



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

РАДИОФИЗИКА

БИЛЕНКО
ИГОРЬ АНТОНОВИЧ
ВЯТЧАНИН
СЕРГЕЙ ПЕТРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КУЩЕНКО АННУ КОНСТАНТИНОВНУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ РАДИОФИЗИКИ.....	6
Введение.....	6
Основные понятия.....	8
Преобразование Фурье	13
Метод комплексных амплитуд	17
Разложение по ступенчатым функциям.....	19
Разложение по δ -функциям	20
Дифференцирующие и интегрирующие цепочки	21
ЛЕКЦИЯ 2. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ.....	23
Внешнее воздействие на линейную систему.....	24
Последовательный колебательный контур.....	24
Вынужденные колебания в линейных цепях.....	31
Принцип дуальности.....	34
Параллельный колебательный контур	35
Емкостной датчик	38
ЛЕКЦИЯ 3. ТРАНСФОРМАТОР. РАСПРЕДЕЛЁННЫЕ СИСТЕМЫ	40
Связанные системы.....	41
Трансформатор	42
Распределенные системы. Длинные линии	44
ЛЕКЦИЯ 4. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ.....	49
Входное сопротивление длинной линии с нагрузкой	49
Длинные линии с потерями.....	50
Излучающие системы	52
N когерентных диполей.....	55
Нелинейные цепи	59
ЛЕКЦИЯ 5. МОДУЛЯЦИЯ	64
Амплитудная модуляция	65
Фазовая модуляция	66
Частотная модуляция.....	68
Детектирование АМ сигнала.....	70
Фазовое детектирование.....	73
Синхронное детектирование.....	76
ЛЕКЦИЯ 6. ПОЛУПРОВОДНИКИ	78
Модель слабой связи.....	78
Полупроводниковый диод.....	82
Биполярный транзистор	83

Полевой транзистор	85
Усилители электрических сигналов	87
Расчет цепи с нелинейным сопротивлением	88
ЛЕКЦИЯ 7. УСИЛИТЕЛЬ	90
Простой усилитель	90
Обратные связи в усилителях	94
Истоковый повторитель	96
Операционные усилители	97
Инвертирующий усилитель	98
Неинвертирующий усилитель.....	99
Сумматор.....	99
ЛЕКЦИЯ 8. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	101
Входное напряжение инвертирующего и неинвертирующего усилителей	102
Параметрический усилитель	103
Генерирование электрических колебаний	105
RC-генераторы.....	109
Простейший генератор релаксационных колебаний	110
Симметричный мультивибратор	111
ЛЕКЦИЯ 9. ШУМЫ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	115
Специфические генераторы	115
Шумы в радиофизических системах	117
Спектральная плотность.....	118
Теорема Винера-Хинчина	119
Преобразование шума в линейных цепях.....	121
Тепловой шум.....	122
ЛЕКЦИЯ 10. ШУМЫ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	126
Дробовой шум	128
Генерационно-рекомбинационный шум.....	130
Фликкер-шум.....	131
Стабилизация частоты генераторов	132
ЛЕКЦИЯ 11. СИГНАЛ. КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ	137
Теорема Котельникова.....	137
Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).....	138
Количество информации	139
Передача информации через канал связи	140
Шумы квантования	141
Различные каналы передачи информации.....	142
ЛЕКЦИЯ 12. ОСНОВЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ.....	144

Коды	144
Основы булевой алгебры.....	147
Основные логические элементы	151
Минимизация логических функций. Карты Карно	153
Триггеры	154
Элементы вычислительных устройств.....	155
 ЛЕКЦИЯ 13. ЦИФРО-АНАЛОГОВЫЕ И АНАЛОГО-ЦИФРОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ.	
Цифро-аналоговые преобразователи.....	156
Аналого-цифровые преобразователи	158
Z-преобразование	161
Обратное Z-преобразование.....	162
Цифровые фильтры.....	163
Дискретные гармонические последовательности.....	164
Трансверсальные цифровые фильтры.....	165
Рекурсивные цифровые фильтры	167
 ЛЕКЦИЯ 14. ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ.....	
Понятие об оптимальной фильтрации.....	169
Понятие о квадратурной модуляции	172
Беспроводная сеть связи GSM	174

ЛЕКЦИЯ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ РАДИОФИЗИКИ

Введение

Мы начинаем курс лекций по предмету радиофизика. Слово «радио» происходит от лат. radiare – излучать. В основном мы будем заниматься рассмотрением процессов возбуждения, передачи, распространения и регистрации электромагнитных сигналов, которые, в свою очередь, предназначены для получения, транспортировки, обработки и хранения информации. Вы увидите, что радиофизика является синтетическим предметом. С одной стороны, со многими элементами нашего курса вы уже сталкивались ранее в рамках курса теории электричества, с другой стороны, радиофизика является основой для более глубокого теоретического анализа электромагнетизма, с которым вы будете знакомиться в курсе электродинамики. Кроме того, радиофизика дает аппарат, чрезвычайно полезный во многих других областях физики. Спектральный анализ, который мы будем детально рассматривать применительно к электромагнитным системам, является мощным аппаратом, используемым в самых разных областях знаний, вы будете с ним сталкиваться и в квантовой механике, и в теории измерений. Преобразование Фурье, которое мы будем использовать, является базой аппарата сопряженного пространства или зонной теории в физике твердого тела. В квантовой механике переход из одного импульсного представления в координатное и наоборот – это также переход в сопряженное пространство, частным случаем которого является спектральное представление сигналов в радиофизике. Поэтому если вы научитесь пользоваться этим аппаратом, вам будет легко двигаться дальше в изучении соответствующих областей физики. Также, в прикладном смысле слова радиофизика является основой для конструирования и разработки различных электромагнитных цепей для радиоэлектроники.

Краткий исторический экскурс

Началом радиофизики как науки вполне можно считать опыты Фарадея (1831), в которых был открыт закон электромагнитной индукции, но справедливости ради надо сказать, что Фарадей и Герц независимо и практически одновременно обнаружили явление электромагнитной индукции, но Фарадей опубликовал свои работы раньше.

Теоретической основой радиофизики стали уравнения Максвелла, которые впервые были опубликованы в «Трактате об электричестве и магнетизме» (1873). Тогда они имели существенно отличный вид, не использовалась привычная нам векторная запись, уравнений было больше. Тем не менее физический смысл был такой же, как сейчас: они связывали воедино электрические и магнитные явления. Из них очевидным образом следовало существование электромагнитных волн, и можно было получить скорость их распространения, которая в вакууме должна была быть равна скорости света.

Замечательные опыты Герца (1887) подтвердили существование электромагнитных волн. С помощью дипольной антенны, которую часто называют диполем Герца, Генрих Герц обнаружил, что если нанести электрический заряд на два

шарика, расположенные у ближних концов половинок диполя, и сблизить их настолько, чтобы произошел электрический разряд, то на второй антенне возникают токи. И если в затемненной комнате рассматривать промежуток между ее концами в микроскоп, то можно обнаружить в этот момент крохотную искорку. Таким образом, Герц понял, что энергия передается от передающей антенны к приемной, и, более того, используя доступную ему в то время технику, он показал что, эти волны подчиняются тем же законам, что и свет. Он сделал огромную смоляную призму весом почти полтонны и с ее помощью доказал выполнение закона преломления, а с помощью огромной сетчатой параболической антенны-отражателя подтвердил, что эти волны можно фокусировать. Он также примерно оценил длину этих волн, которая оказалась на много порядков больше, чем длина световой волны. Интересный факт – когда Герца спрашивали о практическом значении открытых им волн, он отвечал, что, по-видимому, никакой практической пользы от них не будет, а сейчас у всех у вас в кармане есть мобильный телефон, опровергающий его предсказание.

Мы в России считаем, что радиосвязь была открыта Александром Поповым, в 1895 году он продемонстрировал свой грозоотметчик, который был приемником радиоволн. Но, например, в Италии первооткрывателем радио все считают Маркони Джузеппе, хотя сам Маркони никогда так не считал, более того, он ссылаясь на работы Попова. Маркони первым получил патент на способ передачи электромагнитных волн и первым вел радио в коммерческую эксплуатацию (1897). В Америке изобретателем радио считают Никола Тесла, он же радио интересовался постольку поскольку, он был одержим идеей передачи энергии на расстояние и даже обманул в каком-то смысле своих инвесторов, пообещав им передачу биржевых сводок, а истратил все деньги на попытки создать беспроводную линию передачи электричества. По-видимому, свой вклад внесли многие ученые.

Дальше события развивались очень быстро, уже в 1905 г. радио было впервые использовано в военных целях во время Цусимского сражения. В 1906 г. Джон Флеминг создал вакуумный триод, который позволил усиливать электромагнитные колебания и, таким образом, создавать чувствительные приемники и мощные передатчики. В 1914 г. Мейснер разработал ламповый генератор на вакуумных лампах. В 1947 г. Шокли, Бардин и Браттейн создают первый биполярный транзистор. Интересно, что еще раньше в 1947 г. немецкие инженеры предложили схему устройства полевого транзистора, но технология того времени не позволяла получать чистые полупроводники, необходимые для его реализации.

Начало двадцатого века рождается квантовая механика, она была реализована советскими учеными Басовым и Прохоровым, и независимо от них Чарльсом Таунсом, они сделали первые молекулярные генераторы, существенно квантовые устройства, которые затем легли в основу создания квантовых стандартов чистоты.

В 1959 году был выдан патент на создание первой интегральной микросхемы. Таким образом, всего лишь за 25 лет был пройден путь от первого транзистора

(рис. 1.1) до интегральных микросхем и устройств, которые в настоящее время внутри одного кристалла включают десятки, сотни тысяч и даже миллиарды вентиляционных переходов и являются основой всех современных компьютеров и систем связи.



Рис. 1.1. Транзистор Шокли и Бардина.

Радиофизические методы позволили сделать много удивительных открытий, я бы выделил наиболее значимые:

- Реликтовое излучение

Излучение было предсказано советским физиком Гамовым, который занимался теорией Большого Взрыва и показал, что если модель Большого Взрыва справедлива, то во Вселенной должно существовать равновесное излучение с эффективной шумовой температурой порядка 3 К, заполняющее нашу Вселенную, и которое можно было бы наблюдать практически с любого направления, если смотреть с Земли. А в 1965 году американские инженеры Пензиас и Вильсон обнаружили это излучение и получили за это Нобелевскую премию.

- Пульсары, рентгеновские звезды, всплески гамма-излучения

Пульсары – это всплески радиоизлучения, идущие из космоса, с чрезвычайно точно повторяющимися интервалами времени. Они описываются моделью вращающейся нейтронной звезды, газовая аккреция на которую и вызывает это излучение. Далее были открыты рентгеновские звезды, гамма-всплески – самые мощные источники излучения во Вселенной, которые мы на сегодняшний день знаем.

- ЭПР (электронный парамагнитный резонанс), ЯМР (ядерный магнитный резонанс), ЯКР (ядерный квадрупольный резонанс)

Основные понятия

Радиофизическими системами мы будем называть среды в самом общем смысле, в которых существуют сигналы. Под средой я понимаю устройство, цепь или может быть область пространства, волновод, а под сигналом – любую, изменяющуюся во времени физическую величину, которую можно использовать для кодирования и передачи информации. На практике чаще всего в качестве сигнала у нас будет выступать напряжение на каком-либо участке цепи, ток через какой-либо участок цепи, мощность, поток энергии электромагнитной волны.

Радиофизические системы можно условно разделить на два больших класса: линейные и нелинейные. Линейные системы – это такие системы, для которых

выполняется принцип суперпозиции. Сигналы, проходящие через линейные цепи, не влияют друг на друга, то есть отклик линейной системы на несколько воздействий является алгебраической суммой откликов на каждое отдельно взятое воздействие:

$$U(A + B) = U(A) + U(B). \quad (1.1)$$

Можно перефразировать это следующим образом: свойства линейных систем по отношению к сигналам не меняются под действием сигналов.

Мы будем различать распределенные и сосредоточенные системы. Сосредоточенными системами называются такие системы, линейные размеры которых малы по сравнению с любой наименьшей длиной волны, которую можно сопоставить с тем процессом, который происходит в этой системе, то есть можно пренебречь временем распространения сигнала внутри системы. Можно сформулировать условие сосредоточенности или квазистационарности системы:

$$\frac{L}{c} \ll T \text{ или } \frac{L}{\lambda} \ll 1, \quad (1.2)$$

где $\lambda = \frac{c}{\nu}$ — длина волны, T — характерное время, за которое значимо меняются сигналы, L — характерный размер системы. Если, например, рассмотреть сеть с $U = 220\text{В}$ и $\nu = 50\text{Гц}$, которая используется для питания всех электрических устройств в быту и в технике, то, поскольку частоте 50 Гц соответствует длина волны в 6000 километров, сосредоточенной системой можно считать всю Москву и Московскую область. А если взять частоту в 100 МГц , на которой передаются музыкальные радиопередачи, то имеем длину волны примерно 3 метра. Таким образом, если сделать линию передачи длиной в несколько метров от антенны к приемнику, такая линия должна рассматриваться как распределенная система.

Мы можем использовать всего три сосредоточенных линейных элемента для того, чтобы сконструировать любую пассивную сосредоточенную линейную цепь: сопротивление R , конденсатор C и индуктивность L :

$$R = \frac{dU}{dI} = \text{const}, \quad (1.3)$$

$$C = \frac{dQ}{dU} = \text{const}, \quad (1.4)$$

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \text{const}. \quad (1.5)$$

Однако надо помнить, что идеальные линейные элементы — это модель. Если у вас, например, между обкладками конденсатора находится диэлектрик, то при значительных напряжениях и при точных измерениях вы всегда обнаружите, что диэлектрическая проницаемость этого диэлектрика может изменяться в зависимости от напряжения, а это и означает нелинейность.

Продолжим говорить об элементах линейных цепей. Сопротивление определяется формулой:

$$U_R = I_R R [R] = \text{Om}[\text{Ohm}, \Omega], \quad (1.6)$$

можно использовать также и обратную величину, так называемую проводимость:

$$G = \frac{1}{R} [G] = \text{См}[S] \text{ (Сименс)}. \quad (1.7)$$

Сопротивление является элементом, который связывает электрическую подсистему и внешний мир или термостат, потому что при протекании тока через сопротивление энергия из электрической подсистемы в тепло:

$$W_R = \int_0^t I_R^2 R dt = \int_0^t \frac{U_R^2}{R} R dt = \int_0^t I_R U_R R dt, \quad (1.8)$$

$$P_R = I_R^2 R = \frac{U_R^2}{R} = I_R U_R. \quad (1.9)$$

Емкость определяется формулой:

$$Q_C = U_C C [C] = \Phi[F] \text{ (Фарада)}, \quad (1.10)$$

в системе СИ измеряется в фарадах, в СГС – в сантиметрах. Формулы, связывающие изменение заряда конденсатора, ток и напряжение:

$$I_C = \frac{dQ_C}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}, \quad (1.10)$$

$$U_C = \int_0^t \frac{I_C(\tau)}{C} d\tau + U_C(0), \quad (1.11)$$

изменение энергии:

$$W_C = W_C(t) - W_C(0) = \frac{CU_C^2(t)}{2} - \frac{CU_C^2(0)}{2}. \quad (1.12)$$

Наконец, индуктивность описывается как:

$$\Phi_L = I_L L [L] = \text{Гн}[H] \text{ (Генри)}, \quad (1.13)$$

напряжение:

$$U_L = \frac{d\Phi_L}{dt} = L \frac{dI_L}{dt}, \quad (1.14)$$

ток:

$$I_L = \int_0^t \frac{U_L(\tau)}{L} d\tau + I_L(0), \quad (1.15)$$

изменение энергии:

$$W_L = W_L(t) - W_L(0) = \frac{LI_L^2(t)}{2} - \frac{LI_L^2(0)}{2}. \quad (1.16)$$

При рассмотрении электрических цепей мы будем пользоваться источниками сигнала, это будет источник постоянного, а чаще переменного гармонического напряжения. Источник можно представить по-разному:

- Генератор напряжения

$$U_0 = I(R_i + R_H), \quad (1.17)$$

$$U_{R_H} = U_0 \frac{R_H}{R_i + R_H}, \quad (1.18)$$

$$U_{R_H} \gg U_{R_i} \text{ если } R_i \ll R_H. \quad (1.19)$$

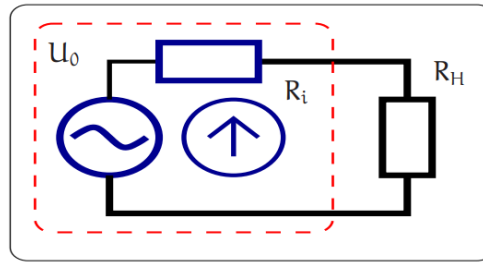


Рис. 1.2. Схема генератора напряжения

- Генератор тока

$$I_0 = I_{R_H} + I_{R_i}, \quad (1.20)$$

$$I_{R_H} = \frac{I_0 R_i}{R_i + R_H}, \quad (1.21)$$

$$I_{R_i} = \frac{I_0 R_H}{R_i + R_H}, \quad (1.22)$$

$$I_{R_H} \gg I_{R_i} \text{ если } R_i \gg R_H. \quad (1.23)$$

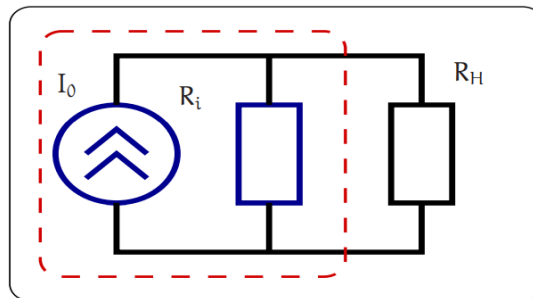


Рис. 1.3. Схема генератора тока

Существует теорема об эквивалентном генераторе. Зная ток (1.21), получим напряжение $U_{R_H} = I_0 R_i \frac{R_H}{R_i + R_H}$, сравним полученное выражение с (1.18), формулы становятся одинаковыми при $U_0 = I_0 R_i$. Таким образом, любую цепь, являющуюся источником сигнала, можно представить себе либо в виде эквивалентной схемы с источником напряжения, либо в виде эквивалентной схемы с источником тока. При этом для того, чтобы рассчитать параметры этих эквивалентных схем надо, во первых, измерить напряжение холостого хода, то есть напряжение на выходе этого некоторого источника, когда к нему ничего не подключено, это и будет напряжение, которое создает эквивалентный генератор напряжения. Далее следует замкнуть выводы и измерить протекающий ток короткого замыкания, это и будет тот самый ток, который следует приписать эквивалентному источнику тока. А собственное сопротивление и в том, и другом случае получается как отношение напряжения холостого хода к току короткого замыкания.

$$U_{\text{ЭКВ}} = U_{\text{ХХ}}, \quad (1.24)$$

$$I_{\text{ЭКВ}} = I_{\text{КЗ}}, \quad (1.25)$$

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{U_{\text{ХХ}}}{I_{\text{КЗ}}}. \quad (1.26)$$

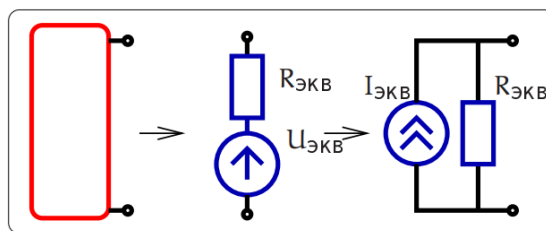


Рис. 1.4. Теорема об эквивалентном генераторе.

Пример.

Пусть есть некоторая более сложная цепь, содержащая как источник напряжения, так и источник тока. Вспомним, что эта цепь линейная, значит все источники действуют независимо друг от друга. Выполняем расчеты, используя обычный школьный закон Ома, и получаем необходимые нам параметры:

$$U_{\text{ХХ}} = U \frac{r}{r+R} + I \frac{rR}{r+R}, \quad (1.27)$$

$$I_{\text{КЗ}} = I + \frac{U}{R} \quad (1.28)$$

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{U_{\text{ХХ}}}{I_{\text{КЗ}}} = \frac{rR}{r+R}. \quad (1.29)$$

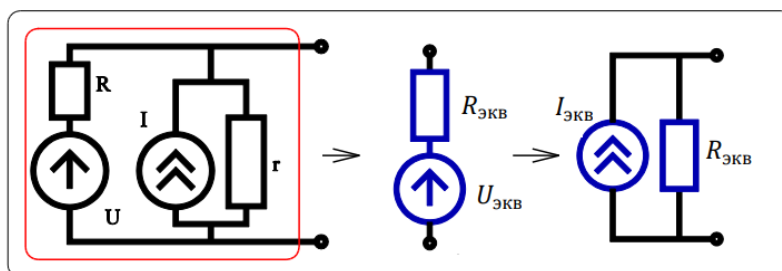


Рис. 1.5. Пример

Основным аппаратом, который мы будем использовать в анализе линейных цепей, является спектральный анализ. Это удобно, потому что линейные операторы оставляют гармонические колебания гармоническими, например, операторы дифференцирования и интегрирования:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sin(\omega t + \varphi) = \omega \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\int \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi).$$

Необходимо сделать оговорку, конечно, использование гармонических колебаний очень удобно, но это всегда приближение, потому что идеальные гармонические колебания определены на всем интервале аргументов, в нашем случае на всем интервале времен, а реальных сигналов, которые бы существовали вечно, в природе не существует. Наконец, идеальный гармонический процесс не несёт

информации, для того, чтобы передавать информацию нужно каким-то образом менять параметры гармонического сигнала, то есть использовать какой-то код. Простейшим примером кодирования с помощью гармонических сигналов является азбука Морзе. На практике часто используются три вида модуляции: амплитудная, фазовая и частотная (АМ, ФМ, ЧМ).

Преобразование Фурье

Математическим аппаратом спектрального анализа является преобразование Фурье. Пусть у нас есть некая периодическая интегрируемая функция $f(t)$

функция с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Такую функцию можно разложить в ряд:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)), \quad (1.30)$$

где, так называемые, коэффициенты Фурье принимают вид

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad (1.31)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (1.32)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (1.33)$$

Можно переписать (1.30) следующим образом

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n), \quad (1.34)$$

тогда имеем связь коэффициентов:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (1.35)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}. \quad (1.36)$$

Преобразование Фурье часто записывают в комплексном виде, что позволяет упаковать в одну переменную и амплитуду, и фазу гармонического сигнала. В этом случае представление функции $f(t)$ в виде ряда уже имеет вид:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{in\omega_0 t}, \quad (1.37)$$

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (1.38)$$

Если $f(t)$ – вещественная функция, то

$$\tilde{c}_n = \tilde{c}_n^*. \quad (1.39)$$

Пример.

Рассмотрим периодический сигнал, который представляет собой последовательность прямоугольных импульсов, период этого сигнала обозначим τ_0 , а длительность импульсов, соответственно, τ_1 (рис. 1.6). Если начало отсчета времени совместить с серединой импульса, то очевидно, что эта функция является чётной, значит в разложении остаются только косинусы. Коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$a_n = \frac{2}{\tau_0} \int_{-\tau_1/2}^{\tau_1/2} U_0 \cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau_0}\right) dt = 2U_0 \left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi n \tau_1}{\tau_0}\right)}{\frac{\pi n \tau_1}{\tau_0}}. \quad (1.40)$$

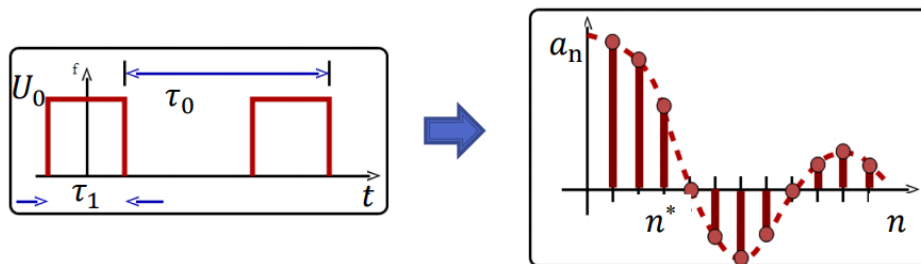


Рис. 1.6. Бесконечная последовательность прямоугольных импульсов.

Можно приближенно оценить частоту, при которой функция в первый раз пересекает ноль, обозначим ее как $\omega^* = n^* 2\pi/\tau_0$, а соответствующий номер – $n^* = \tau_0/\tau_1$. Если мы увеличиваем τ_0 , то есть импульсы идут реже, то гармоники идут чаще: интервал $\Delta\omega = 2\pi/\tau_0$ между ними сокращается. Интересно, что частота, вблизи которой огибающая в первый раз пересекает ось x , не зависит от периода, а зависит только от длительности импульса: $\omega^* = n^* \omega_0 = 2\pi/\tau_1$ (рис. 1.7).

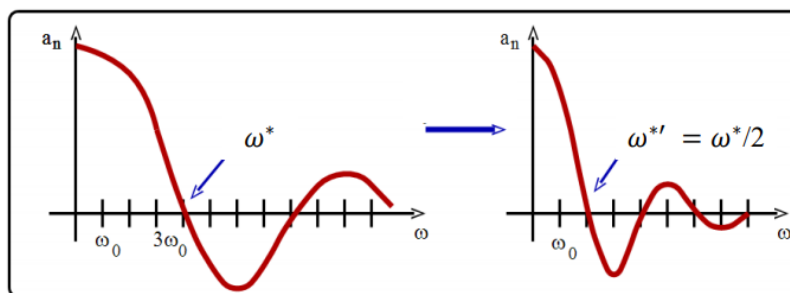


Рис. 1.7. Зависимость коэффициента Фурье от частоты для разных периодов τ_0 .

Рассмотрим последовательное приближение прямоугольного сигнала рядом Фурье (рис. 1.8). Если взять только первый член разложения, то, очевидно, приближение будет очень грубое. Мы последовательно берем 2, 3 и 4 члена в разложении, конечно, с правильными амплитудами и фазами для каждого члена, и видим, что наше представление в виде ряда неплохо совпадает с исходным сигналом, более наглядно для пяти членов суммы (рис. 1.9).

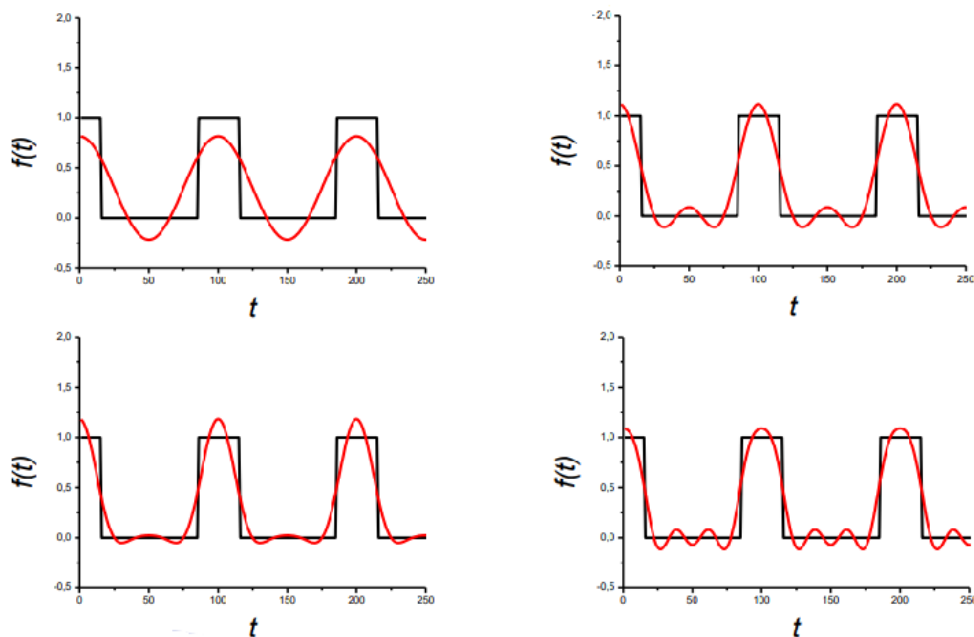


Рис.1.8. Последовательные приближения меандра рядом Фурье.

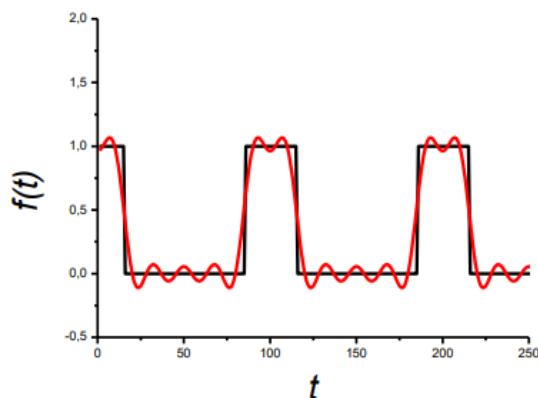


Рис.1.8. Приближения меандра пятью членами ряда Фурье.

Важно оценивать частоту ω^* , потому что примерно 90 процентов энергии такого сигнала, в виде импульсной последовательности, лежит в интервале $0 \div \omega^*$:

$$\sum_{n=1}^{n=n^*} a_n^2 / \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2 = 0,9.$$

Если же сигнал непериодический, то разложение в ряд переходит в разложении в интеграл Фурье. Проследить этот переход можно следующим образом, запишем нашу формулу (1.37), добавив в нее член $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, где $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. А теперь возьмем предел от этой функции, устремляя период ее повторения к бесконечности, это и есть переход к непериодическому сигналу:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T \tilde{c}_n e^{in\omega_0 t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

В итоге имеем прямое и обратное преобразования Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Свойства рядом и интегралов Фурье:

- $f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \leftrightarrow F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega)$
- $\alpha f(t) \leftrightarrow \alpha F(\omega), \alpha = const$
- $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega F(\omega)$

Доказательство:

$$\partial_t f(t) = \partial_t \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int [i\omega F(\omega)] e^{i\omega t} d\omega$$

- $\int f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{i\omega}$
- $f(\beta t) \leftrightarrow \frac{1}{\beta} F\left(\frac{\omega}{\beta}\right), \beta = const$

Доказательство:

$$F_\beta(\omega) = \int f(\beta t) e^{-i\omega t} dt = \int f(\beta t) e^{-i(\omega/\beta)\beta t} \frac{d(\beta t)}{\beta} = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$$

- $f(t - \tau) \leftrightarrow F(\omega) e^{-i\omega\tau}, \tau = const$

Доказательство:

$$F_\tau(\omega) = \int f(t - \tau) e^{-i\omega t} dt = \int f(y) e^{-i\omega y} e^{-i\omega\tau} dy = F(\omega) e^{-i\omega\tau}$$

- $W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$ – равенство Парсеваля

Доказательство:

$$W = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} F^*(\omega') e^{-i\omega' t} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} dt$$

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega') 2\pi \delta(\omega - \omega') \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi},$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx = 2\pi \delta(\alpha)$.

Или по-другому:

$$W = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(t)F(\omega)e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} dt.$$

Учтем, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = F^*(\omega)$. Тогда

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

- $f(t) = g(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow F(\omega) = \frac{G(\omega - \omega_0)}{2} + \frac{G(\omega + \omega_0)}{2}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2 \int g(t)(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})e^{-i\omega t} dt = 2 \int g(t)(e^{-i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t}) dt \\ &= \frac{G(\omega - \omega_0)}{2} + \frac{G(\omega + \omega_0)}{2} \end{aligned}$$

Метод комплексных амплитуд

Пусть в цепи действуют источники (напряжения или тока) на одной частоте $e_n = E_n \cos(\omega t + \phi_{E_n}), i_n = I_n \cos(\omega t + \phi_{I_n})$. Тогда установившиеся токи и напряжения будут иметь ту же частоту, но разные амплитуды и фазы. Вспомним следующие формулы из ТФКП:

$$Z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\varphi},$$

$$\varphi = \arg(Z) = \arctg\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Тогда мы можем записать напряжение на участке цепи в виде:

$$U(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi) = R(|A|e^{i(\omega t + \varphi)}) = R(|A|e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = R(Ae^{i\omega t}),$$

где $A \equiv |A|e^{i\varphi}$ — комплексная амплитуда. Для того, чтобы найти отклик линейной системы на гармонический сигнал, достаточно найти, как изменяется его комплексная амплитуда.

Если в системе есть элементы, обеспечивающие дифференцирование и интегрирование сигнала, у нас происходит изменение гармонического сигнала, которое можно определить, зная, как меняется фаза и амплитуда, например:

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{df(t)}{dt} = R(i\omega A e^{i\omega t}), \\ \int f(t) dt &= \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \int f(t) dt = R\left(\frac{A}{i\omega} e^{i\omega t}\right). \end{aligned}$$

Если мне нужно рассмотреть прохождение сложного сигнала через линейную радиофизическую систему, то все, что нужно сделать, это разложить исходный сигнал в спектр, найти изменение комплексной амплитуды каждой спектральной компоненты и просуммировать:

$$U_{\text{BX}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{\text{BX}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$\tilde{U}_{\text{BX}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{BX}}(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\tilde{U}_{\text{BX}}(\omega) \rightarrow \tilde{U}_{\text{ВЫХ}}(\omega),$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{\text{ВЫХ}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Описанием линейной системы является величина $K(\omega) = \frac{\tilde{U}_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{\tilde{U}_{\text{ВХ}}(\omega)}$, которая называется комплексным коэффициентом передачи и показывает изменение комплексной амплитуды сигнала на частоте ω . Модуль комплексного коэффициента передачи называется амплитудно-частотной характеристикой системы (АЧХ), а аргумент – фазо-частотной характеристикой системы (ФЧХ).

Итак, решение задачи сводится к трем шагам:

1. Находим спектр входного сигнала:

$$\tilde{U}_{\text{ВХ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{ВХ}}(t) e^{-i\omega t} dt$$

2. Зная коэффициент передачи, находим спектр сигнала на выходе:

$$\tilde{U}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = K(\omega) \tilde{U}_{\text{ВХ}}(\omega)$$

3. Находим выходной сигнал:

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{\text{ВЫХ}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Пример.

Рассмотрим простой пример, пусть у нас есть RC-цепочка (рис. 1.9). Мы можем найти комплексный коэффициент передачи, используя комплексные амплитуды и соответственно записи для величин комплексных сопротивлений элементов:

$$K(\omega) = \frac{IR}{I \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right)} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC},$$

$$|K(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}},$$

$$\arg K(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega RC).$$

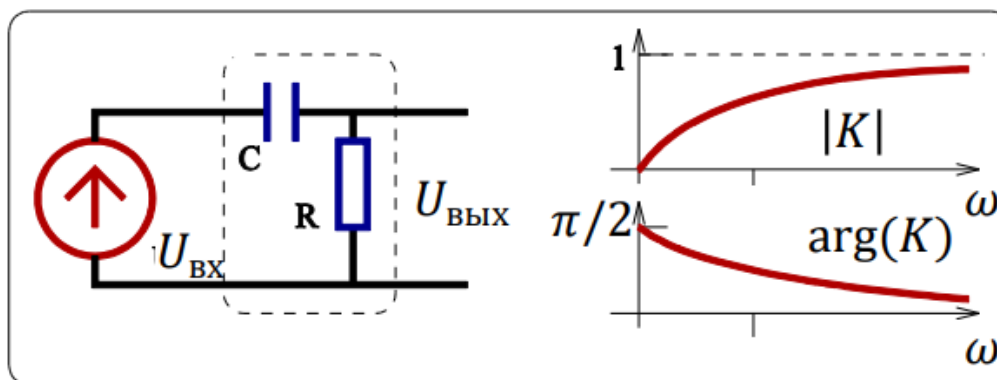


Рис. 1.9. Коэффициент передачи для RC-цепочки.

Разложение по ступенчатым функциям

Разложение по гармоническим колебаниям является не единственным возможным вариантом использования аппарата Фурье, в некоторых случаях удобно использовать в качестве базы другие функции. Эти функции могут быть самыми разными, мы с вами рассмотрим разложение по ступенчатым функциям. Ступенчатую функцию называют функцией Хевисайда $H(t)$ (рис. 1.10). Формулы разложения принимают вид:

$$\Delta U(t_0) = U'(t)dt \times H(t - t_0),$$

$$\tilde{U}_{\text{BX}}(t) = \partial_t U_{\text{BX}}(t),$$

$$U_{\text{BX}}(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{U}_{\text{BX}}(\tau) H(t - \tau) d\tau.$$

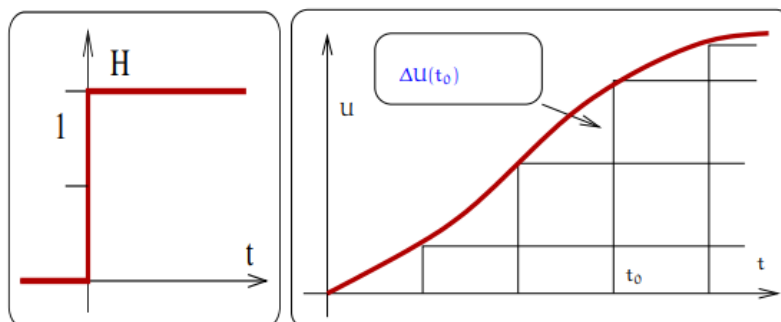


Рис. 1.10. Функция Хевисайда (слева) и иллюстрация разложения по функциям Хевисайда (справа).

Если на входе системы действует одна ступенчатая функция, то на выходе системы мы должны увидеть некое изменение со временем по закону $h(t)$ — отклик на «ступеньку» на входе. Функция $h(t)$ также является характеристика системы как и комплексный коэффициент передачи, только на другом языке, и называется переходной характеристикой.

Пример.

Опять рассмотрим RC-цепочку (рис. 1.11), мы можем рассчитать ее переходную функцию, решая дифференциальное уравнение:

$$U_{\text{вх}}(t) = RI(t) + \int_{-\infty}^t \frac{I(\tau)}{C} d\tau = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C},$$

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{U_{\text{вх}}(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau,$$

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-t/RC})H(t),$$

$$U_{\text{вх}}(\tau) = U_0 H(\tau),$$

$$U_{\text{вых}}(t) = RI(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} = U_0 e^{-t/RC} H(t).$$

Таким образом, переходная характеристика $h(t) = e^{-t/RC}$.

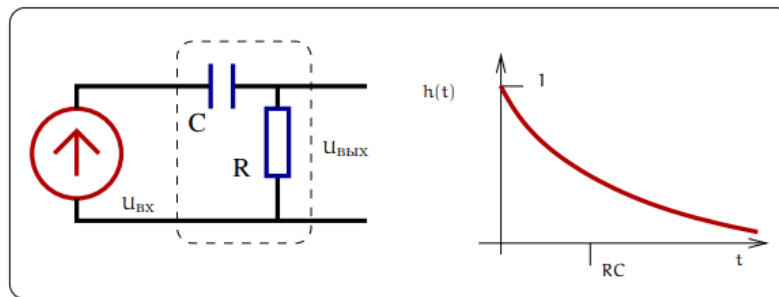


Рис. 1.11. Переходная функция для RC-цепочки.

Разложение по δ -функциям

Рассмотрим еще одно разложение, которое может быть использовано. Входной сигнал можно разложить по δ -импульсам:

$$U_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^t \check{U}_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau,$$

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t \check{U}_{\text{вх}}(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Нетрудно увидеть, что $\check{U}_{\text{вх}}(\tau) = U_{\text{вх}}(\tau)$, это следует из свойств δ -функции. Функция $g(t)$ называется импульсной характеристикой цепи, она связана с переходной характеристикой следующим образом:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Пример.

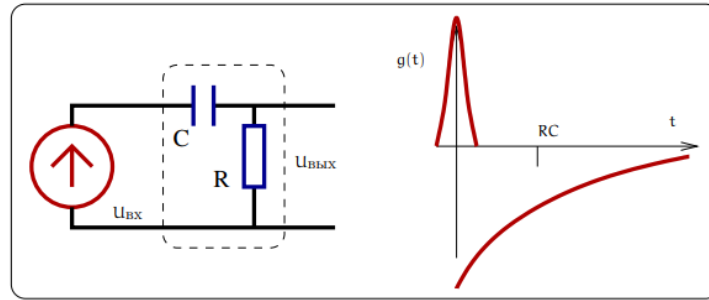


Рис. 1.12. Импульсная характеристика RC-цепочки.

Если подставить в качестве входного сигнала дельта импульс $U_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$, то выходной сигнал:

$$U_{\text{вых}}(t) \equiv R \frac{dQ(t)}{dt} = U_{\text{вх}}(t) - \int_{-\infty}^t U_{\text{вх}}(\tau) e^{-(t-\tau)/RC} \frac{d\tau}{RC}.$$

Тогда импульсная характеристика будет иметь вид

$$g(t) = \delta(t) - \frac{H(t)}{RC} e^{-t/RC}.$$

Ниже представлены связи друг с другом всех характеристик линейных цепей:

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{i\omega + \varepsilon} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dx}.$$

Дифференцирующие и интегрирующие цепочки

Упомянутые ранее RC-цепочки при определенных условиях могут выполнять функцию дифференцирования или интегрирования сигнала. Рассмотрим цепи на рисунке 1.13, для них комплексный коэффициент передачи имеет вид

$$K(\omega) = \frac{i\omega\tau^*}{1 + i\omega\tau^*},$$

где $\tau^* = RC = \frac{L}{R}$. Можно записать условие дифференцирования:

$$\omega\tau^* \ll 1 \text{ или } t_{\text{хар}} \gg \tau^*.$$

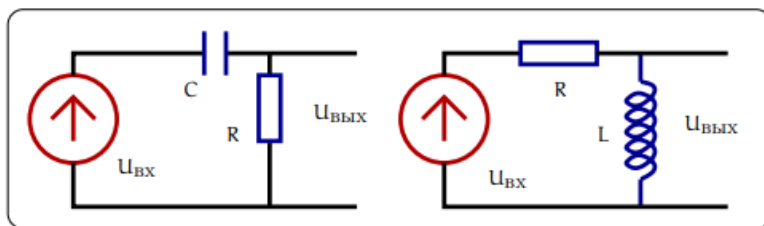


Рис. 1.13. Дифференцирующие цепочки.

Зеркальными в определенном смысле являются интегрирующие цепочки, здесь элементы меняются местами (рис. 1.14), комплексный коэффициент передачи представляется в виде:

$$K(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau^*},$$

где $\tau^* = RC = \frac{L}{R}$. Можно записать условие интегрирования:

$$\omega\tau^* \gg 1 \text{ или } t_{\text{хар}} \ll \tau^*.$$

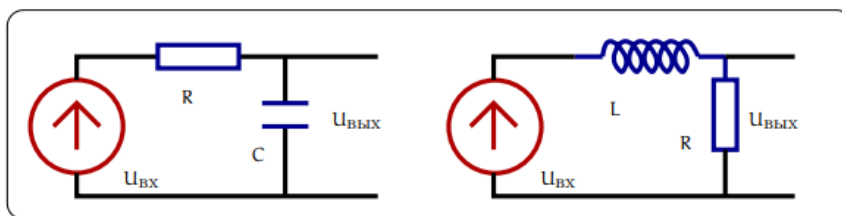


Рис. 1.14. Интегрирующие цепочки.

На рисунке 1.15 изображены отклики дифференцирующих и интегрирующих цепочек на прямоугольный импульс.

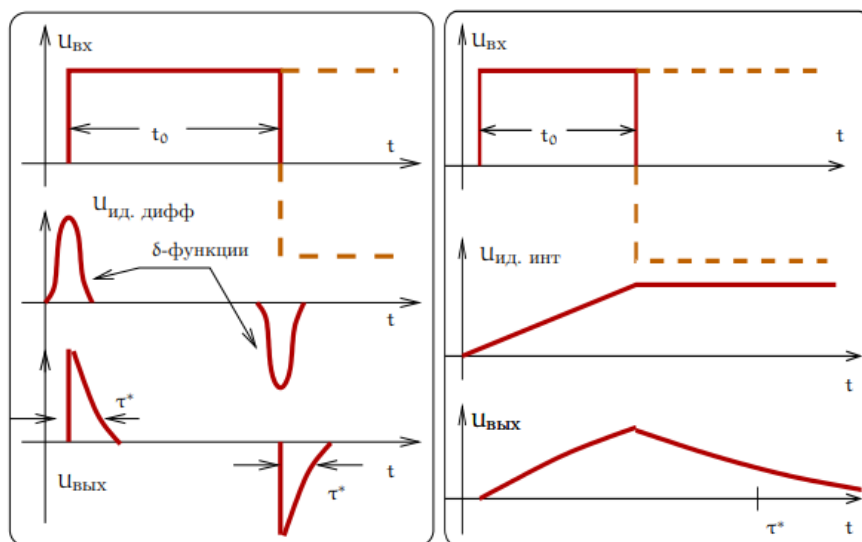


Рис. 1.15. Слева: дифференцирование прямоугольного импульса. Справа: интегрирование прямоугольного импульса.

ЛЕКЦИЯ 2. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

В прошлый раз мы рассматривали прохождение сигналов через линейные цепи и для анализа этого процесса использовали разложения на основе обобщенного аппарата Фурье по базисным функциям. В качестве базисных функций мы выбирали наиболее часто используемые тригонометрические функции синуса и косинуса, а также более экзотические: функцию Хевисайда и δ -функцию. Коротко напомним самые основные постулаты, которые были введены в прошлой лекции. Линейность означает, что сигналы не влияют на свойства системы и распространяются через нее независимо друг от друга.

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по гармоническим функциям.

Набор базовых функций: $\cos \omega t, \sin \omega t (e^{i\omega t})$.

Характеристикой линейной системы является коэффициент передачи $K(\omega)$. Найти его можно двумя способами:

- A. Экспериментально: подаем на вход гармонический сигнал

$$U_{\text{вх}}(t) = U_0 e^{i\omega_0 t} \rightarrow U_{\text{вых}}(t) = U_0 K(\omega_0) e^{i\omega_0 t}$$

и снимаем АЧХ и ФЧХ для всех частот ω_0 .

- B. Теоретически: решить дифференциальное уравнение для системы с правой частью в виде $e^{i\omega t}$, тогда

$$K(\omega) = \frac{\text{решение}}{e^{i\omega t}}.$$

Теперь, когда мы знаем $K(\omega)$

- 1) Находим спектр входного сигнала (коэффициенты Фурье в разложении по синусам и косинусам):

$$S(\omega) \equiv \tilde{U}_{\text{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

- 2) Находим спектр выходного сигнала:

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(\omega) = \tilde{U}_{\text{вх}}(\omega) K(\omega).$$

- 3) Находим выходной сигнал:

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{\text{вых}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

2. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по ступенчатым функциям (Хевисайда).

Набор базовых функций: $H(t - t_0)$.

Характеристикой линейной системы является переходная характеристика $h(\omega)$. Найти ее можно двумя способами:

А. Экспериментально: подаем на вход ступенчатый сигнал

$$U_{\text{вх}}(t) = U_0 H(t - t_z) \rightarrow U_{\text{вых}}(t) = U_0 h(t - t_z).$$

В. Теоретически: решить дифференциальное уравнение для системы с правой частью в виде $H(t - t_0)$, тогда

$$h(t) = \frac{\text{решение}}{H(t - t_0)}.$$

Теперь, когда мы знаем $h(t)$

1) Находим коэффициенты Фурье в разложении по функциям Хевисайда:

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) H(\tau - t) dt,$$

мы обнаруживаем, что не нужно решать задачу с интегрированием, имеем просто

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{вх}}(\tau) &= 0, \tau > t \\ \tilde{U}_{\text{вх}}(\tau) &= \frac{\partial U_{\text{вх}}(t)}{\partial t}, \tau \leq t \end{aligned}$$

2,3) Находим выходной сигнал:

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{U}_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

3. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по ступенчатым δ -функциям.

Аналогично предыдущему.

Связь друг с другом всех характеристик линейных цепей:

$$\begin{aligned} K(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt, \\ g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \\ h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{i\omega + \varepsilon} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \\ g(t) &= \frac{dh(t)}{dx}. \end{aligned}$$

Внешнее воздействие на линейную систему.

Последовательный колебательный контур

Последовательный контур. Свободные колебания.

Для начала рассмотрим контур в отсутствие внешнего воздействия и получим однородное уравнение, записав сумму падений напряжения на всех элементах системы:

$$L \frac{dI}{dt} + rI + \int_{-\infty}^t \frac{I(\tau)}{C} d\tau = 0,$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $2\delta = \frac{r}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, решение ищем в виде гармонических колебаний $q = Ae^{i\omega t}$, тогда

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2\delta i\omega Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = 0.$$

Временная часть сокращается, и мы получаем простое квадратное уравнение:

$$\omega^2 - 2\delta i\omega - \omega_0^2 = 0,$$

отсюда $\omega_{1,2} = i\delta \pm \tilde{\omega}_0$, $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\tilde{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\tilde{\omega}_0 t},$$

а его производная:

$$\dot{q}(t) = A_1(-\delta + i\tilde{\omega}_0)e^{-\delta t + i\tilde{\omega}_0 t} + A_2(-\delta - i\tilde{\omega}_0)e^{-\delta t - i\tilde{\omega}_0 t}.$$

Коэффициенты A_1, A_2 находятся из начальных условий. Пусть, например,

$$q(0) = CU_0,$$

$$\dot{q}(0) = 0,$$

тогда

$$A_1 + A_2 = CU_0,$$

$$A_1 - A_2 = \frac{\delta CU_0}{i\tilde{\omega}_0},$$

и окончательное решение примет вид (рис. 2.2):

$$q(t) = CU_0 e^{-\delta t} \left(\cos \tilde{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\tilde{\omega}_0} \sin \tilde{\omega}_0 t \right) \text{ при } \omega_0 > \delta,$$

$$q(t) = \frac{CU_0 e^{-\delta t}}{|\tilde{\omega}_0|} \left((|\tilde{\omega}_0| - \delta) e^{-|\tilde{\omega}_0| t} + (|\tilde{\omega}_0| + \delta) e^{|\tilde{\omega}_0| t} \right) \text{ при } \omega_0 < \delta.$$

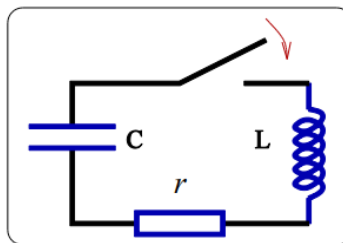


Рис. 2.1. Последовательный колебательный контур.

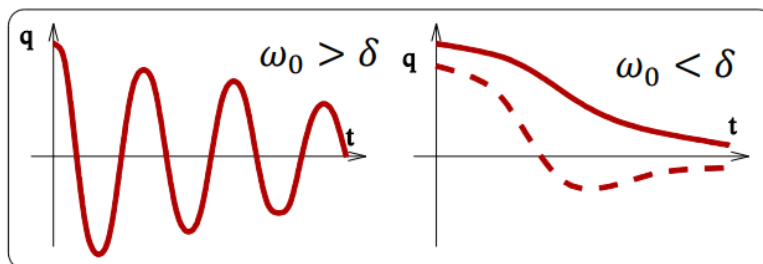


Рис. 2.2. Свободные колебания в последовательном контуре.

Последовательный контур. Переходная характеристика.

Будем считать, что в начальный момент времени ни заряда на конденсаторе, ни тока через катушку нет, зато есть источник постоянного напряжения, и ключ в этом контуре замыкается в момент времени $t = 0$. Решаем систему:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L},$$

$$q(0) = 0, \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Пусть $\omega_0 \gg \delta$ и $E = \text{const}$, решение будет иметь вид:

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t} + CE,$$

где коэффициенты A_1, A_2 находятся из начальных условий:

$$A_1 + A_2 = -CE,$$

$$A_1 - A_2 = \frac{\delta C U_0}{i\bar{\omega}_0}.$$

В итоге имеем:

$$q(t) = CE - CE e^{-\delta t} \left(\cos \bar{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\bar{\omega}_0} \sin \bar{\omega}_0 t \right),$$

где $\bar{\omega}_0 = \omega_0^2 - \delta^2$. Переходная характеристика:

$$h(t) \equiv \frac{q(t)}{CE} = 1 - e^{-\delta t} \left(\cos \bar{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\bar{\omega}_0} \sin \bar{\omega}_0 t \right).$$

Если мы мгновенно или очень быстро по сравнению с возможным периодом колебаний в этой системе меняем потенциал внутри системы, включая такую батарейку, то система будет реагировать следующим образом: в ней будут наблюдаться затухающие колебания на частоте, близкой к собственной частоте ω_0 , среднее значение этих колебаний стремится к величине постоянного заряда, который как раз и будет на конденсаторе в силу того, что в цепи есть источник.

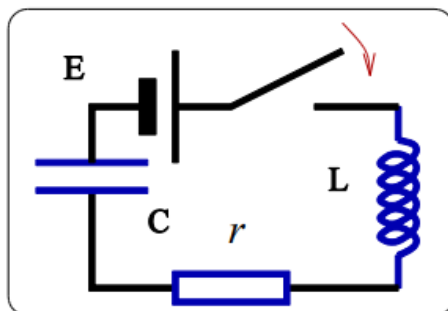


Рис. 2.3. Последовательный колебательный контур, возбуждаемый источником постоянного напряжения.

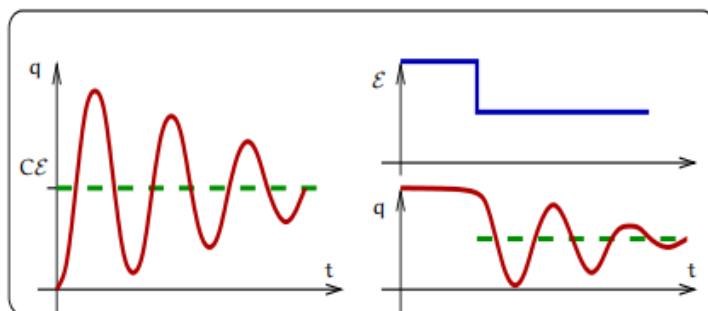


Рис. 2.4. Затухающие колебания в последовательном контуре с источником постоянного напряжения.

Задачи для «любознательных»:

1. «Электрон». Дано: L, C, d, m, e
 - 1) Найти, чему равен сдвиг собственной частоты контура, если в емкость «вложен» свободный электрон.
 - 2) То же самое, если электрон «на пружинке» (частота его свободных колебаний равна ω_e).
2. «Резонансная кривая». С какой максимальной скоростью $\frac{d\omega_g}{dt}$ можно менять частоту генератора ω_g , чтобы «прописать» (измерить) резонансную кривую резонатора с заданной точностью, например, с относительной ошибкой $\varepsilon = 0.03$. Параметры резонатора считать известными.

В общем случае электрические системы часто представляют как обобщенный четырехполюсник: 2 полюса входа и 2 полюса выхода. Кирпичиками являются RC, LC и RLC-цепочки.

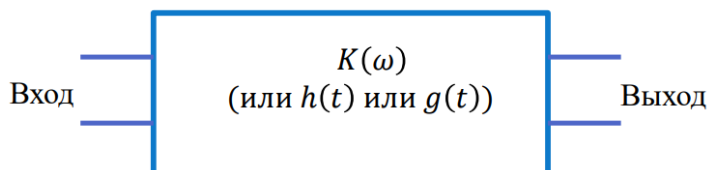


Рис. 2.5. Пассивный линейный четырехполюсник.

Последовательный контур. Вынужденные колебания.

В цепи есть источник напряжения, и мы будем считать что у нас установившийся режим $t \gg \frac{1}{\delta}$, то есть с момента включения источника прошло достаточно много времени, переходные процессы завершились. Имеем дифференциальное уравнение

$$L \frac{dI}{dt} + rI + \int_{-\infty}^t \frac{I(\tau)}{C} d\tau = U_g(t),$$

где $U_g(t) = U_g e^{i\omega t}$ – вынуждающая сила или входной сигнал. Можем использовать метод комплексных амплитуд, знаем комплексные сопротивления элементов:

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C},$$

$$Z_L = i\omega L,$$

$$Z_R = R.$$

Используя закон Кирхгофа для комплексных амплитуд

$$U_g = U_C + U_L + U_R,$$

получим

$$Z(\omega) = \frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + i \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] \right) = \rho \left(\frac{1}{Q} + i\zeta \right).$$

Мы ввели обозначения: $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое сопротивление, $Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta}$ – добротность, $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ – обобщенная расстройка. Можем записать комплексную амплитуду тока:

$$I(\omega) = \frac{U_g(\omega)}{\rho \left(\frac{1}{Q} + i\zeta \right)},$$

$$|I(\omega)| = \frac{U_g}{\rho \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \zeta^2}},$$

$$\varphi_I = \arg I(\omega) = \arctg(-Q\zeta),$$

и напряжения на каждом отдельном элементе:

$$U_R = RI, |U_R(\omega)| = \frac{RU_g}{\rho \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \zeta^2}}, \varphi_{U_R} = \varphi_I,$$

$$U_L = i\omega LI, |U_L(\omega)| = \frac{\omega U_g}{\omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \zeta^2}}, \varphi_{U_L} = \varphi_I + \frac{\pi}{2},$$

$$U_C = \frac{I}{i\omega C}, |U_C(\omega)| = \frac{\omega_0 U_g}{\omega \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \zeta^2}}, \varphi_{U_C} = \varphi_I - \frac{\pi}{2}.$$

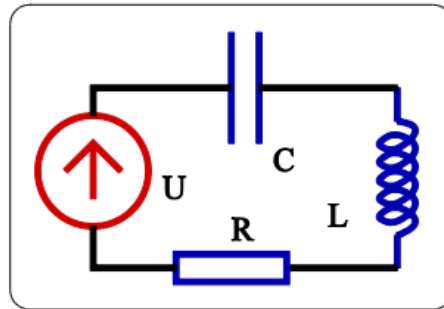


Рис. 2.6. Последовательный колебательный контур с источником переменного напряжения.

Последовательный контур. Резонанс.

В случае $\zeta = 0, \omega = \omega_0$ имеем $I(\omega)_{\max} = \frac{U_g}{R}$ и для напряжений на конденсаторе и индуктивности:

$$U_C = \frac{1}{i\omega_0 C} \frac{U_g}{R} e^{i\omega t} = -\frac{i}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_g e^{i\omega t} = -iQ U_g e^{i\omega t},$$

$$U_L = i\omega_0 L \frac{U_g}{R} e^{i\omega t} = \frac{i}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_g e^{i\omega t} = iQ U_g e^{i\omega t}.$$

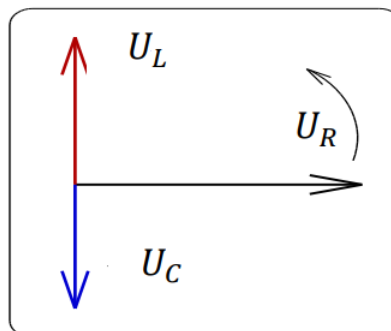


Рис. 2.7. Фазовая диаграмма напряжений в последовательном контуре.

Резонанс в последовательном колебательном контуре также называют резонансом напряжений. На практике часто говорят, что резонанс происходит на собственной частоте, подразумевая, что добротность колебательного контура достаточно велика. Но если добротность маленькая, то можно усмотреть, что

резонансная частота на емкости и на индуктивности будут отличаться друг от друга и от резонансной частоты ω_0 :

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}},$$

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}}.$$

Ширина резонансных кривых определяется добротностью или потерями: чем более добротный контур, тем более узкая его резонансная кривая. Аналогично крутизна фазовой характеристики вблизи частоты ω_0 зависит от добротности: чем более добротный контур, тем круче наклон, тем больше производная на этой частоте (рис. 2.8).

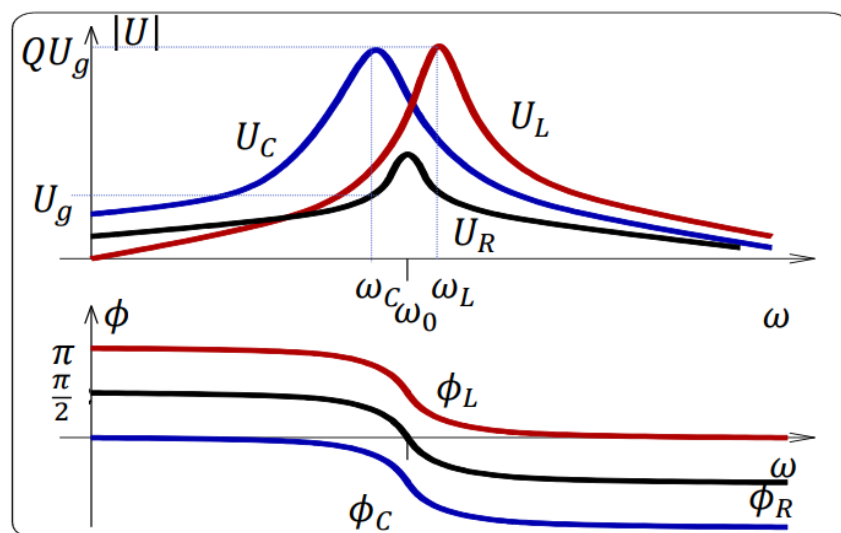


Рис. 2.8. Зависимость амплитуды (вверху) и фазы (внизу) вынужденных колебаний на емкости, сопротивлении и индуктивности.

Задача «Вынужденные колебания».

Мы рассматривали колебания в установившемся режиме, а теперь давайте посмотрим, что все-таки происходит в момент включения. Пусть в последовательном колебательном контуре ($\omega_0 = 1/LC$, $\delta = r/2L$, $\omega_0 \gg \delta$) в момент времени $t = 0$ включается генератор, напряжение $U_g(t)$ которого меняется по закону:

$$U_g(t) = \begin{cases} U_0 \cos(\omega_0 - \Delta)t, & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ и построить графики для случаев: а) $\Delta = 0$, б) $\Delta = \delta$, в) $\Delta = 5\delta$.

Добротность является важным параметром колебательных систем, она связана с потерями энергии за период:

$$\Delta \equiv 2\pi \frac{W_{\text{запас}}}{W_{\text{потери за период}}} = 2\pi \frac{\left(\frac{LI^2}{2}\right)}{\left(\frac{RI^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right)} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R} = Q.$$

Добротность часто измеряют по ширине резонансной кривой (на уровне $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимума):

$$I(\omega) = \frac{U_g}{R + i\rho\zeta} = \frac{U_g}{R(1 + iQ\zeta)},$$

$$|I_{\sqrt{2}}(\omega)| = \frac{|I_{\max}(\omega)|}{\sqrt{2}},$$

откуда получим, что

$$Q\zeta = 1,$$

где $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$. Если можно пренебречь членами второго порядка малости, то получаем, что при $Q \gg 1$:

$$\zeta_{\Delta} \cong \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}, \Delta\omega \cong \frac{\omega_0}{Q},$$

при $Q \ll 1$:

$$\omega_1 \cong Q\omega_0, \omega_2 \cong \frac{\omega_0}{Q}.$$

Вынужденные колебания в линейных цепях

Предположим, что последовательный колебательный контур включен в какую-то линейную цепь. Необходимо принимать во внимание влияние этой цепи на колебательный контур, например, если мы используем колебательный контур в качестве сопротивления Z простейшей цепочки, которая кроме него содержит реальный источник напряжения и имеет свое внутреннее сопротивление, то легко сообразить, что это внешнее сопротивление включено параллельно с колебательным контуром (рис. 2.9). Получим выражение для комплексного коэффициента передачи системы, где выходом является напряжение на всем последовательном колебательном контуре, а входом – наш источник:

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{out}}(\omega)}{U_{\text{in}}(\omega)} = \frac{Z}{R_i + Z}.$$

Если внутреннее сопротивление источника $R_i \gg Z(\omega)$, то $K(\omega) \rightarrow 0$, и, наоборот, если $R_i \ll Z(\omega)$, то $K(\omega) \rightarrow 1$.

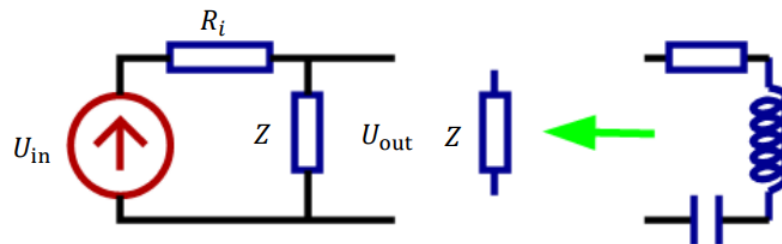


Рис. 2.9. Схема фильтра-пробки.

Такую схему в радиотехнике еще иногда называют фильтром-пробкой. Рассмотрим промежуточный случай, когда $\rho \gg R_i \gg r$ (обозначения см. на рис. 2.10). Комплексный коэффициент передачи примет вид:

$$K(\omega) = \frac{Z}{R_i + Z} = \frac{r + i\rho\zeta}{R_i + r + i\rho\zeta},$$

$$Z = r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = r + i\rho\zeta.$$

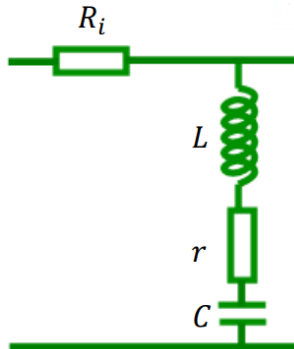


Рис. 2.10. Последовательный колебательный контур в составе линейной цепи.

Считаем, что добротность достаточно большая и может быть рассчитана как $\frac{\omega_0}{\omega}$, а обратная величина:

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \cong \frac{\rho}{R_i} = \frac{1}{Q_{\text{нагр}}}, Q_{\text{нагр}} \gg 1.$$

Получается, что в этом случае добротность системы, а значит и ширина резонансной кривой, определяется именно внешним сопротивлением R_i , которое было подключено к контуру, иногда говорят, что сопротивление шунтирует или нагружает контур. Это необязательно должно быть сопротивление источника, это может быть и сопротивление приемника – главное, чтобы оно было соединено с контуром параллельно. Тогда мы получаем амплитудно-частотную характеристику (рис. 2.11), которая имеет колоколообразный провал, его глубина равна $\frac{r}{R_i + r}$, то есть чем больше R_i по сравнению с r , тем глубже получается яма. Такой фильтр используется для того, чтобы вырезать определенную область частот, отсюда и появляется название «фильтр-пробка».

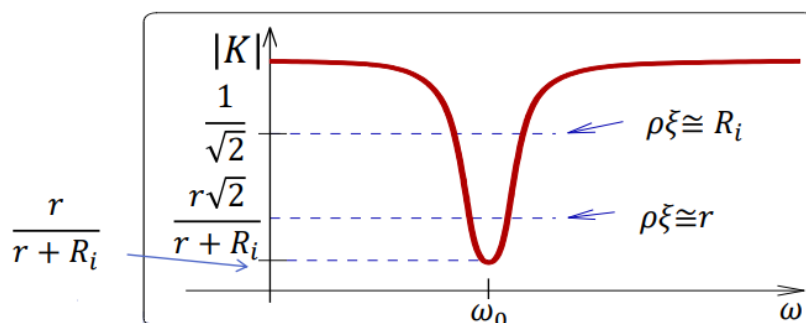


Рис. 2.11. Амплитудно-частотная характеристика фильтра-пробки.

Колебательный контур широко используется в радиосвязи в качестве селективного элемента, схема простейшего входного каскада радиоприемника представлена на рис. 2.12. В схеме присутствует полевой транзистор, на вход которого и подается сигнал. Для того, чтобы вырезать необходимую область частот интересующего сигнала, используется последовательный колебательный контур. В качестве источника выступает индуктивная связь антенны с катушкой индуктивности. Не задаваясь пока вопросом о том, как работает транзистор, можно также посчитать комплексный коэффициент передачи от антенны к затвору полевого транзистора:

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{U_{\text{ВХ}}(\omega)} = \frac{1/i\omega C}{R_i + Z} = \frac{1}{i\omega C(R_i + r + i\rho\zeta)} = \frac{\rho\omega_0}{i\omega(R_i + r + i\rho\zeta)},$$

где R_i – это сопротивление, вносимое антенной и транзистором.

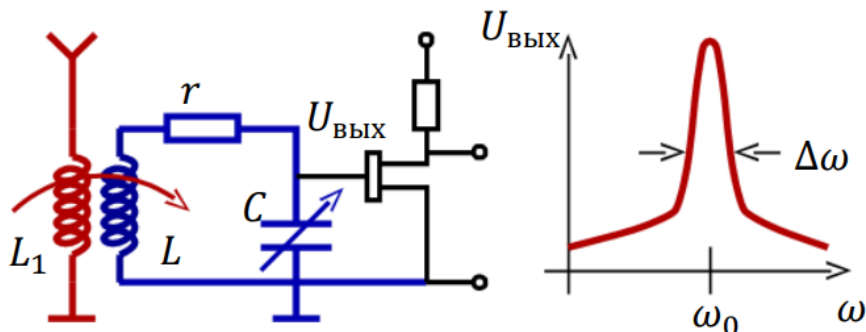


Рис. 2.12. Слева: пример полосового фильтра в радиоприемном устройстве.

Справа: его частотная характеристика.

Можно привести еще один пример, абстрагированный от конкретного приемного устройства (рис. 2.13). Здесь мы в качестве эквивалентной схемы источника антенны представили источник напряжения со своим внутренним сопротивлением R_i . В качестве выходного сигнала рассматриваем сигнал на емкости. В этом случае коэффициент передачи:

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{U_{\text{ВХ}}(\omega)} = \frac{1/i\omega C}{R_i + Z} = \frac{1}{i\omega C(R_i + r + i\rho\zeta)} = \frac{\rho\omega_0}{i\omega(R_i + r + i\rho\zeta)} = \frac{Q_{\text{нагр}}\omega_0}{i\omega(1 + iQ_{\text{нагр}}\zeta)},$$

где $Q_{\text{нагр}} = \frac{\rho}{R_i + r}$. На резонансной частоте комплексный коэффициент передачи равен по модулю $Q_{\text{нагр}}$. Вдали от резонанса, где $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$:

$$|K(\omega)| \cong \frac{\omega_0}{\omega |\zeta|} = \frac{1}{\left| \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right|} < 1,$$

ширина полосы фильтра:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cong \frac{R_i + r}{\rho} = \frac{1}{Q_{\text{нагр}}}, Q_{\text{нагр}} \gg 1.$$

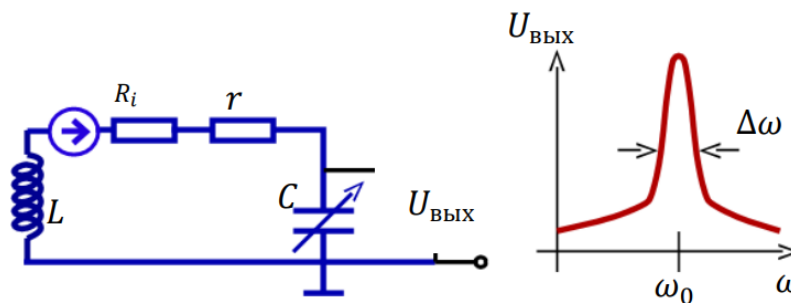


Рис. 2.13. Слева: пример полосового фильтра без конкретного приемного устройства. Справа: его частотная характеристика.

Принцип дуальности

В той или иной форме мы уже сталкивались с дуальностью. Мы говорили о теореме об эквивалентном генераторе, которая гласит, что можно перейти от источника тока к источнику напряжения. Мы также обращали внимание на то, что RC и LC-цепочки могут обладать схожими характеристиками. Если обобщить эти наблюдения, то можно прийти к следующему выводу: любую электрическую пассивную цепь, состоящую из индуктивностей, емкостей и сопротивлений, можно заменить эквивалентной. Она будет обладать теми же самыми свойствами, только необходимо все емкости заменить на индуктивности, а индуктивности – на емкости; вместо сопротивления взять проводимость, это обратная величина; поменять последовательные включения на параллельные, а параллельные – на последовательные; и заменить источники тока на источники напряжения и наоборот.

Надо мысленно разбить рассматриваемую систему на контура (в смысле закона Кирхгофа), взять точки внутри замкнутых контуров и одну, соответствующую внешнему контуру – снаружи, и провести линии, которые соединяют все эти точки. Там, где эти мысленные линии пересекают элементы, мы и будем устанавливать соответствующие им новые элементы.

Сопротивления эквивалентных элементов рассчитываются по формулам вида:

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{Z_1}, \bar{Y}_2 = \frac{1}{Z_2},$$

$$i\omega\bar{L} = \frac{1}{i\omega C}, \frac{1}{i\omega\bar{C}_1} = i\omega L_1, \frac{1}{i\omega\bar{C}_2} = i\omega L_2.$$

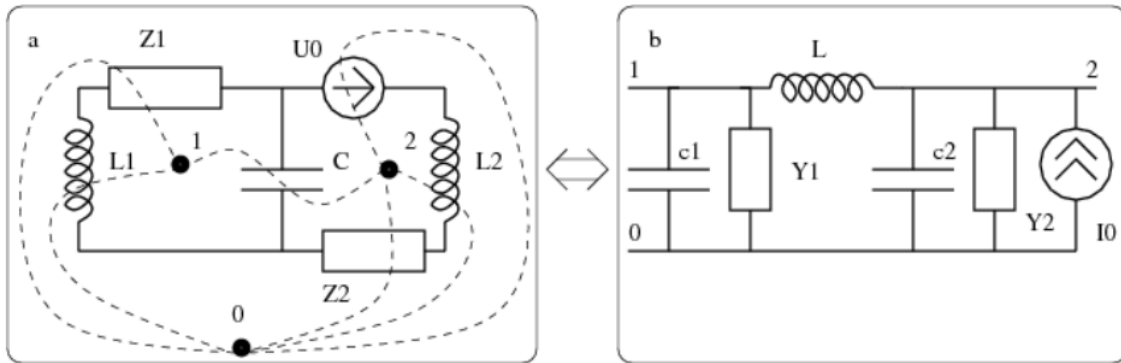


Рис. 2.14. Иллюстрация составления дуальной схемы.

Попробуем применить принцип дуальности, пусть есть схема, изображенная на рис. 2.15 слева, для нее имеем эквивалентную схему:

$$I_R = \frac{U_0}{R + Z_1}, Z_1 = \frac{i\omega C}{1 - \omega^2 LC},$$

$$U_G = \frac{I_0}{G + 1/Z_2}, \frac{1}{Z_2} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

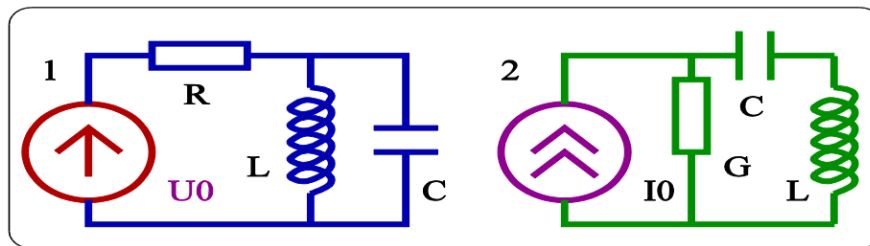


Рис. 2.15. Пример применения принципа дуальности: исходная (слева) и эквивалентная (справа) цепочки.

Параллельный колебательный контур

Для начала рассмотрим собственно параллельный контур, удобно найти обратную величину его сопротивления или комплексную проводимость:

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{Q} + i\zeta\right),$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, $Q = \frac{R}{\rho}$, $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$, тогда

$$Z(\omega) = \frac{\rho Q}{1 + iQ\zeta}.$$

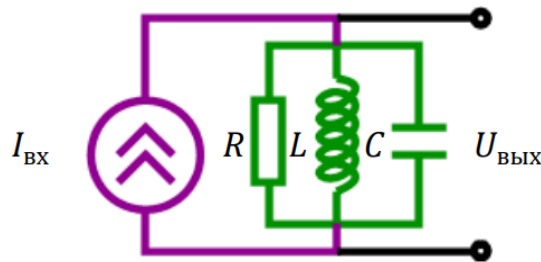


Рис. 2.16. Параллельный колебательный контур.

Если построить зависимость модуля комплексного сопротивления от частоты, то мы снова получим кривую Лоренца (2.17). Полезно запомнить такое свойство: для любых колебательных систем на резонансной частоте и только на ней импеданс обращается в действительную величину, равную сопротивлению потерь.

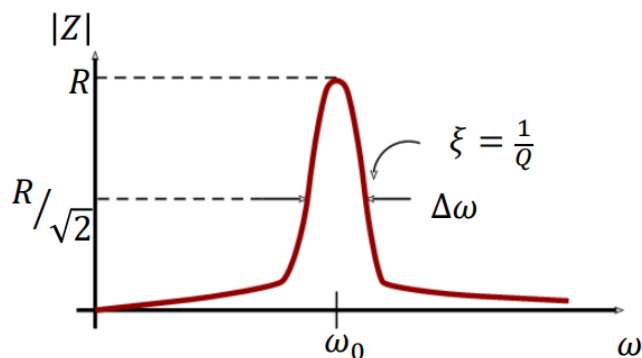


Рис. 2.17. Зависимость модуля импеданса параллельного контура от частоты.

Можно рассмотреть токи, запишем их комплексные амплитуды:

$$I_R = \frac{\rho}{R} \frac{Q I_0}{1 + iQ\zeta},$$

$$I_L = \frac{-i\omega_0}{\omega} \frac{Q I_0}{1 + iQ\zeta},$$

$$I_C = \frac{i\omega_0}{\omega} \frac{Q I_0}{1 + iQ\zeta}.$$

Наблюдается эффект резонанса токов: токи через индуктивность I_L и емкость I_C на резонансной частоте ω_0 по модулю в Q раз больше, чем полный ток, протекающий через этот контур. Токи I_C и I_L противоположны по фазе и компенсируют друг друга (рис. 2.18). Уравнения резонанса в параллельном контуре выглядят абсолютно аналогично случаю с последовательным контуром. Также имеем условие

$$Q\zeta = 1,$$

где $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$. Если можно пренебречь членами второго порядка малости, то при $Q \gg 1$ получаем:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega, \Delta\omega \cong \frac{\omega_0}{Q},$$

при $Q \ll 1$:

$$\omega_1 \cong Q\omega_0, \omega_2 \cong \frac{\omega_0}{Q}.$$

На резонансной частоте ω_0 :

$$U_{\text{ВЫХ}}(\omega_0) = I_0 R,$$

$$I_L(\omega_0) = -iQI_0,$$

$$I_C(\omega_0) = iQI_0.$$

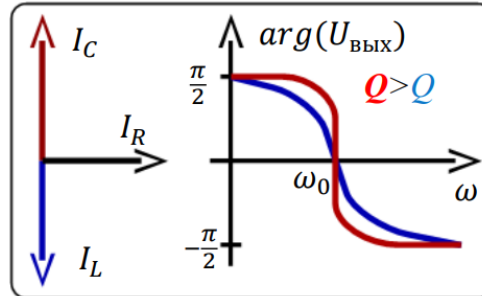


Рис. 2.18. Векторная диаграмма токов и график $\arg(U_{\text{ВЫХ}})$ для резонанса в параллельном контуре.

Перечислим возможные определения добротности Q :

$$Q = \frac{\text{запасенная энергия}}{2\pi \times \text{энергия потерь за период}},$$

$$Q = \frac{\omega_0 \tau^*}{2}, \tau^* - \text{время затухания},$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \Delta\omega = \frac{2}{\tau^*} - \text{ширина полосы},$$

$$Q = \frac{\rho}{r} \text{ (последовательный контур)}, \rho = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

$$Q = \frac{R}{\rho} \text{ (параллельный контур)}.$$

Примеры:

1. Обычный LC контур: $Q \approx 50 \div 300, f = 10^5 \div 10^8$ Гц
2. Кварцевый резонатор: $Q \approx 10^4 \div 10^5, f = 10^3 \div 10^7$ Гц
3. Металлический объемный СВЧ резонатор: $Q \approx 50 \div 10^5, f = 10^9 \div 10^{12}$ Гц
4. Криогенный СВЧ резонатор: $Q \approx 10^6 \div 10^{10}, f = 10^9 \div 10^{12}$ Гц (сверхпроводники, сапфир)
5. Оптические микрорезонаторы: $Q \approx 10^{10}$ (пл. кварц, $CaF_2, f \approx 10^{15}$ Гц)
6. Оптический резонатор Фабри-Перо: $Q \approx 10^{12}$ ($L = 4$ км, $f \approx 10^{15}$ Гц)

Перспективными являются диэлектрические резонаторы в СВЧ диапазоне (сапфир, плавленый кварц) и в оптике (плавленый кварц) – на эффекте полного внутреннего отражения. В отличие от сверхпроводящих СВЧ резонаторов, параметры

которых довольно быстро деградируют из-за процессов старения поверхности, диэлектрические резонаторы на эффекте полного внутреннего отражения (рис. 2.19) демонстрируют лучшую долговременную стабильность. В диэлектрических резонаторах на сапфире продемонстрирована зависимость $Q \sim 1/T^5$, соответствующая уровню фундаментальных потерь в кристаллическом сапфире, вызванных нелинейным фотон-фононным взаимодействием.

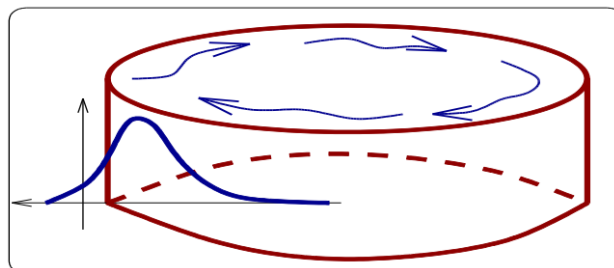
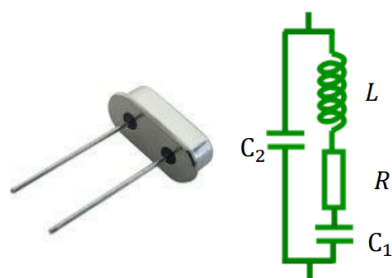


Рис. 2.19. Диэлектрический резонатор на эффекте полного внутреннего отражения.
Волна бежит вдоль внешней стенки резонатора.



Эквивалентная схема

Рис. 2.20. Кварцевый резонатор.

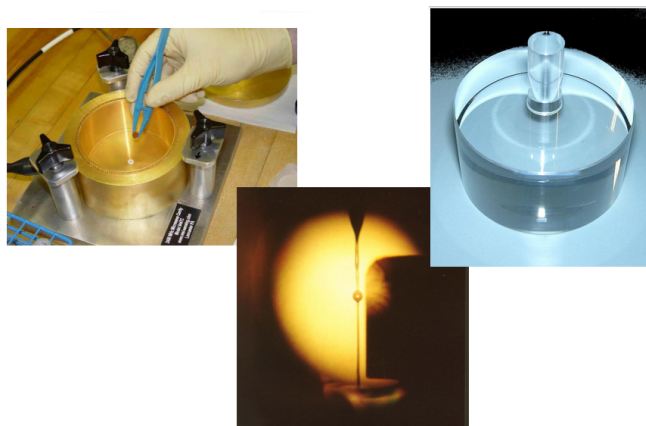


Рис. 2.21. Объемные резонаторы: сапфировый (справа), микрорезонатор (по центру) и металлический (слева).

Емкостной датчик

Рассмотрим очередную задачу об измерении малых механических смещений. Оказывается высоко добротный колебательный контур как нельзя лучше подходит для

решения этой задачи. Если у нас есть колебательный контур, и мы связали обкладку конденсатора с механической системой движения, которую мы хотим изучать, то изменение положения обкладки, очевидно, приведет к изменению емкости и, соответственно, резонансной частоты. Если построить зависимость напряжения на емкости от частоты генератора накачки, мы увидим, что резонансная кривая сдвинулась. Если мы не будем менять частоту источника, а настроим ее на склон резонансной кривой, тогда при таком изменении при движении пластины напряжение на конденсаторе будет меняться. Причем чем круче склон резонансной кривой, тем больше будет это изменение. А крутизна склона – это есть добротность, то есть чем более добротный контур, тем больше будет электрический сигнал при том же самом механическом воздействии.

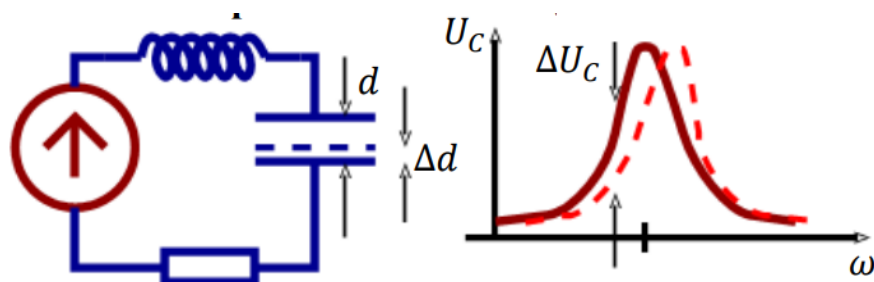


Рис. 2.22. Схема емкостного датчика.

ЛЕКЦИЯ 3. ТРАНСФОРМАТОР. РАСПРЕДЕЛЁННЫЕ СИСТЕМЫ

На прошлой лекции мы начали рассматривать емкостный датчик. Возьмем источник постоянного напряжения, приложим его к емкости, у которой есть подвижная пластина, и будем снимать сигнал с этой емкости через дополнительный конденсатор. Если емкость постоянна, то на выходе не будет переменной составляющей, если же емкость меняется, то на ней появится переменное напряжение. Если включить емкость в колебательный контур, очевидно, коэффициент преобразования перемещения в напряжение может быть больше, для этого надо, чтобы контур был по возможности более добротный, и, кроме того, нужен источник гармонических колебаний, настроенный на склон резонансной кривой. Тогда изменение расстояния d между пластинами конденсатора на величину Δd приведет к изменению собственной частоты контура, а следовательно, к сдвигу резонансной кривой и к изменению напряжения U_C на конденсаторе на величину ΔU_C . Можно показать, что при определенных условиях связь между ΔU_C и Δd имеет вид:

$$\frac{\Delta U_C}{U_C} = \frac{Q}{2} \frac{\Delta d}{d},$$

где Q — добротность контура. Чтобы оценить, какую величину Δd можно измерить, зададим следующие параметры:

$$Q = 200, \frac{\Delta U_C}{U_C} = 1 \times 10^{-5}, d = 1 \times 10^{-2} \text{ см},$$

тогда $\Delta d = 1 \times 10^{-9} \text{ см}$!

Поговорим о том, какого наилучшего результата можно достичь в измерениях малых перемещений. Есть замечательный проект поиска гравитационных волн внеземного происхождения, для того, чтобы иметь возможность регистрировать гравитационные волны, необходимо иметь очень чувствительный датчик перемещений. Детекторы первого поколения как раз основывались на емкостных датчиках. Предельная точность измерения смещения определяется флуктуациями в контуре. Если единственный источник флуктуаций — тепловые флуктуации напряжения, то минимальное смещение определяется формулой:

$$\Delta d \cong \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{k_B T}{W \tau}},$$

где k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, W — мощность, рассеиваемая в контуре. К сожалению, эти эксперименты не дали результата, и эффективным оказался переход от радиофизики к оптике. Для резонатора типа Фабри-Перо имеем:

$$\Delta d \cong \frac{\lambda}{F} \sqrt{\frac{h \omega}{2 \pi W \tau}} \approx \frac{\lambda}{F} \frac{1}{\sqrt{N}},$$

где $F = \frac{\pi}{1-R}$ — резкость, W — мощность, N — число использованных фотонов, R — коэффициент отражения зеркала, $\frac{\lambda}{F} \approx \frac{10^{-4} \text{ см}}{10^6} \approx 10^{-10} \text{ см}$. При коэффициенте отражения

близком к единице фактор $1 - R$ оказывается порядка 10^{-6} , таким образом, можно достичь очень малого значения Δd . Для регистрации гравитационных волн необходимо иметь $\Delta d \cong 10^{-19}$ см за $\tau \sim 10^{-3}$ сек.

Связанные системы

Продолжим рассматривать линейные системы. Если обычный колебательный контур – эта система с одной колебательной степенью свободы, то два колебательных контура, объединенные, например, с помощью индуктивной связи, имеют уже несколько степеней свободы, в нашем случае две (рис. 3.1).

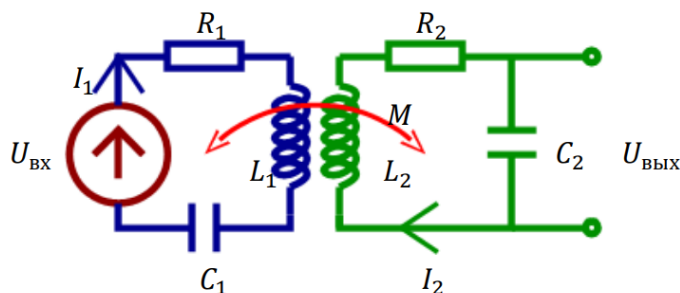


Рис. 3.1. Схема двух связанных контуров.

Входным сигналом для такой системы будет источник напряжения, включенный последовательно в левый контур, выходной сигнал снимается с конденсатора в правом контуре. Запишем дифференциальные уравнения:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + \int \frac{I_1}{C_1} dt + M \frac{dI_2}{dt} = U_{\text{вх}}(t),$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + \int \frac{I_2}{C_2} dt + M \frac{dI_1}{dt} = 0,$$

где M – коэффициент взаимной индукции. Для простоты будем считать, что источник создает гармонические колебания $U_{\text{вх}}(t) = U_0 e^{i\omega t}$, и будем рассматривать установившийся процесс. Тогда заменяем $\frac{dI_1}{dt} \rightarrow i\omega$, $\int dt \rightarrow \frac{1}{i\omega}$ и получаем:

$$I_1 \left(i\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \right) + i\omega M I_2 = U_0,$$

$$I_2 \left(i\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right) + i\omega M I_1 = 0,$$

$$L_1 \omega_{01} I_1 \left(\frac{R_1}{L_1 \omega_{01}} + i \left[\frac{\omega}{\omega_{01}} - \frac{\omega_{01}}{\omega} \right] \right) + i\omega M I_2 = U_0, \quad (3.1)$$

$$L_2 \omega_{02} I_2 \left(\frac{R_2}{L_2 \omega_{02}} + i \left[\frac{\omega}{\omega_{02}} - \frac{\omega_{02}}{\omega} \right] \right) + i\omega M I_1 = 0. \quad (3.2)$$

Ограничимся рассмотрением простого случая, когда контуры одинаковые:

$$L_1 = L_2 = L,$$

$$C_1 = C_2 = C,$$

$$R_1 = R_2 = R.$$

Введем обозначения $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$, $\delta = \frac{R}{\omega_0 L}$, $K = \frac{M}{L} \frac{\omega}{\omega_0}$. Тогда, разделив уравнения (3.1) и (3.2) на $\omega_0 L$, перепишем их в более компактном виде:

$$(\delta + i\zeta)I_1 + iKI_2 = \frac{U_0}{\omega_0 L}, \quad (3.3)$$

$$iKI_1 + (\delta + i\zeta)I_2 = 0. \quad (3.4)$$

Далее выполним следующую комбинацию этих уравнений:

$$(3.3) \times iK - (3.4) \times (\delta + i\zeta),$$

откуда

$$0 - (K^2 + (\delta + i\zeta)^2)I_2 = \frac{iKU_0}{\omega_0 L},$$

выходное напряжение и коэффициент передачи:

$$U_{\text{вых}}(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{i\omega C} = -\frac{U_0 K \frac{\omega_0}{\omega}}{K^2 + (\delta + i\zeta)^2},$$

$$K(\omega) = -\frac{K\omega_0}{\omega \sqrt{(K^2 + \delta^2 - \zeta^2)^2 + 4\delta^2 \zeta^2}}.$$

У коэффициента передачи $|K(\omega)|$ может быть один ($K < \delta$) или три экстремума ($K > \delta$): $\zeta_1 = 0, \zeta_{2,3}^2 = K^2 - \delta^2$, где $\delta = \frac{1}{Q}$. При очень слабой связи контуров мы практически не заметим расщепления, кривая будет похожа на кривую одиночного контура. Если мы увеличиваем связь, зависимость $|K(\omega)|$ начнет сначала уплощаться сверху, и в процессе дальнейшего увеличения связи между контурами появится провал (рис 3.2). Комбинация нескольких контуров дает полосовой фильтр, то есть систему, которая пропускает некоторую полосу частот и не пропускает сигналы с частотами вне этой полосы. Ширина полосы и крутизна фронтов зависят от числа и параметров использованных контуров. Если колебательные контуры отличаются друг от друга, то один из экстремумов будет выше.

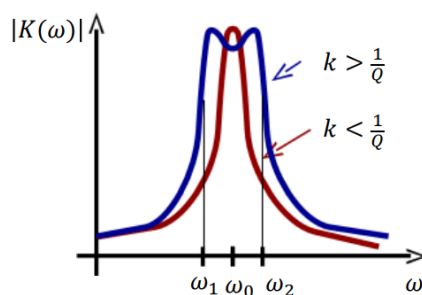


Рис. 3.2. Коэффициент передачи двух связанных контуров.

Трансформатор

Трансформатор удобно считать вырожденным случаем системы связанных колебательных контуров, в которых нет емкостей (рис. 3.3). В электротехнике трансформатор представляет собой устройство для увеличения или уменьшения

переменного напряжения, в радиофизике он также используется для согласования нагрузок.

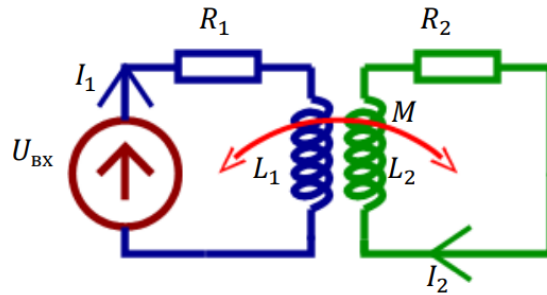


Рис. 3.3. Схема трансформатора.

Снова будем считать, что наш источник является источником гармонических колебаний $U_{\text{вх}}(t) = U_0 e^{i\omega t}$. Записываем систему из двух уравнений:

$$(i\omega L_1 + R_1)I_1 - i\omega M I_2 = U_0, \quad (3.5)$$

$$-i\omega M I_1 + (i\omega L_2 + R_2)I_2 = 0. \quad (3.6)$$

Потребуем выполнение условия идеальной трансформации (вся энергия передается нагрузке, то есть сопротивлению во втором контуре:

1. Коэффициент взаимной индукции M максимален: $M^2 \cong L_1 L_2$.
2. Индуктивное сопротивление в первом контуре значительно больше активного: $R_1 \ll \omega L_1$.
3. Аналогично для второго контура: $R_2 \ll \omega L_2$.

Тогда из (3.6) получаем:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{i\omega M}{i\omega L_2 + R_2} \cong \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{U_{L_2}}{U_{L_1}} = \frac{I_2 i\omega L_2}{I_1 i\omega L_1} \cong n, n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1},$$

мы ввели величину n , которая называется коэффициентом трансформации, $N_{1,2}$ – число витков катушек.

Честно решим систему уравнений (3.5), (3.6), учитывая условия идеальной трансформации:

$$D = (i\omega L_1 + R_1)(i\omega L_2 + R_2) + M^2 \omega^2 = \omega^2(M^2 - L_1 L_2) + i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1) + R_1 R_2 \cong i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1),$$

$$\Delta_1 = U_0(i\omega L_2 + R_2) \cong i\omega L_2 U_0,$$

$$\Delta_2 = i\omega M U_0,$$

наконец выражения для токов:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{D} \cong \frac{L_2 U_0}{L_1 R_2 + L_2 R_1} = \frac{U_0}{\frac{R_2}{n^2} + R_1},$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{D} \cong \frac{M U_0}{L_1 R_2 + L_2 R_1} = \frac{\frac{M U_0}{L_1}}{\frac{L_2 R_1}{L_1} + R_2} = \frac{n U_0}{R_2 + n^2 R_1}.$$

Из этих выражений следует, что трансформатор на рис. 3.3 может быть представлен двумя эквивалентными схемами, изображенными на рис. 3.4. Можно сказать, что схема слева «приведена к выходу» – она показывает, какой эквивалентный генератор действует во вторичной цепи с сопротивлением R_2 . Схему справа можно назвать «приведенной ко входу» – по ней видно, как сопротивление R_2 пересчитывается в эквивалентное сопротивление в первичной цепи генератора U_0 .

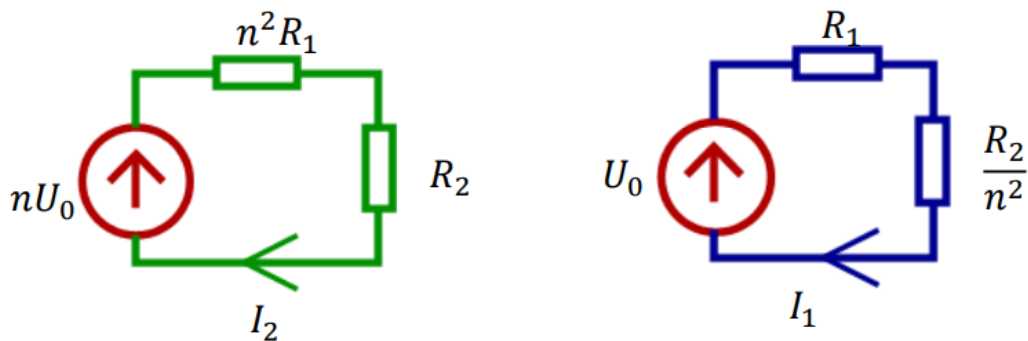


Рис. 3.4. Две эквивалентные схемы трансформатора.

Можно выписать выражения для мощности во вторичной цепи, соответствующие двум эквивалентным схемам – «приведенной к выходу» и «приведенной ко входу»:

$$P_2 = \frac{I_2^2 R_2}{2} \cong \frac{(n U_0)^2 R_2}{2(R_2 + n^2 R_1)^2},$$

$$P_2 = \frac{U_0^2 \frac{R_2}{n^2}}{2 \left(\frac{R_2}{n^2} + R_1 \right)^2}.$$

Распределенные системы. Длинные линии

До сих пор мы рассматривали системы с сосредоточенными параметрами, то есть любой характерный размер системы был много меньше длины волны, соответствующей тем колебаниям, которые могут возникать в этой системе. Теперь мы поговорим о распределенных системах и будем рассматривать, так называемые, длинные линии (рис. 3.5), это такие электрические системы, для которых выполняется условие поперечной квазистационарности, то есть если мы сделаем мгновенную поперечную фотографию этой системы, то распределение электрических и магнитных полей будет такое, как если бы в ней протекал постоянный ток. На практике длинную линий можно представить как два провода (рис. 3.6), расстояние между которыми

$\Delta d \ll \lambda$, а продольная длина $l \gg \lambda$. Это приведет к тому, что электромагнитные волны распространяются только вдоль проводников, а не уносятся в окружающее пространство. Такая двухпроводная линия используется для канализации электромагнитных волн, если необходимо передать электромагнитный сигнал высокой частоты на большое расстояние.



Рис. 3.5. Примеры длинных линий.

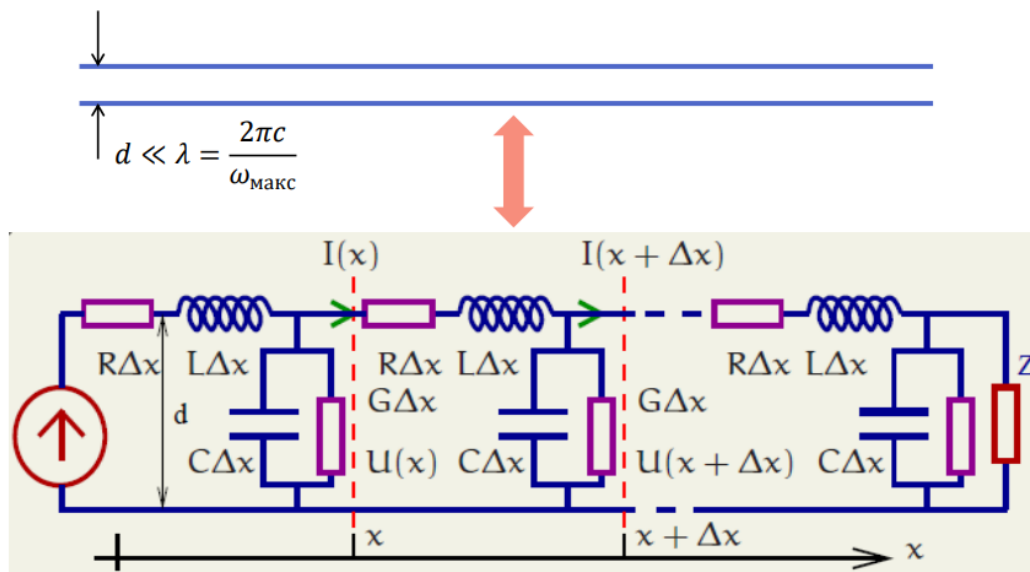


Рис. 3.6. Модель длинной линии.

Давайте разберемся, как можно математически описать распространение волн в длинной линии. Для этого используется модель (рис. 3.6), состоящая из обычных сосредоточенных элементов, с той лишь разницей, что они являются погонными, то есть приведенными к единице длины линии: L [Гн/см], C [Ф/см], R [Ом/см], G [См/см]. Мысленно разбив нашу линию на части, можем выбрать два сечения, отстоящие друг от друга на одну элементарную ячейку Δx , и оценить количество заряда, который оседает на этой ячейке за единицу времени:

$$\begin{aligned} I(x, t) &= I(x + \Delta x, t) + C \Delta x \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + G \Delta x U(x, t), \\ -\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} &= C \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + GU(x, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Аналогично, изменение напряжения:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U(x + \Delta x, t) + L \Delta x \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R \Delta x I(x, t), \\ -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} &= L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + RI(x, t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.7), (3.8) называют телеграфными уравнениями или «уравнениями телеграфистов», они описывают распространение волн в длинной линии. Продедем следующее преобразование $L \frac{\partial}{\partial t} (3.7) - \frac{\partial}{\partial x} (3.8)$ и получим:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + GL \partial_t U(x, t) + R \partial_x I(x, t).$$

Давайте рассмотрим идеальную линию, в которой $R = 0, G = 0$. Тогда волновое уравнение выглядит совсем просто:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}.$$

Решение можно записать в виде двух волн, одна из которых бежит «вперед»:

$$\begin{aligned} U_+(x, t) &= F(t - x\sqrt{LC}) = F(t - x/v_0), \\ I_+(x, t) &= \sqrt{\frac{C}{L}} \times F(t - x\sqrt{LC}) = \frac{U_+(x, t)}{\rho}, \end{aligned}$$

а другая – «назад»:

$$\begin{aligned} U_-(x, t) &= F(t + x\sqrt{LC}) = F(t + x/v_0), \\ I_-(x, t) &= -\sqrt{\frac{C}{L}} \times F(t + x\sqrt{LC}) = -\frac{U_-(x, t)}{\rho}, \end{aligned}$$

здесь $v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – скорость волны, $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – волновое сопротивление. Напомним, что L и C – это погонные параметры модели. Таким образом, волновое сопротивление не зависит от длины линии, оно зависит от расстояния между проводниками, диаметра проводников, их магнитных свойств и диэлектрика между ними.

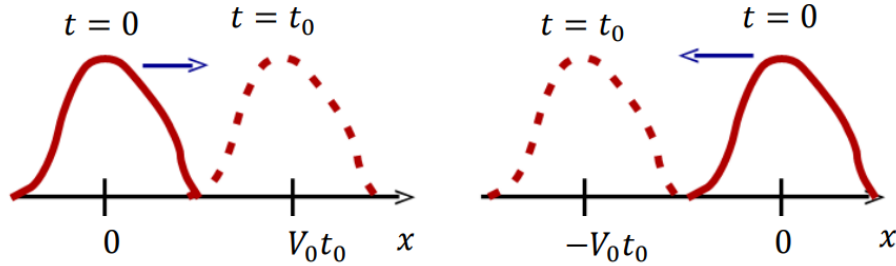


Рис. 3.7. Волны, бегущие «вперед» и «назад».

Мощность можно найти по формуле:

$$W = (U_+ + U_-)(I_+ + I_-) = (U_+ + U_-) \frac{(U_+ - U_-)}{\rho} = \frac{U_+^2}{\rho} - \frac{U_-^2}{\rho}.$$

Рассмотрим отражение от нагруженного конца линии (рис. 3.8). Будем рассматривать гармонические колебания, записывая напряжения и токи в комплексной форме, т.е. $U, I \sim e^{i\omega t}$. Тогда напряжение и ток записываются в виде волн, бегущих «вперед» и «назад»:

$$U(x) = U_+ e^{-ikx} + U_- e^{ikx},$$

где $k = \frac{\omega}{v_0}$ – волновое число. Из телеграфного уравнения (3.8) следует, что

$$i\omega L I(x) = ikU_+ e^{-ikx} - ikU_- e^{ikx},$$

$$I(x) = \frac{1}{\rho} (U_+ e^{-ikx} - U_- e^{ikx}).$$

Можно построить отношение напряжения к току в точке $x = 0$, это и будет сопротивление Z_H :

$$\frac{U(0)}{I(0)} = \rho \frac{U_+ + U_-}{U_+ - U_-} = Z_H,$$

откуда следует:

$$\frac{U_-}{U_+} = \frac{Z_H - \rho}{Z_H + \rho}.$$

Теперь становится понятной причина, по которой в длинной линии возникают волны, бегущие в обратном направлении. Источник генерирует волну, которая бежит «вперед», эта волна достигает точки, где заканчивается линия и находится сосредоточенная нагрузка. Далее, в зависимости от соотношения Z_H и ρ , какая-то часть энергии уходит в тепло, какая-то часть отражается. Отраженная волна как раз и будет волной, которая бежит «назад». Рассмотрим некоторые интересные частные случаи:

1. Если $Z_H = \rho$, то $U_- = 0$, и вся мощность поглощается нагрузкой:

$$W = \left\langle \frac{U_+^2}{\rho} \right\rangle = \frac{|U_+|^2}{2\rho}, W_- = 0.$$

2. Если $Z_H = 0$, то $U_- = -U_+$, и мощность не поглощается: $W_+ + W_- = 0$.
3. Если $Z_H = \infty$, то $U_- = U_+$, и мощность не поглощается: $W_+ + W_- = 0$.

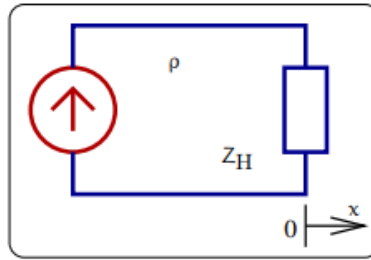


Рис. 3.8. К задаче об отражении от конца линии, нагруженной на элемент Z_H .

Предположим теперь, что сопротивление нагрузки имеет некоторую произвольную величину, и зададимся вопросом о том, какое сопротивление будет иметь вся эта система: линия и нагрузка (рис. 3.9). Пусть генератор создает волну с комплексной амплитудой $U_+ = U_+(0)$, которая распространяется вправо, тогда

$$U_+(l) = U_+(0)e^{-ikl}.$$

Введем коэффициент отражения $k_{\text{отр}} = \frac{Z-\rho}{Z+\rho} \equiv \frac{U_-(l)}{U_+(l)}$, появится отраженная волна:

$$U_-(l) = k_{\text{отр}} U_+(l),$$

$$U_-(0) = U_-(l)e^{-ikl} = k_{\text{отр}} U_+(l)e^{-2ikl}.$$

Наконец сопротивление системы можем записать в виде:

$$Z_{\text{вх}} \equiv \frac{U_+(0) + U_-(0)}{I_+(0) - I_-(0)} = \frac{U_+(0) + U_-(0)}{U_+(0) - U_-(0)} \rho = \frac{1 - k_{\text{отр}} e^{-2ikl}}{1 + k_{\text{отр}} e^{-2ikl}} \rho.$$

Рассмотрим частные случаи:

1. «Полуволновая шайба»: $l = n \frac{\lambda}{2} \rightarrow Z_{\text{вх}} = Z_H$.
2. Четвертьволновый трансформатор: $l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \rightarrow Z_{\text{вх}} = \frac{\rho^2}{Z_H}$.

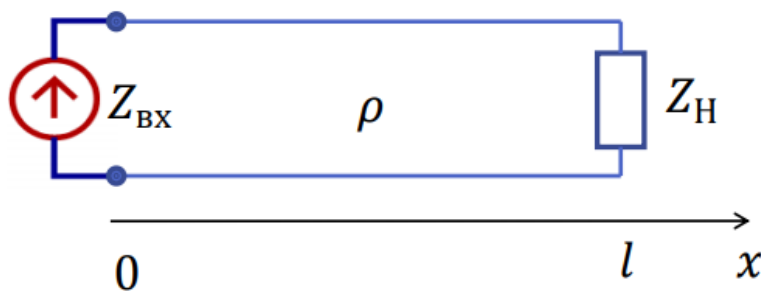


Рис. 3.9. К задаче об определении сопротивления системы.

ЛЕКЦИЯ 4. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

Входное сопротивление длинной линии с нагрузкой

На прошлой лекции мы с вами рассматривали подкласс распределенных колебательных систем, который называется длинными линиями. Простейший вариант реализации длинной линии – это два проводника, расстояние между которыми много меньше длины волны. Длина проводников может быть произвольной. Мы получили телеграфные уравнение, волновое уравнение и рассмотрели основные свойства длинных линий.

Мы остановились на расчете входного сопротивления длинной линии, нагруженной на сопротивление. Напомню, у нас есть отрезок длинной линии длиной l , в точке с координатой $x = 0$ находится источник колебаний. Мы рассматриваем гармонические волны, идеальную линию, в которой нет потерь, и установившийся режим, то есть времени с момента включения источника прошло достаточно для того, чтобы волна достигла нагрузки и, отразившись, вернулась обратно. Генератор порождает волну в прямом направлении:

$$U_{\Gamma} = U_{+}(0),$$

которая, достигая конца линии, не испытывает затухания, но приобретает фазовый сдвиг:

$$U_{+}(l) = U_{+}(0)e^{-ikl}.$$

В точке с координатой $x = l$ происходит отражение, амплитуда отраженной волны:

$$U_{-}(l) = k_{\text{отр}} U_{+}(l).$$

Отраженная волна движется в обратном направлении, приобретая фазовый сдвиг:

$$U_{-}(0) = U_{-}(l)e^{-ikl} = k_{\text{отр}} U_{+}(l)e^{-2ikl}.$$

Искомое сопротивление системы можем записать в виде:

$$Z_{\text{вх}} \equiv \frac{U_{+}(0) + U_{-}(0)}{I_{+}(0) - I_{-}(0)} = \frac{U_{+}(0) + U_{-}(0)}{U_{+}(0) - U_{-}(0)} \rho = \frac{1 - k_{\text{отр}} e^{-2ikl}}{1 + k_{\text{отр}} e^{-2ikl}} \rho.$$

Рассмотрим частные случаи:

1. $k_{\text{отр}} = 0 \rightarrow Z_{\text{вх}} = Z_H$
2. $k_{\text{отр}} = 1 \rightarrow Z_{\text{вх}} = -i\rho \operatorname{ctg}(kl)$
3. $k_{\text{отр}} = -1 \rightarrow Z_{\text{вх}} = i\rho \operatorname{ctg}(kl)$
4. «Полуволновая шайба»: $l = n \frac{\lambda}{2} \rightarrow Z_{\text{вх}} = Z_H$
5. Четвертьволновый трансформатор: $l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \rightarrow Z_{\text{вх}} = \frac{\rho^2}{Z_H}$. Этот случай важен тем, что отрезок $\frac{\lambda}{4}$ позволяет преобразовывать одно комплексное сопротивление в другое, например, если нам нужно соединить между собой две

линии с различными сопротивлениями, то достаточно включить между ними четвертьволновый отрезок еще одной линии с $\rho_T = \sqrt{\rho_1 \rho_2}$ (рис. 4.1).

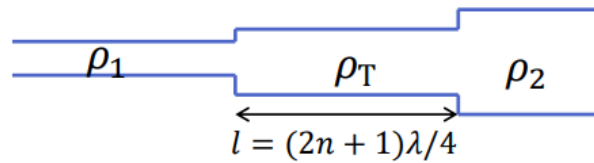


Рис. 4.1. Соединение между собой двух линий с различными сопротивлениями.

При рассмотрении согласования линий используют параметр, который называется коэффициентом стоячей волны КСВ (VSWR):

$$\text{VSWR} = \frac{1 - k_{\text{отр}}}{1 + k_{\text{отр}}}.$$

Всегда стараются минимизировать коэффициент стоячей волны, идеальный КСВ равен единице. Если Z_H — действительная величина, то

$$\text{VSWR} = \left(\frac{Z_H}{\rho}\right)^{\pm 1},$$

где знак в степени выбирается так, чтобы $\text{VSWR} > 1$.

Длинные линии с потерями

К сожалению, реальные линии всегда обладают потерями, то есть $G, R \neq 0$. Будем рассматривать в таких линиях гармонические волны $U = U(x)e^{i\omega t}$, $I = I(x)e^{i\omega t}$. Телеграфные уравнения (3.7) и (3.8) примут вид:

$$-\partial_x I(x) = (i\omega C + G)U(x), \quad (4.1)$$

$$-\partial_x U(x) = (i\omega L + R)I(x). \quad (4.2)$$

Возьмем производную $\partial_x(4.2)$, подставим в (4.1) и получим:

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 U(x) = 0,$$

где $\gamma^2 = (i\omega L + R)(i\omega C + G)$ — постоянная распространения.

В случае малых потерь ($R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$) постоянная распространения преобразуется:

$$\gamma^2 \cong -\omega^2 LC \left(1 - \frac{i\omega(LG + CR)}{\omega^2 LC}\right),$$

$$\gamma \cong -i\omega\sqrt{LC} \left(1 - \frac{i(LG + CR)}{2\omega LC}\right) \cong \pm \frac{i\omega}{v_0} \pm \frac{1}{2} \left(G\rho + \frac{R}{\rho}\right).$$

Таким образом, мы получили две постоянные распространения, соответственно, для волны в «прямом» и «обратном» направлении:

$$\gamma_+ \cong -ik - \delta,$$

$$\gamma_- \cong ik + \delta,$$

где $k = \frac{i\omega}{v_0}$, $\delta = \frac{1}{2} \left(G\rho + \frac{R}{\rho} \right)$. В результате для напряжения получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} U(x) &= U_+(x) + U_-(x), \\ U_+(x) &= U_+ e^{i\omega t} e^{(-ik-\delta)x}, \\ U_-(x) &= U_- e^{i\omega t} e^{(ik+\delta)x}. \end{aligned}$$

Помимо длинных линий, конечно, существуют и другие распределенные колебательные системы. Часто используются различные виды волноводов, заметим, что в них может не выполняться условие квазистационарности, то есть возможно существование различных мод колебаний. Самый простой вариант – это прямоугольный металлический волновод (рис. 4.2). Существует также диэлектрический волновод, в котором отражение происходит за счет эффекта полного внутреннего отражения (рис. 4.3). Диэлектрические волноводы могут быть одномодовыми или многомодовыми.

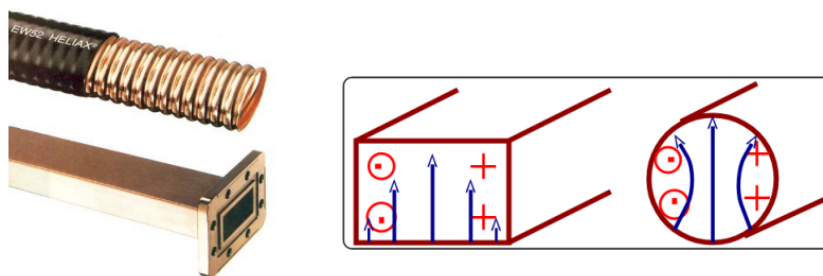


Рис. 4.2. Полые металлические волноводы.

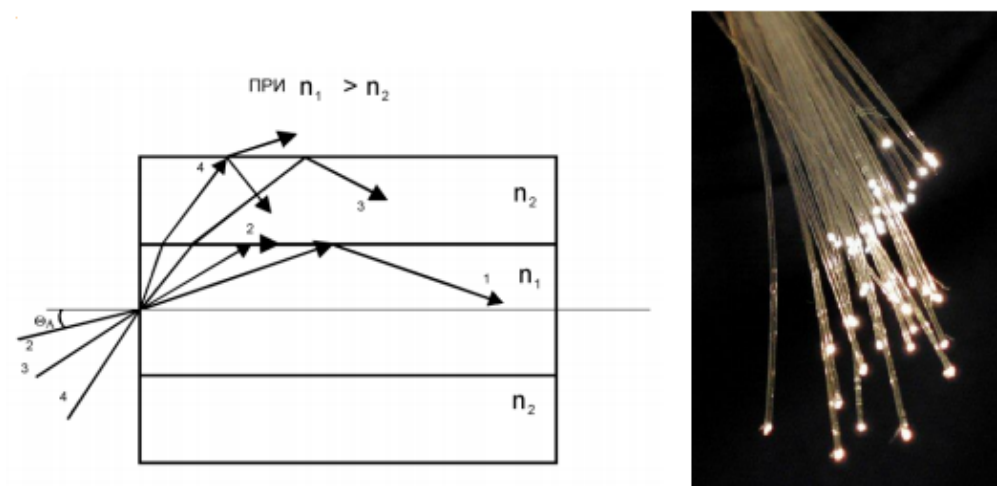


Рис. 4.3. Диэлектрические волноводы.

Излучающие системы

Задача излучения электромагнитных волн переменными токами решается точно в рамках электродинамики, мы же с вами в курсе радиофизики познакомимся только с основами. Первым, о чем мы поговорим, будет простейшая излучающая или приемная антенна – полуволновый диполь (рис. 4.4). Он представляет собой простой провод, длина которого равна или примерно равна половине длины волны. Мы уже упоминали ранее, что четвертьволновый отрезок $\frac{\lambda}{4}$ трансформирует сопротивление по формуле $\frac{\rho^2}{Z_H}$. Представим, что этот отрезок подключен к линии. Если на конце его ничего нет, то это означает, что сопротивление $Z_H = \infty$, следовательно, сопротивление на входе $Z_{вх}$ должно быть равно нулю. Теперь мысленно раздвигаем половинки отрезка в разные стороны, это уже не будет длинной линией, потому что элементы токов, которые раньше находились рядом и компенсировали друг друга, теперь оказываются далеко друг от друга, и создаваемое ими излучение в дальней зоне складывается, образуя убегающую волну. Таким образом, вся энергия волны, которая бежит из линии, будет излучаться в пространство, отражения не будет. Более того, отсутствие реактивной составляющей приводит к тому, что входное сопротивление нашего диполя – это чисто активная величина, честный электродинамический расчет дает величину 73 Ома. Также можно заметить, что такой диполь по своим свойствам похож на колебательный контур. Мы помним, что параллельный колебательный контур на резонансной частоте имеет чисто активное сопротивление. Так и здесь, если мы будем изменять частоту (длину волны) падающего сигнала, и частота окажется ниже резонансной (длина волны – больше), то сопротивление будет иметь емкостной характер. И наоборот, если длина волны будет меньше, то есть диполь длиннее, чем нужно для точного согласования, то появится индуктивная составляющая в сопротивлении нагрузки, появится отраженная волна.

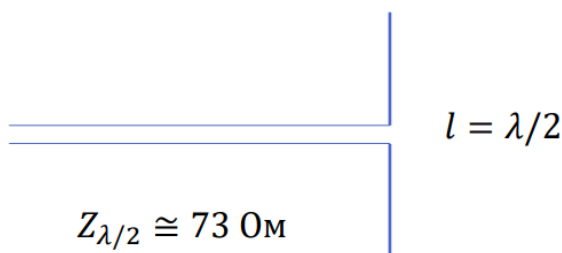


Рис. 4.4. Полуволновый диполь.

Антенны характеризуют диаграммой направленности – это график интенсивности излучения в зависимости от направления, строится в полярных координатах. Идеальный диполь имеет диаграмму направленности в виде восьмерки: он практически ничего не излучает вдоль своей оси, а перпендикулярно оси интенсивность излучения максимальная (рис. 4.5).

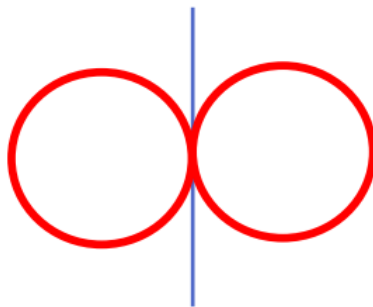


Рис. 4.5. Диаграмма направленности.

Примером дипольной антенны являются антенны сотрудников спецслужб, носимые радиостанции. Диапазон, в котором используются такие радиостанции составляет $130 \div 140$ МГц, если перевести в длины волн, то это получается около трех метров. Пол волны от трех метров есть полтора метра, крайне неудобно было бы ходить с такой антенной, поэтому используют прием, позволяющий механически укоротить антенну, при этом сохранив электрическую длину в $\frac{\lambda}{2}$. Это можно сделать, если включить последовательно с плечами диполя катушки индуктивности, которые будут электрически удлинять антенну. Но не стоит обольщаться, чем меньше мы делаем физическую длину антенны, тем меньше ее эффективность. Иногда такую антенну называют четвертьволновым излучателем.

Дипольная антенна хороша тем, что она излучает во всех направлениях с точностью до своей диаграммы направленности. Но здесь следует принимать во внимание следующий факт, если где-то поблизости от излучателя есть проводники, излучаемая волна будет создавать в них токи, которые, в свою очередь, будут создавать электромагнитные волны, а эти волны будут создавать внутри диполя дополнительные токи, фаза которых не совпадает с исходной, а зависит от проводника. Интерференция всех этих волн приводит к тому, что на практике крайне трудно получить абсолютный ноль в каком-либо направлении, таким образом, реальная диаграмма направленности имеет сложную форму.

Тем не менее на практике хотелось бы излучать энергию и принимать электромагнитные волны с какого-то конкретного направления. Во-первых, можно разместить сзади от диполя по отношению к желаемому направлению излучения рефлектор (рис. 4.6). Лучше всего поставить отражающую поверхность форме параболы так, чтобы диполь находился в ее фокусе. Тогда волна, излучаемая диполем, будет преобразована рефлектором в почти плоскую волну, направляющуюся вдоль оси этой параболы. Надо учитывать, что всегда есть краевой эффект: на краях появятся уходящие волны, их интерференция приведет к расходимости, угол расходимости получаемой волны $\vartheta \cong \frac{\lambda}{D}$, где D — эффективный диаметр рефлектора. Поскольку есть принцип взаимности, то на приемном конце мы также можем поставить рефлектор,

который будет собирать волны с большей площадки, чем эффективная площадь диполя.

Можно грубо оценить энергию, которую получит приемник:

$$\Delta E = W_{\text{прием}} \tau = W_{\text{передат}} \times \frac{D_2^2}{\left(L \frac{\lambda}{D_1}\right)^2} \tau = W_{\text{передат}} \tau \times \left(\frac{D_1 D_2}{L \lambda}\right)^2.$$

где $W_{\text{передат}}$ — мощность передатчика.

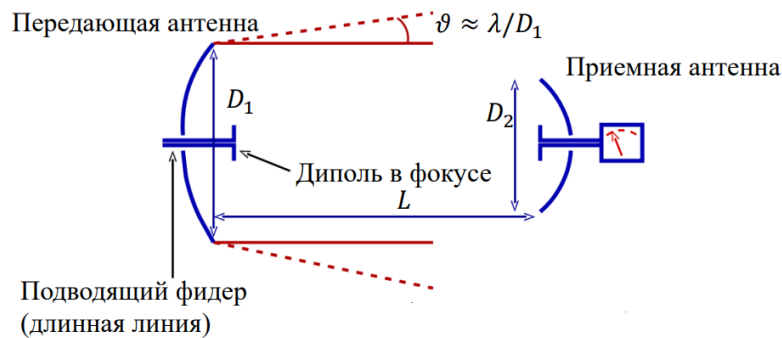


Рис. 4.6. Схема приема и передачи.

Есть и другие способы получать направленное излучение, или, наоборот, принимать сигналы с помощью антенны с конкретного направления. Рассмотрим два одинаковых диполя, находящиеся на расстоянии d друг от друга (рис. 4.7). Пусть каждый диполь в отдельности создает поле амплитуды a , разность фаз между диполями обозначим φ . Тогда на достаточно большом расстоянии два диполя создают в направлении, задаваемом углом θ , поле амплитуды A . Можем записать следующие выкладки:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta + \varphi,$$

$$a \cos \omega t + a \cos(\omega t + \Delta\varphi) = A \cos(\omega t + \dots),$$

для энергии, пропорциональна квадрату амплитуды, получим:

$$A^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cos \Delta\varphi = 4a^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 4a^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta + \frac{\varphi}{2} \right).$$

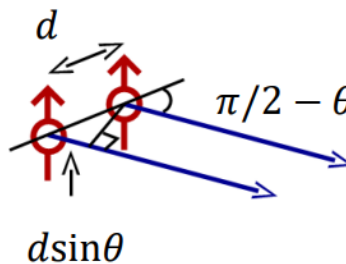


Рис. 4.7. Два диполя.

Предположим, что фазовый сдвиг подводимых волн отсутствует, то есть диполи когерентны ($\varphi = 0$). Тогда максимумы излучения будут иметь место при $\sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{d}$, где $m = 0, 1, 2 \dots$. На рис. 4.8. приведены диаграммы направленности в плоскости, перпендикулярной осям диполей. Первой строке соответствует случай, когда диполи возбуждаются когерентно, и сдвига фазы в подводимых к ним волнах нет. Во второй строке сдвиг фаз уже ненулевой, обратим внимание на случай, когда фазы диполей сдвинуты на $\frac{\pi}{2}$ — излучение направлено преимущественно в одну сторону. Эти диаграммы есть результат интерференции волн, создаваемых двумя источниками, в нашем случае это дипольные антенны. Заметим, что в радиофизике дипольная антенна обычно представляет собой полуволновый излучатель. Именно такой излучатель использовал своих опытах Герц, поэтому иногда полуволновые излучатели еще называют диполями Герца.

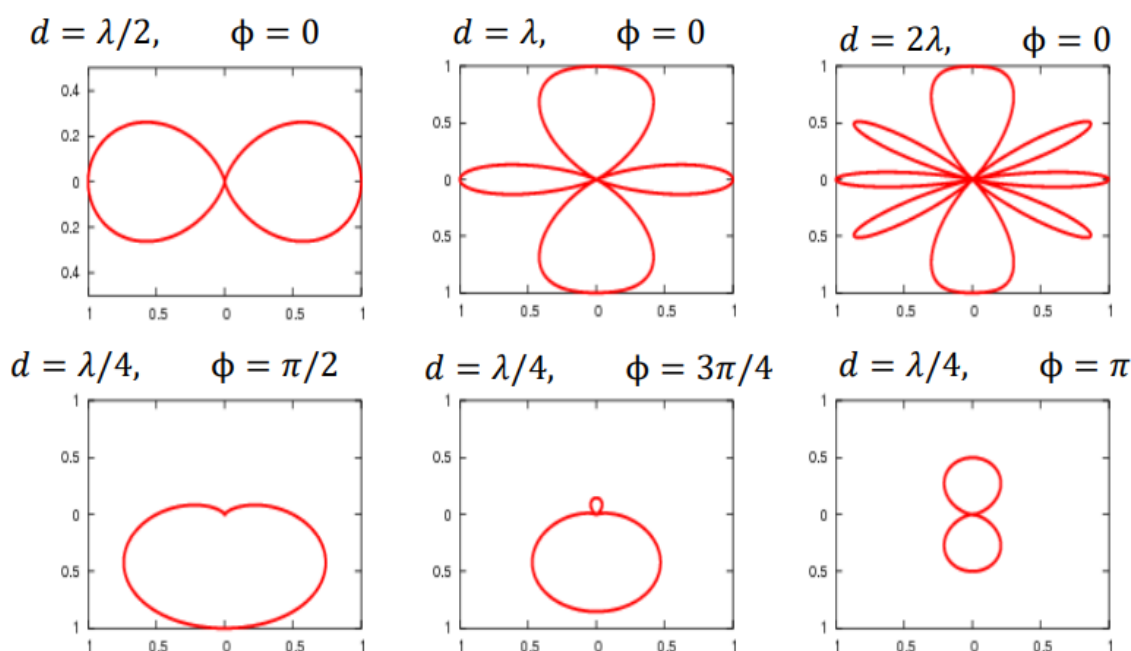


Рис. 4.8. Диаграммы направленности излучения двух диполей в плоскости, перпендикулярной осям диполей.

N когерентных диполей

Дальше можно двигаться по пути увеличения числа элементарных излучателей. Рассмотрим систему из $N \gg 1$ когерентно излучающих диполей, изображенную на рис. 4.9. Мы будем наблюдать узкие интерференционные максимумы, интенсивность A^2 суммарного излучения можно найти, воспользовавшись формулой:

$$A^2 = a^2 \frac{\sin^2 \left(N \left[\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta + \frac{\varphi}{2} \right] \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta + \frac{\varphi}{2} \right)}. \quad (4.3)$$

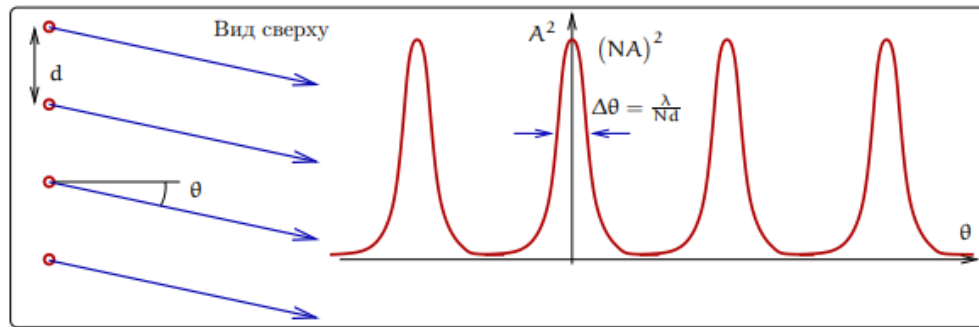


Рис. 4.9. N когерентно излучающих диполей дают лепестковую диаграмму направленности, аналогично дифракционной решетке в оптике.

Заметим, что если сделать расстояние между соседними диполями $d < \lambda/2$, то, поскольку это условие выполняется только для одного угла, диаграмма направленности будет иметь только один пик. Таким образом, изменяя фазы излучателей, мы можем управлять диаграммой направленности. Такие антенны используются на практике и называются фазированными решетками.

Все-таки приведем необходимые выкладки для получения формулы (4.3):

$$A^2 = a^2 \left| \sum_{n=0}^N e^{in(kd \sin \theta + \varphi)} \right|^2 = a^2 \left| \frac{1 - e^{iN(kd \sin \theta + \varphi)}}{1 - e^{i(kd \sin \theta + \varphi)}} \right|^2,$$

используя вспомогательную формулу

$$\begin{aligned} |1 - e^{i\alpha}|^2 &= |1 - \cos \alpha - i \sin \alpha|^2 = 1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2(1 - \cos \alpha) \\ &= 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

получим

$$A^2 = a^2 \frac{\sin^2(N(kd \sin \theta + \varphi)/2)}{\sin^2((kd \sin \theta + \varphi)/2)} = a^2 \frac{\sin^2\left(N \left[\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta + \frac{\varphi}{2} \right]\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

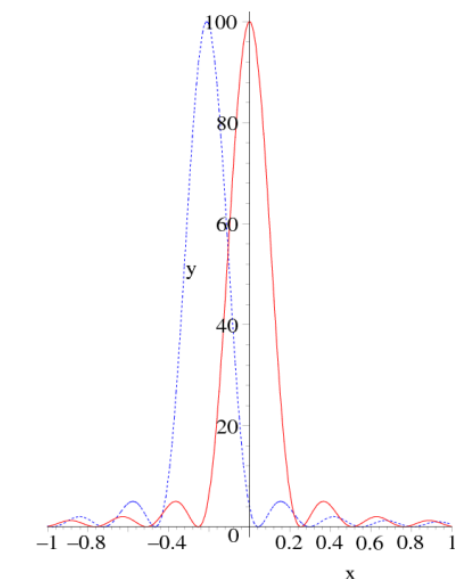


Рис. 4.10. Диаграмма направленности в случае $N = 10, d = \frac{\lambda}{4}, \varphi = 0$ (красный) и $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (синий).

Помимо фазированных антенн, конечно, можно использовать и другие. Существует, так называемая, антенна YAGI, она представляет собой несущую конструкцию, поперек которой закреплены проводники (рис. 4.11). Антенна названа по фамилиям японских ученых Синтаро Уда и Хидэцугу Яги (Уда со временем исчез из названия).



Рис. 4.11. Антенна YAGI.

Они предложили взять один диполь, который подключен к линии передачи, а рядом с ним разместить еще диполи. Мы знаем, что электромагнитная волна будет возбуждать в них токи, которые, в свою очередь, будут создавать электромагнитные волны. И разместим мы эти диполи так, чтобы все переизлучаемые волны складывались в фазе только для выбранного нами направления. Кроме того, мы будем играть их длинами и, таким образом, управлять сдвигом фазы между волной, возбуждающей колебания, и волной, излучаемой диполями.

Самой лучшей на сегодняшний день с точки зрения разрешающей способности антенной является система «Радиоастрон». Это успешный российский проект, базой

для его создания был астрокосмический центр ФИАН. Основой этого проекта является спутник, который находится на высокой эллиптической орбите (рис. 4.12), и, когда он находится в апогее, база в 300 тысяч километров между его антенной и любыми антеннами на Земле позволяет получить очень высокое угловое разрешение $\theta \sim 10$ мксек. Основные характеристики проекта «Радиоастрон» приведены на рис. 4.13. Проект получил сертификат Книги рекордов Гиннеса за самую большую антенну (10 метров), которая когда-либо была запущена в космос (рис. 4.14).

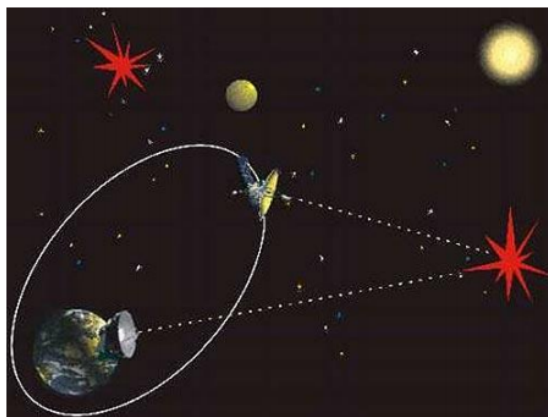


Рис. 4.12. Орбита спутника «Радиоастрон».



Рис. 4.13. Российская космическая обсерватория «Радиоастрон».

В Китае было завершено строительство радиотелескопа FAST с антенной площадью 500 м², такая большая площадь позволяет изучать слабые источники космического излучения. Недостаток такого телескопа заключается в том, что он может

смотреть только в одну точку, в будущем планируется сделать сегменты отражателя подвижными, тогда телескоп сможет просматривать до 30% небесной сферы.



Рис. 4.15. Телескоп FAST (Китай).

Поговорим об еще одном проекте, который называется SKA (Square Kilometre Array), и предполагает строительство отдельных антенн, работающих синфазно. На данный момент начато строительство первой очереди антенн, на рис. 4.16 представлена компьютерная симуляция.



Рис. 4.16. Телескоп SKA.

Нелинейные цепи

До сих пор мы с вами рассматривали линейные цепи, в которых параметры не меняются под действием сигналов, и сигналы распространяются независимо друг от друга. Нелинейные системы могут понадобиться, если нам нужно преобразовывать спектры сигналов, чего нельзя сделать в линейных системах. Стоит заметить, что, с одной стороны, любые линейные элементы при точном рассмотрении не являются линейными, и, наоборот, те цепи, которые для больших сигналов проявляют сильную нелинейность, для слабых сигналов при определенных условиях могут рассматриваться

как линейные. Простейшим примером нелинейного элемента является сопротивление, величина которого зависит от протекающего тока $R = R(I)$ – тепловая нелинейность.

Разберемся, как анализировать нелинейные системы. Разложим ток как функцию напряжения в ряд Тейлора вблизи точки $U = 0$:

$$I(t) = \alpha U(t) + \beta (U(t))^2 + \gamma (U(t))^3 + \dots,$$

где $\alpha = \frac{dI}{dU}$, $\beta = \frac{d^2 I}{2! dU^2}$, $\gamma = \frac{d^3 I}{3! dU^3}$. Пусть $U(t) = U_1 \cos \omega t$, тогда

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 + \alpha U_1 \cos \omega t + \beta U_1^2 \cos^2 \omega t + \gamma U_1^3 \cos^3 \omega t + \dots \\ &= I_0 + \frac{\beta U_1^2}{2} + \left(\alpha U_1 + \gamma \frac{3U_1^3}{4} \right) \cos \omega t + \frac{\beta U_1^2}{2} \cos 2\omega t + \gamma \frac{U_1^3}{4} \cos 3\omega t + \dots \end{aligned}$$

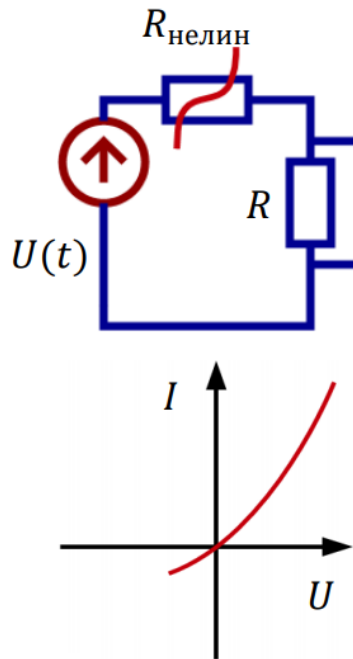


Рис. 4.17. Пример нелинейной цепи (сверху), ее вольтамперная характеристика (снизу).

С помощью дополнительного источника (рис. 4.18) мы можем выбрать рабочую точку U_0 , отличную от нуля:

$$I(t) = I_0 + \left. \frac{dI}{dU} \right|_{U_0} (U - U_0) + \frac{d^2 I}{2! dU^2} \bigg|_{U_0} (U - U_0)^2 + \frac{d^3 I}{3! dU^3} \bigg|_{U_0} (U - U_0)^3 + \dots$$

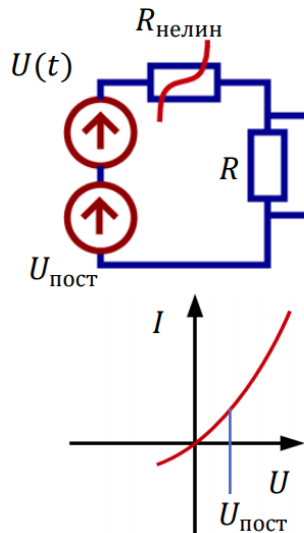


Рис. 4.18. Пример нелинейной цепи с дополнительным источником постоянного напряжения.

Рассмотрим устройство, так называемый, смеситель, который использует нелинейные цепи. Подадим на вход этой цепи сумму двух источников с $U_1(t) = U_1 \cos \omega_1 t$ и $U_2(t) = U_2 \cos \omega_2 t$. Ток представим в виде $I(t) = I_0 + \alpha U(t) + \beta (U(t))^2$, подставляя вместо $U(t)$ сумму напряжений $U_1(t)$ и $U_2(t)$, получим:

$$I(t) = I_0 + \alpha(U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t) + \beta \left(\frac{U_1^2 + U_2^2}{2} + \frac{U_1^2}{2} \cos 2\omega_1 t + \frac{U_2^2}{2} \cos 2\omega_2 t \right) + \beta U_1 U_2 (\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t).$$

Таким образом, спектр включает постоянный ток, он нам не интересен, вторую гармонику одной частоты $2\omega_1$, вторую гармонику другой частоты $2\omega_2$ и колебания на суммарной $(\omega_1 + \omega_2)$ и на разностной $(\omega_1 - \omega_2)$ частотах. На выходе с помощью фильтра можем выделить только разностную частоту.

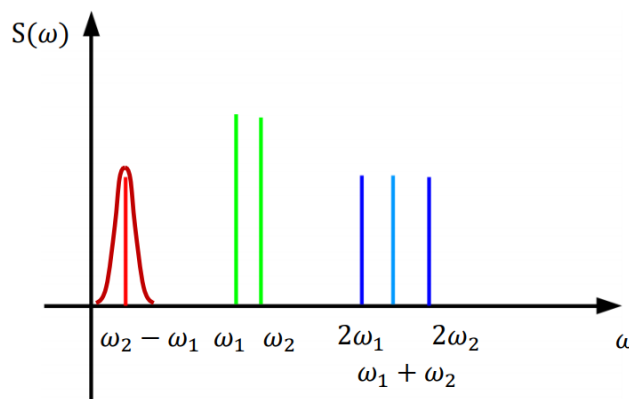


Рис. 4.19. Частотный спектр нелинейной цепи с дополнительным источником постоянного напряжения.

Смеситель используется, например, в технике радиосвязи, блок-схема радиоприемника-супергетеродина представлена на рис. 4.20, она соответствует практически любому аналоговому приемнику. Приемник содержит входной контур, который настраивается на частоту желаемого сигнала, но сигналы, создаваемые в колебательном контуре обычной антенной, очень слабы, и их необходимо усилить в $10^5 \div 10^7$ раз.

Для того, чтобы иметь возможность принимать различные частоты, а не одну единственную, все современные приёмники строят по схеме, так называемого, супергетеродина. Принципиальный подход при создании супергетеродина заключается в создании усилителя промежуточной частоты на одну единственную фиксированную частоту с большим коэффициентом усиления, а исследуемые частоты будем переносить на эту частоту с помощью смесителя. Для этого нам, правда, потребуется внутренний генератор или гетеродин, причем разность частот принимаемого сигнала и локального гетеродина должна равняться промежуточной частоте. На промежуточную частоту делаются фильтры. После такого усилителя уже ставится детектор, который уже позволяет получить низкие звуковые частоты, которые человек слышит и которые изначально были заложены в принимаемый сигнал посредством модуляции.

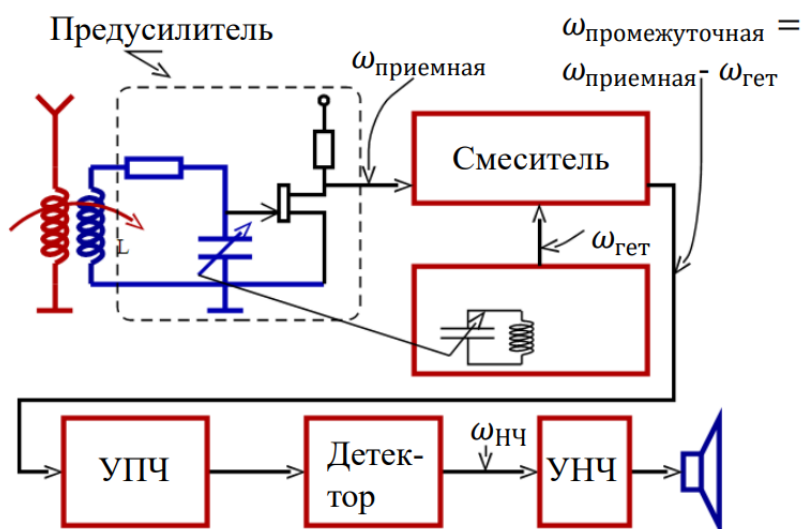


Рис. 4.20. Блок-схема радиоприемника-супергетеродина.

Поговорим о том, что же представляют из себя нелинейные элементы. Самый простой полупроводниковый нелинейный элемент – это диод. Мы будем рассматривать очень простую модель, которая не описывает многие интересные свойства. Диод представляет собой контакт двух полупроводников разных типов: р-типа и n-типа. В полупроводниках р-типа основными носителями являются дырки, а в полупроводниках n-типа – электроны. Электроны проникают через барьерную зону налево, дырки – на право, проникнув на противоположную сторону, они оказываются неосновными носителями, и создаваемое ими электрическое поле блокирует дальнейшее проникновение. Таким образом, в прибарьерной зоне всегда существует заряженный

слой. Если подключить к диоду внешний источник напряжения так, как указано на рис. 4.21 в случае $U_d > 0$, лишние электроны начнут уходить во внешнюю цепь, и энергетический барьер, который образовался после диффузии, станет ниже. Если же подключить источник в обратном направлении $U_d < 0$, то разность потенциалов вблизи барьерного слоя, наоборот, увеличится. При включении в прямом направлении сопротивление диода мало, а в обратном – большое.

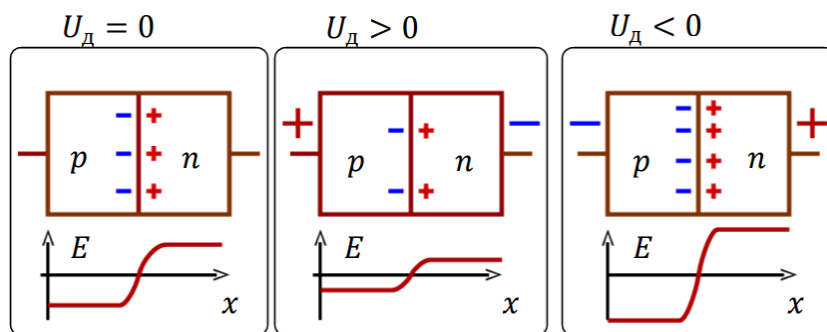


Рис. 4.21. Варианты подключения внешнего источника напряжения к диоду.

На рис. 4.22 представлена вольтамперная характеристика типичного диода. Если приложить достаточно большое обратное напряжение возникает пробой, ток резко увеличивается. Характерные величины для простого кремниевого диода:

$$U_{\text{прям}} \cong 0.5 \text{ В}, I_{\text{прям}} \cong 0.1 \text{ А}, R_{\text{дифф}} \cong 4 \text{ Ом}, C \cong 10^2 \text{ пкФ},$$

$$f = (RC)^{-1} \cong 10^{12} \text{ Гц} - \text{точечный } p - n \text{ переход},$$

$$f = (RC)^{-1} \cong 10^7 \text{ Гц} - \text{плоскостный } p - n \text{ переход}.$$

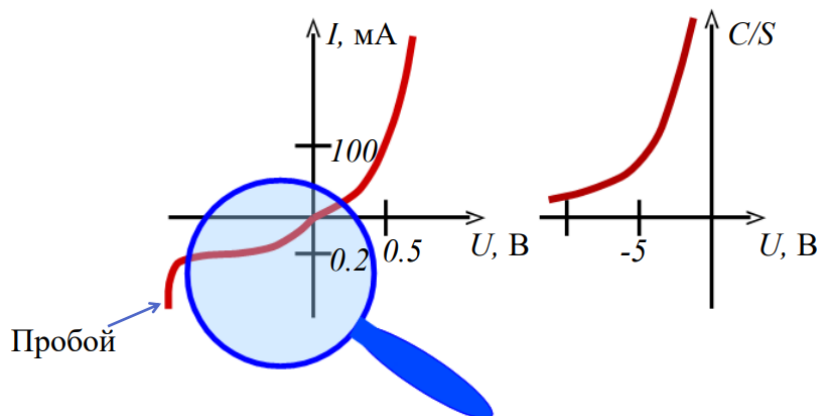


Рис. 4.22. Вольтамперная характеристика Ge-диода.

ЛЕКЦИЯ 5. МОДУЛЯЦИЯ

Совсем коротко вспомним из прошлой лекции, если мы рассматриваем цепь, в которой есть нелинейный элемент, то зависимость тока в цепи от приложенного напряжения удобно представлять в виде разложения в ряд Тейлора. Мы обнаружили, что, если на вход нелинейной цепи подается гармонический сигнал, то сигнал на выходе будет сложным и будет содержать гармоники входной частоты, таким образом, происходит обогащение спектра.

Мы также успели рассмотреть смеситель – это радиоэлектронное устройство, которое позволяет получать сигналы на комбинационных частотах, чаще всего на суммарной или на разностной частоте. Если изобразить модуль спектральной плотности этих колебаний (рис. 4.19), то кроме частот ω_1 и ω_2 мы увидим сумму, удвоенные частоты и разностную частоту. Удобно использовать смеситель, когда смешиваемые частоты близки, тогда разностная частота будет лежать достаточно далеко, и ее легко можно выделить с помощью какого-нибудь линейного фильтра.

Мы успели немного поговорить об устройстве диодов в самом простом приближении. Полупроводниковый диод как раз может быть тем самым нелинейным элементом, который позволяет осуществлять смещение сигналов (рис. 5.1). Кроме двух источников сигналов в цепь желательно включить еще источник постоянного напряжения, который бы вывел рабочую точку или средний ток через диод на ту часть вольтамперной характеристики, где квадратичный член принимает максимальное значение, тогда эффективность преобразования будет максимальной. В качестве линейного фильтра, который упоминался выше, можно использовать параллельный колебательный контур. Если этот контур имеет достаточную добротность, и его собственная резонансная частота равна, например, сумме частот ω_1 и ω_2 , то, как вы помните, на этой и только на этой частоте его полное сопротивление является действительной величиной, и его модуль – максимальный. Таким образом, напряжение на этом контуре будет максимально именно для суммарной частоты.

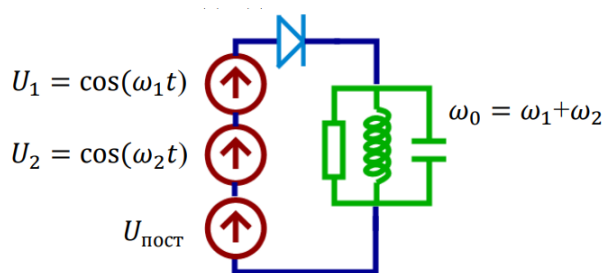


Рис. 5.1. Смеситель на диоде.

Все это можно использовать для модуляции сигналов и для последующего детектирования модулированных сигналов. Модуляция – это медленное по сравнению с периодом изменение параметров гармонического колебания. Параметром может быть амплитуда, фаза или частота. В качестве примера можно привести амплитудную модуляцию, осуществляемую с помощью ключа (рис. 5.2). Это случай модуляции

с глубиной сто процентов, или ее еще иногда называют манипуляцией.

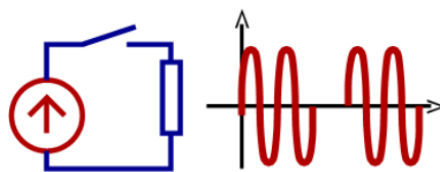


Рис. 5.2. Амплитудная модуляция с помощью ключа.

Аналогично, если у нас есть колебательный контур, то мы можем изменять его частоту, изменяя величину емкости или индуктивности (рис. 5.3).

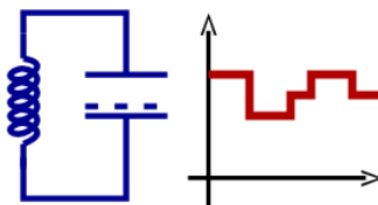


Рис. 5.3. Фазовая модуляция.

Амплитудная модуляция

Рассмотрим подробнее самую простую амплитудную модуляцию. В общем случае ее можно записать как произведение гармонического колебания на некоторую медленно меняющуюся (по сравнению с периодом) функцию времени:

$$U_{AM} = A_{slow}(t) \cos \omega_0 t. \quad (5.1)$$

В частном случае медленно меняющаяся амплитуда $A_{slow}(t)$ также представляет из себя гармоническое колебание:

$$A_{slow}(t) = A(1 + m \cos \Omega t), \quad (5.2)$$

где $\Omega \ll \omega_0$, и глубина модуляции $m < 1$. Подставляя (5.2) в (5.1), получим:

$$U_{AM} = A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{2} (\cos(\omega_0 + \Omega)t + \cos(\omega_0 - \Omega)t).$$

Таким образом, амплитудный спектр модулированного колебания содержит в этом простом случае три компоненты: несущую и две боковые, иногда в радиотехнике их называют верхняя боковая и нижняя боковая (рис. 5.4).

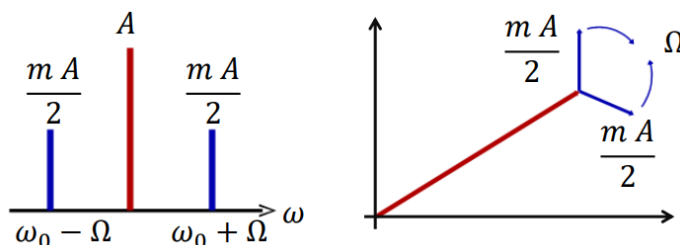


Рис. 5.4. Спектральные составляющие АМ сигнала (слева) и векторная диаграмма АМ сигнала (справа).

Амплитудную модуляцию можно также представить наглядно на фазовой диаграмме (рис. 5.4). Само колебание представляется вектором, который совершает вращение вокруг начала координат, период вращения равен периоду колебания. Для того, чтобы отобразить модуляцию, к несущему вектору добавим еще два вектора длиной $\frac{mA}{2}$. Они совершают вращение вокруг своего начала, которое совмещено с концом несущего вектора, причем вращаются навстречу таким образом, что проекция их суммы на направление вектора несущей изменяется с периодом $\frac{2\pi}{\Omega}$, а вот проекция на перпендикулярную ось все время равна нулю. В случае, если у нас более сложный модулирующий сигнал, можно, с одной стороны, разложить его в спектр и для каждой спектральной компоненты написать совершенно аналогичное уравнение. Но можно вспомнить свойства Фурье-преобразования, которое гласит, что при умножении сигнала на некоторое гармоническое колебание, спектр сигнала переносится вниз и вверх на частоту гармонического колебания (рис. 5.5):

$$U_{AM}(t) \leftrightarrow U_{AM}(\omega) = \delta(\omega) + \frac{A_{slow}(\omega - \Omega)}{2} + \frac{A_{slow}(\omega + \Omega)}{2}.$$

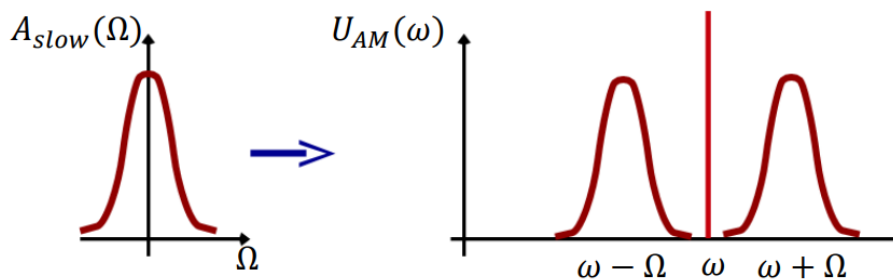


Рис. 5.5. Связь спектра огибающей и спектра АМ сигнала.

Фазовая модуляция

В общем случае фазовой модуляции мы просто берем дополнительное слагаемое под знаком косинуса и делаем его зависящим от времени:

$$U_{ФМ} = A \cos(\omega_0 t + \varphi_{slow}(t)), \quad (5.3)$$

$$\varphi_{slow}(t) = m \sin \Omega t, \quad (5.4)$$

где $\Omega \ll \omega_0$, опять же считаем, что фаза изменяется медленно. Подставляя (5.4) в (5.3), получим

$$U_{ФМ} = A \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = \text{Re}[Ae^{i\omega_0 t + im \sin \Omega t}],$$

учитывая, что

$$e^{im \sin \Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{ik\Omega t},$$

где $J_k(m)$ — функции Бесселя (рис. 5.6), $m \ll 2\pi$ — индекс модуляции, в итоге имеем

$$U_{\text{ФМ}} = \operatorname{Re} \left[A \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{i\omega_0 t + ik\Omega t} \right] = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos(\omega_0 t + k\Omega t).$$

Из рис. 5.6 следует, что, если индекс модуляции маленький, то большую амплитуду будет иметь только гармоническое колебание на частоте ω_0 ($k = 0$), члены с $k = \pm 1$ будут иметь какое-то небольшое значение, а остальными членами можно пренебречь. Учитывая вышесказанное, получим

$$\begin{aligned} U_{\text{ФМ}}^{m \ll 1} &\cong A(\cos \omega_0 t - \varphi_{\text{slow}}(t) \sin \omega_0 t) = A(\cos \omega_0 t - m \sin \Omega t \sin \omega_0 t) \\ &= A \left(\cos \omega_0 t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \right). \end{aligned}$$

Полученное выражение очень похоже на аналогичное для амплитудно-модулированного сигнала, лишь с разницей в знаке второго слагаемого (рис. 5.7).

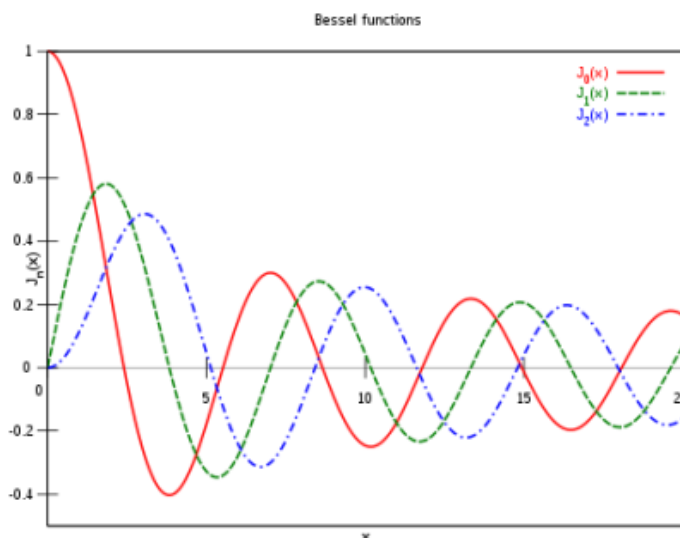


Рис. 5.6. Функции Бесселя 0-го, 1-го и 2-го порядка.

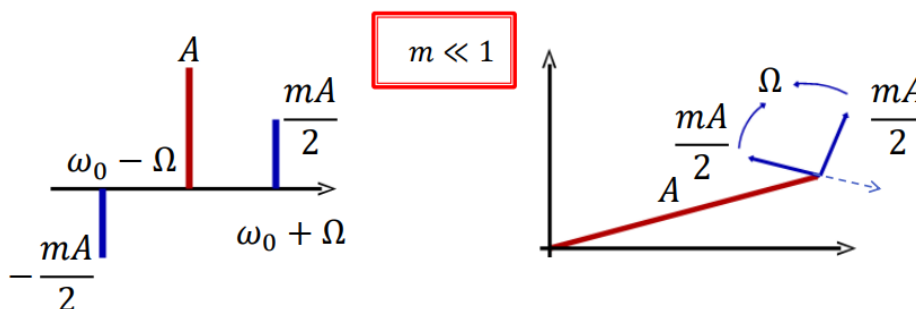


Рис. 5.7. Спектр ФМ сигнала в приближении $m \ll 1$ (слева) и его векторная диаграмма (справа).

На фазовой диаграмме на рис. 5.7 представлены: несущая частота – это вектор, который совершает оборот вокруг начала координат, и боковые компоненты, отвечающие за модуляцию, они движутся таким образом, что сумма их проекций на направление вектора несущей всегда равна нулю, но зато изменяется сумма их проекции на перпендикулярную ось.

Мы ранее считали индекс модуляции малым $m \ll 1$, однако это не обязательное условие, можно менять фазу и в более широких пределах. В этом случае появятся существенные, немалые по сравнению с компонентами 1-го порядка компоненты 2-го, 3-го и так далее порядков (рис. 5.8). Это существенно отличает фазово-модулированный сигнал от амплитудно-модулированного, где ничего подобного не было, а были только две боковые компоненты.

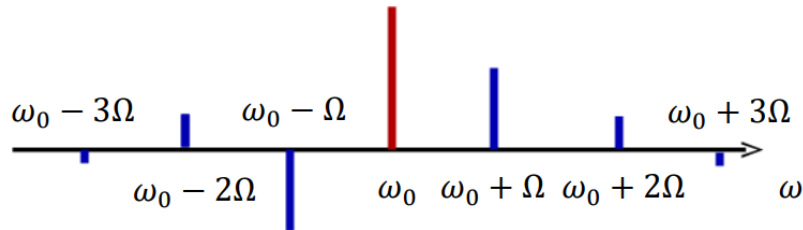


Рис. 5.8. Спектр ФМ сигнала при $m \cong 1$.

Частотная модуляция

Третий вид модуляции называется частотной модуляцией и получается, если мы делаем несущую частоту переменной с некоторой низкой частотой Ω :

$$U_{\text{ЧМ}} = A \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t \right) t + \varphi_0 \right].$$

Фазовая и частотная модуляции близки по своим свойствам, потому что мы можем представить себе частоту как интеграл от фазы:

$$U_{\text{ЧМ}} = A \cos \left[\int_0^t (1 + m \cos \Omega t) \omega_0 dt \right].$$

Разница между частотной и фазовой модуляциями проявляется тогда, когда у нас есть широкий спектр в модулирующем сигнале. Если, так называемый, индекс частотной модуляции $\frac{\Delta\omega}{\Omega} > 1$, то говорят о широкополосной частотной модуляции, если $\frac{\Delta\omega}{\Omega} < 1$, то об узкополосной частотной модуляции.

Если говорить о практических применениях, то в радиосвязи используются все виды модуляции. Например, отмирающее в настоящее время вещание на коротких волнах исторически использовало амплитудную модуляцию, потому что ее проще всего обрабатывать, детектировать в приемном устройстве. В УКВ ЧМ используется широкополосная частотная модуляция, это позволяет при достаточно высоком уровне сигнала осуществлять подавление шумов. И наконец в подвижной связи (стандарты принятые для спецслужб, охраны) используется либо амплитудная, либо узкополосная, фазовая модуляция.

Поговорим о том, как получить модулированный сигнал, нужен нелинейный элемент. Здесь мы только считаем, что колебания сильно отличаются по частоте в отличие от того рассмотрения, которое было для смесителя (рис. 5.9). Подадим на вход

этой цепи сумму двух источников с $V_1(t) = U_1 \cos \omega t$ и $V_2(t) = U_2 \cos \Omega t$, где $\Omega \ll \omega$. Ток представим в виде $I(t) = I_0 + S_1 U(t) + S_2 U^2(t)$, подставляя вместо $U(t)$ сумму напряжений $V_1(t)$ и $V_2(t)$, получим:

$$I(t) = I_0 + S_1(U_1 \cos \omega t + U_2 \cos \Omega t) + S_2 \left(\frac{U_1^2 + U_2^2}{2} + \frac{U_1^2}{2} \cos 2\omega t + \frac{U_2^2}{2} \cos 2\Omega t \right) + S_2 U_1 U_2 (\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t).$$

Для напряжения получим:

$$U_{\text{нагр}} \cong R_{\text{нагр}} [S_1(U_1 \sin \omega t + U_2 \sin \Omega t) + S_2(U_1^2 \sin^2 \omega t + U_2^2 \sin^2 \Omega t) + S_2 U_1 U_2 (\cos(\omega - \Omega)t - \cos(\omega + \Omega)t)].$$

После фильтрации по полосе $\omega \pm \Omega$ имеем:

$$U_{\text{нагр}} \cong R_{\text{нагр}} [S_1 U_1 \sin \omega t + S_2 U_1 U_2 (\cos(\omega - \Omega)t - \cos(\omega + \Omega)t)] = R_{\text{нагр}} [S_1 U_1 \sin \omega t + 2S_2 U_1 U_2 \sin \Omega t \sin \omega t].$$

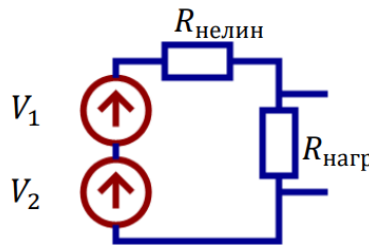


Рис. 5.9. Смеситель с нелинейным элементом.

Надо оговориться, что очень нелегко найти нелинейное устройство, вольтамперная характеристика которого была бы строго квадратичной, всегда присутствуют члены более высокого порядка $S_3 U^3 + S_4 U^4 + \dots$, их наличие приводит к искажениям сигнала:

$$\begin{aligned} S_3 \rightarrow (V_1 + V_2)^3 &\rightarrow 3V_1 V_2^2 = 3U_1 U_2^2 \sin \omega t \sin^2 \Omega t \\ &\rightarrow \frac{3U_1 U_2^2}{4} [\sin(\omega + 2\Omega)t + \sin(\omega - 2\Omega)t], \\ S_4 \rightarrow (V_1 + V_2)^4 &\rightarrow 4V_1 V_2^3 = 4U_1 U_2^3 \sin \omega t \sin^3 \Omega t \\ &\rightarrow \frac{U_1 U_2^3}{2} [\cos(\omega + 3\Omega)t + \cos(\omega - 3\Omega)t]. \end{aligned}$$

Если разность частот Ω и ω большая, то можно достаточно легко вырезать нужную полосу сигналов (рис. 5.10).

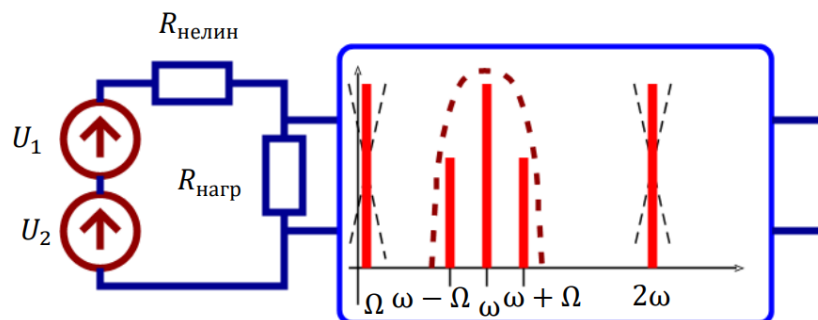


Рис. 5.10. Фильтрация модулированного сигнала по $\omega \pm \Omega$.

Задача «Емкостной микрофон».

Есть и другие способы получения модулированных сигналов, один из них представлен на рис. 5.11, условно можно назвать эту схему – «емкостной микрофон». У нас есть подвижная пластина конденсатора, которая может двигаться, например, под воздействием звуковых колебаний в воздухе, это приводит к тому, что со временем меняется емкость этого конденсатора:

$$C(t) = C_0(1 + m \cos \Omega t).$$

Очевидно, что если меняется емкость, то меняется и комплексное сопротивление конденсатора, и ток в этой цепи. Пусть источник производит гармонические колебания $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Будем считать изменение емкости малым по сравнению с ее средним значением, частота колебаний пластины конденсатора мала по сравнению с частотой источника. Мы хотим получить нечто похожее на амплитудную модуляцию. Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых это возможно, оценить амплитуду выходного сигнала и глубину модуляции.

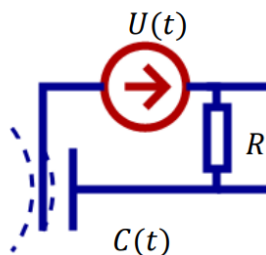


Рис. 5.11. «Емкостной микрофон».

Детектирование АМ сигнала

Рассмотрим способы детектирования амплитудно-модулированных сигналов. Поскольку детектирование – это процесс, обратный модуляции, также связанный с преобразованием спектра, то, очевидно, без нелинейного элемента в цепи не обойтись. На вход подаем наш амплитудно-модулированный сигнал

$$U_{\text{вх}}(t) = U_0(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t = U_0 \left(\sin \omega_0 t + \frac{m}{2} [\cos(\omega_0 - \Omega)t - \cos(\omega_0 + \Omega)t] \right),$$

снова считаем нелинейный элемент квадратичным

$$I \cong S_1 U + S_2 U^2.$$

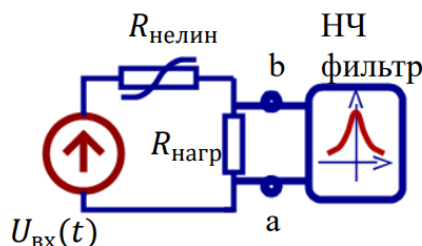


Рис. 5.12. Схема детектирования АМ сигнала.

Для простоты считаем, что в цепи есть еще обычное линейное сопротивление $R_{\text{нагр}}$, величина которого много меньше, чем у нелинейного $R_{\text{нелин}}$. Тогда ток в этой цепи определяется только входным напряжением и нелинейным сопротивлением. А напряжение на линейном сопротивлении как раз и будет выходным сигналом:

$$\begin{aligned} U_{ab}(t) &\cong R_{\text{нагр}} I = R_{\text{нагр}} (S_1 U + S_2 U^2 + \dots) \\ &= R_{\text{нагр}} S_1 U_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t + R_{\text{нагр}} S_2 U_0^2 (1 + m \sin \Omega t)^2 \sin^2 \omega_0 t \\ &+ \dots = S_1 \dots + R_{\text{нагр}} S_2 U_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} 2m \sin \Omega t + \dots \right), \\ U_{\text{после фильтра}}(t) &\cong S_2 U_0^2 m \sin \Omega t. \end{aligned}$$

После такого процесса детектирования с помощью квадратичного нелинейного элемента у нас останутся компоненты на исходных частотах, появятся на компоненты на удвоенной частоте и близкие к ней, и на частоте порядка Ω (рис. 5.13).

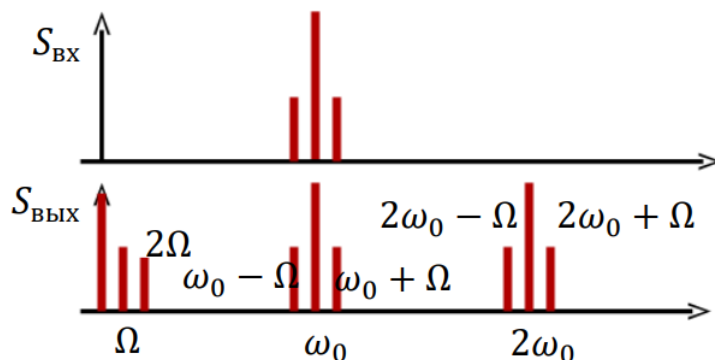


Рис. 5.13. Спектры входного и выходного сигналов.

В качестве нелинейного элемента очень часто используется полупроводниковый диод. Но прежде чем рассмотреть полупроводниковый диод как устройство для детектирования амплитудно-модулированных сигналов, хотелось бы немного поговорить о работе полупроводникового диода в качестве выпрямителя. Выпрямитель является неотъемлемым компонентом любого блока питания, он используется для того, чтобы преобразовать переменный сигнал в постоянный.

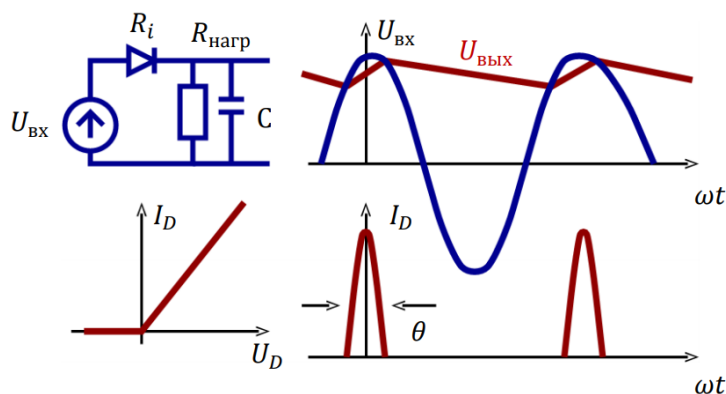


Рис. 5.14. Схема однополупериодного выпрямителя, зависимости входного и выходного напряжения и тока диода от времени, ВАХ диода.

В качестве нагрузки такого выпрямителя обычно используется RC-цепь, она нужна для того, чтобы сгладить пульсации входного напряжения. Первым же полупериодом входного напряжения конденсатор будет заряжен до напряжения близкого к пиковому значению амплитуды входного сигнала. Постоянная времени RC-цепочки всегда выбирается большей по сравнению с периодом колебания. На рис. 5.14 видно, что как только в процессе своего изменения входное напряжение станет равно или меньше, чем напряжение на конденсаторе, ток в цепи прекратится, поскольку к диоду будет приложено отрицательное напряжение. Угол θ на рис. 5.14 называется углом отсечки:

$$\tan \theta - \theta = \frac{\pi R_i}{R_{\text{нагр}}},$$

где R_i — дифференциальное сопротивление диода, учитывая $R_i \ll R_{\text{нагр}}$, получим:

$$\theta \cong \sqrt[3]{\frac{3\pi R_i}{R_{\text{нагр}}}}.$$

Возвращаясь к детектированию, оказывается, что такой простой прибор как выпрямитель может быть использован для детектирования амплитудно-модулированных сигналов в двух принципиально разных режимах. Первый режим называется квадратичным детектированием, этот случай уже был нами рассмотрен. На вход подается амплитудно-модулированный сигнал, желательно с дополнительным постоянным напряжением, которое смещает среднее значение сигнала от нуля так, чтобы весь сигнал приходился на квадратичный участок вольтамперной характеристики:

$$U_{\text{вх}} = U_{\text{пост}} + U_0(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Неявно предполагается, что размах изменения амплитудно-модулированного сигнала небольшой, по этой причине квадратичное детектирование еще часто называют режимом детектирования слабых сигналов.

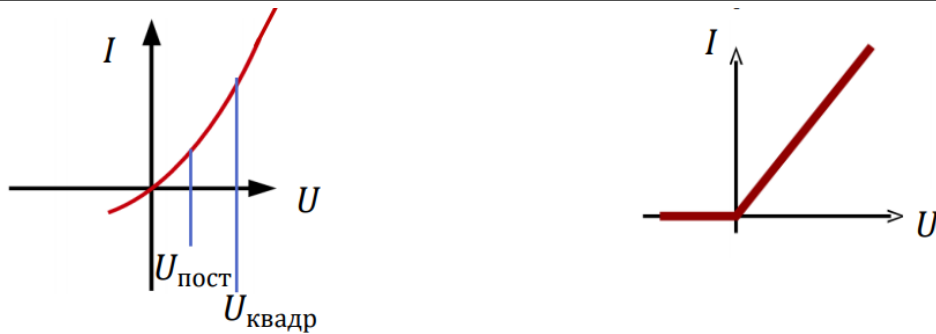


Рис. 5.15. Вольтамперные характеристики квадратичного детектирования (слева) и линейного (справа).

Второй режим носит название линейного детектирования, поскольку в нем используется кусочно-линейная аппроксимация вольтамперной характеристики диода. Это похоже на работу выпрямителя в случае, когда входной гармонический сигнал имеет медленно меняющуюся со временем амплитуду в том смысле, что его характерное время много больше, чем постоянная времени цепочки

$$U_{\text{вх}} = U_0(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Можно сформулировать следующие условия детектирования:

- $\omega R_{\text{нагр}} C \gg 1$ – фильтровать колебания на несущей частоте,
- $\Omega R_{\text{нагр}} C \ll 1$ – выделять огибающую.

Линейное детектирование еще называют детектированием больших сигналов, потому что для того, чтобы можно было пользоваться такой кусочно-линейной аппроксимацией, желательно, чтобы сигнал изменялся по амплитуде в больших пределах. Тогда особенностями нелинейности в характеристике можно будет пренебречь. Поскольку в вольтамперной характеристике мы имеем излом, это означает, что для ее описания нужно будет привлекать, вообще говоря, бесконечное число членов в разложении в ряд Тейлора, в реальности можно ограничиться конечным числом:

$$U_{\text{вых}}(t) \sim U_0 m \sin \Omega t + \text{члены с частотами } 2\Omega, 3\Omega, \dots$$

Фазовое детектирование

Поговорим о том, как можно выделить информацию из фазово-модулированного сигнала. Можно попробовать превратить фазово-модулированное колебание в амплитудно-модулированное. Вспомним фазовые диаграммы этих сигналов, они отличались тем, что маленькие вектора, которые на рис. 5.16 показаны красным цветом, имели нулевую проекцию либо на перпендикуляр несущему вектору в случае амплитудно-модулированного колебания, либо на сам этот вектор в случае фазово-модулированного колебания. Давайте сдвинем несущий вектор на четверть периода колебаний по фазе, то есть к исходному вектору просто линейно добавим некий опорный сигнал.

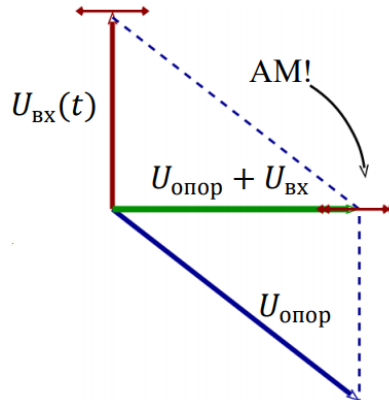


Рис. 5.16. Фазовая диаграмма, иллюстрирующая переход от ФМ сигнала к АМ сигналу. Опорное колебание должно быть на частоте несущей с определенным фазовым сдвигом. Пусть входной сигнал имеет вид

$$U_{\text{вх}}(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi(t)) = U_0 \cos \varphi \cos \omega t - U_0 \sin \varphi \sin \omega t.$$

Сложим его с опорным сигналом и получим:

$$\begin{aligned} U &= (U_0 \cos \varphi \cos \omega t - U_0 \sin \varphi \sin \omega t) + (-U_0 \cos \omega t - U_1 \sin \omega t) \\ &\cong U_0 \sin \varphi \sin \omega t - U_1 \sin \omega t - U_0(1 - \cos \varphi) \cos \omega t \\ &\cong -U_1 \left(1 + \frac{U_0 \varphi(t)}{U_1} \right) \sin \omega t \rightarrow \text{АМ сигнал.} \end{aligned}$$

Существуют и другие способы фазового детектирования, один из них это, так называемый, балансный фазовый детектор (рис. 5.17). Он содержит два детектора, которые по своей электрической схеме являются обычными амплитудными детекторами, зеркально расположенными по отношению друг другу относительно условной горизонтальной оси. Также в схеме есть источник опорного напряжения и трансформатор с тремя обмотками для того, чтобы подать один и тот же входной сигнал на верхний и нижний детектор в противоположных фазах.

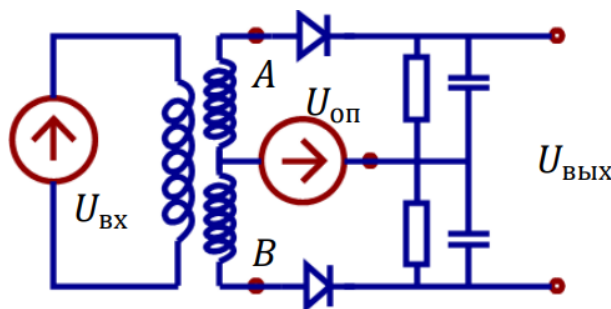


Рис. 5.17. Балансный фазовый детектор.

На вход каждого детектора подается сигнал:

$$\begin{aligned} U_{A0} &= U_{\text{оп}} - U_{\text{вх}}, \\ U_{B0} &= U_{\text{оп}} + U_{\text{вх}}, \\ U_{\text{оп}} &= U_1 \cos(\omega t + \theta), \end{aligned}$$

где θ – угол, соответствующий сдвигу фазы опорного колебания по отношению к несущей нашего сигнала. Пусть детекторы квадратичные, тогда на выходе имеем:

$$U_{\text{ВЫХ}} \sim (U_{\text{оп}} + U_{\text{ВХ}})^2 - (U_{\text{оп}} - U_{\text{ВХ}})^2 = 2U_{\text{оп}}U_{\text{ВХ}} = -U_0U_1 \cos(\theta - \varphi(t)) + \dots,$$

после фильтрации при $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$U_{\text{ВЫХ}} \sim -U_0U_1 \sin \varphi(t).$$

Эта схема пригодна не только для детектирования фазово-модулированных сигналов, она может детектировать и амплитудно-модулированный сигнал, это зависит от разности фаз опорного источника и несущей сигнала. Меняя фазу θ можно измерять любую квадратуру, то есть АМ, ФМ или их комбинацию:

$$U_{\text{ВХ}} = U_0(1 + \alpha(t)) \cos(\omega t + \varphi(t)),$$

$$U_{\text{оп}} = U_1 \cos(\omega t + \theta).$$

Тогда

$$U_{\text{ВЫХ}} \sim U_{\text{оп}}U_{\text{ВХ}} = U_0(1 + \alpha(t))U_1 \cos(\theta - \varphi(t)),$$

при $\theta = 0$: $U_{\text{ВЫХ}} \sim U_0U_1(1 + \alpha(t))$,

при $\theta = \frac{\pi}{2}$: $U_{\text{ВЫХ}} \sim U_0U_1(1 + \alpha(t)) \sin \varphi(t) \cong U_0U_1 \varphi(t)$,

при произвольном θ : $U_{\text{ВЫХ}} \sim U_0U_1(\cos \theta + \alpha(t) \cos \theta - \varphi(t) \sin \theta)$.

Еще один способ детектирования частотной модуляции заключается опять же в преобразовании ее в амплитудную с использованием какого-нибудь линейного элемента, у которого есть зависимость комплексного коэффициента передачи от частоты. Лучше всего в качестве такого элемента подходит высоко добротный колебательный контур. Графически представим себе, что частота сигнала, который подается на контур, во-первых, приходится на его склон, а, во-вторых, меняется со временем. Тогда будет меняться со временем и амплитуда колебаний в этом контуре, причем чем больше крутизна, тем больше это изменение амплитуды (рис. 5.18).

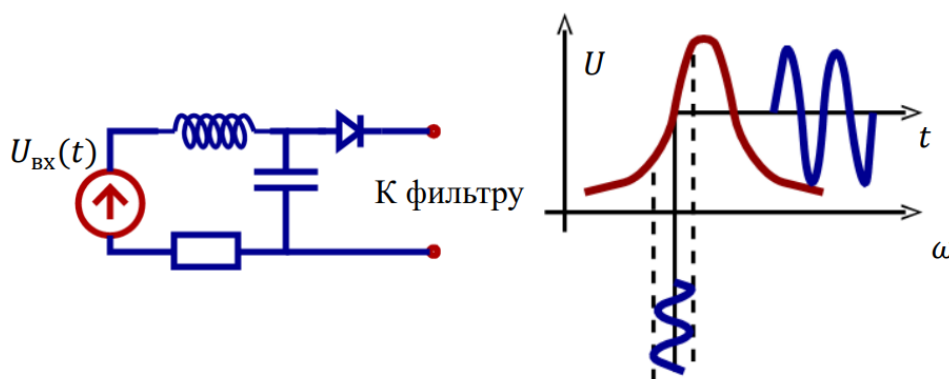


Рис. 5.18. Детектирование частотно-модулированного сигнала.

Задача «ЧМ в АМ».

Предлагается сформулировать условия для преобразования ЧМ сигнала

$$U(t) = U_0 \sin \left\{ \int_0^t (1 + m \cos \Omega t) \omega_0 dt \right\}$$

в АМ сигнал. Как должны быть связаны величины ω, Ω и m с частотой $\omega_{\text{рез}}$ и добротностью Q контура?

Синхронное детектирование

Если раньше мы использовали нелинейные элементы, то здесь мы используем элемент, который отличается тем, что величина его проводимости меняется со временем по некоторому закону

$$g(t) = g_0 + g_1 \cos(\omega t + \theta).$$

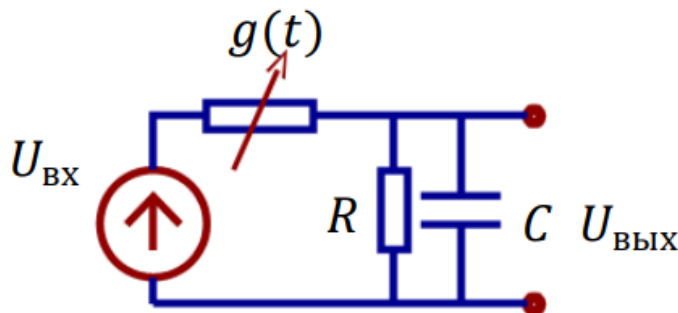


Рис. 5.19. Схема синхронного детектирования.

Если у меня есть входной сигнал

$$U_{\text{ВХ}} = U_m(t) \cos(\omega t + \varphi(t)),$$

то я возьму и буду изменять сопротивление в цепи с несущей частотой входного сигнала. Будем считать, что $R, \left| \frac{1}{i\omega C} \right| \ll \frac{1}{g}$. Тогда ток в цепи:

$$\begin{aligned} I(t) &\cong g(t)U_{\text{ВХ}}(t) \\ &= g_0 U_m(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) + \frac{g_1 U_m(t)}{2} \cos(2\omega t + \varphi(t) + \theta) \\ &\quad + \frac{g_1 U_m(t)}{2} \cos(\varphi(t) - \theta). \end{aligned}$$

Если положить $\theta = \frac{\pi}{2}$, то получим

$$I_{\text{НЧ}} = \frac{g_1 U_m(t)}{2} \sin \varphi(t),$$

если $\varphi(t)$ — малая величина, то это означает, что ток в цепи, а значит и напряжение на фильтре изменяется со временем по тому самому закону, по которому мы моделировали исходный сигнал.

Моделью синхронного детектора может выступать обычный выключатель, единственное, что включать и выключать нужно очень быстро, синхронно с колебаниями в цепи. Тогда у нас ток будет протекать только во время положительных

полупериодов входного сигнала, и все что нас осталось – это усреднить сигнал за время большое по сравнению с периодом колебаний, но малое по сравнению с характерным временем изменения его амплитуды.

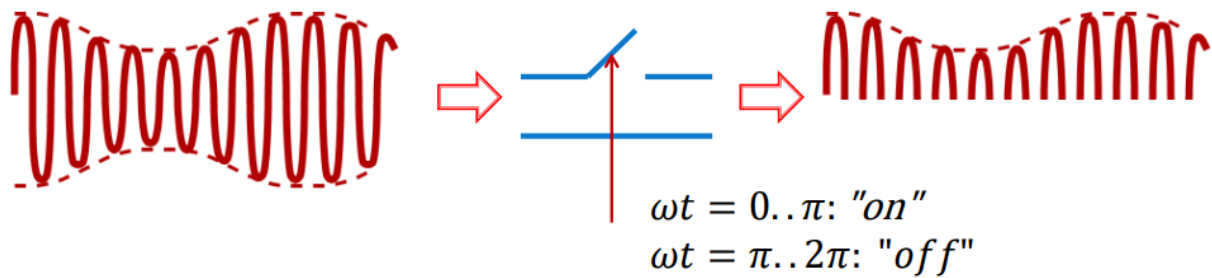


Рис. 5.20. Управляемый выключатель.

Нелинейный элемент, например, диод тоже может использоваться в синхронном детекторе, нужно только амплитуду опорного сигнала сделать много больше амплитуды входного сигнала.

ЛЕКЦИЯ 6. ПОЛУПРОВОДНИКИ

Модель слабой связи

В этой модели мы предполагаем, что в твердом теле существует электронный газ носителей заряда, это справедливо для металлов и в той или иной степени – для полупроводников. Рассматривая этот газ, можно говорить либо о слабой связи электронов с решеткой, когда электроны свободно распространяются через твердое тело, а их взаимодействие с решеткой – лишь малая поправка, либо о сильной связи, в этом случае электроны связаны со своими атомами, а возможность переходить от одного атома к другому является первой поправкой. Если рассмотреть, например, атом натрия как изолированный атом, то можно получить для него разрешенные энергетические уровни (рис. 6.1).

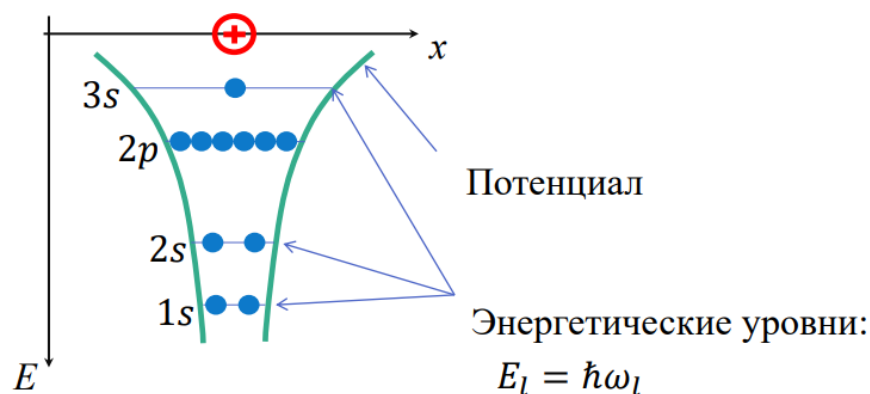


Рис. 6.1. Модель изолированного атома натрия – $Na(1s^2 2s^2 2p^6 3s)$.

Решение задачи об электроне в потенциальной яме приводит к тому, что к существованию уровней. На одном уровне может находиться только один электрон с заданным спином, а поскольку у электрона может быть два спина, то на одном уровне может находиться 2 электрона, если это уровень s -типа, или 6 электронов, если уровень p -типа, поскольку на нем есть еще различия по орбитальному числу. Верхний уровень в данном случае не заполнен.

Если у нас формируется кристалл – твердое тело, состоящее из одинаковых атомов, последние размещаются на расстоянии друг от друга, которое определяется минимумом потенциальной энергии. При этом электрические поля, создаваемые соседями, естественно перекрываются, то есть на электроны действует не только поле собственного атома, но и поля соседей. Это перекрытие приводит к снятию вырождения по энергии, то есть у нас получается уже не один энергетический уровень, соответствующий каждому состоянию, а очень много. Расстояние между этими энергетическими уровнями очень маленькое, поскольку их много, и это расстояние тем больше, чем выше находится уровень.

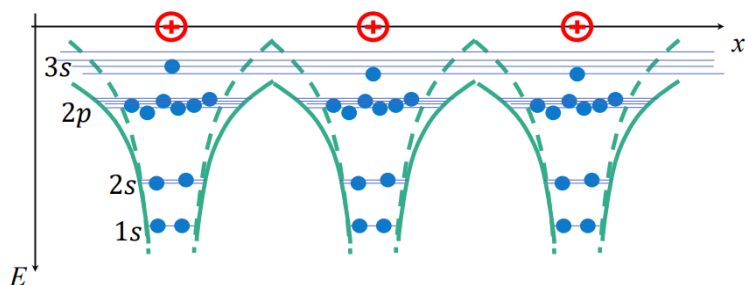


Рис. 6.2. Модель атомов в решетке.

Для снятия расщепления и образования нескольких энергетических уровней из одного существует прямая точная аналогия с радиофизической системой связанных колебательных контуров. Если у нас есть один колебательный контур, он имеет собственную частоту ω , которой соответствует энергия одного кванта $E = \frac{h}{2\pi} \omega$. Если же у нас два колебательных контура, между которыми есть связь, то у системы есть уже две частоты ω_+ и ω_- , а значит и две энергии $E_+ = \frac{h}{2\pi} \omega_+$ и $E_- = \frac{h}{2\pi} \omega_-$. Чем больше время перекачки энергии между колебательными контурами, тем меньше расщепление частот. Аналогично, чем больше время жизни на определенном уровне, тем более узкой будет линия, соответствующая переходу с этого уровня или на этот уровень.

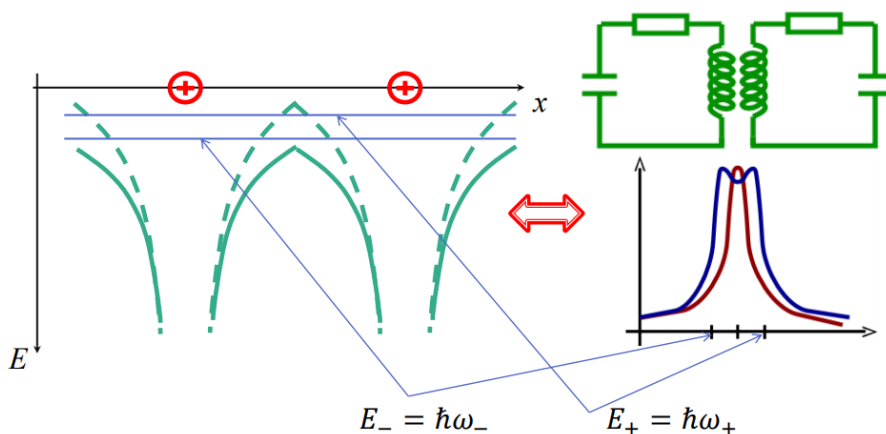


Рис. 6.3. Аналогия с радиофизикой.

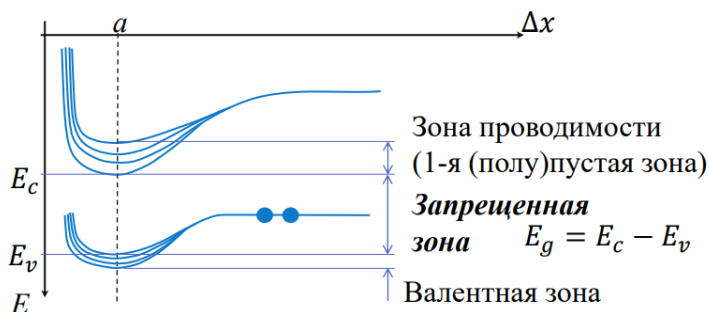


Рис. 6.4. Зависимость энергии от расстояния между атомами.

На рис. 6.4. представлена зависимость энергии от расстояния между атомами. Расстояние a — это как раз и есть то среднее расстояние, которое наблюдается в кристаллической решетке данного типа. Каждый уровень расщепляется на множество уровней и образует зону, глубоко лежащие уровни расщепляются в узкие зоны, высоко лежащие — в широкие зоны. Последнюю снизу заполненную зону называют валентной, а следующую за ней пустую или полупустую называют зоной проводимости. В связи с этим можно привести классификацию твердых тел в зависимости от строения зоны или от их электронных свойств:

1. Проводники
 - а. валентная зона заполнена не полностью
 - б. есть перекрытие зон
2. Изоляторы — валентная зона заполнена, и зона проводимости лежит достаточно далеко ($E_g \gg kT \cong 1,5 \div 2\text{эВ}$)
3. Полупроводники — валентная зона заполнена ($E_g \sim kT$)

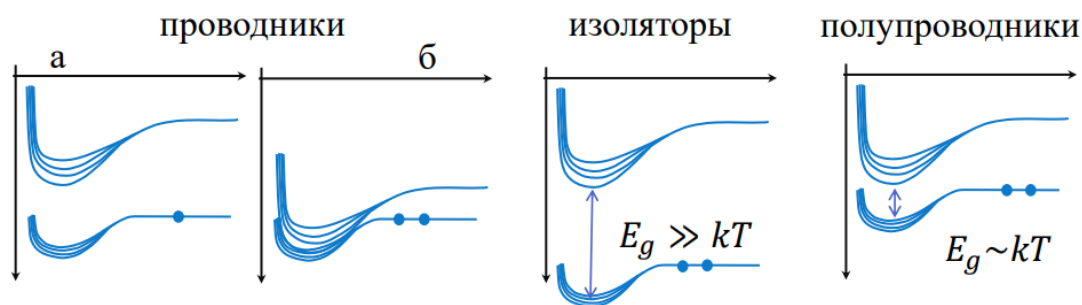


Рис. 6.5. Классификация твердых тел.

Если условие $E_g \gg kT$ не выполнено, то оказывается, что в отделенной запрещенной зоне проводимости при комнатной температуре находится некоторое небольшое число электронов. Этот электронный газ в отличие от случая классических металлов будет невырожденным, то есть концентрация электронов настолько мала, что они ведут себя как классический газ. Таким образом, не включаются в работу квантовые законы, которые вследствие принципа Паули заставляют электроны занимать уровни с очень высокими энергиями.

В квантовой механике распределение по энергиям для электронов должно описываться распределением Ферми:

$$f(E, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)},$$

где E_F — энергия Ферми, максимальная энергия частиц данного сорта при нулевой температуре. При нулевой температуре это распределение выглядит как простой прямоугольник, то есть все уровни ниже энергии Ферми заняты. При температуре, отличной от нуля, небольшая часть уровней ниже уровня Ферми оказывается

свободной за счет того, что электроны, которые их покидают, заняли уровни выше энергии Ферми. Именно эти электроны, их ещё называют активными электронами, и участвуют в процессах переноса заряда в металлах.

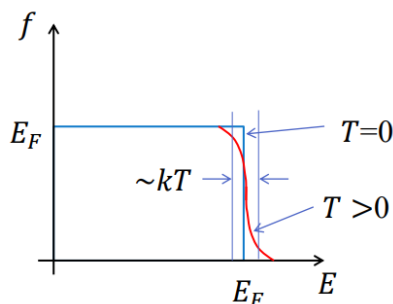


Рис. 6.6. Распределение Ферми по энергиям.

В случае полупроводника мы имеем классический электронный газ, образованный электронами, которые находятся возле дна зоны проводимости, аналогично появляется газ положительных зарядов, дырок. Носители отрицательного заряда (электроны) и носители положительного заряда (дырки) подчиняются распределению Больцмана для классического не вырожденного газа:

$$f(E, T) \cong -\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right).$$

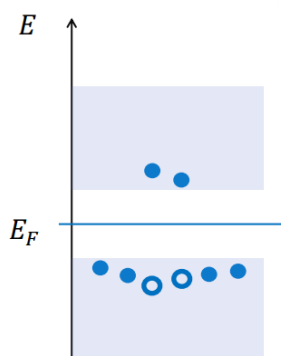


Рис. 6.7. Схематичное представление уровней полупроводника.

Можно управлять концентрацией носителей, изменяя таким образом проводимость полупроводника, и собирать из них всевозможные радиоэлектронные устройства. Недостаток собственной проводимости, то есть той, которая появилась в результате термической активации, во-первых, связан с тем, что она очень сильно зависит от температуры, а, во-вторых, эта проводимость часто оказывается недостаточной и зависит от конкретного полупроводника. В технике практически всегда используют, так называемые, допированные материалы. Допирование – это добавление очень небольшой, обычно тысячной доли, концентрации вещества, которое совместимо с кристаллической решеткой матрицы основного полупроводника, но имеет другую валентность. Концентрация допирования, очевидно, определяет концентрацию носителей. Концентрация не собственных носителей всегда

существенно больше, чем концентрация собственных носителей при данной температуре, и слабо зависит от температуры.

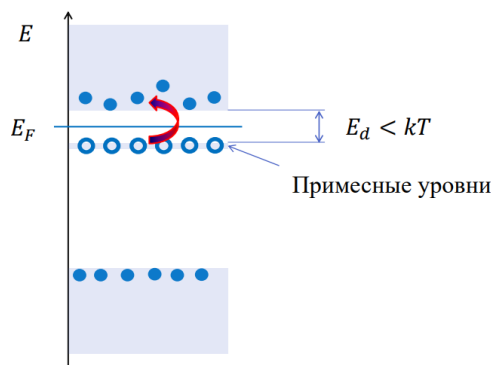


Рис. 6.8. Схема допирования.

Полупроводниковый диод

Возвращаясь к устройству полупроводникового диода, обычно берется контакт двух проводников, имеющих одинаковую запрещенную зону, то есть расстояние по энергии между потолком валентной зоны и дном зоны проводимости, допирование в этих полупроводниках осуществляется так, что один из них имеет проводимость р-типа, а другой – n-типа. Если мы приведем два таких полупроводника в контакт, то основные носители вблизи контакта будут проникать через него в соседнюю область и там аннигилировать с основными носителями уже той области, в которую они попали. В результате подвижных носителей у границы будет становиться меньше, а ионы примеси, которые никуда не делись и были до этого компенсированы по заряду подвижными носителями, создадут электрическое поле. Это электрическое поле называется запирающим, оно как раз и остановит поток основных носителей, установится термодинамическое равновесие.

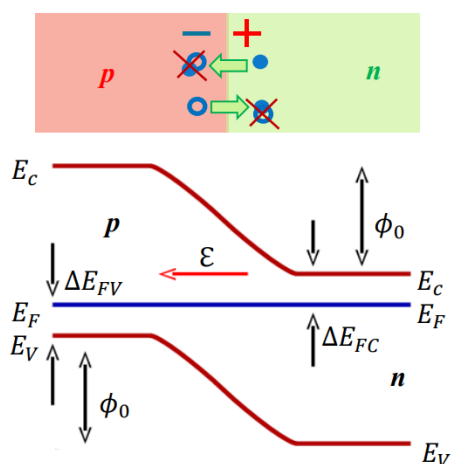


Рис. 6.9. Схема и энергетическая диаграмма p-n-перехода.

Разберемся, а что будет, если подключить к такому контакту внешний источник. Можно подключить его двумя способами. Если мы подключаем обратное напряжение,

то есть плюс – к области n-типа, то создаваемое источником электрическое поле сложится с запирающим, и величина барьера станет еще выше. Ток при этом может протекать только за счет диффузии неосновных носителей через этот барьер, в этом случае диод заперт. Ширина слоя, обедненного основными носителями, становится еще больше, становится меньше емкость p-n-перехода. Если внешней потенциал приложен в обратном направлении, то у нас электрические поля вычитаются, высота барьера понижается, и начинает протекать ток.

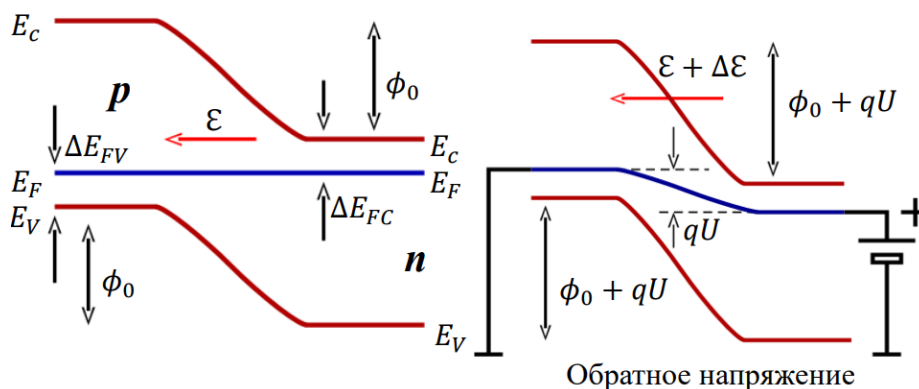


Рис. 6.10. Энергетические диаграммы p-n-перехода при подключении внешнего источника обратного напряжения.

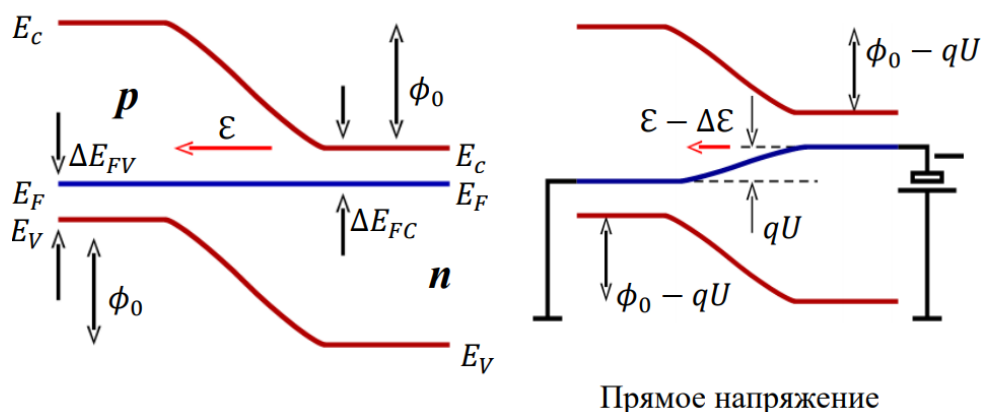


Рис. 6.11. Энергетические диаграммы p-n-перехода при подключении внешнего источника прямого напряжения.

Биполярный транзистор

Самая простая схема биполярного транзистора включает в себя две области с одинаковым допированием и промежуточный слой, который имеет другой тип допирования. Если подключить два источника внешнего напряжения так, как показано на рис. 6.12, то источник напряжения между базой Б и эмиттером Э играет роль управляющего потенциала. Если он включен так, как показано на рисунке, то правый переход оказывается открытым, а левый коллекторный переход – закрытым.

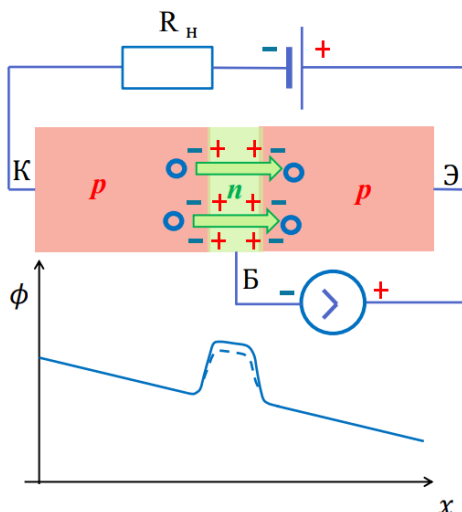


Рис. 6.12. Схема p-n- перехода биполярного транзистора.

Допирование в эмиттерной области гораздо выше, чем в коллекторной, и концентрация носителей там гораздо больше. Обычно коллекторный переход имеет большую площадь, а сама коллекторная область больше по объему. Ток, который протекает в цепи эмиттер-база управляет высотой потенциального барьера, это маленький ток $I_B \ll I_K \sim I_E$.

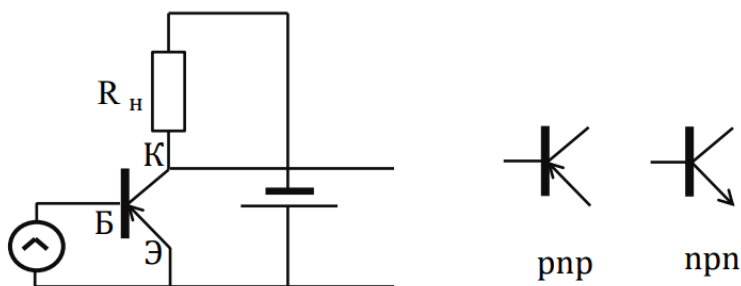


Рис. 6.13. Схема биполярного транзистора.

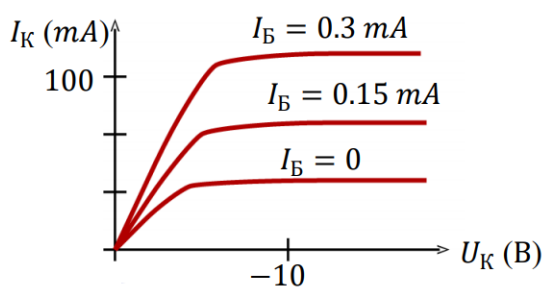


Рис. 6.14. Вольтамперные характеристики тока в цепи коллектор-эмиттер.

Охарактеризовать работу транзистора можно с помощью вольтамперных характеристик для тока, который течет в цепи коллектор-эмиттер, эти характеристики будут различными для различных значений тока в цепи базы. Подчеркну, что биполярный транзистор управляется не напряжением на базе, а током через переход база-эмиттер.

Полевой транзистор

В современной технике чаще встречаются полевые транзисторы (field effect transistor или металл-диэлектрик-полупроводник), построенные по технологии с изолированным затвором (рис. 6.15). Полевой транзистор также имеет три вывода, которые называются сток, исток и затвор. Между стоком и истоком находится канал, это полупроводник р-типа или n-типа. В технике встречаются полевые транзисторы с изолированным затвором двух типов: с индуцированным каналом и постоянным каналом. Дело в том, что в действительности имеет место подложка из полупроводника, а канал – это либо тонкая пленка на его поверхности с другим типом допирования, либо это просто поверхностный слой, в котором носители появляются за счет приложения электрического поля между затвором и подложкой. Для нас важно то, что в этом канале есть носители заряда, газ этих носителей классический, то есть их концентрация не так велика, и внешнее электрическое поле, приложенное между затвором и подложкой или между затвором и истоком, существенно меняет проводимость этого канала. Полезное свойство такого транзистора заключается в том, что его входное сопротивление может быть очень большим.

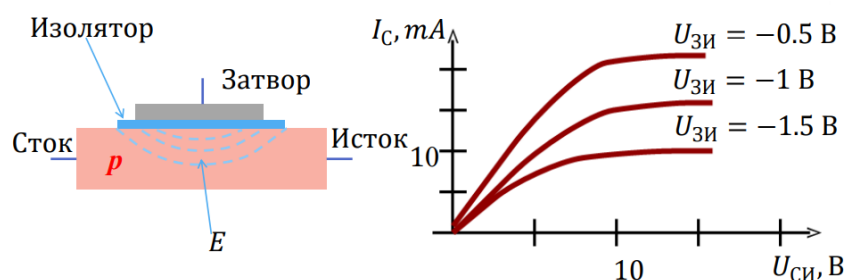


Рис. 6.15. Схема полевого транзистора и вольтамперные характеристики тока стока.

Полевой транзистор характеризуется величиной, которая называется дифференциальной крутизной

$$S_{\text{дифф}} = -\frac{\partial I_C}{\partial U_{ЗИ}} \sim 0,2 \frac{\text{мА}}{\text{В}}.$$

Мы уже говорили, что у полевого транзистора может быть очень высокое входное сопротивление или сопротивление затвор-исток

$$R_{\text{вх}} = R_{ЗИ} = -\frac{\partial U_{ЗИ}}{\partial I_3} = 10^8 \div 10^{12} \text{ Ом},$$

характерная величина сопротивления канала или сопротивления сток-исток составляет $R_{СИ} \sim 10^4$ Ом. Полевые транзисторы можно делать на очень высокие частоты $f = 0 \div 10^{11}$ Гц.

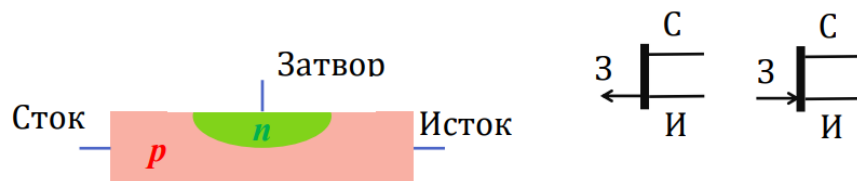


Рис. 6.16. Полевой транзистор с полупроводниковым затвором.

Иногда в качестве затвора используют область с другим типом допирования, которая вплавлена внутрь канала (рис. 6.16), принцип работы транзистора такой же. На практике такие транзисторы имеют недостаток: их входное сопротивление гораздо меньше, чем у транзисторов с изолированным затвором, но иногда они используются, поскольку такая технология позволяет получать устройство с меньшим коэффициентом шума. Также поскольку входное сопротивление меньше, такие транзисторы менее уязвимы для повреждения электростатикой, обычный же транзистор с изолированным затвором очень легко испортить, просто взяв в руки.

Можно рассмотреть транзистор как некоторый четырехполюсник, то есть устройство у которого есть выводы, которые условно можно назвать входами, и выводы, которые можно назвать выходами (рис. 6.17).

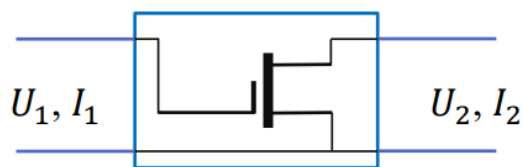


Рис. 6.17. Транзистор – четырехполюсник.

Дело в том, что у четырехполюсников вообще и у транзисторов в частности не только выходные напряжения и токи зависят от входных, но и наоборот, входное сопротивление, а значит и входной ток, при заданном напряжении может изменяться в зависимости от того, какой ток и напряжение на выходе. В радиотехнике очень часто используются, так называемые, статические параметры или h -параметры:

$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2,$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2.$$

Коэффициент h_{21} называется статическим коэффициентом передачи тока базы для биполярного транзистора. По аналогии можно ввести дифференциальные параметры:

$$\Delta U_1 = \left. \frac{\partial U_1}{\partial I_1} \right|_{\Delta U_2=0} \Delta I_1 + \left. \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \right|_{\Delta I_1=0} \Delta U_2,$$

$$\Delta I_2 = \left. \frac{\partial I_2}{\partial I_1} \right|_{\Delta U_2=0} \Delta I_1 + \left. \frac{\partial I_2}{\partial U_2} \right|_{\Delta I_1=0} \Delta U_2.$$

Если применить эти уравнения к полевому транзистору, получим

$$\Delta U_3 = \left. \frac{\partial U_3}{\partial I_3} \right|_{\Delta U_C=0} \Delta I_3 + \left. \frac{\partial U_3}{\partial U_C} \right|_{\Delta I_3=0} \Delta U_C,$$

$$\Delta I_C = \left. \frac{\partial I_C}{\partial I_3} \right|_{\Delta U_C=0} \Delta I_3 + \left. \frac{\partial I_C}{\partial U_C} \right|_{\Delta I_3=0} \Delta U_C.$$

Для других характеристик:

$$R_{\text{вх}} = \frac{\partial U_3}{\partial I_3} \cong 10^8 \div 10^{12} \text{ Ом},$$

$$R_{\text{вых}} = \frac{\partial U_C}{\partial I_C} \cong 10^4 \text{ Ом},$$

$$S = \frac{\partial I_C}{\partial U_3} \cong 10^{-3} \frac{1}{\text{Ом}}.$$

Посчитаем производную

$$\frac{\partial I_C}{\partial I_3} = \frac{\partial I_C}{\partial U_3} \times \frac{\partial U_3}{\partial I_3} = S R_{\text{зи}} \cong 10^{-3} \times 10^{12} = 10^9,$$

получается, что полевой транзистор может обеспечивать огромное усиление по току. Следует оговориться, что для того, чтобы реализовать в конкретном усилителе такую величину необходимо, чтобы входной ток ограничивался только сопротивлением затвора, и надо учесть емкостную составляющую входного сопротивления. Также можно получить усиление по напряжению

$$\frac{\partial U_C}{\partial U_3} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_3} \times \frac{R_{\text{си}}}{R_{\text{зи}}} \cong 10^9 \times \frac{10^4}{10^8 \div 10^{12}} \cong 10 \div 10^5.$$

Усилители электрических сигналов

Мы подошли к разбору усилителей электрических сигналов на полевых или биполярных транзисторах. Усилитель характеризуется коэффициентом усиления

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)},$$

применительно к усилителям часто рассматривают именно модуль комплексного коэффициента передачи $|\tilde{K}(\omega)|$ и его фазу $\arg(\tilde{K}(\omega))$. Кроме того необходимо учитывать зависимость этой величины для каждой частоты от самого входного сигнала $K(U_{\text{вх}})$, поскольку ни один реальный усилитель не является идеально линейным в широком диапазоне амплитуд и частот входного сигнала.

Очень часто величина коэффициента усиления приводится в децибелах, это логарифмическая мера. По определению коэффициент усиления в децибелах по мощности:

$$N[\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{W_{\text{вых}}}{W_{\text{вх}}} = 20 \log_{10} \frac{|U_{\text{вых}}|}{|U_{\text{вх}}|},$$

тогда, например, коэффициенту $K = 100$ соответствует $N = 40$ Дб. Децибел используется в случае, если у нас рассматривается устройство, состоящее из многих

блоков или из многих каскадов, тогда усиление в децибелах просто складывается для каждого каскада:

$$N_{\Sigma} = N_1 + N_2 + N_3,$$

в то время как коэффициенты усиления в абсолютных величинах должны перемножаться:

$$K_{\Sigma} = K_1 \times K_2 \times K_3.$$

Также по традиции уровень мощности для генераторов и многих других устройств техники часто измеряют в величине dBm, это расшифровывается как децибел по отношению к мВт:

$$N[\text{dBm}] = 10 \log_{10} \frac{W}{1 \text{ мВт}}.$$

Расчет цепи с нелинейным сопротивлением

Приведем простой способ анализа и описания работы устройства, в цепи которого есть нелинейный прибор, например, нелинейное активное сопротивление. Наглядно можно разобрать работу такого устройства, используя, так называемые, нагрузочные кривые.

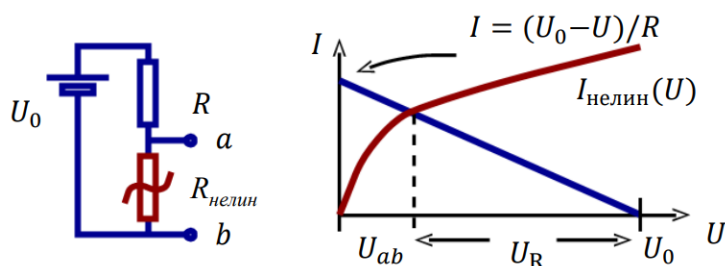


Рис. 6.18. Цепь с нелинейным сопротивлением.

Возьмем простую цепь, содержащую обычное сопротивление, нелинейное сопротивление и источник. На рис. 6.18. справа красным изображена зависимость тока через нелинейное сопротивление от напряжения. Обратим внимание на то, что в данной цепи ток, протекающий через линейное сопротивление и через нелинейное одинаковый, тогда, чтобы найти его рассмотрим два крайних случая. В первом случае пусть нелинейное сопротивление равно нулю, тогда напряжение, приложенное к линейному сопротивлению, тождественно равно напряжению источника U_0 . Во втором случае нелинейное сопротивление равно бесконечности, тогда напряжение приложенное к линейному сопротивлению, равно нулю. Осталось соединить эти две точки, поскольку это линейное сопротивление (синяя кривая на рис. 6.18). Искомый ток – это точка, находящаяся на пересечении двух кривых

$$I = \frac{U_0 - U}{R}.$$

Приложим метод нагрузочной кривой к семейству характеристик реального полевого транзистора (рис. 6.19). В цепь стока здесь включено сопротивление, которое

называется сопротивлением нагрузки. На самом деле цепочка такая же, какую мы рассматривали ранее, только вместо нелинейного сопротивления стоит полевой транзистор, точнее его канал сток-исток. Сопротивление, которое подключено к затвору для данного рассмотрения большой роли не играет и, вообще говоря, для полевого транзистора может отсутствовать. Положим сопротивление нагрузки $R_H = 1 \text{ кОм}$, а напряжение источника питания $U_0 = 20 \text{ В}$. Если транзистор полностью закрыт, и ток через него не течет, напряжение вот в точке, где соединяются нагрузка и сток, будет равно 20 В. Если же транзистор полностью открыт, его сопротивление равно нулю, то напряжение в этой точке будет нулевым, а ток составит 20 мА. А во всех промежуточных случаях расположены на прямой, которая эти две точки соединяет. Теперь если мы меняем напряжение затвор-исток, например, на 0,5 В, то получаем изменение напряжения на нагрузке примерно 4 В. Тогда коэффициент усиления по напряжению в зависимости от частоты будет равен

$$K_U = \frac{\Delta U_{СИ}}{\Delta U_{ЗИ}} = \frac{-4 \text{ В}}{0,5 \text{ В}} = -8,$$

поскольку K_U отрицательный, данный усилитель является инвертирующим. Заметим, что коэффициент усиления зависит от того, в какой области выбрана рабочая точка, то есть начальный потенциал затвора.

Можно рассматривать не только коэффициент усиления по напряжению, но также коэффициент усиления по току или по мощности. Примем $R_{ВХ} = 10^7 \text{ Ом}$, тогда $\Delta I_{ВХ} \cong \frac{0,5 \text{ В}}{10^7 \text{ Ом}} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ А}$, и по графику $\Delta I_{СИ} = 5 \text{ мА}$, и

$$K_I = \frac{\Delta I_{СИ}}{\Delta I_{ВХ}} \cong 10^5,$$

$$K_W = \frac{\Delta I_{СИ}^2 R_H}{\Delta I_{ВХ}^2 R_{ВХ}} = K_I^2 \frac{R_H}{R_{ВХ}} \cong 10^{10} \times \frac{10^3}{10^7} = 10^6.$$

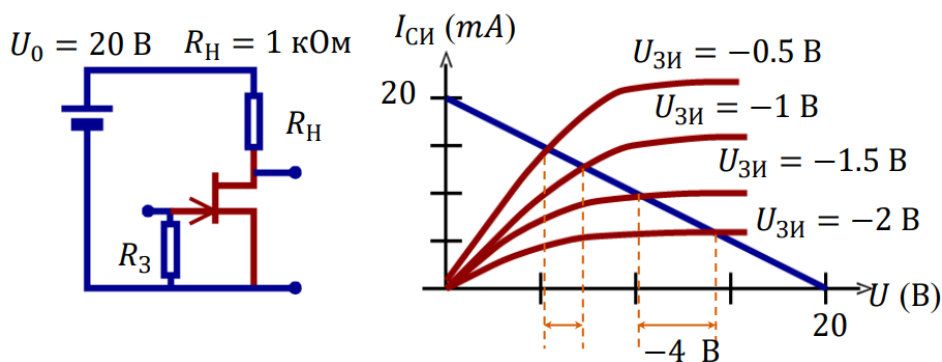


Рис. 6.19. Метод нагрузочной кривой к семейству характеристик реального полевого транзистора.

ЛЕКЦИЯ 7. УСИЛИТЕЛЬ

Простой усилитель

На прошлой лекции мы рассмотрели устройство полупроводниковых переходов, их применение в усилителях на транзисторах. Мы посмотрели, как работает усилитель на биполярном и полевом транзисторах. В биполярном транзисторе управление происходит с помощью тока, задавая ток в цепи база-эмиттер, можно изменять потенциальный барьер коллекторного перехода, и, таким образом, управлять током эмиттер-коллектор. Полевой транзистор управляется потенциалом, изменяя напряжение на затворе, можно изменять ток, который протекает через канал сток-исток.

Разберемся, как можно сделать простейший расчет, касающийся усиления сигналов, то есть переменных токов или напряжений в таком усилителе. Запишем простейшее выражение, которое связывает изменение токов и напряжений в цепи сток-исток, включающей сопротивление нагрузки и источник питания (рис. 7.1).

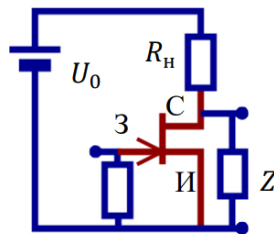


Рис. 7.1. Схема простого усилителя.

Считаем, что в нормальном режиме напряжение на источнике питания не изменяется, падение напряжения на сопротивлении нагрузки – $R_n \Delta I_{\text{ВЫХ}}$, изменение напряжения на транзисторе – $\Delta U_{\text{ВЫХ}}$, тогда

$$0 = R_n \Delta I_{\text{ВЫХ}} + \Delta U_{\text{ВЫХ}}. \quad (7.1)$$

Изменение выходного тока можно рассматривать как сумму токов

$$\Delta I_{\text{ВЫХ}} = S \Delta U_{\text{ВХ}} + \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{R_{\text{СИ}}} + \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{Z}, \quad (7.2)$$

где S – дифференциальная крутизна, Z – сопротивление приемника сигнала, к которому подключен наш усилитель. Подставляя (7.1) в (7.2), получим

$$S \Delta U_{\text{ВХ}} = -\Delta U_{\text{ВЫХ}} \left(\frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_{\text{СИ}}} + \frac{1}{Z} \right),$$

умножим обе части уравнения на $R_{\text{СИ}}$:

$$S R_{\text{СИ}} \Delta U_{\text{ВХ}} = \mu \Delta U_{\text{ВХ}} = -\Delta U_{\text{ВЫХ}} \times \frac{R_{\text{||}} + R_{\text{СИ}}}{R_{\text{||}}},$$

где $\frac{1}{R_{\text{||}}} = \frac{1}{R_n} + \frac{1}{Z}$.

Можно использовать эквивалентные схемы для цепей с усилителем. Верхняя схема на рис. 7.2 содержит источник напряжения во входной цепи, а выходная цепь содержит источник тока, величина которого связана со входным напряжением, и три параллельно включенных сопротивления $R_{СИ}$, R_H и Z . В нижней схеме на рис. 7.2 вместо источника тока стоит эквивалентный источник, сопротивление $R_{СИ}$ оказывается включенным последовательно с ним.

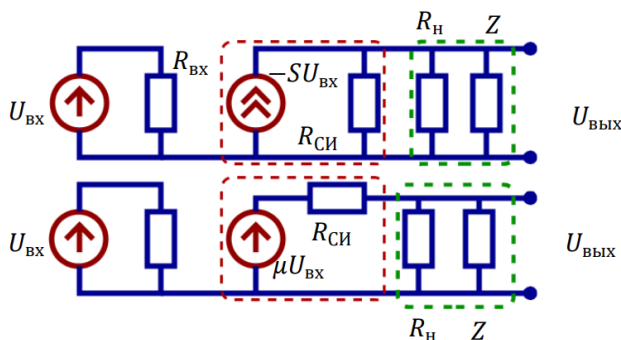


Рис. 7.2. Эквивалентные схемы усилителя.

На рис. 7.3. представлена схема усилителя переменного напряжения, отличие от предыдущей схемы заключается в том, что в ней появляются два конденсатора C_3 и $C_П$, они нужны исключительно для того, чтобы источник и приемник сигнала не влияли на режим работы транзистора по постоянному току. Их величины выбираются такими, чтобы емкостное сопротивление было достаточно мало на рабочей частоте или в рабочем диапазоне частот, или чтобы RC-цепи, которые образуются при добавлении этих конденсаторов не уменьшали существенно коэффициент усиления в том диапазоне, в котором этот усилитель должен работать.

Кроме того, на рис. 7.3 пунктиром изображены еще входная и выходная емкости, которые еще называют паразитными, и, к большому сожалению, на практике они всегда есть. Именно эти емкости чаще всего ограничивают верхнюю рабочую частоту, потому что они образуют интегрирующие цепочки, имеющие коэффициент передачи, который по модулю уменьшается с частотой.

Наконец, еще одна цепочка, выделенная на схеме зеленым цветом, обеспечивает обратную связь по постоянному напряжению. Предположим, что ее нет, во многих случаях усилители работают и без такой цепи, однако представим себе, что ток, протекающий в цепи сток-исток достаточно велик для того, чтобы транзистор начал заметно нагреваться. Если канал транзистора нагревается, то подвижность носителей заряда в нем увеличивается, и его сопротивление уменьшается, ток может увеличиться еще больше, нагрев станет еще больше и, таким образом, этот лавинообразный процесс может вывести транзистор из строя. Для того, чтобы этого не происходило, в цепь добавляют сопротивление $R_{ос}$, и, таким образом, появляется система автоматического регулирования: при самопроизвольном увеличении тока через транзистор, последний закрывается, ток уменьшается и возвращается к своему исходному значению. Если мы не хотим уменьшать коэффициент усиления по переменному току, надо еще добавить

емкость C_6 , ее выбирают так, чтобы импеданс цепи, состоящей из сопротивления обратной связи R_{oc} и этой емкости, был мал в рабочем диапазоне частот. То есть обычно это достаточно большая емкость, и, таким образом, обратная связь не действует по переменному току, а только по постоянному.

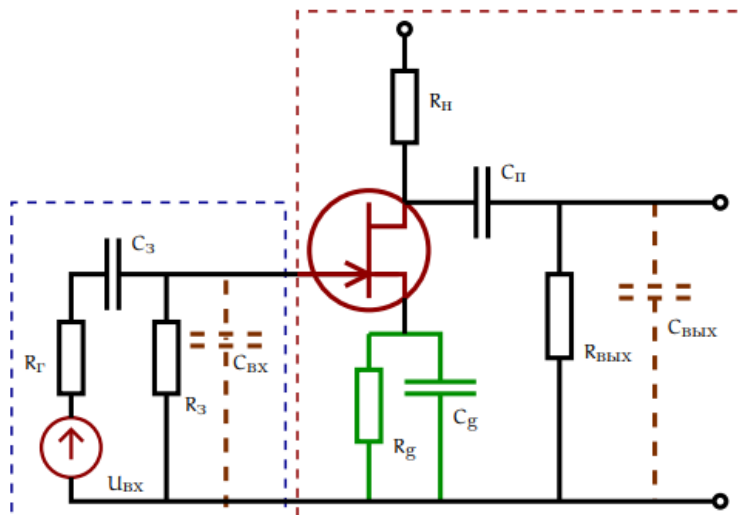


Рис. 7.3. Схема усилителя переменного напряжения

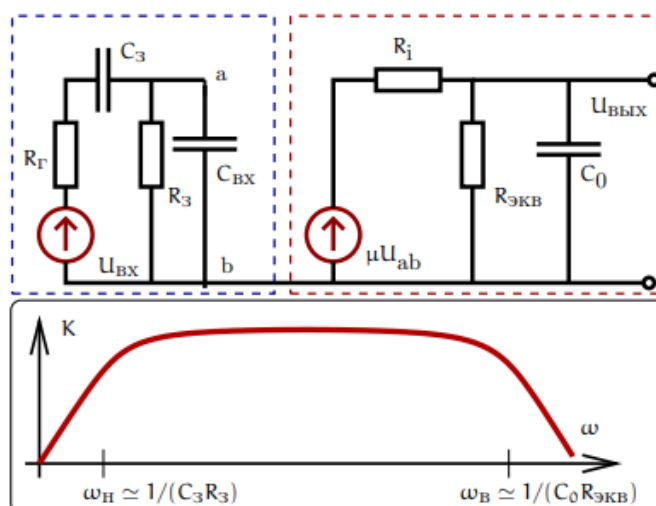


Рис. 7.4. Эквивалентная схема усилителя, изображенного на рис. 7.3, с эквивалентным источником напряжения (сверху) и частотная зависимость коэффициента усиления (снизу).

Эквивалентная схема усилителя с источником напряжения с учетом рассмотренных выше емкостей представлена на рис. 7.4, а также амплитудно-частотная характеристика, спад на низких и на высоких частотах здесь обусловлен действием тех самых RC-цепочек.

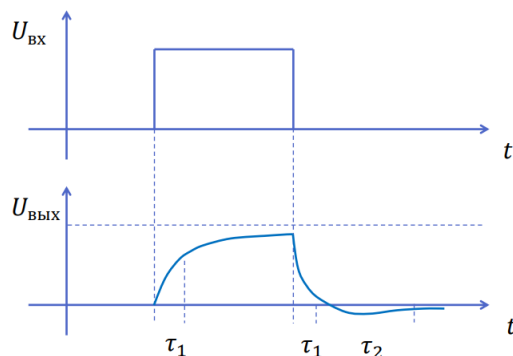


Рис. 7.5. Переходная характеристика усилителя. Введены обозначения:

$$\tau_1 = \max(R_3 C_3, R_{||} C_{||}, \tau_{\text{заряд}}) \text{ и } \tau_1 = R_{||} C_{\text{ВЫХ}}.$$

Рассмотрим переходную характеристику усилителя, то есть его отклик на ступеньку, на рис. 7.5 представлен отклик на прямоугольный импульс, который можно представить в виде двух ступенек, сдвинутых по времени с противоположным знаком. Типичный отклик будет включать в себя переходный процесс, который очень похож на переходную характеристику RC-цепочки, затем некое плато. Отклик на отрицательный фронт импульса может включать в себя не только перевернутую переходную характеристику RC-цепочки, но еще и дополнительный хвост, который связан с разрядом конденсатора $C_{\text{ВЫХ}}$.

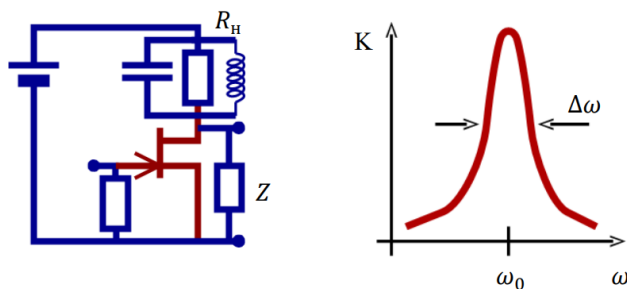


Рис. 7.6. Резонансный усилитель.

Часто если речь идет об усилении узкого диапазона частот, для этого используются, так называемые, резонансные усилители. Схема резонансного усилителя может выглядеть по-разному, очень часто параллельный колебательный контур включается в цепь стока полевого транзистора (рис. 7.6). Мы помним, что на резонансной частоте сопротивление контура будет максимальным, равным сопротивлению нагрузки. Если мы будем изменять частоту, удаляясь от резонанса, сопротивление этой цепи будет уменьшаться, следовательно, будет уменьшаться коэффициент усиления. Таким образом, мы получили селективный усилитель. Упомянем еще одно достоинство резонансного усилителя: часть энергии источника питания всегда будет рассеиваться в виде тепла на активном сопротивлении R_n , применительно к резонансному усилителю такой проблемы нет, условно, наша катушка индуктивности имеет нулевое сопротивление, и по постоянному току весь этот контур имеет сопротивление близкое к нулю. Таким образом, можно сделать усилитель,

который гораздо эффективней с точки зрения расхода энергии, но плата за удовольствие в том, что ширина полосы частот, в которой достигается необходимое усиление будет меньше. Если $R_n \ll R_{си}, Z$, то ширина полосы определяется добротностью этого колебательного контура $\Delta\omega \cong \frac{\omega_0}{Q}, Q = R_n \sqrt{\frac{C}{L}}$.

Для расширения кругозора поговорим о том, какие еще бывают полупроводниковые приборы. Диоды бывают рассчитаны на большие токи, это, так называемые, выпрямительные диоды, через них может протекать ток в десятки, сотни и даже тысячи ампер. Такие диоды обычно имеют очень большую ёмкость перехода и не пригодны для создания амплитудных детекторов на высоких частотах, для этого используются высокочастотные, точечные диоды, у которых маленькая область контакта и маленькая барьерная емкость. Существуют также диоды, носящие название стабилитронов, они работают в режиме пробоя, то есть к ним подключается обратное напряжение. Для каждого такого диода есть величина напряжения, которое называется напряжением открывания, когда обратное напряжение достигает напряжения открывания, в диоде начинается пробой, чаще всего это квантовое туннелирование через барьер.

Следующим примером полупроводникового прибора является, так называемый, составной транзистор. Коэффициент усиления тока базы в случае биполярного транзистора или дифференциальная крутизна для полевого транзистора может быть очень велика, тем не менее иногда в реальном устройстве нужно получить еще больший коэффициент усиления, и для того, чтобы не устанавливать несколько приборов, в одном корпусе изготавливают такие транзисторы. Еще более интересными устройствами являются двузатворный полевой транзистор и многоэмиттерный биполярный транзистор. Они являются хорошими кандидатами для создания цифровых логических устройств. Еще за кадром остаются варикапы – это диоды, у которых большая ёмкость перехода, которая сильно меняется при изменении постоянного напряжения. Есть устройства, которые называются тиристоры и симисторы, это пороговые устройства, которые в отличие от транзистора при подаче однократного импульса на управляющий электрод открываются и больше не закрываются до тех пор, пока не исчезнет напряжение в основной цепи.

Обратные связи в усилителях

Теперь хотелось бы рассказать об использовании обратных связей в усилителях. Общая структурная схема использования обратной связи изображена на рис. 7.7. Пусть у нас есть некоторый усилитель, который сам по себе имеет коэффициент усиления или коэффициент передачи $K(\omega)$. Сигнал с выхода этого усилителя через пассивную цепь, имеющую коэффициент передачи $\beta(\omega)$ попадает на вход, смешиваясь с тем сигналом, который подлежит усилению.

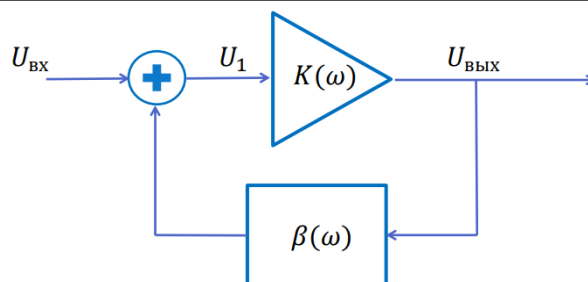


Рис. 7.7. Схема подключения к усилителю обратной связи.

Напряжение на входе усилителя будет равно

$$U_1 = U_{\text{ВХ}} + \beta(\omega)U_{\text{ВЫХ}},$$

$$U_{\text{ВЫХ}} = K(\omega)U_1.$$

Из этих двух формул можно получить коэффициент усиления уже всего усилителя, охваченного обратной связью:

$$K_\beta = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_1 - \beta U_{\text{ВЫХ}}} = \frac{K(\omega)}{1 - \beta(\omega)K(\omega)}.$$

Представим наши коэффициенты передачи в комплексном виде

$$K(\omega) = K_0(\omega)e^{i\varphi_k(\omega)},$$

$$\beta(\omega) = \beta_0(\omega)e^{i\varphi_\beta(\omega)}.$$

Для простоты будем считать, что суммарный поворот фазы в усилителе и в цепи обратной связи принимает всего два значения:

$$a) \quad \varphi_k + \varphi_\beta = 0 \rightarrow |K_\beta| = \frac{K_0}{1 - \beta_0 K_0},$$

$$b) \quad \varphi_k + \varphi_\beta = \pi \rightarrow |K_\beta| = \frac{K_0}{1 + \beta_0 K_0}.$$

В первом случае мы получаем положительную обратную связь, во втором случае – отрицательную обратную связь. Причем если произведение $\beta_0 K_0 \gg 1$, то $K_\beta \cong \frac{1}{\beta(\omega)}$, то есть коэффициент усиления усилителя, охваченного обратной связью не зависит от собственного коэффициента усиления полупроводникового прибора, а только от коэффициента передачи пассивной цепи обратной связи.

Если речь идет именно об усилении сигналов, то обычно используется отрицательная обратная связь. С одной стороны, казалось бы, коэффициент усиления усилителя, охваченного отрицательной обратной связью, всегда меньше, чем коэффициент усиления усилителя без такой связи. Но дело в том, что сейчас стоимость усилителя с большим коэффициентом усиления не так велика, и реальные усилители подвержены изменениям параметров, их коэффициент усиления зависит от температуры, для пассивных цепочек же такие изменения существенно меньше.

Стоит отметить, что, когда активные элементы, лампы, транзисторы стоили дорого, иногда в усилителях использовалась и положительная обратная связь, это были, так называемые, регенерированные усилители. Казалось бы, с помощью цепи обратной

связи можно получить сколь угодно большой коэффициент усиления, но следует обратить внимание на два момента. Во первых, если коэффициент регенерации станет больше единицы, то такой усилитель превратится в автогенератор, на выходе мы будем видеть автоколебания даже в отсутствии входного сигнала. Это используется для создания генераторов, но неприемлемо для усилителя. Во-вторых, важно не просто усилить сигнал, но и не ухудшить отношение сигнала к шуму, положительная обратная связь плоха тем, что она генерирует шумы.

Истоковый повторитель

Рассмотрим пример цепи, в которой используется отрицательная обратная связь. Это, так называемый, истоковый повторитель в случае полевого транзистора или эмиттерный повторитель в случае биполярного транзистора. В отличие от обычного усилителя с общим истоком здесь сигнал снимается не со стока и не с сопротивления нагрузки в цепи стока, а с сопротивления, которое находится в цепи истока. Обратим внимание на то, что в цепи нет дополнительной емкости, то есть эта обратная связь работает на всех частотах, в том числе и на тех, на которых усиливается сигнал. Сопротивление, которое раньше у нас называлось сопротивлением нагрузки, то есть сопротивление между источником и стоком, теперь вовсе отсутствует.

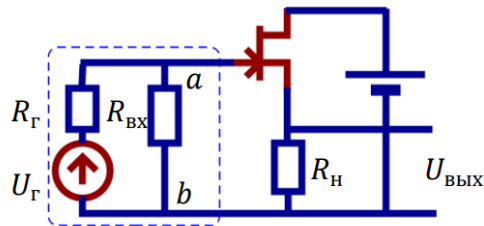


Рис. 7.8. Схема истокового повторителя.

Предположим, что внутреннее сопротивление источника $R_Г \ll R_ВХ$, в этом случае $\Delta U_{ab} \cong U_Г$, а также $R_ВХ \gg R_Н$. Запишем уравнение, связывающее падения напряжения на участках цепи:

$$\Delta U_{ЗИ} = \Delta U_{ab} - R_Н \Delta I_{СИ} = \Delta U_{ab} - R_Н S \Delta U_{ЗИ},$$

откуда получим

$$\Delta U_{ЗИ} = \frac{\Delta U_{ab}}{1 + R_Н S}.$$

Изменение напряжения на выходе будет равно

$$\Delta U_{ВЫХ} = R_Н \Delta I_{СИ} = R_Н S \Delta U_{ЗИ} = \Delta U_{ab} \frac{R_Н S}{1 + R_Н S} \cong \Delta U_{ab},$$

таким образом, эта схема не дает усиления по напряжению, поэтому она и называется повторителем. Такая схема нужна, потому что в отличие от коэффициента усиления по напряжению коэффициент усиления по току может быть большим:

$$K_U = \frac{\Delta U_{ВЫХ}}{\Delta U_{ВХ}} \cong \frac{R_Н S}{1 + R_Н S} \leq 1,$$

$$K_I = \frac{\Delta I_{\text{вых}}}{\Delta I_{\text{вх}}} \cong K_U \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{н}}} \gg 1.$$

Вторая причина, по которой используют истоковый повторитель, заключается в том, что он обеспечивает очень хорошую развязку выхода и входа. Если вы помните, мы вводили h -параметры, и параметр h_{21} , описывающий зависимость входного напряжения от выходного, оказывается очень маленьким, то есть изменение параметров на выходе не будут влиять на работу той части устройства, которое подключено ко входу повторителя. Важно понимать, если вы реально будете использовать повторитель, что он является идеальным повторителем, только когда нет дополнительного сдвига фазы, сдвиги фазы могут появиться из-за паразитных емкостей и индуктивностей.

Операционные усилители

Операционные усилители – это класс полупроводниковых приборов, который выделен просто потому что является очень удобным для многих приложений. Это класс усилителей обладает следующими признаками:

1. Большое количество каскадов – большое усиление: $K_{\text{ОУ}} = 10^4 \div 10^8$
2. Дифференциальный вход
3. Большое входное и малое выходное сопротивления

Операционный усилитель имеет два входа, обозначенные на рис. 7.9 знаками "–" (инвертирующий) и "+" (неинвертирующий) и один выход. Кроме того, есть клеммы для подачи питания (E_+ и E_-).

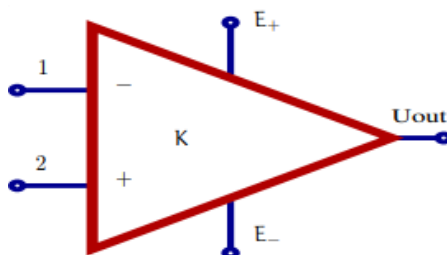


Рис. 7.9. Условное обозначение операционного усилителя.

Заметим, что всегда в реальных устройствах кроме полезных сигналов есть еще, так называемые, наводки – это сигналы, создаваемые электромагнитными полями, которых вокруг нас великое множество. Скорее всего в двух близко расположенных проводниках эти токи будут синфазны, то есть будут близки по величине и по фазе. Получается, что у такого усилителя есть иммунитет по отношению к наводкам. Более того, источники питания не являются идеальными, их напряжение может меняться, в первом приближении операционный усилитель не чувствует этих флуктуаций. Если быть совсем точным, очень часто реальной операционный усилитель имеет еще дополнительные выходы, это могут быть выходы для подключения балансировки и коррекции.

Инвертирующий усилитель

На операционных усилителях можно создавать усилители сигналов, наиболее распространенными схемами включения являются инвертирующий и неинвертирующий усилители. Схема инвертирующего усилителя представлена на рис. 7.10. Инвертирующий вход является общим для входной и выходной цепи, а цепь обратной связи включает в себя два сопротивления Z_1 и Z_2 . Источник сигнала включается между общим проводом и сопротивлением Z_1 .

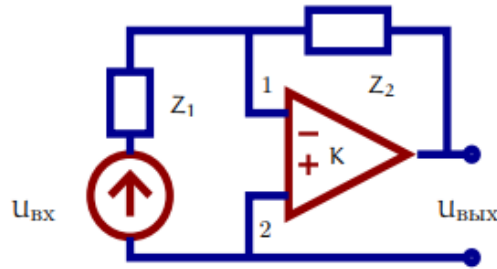


Рис. 7.10. Схема инвертирующего усилителя.

Теперь давайте рассчитаем параметры такого усилителя. Обозначим ток в цепи обратной связи I , и поскольку входное сопротивление операционного усилителя очень большое, можем пренебречь током, который втекает или вытекает во вход ОУ. Тогда по закону Ома

$$I = \frac{U_{\text{ВЫХ}} - U_{\text{ВХ}}}{Z_1 + Z_2}.$$

Напряжение между входами операционного усилителя есть

$$U_{12} = U_{\text{ВХ}} + IZ_1,$$

и напряжение на выходе:

$$U_{\text{ВЫХ}} = -KU_{12},$$

знак минус возникает, поскольку сигнал подается на инвертирующий вход. Собирая вместе три этих формулы, мы можем написать

$$\begin{aligned} \frac{-U_{\text{ВЫХ}}}{K} &= U_{\text{ВХ}} + \frac{U_{\text{ВЫХ}} - U_{\text{ВХ}}}{Z_1 + Z_2} Z_1, \\ \frac{-U_{\text{ВЫХ}}}{K} \left(1 + \frac{KZ_1}{Z_1 + Z_2} \right) &= U_{\text{ВХ}} \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right). \end{aligned}$$

Коэффициент усиления с учетом цепи обратной связи примет вид

$$K_{\beta} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = -\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \bigg/ \left(\frac{1}{K} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right),$$

считая собственный коэффициент усиления $K \gg 1$, получаем предельно простую формулу

$$K_{\beta} \cong -\frac{Z_2}{Z_1}.$$

Желаемая амплитудно-частотная характеристика определяется двумя сопротивлениями Z_1 и Z_2 , параметры самой микросхемы никоим образом здесь не фигурирует, важно только, чтобы выполнялось условие $K \gg 1$ во всем диапазоне частот, в котором используется усилитель.

Неинвертирующий усилитель

Рассмотрим в каком-то смысле зеркальный по отношению к предыдущему неинвертирующий усилитель. Схема обратной связи выглядит точно так же, только в этой цепи нет источника, он включен между общим проводом и неинвертирующим входом усилителя. Снова можно записать простые соотношения:

$$U_{12} + U_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вых}} Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

$$U_{\text{вых}} = -K U_{12},$$

$$U_{\text{вх}} = U_{\text{вых}} \left(\frac{1}{K} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right).$$

Из последнего соотношения находим коэффициент усиления неинвертирующего усилителя:

$$K_\beta = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = 1 / \left(\frac{1}{K} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right).$$

При выполнении условия $K \gg 1$, получим

$$K_\beta \cong \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}.$$

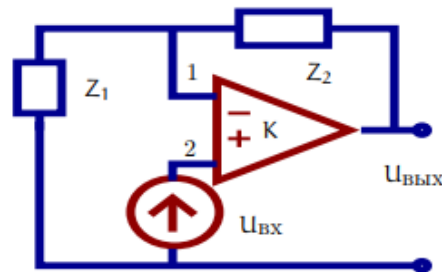


Рис. 7.11. Схема неинвертирующего усилителя.

Сумматор

Рассмотрим устройство, которое можно сделать на базе инвертирующего усилителя, так называемый, сумматор сигналов (рис. 7.12). У нас есть два источника напряжения, каждый со своим сопротивлением, соответственно, Z_1 и Z_2 . Можно записать напряжение между входами операционного усилителя:

$$U_{12} = U_1 + I_1 Z_1,$$

$$U_{12} = U_2 + I_2 Z_2,$$

откуда для токов имеем:

$$I_1 = \frac{U_{12} - U_1}{Z_1},$$

$$I_2 = \frac{U_{12} - U_2}{Z_2}.$$

А суммарный ток, который течет через Z_0 , является суммой этих двух токов I_1 и I_2 . Тогда

$$\begin{aligned} U_{\text{ВЫХ}} &= U_{12} + (I_1 + I_2)Z_0 = U_{12} + \left(\frac{U_{12} - U_1}{Z_1} + \frac{U_{12} - U_2}{Z_2} \right) Z_0 \\ &= U_{12} \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1} + \frac{Z_0}{Z_2} \right) - Z_0 \left(\frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} \right). \end{aligned}$$

Используем

$$U_{\text{ВЫХ}} = -KU_{12},$$

получим

$$U_{\text{ВЫХ}} \left(1 + \frac{1}{K} \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1} + \frac{Z_0}{Z_2} \right) \right) = -Z_0 \left(\frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} \right).$$

При условии $K \gg 1$ имеем взвешенную сумму входных напряжений:

$$U_{\text{ВЫХ}} \cong -Z_0 \left(\frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} \right).$$

Очевидно, что такую схему можно обобщить на любое количество входов.

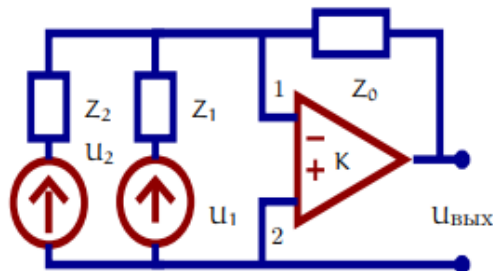


Рис. 7.12. Схема сумматора.

ЛЕКЦИЯ 8. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

На прошлой лекции мы с вами изучали усилители электрических сигналов, в том числе усилители, собранные на базе операционных усилителей. Мы обсуждали влияние обратных связей, говорили о том, что можно изменять коэффициент усиления с помощью цепи обратной связи. В частности, если у нас используется операционный усилитель, который имеет очень большой собственный коэффициент, то, задавая цепь обратной связи, мы получаем очень стабильно и устройство, в котором параметры собственно усилителя на полупроводниках не влияют на АЧХ и на коэффициент усиления всего устройства в целом. С помощью обратной связи можно также управлять входным и выходным сопротивлением устройства. На рис. 8.1 изображена схема усилителя с обратной связью, на примере которой мы попробуем разобраться, что же происходит со входным сопротивлением при подключении обратной связи.

Обозначим входное сопротивление усилителя без обратной связи $R_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}}$, после подключения обратной связи – $R_{\text{вх}}^{\beta} = \left. \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}} \right|_{\beta}$. Проведя ряд вычислений, получим выражение для $R_{\text{вх}}^{\beta}$:

$$\begin{aligned} U_{12} &= I_{\text{вх}} R_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} + \beta U_{\text{вых}}, \\ U_{\text{вых}} &= K I_{\text{вх}} R_{\text{вх}}, \\ I_{\text{вх}} R_{\text{вх}} &= U_{\text{вх}} + K \beta I_{\text{вх}} R_{\text{вх}}, \\ I_{\text{вх}} R_{\text{вх}} (1 - K \beta) &= U_{\text{вх}}, \\ R_{\text{вх}}^{\beta} &= \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}} = R_{\text{вх}} (1 - K \beta). \end{aligned}$$

Поскольку у нас обратная связь в усилителях обычно является отрицательной, то есть либо β , либо K должно быть отрицательным, получается, что введение последовательной обратной связи по напряжению увеличивает входное сопротивление устройства.

Для этого же случая можно посмотреть, как изменяется выходное сопротивление нашего усилителя. Выходное напряжение для случая без использования и с использованием обратной связи можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}} &= K U_{\text{вх}} \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{н}} + R_{\text{вых}}}, \\ U_{\text{вых}} &= K_{\beta} U_{\text{вх}} \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{н}} + R_{\text{вых}}^{\beta}}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Проведя ряд вычислений, получим выражение для $R_{\text{вх}}^{\beta}$:

$$\begin{aligned} U_{12} &= U_{\text{вх}} + \beta U_{\text{вых}}, \\ U_{\text{вых}} &= K U_{12} \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{н}} + R_{\text{вых}}} = K (U_{\text{вх}} + \beta U_{\text{вых}}) \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{н}} + R_{\text{вых}}}, \end{aligned}$$

$$U_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вых}}}{K} \left(\frac{Z_{\text{н}} + R_{\text{вых}}}{Z_{\text{н}}} - K\beta \right) = \frac{U_{\text{вых}}(1 - K\beta)}{K} \left(1 + \frac{R_{\text{вых}}}{Z_{\text{н}}(1 - K\beta)} \right),$$

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \frac{K}{(1 - K\beta)} \times \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{н}} + \frac{R_{\text{вых}}}{1 - K\beta}}, \quad (8.2)$$

сопоставляя формулы (8.1) и (8.2), получим

$$R_{\text{вых}}^{\beta} = \frac{R_{\text{вых}}}{1 - K\beta}.$$

Учитывая, что второе слагаемое в знаменателе $R_{\text{вых}}^{\beta}$ обязательно должно быть отрицательным, получаем, что выходное сопротивление уменьшается при введении обратной последовательной по напряжению. Чем меньше выходное сопротивление, тем большую мощность мы можем отобрать от усилителя.

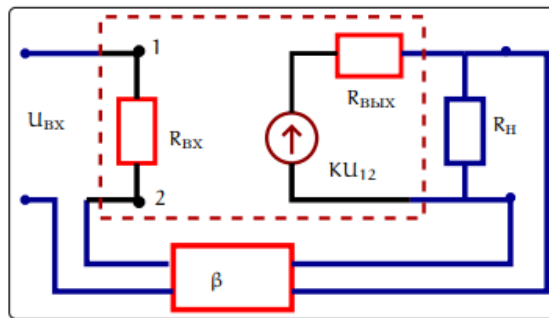


Рис. 8.1. Схема усилителя с последовательной обратной связью по напряжению.

Входное напряжение инвертирующего и неинвертирующего усилителей

Вернемся к знакомому нам инвертирующему усилителю и найдем для него входное сопротивление. Ток, который протекает во входной цепи

$$I = \frac{U_{\text{вых}} - U_{\text{вх}}}{Z_1 + Z_2},$$

отсюда находим, так называемый, входной как

$$I_{\text{вх}} = -I = \frac{U_{\text{вх}} - U_{\text{вых}}}{Z_1 + Z_2} = \frac{U_{\text{вх}} - K_{\beta} U_{\text{вх}}}{Z_1 + Z_2} = \frac{U_{\text{вх}} + \frac{Z_2}{Z_1} K_{\beta} U_{\text{вх}}}{Z_1 + Z_2} = \frac{U_{\text{вх}}}{Z_1},$$

$$Z_{\text{вх}} \equiv \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}} = Z_1.$$

Таким образом, для инвертирующего усилителя входное сопротивление есть просто сопротивление Z_1 . Это оказывается чрезвычайно удобно, здесь можно не повышать, а понижать сопротивление. Такой усилитель, кстати, можно подключить ко выходу длинной линии. Вы помните, что у длинной линии есть такая величина, как волновое сопротивление, и, если мы хотим, чтобы вся энергия из длинной линии переходила в нагрузку, то нужно, чтобы сопротивление нагрузки в точности равнялось сопротивлению длинной линии.

Рассмотрим теперь неинвертирующий усилитель, выпишем необходимые формулы:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{вх}} + U_{12} &= \frac{U_{\text{вых}} Z_1}{Z_1 + Z_2}, \\
 U_{12} &= -\frac{U_{\text{вых}}}{K}, \\
 I_{\text{вх}} &= \frac{U_{\text{вх}} - \frac{U_{\text{вых}} Z_1}{Z_1 + Z_2}}{R_{\text{ОУ}}}, \\
 U_{\text{вх}} &= U_{\text{вых}} \left(\frac{1}{K} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right), \\
 I_{\text{вх}} &\equiv \frac{U_{\text{вх}}}{Z_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вых}}}{R_{\text{ОУ}} K} = \frac{U_{\text{вх}} K_{\beta}}{R_{\text{ОУ}} K}, \\
 Z_{\text{вх}} &= R_{\text{ОУ}} \frac{K}{K_{\beta}}.
 \end{aligned}$$

Входное сопротивление стало больше после подключения обратной связи, потому что собственный коэффициент усиления кристалла всегда выбирается существенно больше, чем коэффициент, который получается после включения цепи обратной связи. Конечно, мы жертвуем коэффициентом усиления, но в обмен на эту жертву мы получаем, во первых, стабильность, во-вторых, возможность задания АЧХ и коэффициента усиления с помощью только пассивных элементов и, в-третьих, возможность управлять входным и выходным сопротивлением.

Параметрический усилитель

Параметрический усилитель – это усилитель, в котором усиление сигнала осуществляется не за счет подключения источника и управления малым током, который течет от этого источника как, например, в транзисторных усилителях, а за счет того, что по определенному закону изменяется какой-то параметр системы. Пример параметрического усилителя приведен на схеме на рис. 8.2, этот усилитель представляет собой колебательный контур, в котором емкость изменяется со временем, на практике такой емкостью может быть обратно смещенный запертый диод. Мы говорили о том, что у диода есть барьерная емкость, которая существенно зависит от запирающего напряжения, более того, специально делают диоды, у которых эта зависимость крутая, такие диоды называются варикапами. Предположим, что в нашем колебательном контуре существуют, неважно, как заданные, сформированное колебания по закону близкому к гармоническому. Теперь, глядя на «синусоиду» зададим закон изменения емкости (рис. 8.2), емкость уменьшается, когда напряжение по модулю большое, и увеличивается в те моменты времени, когда напряжение проходит через ноль. Представим, что между обкладками конденсатора существует электростатическое притяжение, оно максимально, когда максимально напряжение на обкладках конденсатора, и равняется нулю, когда напряжения нет. Тогда мы будем

растягивать обкладки конденсатора и уменьшать емкость, когда напряжение большое, таким образом, совершая работу над системой, а сдвигать обкладки кладки будем осень быстро в те моменты времени, когда напряжение почти нулевое. Получается, что каждый раз дважды за период, меняя емкость, мы совершаем механическую работу над системой. При этом, когда мы быстро сдвигаем обкладки, скачком увеличивается напряжение.

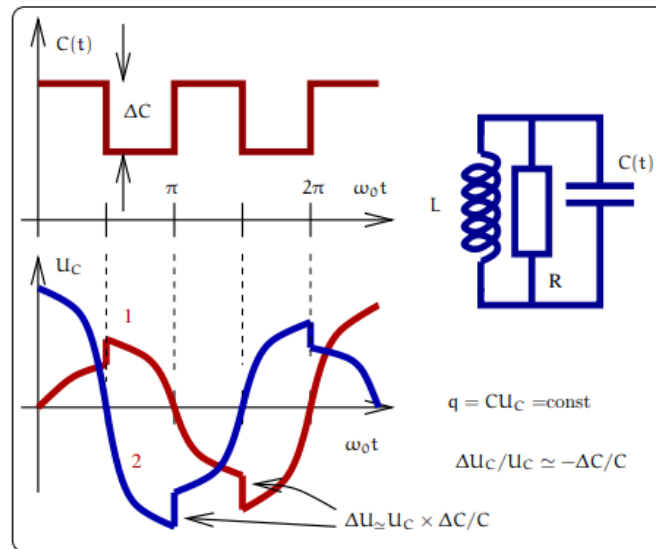


Рис. 8.2. Принцип параметрического усиления.

Можно получить несложные соотношения, собственные колебания затухают по экспоненциальному закону и за пол периода уменьшение амплитуды колебаний составляет

$$\left. \frac{\Delta U_C}{U_C} \right|_{rel} = -(1 - e^{T/2\tau^*}) \cong -\frac{T}{2\tau^*} = -\frac{\pi}{2Q},$$

где τ^* — характерное время затухания. С помощью параметрической подкачки мы вносим энергию и изменение напряжения на конденсаторе, те самые скачки за счет накачки примерно равны

$$\left. \frac{\Delta U_C}{U_C} \right|_{param} = \pm \frac{\Delta d}{d} = \pm m,$$

где m — коэффициент регенерации. Полное изменение составляет

$$\left. \frac{\Delta U_C}{U_C} \right|_{full} = -\frac{\pi}{2Q} \pm m.$$

Введем эквивалентную добротность в виде

$$Q_{эkv} = \frac{Q}{1 \mp 2mQ/\pi}.$$

Очевидно, что в случае параметрического усиления, чем больше мы подкачиваем энергии в систему, тем более узкополосной становится добротность. В

пределе добротность может стать и бесконечной, это соответствует случаю, когда параметрический усилитель превращается в параметрический генератор. Примером параметрической раскачки колебаний является знакомое нам всем явление раскачивания на качелях, мы можем раскачаться на качелях, ни от чего не отталкиваясь, только изменяя параметр длины нити, поджимая или вытягивая ноги, причем делать это надо два раза за период.

Разберемся, куда подавать входной сигнал и откуда снимать усиленный сигнал в таком параметрическом усилителе. Вспомним, что любой источник имеет внутренне сопротивление, в нашем случае собственное сопротивление параллельного контура R работающего на резонансной частоте, является действительной величиной. Тогда мы получаем делитель из двух сопротивлений R и R_r , где R_r — сопротивление генератора. Теперь включаем накачку, это означает, что суммарные потери энергии за период станут меньше, выходное напряжение увеличится

$$U_{\text{вых}} = \frac{U_r R}{R + R_r}.$$

Генерирование электрических колебаний

Поговорим о том, откуда могут возникать сигналы, типичная блок-схема устройство, которое может быть источником периодических колебаний изображена на рис. 8.3. Мы берем все тот же усилитель, цепь обратной связи и некий сумматор, который складывает входное напряжение и напряжение на выходе из цепи обратной связи. Вспоминаем формулу для нового коэффициента усиления

$$K_\beta = \frac{K}{1 - \beta K},$$

глядя на знаменатель этой формулы, понимаем, что K_β может обращаться в бесконечность, в этом случае колебания могут существовать без всякого входного сигнала, однажды начавшись, они будут поддерживать себя сами за счет энергии, которой питается усилитель. Стационарные колебания, то есть такие колебания которые не увеличиваются и не уменьшаются со временем, существуют, если выполняются условия баланса амплитуд и баланса фаз:

$$|K||\beta| = 1,$$

$$\varphi_K + \varphi_\beta = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Разберемся более подробно, что происходит изначально в нашей цепи, изначально условие баланса не выполнено и

$$|K||\beta| > 1.$$

На входе любого усилителя обязательно есть шумы, они усиливаются усилителем, проходят через цепь обратной связи, и для какой-то одной спектральной компоненты фаза этих флуктуаций, прошедших через цепь обратной связи через усилитель, наверняка окажется той же самой, которая была вначале. Но амплитуда изменится, она станет больше, сделает еще один круг и станет еще больше и так далее. Таким образом,

на частоте, для которой выполнилось условие баланса фаз, возникнут нарастающие колебания. Однако для того, чтобы эти колебания стали стационарными, должно выполняться условие баланса амплитуд.

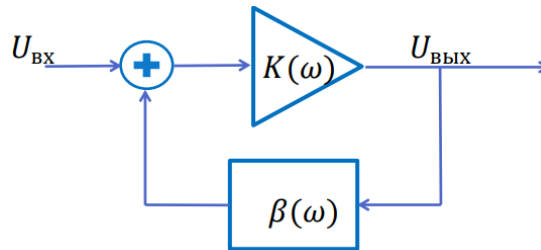


Рис. 8.3. Схема усилителя с обратной связью.

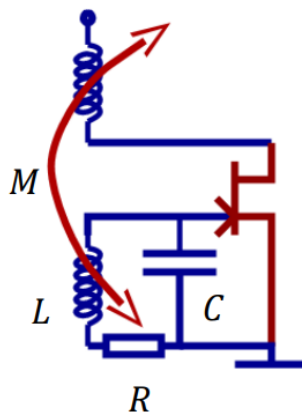


Рис. 8.4. Схема простейшего генератора.

Давайте посмотрим на эту систему более строго, начнем с линейного приближения, далее мы поймем, что его недостаточно для получения стационарной амплитуды. Перейдем от общей схемы к реальной схеме автогенератора на полевом транзисторе (рис. 8.4). В цепи затвора включен последовательный колебательный контур, а в цепи стока есть дополнительная катушка индуктивности, связанная с катушкой колебательного контура. Таким образом, колебания, если они существуют в этом контуре, усиливаются транзистором и попадают обратно в колебательный контур. Такую систему не сложно описать с помощью дифференциального уравнения колебаний в контуре:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = M \frac{dI_{\text{си}}}{dt}.$$

В линейном приближении будем считать, что

$$I_{\text{си}} = S U_{\text{зи}} = \frac{Sq}{C},$$

тогда

$$L\ddot{q} + \left(R - \frac{MS}{C}\right)\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Решение уравнения имеет вид

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\left[R - \frac{MS}{C}\right] \frac{t}{L}\right) \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. При $\left[R - \frac{MS}{C}\right] = 0$ мы получаем стационарные колебания. Очевидно, что это положение будет неустойчивым, строгое равенство выполнить руками в технике невозможно, это означает, что нам нужно учесть нелинейность. Дело в том, что, на самом деле, дифференциальная крутизна транзистора зависит от режима, от тока стока и от потенциала затвора.

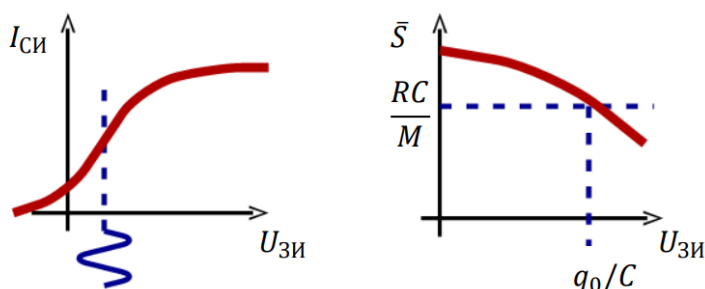


Рис. 8.5. Вольтамперная характеристика генератора (слева) и зависимость полной средней крутизны от потенциала затвора (справа) в мягком режиме возбуждения колебаний.

Зададим рабочую точку где-то на середине участка вольтамперной характеристики, который, во-первых, соответствует наибольшему наклону этой зависимости, а, во-вторых, практически линейный. Если изначально $R - \frac{MS}{C} < 0$, то колебания возникнут сами собой, затравкой будут существующий шум. После того, как эти колебания возникли и начали нарастать, произойдет следующее: если условно направить ось времени вниз (слева на рис. 8.5) и нарисовать эти колебания, которые становятся все больше и больше, то, взяв среднюю крутизну (усреднение по $q = CU_{зи}$) во всем диапазоне напряжений на затворе, мы увидим, что она уже не такая, как была вначале, а меньше. Можно отметить точку, в которой дифференциальная крутизна в точности равна $\frac{RC}{M}$, это и будет та точка, в которой установятся стационарные колебания, амплитуда этих колебаний:

$$\bar{S} = S_0 - S_1 \bar{q}^2.$$

Такой режим возбуждения колебаний называется мягким. Если мы в таком усилителе включим питание, то в нем обязательно возникнут колебания, и через время порядка времени релаксации для колебательного контура установится стационарная постоянная амплитуда.

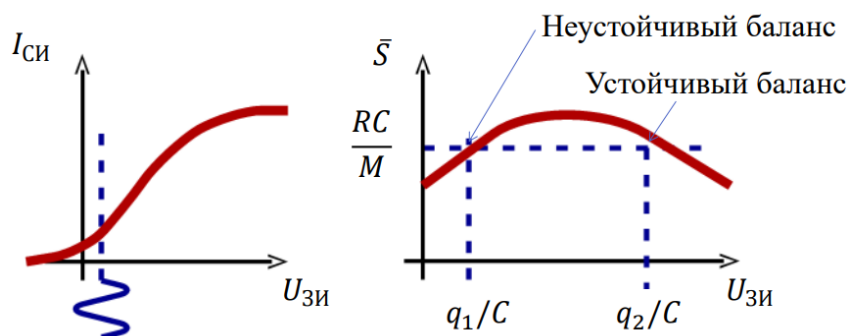
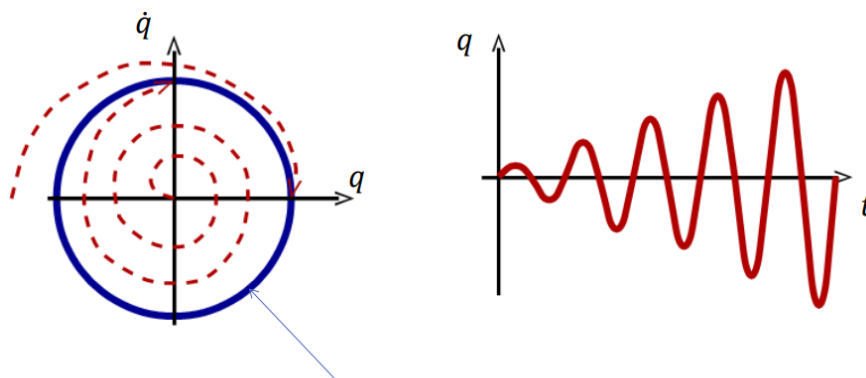


Рис. 8.6. Вольтамперная характеристика генератора (слева) и зависимость полной средней крутизны от потенциала затвора (справа) в жестком режиме возбуждения колебаний.

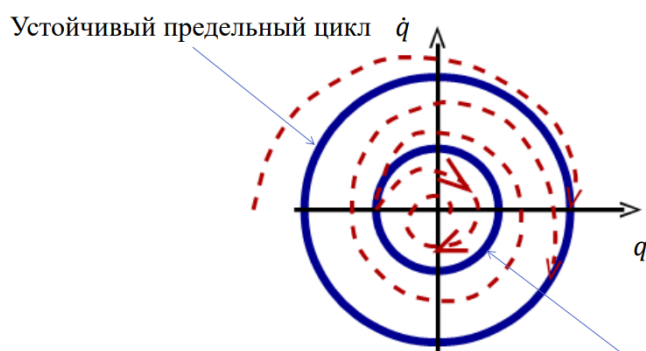
Другой вариант это, так называемый, жесткий режим возбуждения автоколебаний. Предположим, что мы задали рабочую точку в области вольтамперной характеристики, где наклон не такой большой. Возможно, что для этой точки условие возбуждения колебаний не выполнено, с одной стороны. С другой стороны, зависимость средней крутизны от напряжения затвор-исток примет вид как на рис. 8.6. Если на этом графике провести прямую по условию $R - \frac{MS}{C} = 0$, то она пересечет кривую в двух точках. (Конечно может оказаться, что прямая лежит выше кривой, тогда автоколебаний не будет никогда.) Очевидно, что одна из двух точек неустойчива. Но если нам каким-то образом с помощью внешнего воздействия нам удастся «перебросить» амплитуду через этот горб, то она «свалится» во вторую точку, которая является устойчивой, и колебания продолжают существовать.

Иногда удобно рассматривать автоколебания не на обычном графике зависимости напряжения или заряда от времени, а на фазовом портрете. Автоколебания в таких координатах обычно выглядят в виде некоторого замкнутого цикла, время здесь присутствует как параметр. Гармонические колебания обычно предстают в виде эллипса. Мягкий режим установления колебаний на фазовой плоскости изображается в виде спирали, которая приближается к предельному циклу. В случае жесткого режима возбуждения колебаний существует два предельных цикла. Один из которых неустойчивый, при любом возмущении фазовая траектория пойдет по спирали к центру, и колебания будут затухать, а второй устойчивый, спирали наоборот будут стремиться сходиться к этому внешнему устойчивому предельному циклу.



Устойчивый предельный цикл

Рис. 8.7. Мягкий режим возбуждения колебаний на фазовом портрете.



Неустойчивый предельный цикл

Рис. 8.8. Жесткий режим возбуждения колебаний на фазовом портрете.

RC-генераторы

Рассмотрим вариант RC-генератора с цепью Вина, схема которого состоит из неинвертирующего усилителя и цепи обратной связи (рис. 8.9).

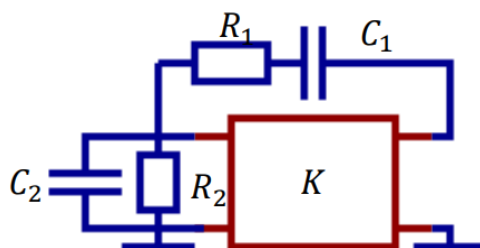


Рис. 8.9. Схема RC-ггенератора.

Коэффициент передачи цепи обратной связи имеет вид

$$\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

где комплексные сопротивления:

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1},$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + i\omega C_2 R_2}.$$

Подставляем Z_1 и Z_2 в формулу β и получаем:

$$\beta = \frac{R_2}{(1 + i\omega C_2 R_2) \left[R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} + \frac{R_2}{1 + i\omega C_2 R_2} \right]},$$

$$\frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + \frac{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{i\omega C_1 R_2}.$$

При $\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$ коэффициент передачи:

$$\beta(\omega_0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}.$$

На частоте ω_0 сдвиг фазы, который вносят эта цепочка равен нулю, это как раз то, что нужно для выполнения условия баланса фаз. Баланс амплитуд можно выполнить, подобрав надлежащим образом коэффициент усиления усилителя. Для того, чтобы его посчитать, надо посчитать, какие потери вносит цепь обратной связи на этой частоте. Давайте еще больше упростим в систему, будем считать что цепь Вина собрана из одинаковых сопротивлений и емкостей. Тогда для коэффициента передачи имеем $\beta(\omega_0) = \frac{1}{3}$, значит, нам надо сделать усилитель с коэффициентом усиления $K \geq 3$. Если изначально коэффициент усиления был достаточно велик, существенно больше, чем полученный $K \cong 3$, то условия баланса фаз и баланса амплитуд будут выполнены не только для одной, но и для некоторых частот вблизи нее. Это приведет к тому, что колебания будут не строго гармоническими, а искаженными (рис. 8.10).

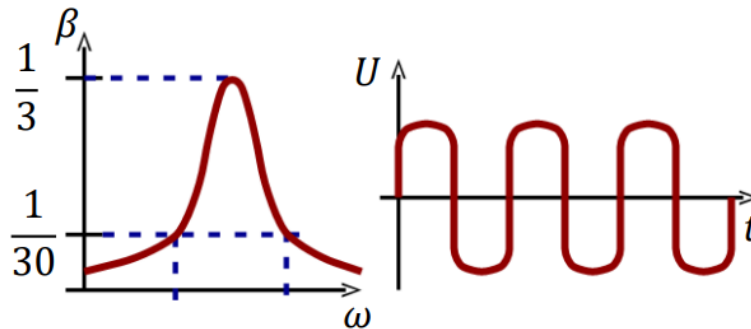


Рис. 8.10. Искажённые колебания при большом коэффициенте усиления.

Простейший генератор релаксационных колебаний

Еще один генератор, который является моделью для многих разных генераторов, это, так называемый, генератор релаксационных колебаний. Простейший генератор релаксационных колебаний можно собрать с помощью прибора, который называется газовый разрядник. Прибор представляет собой баллон, в котором есть два электрода и газ при низком давлении. Если напряжение между электродами превышает некоторую величину, то зажигается тлеющий разряд, под влиянием разности потенциалов между

электродами электроны, которые всегда в каком-то количестве есть внутри газа, разгоняются на длине свободного пробега до такой скорости, что ионизируют атомы газа, в результате чего образуются новые электроны, электронная лавина. Ионизация становится достаточной для того, чтобы между электродами протекал ток, причем напряжение, при котором зажигается разряд, и напряжение, при котором разряд гаснет, существенно отличаются.

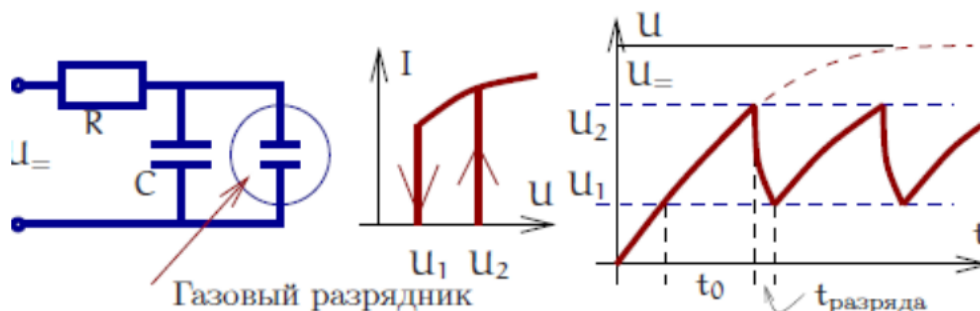


Рис. 8.11. Схема простейшего RC-генератора с газовым разрядником.

Возьмем обычную RC-цепочку и параллельно емкости подключим газовый разрядник (рис. 8.11). После включения постоянного напряжения на входе RC-цепочки напряжение на конденсаторе, а значит и на газовом разряднике будет расти по экспоненциальному закону. Далее при некотором значении напряжения зажжется разряд в разряднике, сопротивление резко упадет, заряд с этого конденсатора будет стекать через разрядник, напряжение довольно быстро уменьшится до U_1 , при котором разряд гаснет. Далее все будет повторяться. Можно посчитать период колебаний, если напряжение на конденсаторе

$$U(t) = U_0(1 - e^{-t/RC}),$$

$$\frac{U_0 t}{RC} \cong U_2 - U_1$$

$$T = t_0 + t_{\text{разряда}} \cong \frac{U_2 - U_1}{U_0} RC + t_{\text{разряда}},$$

Симметричный мультивибратор

Симметричный мультивибратор содержит два простых усилителя, например, на полевых транзисторах и два конденсатора: конденсатор C_1 , который соединяет сток первого транзистора и затвор второго, и конденсатор C_2 , который соединяет сток второго транзистора и затвор первого (рис. 8.12). Выходной сигнал первого усилителя является входным для второго, выходной сигнал второго является входным для первого. Можно получить коэффициент передачи цепи связи, для обычного мультивибратора условие баланса амплитуд сильно перевыполнено, то есть $K_\beta = K_1 K_2 \gg 1$.

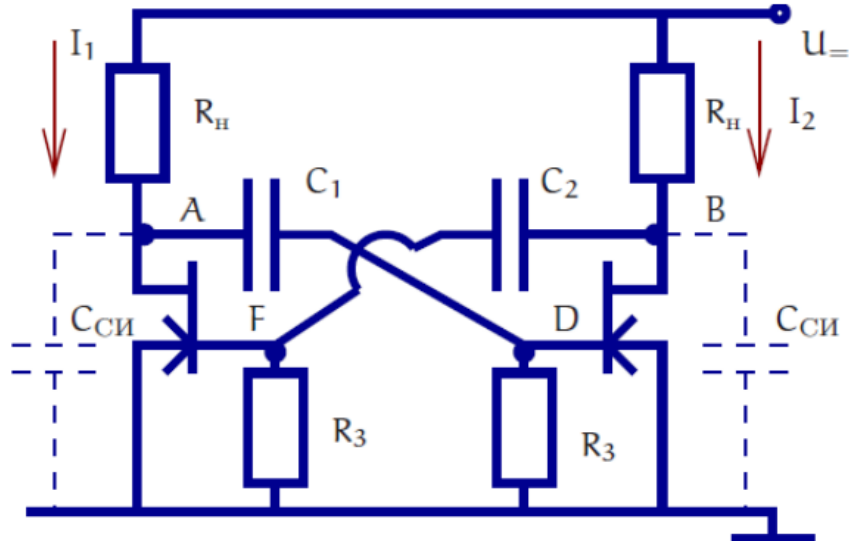


Рис. 8.12. Схема симметричного мультивибратора.

Разберемся, почему и как возникают колебания в мультивибраторе. Здесь надо помнить, что есть паразитные емкости, и обычно мультивибратор собирают так, чтобы было выполнено условие

$$R_n C_{си} \ll C_{1,2} R_3.$$

Пусть в начальный момент все симметрично, через цепи сток-исток у транзисторов протекают одинаковые токи, но из-за какой-то флуктуации произошло небольшое изменение тока первого транзистора на величину $+\Delta I_{10}$, тогда напряжение в точке A изменится на величину

$$\Delta U_A = -\Delta I_{10} R_n.$$

Если это произошло быстро, то изменение напряжения на конденсаторе невелико

$$\Delta U_{C_1} \cong 0.$$

Будем считать, изменения напряжения в точке D такое же как и в точке A:

$$\Delta U_D = -\Delta I_{10} R_n.$$

Тогда правый транзистор усиливает это изменение напряжения в точке B:

$$\Delta U_B = -\mu \Delta U_D = +\mu \Delta I_{10} R_n,$$

опять же

$$\Delta U_{C_2} \cong 0.$$

Получаем

$$\Delta U_F = \Delta U_B.$$

Это вызовет изменение тока, флуктуация которого инициировала лавинный процесс:

$$\Delta I_1 = +SK \Delta U_B = SR_n K^2 \Delta I_{10} \gg \Delta I_{10}.$$

Таким образом, система неустойчива, и в результате малого изменения тока в каком-нибудь из транзисторов она опрокинется, в итоге первый транзистор окажется

полностью открытым, а второй – полностью закрытым. Характерное время лавинного процесса определяется паразитной емкостью сток-исток и сопротивлением нагрузки:

$$\tau_{front} \cong R_H C_{СИ} \cong 10^3 \times 10^{-11} = 10^{-8} \text{ с.}$$

Во время скачка U_A резко упало (ток I_1 сильно вырос), поэтому после скачка C_1 разряжается. Этот ток I_{C_1} создает отрицательное напряжение на правом затворе и поддерживает правый транзистор запертым. Одновременно C_2 заряжается от U_{C_2} до $U_{\text{н}}$. Этот ток поддерживает положительное напряжение на левом транзисторе (он открыт). Когда C_1 разрядится, напряжение на затворе правого транзистора станет меньше запирающего. Тогда ток через правый транзистор возрастет, и произойдет обратный скачок, и в итоге будет заперт левый транзистор.

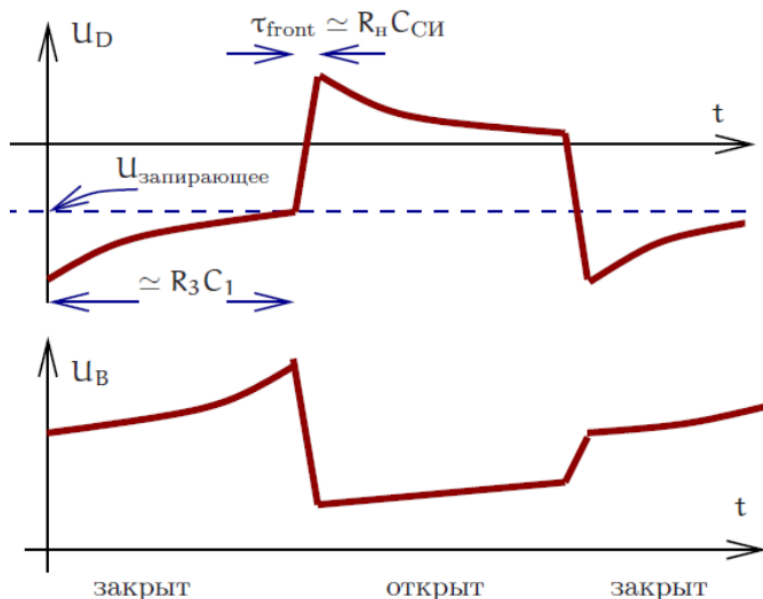


Рис. 8.13. Характерные зависимости напряжений в разных точках мультивибратора.

На выходе мы получим не совсем прямоугольные импульсы, поскольку есть переходные процессы, но у реального мультивибратора можно подобрать элементы так, что пики будут составлять единицы процентов от полного скачка напряжения.

Мы разобрались с мультивибратором, можно добавить, что если лишить этот мультивибратор емкостей, и сделать вместо них входы для внешнего сигнала, то мы получим триггер. Триггер не является генератором, но имеет два устойчивых положения, переход от одного из них к другому можно инициировать с помощью внешних импульсов.

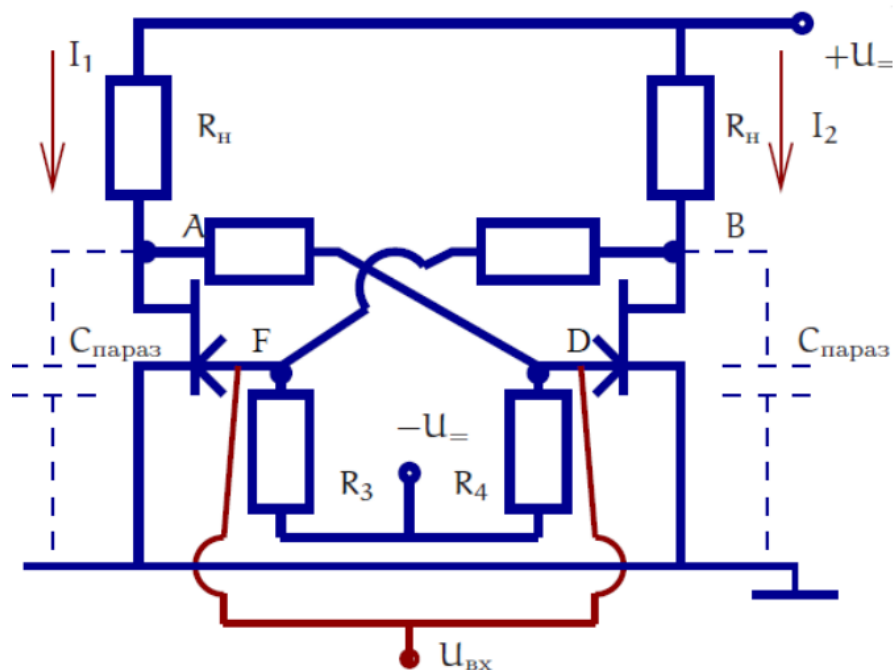


Рис. 8.14. Схема триггера.

ЛЕКЦИЯ 9. ШУМЫ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Специфические генераторы

На прошлой лекции мы с вами рассматривали генераторы периодических колебаний. В самом общем виде очень большое число автоколебательных систем можно представить в виде упрощенной блок-схемы на рис. 9.1, которая содержит некий активный элемент и цепочку обратной связи. Мы рассматривали условия, при которых в такой системе возможны стационарные автоколебания – это баланс амплитуд и баланс фаз.

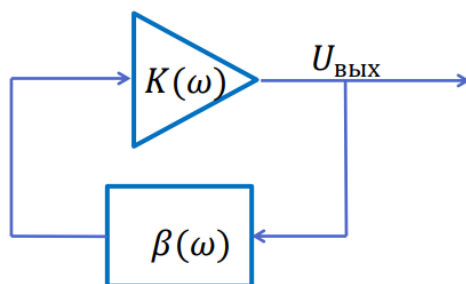


Рис. 9.1. Схема генератора электрических колебаний.

Мы рассматривали также конкретные реализации генераторов, в том числе генератор на полевом транзисторе. Мы пришли к выводу, что для того, чтобы получить стационарную амплитуду колебаний, необходимо принимать во внимание нелинейность усилителя. Мы также рассматривали RC-генератор, говорили о том, как могут возбуждаться колебания в зависимости от режима активного элемента, о мягком и жестком режиме установления колебаний, закончили рассмотрением симметричного мультивибратора на транзисторах.

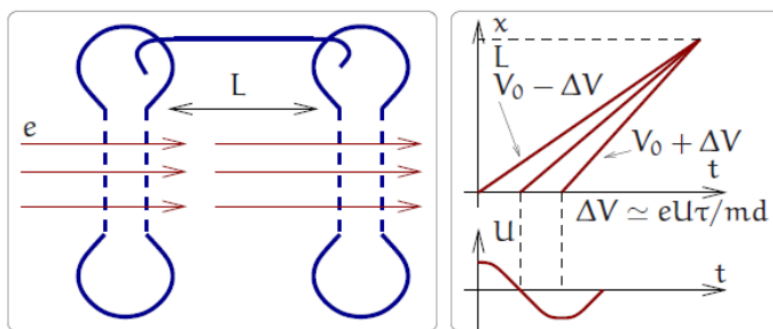


Рис. 9.2. Клистрон.

Мы не успели только рассмотреть примеры некоторых более специфических генераторов колебаний. Во-первых, хочется рассказать о генераторе на приборе, который называется клистрон. Клистрон – это вакуумная трубка, в которой находится источник свободных электронов (разогретый катод), электростатическая система, которая фокусирует электронный пучок и разгоняет его, и, кроме того, объемный резонатор (один или несколько) на ту частоту, которую должен генерировать клистрон. Генерация происходит следующим образом: вначале электронный пучок пересекает

область первого резонатора, в результате электроны получают дополнительный импульс $\Delta p = \pm \frac{eU\tau}{d}$, по прошествии некоторого времени за счет того, что быстрые электроны догоняют медленные, в клистроне формируются электронные сгустки. Размещаем второй резонатор на таком расстоянии L от первого резонатора, чтобы эти сгустки электронов возбуждали в нем электромагнитные колебания. Для того, чтобы эта система стала автоколебательной, достаточно бросить линию связи, которая бы часть энергии из второго резонатора передавала в первый. Такие источники позволяют получать колебания на высоких частотах в свч-диапазоне.

Существуют различные технические реализации описанного метода, связанного с формированием электронных сгустков. Первый вариант – это, так называемый, отражательный клистрон (рис. 9.3). Для того, чтобы сэкономить размер клистрона, который обычно оказывается достаточно габаритным прибором, можно использовать зеркало, для электронов это потенциал, то есть с помощью электродов формируется специальной формы потенциал, который сначала тормозит электроны, а затем разгоняет их в обратном направлении. Характерная мощность отражательного клистрона может достигать 1 МВт в непрерывном и 20 МВт в импульсном режиме. При этом коэффициент полезного действия может быть очень высоким: до 70% кинетической энергии электронов можно преобразовать в энергию колебаний.

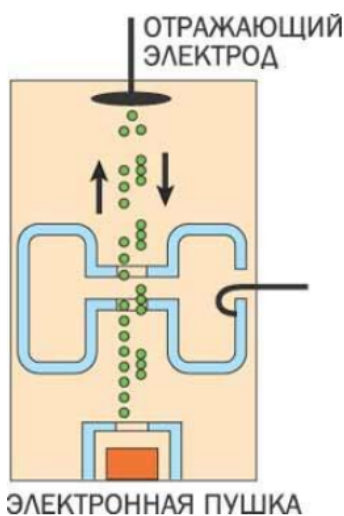


Рис. 9.3. Отражательный клистрон.

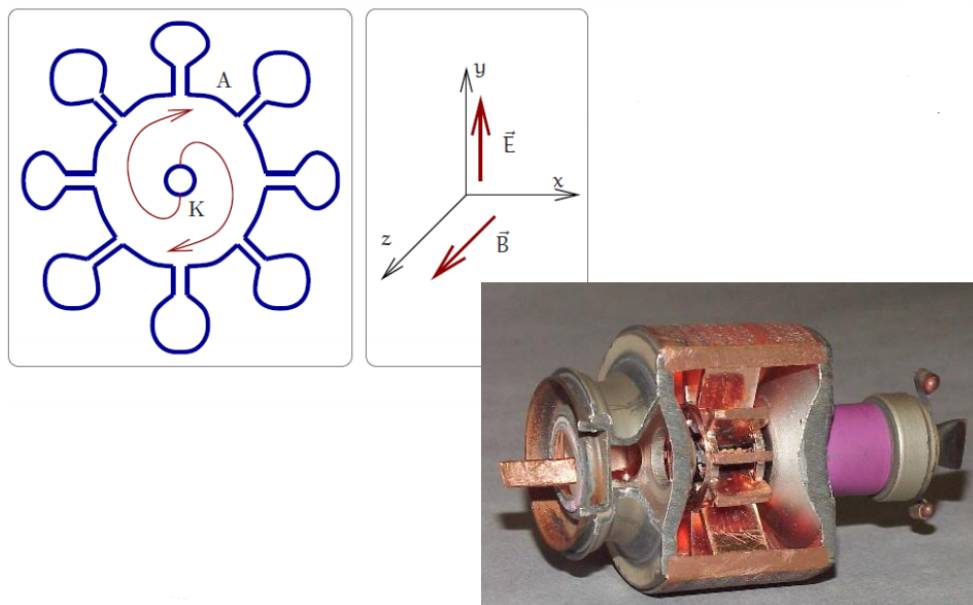


Рис. 9.4. Магнетрон.

Дальнейшее развитие такого приема привело к созданию магнетрона, который стоит во всех микроволновых печах. Магнетрон содержит катод, который проходит насквозь как ось фигуры, он служит источником электронов, а анодом является вся остальная массивная часть. Анод содержит полости, которые тоже представляют из себя резонаторы на ту длину волны, которую должен генерировать магнетрон. Также в устройстве используется сильное постоянное магнитное поле для того, чтобы электронной летели не по прямой от катода к аноду, а двигались по спирали. Дальше происходит то же самое, что в клистроне. Магнетроны используются не только в микроволновых печах, они используются везде, где требуется получить мощное микроволновое излучение. Мощность магнетронов составляет от 1 Вт (малогабаритные лабораторные магнетроны) до 100 МВт импульсной мощности в РЛС.

Шумы в радиофизических системах

Шумы неизбежно присутствуют в любых, в том числе в радиофизических, системах. С точки зрения математики любой шум можно описывать как случайный процесс $\zeta(t)$. В отличие от сигнала $\zeta(t)$ — это объединение всех возможных реализаций $x(t)$. Для случайного процесса можно определить среднее значение $\langle \zeta(t) \rangle$ и дисперсию $\Delta^2 \zeta(t) = \langle \zeta^2(t) \rangle - \langle \zeta(t) \rangle^2$. Перейти к анализу реальных шумов помогает, так называемая, эргодическая гипотеза: усреднение по реализациям эквивалентно усреднению по времени, то есть вместо того, чтобы каким-то невозможным на практике образом восстанавливать начальное значение и смотреть одну за другой реализации, мы возьмем одну единственную реализацию и будем наблюдать за ней достаточно долгое время, тогда для среднего значения и дисперсии получим:

$$\langle \zeta(t) \rangle = \bar{x} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt,$$

$$\Delta^2 \zeta(t) = \sigma = \overline{\Delta x^2} = \overline{(x(t) - \bar{x})^2}.$$

Существует большой класс процессов, у которых статистические параметры \bar{x}, σ не зависят от времени, такие процессы называются стационарными, именно их мы и будем в дальнейшем рассматривать. Более того, для простоты будем рассматривать случайные процессы, у которых среднее значение равно нулю.

Рассмотрим реализацию $u(t)$ стационарного процесса, пусть $\overline{u(t)} = 0$. Следующая статистическая характеристика, которую можно определить для случайного процесса – это автокорреляционная функция.

$$B(\tau) = \overline{u(\tau)u(t-\tau)},$$

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)u(t-\tau) dt,$$

$$B(\tau) = B(-\tau),$$

$$B(0) = \sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)^2 dt.$$

Спектральная плотность

Следующей очень важной статистической характеристикой случайного процесса является спектральная плотность. Спектральная плотность для шумов обычно определяется как спектральная плотность мощности флуктуаций $\tilde{S}(\omega)$:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Физически подойти к определению спектральной плотности можно через следующий мысленный эксперимент. Предположим, у нас есть некоторый источник случайного шумового сигнала шумового, выход этого источника подключим к фильтру. Фильтр пропускает все частоты в области $\Delta\omega$ около частоты ω и не пропускает все остальные частоты. Выберем ширину полосы фильтра равной 1 Гц и будем измерять дисперсию напряжения на его выходе, эта дисперсия и есть спектральная плотность мощности флуктуаций на частоте ω для этого источника:

$$\Delta u^2 \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_{ab}(t)^2 dt \cong \tilde{S}_u(\omega) \times 2 \times \frac{\Delta\omega}{2\pi}.$$

Более строго можно показать это следующим образом:

$$\Delta u_{\Delta\omega}^2 = \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \overline{u(\omega)u(\omega')^*} e^{i(\omega-\omega')t} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \tilde{S}_u(\omega) \times 2 \times \frac{\Delta\omega}{2\pi},$$

при расчете мы учли, что $\overline{u(\omega)u(\omega')^*} = 2\pi\delta(\omega - \omega')\tilde{S}_u(\omega)$. Заметим, что определенная таким образом спектральная плотность существует как для положительных, так и для отрицательных частот.

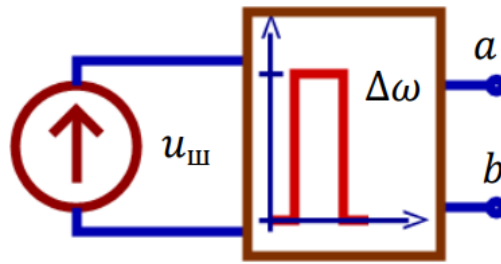


Рис. 9.5. Схема, иллюстрирующая определение спектральной плотности шума.

Теорема Винера-Хинчина

Теорема Винера-Хинчина позволяет связать между собой описание шумов на различных языках: на временном языке – это описание с помощью автокорреляционной функции, на спектральном языке – с помощью спектральной плотности. Запишем преобразование Фурье случайного процесса:

$$u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{i\omega t} dt, \overline{u(\omega)} = 0.$$

Тогда

$$\overline{u(\omega)u(\omega')^*} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(t)u(t')^*} e^{i(\omega t - \omega' t')} dt dt',$$

введем обозначение $\tau = t - t'$:

$$\overline{u(t)u(t')^*} = B(t - t') = B(\tau),$$

$$\omega t - \omega' t' = \omega\tau + (\omega - \omega')t',$$

$$\overline{u(\omega)u(\omega')^*} = 2\pi\delta(\omega - \omega') \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Но мы помним, что выражение $\overline{u(\omega)u(\omega')^*}$ входит в определение спектральной плотности:

$$\overline{u(\omega)u(\omega')^*} = 2\pi\delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_u(\omega).$$

Таким образом, можно считать доказанным утверждение теоремы Винера-Хинчина о том, что спектральная плотность мощности шумового процесса есть Фурье-образ от его автокорреляционной функции:

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau,$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega)e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для дисперсии, взяв интеграл от спектральной плотности мощности по всем частотам, получим:

$$\sigma = B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Иногда в разных учебниках к определению спектральной плотности мощности подходят по-разному. На практике удобнее использовать спектральную плотность, которая определена только для положительных частот, такая спектральная плотность называется «односторонней» $S^+(\omega)$ и связана с «двусторонней» $\tilde{S}(\omega)$ следующим образом:

$$S^+(\omega) = 2\tilde{S}(\omega), \omega \geq 0.$$

Теорема Винера-Хинчина для «односторонней» спектральной плотности примет вид:

$$S^+(\omega) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \cos \omega\tau d\tau,$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S^+(\omega) \cos \omega\tau \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Приведем доказательство:

$$S^+(\omega) \equiv 2\tilde{S}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B(\tau)(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) d\tau = 4 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega\tau d\tau,$$

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} \tilde{S}(\omega)(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_0^{\infty} S^+(\omega) \cos \omega\tau \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Преобразование шума в линейных цепях

Поговорим о том, как преобразуется шум в радиофизических системах. В случае линейной системы получить результат очень легко:

$$\begin{aligned}\overline{u_{\text{ВХ}}(\omega)u_{\text{ВХ}}(\omega')^*} &= 2\pi\delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_{\text{ВХ}}(\omega), \\ \overline{u_{\text{ВЫХ}}(\omega)u_{\text{ВЫХ}}(\omega')^*} &= 2\pi\delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega), \\ u_{\text{ВЫХ}}(\omega) &= K(\omega)u_{\text{ВХ}}(\omega),\end{aligned}$$

в итоге получим выражение

$$\tilde{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = |K(\omega)|^2 \tilde{S}_{\text{ВХ}}(\omega).$$

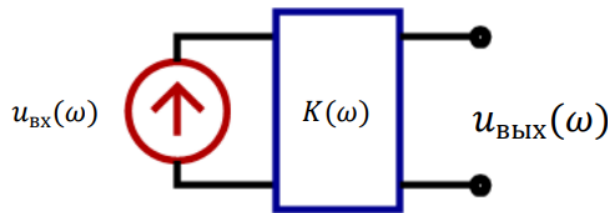


Рис. 9.6. Иллюстрация расчета преобразования шума в линейной системе.

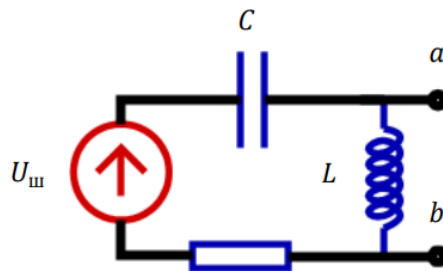


Рис. 9.7. Пример линейной цепи с источником шума.

Рассмотрим пример, предположим, у нас есть источник шумового напряжения, в качестве линейной цепи возьмем последовательный колебательный контур, выходной сигнал будем снимать с катушки индуктивности. Комплексный коэффициент передачи получить легко

$$K(\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L + 1/i\omega C}.$$

Пусть $S(\omega)$ — спектральная плотность мощности шумового напряжения $U_{\text{ш}}$, тогда спектральная плотность мощности $S_{ab}(\omega)$ напряжения $U_{ab} = U_{\text{ш}} \times K(\omega)$:

$$S_{ab}(\omega) = S(\omega) \times |K(\omega)|^2 = \frac{S(\omega)\omega^2 L^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

Спектральную плотность мощности можно считать как для напряжения, так и для тока, приведем размерности соответствующих величин:

$$[\tilde{S}_u(\omega)] = \frac{B^2}{\Gamma_{\text{ц}}},$$

$$[\tilde{S}_I(\omega)] = \frac{A^2}{\Gamma_{\Sigma}}.$$

В радиофизике часто используется понятие белый шум – это шум, спектральная плотность которого не зависит от частоты

$$S^+(\omega) = S_{const}.$$

Заметим, что это снова математическая абстракция, если бы шум был идеально белым, он должен был бы нести бесконечную энергию, поскольку он определен для всех, в том числе и бесконечных частот. Поэтому на практике белым шумом называют шум, у которого спектр не зависит от частоты в некотором интересующем нас диапазоне частот. Применяя теорему Винера-Хинчина, получим автокорреляционную функцию белого шума:

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} S^+(\omega) \cos \omega \tau \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{S_0}{2} \delta(\tau).$$

Можно прийти к выводу, что белый шум – это такой случайный процесс, при котором значение в следующий сколь угодно близкий момент времени совершенно не зависит от текущего значения.

Тепловой шум

Первым видом шума, который мы рассмотрим, будет тепловой шум, он связан со случайным тепловым движением носителей заряда. Возьмем RC-цепочку, изображенную на рис. 9.8, и предположим что сопротивление R находится при реальной отличной от нуля физической температуре, в таком случае это сопротивление будет источником шумов. Спектральную плотность мощности теплового шума обозначим $S_{\text{тш}}^+(\omega) = S_0^+$, попробуем посчитать, какая же будет дисперсия напряжения на конденсаторе. Учитывая

$$U_C(\omega) = U_{\text{тш}} K(\omega) = \frac{U_{\text{тш}}/i\omega C}{R + 1/i\omega C},$$

$$S_C^+(\omega) = S_0^+ |K(\omega)|^2 = \frac{S_0^+}{1 + (\omega RC)^2},$$

получим

$$\overline{U_C^2} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_C^+(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{S_0^+}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{S_0^+}{2\pi RC} \arctg(\omega RC)|_0^{\infty} = \frac{S_0^+}{4RC}.$$

Вспоминаем термодинамику

$$\frac{C \overline{U_C^2}}{2} = \frac{kT}{2},$$

отсюда следует, что спектральная плотность мощности теплового шума имеет вид (теорема Найквиста)

$$S_0^+ = 4kTR.$$

Можно посчитать дисперсию напряжения в любой полосе частот $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$:

$$\Delta U_{\text{ТШ}}^2 \cong 4kTR\Delta f = \frac{2}{\pi}kTR\Delta\omega.$$

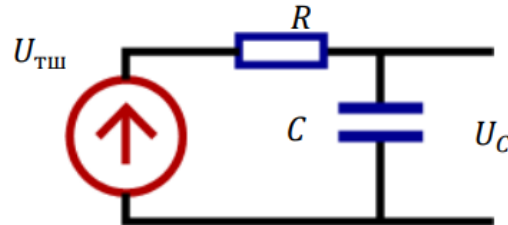


Рис. 9.8. RC-цепочка с виртуальным источником теплового шума.

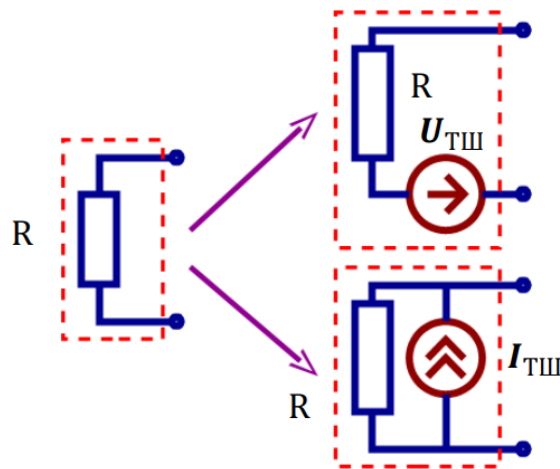


Рис. 9.9. Эквивалентные схемы шумового сопротивления.

Мы использовали представление шума в виде источника напряжения и для спектральной плотности мощности получили $S_U(\omega) = 4kTR$. Можно то же самое сопротивление представить в виде эквивалентной схемы с источником шумового тока (рис. 9.9), в этом случае спектральная плотность мощности $S_I(\omega) = \frac{4kT}{R}$.

Теорему Найквиста можно записать в более общем виде

$$S_0 = 4R \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \right).$$

Можно, раскладывая экспоненту в ряд, убедиться что, если $\hbar\omega \ll kT$, то $S_0 = 4kTR$. В противоположном случае ($\hbar\omega \gg kT$) при $T \rightarrow 0$ или на высоких частотах, получим $S_0 = 2R\hbar\omega$. При комнатной температуре $T = 300^\circ\text{K}$ граница между квантовой и классической областью составляет

$$f_{\text{гр}} = \frac{\omega_{\text{гр}}}{2\pi} = \frac{kT}{h} \cong 6 \cdot 10^{12} \text{ Гц}.$$

Важно отметить, что теорема Найквиста является частным случаем флуктуационно-диссипационной теоремы, которая утверждает, что если в электрической системе есть потери, то есть имеется активное сопротивление, то через это сопротивление в систему будут поступать флуктуации. Например, реактивный элемент емкость не является источником тепловых шумов, поскольку не вносит потерь. Отметим, что утверждение флуктуационно-диссипационной теоремы касается не только радиофизических систем. Если вместо сопротивления R подставить трение h , то все сказанное будет справедливо для механической системы.

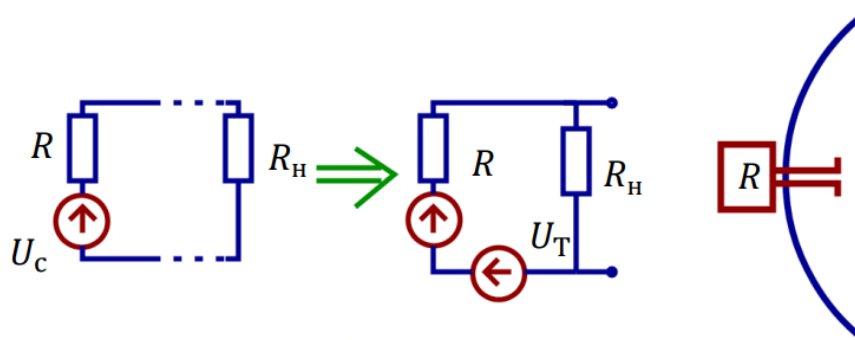


Рис. 9.10. Иллюстрация ограничений, накладываемых шумами.

Предположим, что у нас есть приемная антенна. Минимальная мощность сигнала, которую можно обнаружить с помощью такой системы, как раз в случае отсутствия других источников флуктуаций ограничена тепловыми шумами

$$W_T = \frac{U_T^2 R}{(R + R_n)^2}.$$

То есть условие обнаружения сигнала можно записать следующим образом:

$$W_{\text{сигн}} > W_T \text{ или } U_{\text{сигн}}^2 > U_T^2.$$

Для того, чтобы измерить наименьший возможный сигнал, требуется еще согласовать по шумам наш приемник и источник сигнала, которым в данном случае является антенна. Пусть у нас есть приемное устройство, которое имеет некоторые собственное входное сопротивление $R_{\text{вх}}$, и есть источник сигнала, который имеет сопротивление R_r . На вход этой системы будет поступать не только полезный сигнал от источника, но и тепловые шумы от этого генератора. Вопрос заключается в том, как оптимально выбрать сопротивление R_r , чтобы отношение сигнала к шуму на выходе приемного устройства было наилучшим. В общем случае ответ оказывается не таким уж простым. Дело в том, что любое приемное устройство обладает собственными шумами. Эти дополнительные шумы можно представить в виде источника, подключенного ко входу приемника. Оптимальный выбор сопротивления источника, то есть оптимальное согласование, зависит от того, что представляют собой эквивалентные источники шумового тока и шумового напряжения. В очень большом количестве реальных ситуаций оказывается, что наилучший результат наблюдается при согласовании

$$R_{\Gamma} = R_{\text{вх}}.$$

Шум не всегда вреден, существуют случаи, когда шум несет интересную и уникальную информацию, например, мы уже упоминали открытие реликтового излучения.

ЛЕКЦИЯ 10. ШУМЫ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

На прошлой лекции мы с вами рассматривали шумы в радиофизических системах и говорили о том, что шумы по своей природе бывают техническими, связанными с несовершенством используемых полупроводниковых приборов, схемы измерений, постановки измерений, такие шумы считаются устранимыми, и фундаментальными, то есть связанными именно с устройством нашего мира, от которых в целом избавиться невозможно. Мы остановились на том, что рассматривали первый из важных фундаментальных механизмов возникновения шумов в радиофизических системах – это тепловые флуктуации.

Рассмотрим один пример: пусть у нас есть длинная линия, нагруженная на сопротивление, для простоты по величине равное волновому сопротивлению линии $R = \rho$. Предположим, что волна бежит слева из линии и поглощается в сопротивлении, следуя теореме Найквиста, делаем вывод, что в этой линии всегда слева направо будут распространяться флуктуации, порождаемые сопротивлением R , если она находится при какой-то физической температуре T . Теперь заменим это сопротивление на дипольную антенну, снабженную параболическим отражателем. Если это согласованная антенна, тогда волна, которая распространяется от источника по длинной линии, через дипольную антенну и отражатель будет возбуждать электромагнитную волну, уходящую в пространство. Что будет шумами в такой системе, все зависит от того, куда направлена эта антенна. Если это антенна обычной наземной связи, то она будет видеть равновесное излучение теплого тела, соответствующее $300^\circ K$. Если же эту антенну направить в космос и выбрать направление так, чтобы на пути не попадались очень горячие источники, яркие звезды, то мы будем видеть очень маленькую температуру и можем увидеть реликтовое излучение.



Рис. 10.1. Длинная линия, нагруженная на сопротивление.

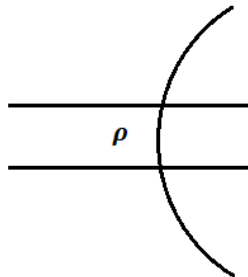


Рис. 10.2. Длинная линия, нагруженная на дипольную антенну.

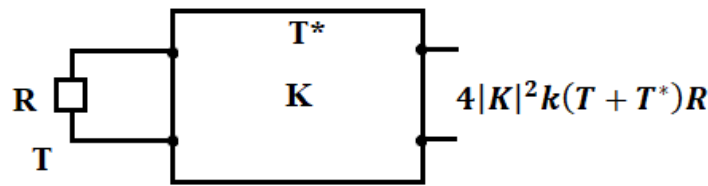


Рис. 10.3. Схема усилителя.

Шумы порождаются во всех активных элементах, в данном случае я имею ввиду усилителя. Любой реальный усилитель не только усиливает шум, который есть на его входе, но еще и добавляет свои собственные шумы. Физическая причина состоит в том, что внутри усилителя тоже есть теплые элементы, кроме того, есть специфические источники типа дробового шума, генерационно-рекомбинационного шума, фликкер-шума и так далее. Если представить усилитель в виде черного ящика и считать, что к его входу подключено обычное активное сопротивление R , находящееся при физической температуре T , то мы должны предположить, что на его выходе должен присутствовать усиленный тепловой шум сопротивления R , спектральная плотность мощности которого $4|K|^2 kTR$. Если это реальный усилитель, то мы всегда будем видеть большую величину, и договорились эту большую величину обозначать в виде некой дополнительной эффективной шумовой температуры $4|K|^2 k(T + T^*)R$. Отметим, что усилитель должен быть согласован с источником по шумам. Дело в том, что шумовая температура T^* будет получаться различной для различных величин R , и надо так подобрать R , чтобы T^* получалась наименьшей. В большинстве случаев это просто условие того, что R равно собственному входному сопротивлению усилителя.

Шумы в усилителях можно охарактеризовать и с помощью других величин, которые связаны с шумовой температурой, одна из них – это коэффициент шума усилителя

$$F = \left(\frac{U_s}{U_n} \right)_{\text{вход}}^2 / \left(\frac{U_s}{U_n} \right)_{\text{выход}}^2 = \frac{T_{\text{вх}} + T^*}{T_{\text{вх}}} = 1 + \frac{T^*}{T_{\text{вх}}},$$

где U_s^2 – спектральная плотность сигнала, U_n^2 – спектральная плотность шума. Часто в справочниках коэффициент шума выражают в децибелах, формула пересчета имеет вид

$$F_{\text{дб}} = 10 \log F.$$

Если собрать простой усилитель на самых обычных универсальных транзисторах, то можно получить шумовые температуры и в 1000°C , тем не менее правильно спроектированный усилитель на лучших современных полупроводниковых приборах может иметь очень маленькую шумовую температуру $T^* \cong 1^\circ\text{K}$.

Немного поговорим о многокаскадных усилителях, очевидно, что если у нас есть несколько каскадов усиления, то каждый следующий каскад получает усиленные сигнал и шум, таким образом, его собственный вклад в шумы всей системы будет в K^2

меньше, где K – это коэффициент усиления первого каскада усиления. Важно, чтобы первый каскад вносил как можно меньше шумов, влияние всех остальных каскадов на шумовые характеристики будет пренебрежимо мало.

Разберемся, как построить процедуру измерения шумовой температуры. На самом деле, достаточно измерить спектральную плотность мощности флуктуаций на выходе усилителя на требуемой частоте при двух разных температурах сопротивления R , получим уравнения:

$$S_1 = 4k(T + T^*)R,$$

$$S_2 = 4k(2T + T^*)R,$$

откуда

$$T^* = \frac{2S_1 - S_2}{4kR}.$$

Кроме того, вместо генератора Найквиста можно подключить специальный прибор, который называется генератором шума, он позволяет калибровать усилители. Такой источник может быть основан на втором по счету из рассматриваемых нами фундаментальных механизмов возникновения флуктуаций – это явление дробового шума.

Дробовой шум

Физически причина появления дробового шума заключается в дискретности носителей заряда. Классическим объектом, на котором можно легко объяснить возникновение дробового шума, является ламповый диод. Электроны вылетают из горячего катода, под влиянием разности потенциалов анод-катод двигаются в вакууме по направлению к аноду и входят в анод. Этот процесс является дискретным, поскольку электрон находится либо в свободном пространстве перед анодом, либо он уже преодолел потенциальный барьер и движется внутри материала анода, этот переход скачкообразный, электрон не может быть наполовину в свободном пространстве, а наполовину в аноде. На самом деле, ток диода будет состоять из отдельных импульсов, в пределе мы можем сделать плотность тока настолько маленькой, что эти импульсы будут идти очень редко $\tau_0 \ll \tau_1$ (рис. 10.4). Тогда средний ток в этой цепи будет равен $\bar{I} = \frac{e}{\tau_1}$. Оценим автокорреляционную функцию флуктуаций такого тока:

$$\overline{I(t)I(t-\tau)} = B(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} I(t)I(t-\tau)dt.$$

Автокорреляционная функция максимальна при $\tau = 0$ и уменьшается по мере увеличения времени:

$$B(\tau) = \frac{I_0^2}{\tau_1}(\tau_0 - |\tau|), \text{ если } |\tau| < \tau_0,$$

$$B(\tau) = 0, \text{ если } |\tau| > \tau_0.$$

Нас интересуют частоты $\omega \ll 1/\tau_0$, поэтому можно считать, что

$$B(\tau) = \frac{I_0^2 \tau_0^2}{\tau_1} \delta(\tau) = \frac{e^2}{\tau_1} \delta(\tau).$$

Рассчитываем спектральную плотность мощности флуктуаций тока:

$$S_{\text{др}}(\omega) = 4 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{e^2}{\tau_1} = 2e\bar{I}.$$

Последняя формула носит название теоремы Шоттки. Замечаем, что $S_{\text{др}}(\omega)$ не зависит от частоты, значит дробовой шум является белым.

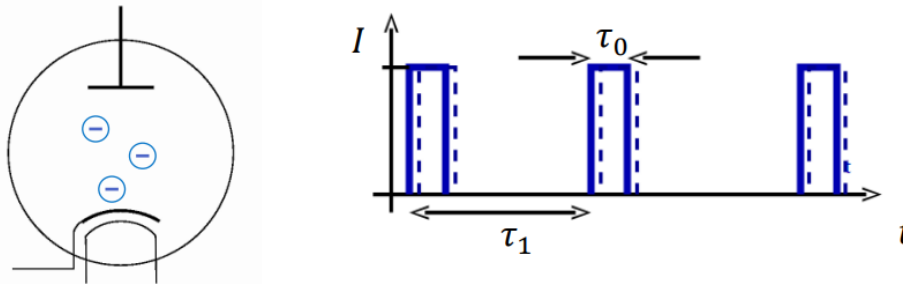


Рис. 10.4. Ламповый диод и его ток.

Возникает вопрос, будет ли обычное сопротивление, которое, как мы знаем, является источником тепловых флуктуаций, также источником дробового шума, ведь в нем носители заряда тоже дискретные. Правильный ответ – не будет, потому что здесь нет потенциального барьера, шум возникает только при переходе через потенциальный барьер. Дробовой шум будет возникать, например, в полупроводниковом диоде, но проблема в том, что полупроводники имеют сильную зависимость параметров барьера от температуры, поэтому часто используют ламповые вакуумные диоды, до сих пор выпускаются специальные шумовые диоды.

Вернемся к теореме Шоттки, необходимо оговорится, что формула справедлива при условиях:

- Малое время τ_0 “импульса тока”, $\omega \tau_0 \ll 1$. Если $\omega \tau_0 \geq 1$, то $S_{\text{др}}(\omega)$ меньше.
- Нет корреляции между зарядами. (На самом деле из-за кулоновского отталкивания может возникать депрессия дробового шума).
- Нет сгустков зарядов. (На самом деле сгустки есть - спектральная плотность $S_{\text{др}}(\omega)$ растет на низких частотах).

Иногда говорят, что правильнее использовать обобщенную формулу Шоттки, в которую дополнительно входят корректирующие множители, в эти множители как раз можно заложить и частотную зависимость, связанную с упомянутыми явлениями, и коэффициент депрессии шума:

$$S_{\text{др}} = \beta(\omega) \Gamma \times 2e\bar{I},$$

где $\beta(\omega) = \frac{1}{\omega^\alpha}$, $\alpha \cong 1$, $\omega < 2\pi 10^3$ Гц.

Генерационно-рекомбинационный шум

Следующий механизм имеет важное значение для полупроводниковой техники, это, так называемый, генерационно-рекомбинационный шум. Вы знаете, что в полупроводниках электронный транспорт обеспечивают два вида носителей заряда: электроны и дырки, рождение такой пары связано с переходом электронов из валентной зоны в зону проводимости, но на практике всегда имеет место динамическое равновесие, электрон может вернуться, таким образом, протекает два процесса: рождение и аннигиляция электрон-дырочной пары. Мы имеем дело флуктуациями числа свободных носителей заряда в зоне проводимости.

Пусть N_0 — среднее число носителей в зоне проводимости, $\overline{\delta N^2}$ — его дисперсия, τ_N — характерное время жизни этих носителей. Тогда дисперсия и автокорреляционная функция могут быть записаны следующим образом:

$$B_N(0) \equiv \overline{\delta N^2},$$

$$B_N(t) \equiv \overline{\delta N^2} e^{-t/\tau_N}.$$

Для односторонней спектральной плотности мощности флуктуаций числа носителей заряда N генерационно-рекомбинационный шума имеем:

$$S_{N,GP}^+(\omega) = 4 \int_0^\infty B_N(t) \cos \omega t dt = 4 \overline{\delta N^2} \int_0^\infty e^{-t/\tau_N} \cos \omega t dt$$

$$= 4 \overline{\delta N^2} \frac{e^{-t/\tau_N} \left(-\frac{1}{\tau_N} (\cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right)}{\left(-\frac{1}{\tau_N} \right)^2 + \omega^2} \Bigg|_0^\infty = \frac{4 \overline{\delta N^2} \tau_N}{1 + (\omega \tau_N)^2},$$

для спектральной плотности мощности по току:

$$S_{I,GP}^+(\omega) = I_0^2 \frac{\overline{\delta N^2}}{N_0^2} \frac{4 \tau_N}{1 + (\omega \tau_N)^2}.$$

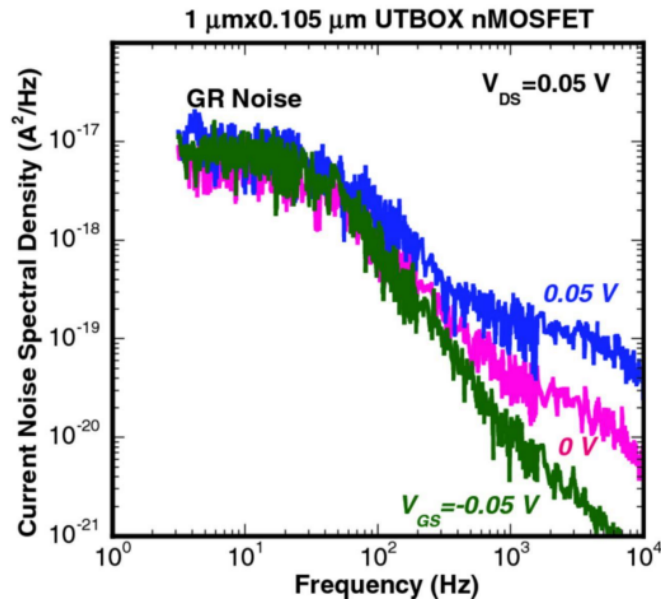


Рис. 10.5. Шумовые характеристики транзистора UTBOX nMOSFET.

Фликкер-шум

Наконец, последний источник, который можно отнести к фундаментальным, это фликкер-шум, его также называют шумом мерцания, избыточным шумом или чаще всего шумом " $1/f$ ". Спектральная плотность мощности флуктуаций от частоты изменяется по закону

$$S = S_0 \frac{1}{f^\alpha}, \alpha = 0,8 \div 1,4.$$

Впервые фликкер-шум был обнаружен при протекании тока через тонкие проводящие пленки, появлялся дополнительный шума, у которого спектральная плотность мощности флуктуаций росла с понижением частоты. Объяснение было найдено намного позже, много усилий было потрачено на то, чтобы измерить нижнюю чистоту, при которой этот закон перестанет выполняться, тем не менее ее так и не обнаружили. Более того, впоследствии было найдено огромное множество систем, в которых наблюдается такой шум: на низких частотах в полупроводниках полупроводниковых транзисторах, в контактных системах, некоторые процессы в биологии и т.д. На сегодняшний день считается, что это задача решена, и истинной физической причиной этого шума могут быть разные процессы, в том числе и тепловые флуктуации, появляется он если есть корреляция и какие-то медленные изменения свойств системы.

Можно попробовать построить математическую модель фликкер-шума, если предположить, что у нас есть много релаксационных процессов с различными временами релаксации τ . Пусть у нас также есть функция $D(\tau)$, которая несет информацию о том, как распределены времена релаксации наших процессов по

интервалу $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. Тогда, вспоминая формулу, полученную для генерационно-рекомбинационного шума, можно написать, что полная спектральная плотность есть

$$S(\omega) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2} D(\tau) d\tau.$$

Если положить $D(\tau) \sim \tau^{-1}$, то как раз получим $S(\omega) \sim \omega^{-1}$ в диапазоне частот $\tau_2^{-1} \ll \omega \ll \tau_1^{-1}$.

Стабилизация частоты генераторов

Теперь мы знаем, что любой усилитель является источником дополнительных шумов, что также есть фундаментальные источники шумов, наверное, и генераторы сигналов тоже подвержены флуктуациям. Это действительно так, флуктуируют амплитуда колебаний автогенератора, его фаза и частота. Флуктуации частоты особенно важны для рассмотрения, потому что на сегодняшний день частота – это физическая величина, которую люди умеют измерять и воспроизводить с наивысшей точностью.

Причины нестабильности частоты:

- Технические (долговременная нестабильность)
 - Нестабильность температуры контура
 - Старение
 - Дрейфы различных параметров
- Флуктуационные (кратковременная нестабильность)
 - Тепловые
 - Дробовые (если есть)
 - Квантовые

Техническая нестабильность частоты.

Если говорить о флуктуациях температуры, часто для описания элементов радиотехники используют температурный коэффициент частоты (т.к.ч)

$$\alpha_{\text{т.к.ч}} = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0 \Delta T} = \frac{d\omega_0}{\omega_0 dT}.$$

Во многих случаях температурный коэффициент частоты совпадает с линейным коэффициентом теплового расширения $\alpha_{\text{т.к.ч}} \cong \alpha_T$. Величина $\alpha_{\text{т.к.ч}}$ для типовых элементов имеет порядок $10^{-4} \div 10^{-5}$, редко меньше.

Пример 1: $\alpha_{\text{т.к.ч}} \cong 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{K}}, \Delta T = 5 \text{ мК} \rightarrow \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \alpha_{\text{т.к.ч}} \Delta T \cong 10^{-7}$.

Пример 2: для кварцевого генератора (кристалл SiO_2 заполняет емкость LC-генератора, пьезоэффект) $\alpha_{\text{т.к.ч}} \cong 10^{-8} \frac{1}{^\circ\text{K}} \rightarrow \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \cong 10^{-10}$.

Флуктуационная нестабильность частоты.

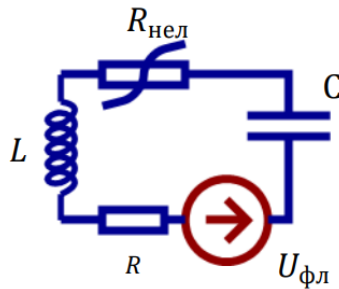


Рис. 10.6. Схема колебательного контура с нелинейным сопротивлением и источником флуктуаций.

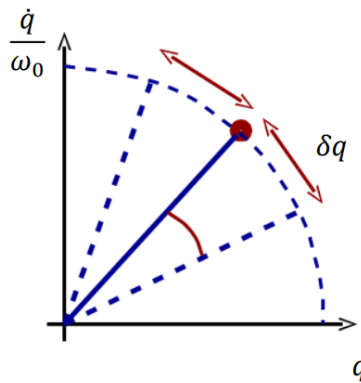


Рис. 10.7. Флуктуации на фазовой плоскости.

Рассмотрим условно колебательный контур, в котором есть нелинейное сопротивление и источник флуктуаций. Можем записать уравнение

$$L\ddot{q} + (R + R_{\text{нел}})\dot{q} + \frac{q}{C} = U_{\text{фл}},$$

его решение будем искать в виде:

$$q(t) = (q_0 + \Delta q) \cos(\omega t + \Delta\varphi) \cong (q_0 + \Delta q) \cos(\omega t) - q_0 \Delta\varphi \sin(\omega t),$$

где $\Delta q, \Delta\varphi$ – малые случайные флуктуации заряда и фазы. На рис. 10.7 изображены флуктуации фазы: если работа идеального автогенератора представляется точкой, которая движется по окружности, то теперь это уже не точка, а некоторый размытый кружок, поскольку в каждый момент времени она либо опережает, либо отстает от идеального положения.

Приведем не строгий но наглядный вывод:

1. Пусть на контур действует резонансный гармонический источник в течение времени $t_0 \ll 2\pi/\omega_0$:

$$L\ddot{\delta q} + \frac{\delta q}{C} = U_0 \cos(\omega_0 t),$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \delta q = \frac{U_0 t_0}{2L\omega_0}$.

2. Заменим

$$U_0 \rightarrow \sqrt{\frac{4kTR}{t_0}}, \omega_0 t_0 \ll 1, \text{ но } t \gg t_0.$$

Тогда изменение заряда за время t_0 :

$$\delta q_{t_0} = \sqrt{\frac{4kTR}{t_0}} \times \frac{t_0}{2L\omega_0} = \frac{\sqrt{4kTRt_0}}{2L\omega_0}.$$

Будем считать, что если $t \gg t_0$, то вариации δq_T складываются независимо:

$$\Delta q_t \cong \frac{\sqrt{4kTRt_0}}{2L\omega_0} \times \sqrt{\frac{t}{t_0}} = \frac{\sqrt{kTRt}}{L\omega_0}.$$

Оценим фазу:

$$\Delta\varphi_t \cong \frac{\Delta q_t}{q_0} = \frac{\sqrt{kTRt}}{L\omega_0 q_0} = \frac{\sqrt{kTt L\omega_0/Q}}{L\omega_0 q_0} = \sqrt{\frac{kTt}{L\omega_0 Q q_0^2}},$$

$$W = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{\omega_0^2 q_0^2 R}{2} \rightarrow q_0^2 = \frac{2W}{\omega_0^2 R} = \frac{2W}{\omega_0^2} \times \frac{Q}{L\omega_0},$$

$$(\Delta\varphi_t)^2 = \frac{kTt}{L\omega_0 Q} \times \frac{\omega_0^2}{2W} \times \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{kT\omega_0^2 t}{2Q^2 W} = Dt,$$

где $D = \frac{kT\omega_0^2}{2Q^2 W}$ — коэффициент диффузии фазы. Можно ввести время когерентности $\tau_{\text{ког}}$ и длину когерентности $L_{\text{ког}}$:

$$(\Delta\varphi_t)^2 = \pi^2 = D\tau_{\text{ког}},$$

$$L_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}.$$

Получим формулу Таунса для относительной естественной ширины линии $\Delta\omega_T/\omega_0$ автогенератора:

$$\Delta\omega_T \cong \frac{\Delta\varphi_T}{t},$$

$$\frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \cong \frac{\Delta\varphi_T}{\omega_0 t} \cong \sqrt{\frac{kT}{2Q^2 W t}},$$

при $T \rightarrow 0$ имеем $\frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \cong \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2Q^2 W t}}.$

Пример 1.

Пусть $Q = 10^2, W = 1 \text{ mW}, T = 300 \text{ K}, t = 1 \text{ сек}, \omega_0 = 10^7 \text{ сек}^{-1}$. Тогда

$$\frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq 1,4 \cdot 10^{-11},$$

$$\tau_{\text{ког}} \cong 5 \cdot 10^8 \text{ сек},$$

$$L_{\text{ког}} \simeq 1,5 \cdot 10^{17} \text{ м.}$$

Пример 2 (кварцевый генератор).

$$Q \simeq 10^7 \rightarrow \frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \frac{1}{4} \cdot 10^{-16}$$

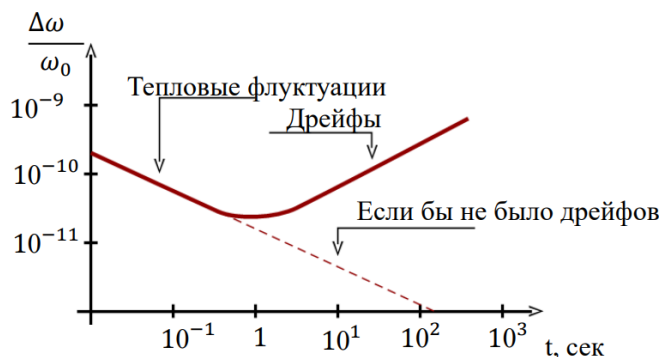


Рис. 10.8. Зависимость относительной флуктуации частоты от времени для кварцевого генератора.

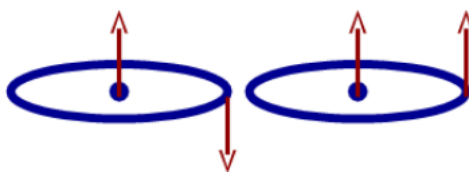


Рис. 10.9. Водородный стандарт.

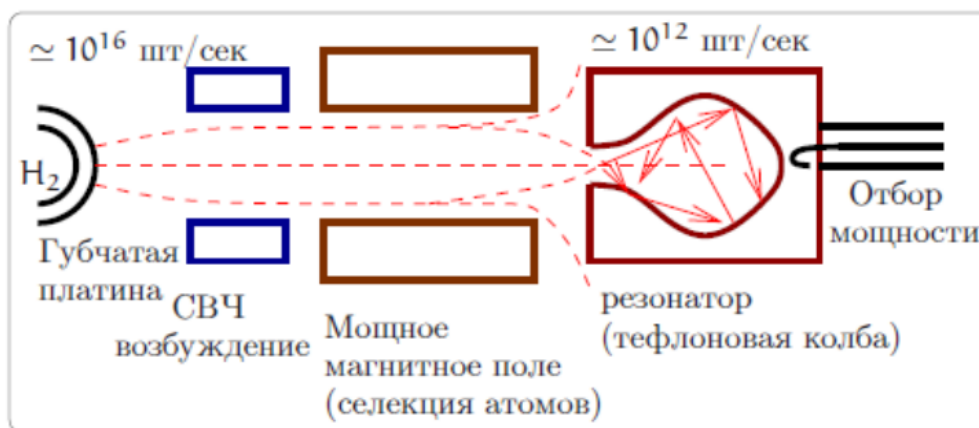


Рис. 10.10. Принципиальная схема водородного мазера.

Лучшие источники частот связаны с фундаментальными физическими величинами, в том числе с атомными переходами. Рассмотрим водородный стандарт, который широко используется, его работа основана на переходе между двумя подуровнями атома водорода. Поскольку возможны два спиновых состояния, а оптические частоты, соответствующие этим двум разным спиновым состоянием

немного отличаются, как раз к этой разнице и можно привязать частоту генератора. эта разница для атома водорода составляет

$$f_{00} = 1\,420\,405\,751,786 \pm 0,004 \text{ Гц.}$$

Устройство, которое реализует эту привязку, называется мазером, молекулярный автогенератор. Очень упрощенная схема водородного мазера представлена на рис. 10.10. Вначале формируется поток атомов, затем этот пучок проходит через микроволновый резонатор, в котором накачка осуществляется на частоте, близкой к частоте перехода, и, таким образом, часть атомов переходит в возбужденное состояние. Далее надо отсортировать возбужденные атомы от невозбужденных для того, чтобы получить в результате поток с инверсной населенностью, это делается при помощи магнитного поля. Магнитное поле из-за того, что взаимодействие спиновой подсистемы с магнитным полем разное в зависимости от того, куда направлен спин, позволяло дефокусировать невозбужденные атомы, а возбужденные фокусировать и направлять в объемный микроволновый резонатор.

ЛЕКЦИЯ 11. СИГНАЛ. КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

Мы будем говорить о том, что такое сигнал, это одно из основных понятий радиофизики, которая занимается передачей и приемом сигналов. Обычно сигналом называют изменение от времени напряжения, тока, магнитного потока, то есть то, что передается, усиливается и обрабатывается. Различают аналоговый, дискретный и цифровой сигнал.

1. Аналоговый сигнал – это непрерывная функция непрерывного аргумента (радиофизика «доцифровой эры»).
2. Дискретный сигнал – это непрерывная функция, определенная только для дискретных значений аргумента. Задается дискретной последовательностью отсчетов $u(nT), n = 0, 1, 2, \dots, N$; частота дискретизации $f = 1/T$ (рис. 11.1).
3. Цифровой сигнал дискретен как по своим значениям, так и по аргументу (разновидность дискретного сигнала, округленного до определенных значений, набор этих значений, шкала квантования, задается заранее). Такое округление принято называть квантованием сигнала по уровню.

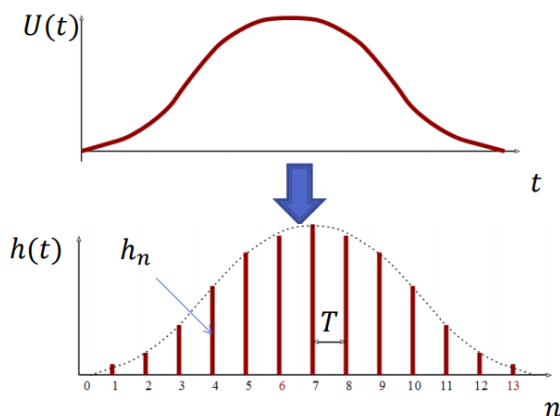


Рис. 11.1. Дискретизация непрерывного сигнала.

Теорема Котельникова

Теорема звучит следующим образом: если спектр сигнала ограничен и верхняя частота спектра меньше частоты $\Omega = \frac{1}{2T}$, то по дискретному набору h_n можно точно восстановить исходный сигнал:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \frac{\sin[2\pi\Omega(t - nT)]}{2\pi\Omega(t - nT)},$$

где Ω – частота Найквиста, T – интервал дискретизации. Условие $f < \Omega$ формально означает неограниченность сигнала по времени. И наоборот, ограниченность сигнала по времени означает неограниченность по частоте.

Доказательство:

Пусть

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi i\omega t} dt,$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{2\pi i\omega t} d\omega.$$

Введем вместо $H(\omega)$ функцию

$$G(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \text{если } |\omega| < \Omega \\ 0, & \text{если } \Omega \leq |\omega| \end{cases}$$

и продолжим ее периодически с периодом $\frac{1}{T}$ на интервал $(-\infty, \infty)$. Тогда формально можно разложить $G(\omega)$ в ряд Фурье:

$$G(\omega) = \sum C_n e^{-2\pi i n \omega T},$$

где

$$C_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} G(\omega) e^{2\pi i n \omega T} d\omega,$$

$$C_n = T h(nT).$$

Тогда

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega = \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega = \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum C_n e^{-2\pi i n \omega T} e^{2\pi i \omega t} d\omega \\ &= \sum C_n \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-2\pi i \omega (t - nT)} d\omega = \sum C_n \frac{\sin(2\pi \Omega (t - nT))}{\pi (t - nT)} \\ &= 2\Omega T \sum h(nT) \frac{\sin(2\pi \Omega (t - nT))}{\pi \Omega (t - nT)} = \sum h_n \frac{\sin(2\pi \Omega (t - nT))}{\pi \Omega (t - nT)}. \end{aligned}$$

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

У нас есть дискретный сигнал в виде набора отчетов:

$$u_k \equiv u(t_k), t_k \equiv k\Delta, k = 0, 1, 2 \dots N, N - \text{четное}.$$

Если $u(t)$ не ограничена по времени, можно отбросить «хвосты». Полный временной интервал времени составит $N\Delta$, на нем будет определена функция, для которой мы хотим получить преобразование Фурье. Получаем N чисел на входе, и N – на выходе, ограничиваясь только дискретным набором частот имеем:

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, n = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2}, \left(\omega_n \equiv \frac{2\pi n}{N\Delta} \right).$$

Крайние значения n – частоты Найквиста (n пробегает $N + 1$, а не N значений, но два крайних значения). Преобразуем интеграл Фурье в сумму:

$$U(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{2\pi i f_n t} dt \cong \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{2\pi i f_n t_k \Delta} = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{2\pi i k n / N}.$$

Введем обозначение U_n :

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{2\pi i k n / N},$$

это и есть дискретное преобразование Фурье, N отсчетов u_k преобразуются в N комплексных чисел U_n . Такое преобразование не зависит от интервала дискретизации Δ . Связь между обычным и дискретным преобразованием Фурье имеет вид:

$$U(f_n) \cong U_n \Delta.$$

Обратное дискретное Фурье преобразование задается следующим образом:

$$u_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n e^{-2\pi i k n / N},$$

формулы отличаются только знаком в показателе экспоненты и делением на N . Значит, численные процедуры для прямого ДПФ могут быть легко модифицированы и для обратного ДПФ. Выполняется дискретный аналог равенства Парсеваля:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |u_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |U_n|^2.$$

Рассмотрим, так называемое, быстрое преобразование Фурье (БПФ). Перепишем формулу для дискретного преобразования Фурье:

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} u_k,$$

$$W \equiv e^{2\pi i / N}.$$

Для вычисления одного элемента U_n потребуется N операций комплексного умножения, а для вычисления всех элементов U_n — $O(N^2)$ операций. Алгоритм БПФ выгодно отличается тем, что для решения той же задачи ему требуется всего лишь $O(N \log_2 N)$ операций. Разница между $O(N^2)$ и $O(N \log_2 N)$ огромна, например, при $N = 10^6$ БПФ дает выигрыш примерно в $5 \cdot 10^4$ раз. Алгоритм БПФ стал широко известен в середине 60-х после работ J.W.Cooley и J.W.Tukey. Позже выяснилось, что подобные методы были независимо и раньше открыты десятком других исследователей, начиная с Гаусса в 1805 году.

Количество информации

Рассмотрим сообщение из n посылок (букв), каждая из которых может принимать m различных значений или градаций (алфавит). Тогда полное количество возможных комбинаций составит

$$N = m^n.$$

Количество информации I должно быть пропорционально количеству букв: $I \sim n$ (как стоимость телеграммы). С другой стороны количество информации есть функция $I = f(N)$. Можем записать:

$$df = Kdn, df = \frac{df}{dN} N \ln(m) dn \Rightarrow f = K \log_a N.$$

где a, K – постоянные. Для определения постоянной a рассмотрим самый простой случай, когда $m = 2, n = 1$ (“бит” информации), тогда

$$1 = \log_a 2^1 \Rightarrow a = 2,$$

и формула для количества информации примет вид (формула Хартли)

$$I = \log_2 N = n \log_2 m.$$

Передача информации через канал связи

Пусть у нас есть сообщение, заданное в виде функции $u(t)$, ее спектр ограничен частотой F_0 : $f < F_0$. По теореме Котельникова достаточно передать набор импульсов с интервалами $\Delta t = 1/2F_0$ за время t , всего импульсов будет $2F_0 t$. Если число градаций (букв) равно m , то количество информации $I(t)$ и скорость R ее передачи информации составят:

$$I(t) = 2F_0 t \log_2 m,$$

$$R = \frac{dI}{dt} = 2F_0 \log_2 m.$$

Число градаций m не может быть бесконечным из-за наличия шумов. Теорема Шеннона-Хартли:

$$I_{max} = F_0 t \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right), \quad (11.1)$$

$$R_{max} = \frac{dI_{max}}{dt} = F_0 \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right), \quad (11.2)$$

где W_s – мощность сигнала, а W_n – мощность шума. Величину I_{max} называют объемом сигнала.

Для передачи сообщения:

- Полоса частот F_k , пропускаемых каналом, должна быть достаточно велика: $F_k > F_0$.
- Время связи t_k через канал также должно быть достаточно велико: $t_k > t$.
- Превышение сигнала над шумом $\frac{W_s}{W_n}$ в канале $H_k = \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right)$ должно быть больше соответствующей величины H .

Величину

$$C = F_0 \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right)$$

называют емкостью канала. В случае, когда W_n зависит от частоты («окрашенный» шум):

$$C = \int_0^{F_0} \log_2 \left(1 + \frac{W_s(f)}{W_n(f)} \right) df,$$

где F_0 — полоса пропускания канала.

Шумы квантования

Мы переходим к рассмотрению цифрового сигнала. Поговорим о том, чем отличается дискретный сигнал от цифрового. В первом случае мы дискредитируем значения только по оси времени, а в случае цифрового сигнала еще и по величине самого сигнала (рис. 11.2). Когда мы оцифровываем сигнал, у нас всегда есть ошибка Δ , которая называется ошибкой квантования, то есть, оцифровав сигнал, мы его ухудшили, и появились, так называемые, шумы квантования.

Шумы квантования можно рассматривать как случайный процесс с дисперсией σ^2 , которая определяется интервалом квантования по вертикальной оси, и квадратом среднего значения максимального квантованного сигнала m^2 . Тогда $W_n = \sigma^2$, $W_s = m^2 - \sigma^2$, подставим эти значения в формулы (11.1), (11.2) и получим

$$I = F_0 t \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n} \right) = F_0 t \log_2 m^2,$$

$$R = \frac{dI}{dt} = F_0 \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n} \right) = F_0 \log_2 m^2.$$

При оцифровке сигнал немного зашумляется, но когда мы будем его переписывать, у нас получится тот же самый сигнал при условии, что шумы много меньше интервала квантования. Таким образом, информация сохраняется и не обрывается шумами.

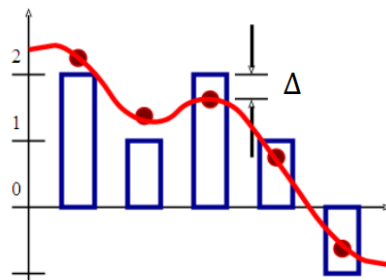


Рис. 11.2. Оцифровка сигнала.

Давайте подумаем, можно ли передавать сигнал, который слабее шума, это называется передача сигнала под шумом. Представьте, что мне нужно передать вам 1 или 0, то есть «да» или «нет», а вокруг шумит толпа. Но мы с вами договорились, что я передаю либо «да», либо «нет». Если я просто крикну «да» или «нет», скорее всего вы меня не услышите, но что если я буду кричать «да» $N = 100$ раз, тогда мой сигнал будет складываться, расти и будет пропорционален N . Шумы будут расти как \sqrt{N} ,

таким образом, если я буду передавать свое сообщение много раз, в итоге я смогу передать информацию. Впервые этот метод использовался в космической программе советского союза для передачи спутником фотографий тыльной стороны Луны.

Различные каналы передачи информации

	F_0	m	$\log_2 m$	R бит/с
Телеграф	$4 \cdot 10^2$ Гц	2	1	$8 \cdot 10^2$
Телефон (без сжатия)	$4 \cdot 10^3$ Гц	128	7	$6 \cdot 10^4$
Телевидение (без сжатия)	$6 \cdot 10^6$ Гц	30	~ 5	$6 \cdot 10^7$

Табл. 11.1. Характеристики различных каналов передачи информации.

Известно, что опытный радист мог принимать сигнал «на слух» даже под шумом, то есть при $W_s < W_n$ в полосе приема $F_0 \cong R$ – это нарушение формулы Хартли? Он использовал то, что набор букв обычно произвольный, и выбирал из для данного контекста наиболее подходящую. В алфавите буквы не равновероятны, тем более, их сочетания. Информационная двоичная энтропия:

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p(i) \log_2 p(i).$$

Прирост информации соответствует утраченной энтропии: если я ничего не знаю про передаваемое сообщение, энтропия будет максимальна, если же я хорошо определён – энтропия падает.

Рассмотрим современные каналы информации:

- СВЧ кабель (длинная линия): $F_0 \cong 10^{10}$ Гц, т.е. по СВЧ кабелю можно передавать ~ 1000 ТВ каналов или $2,5 \cdot 10^6$ телефонных каналов.
- Витая пара (длинная линия): $F_0 \cong 10^9$ Гц (дешевле и удобнее). Скорость передачи $100 \div 1000$ Мбит/сек.
- Оптический кабель (почти как длинная линия...): $F_0 \cong 10^{14}$ Гц, (пока полоса частот лишь $\sim 10^{10}$ Гц). Скорость передачи до 100 Гбит/сек. (1 волокно, диаметр сердцевины $\sim 5\mu$, оболочка $\sim 20\mu$, затухание на $\lambda \sim 1,6\mu$ составляет 0,2 дБ/км).

Поговорим о надежности передачи информации. Пусть один бит передается за время τ , и полоса частот есть $\Delta f \cong 1/\tau$. Мощность тепловых шумов в согласованной линии записывается как $W_T \sim kT\Delta f$, поэтому для передачи каждого бита нужна энергия $E > kT$. Величина E/kT велика, но постоянно уменьшается, можно записать следующую формулу:

$$\frac{E}{kT} = \frac{W}{\nu N kT'}$$

где W — средняя энергия, рассеиваемая процессором, ν — тактовая частота, N — количество элементов. Приведем расчеты для различных процессоров в табл. 11.2.

Процессор	W	ν	N	$\frac{E}{kT}$
8086	1 Вт	5 МГц	$5 \cdot 10^4$	$\sim 10^9$
Pentium 4	90 Вт	3 ГГц	10^8	$\sim 7 \cdot 10^4$
Core i7 Extreme (6 ядер)	130 Вт	3.3 ГГц	$2 \cdot 10^9$	$\sim 10^4$

Табл. 11.2. Расчет надежности передачи информации для различных процессоров.

В оптике $kT \ll \hbar\omega$, можно показать, что предельная величина для передачи одного бита за время τ составляет $E \geq \frac{\hbar}{\tau}$.

ЛЕКЦИЯ 12. ОСНОВЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

На прошлой лекции мы рассматривали в основном дискретные сигналы, настало время перейти к цифровым системам. Теперь мы будем считать, что, во-первых, аргумент принимает дискретные значения, вместо времени мы будем использовать порядковый номер отсчета $U(t) \rightarrow U(n)$, и, во-вторых, значения сигнала в эти моменты времени или значения сигналов под номером n также принимают дискретные из некоторого заранее определенного набора (рис. 12.1).

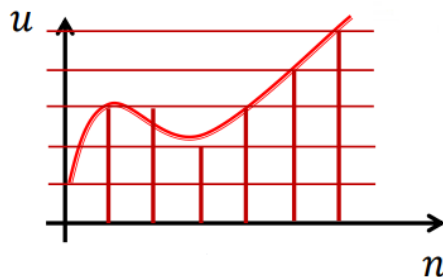


Рис. 12.1. Оцифровка сигнала.

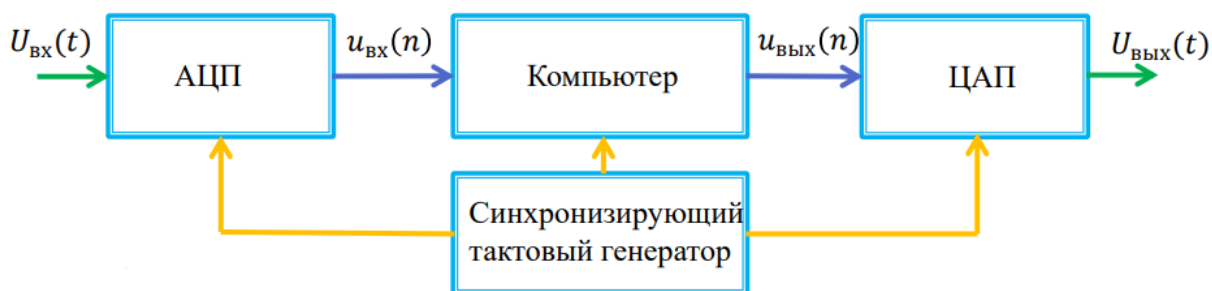


Рис. 12.2. Общая схема работы с цифровыми сигналами.

Простейшая общая схема работы с цифровыми сигналами включает в себя вычислительное устройство (компьютер), аналого-цифровой преобразователь на входе и цифро-аналоговый преобразователь на выходе. В отличие от произвольного вычислительного устройства на такой сигнальный процессор накладываются некоторые дополнительные условия, так время вычисления должно быть достаточно малым для того, чтобы выполнялась синхронность работы такого устройства. Существуют специальные интегральные микросхемы ПЛИС, которые заточены на обработку сигналов, с их помощью вы можно создавать каналы передачи сигналов, время задержки в которых строго определено.

Коды

Для того, чтобы представить аналоговый сигнал в виде цифровой последовательности используются коды. Мы при вычислениях пользуемся десятичными кодами, вычислительные устройства обычно используют двоичные коды, но этим дело не ограничивается.

Классификация кодов:

- **Неизбыточные** – каждая комбинация нулей и единиц кодирует число
- **Избыточные** – комбинаций больше, чем необходимо, лишние могут быть использованы для обнаружения ошибок
- **Равномерные** – комбинации содержат постоянное число разрядов
- **Неравномерные** – число разрядов может отличаться, например, в азбуке Морзе буквы кодируются различным числом точек и тире
- **Взвешенные** – каждый разряд имеет вес, например, натуральный двоичный код $n = 2$: $5_{10} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 101_2$
- **Невзвешенные**

Рассмотрим примеры кодов, которые используются для передачи информации, помимо названных десятичного и двоичного:

- Код 8421 – удобен для преобразования десятичных чисел, каждый десятичный знак заменяется на 4 двоичных:

$$N_{10} = 8 \cdot a_3 + 4 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0,$$

это избыточный блоковый код.

- **Натуральный двоичный код** – неизбыточный, непрерывный; используются 8-ти, 16-ти, 32-х разрядные блоки
- **Код Грея** – получается суммированием по модулю 2 соседних разрядов натурального двоичного кода; его достоинство заключается в том, что коды соседних чисел отличаются только одним разрядом; это циклический неизбыточный код
- **Код Джонсона** – получается последовательным сдвигом блока единиц, избыточный, легко формируется и дешифрируется
- **Код «1 из n»** – только одна единица в кодовой комбинации, очень простой, очень избыточный блоковый код

В таблицах 12.1 и 12.2 представлены коды, использующиеся в цифровых системах хранения, обработки и передачи информации.

Число	Натуральный двоичный код (8421)				Код Грея			
S	x_3	x_2	x_1	x_0	y_3	y_2	y_1	y_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1

7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1	1	1
11	1	0	1	1	1	1	1	0
12	1	1	0	0	1	0	1	0
13	1	1	0	0	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	0	0	0

Табл. 12.1. Коды, используемые в цифровых системах: натуральный двоичный код, код Грея.

S	Код Джонсона	Код «1 из 8»
0	0000	00000001
1	0001	00000010
2	0011	00000100
3	0111	00001000
4	1111	00010000
5	1110	00100000
6	1100	01000000
7	1000	10000000

Табл. 12.2. Коды, используемые в цифровых системах: код Джонсона, код «1 из 8».

В цифровых системах также возникают ошибки, причиной могут служить разные факторы, но один из важнейших – это шум. Здесь как раз помогают специальные коды, которые способны сами обнаруживать ошибки, и, более того, можно построить коды, которые позволяют исправлять ошибки.

Разберемся сначала, как устроены коды, обнаруживающие ошибки. Например, можно организовать контроль четности: если у нас есть блоки, мы можем к каждому из них добавлять в конце 0 или 1 так, чтобы арифметическая сумма всех единиц в блоке была четной. Тогда, если к нам придет блок, сумма единиц которого нечетная, мы поймем, что этот блок содержит ошибку. Таким образом обнаруживаются ошибки только кратности, равной единице. Иногда проводят более сложную, зато менее избыточную операцию: складывают все блоки, отбрасывая при этом старшие разряды, и договариваются, что в этом случае циклическая контрольная сумма содержит не более, чем 8, 10 или 16 разрядов. Остаток, который получается в конце, дописывается в качестве еще одного или нескольких блоков.

Теперь поговорим о том, как организовать исправление ошибок. В теории информации есть такое понятие, как расстояние Хемминга. Расстоянием Хемминга между двумя кодовыми словами X и Y называется количество отличных бит на соответствующих позициях:

$$d_H = \sum_s |X^{(s)} - Y^{(s)}|.$$

Если найти минимальное расстояние Хемминга для некоторой кодовой последовательности

$$d_{MIN} = \min_{X \neq Y} d_H(X, Y),$$

то корректирующая способность кода определяется по формуле

$$t = \frac{d_{MIN} - 1}{2}.$$

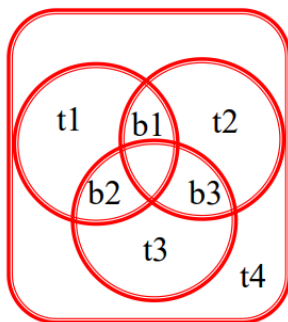


Рис. 12.3. Графический пример исправляющего кода.

Поясню вышесказанное с помощью простого графического примера (рис. 12.3). Предположим, что у нас есть некоторая информация, которую мы кодируем блоками из трех бит b_1, b_2, b_3 . Разобьем биты на пары $(b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_3)$, к каждой паре добавим еще один бит t_i так, чтобы сумма трех бит всегда была четной, и добавим бит t_4 , чтобы сумма всех семи бит тоже была четной. Такой код исправляет любые ошибки кратности один и называется алгоритмом Хемминга.

На сегодняшний день используются очень сложные с математической точки зрения алгоритмы кодирования, наиболее распространенным является код Рида-Соломона. Он позволяет исправлять t ошибок, в то время как используется $2t$ проверочных символов. Впервые этот код был использован для записи информации на CD диске. Избыточность кода составляет примерно 25% процентов, исправляющая способность больше 10%.

Основы булевой алгебры

Булева алгебра была придумана специально для работы с двоичными переменными, поскольку их достаточно для кодирования с помощью любых кодов. Двоичная переменная может принимать только два значения: $x = 0$ («false») и $x = 1$ («true»). Над такой переменной можно определить простейшие операции:

- НЕ (NOT, отрицание, инверсия): если $x = 0$, то $\bar{x} = 1$, если $x = 1$, то $\bar{x} = 0$.

- ИЛИ (дизъюнкция, OR, \vee , $+$):

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Табл. 12.3. Таблица истинности для операции логическое ИЛИ.

- И (конъюнкция, AND, \wedge , \cdot):

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Табл. 12.4. Таблица истинности для операции логическое И.

- ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ (XOR, \vee , \otimes):

x	y	$x \otimes y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Табл. 12.5. Таблица истинности для операции ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ.

Комбинируя эти операции, можно осуществить любое преобразование двоичных переменных, например, операции ИЛИ-НЕ и И-НЕ (табл. 12.6 и 12.7).

x	y	$\overline{x+y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Табл. 12.6. Таблица истинности для операции ИЛИ-НЕ.

X	y	$\bar{x} \cdot \bar{y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Табл. 12.7. Таблица истинности для операции И-НЕ.

Приведем основные соотношения булевой алгебры для случая одной переменной:

$$x + 0 = x$$

$$x + x = x$$

$$x + 1 = x$$

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot x = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

$$\bar{\bar{x}} = x$$

Операции с двумя и более переменными (знак " · " опускается):

1. Переместительный закон

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$

2. Сочетательный закон

$$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$xyz = x(yz) = (xy)z$$

3. Распределительный закон

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$xy + z = (x + z)(y + z)$$

Доказательство:

$$(x + z)(y + z) = xy + zy + xz + zz = xy + z(y + x + 1) = xy + z1 = xy + z$$

4. Закон поглощения

$$x + xy = x$$

$$x(x + y) = x$$

5. $(x + \bar{y})y = xy$

$$x\bar{y} + y = x + y$$

6. Закон склеивания

$$xy + \bar{x}y = y$$

$$(x + y)(\bar{x} + y) = y$$

Важным утверждением является теорема Де Моргана, которая позволяет переходить от одной логической операции к другой:

$$\overline{x + y + z + \dots} = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \dots$$

$$\overline{xyz \dots} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + \dots$$

Доказательство теоремы можно провести методом математической индукции: сначала доказать утверждение для двух элементов проверкой, используя таблицы, а затем обобщить на произвольное количество элементов.

x	y	$\overline{x + y}$	$\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

x	y	$\bar{x} \cdot \bar{y}$	$\bar{x} + \bar{y}$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Теперь рассмотрим булевы функции, они сами являются двоичными и задаются над двоичными переменными. Чтобы задать булеву функцию $F(A, B, C, \dots)$, нужно указать, при каких комбинациях переменных A, B, C, \dots она принимает значение 0, а при каких – 1. Если функция задана для всех возможных наборов переменных, то ее называют полностью определенной, если только для части наборов – недоопределенной или факультативной, в этом случае для неопределенных наборов можно приписывать значение F по своему усмотрению.

Существует соглашение о порядке выполнения логических операций, он такой же как в обычной алгебре, кроме:

- инверсия над единичной переменной всегда выполняется первой
- инверсия над алгебраическим выражением всегда выполняется последней

Способы задания булевых функций:

1. Словесный
2. Табличный

N	x	y	z	F
---	---	---	---	---

1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	?
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0

3. Алгебраический

- a. Нормальная дизъюнктивная форма – задание булевых функций по единицам (получаем из табл. в пункте 2):

$$F = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot \bar{z},$$

произведения, в которые каждая переменная входит один раз, называются минтермами. Число переменных в терме – ранг функции.

- b. Нормальная конъюнктивная форма – задание булевых функций по нулям:

$$F = (x + y + z) \cdot (x + \bar{y} + z) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}),$$

суммы, в которые каждая переменная входит один раз, называются макстермами..

4. Числовой – берем номера наборов, где

a. $F = 1 \rightarrow F = \sum(2,4,5,7)$

b. $F = 0 \rightarrow F = \prod(1,3,8)$

Основные логические элементы

На практике логические функции можно реализовать с помощью специальных полупроводниковых элементов. На рис. 12.4 приведены обозначения основных логических элементов на электрических схемах.

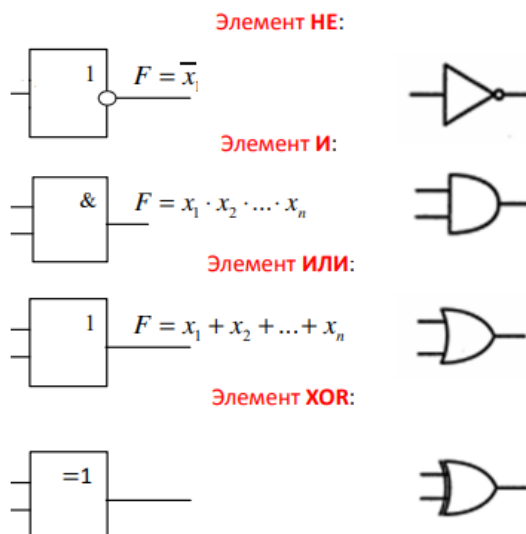


Рис. 12.4. Обозначения основных логических элементов на электрических схемах: слева – принятые в отечественной литературе, справа – в зарубежной.

Совсем не обязательно иметь в распоряжении все элементы, которые здесь перечислены, достаточно иметь, так называемый, полный набор или функционально-полную систему логических элементов.

Пример.

И, НЕ – функционально-полная система. Реализуем операцию ИЛИ:

$$F = x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}.$$

Возможный простейший вариант реализации логических элементов представлен на рис. 12.5, вообще существуют разные реализации в зависимости от того, какое быстродействие, энергопотребление нам нужно, какого поколения эти системы и т.д. Элемент ИЛИ можно получить, взяв два диода и нагрузочное сопротивление. Подадим на диоды напряжение, пусть, если оно близко к нулю, то это логический «0», несколько вольт – «1». Операция ИЛИ будет реализована на сопротивлении: его напряжение будет ненулевым только в том случае, если хотя бы на одном из диодов есть ненулевое напряжение. Элемент НЕ можно сделать из обычного инвертирующего усилителя на одном транзисторе: когда на базе присутствует напряжение, транзистор открыт, и напряжение на коллекторе близко к нулю, и наоборот. Конечно на практике все сложнее, но когда идет речь об оптимизации, то принято считать, что один выход логического элемента И или элемента ИЛИ эквивалентен одному используемому диоду, а операция НЕ эквивалентна одному используемому транзистору.

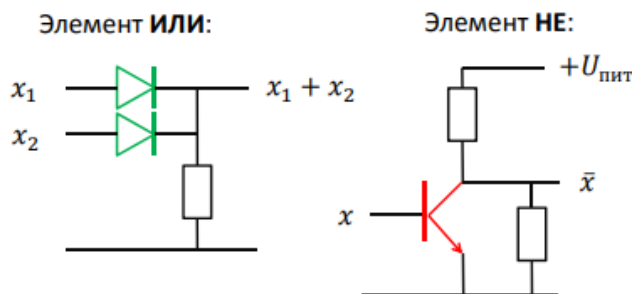


Рис. 12.5. Возможный вариант реализации логических элементов ИЛИ и НЕ.

Существуют более сложные варианты реализации, например, элемента И-НЕ: TTL логика, КМОП логика.

Минимизация логических функций. Карты Карно

Когда мы рассматривали способы задания булевых функций на примере функции (представлена в нормальной дизъюнктивной форме):

$$F = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot \bar{z},$$

мы ничего не говорили о том, являются ли эти формы единственно возможными или минимально возможными. На самом деле, не являются, их можно оптимизировать. Как это сделать, существует, так называемый, алгоритм карт Карно, который основывается на теореме о склейке. Построим карту Карно для нашей функции F :

1. Заносим в таблицу все возможные состояния так, чтобы соседи отличались не более, чем на единицу:

	y			
x	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	$x \cdot y \cdot z$	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
	z			

2. Ставим «1» в тех ячейках, где $F = 1$:

	y			
x	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	$x \cdot y \cdot z$	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
	1			1
	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
		1	1	
	z			

3. Склеиваем соседние минтермы, для которых $F = 1$ и число которых кратно двум (углы и края таблицы тоже считаются «соседями»)

	y			
x	$x \cdot y \cdot \bar{z}$ 1	$x \cdot y \cdot z$	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ 1
	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \cdot y \cdot z$ 1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$ 1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
		z		

4. К каждой склейке применяем $xu + \bar{x}u = u$:

$$F = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot \bar{z} \\ = (x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) + (\bar{x} \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z) = x \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot z$$

Запись стала гораздо компактнее: вместо четырех слагаемых осталось всего два. Однако, в наше время карты Карно бесполезны, любая современная программа, предназначенная для проектирования цифровых устройств, всю оптимизацию выполняет автоматически. Карты Карно лишь помогают понять логику булевой алгебры.

Триггеры

Следующий чрезвычайно важный логический элемент – это триггер, устройство, которое имеет два устойчивых состояния, состояние триггера в настоящий момент зависит от предыстории. В дискретной, цифровой технике используются разные триггеры, самым простым является, так называемый, RS триггер. У него есть два входа: установка $S[et]$ и сброс $R[eset]$. Триггер работает следующим образом. При $R = 0$ подача 1 на вход S устанавливает 1 на выходе (обозначается Q), а после перехода S в 0 выход остается $Q = 1$. После этого подача 1 на вход R устанавливает 0 на выходе Q . Одновременная подача $S = 1$ и $R = 1$ недопустима, поскольку Q будет не определено.

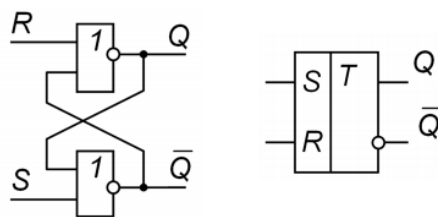


Рис. 12.6. RS триггер. Слева: реализация на элементах ИЛИ-НЕ, справа: обозначение на схемах.

Гораздо больше возможностей предоставляют более сложные устройства:

- Синхронный RS триггер. Принцип его работы такой же как у обычного RS триггера, но установка значений S и R происходит только при $C = 1$.
- Синхронный JK триггер – это почти синхронный RS триггер с той разницей, что одновременное задание $J = 1$ и $K = 1$ теперь считается допустимым, сигнал на выходе инвертируется.

- D триггер («защелка») создается на основе JK триггера, только у него совсем отсутствует вход K . При $K = 0$ триггер запоминает значение J в момент прихода фронта C ($J \equiv D[ata]$, K отсутствует).
- T триггер («делитель частоты»). При $J = K = 1$ меняется состояние при каждом следующем импульсе C ($C \equiv T[ime]$, выводов J, K нет).

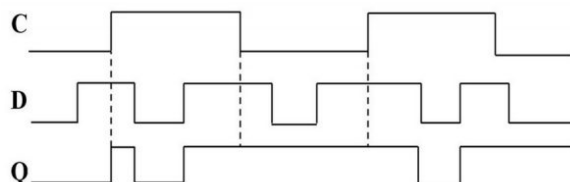


Рис. 12.7. Диаграмма работы D триггера.

Элементы вычислительных устройств

Существуют и более сложные микросхемы, которые также относятся к наборам дискретной логики:

1. Счетчики
2. Регистры
 - а. Регистр хранения
 - б. Сдвиговые регистры
3. Дешифраторы
4. ...

Рассмотрим работу сдвигового регистра на D триггерах. На него поступает информация в виде последовательного кода и синхроимпульсов, последовательный код преобразуется сдвиговым регистром в параллельный код. Первый синхроимпульс попадает на C вход первого триггера, считывается первый знак в последовательности. Следующим синхроимпульсом в первый триггер записывается второй член этой последовательности, а первый член переходит во второй. Третьим синхроимпульсом все это сдвигается еще, четвертым еще.

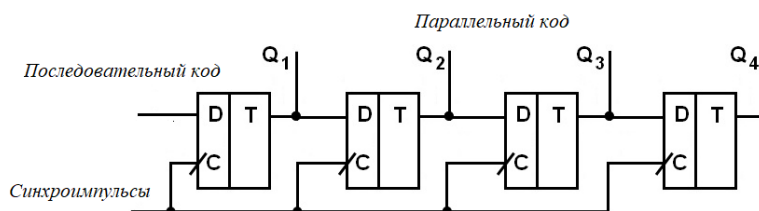


Рис. 12.8. Схема сдвигового регистра на D триггерах.

ЛЕКЦИЯ 13. ЦИФРО-АНАЛОГОВЫЕ И АНАЛОГО-ЦИФРОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ.

Цифро-аналоговые преобразователи

В современных приборах аналоговый сигнал должен преобразовываться в цифровой, обрабатываться, затем опять превращаться в аналоговый и выдаваться потребителю. Это преобразование является обязательным. Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) формирует на выходе напряжение (ток) соответствующее цифровому коду, поступившему на вход. ЦАП может быть сконструирован на основе ОУ с коммутируемыми весовыми резисторами (рис. 13.1), напряжение на выходе получается

$$U_{\text{вых}} = -U_1 R_{\text{ос}} \sum_i \frac{D_i}{2^{N-1-i} R},$$

где $D_i = [0,1]$. Точность преобразователя зависит от точности и стабильности параметров резисторов. При большой разрядности ЦАП технологически трудно выполнить резисторы с перепадом сопротивлений точно в 2^{N-1} раза. Удобно изготавливать резисторы с одинаковыми сопротивлениями.

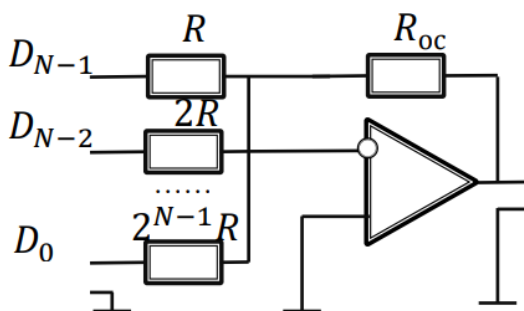


Рис. 13.1. Схема ЦАП основе ОУ с коммутируемыми весовыми резисторами.

На рис. 13.2 представлена другая схема ЦАП, для которой имеем:

$$I_{\text{ос}} = U_{\text{оп}} \sum_i \frac{K_i}{2^i R},$$

$$U_{\text{вых}} = -I_{\text{ос}} R_{\text{ос}}.$$

$U_{\text{вых}}$ не зависит от абсолютной величины R . Чем выше идентичность в звеньях матрицы, тем точнее осуществляется преобразование.

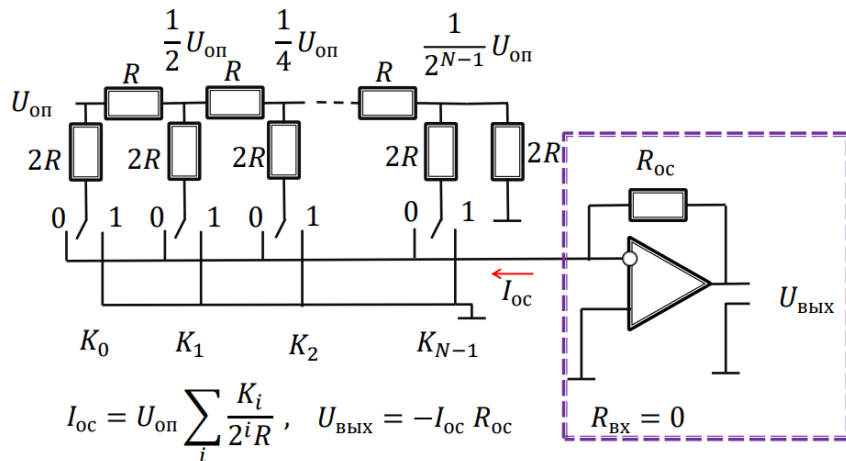


Рис. 13.2. Схема ЦАП на основе ОУ с матрицей резисторов $R - 2R$.

Основные параметры ЦАП:

- *Разрядность* – число двоичных разрядов входного кода (N).
- *Диапазон выходной величины* – интервал значений выходного напряжения:

$$U_{min} \div U_{max}.$$

- *Относительная разрешающая способность* определяется как величина, обратная числу уровней квантования:

$$d_r = \frac{1}{2^N - 1}.$$

- *Абсолютная разрешающая способность* численно равна шагу квантования

$$d_A = \frac{U_{max}}{2^N - 1} = \Delta U.$$

- *Абсолютная погрешность преобразования Δd* – максимальное отклонение выходного напряжения в конечной точке реальной характеристики преобразования от идеальной.
- *Интегральная нелинейность преобразования ЦАП d_{int}* определяет максимальное отклонение реальной характеристики от идеальной.
- *Дифференциальная нелинейность преобразования ЦАП d_{dif}* численно равна максимальной разности двух соседних шагов квантования.
- *Время установления $t_{уст}$* выходного напряжения или тока – интервал времени от начала изменения входного двоичного кода от минимального до максимального значения до момента, когда выходной аналоговый сигнал достигнет заданной величины.
- *Максимальная частота преобразования $f_{пр}$* – наибольшая частота смены входного кода.

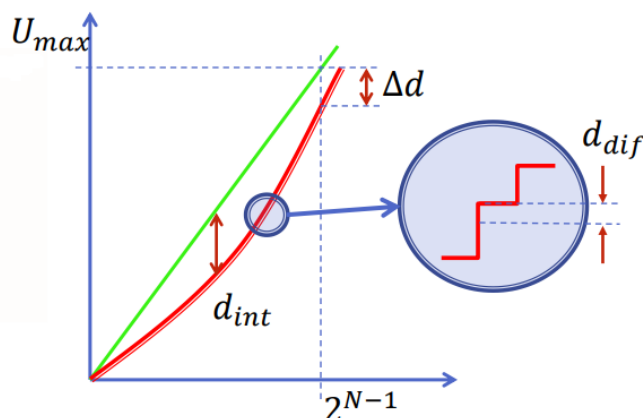


Рис. 13.3. Иллюстрация к определениям абсолютной погрешности и интегральной и дифференциальной нелинейности.

В таблице 13.1. приведены примеры микросхем ЦАП.

Модель	Функция	Разрядность, (бит)	Время установления, (мкс)	Напряжение питания (В)	Интерфейс
MAX 1578	Одноканальный 8-бит. быстродейств. ЦАП	8	0,025	+2,7 ... +3,3	mP/8
MAX 5233	12-бит. двухканальн. ЦАП со встроенным источником опорн. напряжения	10	10	+5	Послед. SPI
MAX 514	Четырехканальный 12-бит. КМОП ЦАП	12	1	+5	Последов.
MAX 5544	Недорогой 14-бит. ЦАП	14	1	+5	Послед. SPI
MAX 5264B	8 канальный 14-бит. ЦАП с параллельным входом	14	22	+7...+14, -5...-9, +5	mPI
MAX 5444	16-бит. ЦАП с последовательным интерфейсом	16	1	+3	Послед. SPI

Табл. 13.1. Характеристики микросхем ЦАП.

Аналого-цифровые преобразователи

Аналого-цифровые преобразователи (АЦП) играют обратную роль ЦАП, то есть преобразуют аналоговый сигнал в цифровой.

АЦП параллельного преобразования.

В этом случае используются ОУ в режиме компараторов напряжения. На один из двух входов каждого компаратора подается свое опорное напряжение, формируемое резистивной матрицей. Напряжение на неинвертирующем входе n -го компаратора:

$$U_n = U_{\text{оп}} \frac{n}{N}.$$

На выходе будем иметь код Джонсона.

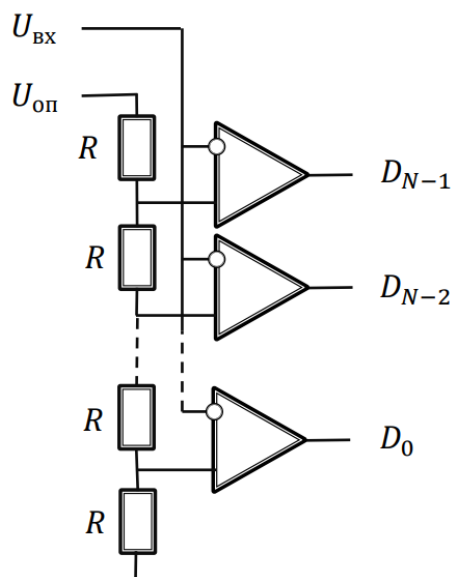


Рис. 13.4. Схема АЦП параллельного преобразования.

АЦП последовательного счета.

Импульсы тактового генератора счетчик преобразует в параллельный двоичный код, ЦАП преобразует его в напряжение, компаратор вырабатывает сигнал Стоп, когда оно станет равно входному сигналу. Максимальное время преобразования составляет

$$t = 2^{N-1} t_{\text{такт}}.$$

Недостаток такого подхода – низкое быстродействие.

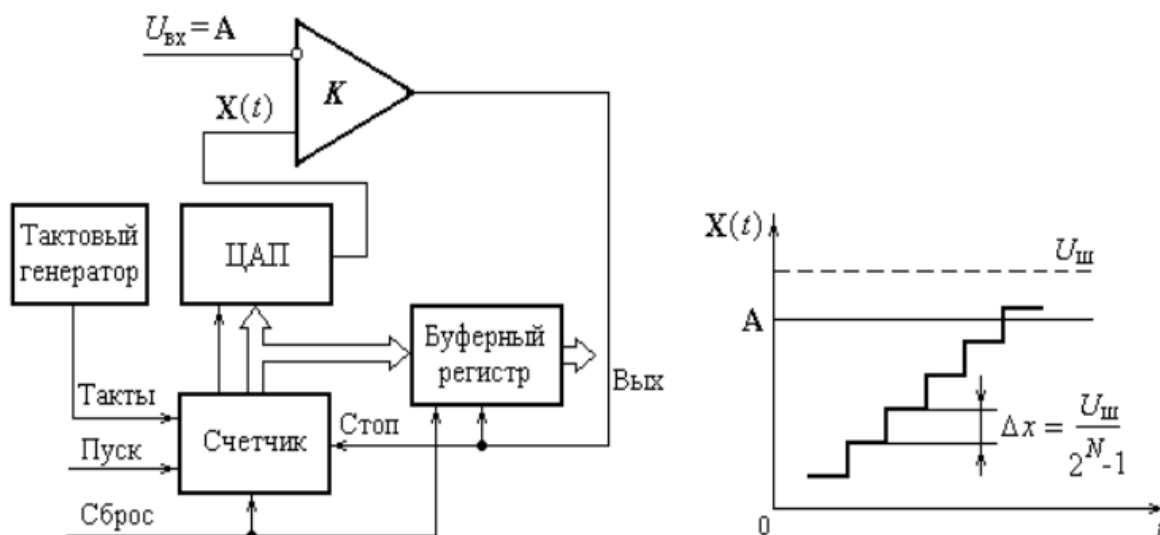


Рис. 13.5. Схема АЦП последовательного счета.

АЦП последовательного приближения.

Старший разряд ЦАП устанавливается в единицу. Если $U_{вх} > U_{ЦАП}$, то компаратор «подтверждает» состояние РП и ЦАП. Затем единица устанавливается в разряде, следующем за старшим. Если окажется, что $U_{вх} < U_{ЦАП}$, то последняя установленная в ЦАП единица заменяется на ноль. Так повторяется до младшего разряда, и после N тактов сравнения $U_{вх}$ и $U_{ЦАП}$ в регистре памяти сформируется N -разрядный двоичный код. Время преобразования: $t = Nt_{\text{такт}}$.



Рис. 13.6. Схема АЦП последовательного приближения.

Основные параметры АЦП:

1. Статические (аналогичны ЦАП):

- *Разрядность* – число двоичных разрядов входного кода (N)
- *Диапазон входной величины* – интервал значений входного напряжения:

$$U_{\min} \div U_{\max}.$$

- *Абсолютная погрешность преобразования Δd* – максимальное отклонение выходного напряжения в конечной точке реальной характеристики преобразования от идеальной.
- *Интегральная нелинейность преобразования АЦП d_{int}* определяет максимальное отклонение реальной характеристики от идеальной.

2. Динамические:

- *Максимальная частота преобразования* – частота дискретизации входного сигнала.
- *Апертурное время* – время, в течение которого сохраняется неопределенность между значением выборки и временем, к которому оно относится.
- *Апертурная неопределенность* – случайное изменение апертурного времени в конкретной точке характеристики преобразования.
- *Время кодирования* – время, в течение которого осуществляется непосредственное преобразование установившегося значения входного сигнала (время от начала импульса запуска до появления выходного кода).

В таблице 13.2. приведены примеры микросхем АЦП.

Модель	Функция	Разрядность (бит)	Время преобразования (МКС)	Интерфейс	Напряжение питания (В)
MAX1011	Малопотребляющая АЦП с 90М выборок/с	6	0,003	mP/8	5 и 3,3
ADC 0820	Быстрый КМОП АЦП с УВХ	8	1,4	mP/8	5
MAX104	Сверхбыстродействующий АЦП, 1Р выборок/с с УВХ	8	0,001	PECL/8	±5
MAX108	Сверхбыстродействующий АЦП, 1,5Г выборок/с с УВХ	8	0,00067	PECL/8	±5
MAX1180	2-канальный 10-бит маломощн. АЦП с внутрен. ИОН, 105М выборок/с	10	–	mP/10	2,7...3,6
MAX173	КМОП АЦП с внутрен. ИОН	10	5	mP/12	+5 и – (12...15)

Табл. 13.2. Характеристики микросхем АЦП.

Z-преобразование

Пусть у нас есть сигнал, который представляет из себя набор отсчетов: $\{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ – числовая последовательность, конечная или бесконечная, содержащая отсчеты. Тогда если существует функция комплексной переменной z :

$$X(z) = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k},$$

то она называется z -преобразованием.

Примеры:

$$\{x_k\} = (1, 0, 0, \dots) \rightarrow X(z) = 1,$$

$$\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots) \rightarrow X(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}.$$

Если $\{x_k\} = (1, 1, 1, \dots)$ – последовательность единичных отсчетов, то ряд

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \quad (13.1)$$

является суммой геометрической прогрессии и сходится при любых z в кольце $|z| > 1$.
Получаем:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}.$$

На границе области аналитичности при $z = 1$ функция $X(z)$ имеет единственный простой полюс.

Если $\{x_k\} = (1, a, a^2, \dots)$, где a – вещественное, то

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}.$$

Ряд $X(z)$ сходится в кольце $|z| > 1$. Если отсчеты $\{x_k\}$ есть значения непрерывной функции $u(t)$ в точках $t = k\Delta$, то по теореме Котельникова любому сигналу $u(t)$ можно сопоставить его z -преобразование:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta) z^{-k}.$$

Пример:

$$u(t) = \cos \omega t \rightarrow U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\omega k\Delta) z^{-k} = \frac{z}{z - \cos(\omega\Delta)}.$$

Обратное Z-преобразование

Пусть у нас есть $X(z)$ – функция комплексной переменной z , аналитическая в кольцевой области $|z| > R_0$. Z -преобразование имеет замечательное свойство: $X(z)$ полностью определяет бесконечную совокупность отсчетов (x_0, x_1, x_2, \dots) . Умножим обе части равенства (13.1) на z^{m-1} :

$$z^{m-1}X(z) = x_0 z^{m-1} + x_1 z^{m-2} + \dots + x_m z^{-1} + \dots$$

Вычислим интегралы от обеих частей полученного равенства, взяв в качестве контура интегрирования произвольную замкнутую кривую, лежащую целиком в области аналитичности и охватывающую все полюсы функции $X(z)$. По теореме Коши:

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{если } n = -1 \\ 0 & \text{если } n \neq -1 \end{cases}.$$

Очевидно, интегралы от всех слагаемых правой части обратятся в нуль, за исключением слагаемого с номером m , поэтому обратное Z -преобразование:

$$x_m = \frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-1} X(z) dz.$$

Важнейшие свойства Z -преобразования:

1. *Линейность*. Если $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ – дискретные сигналы, причем известны соответствующие им Z -преобразования $X(z)$ и $Y(z)$, то сигналу $\{u_k\} = \alpha x_k + \beta y_k$ будет соответствовать преобразование $U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$. Доказательство утверждения производится подстановкой.
2. *Z -преобразование смещенного сигнала*. Пусть $\{y_k\}$ получается из $\{x_k\}$ путем сдвига на одну позицию в сторону запаздывания, т.е. когда $y_k = x_{k-1}$, то

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-1} X(z),$$

где z^{-1} – оператор единичной задержки в z -области.

3. *Связь с преобразованием Фурье*. Пусть функция

$$x(t) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta(t - k\Delta)$$

есть набор δ -импульсов ($t \geq 0$). Если положить $z = e^{i\omega\Delta}$, то функция

$$S(i\omega) = X(z) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-i\omega\Delta}$$

будет и ее Фурье-образом, и z -преобразованием.

4. Z -преобразование свертки. Пусть

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

есть свертка непрерывных сигналов $x(\tau)$ и $y(\tau)$. Для дискретных сигналов вводим по аналогии:

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_{m-k}.$$

Вычислим z -преобразование дискретной свертки:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_{m-k} z^{-(m-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} y_{m-k} z^{-(m-k)} = X(z)Y(z). \end{aligned}$$

Цифровые фильтры

Линейные стационарные цифровые фильтры:

- могут иметь разнообразные формы АЧХ и ФЧХ
- легко реализуются на ЭВМ программными методами
- имеют стабильные параметры, не требующие настройки

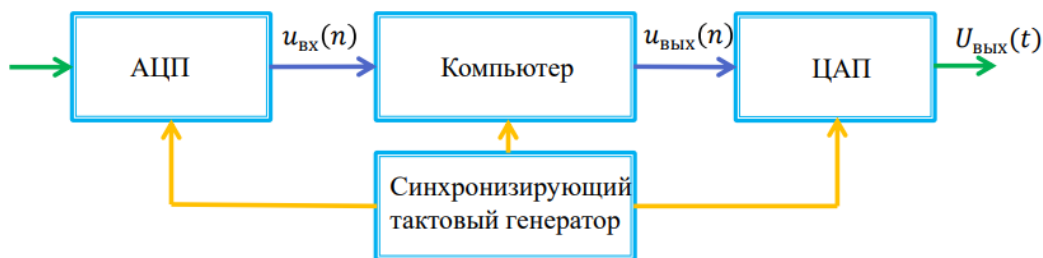


Рис. 13.7. Схема цифрового фильтра.

Линейный цифровой фильтр преобразует последовательность числовых отсчетов входного сигнала в последовательность отсчетов выходного сигнала:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \rightarrow (y_0, y_1, y_2, \dots) \text{ или } \{x_k\} \rightarrow \{y_k\}.$$

Линейность означает, что если

$$\{x_k^{(1)}\} \rightarrow \{y_k^{(1)}\}, \dots, \{x_k^{(N)}\} \rightarrow \{y_k^{(N)}\},$$

то

$$\alpha_1 \{x_k^{(1)}\} + \dots + \alpha_N \{x_k^{(N)}\} \rightarrow \{\alpha_1 y_k^{(1)} + \dots + \alpha_N y_k^{(N)}\}.$$

На входе фильтра сигнал имеет вид последовательности импульсов. Вспоминаем импульсные характеристики аналоговых линейных цепей, свертка сигнала и импульсной характеристики линейной цепи $g(t)$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Обобщим на случай дискретных сигналов:

$$(1, 0, 0, \dots) \rightarrow (g_0, g_1, g_2, \dots),$$

где $\{g_k\}$ – отклик на единичный импульс. У линейного фильтра при смещении входного единичного импульса отклик смещается, не меняясь:

$$(0, 1, 0, \dots) \rightarrow (0, g_0, g_1, g_2, \dots),$$

$$(0, 0, 1, 0, \dots) \rightarrow (0, 0, g_0, g_1, \dots).$$

Используя $\{g_k\}$ представим m -й отсчет:

$$y_m = x_0 g_m + x_1 g_{m-1} + \dots + x_m g_0 = \sum_{k=0}^m x_k g_{m-k},$$

таким образом, выходная последовательность есть дискретная свертка входного сигнала и импульсной характеристики фильтра. Для физически реализуемых фильтров коэффициенты g при $m - k < 0$ обращаются в 0 (причинность). Можно записать:

$$y_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k g_{m-k}.$$

Вспоминаем теорему о свертке:

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} \rightarrow F(z) = X(z)Y(z).$$

Значит, для выходного сигнала фильтра:

$$Y(z) = G(z)X(z).$$

Системной функцией стационарного линейного цифрового фильтра называется

$$G(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}.$$

Дискретные гармонические последовательности

Пусть имеет место дискретизация гармонического сигнала:

$$\{x_k\} = \{Ae^{i(\omega k \Delta + \varphi)}\},$$

$$\operatorname{Re}\{x_k\} = \{A \cos(\omega k \Delta + \varphi)\}.$$

Заметим, что представление $\{x_k\}$ неоднозначно, оно не меняется при замене

$\omega \rightarrow \omega + \frac{2\pi n}{\Delta}$. Это означает, что при дискретном преобразовании Фурье нас будут интересовать ограниченные частоты. Пусть такая бесконечная последовательность $\{x_k\}$ подается на вход цифрового фильтра, тогда отсчеты на его выходе:

$$\begin{aligned} y_m &= \sum_{k=-\infty}^m x_k g_{m-k} = Ae^{i\varphi} \sum_{k=-\infty}^m e^{i\omega k \Delta} g_{m-k} = Ae^{i(\omega m \Delta + \varphi)} \sum_{k=-\infty}^m e^{i\omega(k-m)\Delta} g_{m-k} \\ &= Ae^{i(\omega m \Delta + \varphi)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega n \Delta} g_n, \end{aligned}$$

где $n = m - k$. Получили дискретную гармоническую последовательность, введем обозначение для частотного коэффициента передачи:

$$K(i\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega n \Delta} g_n.$$

Трансверсальные цифровые фильтры

У нас есть следующий алгоритм:

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m},$$

где a_0, a_1, a_2, \dots – коэффициенты, m – порядок фильтра. Применим z-преобразование к обоим частям:

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m})X(z).$$

Системная функция примет вид:

$$G_T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{z^m},$$

она имеет m -кратный полюс при $m = 0$ и m нулей. Мы можем графически представить себе работу трансверсального цифрового фильтра, глядя на рис. 13.8.

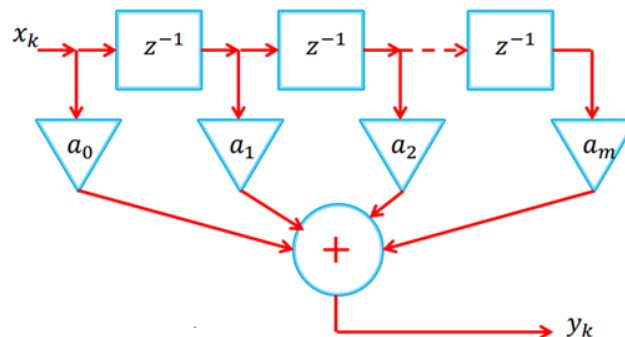


Рис. 13.8. Иллюстрация системной функции $G_T(z)$.

Импульсная характеристика: $\{g_k\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Набор $\{g_k\}$ является импульсной характеристикой трансверсального цифрового фильтра, она к тому же содержит конечное число членов.

Доказательство: каждое слагаемое функции $G_T(z)$ дает вклад, равный соответствующему коэффициенту a_m , смещенному на n позиций в сторону запаздывания. Подадим на вход единичный импульс $(1, 0, 0, \dots)$ — получим (a_0, a_1, a_2, \dots) .

Частотная характеристика:

Сделаем замену $z = \exp(i\omega\Delta)$, тогда частотный коэффициент передачи:

$$K_T(i\omega) = a_0 + a_1 e^{-i\omega\Delta} + a_2 e^{-i2\omega\Delta} + \dots + a_m e^{-im\omega\Delta}.$$

При заданном шаге дискретизации Δ можно реализовать самые разнообразные формы АЧХ, подбирая должным образом весовые коэффициенты a_n .

Пример (фильтр 3-го порядка).

Пусть $y_i = \frac{1}{3}(x_i + x_{i-1} + x_{i-2})$, тогда системная функция:

$$G_T(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2}),$$

частотный коэффициент передачи:

$$\begin{aligned} K_T(i\omega) &= \frac{1}{3}(1 + e^{-i\omega\Delta} + e^{-i2\omega\Delta}) \\ &= \frac{1}{3}[(1 + \cos \omega\Delta + \cos 2\omega\Delta) - i(1 + \sin \omega\Delta + \sin 2\omega\Delta)], \\ |K_T(i\omega)| &= \frac{1}{3}\sqrt{3 + 4 \cos \omega\Delta + 2 \cos 2\omega\Delta}, \\ \varphi_{K_T}(\omega) &= -\omega\Delta. \end{aligned}$$

При $\omega\Delta < 2$ трансверсальный фильтр может играть роль фильтра низких частот (ФНЧ), при $\omega\Delta > \pi$ не выполняется теорема Котельникова.

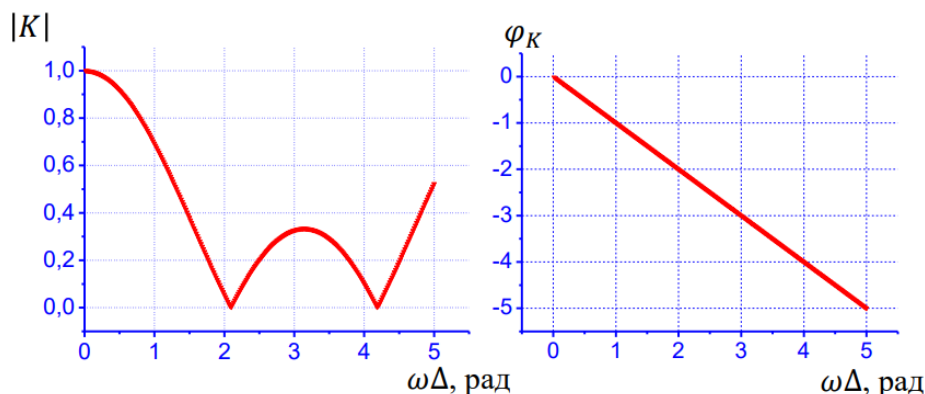


Рис. 13.9. АЧХ и ФЧХ трансверсального цифрового фильтра.

Рекурсивные цифровые фильтры

В этом случае используются предыдущие значения не только входного, но и выходного сигнала:

$$y_i = a_0x_i + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} + \dots + a_mx_{i-m} + b_1y_{i-1} + b_2y_{i-2} + \dots + b_my_{i-m}.$$

Заметим, что если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то получается трансверсальный (нерекурсивный) фильтр. Получим системная функция рекурсивного ЦФ, для этого перенесем члены с b_n в левую часть и применим z-преобразование:

$$G_R(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0z^m + a_1z^{m-1} + \dots + a_mz^0}{z^n - b_1z^{n-1} - \dots - b_nz^0}.$$

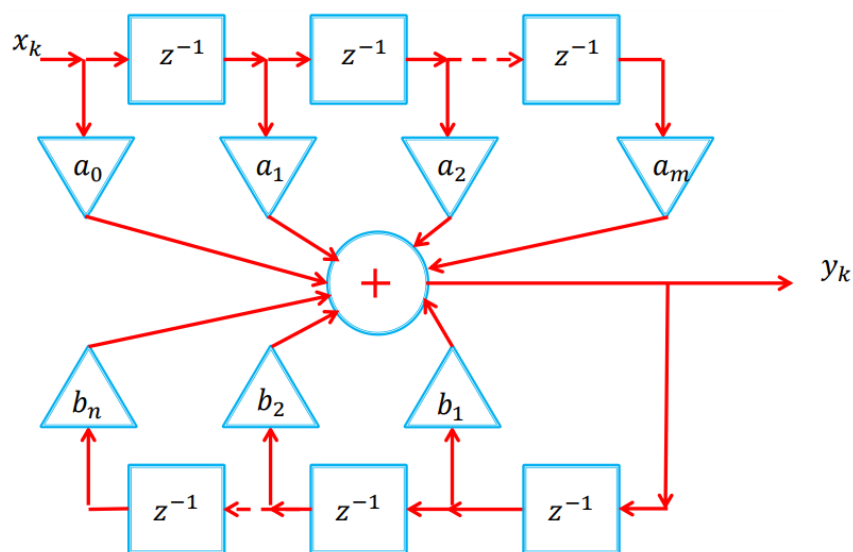


Рис. 13.10. Иллюстрация системной функции $G_R(z)$.

Недостаток рекурсивных фильтров заключается в потребности в большом числе ячеек памяти, отдельно для рекурсивной и нерекурсивной частей. На рис. 13.11 приведен пример схемы канонического рекурсивного фильтра 2-го порядка.

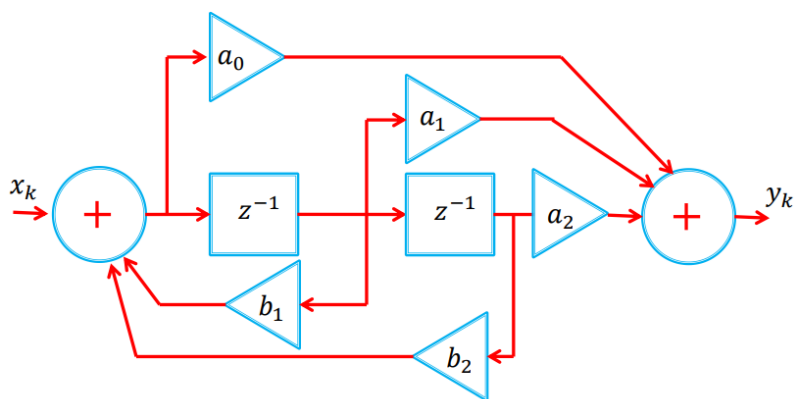


Рис. 13.11. Схема канонического рекурсивного фильтра 2-го порядка.

В рекурсивном фильтре возможны свободные колебания – генерация ненулевой последовательности на выходе при нулевой входной. Цифровой фильтр называется

устойчивым, если возникающий в нем свободный процесс есть невозрастающая последовательность, т. е. значения $|y_n|$ не превышают некоторого положительного числа M независимо от выбора начальных условий. Рекурсивный фильтр устойчив, если все полюса системной функции $G_R(z)$ по модулю не превосходят единицы. Импульсная характеристика имеет вид неограниченно-протяженной последовательности: Infinite Impulse Response filter (IIR).

Основным преимуществом рекурсивных фильтров является их эффективность (требуется гораздо меньше вычислительных ресурсов), особенно когда требуется задать сложную характеристику фильтра. Рекурсивный фильтр можно сделать гораздо ближе к аналоговому прототипу. Основным недостатком является ограниченная устойчивость. Кроме того, многие сигнальные процессоры содержат аппаратные средства, позволяющие реализовать трансверсальные фильтры почти так же эффективно, как рекурсивные.

ЛЕКЦИЯ 14. ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Понятие об оптимальной фильтрации

Под оптимальной фильтрацией понимают наилучшее выделение полезного сигнала из шумов, оказывается, что оптимальность зависит от того, какую именно задачу мы перед собой ставим. Можно условно разделить все задачи, которые решаются в радиофизике, на три больших класса.

Задачи оптимальной фильтрации:

- Измерение параметров стационарного сигнала известной формы на фоне шумов («задача радиосвязи»)
- Обнаружение сигнала известной формы, время прихода которого не определено («задача радиолокации»)
- Поиск сигналов, о форме которого имеются лишь предположения («задача радиоастрономии»)

Рассмотрим подробнее первую задачу. Предположим, что нам необходимо установить факт присутствия сигнала, форма которого известна. Применим линейный фильтр $h(t)$, на выходе получим:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Зафиксируем момент времени t_0 и будем искать $h(t)$, дающую максимум $|s_{\text{вых}}(t_0)|$, в этом нам поможет неравенство Коши-Буняковского:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}^2(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t_0 - \tau) d\tau}.$$

Знак " $=$ " в формуле достигается только, если $h(t_0 - \tau) = k s_{\text{вх}}(\tau)$. Произведя замену переменных $t = t_0 - \tau$, получаем импульсную характеристику согласованного фильтра:

$$h_{\text{согл}}(t) = k s_{\text{вх}}(t_0 - t).$$

Функция $h(t)$ должна выглядеть как масштабная копия входного сигнала, зеркально отраженная по времени (рис. 14.1).

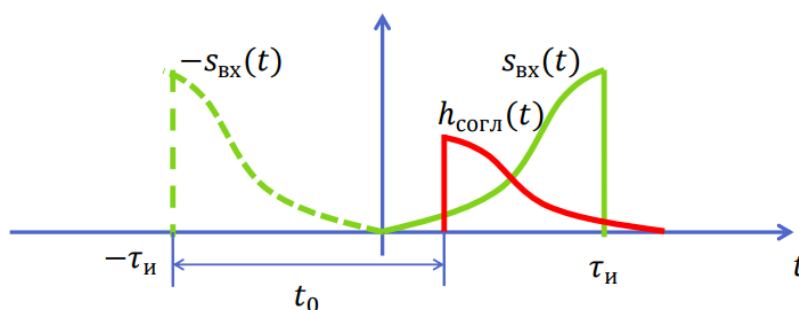


Рис. 14.1. График импульсной характеристики согласованного фильтра.

А что если на входе действует совсем не тот сигнал, под который мы согласовали фильтр: $u_{\text{вх}}(t) \neq s_{\text{вх}}(t)$. Тогда мы опять строим свертку нашего фильтра и реального, отличного от идеального, сигнала:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) h_{\text{согл}}(t - \tau) d\tau = k \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) s_{\text{вх}}[t_0 - (t - \tau)] d\tau \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) s_{\text{вх}}[\tau - (t - t_0)] d\tau = kB(t - t_0). \end{aligned}$$

Мы получили интеграл, который в точности совпадает с определением корреляционной функции, в этом смысле согласованный фильтр является коррелятором. Можно получить частотный коэффициент передачи такого согласованного фильтра

$$K_{\text{согл}}(i\omega) = k \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t_0 - t) e^{-i\omega t} dt,$$

произведем замену переменных $\zeta = t_0 - t$:

$$\begin{aligned} K_{\text{согл}}(i\omega) &= k e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\zeta) e^{-i\omega \zeta} d\zeta, \\ K_{\text{согл}}(i\omega) &= k S_{\text{вх}}(i\omega) e^{-i\omega t_0}. \end{aligned}$$

Предположим, что у нас имеется амплитудно-модулированный сигнал, если модуляция осуществляется по закону близкому к гармоническому, то спектр такого сигнала состоит из несущей частоты и двух боковых. Интуитивно кажется, что наилучший фильтр имеет зависимость модуля коэффициента передачи похожую на ту, что изображена на рис. 14.2. Но это не совсем полное рассмотрение, поскольку мы рассматривали только модуль коэффициента передачи фильтра, а у любого фильтра есть еще фазовая характеристика. Если задача заключается в обнаружении сигнала, то нужно подобрать фазовую характеристику фильтра так, чтобы в нужный момент времени все компоненты сигнала сложились в нужной фазе.

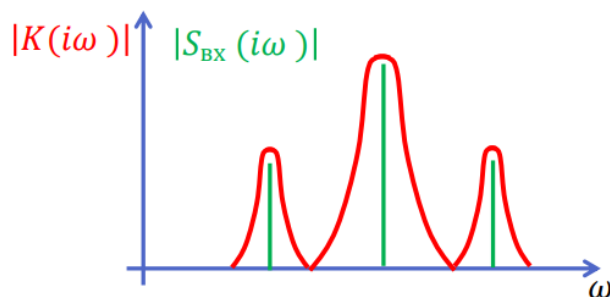


Рис. 14.2. АЧХ гребенчатого фильтра.

Поговорим о достоинствах согласованного фильтра, если на входе кроме полезного сигнала действует еще шум, например, простой белый шум, то отношение сигнала к шуму на выходе:

$$Q \sim \frac{2W_{\text{BX}}}{N},$$

где N — мера спектральной плотности белого шума. Таким образом, обнаружение или не обнаружение сигнала заданной формы не зависит от самой формы, а только от того, сколько энергии несет сигнал, и какая энергия шума приходится на единицу полосы.

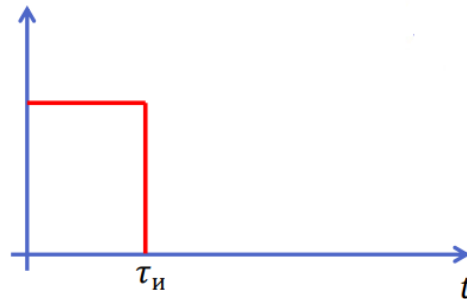


Рис. 14.3. Входной прямоугольный сигнал.

Давайте попробуем сконструировать оптимальный фильтр, который бы обнаруживал присутствие простого прямоугольного импульса (рис. 14.3). Для начала найдем спектр такого сигнала, эту задачу мы решали в самом начале нашего курса:

$$S_{\text{BX}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{BX}}(t) e^{-i\omega t} dt = U_0 \int_0^{\tau_n} e^{-i\omega t} dt = \frac{U_0}{i\omega} (1 - e^{-i\omega \tau_n}).$$

Тогда коэффициент передачи согласованного фильтра, отклик которого максимален в момент окончания импульса:

$$K_{\text{согл}}(i\omega) = k \frac{1 - e^{i\omega \tau_n}}{-i\omega} e^{-i\omega \tau_n} = \frac{k}{i\omega} (1 - e^{i\omega \tau_n}).$$

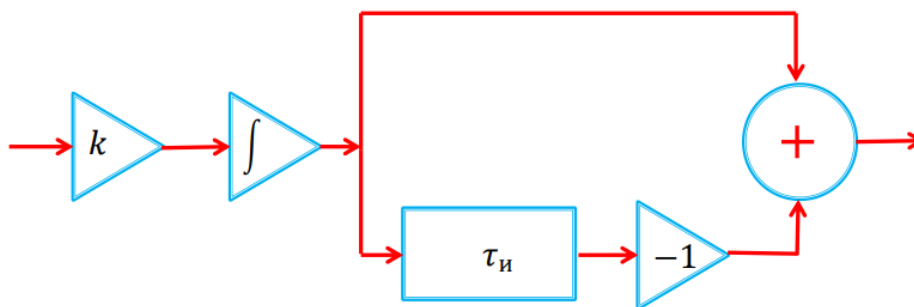


Рис. 14.4. Блок-схема согласованного фильтра для прямоугольного импульса.

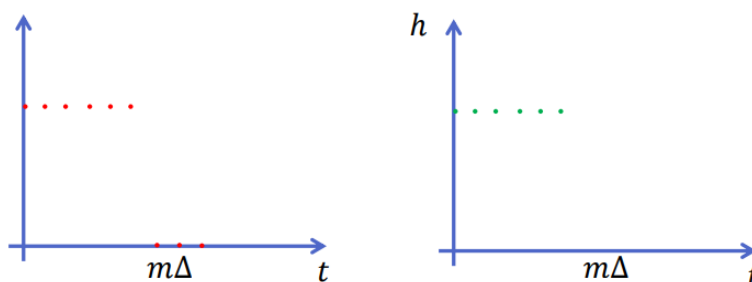


Рис. 14.5. Оцифрованный прямоугольный импульс.

Можно собрать согласованный фильтр из дискретных элементов, результат представлен на рис. 14.4, по сути это иллюстрация формулы для коэффициента передачи $K_{\text{согл}}(i\omega)$. Мы можем также попробовать использовать цифровую технику, давайте оцифруем наш импульс и построим оптимальный трансверсальный цифровой фильтр:

$$y_i = kx_i + kx_{i-1} + kx_{i-2} + \dots + kx_{i-m}.$$

Согласитесь, получилось гораздо проще.

Понятие о квадратурной модуляции

Хотелось бы немного рассказать о реальных вещах, которые используются в современной радиофизике. Для этого, во-первых, следует поговорить о квадратурной модуляции (QAM). Квадратурная модуляция – это суперпозиция амплитудной и фазовой модуляции. То есть мы берем два информационных сигнала I и Q , и строим выходной сигнал по правилу:

$$U_{\text{вых}} = Q \cos \omega t + I \sin \omega t.$$

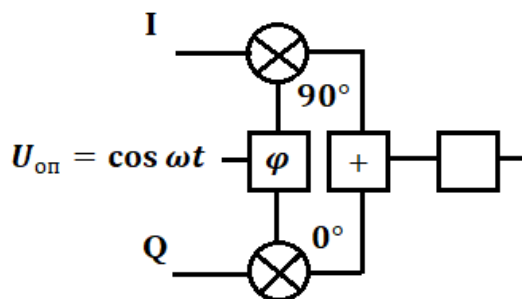


Рис. 14.6. Квадратурная модуляция.

Квадратурная модуляция – это универсальная модуляция, которая меняет и амплитуду и фазу несущего, в данном случае, опорного сигнала. Опорный сигнал подается на один сумматор со сдвигом фазы 0, а на второй сумматор со сдвигом фазы 90. Именно такая квадратурная модуляция чаще всего используется при передаче цифровых сигналов.

Один из возможных способов построения: мы берем входную цифровую последовательность, ее чётные значения будут отвечать за значение Q -й

информационной компоненты, а нечетные – за I -й. Сразу видно, что максимальная частота в спектре этих двух сигналов будет вдвое ниже, чем в исходной цифровой последовательности. Если после этого мы выполним собственно операцию модуляции гармонического сигнала, то получим нечто похожее на рис. 14.7.

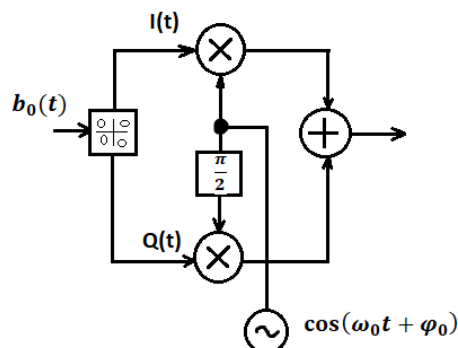


Рис. 14.7. Модулятор.

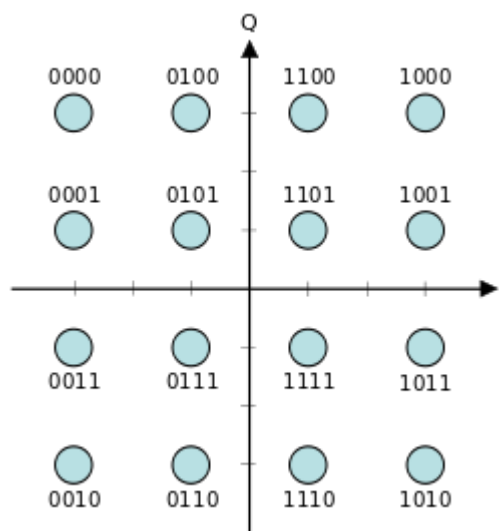


Рис. 14.8. Сигнальное созвездие.

Иногда используют большее число ступеней дискретизации и собственно процесс модуляции изображают с помощью того, что называется сигнальным созвездием (рис. 14.8), на плоскости в координатах I и Q построены все возможные значения для случая 16-ти битной квадратурной модуляции.

Сети мобильной связи используют динамическое кодирование, если ваш мобильный телефон находится близко к базовой станции, отношение сигнал-шум хорошее, он включает 16-битную квадратурную модуляцию (16-QAM). Если же отношение сигнала к шуму, то он автоматически по согласованию с базовой станцией переходит на кодирование 4- QAM, при этом скорость передачи данных снижается, надежность сохраняется.

Беспроводная сеть связи GSM

Раз уж мы заговорили про мобильные сети, сделаем небольшой экскурс в эту область. Вы, наверное, слышали о, так называемых, сетях 2-го поколения, 3-го поколения, 4-го поколения, разберемся отдельно с каждой категорией.

1. *Сети второго поколения 2G* использовали диапазоны 900 и 1800 МГц. Те сети, которые есть у нас в стране, это в основном сети GSM. Полоса в сети второго поколения использовала ячейки по 200 кГц, что позволяло обеспечивать передачу данных примерно 200 Кбит/с. Причем каждый из 124 частотных каналов делился между восемью пользователями. Естественно это не устраивало с точки зрения обеспечения широкополосного доступа к интернету.

2. *Сети третьего поколения 3G* работают на частотах около 2 ГГц, передавая данные со скоростью 2 Мбит/с. В мире сосуществуют очень большое количество разных стандартов 3G. Сети третьего поколения по стандарту должны обеспечивать высокие скорости передачи не только для неподвижных, но и для подвижных абонентов:

- до 2,048 Мбит/с при низкой мобильности (скорость менее 3 км/ч) и локальной зоне покрытия
- до 144 Кбит/с при высокой мобильности (до 120 км/ч) и широкой зоне покрытия
- до 64 (144) Кбит/с при глобальном покрытии (спутниковая связь)

3. *Сети четвертого поколения 4G* позволяют передавать данные со скоростью выше 100 Мбит/с. Теоретически 4G позволяет достичь скорости передачи данных до 1 Гбит/с в условиях движения источника или приемника и до 100 Мбит/с в условиях обмена данными между двумя мобильными устройствами. Пересылка данных в сетях четвертого поколения идет в соответствии с протоколом интернета, то есть пакетами по протоколу IPv6.

4. *Сети пятого поколения 5G* сейчас активно разрабатывается. Такая сеть должна будет обеспечивать пропускную способность не менее 10 Гбит/с, допускать подключения до 100 миллионов устройств/км², задержка передачи данных не более 1 мс. Технологии, которые это все должны обеспечить: во первых, это переход в сантиметровый и миллиметровый диапазоны волн, высокая плотность базовых станций, MIMO, D2D.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ