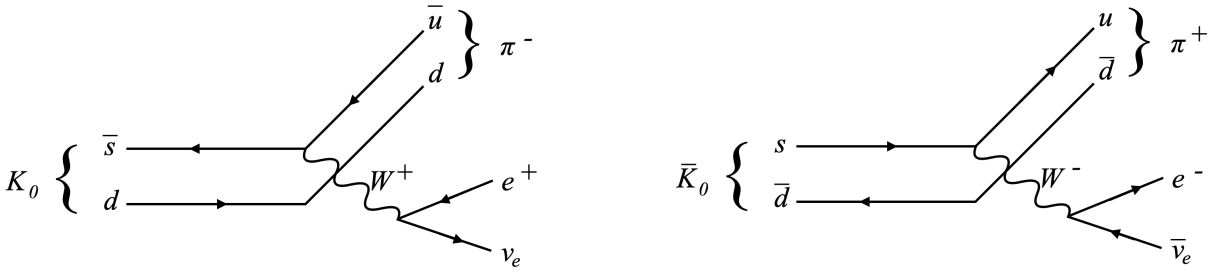


Рис. 14.3. Диаграммы Фейнмана K_{l3}-распадов.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

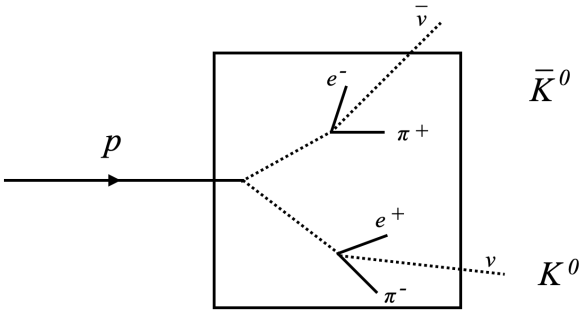


Рис. 14.4. Определение компонент распада протона по знакам электрического заряда лептонов при распадах K^0 и $\bar{K}^0$.

Формулы для вероятности осцилляций можно использовать для вычисления асимметрии:

$$\begin{aligned} P_{K_0\to K_0}(t) &= \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_1 t}+e^{-\Gamma_2 t}+e^{-\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)t}{2}}\cdot 2\cos(\Delta m\cdot t)\right) \\ P_{K_0\to \bar{K}_0}(t) &= \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_1 t}+e^{-\Gamma_2 t}-e^{-\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)t}{2}}\cdot 2\cos(\Delta m\cdot t)\right) \end{aligned} \rightarrow$$

$$A=\frac{P_{K^0\to K^0}(t)-P_{K^0\to \bar{K}^0}(t)}{P_{K^0\to K^0}(t)+P_{K^0\to \bar{K}^0}(t)}=\frac{4e^{\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)t}{2}}\cos(\Delta m\cdot t)}{2(e^{-\Gamma_1 t}+e^{-\Gamma_2 t})}=\frac{N(l^+\pi^-)-N(l^-\pi^+)}{N(l^+\pi^-)+N(l^-\pi^+)},$$

где $N(l^+\pi^-)$ - число событий, в которых рождаются $l^+\pi^-$, $N(l^-\pi^+)$ - число событий, в которых рождаются $l^-\pi^+$. При таком анализе можно более точно определить Δm:

$$\Delta m = 3.5\cdot 10^{-16}\ \text{ГэВ}.$$

Ширины Γ_1 и Γ_2 можно определить, проанализировав двух- и трехпионные распады:

$$N(2\pi)\sim e^{-\Gamma_1 e}, \qquad N(3\pi)\sim e^{-\Gamma_2 t}.$$

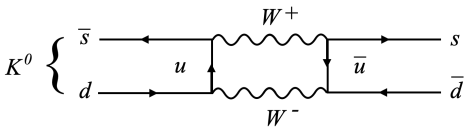
Разность масс K_1 и K_2

Рассмотрим те же процессы глубже с точки зрения квантовой теории поля: определим Δm и рассмотрим, как с этими процессами связано предсказание существования с-кварка.

Воспользуемся диаграммой Фейнмана с рис. 13.2. С помощью двух W-бозонов K_0 превращается в $\bar{K}_0$. Распишем диаграмму, используя кварковые токи: u_d и u_s – токи d и s кварков, v_d и v_s – токи антикварков $\bar{d}$ и $\bar{s}$. Проекционный оператор из Лагранжиана слабого взаимодействия распишем как $P_L=\frac{1}{2}(1-\gamma_0)$. Тогда[26]

[26] В видео-лекции допущена ошибка, справа в диаграмме необходимо записать $\bar{u}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки



$$= \int \bar{v}_s \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right) \gamma^\mu P_L \frac{i}{\hat{k} - m_u} \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right) \gamma^\alpha P_L u_d \cdot \bar{u}_s \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right) \gamma^\nu P_L \frac{i}{\hat{k} - m_u} \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right) \gamma^\beta P_L v_d \cdot$$

$$\cdot \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2} \cdot \frac{g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2} \cdot \frac{d^4 k}{(2\pi)^4},$$

где $\hat{k}$ – импульс виртуального кварка. Выражение записано в приближении нулевого импульса K_0 и входящих в него кварков.

Следующим шагом определим, сходится ли интеграл. Преобразуем $\frac{1}{\hat{k} - m_u}$:

$$\frac{1}{\hat{k} - m_u} = \frac{\hat{k} + m_u}{k^2 - m_u^2}.$$

Тогда

$$\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}} = \frac{dk \cdot k^3 \cdot k^2 \cdot k^4}{k^8} = dk \cdot k,$$

следовательно, при больших k интеграл расходится:

$$\int dk \cdot k \sim \Lambda^2,$$

где Λ – параметр, обрезающий интеграл. Пусть $k \gg 1$, но при этом $k \ll m_W$, тогда

$$\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}} \sim \frac{dk \cdot k^3 \cdot k^2}{k^4} = dk \cdot k,$$

расходимость интеграла остается квадратичной.

Если положить обрезающий параметр порядка массы W-бозона, то можно описать эффективный гамильтониан, чтобы прийти к 4-фермионному взаимодействию. Пусть $k \ll m_W$, тогда[27]

$$\left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^4 \frac{1}{m_W^4} \int \frac{\bar{v}_s \gamma^\mu P_L \hat{k} \gamma^\alpha P_L u_d \cdot \bar{u}_s \gamma_\mu P_L \hat{k} \gamma_\alpha P_L v_d}{k^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}.$$

Если довести вычисления до конца, воспользовавшись обрезающим параметром $\Lambda \sim m_W$, то будет получено выражение для разности масс порядка

$$\Delta m \sim G_F^2 m_W^5 \gg \Delta m_{\text{эксп}},$$

отличие от экспериментального значения на семь порядков.

[27] В видео-лекции допущена ошибка, корректный вариант $\left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^4 \frac{1}{m_W^4} \int \frac{\bar{v}_s \gamma^\mu P_L \hat{k} \gamma^\alpha P_L u_d \cdot \bar{u}_s \gamma_\mu P_L \hat{k} \gamma_\alpha P_L v_d}{k^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Так, необходимо проделать вычисление более полно. При этом кроме u-кварка необходимо учесть c-кварк, то есть сделать серьезное предположение о существовании c-кварка. Такое решение, ГИМ-механизм, было предложено в 1970 тремя физиками – Глэшоу, Иллилополус и Майани.

Лекция 15. Загадки нейтральных каонов. Часть 3

Механизм ГИМ

На рисунке 15.1 представлена диаграмма, описывающая переход между K_0 и $\overline{K}_0$, которая учитывает u и c кварки.

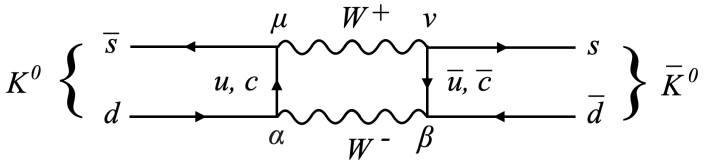


Рис. 15.1. Диаграмма Фейнмана перехода между K_0 и $\overline{K}_0$.[28]

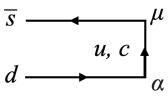
Вспомним, что явление смешивания лептонов во взаимодействиях с W-бозонами описывается матрицей смешивания, для кварков – CKM-матрицей:

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix},$$

где θ_C – угол Кабиббо, при. этом CKM-матрица унитарна:

$$VV^+ = V^+V = I.$$

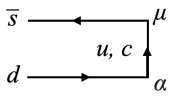
Распишем диаграмму по частям, начнем с левой части:



$$= \bar{v}_s \gamma^\mu P_L \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right) V_{us}^* \frac{i}{\hat{k} - m_u} \gamma^\alpha P_L \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right) V_{ud} u_d +$$

$$+ \bar{v}_s \gamma^\mu P_L \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right) V_{cs}^* \frac{i}{\hat{k} - m_c} \gamma^\alpha P_L \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right) V_{cd} u_d.$$

Упростим выражение:



$$= \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{v}_s \gamma^\mu P_L \frac{i}{\hat{k} - m_u} \gamma^\alpha P_L u_d \cos\theta_C \sin\theta_C +$$

$$+ \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{v}_s \gamma^\mu P_L \frac{i}{\hat{k} - m_c} \gamma^\alpha P_L u_d (-\cos\theta_C \sin\theta_C).$$

Заметим, что слагаемые отличаются друг от друга на несколько множителей, так левая часть матричного элемента пропорциональна

[28] В видео-лекции допущена ошибка, справа в диаграмме необходимо записать $\bar{u}$, $\bar{c}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\sim\left\{\frac{1}{\hat{k}-m_u}\cos\theta_C\sin\theta_C-\frac{1}{\hat{k}-m_c}\cos\theta_C\sin\theta_C\right\}=\cos\theta_C\sin\theta_C\left(\frac{\hat{k}+m_u}{k^2-m_u^2}-\frac{\hat{k}+m_c}{k^2-m_c^2}\right)=$$

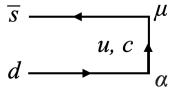
$$=\frac{\cos\theta_C\sin\theta_C}{(k^2-m_u^2)(k^2-m_c^2)}\left[\hat{k}(k^2-m_c^2)-\hat{k}(k^2-m_u^2)+m_u(k^2-m_c^2)-m_c(k^2-m_u^2)\right]=$$

$$=\frac{\cos\theta_C\sin\theta_C}{(k^2-m_u^2)(k^2-m_c^2)}\left[-\hat{k}(m_c^2-m_u^2)+m_u(k^2-m_c^2)-m_c(k^2-m_u^2)\right].$$

Вся выписанная конструкция находится между математическими «ножницами», а именно проекторами P_L и P_R:

$$P_L\{\dots\}\gamma^\alpha P_L=P_L\{\dots\}P_R\gamma^\alpha=\frac{P_L\left(-\hat{k}(m_c^2-m_u^2)\right)P_R\gamma^\alpha\cos\theta_C\sin\theta_C}{(k^2-m_u^2)(k^2-m_c^2)}.$$

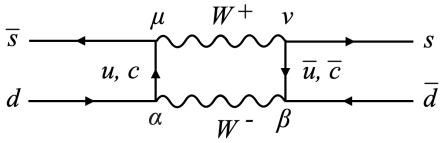
Тогда справедливо



$$=i\left(-\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{(-1)(m_c^2-m_u^2)}{(k^2-m_u^2)(k^2-m_c^2)}\cos\theta_C\sin\theta_C\,\bar{v}_s\gamma^\mu P_L\hat{k}P_R\gamma^\alpha u_d.$$

Аналогично можно расписать выражение для правой части диаграммы.

Выпишем алгебраическое выражение для всей диаграммы Фейнмана:



$$=-\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^4(m_c^2-m_u^2)^2\cos^2\theta_C\sin^2\theta_C\times$$

$$\times\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\bar{v}_s\gamma^\mu P_L\hat{k}P_R\gamma^\alpha u_d\cdot\bar{u}_s\gamma^\nu P_L\hat{k}P_R\gamma^\beta v_d}{(k^2-m_u^2)^2(k^2-m_c^2)^2}\cdot\frac{g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2-m_W^2}\cdot\frac{g_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{m_W^2}}{k^2-m_W^2}.$$

Рассмотрим теперь интеграл:

$$\int\dots\sim\frac{dk\cdot k^3\cdot k^2\cdot k^4}{k^{12}}=\frac{dk}{k^3}.$$

Очевидно, такой интеграл сходится. Так, простая идея о возможности существования еще одного кварка из второго поколения и описание смешивания кварков с помощью унитарной матрицы позволяют получить сильное сокращение вкладов в амплитуды u и c кварков. Большие импульсы приводят к полному сокращению, что обеспечивает сходимость общего интеграла. Кроме того, возникают множители, пропорциональные разности квадратов масс и зависимость от коэффициентов смешивания.

Замена пропагаторов на 4-фермионные приближения

Закончим вычисление диаграммы Фейнмана (рис. 15.1). Интеграл сходится, причем не в области импульсов порядка массы W-бозона, а при импульсах меньше массы

с-кварка. Поэтому в пропагаторе W-бозона можно сделать упрощение, все пропагаторы заменим на 4-фермионное приближение:

$$\frac{g_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2} \quad \to \quad -\frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2}.$$

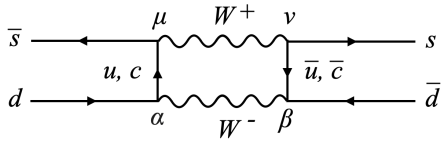
Поскольку

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2},$$

тогда

$$\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^4 \frac{2^4}{m_W^4} = \frac{2^4 G_F^2}{2} = 2^3 G_F^2.$$

Так как $m_u \ll m_W$, будем считать $m_u \approx 0$. Тогда для всей диаграммы можно переписать выражение в следующем виде:



$$= -2^3 G_F^2 m_c^4 \cos^2\theta_C \sin^2\theta_C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4(k^2 - m_c^2)^2} \times$$

$$\times \ \bar{v}_s \gamma^\mu P_L \hat{k} P_R \gamma^\alpha u_d \cdot \bar{u}_s \gamma_\mu P_L \hat{k} P_R \gamma_\alpha v_d.$$

Вычисление интеграла

Вычислим интеграл по d^4k. Распишем явным образом $\hat{k}$:

$$\hat{k} = \gamma^\beta k_\beta = \gamma^\nu k_\nu.$$

Подставим выражения для $\hat{k}$ в подынтегральное выражение:

$$\int \ldots \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\beta}{k^4(k^2 - m_c^2)^2} = \frac{g_{\nu\beta}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{k^4(k^2 - m_c^2)^2} = \frac{g_{\nu\beta}}{4(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2(k^2 - m_c^2)^2}.$$

Перейдем в евклидово пространство, введем замену:

$$k_0 = ik_E^0, \qquad dk_0 = idk_E^0,$$
$$\vec{k} = \vec{k}_E, \qquad d^3k = d^3k_E,$$
$$k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = -(k_E^0)^2 - \left(\vec{k}_E\right)^2 = -k_E^2 \ \to \ \int \frac{d^4k}{k^2(k^2 - m_c^2)^2} = i \int \frac{d^4k_E}{k_E^2(k_E^2 + m_c^2)^2}.$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\varkappa = \frac{k_E}{m_c} \ \to \quad \frac{d^4k_E}{k_E^2(k_E^2 + m_c^2)^2} = \frac{1}{m_c^2} \frac{d^4\varkappa}{\varkappa^2(\varkappa^2 + 1)^2},$$

тогда

$$i \int \frac{d^4k_E}{k_E^2(k_E^2 + m_c^2)^2} = -\frac{i}{m_c^2} \int \frac{d^4\varkappa}{\varkappa^2(\varkappa^2 + 1)^2}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Упростим выражение, перейдя в сферическую систему координат:

$$-\frac{i}{m_c^2}\int\frac{d^4\varkappa}{\varkappa^2(\varkappa^2+1)^2}=-\frac{i\Omega_4}{m_c^2}\int\limits_0^\infty d\varkappa\,\frac{\varkappa^3}{\varkappa^2(\varkappa^2+1)^2}=-\frac{i(2\pi^2)}{m_c^2}\int\limits_0^\infty\frac{d\varkappa\,\varkappa}{(\varkappa^2+1)^2},$$

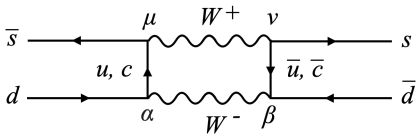
где Ω_4 – 4-мерный телесный угол. Такой интеграл сходится:

$$-\frac{i(2\pi^2)}{m_c^2}\int\limits_0^\infty\frac{d\varkappa\,\varkappa}{(\varkappa^2+1)^2}=-\frac{i(2\pi^2)}{m_c^2}.$$

Тогда справедливо следующее равенство[29]:

$$\frac{g_{\nu\beta}}{4(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2(k^2-m_c^2)^2}=\frac{-ig_{\nu\beta}(2\pi^2)}{128\pi^4m_c^2}.$$

Подставим полученный результат в выражение для диаграммы Фейнмана:



$$=-\frac{iG_F^2m_c^2\cos^2\theta_C\sin^2\theta_C}{4\pi^2}\bar v_s\gamma^\mu P_L\gamma^\nu\gamma^\alpha u_d\cdot\bar u_s\gamma_\mu P_L\gamma_\nu\gamma_\alpha v_d.$$

Полученное выражение можно упростить, воспользовавшись преобразованием Фирца.

Преобразования Фирца

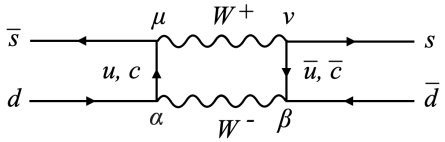
В полученном выражении для диаграммы Фейнмана преобразования K^0 в $\overline{K}^0$ между спинорами присутствуют по три γ-матрицы и P_L. Эти выражения можно упростить, воспользовавшись преобразованием Фирца. Поскольку

$$\begin{cases}\bar a\gamma^\mu P_L b\cdot\bar c\gamma_\mu P_L d=-\bar a\gamma^\mu P_L d\cdot\bar c\gamma_\mu P_L b\\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu=-2\gamma^\alpha\end{cases},$$

тогда перепишем выражение в следующем виде:

$$\bar v_s\gamma^\mu P_L\gamma^\nu\gamma^\alpha u_d\cdot\bar u_s\gamma_\mu P_L\gamma_\nu\gamma_\alpha v_d=16\bar v_s\gamma^\mu P_L u_d\cdot\bar u_s\gamma_\mu P_L v_d.$$

Таким образом,



$$=-i\frac{4G_F^2m_c^2\cos^2\theta_C\sin^2\theta_C}{\pi^2}\bar v_s\gamma^\mu P_L u_d\cdot\bar u_s\gamma_\mu P_L v_d=$$

$$=-iG'\bar v_s\gamma^\mu P_L u_d\cdot\bar u_s\gamma_\mu P_L v_d,$$

[29] В видео-лекции допущена ошибка, корректное выражение $\frac{g_{\nu\beta}}{4(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2\left(k^2-m_c^2\right)^2}=\frac{-ig_{\nu\beta}(2\pi^2)}{128\pi^4m_c^2}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

где G' - константа, $\bar{v}_s\gamma^\mu P_L u_d \cdot \bar{u}_s\gamma_\mu P_L v_d$ – произведение двух токов в 4-фермионном приближении.

Теперь можно выписать эффективный гамильтониан:

$$H_{eff}^{\Delta S=2} = \int d^3x\, G' {:}\, \bar{\psi}_s(x)\gamma^\mu P_L\psi_d(x) \cdot \bar{\psi}_s(x)\gamma_\mu P_L\psi_d(x){:}.$$

Вспомним, что для вычисления разности масс необходимо вычислить сумму элементов:

$$\Delta m = \left\langle K^0\middle|H_{eff}^{\Delta S=2}\middle|\overline{K}^0\right\rangle + \left\langle \overline{K}^0\middle|H_{eff}^{\Delta S=2}\middle|K^0\right\rangle.$$

Рассмотрим вакуумное начальное состояние:

$$\left\langle 0\middle|\bar{\psi}_s(0)\gamma^\mu(1-\gamma_s)\psi_d(0)\middle|\overline{K}^0\right\rangle = \varphi_K P_K^\mu f_K,$$

φ_K – волновая функция, P_K^μ – импульс каона, $f_K = 165$ МэВ – константа, обладающая размерностью энергии. Теперь выпишем выражение для матричного элемента перехода K^0 в $\overline{K}^0$:

$$\left\langle K^0\middle|H_{eff}^{\Delta S=2}\middle|\overline{K}^0\right\rangle = G'\langle K^0| \int d^3x : \bar{\psi}_s(x)\gamma^\mu P_L\psi_d(x) \cdot I \cdot \bar{\psi}_d(x)\gamma_\mu P_L\psi_s(x): |\overline{K}^0\rangle,$$

где $I = \sum_n |n\rangle\langle n| = |0\rangle\langle 0|$. Воспользуемся соотношениями

$$\psi(x) = e^{-i\hat{p}\cdot x}\psi(0)e^{+i\hat{p}\cdot x},$$

тогда после преобразований получим

$$\left\langle K^0\middle|H_{eff}^{\Delta S=2}\middle|\overline{K}^0\right\rangle = 4G'|\varphi_K|^2 P_K^\mu P_{K\mu} f_K^2 = 4G' m_K^2 f_K^2.$$

Выражение для перехода между $\overline{K}^0$ и K^0 аналогично. Выпишем выражение для разности масс[30]:

$$\Delta m = 8G' m_K^2 f_K^2 = \frac{1}{6\pi^2} G_F^2 m_c^2 \sin\theta_C \cos\theta_C\, f_K^2 m_K.$$

Отсюда можно получить

$$m_c = 1.3 \text{ ГэВ}.$$

Итак, в ходе лекций проделан достаточно большой путь по изучению нейтральных каонов.

Некоторое время спустя выяснилось, что K_1 и K_2 не обладают определенной CP-четностью и CP-четность является только приближенной симметрией решаемой задачи, существуют другие состояния, обладающие определенной CP-четностью:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|K_1\rangle \pm \varepsilon|K_2\rangle}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}.$$

[30] Здесь учтен дополнительный вклад 1/3 в знаменателе, который берется от усреднения по поляризации, связанной с цветовым кварковым числом.

CP-четность такой системы была измерена, оказалось, что CP-четность нарушается. Исходя из того, что CPT-четность не нарушается, это означает, что ***в микроскопических системах существует стрела времени***.

С практической точки зрения, система с каонами позволит, например, при общении с инопланетным разумом, без обмена материалами договориться, о том, что будем считать веществом, а что антивеществом, при условии, что инопланетный разум не менее развит чем мы. Так, если рассматривать столкновение p с адроном, то возникают короткоживущие и долгоживущие каоны:

$$p + A \to K^0_{L,S}.$$

Долгоживущие K^0_L распадаются на позитроны и пионы, а короткоживущие K^0_S на электроны и пионы:

$$K_L \sim e^+, \qquad K_S \sim e^-.$$

Если рассмотреть распад короткоживущей компоненты, то веществом назовем электроны, в распаде долгоживущей компоненты возникает антивещество – позитроны.

Если рассмотреть теперь поляризованные распады, например, мюонов, где рождаются позитроны и электроны, то возможно договориться, что считать левой поляризацией, а что правой.

Так, в ходе лекций 13-15 была подробно рассмотрена система нейтральных каонов. Показано, что при измерении K^0 и $\overline{K}^0$ наблюдаются осцилляции, в то врем как в случае измерения K_1 и K_2 осцилляций нет. И те, и другие состояния можно тагировать по продуктам распада: K^0 и $\overline{K}^0$ распадаются с рождением положительно и отрицательно заряженных лептонов, а K_1 и K_2 распадаются на 2 и 3 пиона соответственно. Кроме того, система каонов является отличным аналогом эксперимента с двумя щелями. В лекциях приведены подробные выкладки, показывающие, что при вычислении разности масс K_1 и K_2, учитывающем только u-кварк, возникает абсурдная бесконечность или ответ, который на 7 порядков не сходится с экспериментом. Предположение о существовании c-кварка позволяет аккуратно воспроизвести экспериментально наблюдаемое значение для разности масс и предсказать значение массы c-кварка. Все эти предсказания подтверждены экспериментально.

Лекция 16. Квантовые аномалии

Что такое квантовые аномалии

Согласно классической теории поля, если в Лагранжиане, описывающем физическую систему есть некоторая глобальная симметрия, то по теореме Нётер сохраняется некоторый связный с этой симметрией ток $j^\mu(x)$:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0.$$

Примером такого тока является электромагнитный ток, где сохраняющаяся величина – электрический заряд. Также существует связанное с трансляцией пространства-времени сохранение 4 токов, которые объединяются в тензор энергии-импульса, в этом случае сохраняющимися величинами при вращении пространства являются энергия и импульс.

В случае квантовой теории поля некоторые классические сохраняющиеся токи нарушаются. Это означает, что в квантовой теории поля для некоторых токов:

$$\partial_\mu j^\mu(x) \neq 0.$$

Такие нарушения в свое время удивили теоретиков на столько, что они назвали нарушения «квантовыми аномалиями». В действительности такое явление – неотъемлемая черта и правильное физическое проявление «квантовости» теории поля.

Определим, сохраняются ли классические токи для частицы на массовой поверхности. Рассмотрим ток

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x),$$

вычислим 4-дивергенцию матричного элемента в обкладках между импульсами:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle p'|j^\mu(x)|p\rangle &= \partial_\mu\bar{u}_{p'}\gamma^\mu u_p e^{-ip\cdot x}\cdot e^{+ip\cdot x} = -i\big(p_\mu - p'_\mu\big)\bar{u}_{p'}\gamma^\mu u_p e^{-i(p-p')\cdot x} = \\ &= -ie^{-i(p-p')\cdot x}\bar{u}_{p'}(\hat{p}-\hat{p}')u_p,\end{aligned}$$

где $\hat{p}$ и $\hat{p}'$ – 4-векторы, свернутые с γ-матрицей. Воспользуемся уравнением Дирака:

$$(\hat{p} - m)u_p = 0,$$

тогда

$$\partial_\mu\langle p'|j^\mu(x)|p\rangle = -ie^{-i(p-p')\cdot x}\bar{u}_{p'}(m-m)u_p = 0,$$

ток сохраняется. Однако при вычислении некоторого класса диаграмм видно, что некоторые токи, в том числе и векторный, не сохраняется.

Определим аксиальный ток:

$$j_5^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi,$$

если проделать аналогичные выкладки для 4-дивергенции этого тока, то пользуясь исключительно уравнением Дирака, невозможно получить ноль в правой части. Ответ будет следующим:

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Если масса фермиона отлична от нуля, то 4-дивергенция аксиального тока ненулевая, однако при нулевой массе такой ток сохраняется. Удивительный результат, который будет показан далее, заключается в том, что аксиальный ток не сохраняется даже в случае нулевой массы фермиона. В этом и будет заключаться одна из загадок квантовых аномалий. Введем еще одну формулу, чтобы определить, с чем связан аксиальный ток:

$$\bar{u}(p,s)\gamma^{\mu}\gamma_5 u(p,s) = 2mS^{\mu},$$

так, аксиальный ток определяется 4-вектором спина.

Векторный ток виртуального фермиона

Рассмотрим теперь виртуальный фермион и соответствующий векторный ток. При изучении аномального магнитного момента электрона была рассмотрена диаграмма, представленная на рис. 16.1. Такая вершина за счет радиационных поправок «одевается», что приводит к переопределению электрического заряда и магнитного момента. Определим, сохраняется ли векторный ток в диаграммах такого типа.

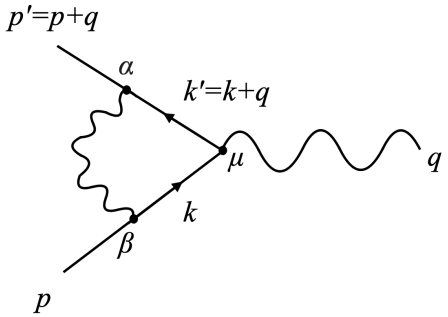


Рис. 16.1. Диаграмма взаимодействия электрона и фотона.

Поставим в соответствие такой диаграмме алгебраическое выражение[31]:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}_{p'}(ie\gamma^{\alpha})S(k')\gamma^{\mu}S(k)\big(ie\gamma^{\beta}\big)u_p\frac{-ig_{\alpha\beta}}{(p-k)^2+i\varepsilon} = \bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}u_p.$$

Сохранение тока означает, что

$$q_{\mu}\delta\Gamma^{\mu} = 0,$$

выясним, так ли это.

$$q_{\mu}\delta\Gamma^{\mu} = ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\bar{u}_{p'}\gamma^{\alpha}S(k')\hat{q}S(k)\gamma_{\alpha}u_p}{(p-k)^2},$$

распишем отдельно $S(k')\hat{q}S(k)$:

$$S(k')\hat{q}S(k) = \frac{i}{\hat{k}'-m}\hat{q}\frac{i}{\hat{k}-m}.$$

поскольку

[31] Далее под $\delta\Gamma^{\mu}$ подразумевается $\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}u_p$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\begin{aligned} q &= k - m + q - (k - m) \quad \rightarrow \\ \hat{q} &= \hat{k} - m + \hat{q} - (\hat{k} - m) = \hat{k}' - m - (\hat{k} - m), \end{aligned}$$

так как $k' = k + q$, тогда

$$S(k')\hat{q}S(k) = \frac{i}{\hat{k}' - m}\left(\hat{k}' - m - (\hat{k} - m)\right)\frac{i}{\hat{k} - m}.$$

Можно заметить, что

$$\frac{i}{\hat{k}' - m}(\hat{k}' - m)\frac{i}{\hat{k} - m} = iS(k), \qquad \frac{i}{\hat{k}' - m}(\hat{k} - m)\frac{i}{\hat{k} - m} = iS(k'),$$

тогда

$$q_\mu \delta\Gamma^\mu = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}_{p'}\gamma^\alpha\left(\frac{S(k)}{(p-k)^2} - \frac{S(k')}{(p-k)^2}\right)\gamma_\alpha u_p.$$

Введем замену переменных, сдвинем координату:

$$k \to k - q, \qquad k' \to k,$$

тогда выражение преобразуется к виду

$$q_\mu \delta\Gamma^\mu = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}_{p'}\gamma^\alpha\left(\frac{S(k)}{(p-k)^2} - \frac{S(k)}{(p'-k)^2}\right)\gamma_\alpha u_p.$$

Левая часть выражения – Лоренц-инвариантная величина, поскольку является скалярным произведением двух 4-векторов. Это означает, что правая часть должна быть также Лоренц-инвариантной величиной. При этом правая часть зависит от векторов p и p', однако Лоренц-инвариантная величина может зависеть только от Лоренц-инвариантных величин, связывающих эти вектора: p^2, p'^2, $p \cdot p'$. Поскольку $p^2 = p'^2 = m^2$, а $p \cdot p'$ инвариантна относительно перестановки, то оба подынтегральных слагаемых должны быть симметричными функциями относительно замены p на p'. Тогда можно прийти к выводу, что

$$q_\mu \delta\Gamma^\mu = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}_{p'}\gamma^\alpha\left(\frac{S(k)}{(p-k)^2} - \frac{S(k)}{(p'-k)^2}\right)\gamma_\alpha u_p = 0,$$

но этот вывод некорректен. Проблема скрыта в введенной замене переменных.

Рассмотрим одномерный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x + a),$$

если $y = x + a,\ x = y - a,\ dx = dy$. Однако при обсуждении расходимостей в этой части курса и связанных с этим нормировок, мы находимся на довольно зыбкой математической почве, где многие утверждения нуждаются в перепроверке. Разложим $f(x + a)$ в ряд Тейлора около точки x:

$$f(x + a) = f(x) + f'(x) \cdot a + \cdots.$$

Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,\big(f(x+a)-f(x)\big) = a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,f'(x) = a\big(f(\infty)-f(-\infty)\big).$$

Такое выражение зануляется только в случае

$$f(\infty) = f(-\infty).$$

Если функции сходящиеся, что, как правило, справедливо для классической физики, то проблем не возникает. Если функции расходящиеся, то не факт, что $f(\infty) = f(-\infty)$. Тогда замену переменных в общем случае вводить нельзя.

Рассмотрим крайний случай, когда замена переменных еще работает:

$$f(x)\sim\frac{1}{x} \quad \rightarrow$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,\big(f(x+a)-f(x)\big) = a\cdot\frac{1}{x}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = a\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{-x}\right) = 0.$$

Это классический пример расходимостей, с которыми работает квантовая теория поля. Если расходимости серьезнее логарифмических, то возникают проблемы.

Вернемся к рассмотрению диаграмм:

$$q_\mu\delta\Gamma^\mu = -e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}_{p'}\gamma^\alpha\left(\frac{S(k)}{(p-k)^2}-\frac{S(k')}{(p-k)^2}\right)\gamma_\alpha u_p,$$

рассмотрим интеграл при $k\to\infty$, тогда

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}_{p'}\gamma^\alpha\left(\frac{S(k)}{(p-k)^2}-\frac{S(k')}{(p-k)^2}\right)\gamma_\alpha u_p \overset{k\to\infty}{\to} \int dk\,k^3\frac{1}{k\cdot k^2} = k.$$

Линейная расходимость не вписывается в класс тех функций, для которых можно использовать замену в виде сдвига. Необходимо вычисление интеграла без замены.

Треугольные диаграммы

Рассмотрим класс диаграмм, в которых возникают серьезные проблемы. Диаграмма с тремя вершинами изображена на рисунке 16.2 (а). Пусть в первую вершину с матрицей $\gamma^\mu\gamma_5$ входит импульс q, в эту вершину будет входить аксиальный ток. Из двух других вершин будут выходить векторные токи, вершинам будут соответствовать матрицы γ^λ и γ^ν. Сплошные линии, соединяющие вершины, соответствуют фермионам. Импульсы каждого из элементов отмечены на диаграмме (рис. 16.2 (а)). Такая диаграмма отвечает реальным физическим процессам, одним из которых является распад π^0.

Вместе с диаграммой на рисунке 16.2 (а) необходимо рассматривать и вторую диаграмму, где нижние вершины меняются местами (рис. 16.2 (б)).

Рассмотрим ситуацию с безмассовыми фермионами:

$$m_f = 0.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

В этом случае ожидается сохранение не только векторного тока, но и аксиального:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \qquad \partial_\mu \gamma_5^\mu = 0.$$

Проверим это предположение.

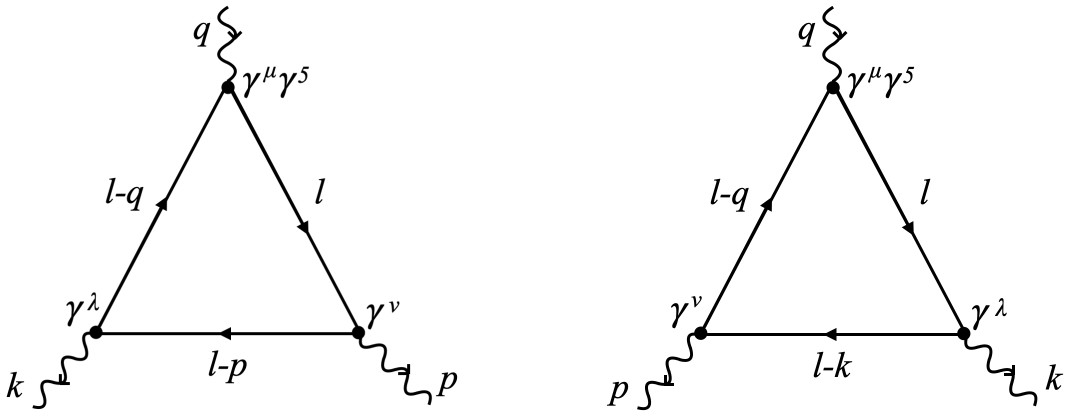
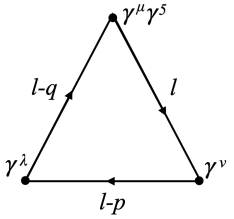


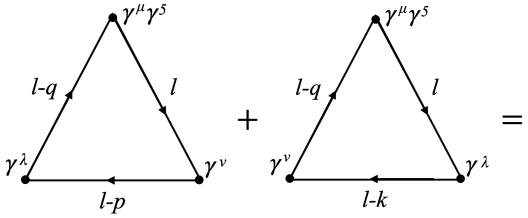
Рис. 16.2. а) Диаграмма с тремя вершинами и б) диаграмма с тремя вершинами, где нижние вершины поменяны местами.

Для треугольника распишем алгебраическое выражение.



$$= (-1)(ie)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^5 \frac{i}{\hat{l}-\hat{q}} \gamma^\lambda \frac{i}{\hat{l}-\hat{p}} \gamma^\nu \frac{i}{\hat{l}}\right].$$

Для суммы двух треугольных диаграмм можно записать следующее выражение:



$$= \quad (-1)(ie)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^5 \frac{i}{\hat{l}-\hat{q}} \gamma^\lambda \frac{i}{\hat{l}-\hat{p}} \gamma^\nu \frac{i}{\hat{l}} + \gamma^\mu \gamma^5 \frac{i}{\hat{l}-\hat{q}} \gamma^\nu \frac{i}{\hat{l}-\hat{k}} \gamma^\lambda \frac{i}{\hat{l}}\right] \equiv$$

$$\equiv \quad \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}(p,k).$$

Проверим, сохраняются ли векторный и аксиальный токи. При сохранении токов должны выполняться следующие условия:

$$p_\nu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}(p,k) = 0, \qquad k_\lambda \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}(p,k) = 0, \qquad q_\mu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}(p,k) = 0.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Выясним, так ли это.

Векторный ток

Начнем с векторных токов:

$$p_\nu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu} = -ie^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5 \frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}\gamma^\lambda \frac{1}{\hat{l}-\hat{p}}\hat{p}\frac{1}{\hat{l}} + \gamma^\mu\gamma^5 \frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}\hat{p}\frac{1}{\hat{l}-\hat{k}}\gamma^\lambda \frac{1}{\hat{l}}\right].$$

Упростим отдельные конструкции:

$$\frac{1}{\hat{l}-\hat{p}}\hat{p}\frac{1}{\hat{l}} = \frac{1}{\hat{l}-\hat{p}}\Big(\hat{l}-(\hat{l}-\hat{p})\Big)\frac{1}{\hat{l}} = \frac{1}{\hat{l}-\hat{p}} - \frac{1}{\hat{l}},$$

$$\frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}\hat{p}\frac{1}{\hat{l}-\hat{k}} = \frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}(\hat{q}-\hat{k})\frac{1}{\hat{l}-\hat{k}} = \frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}\Big(\hat{l}-\hat{k}-(\hat{l}-\hat{q})\Big)\frac{1}{\hat{l}-\hat{k}} = \frac{1}{\hat{l}-\hat{q}} - \frac{1}{\hat{l}-\hat{k}}.$$

Упростим теперь слагаемые под знаком следа, опустив $\gamma^\mu\gamma^5$:

$$\frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}\gamma^\lambda\left(\frac{1}{\hat{l}-\hat{p}} - \frac{1}{\hat{l}}\right) + \left(\frac{1}{\hat{l}-\hat{q}} - \frac{1}{\hat{l}-\hat{k}}\right)\gamma^\lambda\frac{1}{\hat{l}} = \frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}\gamma^\lambda\frac{1}{\hat{l}-\hat{p}} - \frac{1}{\hat{l}-\hat{k}}\gamma^\lambda\frac{1}{\hat{l}}.$$

Подставим полученный результат в выражение для векторного тока:

$$p_\nu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu} = -ie^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5\left(\frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}\gamma^\lambda\frac{1}{\hat{l}-\hat{p}} - \frac{1}{\hat{l}-\hat{k}}\gamma^\lambda\frac{1}{\hat{l}}\right)\right].$$

Если ввести замену переменных во втором интеграле:

$$l \to l - p,$$

тогда

$$\frac{1}{\hat{l}-\hat{k}}\gamma^\lambda\frac{1}{\hat{l}} \;\to\; \frac{1}{\hat{l}-\hat{p}-\hat{k}}\gamma^\lambda\frac{1}{\hat{l}-\hat{p}} = \frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}\gamma^\lambda\frac{1}{\hat{l}-\hat{p}}.$$

Однако, такая замена невозможна, поскольку интеграл расходится быстрее, чем логарифм:

$$\int \ldots \sim \int dl\, l^3 \frac{1}{l^2}.$$

Интеграл необходимо вычислять без замены. Заметим, что интеграл имеет вид

$$\int \ldots = \int d^4 l\big(f(l+a) - f(l)\big),$$

где $a = -p$. Тогда перейдем к евклидову пространству и разложим $f(l+a)$ возле точки l при малых a:

$$\int \ldots = \int d^4 l_E\big(f(l_E + a_E) - f(l_E)\big) = \int d^4 l_E a_\mu \partial^\mu f(l_E).$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса, по которой для трехмерной функции справедливо

$$\int d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \int d\hat{S}\cdot\vec{f},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

где $d\hat{S}$ – единичный вектор, перпендикулярный элементу поверхности. Для четырехмерного евклидова пространства справедливо следующее обобщение:

$$\int d^4x\, \partial^\mu f_\mu = \int dS_\mu \cdot f^\mu$$

где dS_μ – трехмерный объем, тогда, расписав трехмерный объем, получим

$$\int d^4x\, \partial^\mu f_\mu = \lim_{L\to\infty} 2\pi^2 L^3 \cdot n_\mu f^\mu(L)$$

$n_\mu = \left(\frac{L_\mu}{L}\right)$ – единичный вектор, L – бесконечно большой радиус в четырехмерном пространстве. Возвращаясь к интересующему интегралу, можно записать следующее выражение:

$$\int d^4 l_E a_\mu \partial^\mu f(l_E) = \lim_{L\to\infty} 2\pi^2 L^3 \left(\frac{L_\mu}{L}\right) a^\mu f(L).$$

Вернемся в пространство Минковского:

$$\int d^4 l\big(f(l+a) - f(l)\big) = i \lim_{L\to\infty} 2\pi^2 L^2 L_\mu a^\mu f(L).$$

Вычислим теперь след второго слагаемого:

$$Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5 \frac{1}{\hat{l}-\hat{k}}\gamma^\lambda \frac{1}{\hat{l}}\right] = Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5 \frac{\hat{l}-\hat{k}}{(l-k)^2}\gamma^\lambda \frac{\hat{l}}{l^2}\right] = \frac{1}{(l-k)^2 l^2} Tr\big[\gamma^\mu\gamma^5(\hat{l}-\hat{k})\gamma^\lambda\hat{l}\big].$$

отдельно вычислим выражение для следа:

$$Tr[\dots] = Tr\big[\gamma^\mu\gamma^5\hat{l}\gamma^\lambda\hat{l}\big] - Tr\big[\gamma^\mu\gamma^5\hat{k}\gamma^\lambda\hat{l}\big].$$

В обоих выражениях присутствует матрица γ^5 и еще 4 γ-матрицы, значит следу будут сводиться к антисимметричному тензору ε, который будет свернут соответствующими 4-векторами. В результате первое слагаемое занулится, поэтому подробно распишем только второе слагаемое:

$$-Tr\big[\gamma^\mu\gamma^5\hat{k}\gamma^\lambda\hat{l}\big] = -k_\alpha l_\beta Tr\big[\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\lambda\gamma^\beta\big] = -k_\alpha l_\beta\big(-4i\cdot\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\beta}\big).$$

Вспомним определение γ^5:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

тогда

$$-4i\cdot\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\beta} = i\,Tr[\gamma^5 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3] = 4i,$$

по соглашению будем считать

$$\varepsilon_{0123} = +1, \qquad \varepsilon^{0123} = -1.$$

Так, для искомого следа получаем:

$$Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5 \frac{1}{\hat{l}-\hat{k}}\gamma^\lambda \frac{1}{\hat{l}}\right] = \frac{4i\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\beta}k_\alpha l_\beta}{(l-k)^2 l^2}.$$

Соберем все полученные результаты и выпишем выражение для векторного тока

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\begin{aligned} p_\nu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu} &= -ie^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^5 \left(\frac{1}{\hat{l}-\hat{q}}\gamma^\lambda \frac{1}{\hat{l}-\hat{p}} - \frac{1}{\hat{l}-\hat{k}}\gamma^\lambda \frac{1}{\hat{l}}\right)\right] = \\ &= -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \lim_{L\to\infty} ia^\nu \frac{L_\nu}{L} f(L) 2\pi^2 L^3 = \\ &= -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \lim_{L\to\infty} i(-p^\nu) \frac{L_\nu}{L} \frac{4i\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\beta} k_\alpha L_\beta}{(L-k)^2 L^2} 2\pi^2 L^3 . \end{aligned}$$

Вычислим предел:

$$p_\nu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu} = -\frac{ie^2}{4\pi^4} p^\nu k_\alpha \varepsilon^{\alpha\lambda\beta\mu} 2\pi^2 \lim_{L\to\infty} \frac{L_\nu L_\beta}{L^2},$$

возьмем среднее значение $\langle \frac{L_\nu L_\beta}{L^2} \rangle$:

$$\langle \frac{L_\nu L_\beta}{L^2} \rangle = \frac{1}{4} g_{\nu\beta},$$

тогда

$$p_\nu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu} = -\frac{ie^2}{2\pi^2} p^\nu k_\alpha \varepsilon^{\alpha\lambda\beta\mu} \frac{1}{4} g_{\nu\beta} = -\frac{ie^2}{8\pi^2} \varepsilon^{\alpha\lambda\beta\mu} p_\beta k_\alpha \neq 0.$$

Так, векторный ток не сохраняется, то есть рушится вся теория ренормировок, построенная ранее. Кроме того, если векторный ток не сохраняется, это означает, что электрический заряд может рождаться из вакуума. Это противоречит эксперименту.

Теорию можно исправить, воспользовавшись специальным приемом. Доопределим матричный элемент 4-вектором a, который будет строго определенным сдвигом переменной интегрирования, тогда

$$p_\nu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}(p,k,a) = -ie^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^5 \left(\frac{1}{\hat{l}-\hat{q}-\hat{a}}\gamma^\lambda \frac{1}{\hat{l}-\hat{a}-\hat{p}} - \frac{1}{\hat{l}-\hat{a}-\hat{k}}\gamma^\lambda \frac{1}{\hat{l}-\hat{a}}\right)\right],$$

причем константа a такая, что

$$p_\nu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}(p,k,a) = 0.$$

Такой вектор можно найти, константа имеет вид

$$a = \frac{k-p}{2}.$$

Так, правила Фейнмана должны быть дополнены еще одним правилом. В случае треугольных диаграмм при прямом вычислении интегралов необходимо определить сдвиг, чтобы гарантировать сохранение векторного тока. В методе размерной регуляризации такой сдвиг реализуется сам по себе.

Аксиальный ток

Рассмотрим теперь аксиальный ток. Для этого необходимо вычислить произведение

$$q_\mu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}(p,k,a) = 0,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

где вектор a определен при вычислении векторного тока.

Вычисления для аксиального тока принципиально ничем не отличаются от вычислений для векторного тока, выпишем ответ:

$$q_\mu \mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}(p,k,a) = \frac{ie^2}{2\pi^2}\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}p_\alpha k_\beta \neq 0.$$

Аксиальный ток не сохраняется. Это явление называется **киральной квантовой аномалией**.

Киральная квантовая аномалия

Перепишем полученный результат в конфигурационном пространстве:

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = \frac{\alpha}{(4\pi)^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta},$$

где $F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$ – произведение электромагнитных тензоров. Выражение можно переписать в виде скалярного произведения операторов:

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = \frac{\alpha}{4\pi}\vec{E}\cdot\vec{B}.$$

Правую часть можно переписать в виде дивергенции от сохраняющегося объекта:

$$\begin{aligned}\partial_\mu J_5^\mu &= 0,\\ J_5^\mu &= j_5^\mu - \frac{\alpha}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu F_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Так, в квантовом случае вместо фермионного тока сохраняется смещенный ток. Ток $\frac{\alpha}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu F_{\alpha\beta}$ называется **током Черна-Саймонса**, физически описывает ток спина, переносимый электромагнитным полем. Здесь и скрыта загадка и глубокое понимание.

В классическом случае фермион не может родить виртуальные электромагнитные кванты, поэтому в классическом случае спин фермиона не может перераспределиться между другими частицами. Поэтому сохраняется исходный в безмассовом случае аксиальный ток. В квантовом случае возникает возможность взаимодействия и рождения виртуальных частиц. Поэтому спиновый ток фермиона перераспределяется между фермионом током и спиновым током виртуальных фотонов. Тогда становится очевидно, что аномалии нет, есть стандартная физическая картина перераспределения квантового числа между двумя составляющими.

Киральная квантовая аномалия имеет ряд экспериментальных наблюдаемых, которые явным образом ее подтверждают. Рассмотрим два таких объекта.

1) Распад π^0 на два γ-кванта:

$$\pi^0 \to \gamma\gamma.$$

Если не учитывать квантовую аномалию при распаде π^0, то время жизни будет в тысячу раз отличаться от экспериментально измеренного. Без квантовой аномалии пионы были бы практически стабильными.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

2) Второе ярчайшее проявление киральной квантовой аномалии заключается в самосогласованности Стандартной модели. Оказывается, что требование отсутствия в Стандартной модели киральных квантовых аномалий жестким образом ограничивает количество поколений кварков и лептонов (по три в обоих случаях).

Итоги

Итак, векторный ток должен сохраняться по теореме Нётер, поскольку в исходном Лагранжиане присутствует симметрия относительно глобальных преобразований. В случае безмассового фермиона должен сохраняться и аксиальный ток. Действительно, для простых случаев без взаимодействия эти токи сохраняются.

Однако при рассмотрении треугольных диаграмм, две из вершин которых относятся к векторным частицам, а третья к аксиальным, было показано, что векторный ток сохраняется не автоматически, необходимо введение сдвига переменных в четырехмерном интеграле. При том же сдвиге выражение для аксиального тока не обращается в ноль. Невозможно найти такой вектор сдвига, чтобы одновременно сохранялись векторный и аксиальный токи. В качестве сохраняющегося тока выберем векторный, поскольку иначе вся теория ренормировки разрушается – Стандартная модель перестает быть ренормируемой, теория перестает быть предсказательной.

Несохранение аксиального тока объясняется физически. Поскольку фермион в квантовой теории взаимодействует с электромагнитным полем и рождает виртуальные возбуждения поля, то можно ожидать, что часть спинового тока фермионов передается электромагнитному полю. Следующим шагом необходимо показать, как перераспределение спина позволяет объяснить загадку распада π^0 – иначе в квантовой теории поля π^0 не распадался бы.

Лекция 17. Распад $\pi^0 \to \gamma\gamma$

Введение

Распад π^0 на два γ-кванта известен хорошо практически каждому экспериментатору, работающему в физике высоких энергий. Этот процесс используется, например, для калибровки калориметров, хорошо виден в фотоэмульсиях и участвует в каскадах космических лучей. Время жизни π^0, определенное экспериментально составляет

$$\tau_{\pi^0} \sim 8 \cdot 10^{-17} \text{ с},$$

частица является короткоживущей.

При экспериментальном определении времени жизни нестабильной частицы есть два подхода.

1) Если время жизни частицы крайне мало (порядка 10^{-21} с и меньше), то ширина распада будет очень большой. Частицу с шириной распада $\Gamma \sim (1 - 100)$ МэВ легко можно идентифицировать в спектре инвариантной массы. Пусть, например, частица A распадается на две частицы:
$$A \to f_1 f_2.$$
Можно вычислить квадрат 4-импульса:
$$m^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_A^2 = m_A^2.$$
При построении графика зависимости количества наблюдаемых событий в единицу инвариантной массы от инвариантной массы такой график будет иметь вид, представленный на рисунке 17.1 – некий гладкий, обычно полиномиальный фон и пик, шириной Γ_A. По этому пику можно определить физическую ширину A.

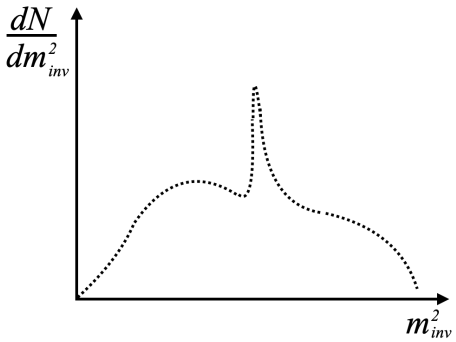


Рис. 17.1. График зависимости количества наблюдаемых событий в единицу инвариантной массы от инвариантной массы.

2) Есть второй класс частиц – долгоживущие, такие как $K_0, \Lambda \ldots$ Эти частицы распадаются за счет слабого взаимодействия, их времена жизни
$$\tau \sim 10^{-8} - 10^{-10} \text{ с},$$
а ширины крайне малы, на графике зависимости количества наблюдаемых событий в единицу инвариантной массы от инвариантной массы такие пики будут размыты экспериментальным разрешением. Однако, такие частицы буквально видны в

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

детекторе (рис. 17.2). Пунктиром на рисунке 17.2 отмечены нейтральные частицы. Измерив расстояние между двумя вершинами и импульсы всех продуктов распада, можно определить, каким импульсом обладала нейтральная частица, что позволяет восстановить ее релятивистский γ-фактор и определить время жизни.

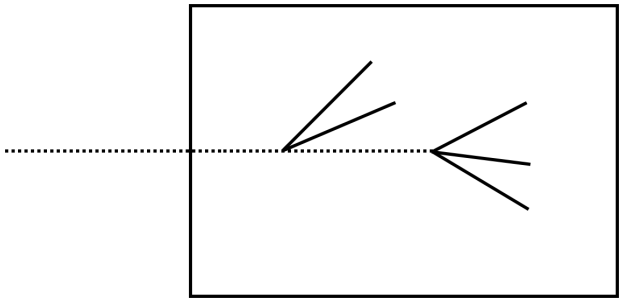


Рис. 17.2. Движение частиц в детекторе.

Частица π^0 не попадает ни в один из рассмотренных интервалов. Измерение ее время жизни и ширину распада было настоящим вызовом для экспериментаторов, с которым они справились. Сегодня время жизни и ширина распада π^0 измерены достаточно надежно.

Как распадается пион

Рассмотрим π^0 с точки зрения теории. π^0 – связанное состояние кварков:

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\bar{u}\rangle - \left|d\bar{d}\right\rangle\right).$$

Пространственная четность π^0

$$P(\pi^0) = -1,$$

поскольку для четности пары кварк-антикварк справедливо

$$P(q\bar{q}) = P(q)\cdot P(\bar{q})\cdot(-1)^J,$$

где J – полный орбитальный момент пары. Если $J = 0$, поскольку пара должна образовывать скалярное состояние, а четности $P(q)$ и $P(\bar{q})$ противоположны, то

$$P(q\bar{q}) = -1.$$

Таким образом, кварковый ток должен быть аксиальным.

Так, для того чтобы π^0 существовал, внутри него должны течь кварковые токи. При этом при распаде пиона аксиальный ток должен быть преобразован в два γ-кванта. В Стандартной модели такой вершины не существует. Не зная ничего о киральной квантовой аномалии, можно предположить, что π^0 не распадается или распады происходят в петлях, в сильно подавленных процессах.

Воспользовавшись квантовой аномалией, можно вычислить время жизни π^0 и его ширину распада. Рассмотрим эту цепочку вычислений. Предположим, что есть аксиальный ток, который переносит импульс q. Этот ток превращается в виртуальный безмассовый пион. Пион в свою очередь распадается на два γ-кванта (рис. 17.3).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

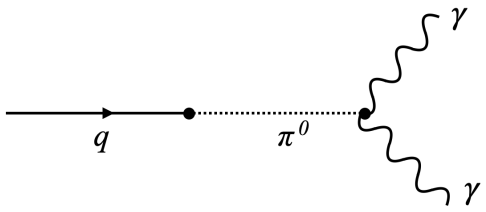
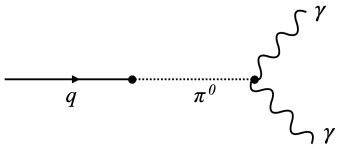


Рис. 17.3. Диаграмма распада $\pi^0 \to \gamma\gamma$.

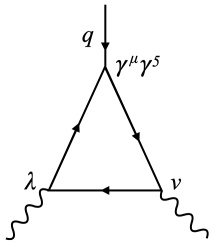
Запишем матричный элемент, соответствующий такой диаграмме:



$$= i\mathcal{M}\left(j_5^\mu \to \gamma\gamma\right) = i\mathcal{M}\left(j_5^\mu \to \pi^0\right) \cdot \left(-\frac{i}{q^2}\right) \cdot i\mathcal{M}(\pi^0 \to \gamma\gamma).$$

1) Матричный элемент $i\mathcal{M}\left(j_5^\mu \to \gamma\gamma\right)$ связан с суммой двух треугольных диаграмм, которая была вычислена в предыдущей лекции:

$$i\mathcal{M}\left(j_5^\mu \to \gamma\gamma\right) =$$



$$+ \cdots = \varepsilon_\nu^*(p)\varepsilon_\lambda^*(k) i\mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}(p,k).$$

2) Для $i\mathcal{M}\left(j_5^\mu \to \pi^0\right)$ выражение может быть расписано следующим образом:
$$i\mathcal{M}\left(j_5^\mu \to \pi^0\right) = \left\langle \pi^0 \middle| j_5^\mu(0) \middle| 0 \right\rangle.$$
На сегодняшнем уровне понимания вычислить этот матричный элемент из первых принципов невозможно, поскольку квантовая хромодинамика не позволяет этого сделать. Однако возможно параметризовать этот матричный элемент:
$$i\mathcal{M}\left(j_5^\mu \to \pi^0\right) = \left\langle \pi^0 \middle| j_5^\mu(0) \middle| 0 \right\rangle = f_\pi q^\mu,$$
где f_π – константа, которая встречалась в распадах заряженных пионов.
3) $i\mathcal{M}(\pi^0 \to \gamma\gamma)$ должен быть Лоренц-инвариантным объектом и зависеть от 4-импульсов двух γ-квантов и их поляризаций:
$$i\mathcal{M}(\pi^0 \to \gamma\gamma) = \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}\varepsilon_\nu^*(p)\varepsilon_\lambda^*(k)p_\alpha k_\beta \cdot A,$$
где A – константа, которую необходимо определить.

Перепишем исходное уравнение, избавившись от мнимых единиц и домножив левую и правую части на q_μ:

$$q_\mu \mathcal{M}\left(j_5^\mu \to \gamma\gamma\right) = \varepsilon_\nu^*\varepsilon_\lambda^*\mathcal{M}^{\nu\lambda\mu}q_\mu = f_\pi q^\mu q_\mu \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}\varepsilon_\nu^*\varepsilon_\lambda^* p_\alpha k_\beta \cdot A.$$

Подставим выражение для квантовой аномалии, посчитанное в предыдущей лекции:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\varepsilon_\nu^* \varepsilon_\lambda^* \frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta = f_\pi \cdot \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} \varepsilon_\nu^* \varepsilon_\lambda^* p_\alpha k_\beta \cdot A,$$

тогда легко можно выразить константу:

$$A = \frac{e^2}{2\pi^2 f_\pi}.$$

Остается вычислить время жизни π^0 и ширину распада. Запишем выражение для ширины распада:

$$\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) = \int \frac{(2\pi)^4 \delta^4(q-p-k)}{2m_\pi} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} |\mathcal{M}(\pi^0 \to \gamma\gamma)|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^2 2\omega_p} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k},$$

множитель ½ учитывает тождественность частиц в конечном состоянии. Выпишем сразу итоговый ответ:

$$\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) = \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7.76 \text{ эВ}.$$

Экспериментально измерено значение

$$\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) = (7.74 \pm 0.37) \text{ эВ}.$$

Это блестящее согласие теоретических расчетов и экспериментальных данных – триумф квантовой киральной аномалии.

Ранее в курсе было упомянуто имя Юлиана Швингера, нобелевского лауреата, одного из создателей квантовой электродинамики. Он работал в Гарвардском университете, откуда фактически был изгнан. Одна из причин изгнания заключалась в том, что он не принял развитие теории с квантовыми аномалиями. Швингер считал, что если на квантовом уровне классическая симметрия нарушается, то в этом нет никакой физики, а квантовые аномалии являются недостатком квантовой теории. Молодое поколение теоретиков (Адлер, Белл и Джекет, которые разработали теорию, изложенную в этой и предыдущей лекциях) не соглашалось со Швингером. В результате Швингер оказался в «интеллектуальной изоляции» и принял решение перейти в другой университет. При этом Ю. Шингер является выдающимся ученым, который воспитал более 70 учеников, 4 или 5 из которых получили нобелевские премии.

Изложенный в лекции является наиболее простым подходом к рассматриваемой проблеме, который скрывает все углы для быстрого получения результата. В вычислениях было применено разложение в наименьшем неисчезающем порядке. Люди, которые занимались разработкой этой проблемы, Адлер, Белл и Джекет, доказали, что квантовая аномалия выживает во всех порядках теории возмущение, являясь точным результатом квантовой теории поля. Без этого эффекта не существовала бы Стандартная модель.

Поляризация фотонов в распаде $\pi^0 \to \gamma\gamma$

Рассмотрим, как поляризованы два γ-кванта, образующиеся в распаде π^0.

Ранее было показано, что матричный элемент такого распада обязан своим происхождением киральной аномалии, которая в свою очередь связывает дивергенцию аксиального тока с напряженностями электрического и магнитного полей:

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = \frac{\alpha}{\pi}\vec{E}\cdot\vec{B}.$$

Вспомним, что при распространении электромагнитного поля вдоль некоторой оси, то напряженности электрического и магнитного полей колеблются в строго перпендикулярных направлениях. При этом в квантовой аномалии требуется, чтобы напряженности были неперпендикулярны. Вспомним, что при распаде π^0 рождаются два γ-кванта. Для того, чтобы произведение $\vec{E}\cdot\vec{B}$ отличалось от нуля, необходимо, чтобы в одной плоскости находились напряженность электрического поля одного фотона и напряженность магнитного поля второго поля (рис. 17.4). Тогда

$$\vec{E}\cdot\vec{B}\sim\vec{E}_1\cdot\vec{B}_2+\vec{E}_2\cdot\vec{B}_1.$$

Таким образом, фотоны в распаде нейтрального пиона должны разлетаться определенным образом.

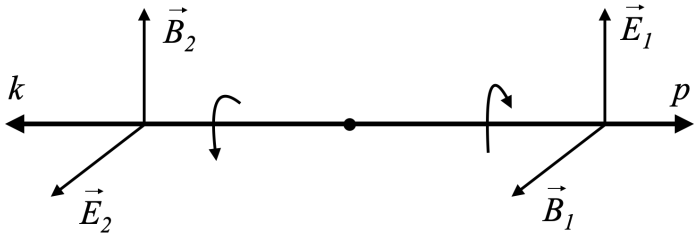


Рис. 17.4. Направления векторов напряженностей электрического и магнитного полей для разлетающихся γ-квантов, рожденных в распаде π^0.

Определим поляризации двух фотонов. Матричный элемент пропорционален следующей комбинации:

$$\mathcal{M}\sim\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}\varepsilon_\nu^*\varepsilon_\lambda^* p_\alpha k_\beta.$$

Поляризации зашиты в векторах ε_ν^* и ε_λ^*. В первой части курса были введены линейная и круговая поляризации. Круговые поляризации наиболее полезны с точки зрения квантовой теории поля, поскольку левая и правая поляризации связаны со спином фотона:

$$\varepsilon_L \cong (0,1,i,0), \qquad \varepsilon_R \cong (0,1,-i,0).$$

Распишем импульсы фотонов:

$$p=(\omega,0,0,\omega), \qquad k=(\omega,0,0,-\omega).$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Тогда индексы α и β могут принимать значения 0 и 3. Поскольку вектор $\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}$ полностью антисимметричен, значит индексы ν и λ могут принимать только значения 1 и 2. Распишем конструкцию $\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}\varepsilon_\nu^*\varepsilon_\lambda^* p_\alpha k_\beta$ через все возможные комбинации:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}\varepsilon_\nu^*\varepsilon_\lambda^* p_\alpha k_\beta &= \varepsilon^{1203}\varepsilon_1^*(p)\varepsilon_2^*(k)p_0k_3 + \varepsilon^{1230}\varepsilon_1^*(p)\varepsilon_2^*(k)p_3k_0 + \\ &+\varepsilon^{2103}\varepsilon_2^*(p)\varepsilon_1^*(k)p_0k_3 + \varepsilon^{2130}\varepsilon_2^*(p)\varepsilon_1^*(k)p_3k_0.\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon^{0123} = -1$, следовательно

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}\varepsilon_\nu^*\varepsilon_\lambda^* p_\alpha k_\beta &= -\varepsilon_1^*(p)\varepsilon_2^*(k)p_0k_3 + \varepsilon_1^*(p)\varepsilon_2^*(k)p_3k_0 + \varepsilon_2^*(p)\varepsilon_1^*(k)p_0k_3 - \\ &-\varepsilon_2^*(p)\varepsilon_1^*(k)p_3k_0.\end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon_1^*(p) = \varepsilon_1^*(k) = 1$, то

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}\varepsilon_\nu^*\varepsilon_\lambda^* p_\alpha k_\beta &= (-1)\varepsilon_2^*(k)\omega(-\omega) + \varepsilon_2^*(k)\omega^2 + \varepsilon_2^*(p)(-\omega^2) - \varepsilon_2^*(p)\omega^2 = \\ &= \omega^2\big(2\varepsilon_2^*(k) - 2\varepsilon_2^*(p)\big).\end{aligned}$$

Пусть правый фотон с импульсом p будет левополяризованным:

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_L(p) \cong (0, 1, i, 0).$$

Чтобы весь матричный элемент был отличен от нуля необходимо, чтобы второй фотон с импульсом k был левополяризованным:

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_L(k) \cong (0, 1, -i, 0).$$

Тогда

$$\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}\varepsilon_\nu^*\varepsilon_\lambda^* p_\alpha k_\beta = 2\omega^2(i - (-i)) = 4i\omega^2.$$

Легко сообразить, что если праволетящий фотон обладает правой поляризацией, то и леволетящий фотон также должен обладать правой поляризацией.

Именно в такой структуре ожидаем увидеть ненулевую амплитуду распада π^0 на два γ-кванта. Приведенные выкладки вскрывают практически классическую механическую систему, стоящую за распадом π^0. Однако возникает вопрос, можно ли проверить эту картину экспериментально. Для этого следует рассмотреть редкий, но возможный процесс

$$\pi^0 \to e^+e^-e^+e^-,$$

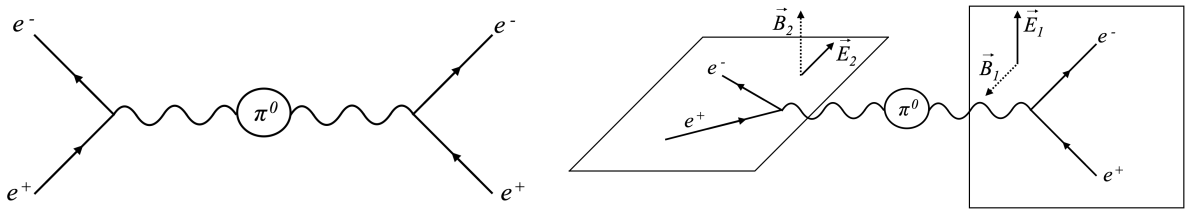
где π^0 сначала распадается на два виртуальных γ-кванта, виртуальные γ-кванты распадаются на пары e^+e^-. На рисунке 17.5 (а) представлена соответствующая диаграмма.

Каждая из пар e^+e^- обладает трехмерными векторами импульса. Как известно, два трехмерных импульса в пространстве образуют плоскость. Поэтому картина может быть перерисована для пространства (рис. 17.5 (б)).

Плоскости возможно определить экспериментально, для этого необходимо измерить импульсы e^+e^-. Также можно определить угол φ между двумя плоскостями. Основываясь на проделанных вычисления, следует ожидать максимальную вероятность распада при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Такое измерение было проделано коллаборацией KTeV,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

полученный график представлен схематично на рисунке 17.6. Так, вычисления подтверждаются экспериментом.



а) *б)*

Рис. 17.5. Диаграмма распада π^0 на два виртуальных γ-кванта, с последующим распадом виртуальных γ-кванты на пары e^+e^-.

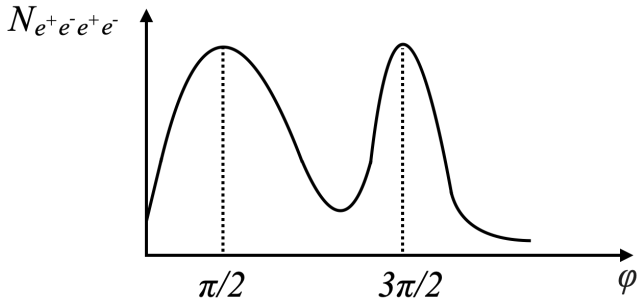


Рис. 17.6. График зависимости числа распадов $e^+e^-e^+e^-$ от угла между двумя плоскостями.

Киральная аномалия в Стандартной модели

Рассмотрим, какую рол играет киральная квантовая аномалия в Стандартной модели. В Стандартной модели присутствуют кварки и лептоны, они объединены в левые киральные дублеты и в правые синглеты. У тех и у других есть ряд квантовых чисел, которые их характеризуют, например, электрический заряд Q, третья проекция изоспина T_3 и гиперзаряд Y, которые связаны между собой по формуле Гелл-Мана-Нишиджимы:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{T}_3 + \frac{Y}{2}.$$

Ниже приведены значения гиперзарядов для частиц, которые будут интересовать нас в этой лекции:

$$\begin{array}{cccccccc} & u_L & d_L & u_R & d_R & \nu_L & l_R & l_L \\ Y & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -1 & -2 & -1 \end{array}.$$

Определим, как выглядит треугольная диаграмма в Стандартной модели до спонтанного нарушения симметрии, где есть три безмассовых поля A_i и одно безмассовое поле B. Две линейные комбинации A_3 и B превращаются в поле фотона и Z-бозона, а две линейные комбинации из A_1 и A_2 превращаются в $W^{\pm}$-бозоны, которые приобретают масс в результате спонтанного нарушения симметрии. Таким образом,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

любая треугольная диаграмма, которая появляется в Стандартной модели, может содержать в своих вершинах любые из комбинаций A_i и B (рис. 17.7).

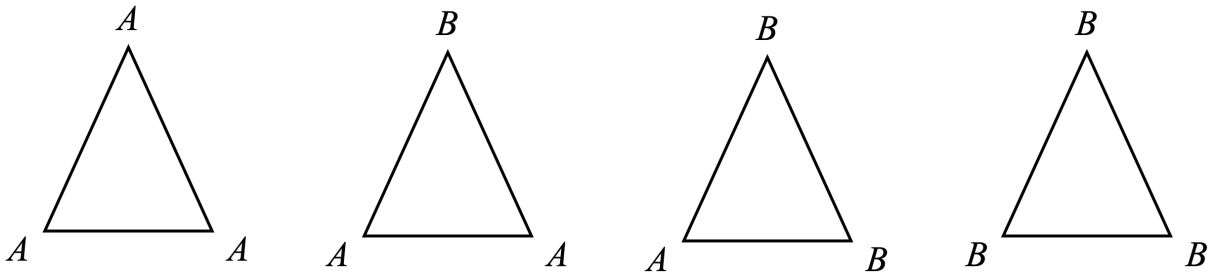


Рис. 17.7. Треугольные диаграммы в Стандартной модели.

Если в вершине находится поле A, то встречается симметрия $SU(2)$. Если в вершине находится поле B, то присутствует симметрия $U(1)$. Для всех таких диаграмм будет присутствовать вторая диаграмма, как было рассмотрено в случае киральной аномалии. В каждой из вершин помимо γ-матриц будет присутствовать или матрица $[SU(2)]$ или $[U(1)]$. $[SU(2)]$ отвечает матрица Паули, $[U(1)]$ отвечает величина гиперзаряда. Результатом суммирования диаграмм будет вычисление следа

$$Tr\,[T^a T^b T^c] + Tr\,[T^a T^c T^b] = Tr\,[T^a\{T^b, T^c\}]$$

где T^i – матрица вершины.

Рассмотрим каждый случай:

1) AAA: $Tr\,[\sigma^a\{\sigma^b, \sigma^c\}] = \delta^{bc} Tr[\sigma^a] = 0$, так, в диаграммах с тремя вершинами A нет квантовой аномалии.
2) ABB: $Tr\,[\sigma^a Y^b Y^c] = 0$, квантовой аномалии нет.
3) AAB: $Tr\,[\{\sigma^a, \sigma^b\}Y^c] \to \delta^{ab} Tr[Y_L]$, необходимо вычислить след от всех гиперзарядов по всем возможным частицам, которые взаимодействуют с полями A, то есть по всем левым гиперзарядам. Для одного поколения кварков и лептонов верно
$$\delta^{ab} Tr[Y_L] = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot 3 - 1 - 1 = 0,$$
следовательно след равен нулю и для всех поколений лептонов и кварков. Множитель 3 учитывает 3 возможных цвета кварков.
4) BBB: $Tr[Y^3] = Tr[Y_L^3] - Tr[Y_R^3]$. Можно показать, что вклады от левых полей и правых полей отличаются знаком. Распишем выражение для одного поколения лептонов и кварков:
$$\begin{aligned} Tr[Y^3] &= 3 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right] + (-1)^3 + (-1)^3 - 3 \cdot \left[\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3\right] - (-2)^3 = \\ &= \frac{2}{9} - 2 - \frac{56}{9} + 8 = -\frac{54}{9} + 6 = \frac{-54 + 54}{9} = 0. \end{aligned}$$

Так, киральная квантовая аномалия в Стандартной модели автоматически зануляется.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

В качестве упражнения можно проделать следующее: исходя из приведенных результатов, можно вывести другое соотношение и показать связь между электрическими зарядами кварков и лептонов. Так, отсутствие киральной аномалии можно интерпретировать как дробные заряды электрона. Кроме того, из отсутствия киральной аномалии можно вывести нейтральность атома водорода, поскольку появляется четкая связь между электрическими зарядами электрона и протона.

Подведем краткие итоги. При изучении квантовой теории поля в первых двух частях курса были подробно рассмотрены принципы работы с диаграммами Фейнмана, также было рассчитано множество полезных для экспериментатора процессов.

В третьей части курса были рассмотрены петлевые диаграммы, которые приводят к бесконечностям. В курсе показано, как работать с такими бесконечностями и что они означают физически. Рассмотрение петлевых диаграмм привело к переосмыслению таких понятий, как электрический заряд, масса частицы, поле. Все эти понятия зависит от масштаба энергии, на котором они изучаются. После такого переосмысления оказалось, что все бесконечности в квантовой электродинамике сокращаются. В курсе не было показано, но в Стандартной модели бесконечности также сокращаются. Одним из важных практических применений теории, рассмотренной в третьей части курса, было вычисление аномального магнитного момента электрона, совпадающее с экспериментом. В последней части курса разобрано такое явление как квантовая аномалия, означающая, что классические законы сохранения могут нарушаться на квантовом уровне. Однако слово «аномалия» скорее отражает историческое удивление теоретиков. На сегодняшний день квантовая аномалия является естественным следствием квантовой теории. В качестве важнейшего примера применения квантовой аномалии была вычислена диаграмма распада π^0, результаты вычислений хорошо согласуются с экспериментом, а также продемонстрировано, что в отсутствии квантовой аномалии π^0 не распадался бы. Завершающим штрихом в курсе рассмотрен вопрос о киральной квантовой аномалии в Стандартной модели. Показано, что киральная квантовая аномалия в Стандартной модели зануляется в силу соотношения между количеством поколений кварков и количеством поколений лептонов. Вопрос о том, почему число поколений лептонов должно равняться числу поколений кварков в Стандартной модели не находит объяснения. Возможно, это означает, что существует более глубокая симметрия, связывающая между собой такие разные объекты как кварки и лептоны.

Лекция 18. Математические приемы

Телесный угол в d-мерном пространстве

Вспомним, как определяется телесный угол Ω_d в d-мерном пространстве. Пусть есть d-мерное, в котором вектор определяется как $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. Определим аналоги сферических углов в трехмерном пространстве (или полярных углов в двумерном пространстве) в общем случае.

0. В качестве нулевого шага определим некоторые величины. Пусть r – длина вектора x:

$$r = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}.$$

Единичные векторы n_i определим следующим образом:

$$n_i = \frac{x_i}{r}.$$

Очевидно, что n_i – компоненты в сфере S^{d-1} размерности $d-1$:

$$\sum_{i=1} n_i^2 = 1, \qquad n_i \in S^{d-1}.$$

1. Представим вектор $\vec{x}$ в виде $\vec{x} = (x_1, \vec{\rho}_1)$,
где $\vec{\rho}_1 = (x_2, \dots, x_d)$. Угол θ_1 определим так, чтобы

$$\cos\theta_1 = \frac{x_1}{r} \qquad \to \qquad x_1 = r\cos\theta_1.$$

Оставшийся вектор $\vec{\rho}_1$ имеет длину

$$\rho_1 = |\vec{\rho}_1| = r\sin\theta_1 \qquad \to \qquad x_1^2 + \rho_1^2 = \vec{x}^2 = r^2.$$

Так, на этом шаге выделена одна из осей, оставшийся вектор лежит в пространстве $d-1$.

2. Рассмотрим теперь вектор $\vec{\rho}_1 = (x_2, \dots, x_d) = (x_2, \vec{\rho}_2)$. Тогда

$$\cos\theta_2 = \frac{x_2}{\rho_1} \qquad \to \qquad x_2 = \rho_1\cos\theta_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2.$$

При этом оставшийся вектор ρ_2 имеет длину

$$\rho_2 = |\vec{\rho}_2| = \rho_1\sin\theta_2 \qquad \to \qquad \rho_2^2 + x_2^2 = \rho_1^2.$$

3. Аналогично рассмотрим вектор $\vec{\rho}_2 = (x_3, \vec{\rho}_3)$. Тогда

$$\cos\theta_3 = \frac{x_3}{\rho_2} \qquad \to \qquad x_3 = \rho_2\cos\theta_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3.$$

При этом оставшийся вектор ρ_3 имеет длину

$$\rho_3 = |\vec{\rho}_3| = \rho_2\sin\theta_3.$$

k. На последнем шаге остается

$$x_k = \rho_{k-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2 \dots \sin\theta_{d-1}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Запишем теперь дифференциал в сферической системе координат в d-мерном пространстве. Элемент объема имеет вид

$$dx_1 dx_2 \dots dx_d \equiv d^d x = r^{d-1} dr\, J(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-1},$$

где $J(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1})$ – якобиан. В качестве примера распишем трехмерный случай:

$$d^3 r = r^2 dr d\Omega_3.$$

Якобиан вычисляется стандартным образом в виде определителя, запишем итоговый ответ:

$$J = \sin^{d-2}\theta_1 \sin^{d-3}\theta_2 \dots \sin\theta_{d-2}.$$

Так,

$$d^d x = r^{d-1} dr\ \sin^{d-2}\theta_1 \sin^{d-3}\theta_2 \dots \sin\theta_{d-2}\, d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-1}$$

Все углы $\theta_i \in (0, \pi)$, где $i = 1,2, \dots, d-2$, при этом $\theta_{d-1} \in (0, 2\pi)$. Конструкция

$$d\Omega_d = \sin^{d-2}\theta_1 \sin^{d-3}\theta_2 \dots \sin\theta_{d-2}\, d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-1}$$

является элементом угла в d-мерном пространстве. Поэтому интеграл по всем таким углам будет телесным углом:

$$\Omega_d = \int_0^\pi d\theta_1\ \sin^{d-2}\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2\ \sin^{d-3}\theta_2\ \dots \int_0^\pi d\theta_{d-2} \sin\theta_{d-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{d-1}.$$

Воспользуемся формулой

$$\int_0^\pi d\theta\ \sin^k\theta = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)},$$

тогда

$$\Omega_d = 2\pi \cdot \pi^{\frac{d-2}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot \dots \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 2\pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.$$

Так, итоговая формула для телесного угла имеет следующий вид:

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.$$

В качестве упражнения в формулу можно подставить $d = 1, 2, 3, 4 \dots$, чтобы выяснить каковы телесные углы в пространствах соответствующих размерностей.

α-параметризация

Еще один полезный прием в теории ренормировок – α-параметризация. Зачастую в петлевых диаграммах встречаются объекты, связанные с пропагаторами частиц, которые можно формально записать в виде

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\frac{1}{A \cdot B},$$

где A и B являются функциями петлевых импульсов. Чтобы выполнить интегрирование по этим импульсам, удобно представить произведение в виде некоторого сдвинутого импульса в некоторой степени:

$$\frac{1}{A \cdot B} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha \cdot A + (1-\alpha)B]^2}.$$

Выведем эту формулу:

$$\frac{1}{A \cdot B} = \frac{1}{A-B}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) = \frac{1}{A-B}\int_A^B \frac{dx}{x^2}\frac{1}{A-B}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right).$$

Сделаем замену в интеграле:

$$x = \alpha \cdot A + (1-\alpha)B, \qquad dx = d\alpha\,(A-B),$$

тогда

$$\frac{1}{A \cdot B} = \frac{1}{A-B}\int_A^B \frac{dx}{x^2}\frac{1}{A-B}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) = \frac{1}{A-B}\int_0^1 \frac{d\alpha(A-B)}{(\alpha A + (1-\alpha)B)^2}.$$

Пример

Пусть

$$A = p^2 + m_1^2, \qquad B = (p+k)^2 + m_2^2,$$

тогда вычислим интеграл

$$\int \frac{d^d p}{(p^2+m_1^2)[(p+k)^2+m_2^2]} = \int d^d p \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(\alpha[(p+k)^2+m_2^2] + (1-\alpha)[p^2+m_1^2])^2}.$$

Распишем выражение в знаменателе:

$$\begin{aligned}\alpha[(p+k)^2+m_2^2] + (1-\alpha)[p^2+m_1^2] = \\ = p^2 + 2p\cdot k\cdot\alpha + \alpha(k^2+m_2^2) + (1-\alpha)m_1^2 + k^2\alpha^2 - k^2\alpha^2 = \\ = (p+\alpha k)^2 + \Delta(\alpha, k^2),\end{aligned}$$

где $\Delta(\alpha, k^2) = \alpha(k^2+m_2^2) + (1-\alpha)m_1^2 - k^2\alpha^2$. Таким образом,

$$\int \frac{d^d p}{(p^2+m_1^2)[(p+k)^2+m_2^2]} = \int_0^1 d\alpha \int d^d p \frac{1}{[(p+\alpha k)^2 + \Delta(\alpha, k^2)]^2}.$$

В знаменателе возникает полный квадрат **смещенного импульса**. Полученный интеграл достаточно просто вычислить.

Рассмотренный прием α-параметризации был предложен Р. Фейнманом.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Метод Швингера

Рассмотрим другой метод, предложенный Швингером. Начнем с определения Г - функции:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dt\, t^{n-1} e^{-t},$$

введем замену переменных, пусть $t = s \cdot A$, тогда $dt = ds \cdot A$, $t^{n-1} = s^{n-1} \cdot A^{n-1}$, подставив эту замену в выражение для Г-функции, получим

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty ds \cdot A\, s^{n-1} A^{n-1} e^{-s\cdot A}.$$

Тогда получаем формулу, являющуюся основой для обобщения формулы Фейнмана:

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty ds\, s^{n-1} e^{-s\cdot A}.$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}},$$

где a_i – некоторые знаменатели разных пропгаторов в каких-то степенях n_i. Перепишем это выражение в более удобном виде, используя формулу, выведенную выше:

$$\frac{1}{a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k a_i^{n_i}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k \Gamma(n_i)} \int_0^\infty \prod_{i=1}^k \left(ds_i\, s_i^{n_i - 1} \right) e^{-\sum_{i=1}^k s_i a_i}.$$

Определим n как

$$n = \sum_i n_i,$$

и введем замену переменных следующего вида:

$$\eta = \sum_{i=1}^k s_i\,, \qquad x_i = \frac{s_i}{\eta}, \qquad \sum_{i=1}^k x_i = 1,$$

тогда

$$\sum_{i=1}^k s_i a_i = \eta \sum_{i=1}^k x_i a_i,$$

$$\prod_{i=1}^k ds_i = \eta^{k-1} d\eta \prod_{i=1}^k dx_i \delta\left(\sum_{i=1}^k x_i - 1 \right),$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

где присутствие δ-функции гарантирует $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$, при этом все x_i можно использовать как независимые переменные. Также

$$\prod_{i=1}^{k} s_i^{n_i-1} = \prod_{i=1}^{k} \eta^{n_i-1} x_i^{n_i-1} = \eta^{n-k} \prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i-1}.$$

Тогда

$$\prod_{i=1}^{k} \left(ds_i \, s_i^{n_i-1}\right) = \eta^{n-1} d\eta \prod_{i=1}^{k} dx_i x_i^{n_i-1} \delta\left(\sum_{i=1}^{k} x_i - 1\right).$$

Определим, в каких пределах изменяются переменные: η меняется от 0 до ∞, каждое x_i в пределах от 0 до 1. Из всех приведенных интегралов, записанных сначала как интегралы по ds_i, остается интеграл по $d\eta$ и k интегралов по dx_i с δ-функцией. Распишем интеграл по $d\eta$:

$$\int_0^{\infty} d\eta \, \eta^{n-1} e^{-\eta \sum_{i=1}^{k} x_i a_i} = \frac{\Gamma(n)}{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i a_i\right)^n}.$$

Теперь можно записать конечную формулу:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{k} a_i^{n_i}} = \frac{\Gamma(n)}{\prod_{i=1}^{k} \Gamma(n_i)} \int_0^1 \prod_{i=1}^{k} \left(dx_i x_i^{n_i-1}\right) \frac{\delta\left(\sum_{i=1}^{k} x_i - 1\right)}{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i a_i\right)^n}.$$

При вычислении петлевых диаграмм часто встречаются конструкции вида $\frac{1}{a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}}$, где a_i – функции импульсов. В результате преобразований получается множитель из Г-функций, k интегралов по dx_i в пределах от 0 до 1. При этом на сумму x_i наложено условие $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$ по построению. Так, вся сложная часть задачи сведена к знаменателю $\left(\sum_{i=1}^{k} x_i a_i\right)^n$. Этот знаменатель похож на то, что было получено в α-параметризации Фейнмана. Далее вычисления становятся простыми. Так, метод Швингера позволяет снимать интегралы по импульсам в самом общем виде.

Как вычислять интегралы

Итак, было показано, как определяется телесный угол Ω_d в d-мерном пространстве, как свести выражение вида $\frac{1}{a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}}$ к некоторому интегралу через параметризацию Швингера. Рассмотрим следующие интегралы:

1.

$$I_n(\Delta^2) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^n} = \frac{i(-1)^n \Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(n)} (\Delta^2 - i\varepsilon)^{\frac{d}{2}-n}.$$

2. Из симметрийных соображений легко сообразить, что

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^n} = 0.$$

3. Третьим необходимо рассмотреть интеграл, зависящий от двух индексов:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^n} = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^n}.$$

Можно легко убедиться, что равенство верно, домножив обе части на $g_{\mu\nu}$. Так, третий интеграл сводится к вычислению интеграла от квадрата импульса.

Начнем с вычисления третьего интеграла:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^n} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2 - \Delta^2 + \Delta^2}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^n} = \\
&= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^{n-1}} + \Delta^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^n} = \\
&= I_{n-1}(\Delta^2) + \Delta^2 I_n(\Delta^2).
\end{aligned}$$

Так, вычисление третьего интеграла сводится к вычислению первого интеграла:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^n} = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \left(I_{n-1}(\Delta^2) + \Delta^2 I_n(\Delta^2)\right).$$

Теперь разберем подробно вычисление первого интеграла7

«Переход к Евклиду» или Виковский поворот

Вычислить первый интеграл помогут некоторые приемы. Прежде всего в таких интегралах с импульсами в пространстве Минковского, то есть $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$, следует перейти к евклидовому пространству:

$$p_0 = ip_0^E, \qquad (p^E)^2 = (p_0^E) + (\vec{p}^E)^2.$$

Здесь будет важна компонента $i\varepsilon$, она обеспечивает математическую возможность такого перехода. Рассмотрим комплексную плоскость и переведем один из интегралов по p_0 переведем от вещественных переменных к комплексным. Добавка $i\varepsilon$ приводит к тому, что полюс смещается вниз при $p_0 > 0$ и вверх при $p_0 < 0$. Интеграл берется вдоль вещественной оси. Сделаем теперь виковский поворот, теперь контур интегрирования направлен вдоль мнимой оси (рис. 18.1). Теперь продолжим вычисления. Распишем $d^d p$:

$$d^d p = dp_0 d\vec{p},$$

тогда

$$dp_0 = i dp_0^E, \qquad d\vec{p} = d\vec{p}^E.$$

Перепишем интеграл в более простом виде:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$I_n(\Delta^2) = \int \frac{dp_0^E d\vec{p}^E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-1)^n[(p^E)^2 + \Delta^2 - i\varepsilon]^n} = i(-1)^n \int \frac{dp^E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(p^E)^2 + \Delta^2 - i\varepsilon]^n},$$

поскольку

$$\begin{aligned} p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon &= (ip_0^E)^2 - (\vec{p}^E)^2 - \Delta^2 + i\varepsilon = -[(p_0^E)^2 + (\vec{p}^E)^2] - \Delta^2 + i\varepsilon = \\ &= -(p^E)^2 - \Delta^2 + i\varepsilon. \end{aligned}$$

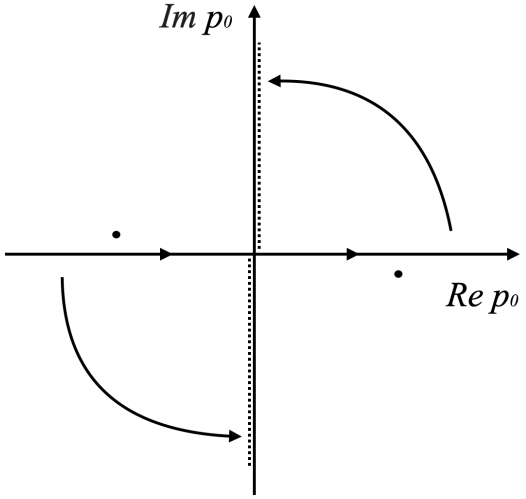


Рис. 18.1. Виковский поворот.

Метод Швингера

Следующий шаг в вычислении интеграла – применение метода Швингера, рассмотренного ранее в этой лекции:

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty ds\, s^{n-1} e^{-s\cdot A},$$

где теперь $A = (p^E)^2 + \Delta^2 - i\varepsilon$. Так,

$$\begin{aligned} I_n(\Delta^2) &= i(-1)^n \int \frac{dp^E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(p^E)^2 + \Delta^2 - i\varepsilon]^n} = \\ &= \frac{i(-1)^n}{(2\pi)^d \Gamma(n)} \int dp^E \int_0^\infty ds\, s^{n-1} e^{-s\cdot\left((p^E)^2 + \Delta^2 - i\varepsilon\right)}. \end{aligned}$$

Интеграл по dp^E – гауссов интеграл, интеграл по ds сводится к Г-функции. Распишем интегралы по-отдельности:

$$\int dp^E e^{-s\cdot(p^E)^2} = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{d}{2}},$$

$$\int_0^\infty ds\, s^{n-1} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{s^{\frac{d}{2}}} e^{-s\cdot(\Delta^2 - i\varepsilon)} = \pi^{\frac{d}{2}} \int_0^\infty ds\, s^{n-\frac{d}{2}-1} e^{-s\cdot(\Delta^2 - i\varepsilon)} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(\Delta^2 - i\varepsilon)^{n-\frac{d}{2}}} \Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right).$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Так, действительно,

$$I_n(\Delta^2) = \frac{i(-1)^n \Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(n)} (\Delta^2 - i\varepsilon)^{\frac{d}{2}-n}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Лекция 19. Сечение рассеяния с волновыми пакетами (часть 1)

Введение

В начале курса были выведены формулы для сечения рассеяния и ширины распада. Однако, приведенный вывод математически некорректен.

Стандартным подходом в квантовой теории поля и теории рассеяния является использование состояний со строго определенными импульсами. Это не более чем математическая абстракция – состоянию со строго определенным импульсом в конфигурационном пространстве отвечает плоская волна, которая равномерно заполняет всю вселенную, что совершенно не похоже на то, как мы могли бы представить себе рассеивающиеся частицы. Например, в ускорителе при столкновении два пучка явно не занимают всю Вселенную, в действительности пучки сосредоточены в трубе, притом небольшого диаметра. Диаметр самих пучков не превышает микрона, экспериментаторы стремятся сделать пучок как можно более узким для получения большего числа столкновений. Так, плоские волны, которые используются в теории, не являются физическими объектами. Только в определенных случаях плоские волны могут считаться достаточно хорошим приближением.

Существует корректный способ вывода формул для сечения рассеяния и ширины распада – вместо плоских волн следует рассматривать волновые пакеты. То есть объекты, которые локализованы в координатном и импульсном пространствах. Так, используется суперпозиция плоских волн, локализованная в пространстве.

Итоговый ответ, который получим с использованием волновых пакетов, будет очень красивым. Введение волновых пакетов приводит к более глубокому пониманию происходящего. Будет показано, что пучки, которые, например, сталкиваясь с большим (по сравнению с их размерами) прицельным параметром, пролетают мимо друг друга без взаимодействий. Квантовая теория поля прекрасно описывает это явление.

Наконец, метод с рассеянием волновых пакетов обладает практическим применением. Еще в 80-х годах на ускорителе в Новосибирске было обнаружено, что экспериментально измеренное сечения рассеяния электрона с позитроном

$$\sigma(e^+e^- \to e^+e^-\gamma)$$

оказалось на 30% меньше теоретического. Физик Тихонов понял, что явление связано с тем, что теоретическое решение использует плоские волны. Если рассматривать волновые пакеты, то действительно получаем меньшее сечение, согласующееся с экспериментом.

Вычисления, которые будут проделаны, содержат очень громоздкие части. В ходе рассуждений эти части будут опущены. Для более подробного разбора таких утверждений рекомендуется обратиться к научным статьям. Однако все основные моменты, такие как логика вывода формул, физика и геометрия столкновений, будут представлены в этой лекции.

Определения: волновая функция, состояние с плоскими волнами, волновой пакет

Введем некоторые определения. Будем рассматривать скалярные частицы. Все рассуждения легко обобщаются на частицы с произвольным спином.

Состояние со строго определенным импульсом $|\vec{p}\rangle$ является собственным состоянием трехмерных операторов энергии и импульса:

$$\hat{P}^{\mu}|\vec{p}\rangle = p^{\mu}|\vec{p}\rangle.$$

Аналогично можно построить трехмерный оператор координаты:

$$\hat{\vec{X}}|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle.$$

Операторные единицы $\hat{I}$ можно построить с помощью любых собственных состояний любого оператора.

Так, например, в импульсном пространстве

$$\hat{I}_p = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|}{2E_p},$$

$$\hat{I}_p|\vec{q}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle}{2E_p} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{|\vec{p}\rangle(2\pi)^3 2E_p\delta^3(\vec{p}-\vec{q})}{2E_p} = |\vec{q}\rangle.$$

Можно записать произвольное квантовое состояние $|\psi\rangle$ в виде интеграла:

$$|\psi\rangle = \hat{I}_p|\psi\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\psi\rangle}{2E_p}.$$

В релятивистском случае

$$\frac{\langle\vec{p}|\psi\rangle}{\sqrt{2E_p}} = \tilde{\psi}(\vec{p}),$$

поэтому

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{|\vec{p}\rangle}{\sqrt{2E_p}}\tilde{\psi}(\vec{p}).$$

Если $\tilde{\psi}$ является довольно узкой функцией от импульса, то суперпозиция такого вида и называется **волновым пакетом** (рис. 19.1).

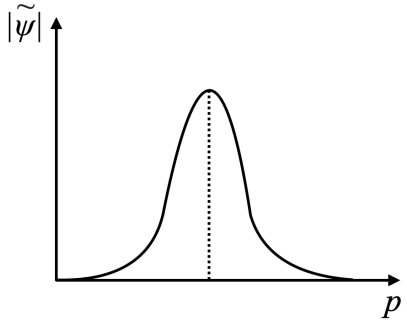


Рис. 19.1. Волновой пакет.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

То же самое можно записать и для конфигурационного пространства. Для этого нужно записать операторную единице вида

$$\hat{I}_p = \int d^3x |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|.$$

Для произвольного состояния

$$|\psi\rangle = \hat{I}_x|\psi\rangle = \int d^3x |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\psi\rangle.$$

Волновая функция в конфигурационном пространстве имеет вид

$$\langle\vec{x}|\psi\rangle = \psi(\vec{x}).$$

Так, то же самое квантовое состояние можно записать в виде суперпозиции в координатном пространстве:

$$|\psi\rangle = \int d^3x |\vec{x}\rangle\psi(\vec{x}).$$

$\psi(\vec{x})$ и $\tilde{\psi}(\vec{p})$ связаны друг с другом Фурье-преобразованием. Проекция состояния с определенным импульсом на состояние с определенной координатой с точностью до некоторого множителя $\sqrt{2E_p}$ может быть записана в следующем виде:

$$\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\sqrt{2E_p}.$$

Теперь перевыразим $\psi(\vec{x})$ через $\tilde{\psi}(\vec{p})$:

$$\psi(\vec{x}) \equiv \langle\vec{x}|\psi\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle}{\sqrt{2E_p}}\tilde{\psi}(\vec{p}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\tilde{\psi}(\vec{p}).$$

Аналогичным образом можно сделать обратное преобразование.

Амплитуда

Рассмотрим реакцию

$$a + b = X,$$

где X – набор финальных частиц, каждая из которых будет описываться волновым пакетом. Это наиболее общее рассмотрение, не предполагающее нефизичных вещей, таких как плоские волны. Опишем амплитуду такого процесса. Запишем определение:

$$\mathcal{A} = \frac{\langle f|S-1|i\rangle}{N} = \frac{\langle f|S-1|i\rangle}{\sqrt{\langle f|f\rangle}\langle i|i\rangle}$$

где $\langle f|$ – конечное состояние, $|i\rangle$ – начальное состояние, S – матрица, N – нормировочный множитель.

Рассмотрим одну из начальных частиц, определим норму в импульсном пространстве. Поскольку

$$|a\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{|\vec{p}\rangle}{\sqrt{2E_p}}\tilde{\psi}(\vec{p}),$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

тогда

$$\langle a|a\rangle = \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{\langle \vec{k}|\vec{p}\rangle}{\sqrt{2E_p 2E_k}} \tilde{\psi}^*(\vec{k})\tilde{\psi}(\vec{p}),$$

так как

$$\langle \vec{k}|\vec{p}\rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p}-\vec{k}),$$

получаем следующий интеграл:

$$\langle a|a\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left|\tilde{\psi}(\vec{p})\right|^2.$$

При работе с плоскими волнами нормой была $\langle \vec{k}|\vec{p}\rangle$, которой невозможно положить равной единице, поскольку эта величина является размерной и бесконечно большой:

$$\langle \vec{k}|\vec{p}\rangle \sim \lim_{V\to\infty} V.$$

Теперь $\langle a|a\rangle$ может быть равной любой константе, например, единице:

$$\langle a|a\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left|\tilde{\psi}(\vec{p})\right|^2 = 1.$$

Если в начальном или конечном состоянии не одна частица, а две и более, то получаем интегралы, похожие на эти, но в общем случае интегралы не расфакторизовываются на отдельные множители за одним исключением, когда эти пакеты не пересекаются в пространстве и времени. Введем приближение: если в начальный момент времени волновые пакеты практически не пересекаются, тогда можно записать

$$\langle i|i\rangle = \prod_i \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \left|\tilde{\psi}_i(\vec{p}_i)\right|^2 = 1.$$

При обсуждении столкновения частиц в ускорителях, рассеянии космических лучей в атмосфере, например, такое приближение является хорошим. Аналогичным образом можно ввести приближение для пакетов конечных частиц:

$$\langle f|f\rangle = 1.$$

Тогда с учетом введенных приближений запишем выражение для амплитуды:

$$\mathcal{A} = \langle f|S-1|i\rangle.$$

От чего зависит волновая функция

Запишем теперь амплитуду, подразумевая, что у каждого из начальных и конечных состояний есть свой волновой пакет. Для этого уточним, от чего зависят волновые функции каждого волнового пакета. Пусть

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\vec{p}, \vec{P}),$$

где $\vec{P}$ – средний импульс, а $\vec{p}$ – переменная интегрирования.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Вспомним вывод некоторых выражений. Рассмотрим упрощенную ситуацию, из S-матрицы рассмотрим только одно поле, например, поле электрона. Поле электрона ψ является квантовым полем, то есть оператором, и зависит от четырехмерной координаты x. Пусть начальное состояние будет состоянием с определенным импульсом $|\vec{p}\rangle$. Нас будет интересовать структура вида

$$\langle 0|\psi(x)|\vec{p}\rangle = \left\langle 0\left| \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_k}}\left[a_{ks}u_{ks}e^{-ik\cdot x} + b^+_{ks}v_{ks}e^{+ik\cdot x}\right]\right|\vec{p},r\right\rangle.$$

Второй член не дает никакого вклада,

$$|\vec{p},r\rangle = \sqrt{2E_p}a^+_{pr}|0\rangle,$$

и поскольку

$$a_{ks}a^+_{pr} = \left\{a_{ks},a^+_{pr}\right\} - a^+_{pr}a_{ks} = (2\pi)^3\delta^3\left(\vec{k}-\vec{p}\right)\delta_{sr} - a^+_{pr}a_{ks},$$

получаем

$$\langle 0|\psi(x)|\vec{p}\rangle = u_{pr}e^{-ip\cdot x}.$$

Поле в S-матрице остается тем же самым, но теперь вместо состояния с определенным импульсом в амплитуде будет стоять суперпозиция состояний с определенными импульсами. Импульсы6 относящиеся к начальным состояниям обозначим как p, и будем использовать индекс i, импульсы конечных состояний будем обозначать как k, исндекс, соответствующий конечным состояниям – f. Выражение для амплитуды тогда принимает вид:

$$\mathcal{A} = \langle f|S-1|i\rangle = \prod_i\int\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\frac{\tilde{\psi}_i\left(\vec{p}_i,\vec{P}_i\right)}{\sqrt{2E_{p_i}}}\prod_f\int\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}\frac{\tilde{\psi}^*_f\left(\vec{k}_f,\vec{K}_f\right)}{\sqrt{2E_{k_f}}}i\widetilde{\mathcal{M}}_{fi}\left(\left\{\vec{P}_i\right\},\left\{\vec{K}_f\right\}\right).$$

где $i\widetilde{\mathcal{M}}_{fi}\left(\left\{\vec{P}_i\right\},\left\{\vec{K}_f\right\}\right)$ – матричный элемент, зависящий от всех импульсов начальных и конечных состояний, при этом можно записать

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{fi}\left(\left\{\vec{P}_i\right\},\left\{\vec{K}_f\right\}\right) = (2\pi)^4\delta^4\left(\sum_i P_i - \sum_f K_f\right)i\mathcal{M}_{fi},$$

где $i\mathcal{M}_{fi}$ – плосковолновой матричный элемент. δ-функция появляется в результате интегрирования экспонент:

$$(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_i P_i - \sum_f K_f\right) = \int d^4x e^{\left(i\sum_i P_i - i\sum_i K_f\right)\cdot x}.$$

Выражение для амплитуды можем переписать в следующем виде:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$\mathcal{A} = \int d^4x \prod_i \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\psi}_i(\vec{p}_i, \vec{P}_i)}{\sqrt{2E_{p_i}}} e^{ip_i \cdot x} \prod_f \int \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\psi}_f^*(\vec{k}_f, \vec{K}_f)}{\sqrt{2E_{k_f}}} e^{ik_f \cdot x}\, i\mathcal{M}_{fi}(\{\vec{p}_i\}, \{\vec{k}_f\}).$$

Так, если бы не было волновых пакетов, ψ были бы похожи на δ-функции и снимали бы интегралы по p_i и k_f, интегралы бы сворачивались в выражения с δ-функциями. Тогда мы получили бы плосковолновой матричный элемент. Полученное выражение для случая с волновыми пакетами гораздо богаче. Здесь появляется возможность сталкивать частицы локализованно в пространстве и времени. Можно ожидать, что в этих вычислениях скрыта геометрия таких столкновений. Волновые пакеты могут перекрываться полностью или частично, могут не перекрываться, что и должна корректно воспроизвести теория поля.

До сих пор при получении амплитуды мы использовали достаточно общее предположение – в начальном состоянии волновые пакеты не перерываются в пространстве и времени, как и в конечном состоянии. Это приближение справедливо для многих случаев.

Следующий шаг, позволяющий упростить вычисления – предположение о том, что волновые пакеты достаточно узкие в импульсном пространстве. Это означает, что есть некоторый наиболее вероятный импульс и некоторый быстро спадающий профиль. Тогда в интегралах по импульсам пренебрежем зависимостью матричного элемента от переменных $\vec{p}_i$ и $\vec{k}_f$, считая, что их можно заменить на $\vec{P}_i$ и $\vec{K}_f$ соответственно, так

$$\mathcal{A} \approx \int d^4x \prod_i \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\psi}_i(\vec{p}_i, \vec{P}_i)}{\sqrt{2E_{P_i}}} e^{ip_i \cdot x} \prod_f \int \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\psi}_f^*(\vec{k}_f, \vec{K}_f)}{\sqrt{2E_{K_f}}} e^{ik_f \cdot x}\, i\mathcal{M}_{fi}(\{\vec{P}_i\}, \{\vec{K}_f\}),$$

в приведенном выражении также введены замены $E_{p_i} \to E_{P_i}$ и $E_{k_f} \to E_{K_f}$. Можно заметить, что полученный результат представляет собой волновую функцию в координатном представлении. Поэтому

$$\mathcal{A} \approx \int d^4x \prod_i \psi_i(x) \prod_f \psi_f^*(x) \frac{i\mathcal{M}_{fi}(\{\vec{P}_i\}, \{\vec{K}_f\})}{\prod_i \sqrt{2E_{P_i}} \prod_f \sqrt{2E_{K_f}}}.$$

Выражение $\frac{i\mathcal{M}_{fi}(\{\vec{P}_i\}, \{\vec{K}_f\})}{\prod_i \sqrt{2E_{P_i}} \prod_f \sqrt{2E_{K_f}}}$ описывает динамику взаимодействий, множитель $\int d^4x \prod_i \psi_i(x) \prod_f \psi_f^*(x)$ описывает пересечение волновых пакетов в пространстве и времени. Если волновые пакеты не пересекаются, то ожидается подавление амплитуды. Так, множитель $\int d^4x \prod_i \psi_i(x) \prod_f \psi_f^*(x)$ описывает геометрию столкновений.

Полученная амплитуда безразмерная, ее можно интерпретировать как амплитуду вероятности. Прежде, чем перейти к следующим шагам, следует задуматься над одним вопросом. Мы работаем с амплитудой, являющейся безразмерной величиной. При этом

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

после ряда математических преобразований, которые будут представлены далее, мы получим квадрат этой амплитуды, который будем интерпретировать как плотность вероятности или вероятность процесс. Откуда в этой вероятности появится площадь, необходимая для формулы сечения рассеяния? Не окажется ли так, что площадь в сечении будет обезразмериваться некоторой величиной с размерностью площади из предыдущего множителя, связанного с геометрией?

Далее можно перейти к вычислению квадрата модуля амплитуды:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{\left|i\mathcal{M}_{fi}\left(\{\vec{P}_i\},\{\vec{K}_f\}\right)\right|^2}{\prod_i 2E_{P_i}\prod_f 2E_{K_f}}\left|\int d^4x \prod_i \psi_i(x)\prod_f \psi_f^*(x)\right|^2 .$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Лекция 20. Сечение рассеяния с волновыми пакетами (часть 1)

Приближение гауссова волнового пакета

Рассмотрим интеграл, зависящий от геометрического пересечения пакетов. Для этого предположим определенный вид волнового пакета – гауссов волновой пакет. В этом приближении можно доказать, что

$$\left|\prod_{i,f}\int d^4x\,\psi_i(x)\psi_f^*(x)\right|^2 = (2\pi)^4\delta_G(P_I-K_F)\int d^4x\prod_{i,f}|\psi_i(x-X_i)|^2\left|\psi_f\left(x-X_f\right)\right|^2.$$

Чтобы получить эту формулу, необходимо отлично владеть математическим анализом и исписать множество страниц. В этой лекции обсудим результат. Определим значение введенных функций.

- $\delta_G(K)$ – функция Гаусса, зависящая от четырехмерного импульса, функция имеет такую нормировку, чтобы при параметре дисперсии этой функции (ширине волнового пакета σ), стремящемся к нулю, предел функции $\delta_G(K)$ был равен δ-функции Дирака:

$$\sigma\to 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta_G(K)=\delta^4(K).$$

- $$P_I=\sum_i P_i,\quad K_F=\sum_f K_f.$$

- $|\psi_i(x-x_i)|^2$ – плотность вероятности найти волновой пакет в некоторой точке пространства-времени.
- $\int d^4x\prod_{i,f}|\psi_i(x-X_i)|^2\left|\psi_f\left(x-X_f\right)\right|^2$ – интеграл по всему 4-мерному пространству от плотностей вероятностей волновых пакетов. Если волновые пакеты плохо пересекаются, то такой интеграл имеет околонулевое значение. Здесь кроется вся геометрия столкновений.
- X_i – это $\langle\vec{x}_i\rangle$ в момент x_i^0 (рис. 20.1). Расплывающийся волновой пакет можно сравнить с кругами на воде.

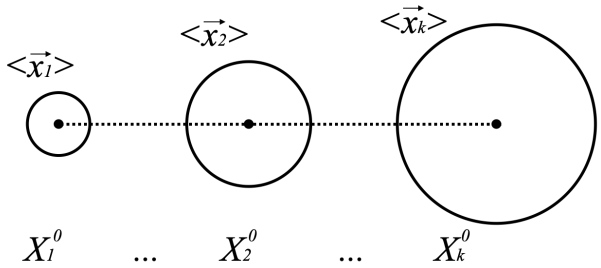


Рис. 20.1. Расплывающийся волновой пакет.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Распишем теперь квадрат амплитуды вероятности рассеяния начальных волновых пакетов в конечные волновые пакету, заменим при этом $\delta_G(P_I - K_F)$ на $\delta^4(P_I - K_F)$:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{(2\pi)^4\delta^4(P_I - K_F)\left|i\mathcal{M}\left(\{\vec{P}_i\},\{\vec{K}_f\}\right)\right|^2}{\prod_i 2E_{P_i}\prod_f 2E_{K_f}} \int d^4x \prod_{i,f}|\psi_i(x - X_i)|^2\left|\psi_f\left(x - X_f\right)\right|^2.$$

Здесь использованы следующие три приближения:

1) непересекающиеся волновые пакеты,
2) узкие волновые пакеты, позволившие отфакторизовать динамику и медленно меняющиеся функции,
3) приближение гауссова волнового пакета (возможно, выражение можно получить и без использования этого приближения).

Здесь первый множитель относится к плоским волнам, второй множитель – интеграл по 4-мерному пространству от произведения плотностей вероятностей пересечения волновых пакетов в пространстве и времени.

Число состояний

Теперь перейдем от микроскопической вероятности к величине, которую можно наблюдать экспериментально. Учтем квантовое число конечных состояний. Рассмотрим одномерный ящик длиной L, внутри этого ящика существует набор волновых функций. Будем считать, что на границах этого ящика есть периодические граничные условия, а именно:

$$\psi(x) = \psi(x + L).$$

Теперь импульсы (или волны), которые могут существовать внутри этого ящика, будут строго дискретными:

$$e^{ip\cdot x} = e^{ip\cdot(x+L)}, \qquad p \cdot L = 2\pi n \qquad \rightarrow \qquad p_n = \frac{2\pi n}{L}.$$

Так, расстояние между соседними импульсами

$$\Delta p = p_{n+1} - p_n = \frac{2\pi}{L}.$$

Рассмотрим бесконечно малый интервал импульсов

$$dp \ll \Delta p,$$

определим, сколько волн в этом интервале может быть:

$$\text{число состояний} = \frac{dp}{\Delta p} = \frac{dpL}{2\pi} = \int_0^L \frac{dxdp}{2\pi},$$

где $\frac{dxdp}{2\pi}$ – **плотность числа состояний** в бесконечно малых интервалах по импульсам и координатам.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

Квадрат модуля амплитуды или вероятность процесса зависит от строго определенных средних импульсов и строго определенных координат, которые экспериментально измерить невозможно. Измерения всегда проводятся с учетом максимального разрешения, притом для конечных частиц, тогда необходима следующая замена:

$$|\mathcal{A}|^2 \to \int |\mathcal{A}|^2 \prod_f \frac{d^3x_f d^3P_f}{(2\pi)^3}.$$

Тогда

$$\int |\mathcal{A}|^2 \prod_f \frac{d^3x_f d^3P_f}{(2\pi)^3} =$$

$$= \int \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_I - K_F)\left|i\mathcal{M}\left(\{\vec{P}_i\},\{\vec{K}_f\}\right)\right|^2}{\prod_i 2E_{P_i} \prod_f 2E_{K_f}} \int d^4x \prod_i |\psi_i(x - X_i)|^2 \prod_f \left|\psi_f\left(x - X_f\right)\right|^2 \times$$

$$\times \frac{d^3x_f d^3P_f}{(2\pi)^3}.$$

Упражнение

Выполним упражнение, чтобы почувствовать разницу между точностью восстановления координаты и точностью восстановления импульса в эксперименте. Воспользуемся следующей формулой:

$$\hbar c = 1 = 200 \cdot \text{МэВ} \cdot \text{фм}.$$

Этот коэффициент позволяет переводить координаты в энергии и наоборот. Предположим, что мы описываем волновые пакеты задаются с некоторой дисперсией σ_p по импульсам, и пусть

$$\frac{\sigma_p}{p} \equiv \varepsilon_p.$$

Характерная величина для этих неопределенностей может быть порядка 1%, предположим

$$\varepsilon_p \sim 10^{-2}.$$

Запишем соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{1}{2}.$$

Оценим неопределенность дисперсии координаты:

$$\sigma_x \geq \frac{1}{2\sigma_p} = \frac{100 \cdot \text{МэВ} \cdot \text{фм}}{\sigma_p} = \frac{10^2 \cdot \text{МэВ}}{\varepsilon_p p}\,\text{фм} = 10^4 \frac{10^{-2}}{\varepsilon_p}\frac{\text{МэВ}}{p} \cdot \text{фм}.$$

Если $\varepsilon_p \sim 10^{-2}$, а $p \sim 1$ МэВ, то неопределенность координаты

$$\sigma_x \geq \text{нм} = 10^{-7}\ \text{см},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

величина сопоставимая с размером атома. Если частицы релятивистские, для которых энергии порядка ГэВ и более, тогда неопределенность по координате уменьшается на три порядка.

Так, для волнового пакета с неопределенностью импульса порядка 1%, пространственный размер либо сравним с атомным размером, либо много меньше него. Лучшие методики по определению координаты – кремниевые фотоумножители или ядерные фотоэмульсии, где точность определения координаты порядка мкм $= 10^{-4}$ см, что многократно превышает неопределенность координаты. Таким образом, при интегрировании внутри экспериментального разрешения по координате x_f

$$\int\limits_{-\delta_{\text{эксп}}}^{\delta_{\text{эксп}}} d^3x_f \ldots = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3x_f \ldots .$$

Перейдем к следующей формуле с учетом этих рассуждений.

Формула для плотности числа взаимодействий

Запишем теперь формулу для числа взаимодействий, определяемой экспериментально:

$$dN = \frac{(2\pi)^4\delta^4(P_I - K_F)\left|i\mathcal{M}\left(\{\vec{P}_i\},\{\vec{K}_f\}\right)\right|^2}{\prod_i 2E_{P_i}\prod_f 2E_{K_f}} \int d^4x \prod_i |\psi_i(x - X_i)|^2 \times$$
$$\times \prod_f \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3x_f d^3P_f}{(2\pi)^3}\left|\psi_f\left(x - X_f\right)\right|^2 .$$

Здесь можно воспользоваться формулой

$$\int d^3x_f |\psi(x)|^2 = 1,$$

тогда получаем следующую формулу:

$$dN = \frac{(2\pi)^4\delta^4(P_I - K_F)\left|i\mathcal{M}\left(\{\vec{P}_i\},\{\vec{K}_f\}\right)\right|^2}{\prod_i 2E_{P_i}} \int d^4x \prod_i |\psi_i(x - X_i)|^2 \prod_f \frac{d^3P_f}{(2\pi)^3 2E_{K_f}}.$$

Первый множитель напоминает формулу для сечения. dN – безразмерная величина, множитель $\frac{(2\pi)^4\delta^4(P_I-K_F)\left|i\mathcal{M}\left(\{\vec{P}_i\},\{\vec{K}_f\}\right)\right|^2}{\prod_i 2E_{P_i}}\prod_f \frac{d^3P_f}{(2\pi)^3 2E_{K_f}}$ обладает размерностью площади (или сечения), тогда множитель $\int d^4x \prod_i |\psi_i(x - X_i)|^2 \prod_f d^3P_f$ должен обладать размерностью, обратной к площади. Проверим, так ли это, из

$$\int d^3x_f |\psi(x)|^2 = 1$$

видно, что

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

$$[|\psi(x)|^2] = \frac{1}{V},$$

где V – объем, тогда

$$\int d^4x\, |\psi_a|^2 |\psi_b|^2 = L^4 \frac{1}{L^3}\frac{1}{L^3} = \frac{1}{L^2},$$

то есть размерность является обратной к размерности площади.

Таким образом, безразмерное число взаимодействий dN в квантовой теории поля с корректным определением начальных и конечных состояний в виде волновых пакетов представляется в виде произведения двух множителей – динамического сечения, обладающего размерностью площади, и обратной площади, связанной с перекрытием волновых пакетов.

Следующим шагом рассмотрим подробнее интеграл

$$\int d^4x\, |\psi_{\mathrm{a}}(x - X_{\mathrm{a}})|^2 |\psi_b(x - X_b)|^2,$$

если проделать вычисления, используя приближение гауссова волнового пакета, то получим

$$\int d^4x\, |\psi_{\mathrm{a}}(x - X_{\mathrm{a}})|^2 |\psi_b(x - X_b)|^2 = \frac{1}{2\pi\sigma_{x,ab}^2 |\vec{v}_{ab}|}\, e^{-(\vec{b}\times\vec{n})^2/2\sigma_{x,ab}^2}.$$

У каждого волнового пакета в конфигурационном пространстве есть своя дисперсия координаты:

$$\sigma_{x,ab}^2 = \sigma_{x,a}^2 + \sigma_{x,b}^2,$$

это и есть та геометрическая площадь пересечения волновых пакетов, которая оказывается в знаменателе и дает правильную размерность, в итоге обезразмеривая динамическую площадь, связанную с сечением. $\vec{b}$ – это связанный с пересечением **прицельный параметр** (рис. 20.2), который определяется следующим образом:

$$\vec{b} = \vec{x}_a - \vec{x}_b.$$

$\vec{n}$ – единичный вектор, который определяется как

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}_{ab}}{|\vec{v}_{ab}|},$$

где $\vec{v}_{ab}$ – относительная скорость, являющаяся безразмерной величиной и возникающая в формуле автоматически,

$$|\vec{v}_{ab}| = \sqrt{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (\vec{v}_a \times \vec{v}_b)^2}.$$

Перепишем теперь выражение для числа взаимодействий:

$$dN = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_I - K_F)\left|i\mathcal{M}\left(\{\vec{P}_i\},\{\vec{K}_f\}\right)\right|^2}{2E_a 2E_b |\vec{v}_{ab}|} \frac{1}{2\pi\sigma_{x,ab}^2} e^{-(\vec{b}\times\vec{n})^2/2\sigma_{x,ab}^2} \prod_f \frac{d^3P_f}{(2\pi)^3 2E_{K_f}}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

а) *б)*

Рис. 20.2. Прицельный параметр а) равный нулю, б) неравный нулю.

Поскольку

$$2E_a 2E_b|\vec{v}_{ab}| = 4\sqrt{(P_a\cdot P_b)^2 - m_a^2 m_b^2},$$

где P_a и P_b – 4-импульсы, m_a^2 и m_b^2 – квадраты масс, тогда перепишем выражение для числа взаимодействий:

$$dN = \frac{(2\pi)^4\delta^4(P_I - K_F)}{4\sqrt{(P_a\cdot P_b)^2 - m_a^2 m_b^2}}|i\mathcal{M}|^2\prod_f \frac{d^3P_f}{(2\pi)^3 2E_{K_f}}\frac{1}{2\pi\sigma_{x,ab}^2}e^{-\frac{(\vec{b}\times\vec{n})^2}{2\sigma_{x,ab}^2}}.$$

Здесь фигурирует сечение взаимодействия в пределе плоских волн:

$$d\sigma_{pw} = \frac{(2\pi)^4\delta^4(P_I - K_F)}{4\sqrt{(P_a\cdot P_b)^2 - m_a^2 m_b^2}}|i\mathcal{M}|^2\prod_f \frac{d^3P_f}{(2\pi)^3 2E_{K_f}},$$

это сечение обезразмеривается площадью, связанной с пересечением волновых пакетов в пространстве. Множитель $\frac{1}{2\pi\sigma_{x,ab}^2}e^{-\frac{(\vec{b}\times\vec{n})^2}{2\sigma_{x,ab}^2}}$ является светимостью двух сталкивающихся пучков:

$$\text{светимость} = L\left(\vec{b}\times\vec{n}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x,ab}^2}e^{-\frac{(\vec{b}\times\vec{n})^2}{2\sigma_{x,ab}^2}}.$$

Таким образом,

$$dN = d\sigma_{pw}\cdot L\left(\vec{b}\times\vec{n}\right) = d\sigma_{pw}\cdot L(0)\cdot e^{-\frac{b_T^2}{2\sigma_{x,ab}^2}},$$

где $L(0)$ – светимость для коллинеарных пучков, b_T – поперечный прицельный параметр.

Полученная формула отвечает столкновению двух пучков с некоторым прицельным параметром. Если прицельный параметр экспериментально плохо контролируется, то есть существует целый спектр прицельных параметров, тогда необходимо проинтегрировать по всем возможным прицельным параметрам. Интегрировать необходимо с весовой функцией, определяемой ускорительщиками. Сейчас будем считать, что микроскопические прицельные параметры, которые задаются чисто квантовой физикой, много меньше экспериментальных. Тогда можно

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

интегрировать с весовой функцией, равной единице. Запишем среднее число наблюдаемых событий:

$$\int \frac{d^2N}{d^2b_T} d^2b_T = d\sigma_{pw} \int d^2b_T \frac{1}{2\pi\sigma_{x,ab}^2} e^{-\frac{b_T^2}{2\sigma_{x,ab}^2}} = d\sigma_{pw}$$

Поскольку гауссов интеграл обращается в единицу:

$$\int d^2b_T \frac{1}{2\pi\sigma_{x,ab}^2} e^{-\frac{b_T^2}{2\sigma_{x,ab}^2}} = 1.$$

Так, решая задачу с целым спектром равновероятно заполненных волновых пакетов со всеми возможными прицельными параметрами мы фактически восстанавливаем плосковолновую формулу для сечения.

В других ситуациях, обладая возможностью управлять пучками, и имея представления о том, какие прицельные параметры встречаются, реже, а какие чаще, следует использовать формулу

$$dN = dd\sigma_{pw} \cdot L(0) \cdot e^{-\frac{b_T^2}{2\sigma_{x,ab}^2}},$$

из которой сразу видно, что прицельные параметры действительно вносят вклад в наблюдаемое число событий. Это именно тот результат, который обнаружил Тихонов в Новосибирске, изучая процесс рассеяния

$$e^+e^- \to e^+e^-\gamma.$$

Большие прицельные параметры имеют подавление в числе столкновений.

Если необходимо учесть экспериментальное разрешение, то следует взять интеграл не по d^2b_T, а с гауссовым распределением по параметрам b_T. Интеграл от произведения двух гауссовых функций снова будет гауссовой функцией. Вместо $\sigma_{x,ab}$, определяемой микроскопическими волновыми пакетами, точнее их размерами, в итоговой формуле будут фигурировать экспериментальные $\sigma_{\text{эксп}}$.

Подведем короткий итог длинному вычислению. При работе с плоскими волнами приходилось оперировать математически некорректными вещами. Например, возникали $\delta^3(0)$, приводящие к бесконечностям, которые мы заменяли на бесконечно большие объемы; возникали $\delta^4(0)$, которые мы заменяли на бесконечно большие объемы и времена. Здесь возникает несоответствие с тем, что обсуждается квантовая теория поля и Стандартная модель, которые описывают все экспериментальные данные с высокой точностью, например, до 12-го знака после запятой для магнитного момента электрона, при этом в процессе вывода формул и вычисления фигурируют бесконечности. Волновые пакеты позволяют вывести формулы корректно. В двух последних лекциях представлен весь путь, и явно показано, как возникают конечные формулы без промежуточных бесконечностей. Более того, теперь очевидно, что то, что ранее фигурировало как бесконечно большие объемы, при нормировке состояний обращается в единицы. Бесконечно большой объем, домноженный на время, возникающий из-за δ-

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in.ru интерфейс науки

функции, сводится к интегралу по 4-мерному пространству от произведения квадратов волновых функций, которые приводят теперь к конечной формуле и малому числу. Все введенные приближения в той области задач, которая рассмотрена, выглядят естественно и законно. Так, безразмерное число взаимодействий является произведением двух размерных величин – сечения. светимости. Этот формализм естественным образом объясняет, что если один пучок электронов в ЦЕРНе, а второй в Протвино, то число взаимодействий таких электронов будет равно нулю, поскольку прицельный параметр – расстояние между Женевой и Протвино, что много больше размеров волновых пакетов, то есть экспонента $e^{-\frac{b_T^2}{2\sigma_{x,ab}^2}}$ зануляет число взаимодействий.