ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ. ЧАСТЬ 3. СЕМИНАРЫ

СВЕШНИКОВ
КОНСТАНТИН АЛЕКСЕЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ТЕРЕЩЕНКО ИРИНУ АЛЕКСАНДРОВНУ
СОЛОВЫХ АЛЕКСАНДРА АЛЕКСЕЕВИЧА

Содержание

Семинар 1. Доклад „Рассеяние нейтронов в электрическом поле“

Доклад подготовил Бакулев Михаил Алексеевич

Замечание 1.1. *Доклад был составлен с использованием материалов из книги Ландау и Лифшица „Теоретическая физика. Том 4. Квантовая электродинамика“. Далее будут рассмотрены материалы из параграфов 41 (Движение спинов во внешнем поле) и 42.*

Запишем гамильтониан произвольного спина во внешнем поле:

$$\widehat{H} = \widehat{H}' - \left(\mu' + \frac{e}{4m}\right)\left(\vec{\sigma} \cdot \left[\vec{E}; \frac{\vec{p}}{m}\right]\right) \ , \tag{1.1}$$

где в гамильтониан $\widehat{H}'$ входят взаимодействия, не связанные со спином, а μ' - это аномальный магнитный момент.

В случае $\mu' = 0$ гамильтониан (1.1) будет соответствовать гамильтониану электрона. Однако, поскольку рассматривается случай нейтрона, необходимо пренебречь слагаемым $e/4m$, т.е. рассматривать только аномальный магнитный момент. В предположении того, что нейтрон является нерелятивистским (т.е. достаточно медленным) гамильтониан для нейтрона будет иметь вид:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + i\frac{\hbar\vec{\mu}'}{mc}\vec{s}\left[\vec{E} \times \vec{\nabla}\right] \ . \tag{1.2}$$

Поскольку заряд нейтрона (вклад за счет квадрупольного члена) и его магнитный момент очень малы, то амплитуда взаимодействия может быть описана в борновском приближении, т.е.:

$$f_{\text{em}} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{p}'\vec{r}/\hbar} i\frac{\mu'\hbar}{mc}\vec{\sigma}\left[\vec{E}\vec{\nabla}\right] e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar} \mathrm{d}^3x \ . \tag{1.3}$$

Выражение (1.3) можно переписать в виде:

$$f_{\text{em}} = \frac{\mu'}{2\pi\hbar^2 c}\vec{\sigma}\left[\vec{E}_q, \vec{p}\right] \ , \tag{1.4}$$

где

$$\vec{E}_q = \int E\left(r\right) e^{-i\vec{q}\vec{r}} \mathrm{d}^3x \ , \tag{1.5}$$

где

$$\hbar\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \ . \tag{1.6}$$

Стоит отметить, что формулы (1.1) и (1.2) были выведены для случая медленно меняющихся полей, откуда следует, что в применении к кулоновскому полю ядра:

$$\frac{\hbar}{p} \ll \frac{1}{q} \longrightarrow \hbar q \ll p \ . \tag{1.7}$$

В то же время для угла рассеяния будет выполняться условие:

$$\theta \sim \frac{\hbar q}{p} \ll 1 \ . \tag{1.8}$$

Поскольку в задаче рассматривается кулоновский потенциал

$$U = \frac{Ze}{r} \ , \tag{1.9}$$

то фурье-образ напряженности поля, заданной выражением (1.5), будет иметь вид:

$$E_q = -iqU_q = -iq\frac{4\pi Ze}{q^2} \ , \tag{1.10}$$

где U_q - фурье-образ потенциала.

Далее выполним подстановку (1.10) в (1.4) и получим:

$$f_{\text{em}} = i\frac{2Ze\mu'}{q^2c\hbar^3}\left(\vec{\sigma}\left[\vec{p},\vec{p}'\right]\right) \ . \tag{1.11}$$

Из условия (1.8) получим:

$$\hbar q \approx p\,\theta \ , \tag{1.12}$$

откуда следует, что

$$[\vec{p},\vec{p}'] \approx p^2\,\theta\,\vec{n} \ , \tag{1.13}$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор к плоскости, в которой лежат вектора $\vec{p}$ и $\vec{p}'$.

Из (1.13) следует, что выражение (1.11) может быть записано в виде:

$$f_{\text{em}} = i\frac{2Ze\mu'}{\theta ch}\left(\vec{\sigma}\,\vec{n}\right) \ . \tag{1.14}$$

Помимо электромагнитного рассеяния существует также и ядерное рассеяние, амплитуда которого, однако, будет быстро убывать и стремиться на некотором расстоянии к постоянной величине a. Следовательно, полную амплитуду рассеяния можно представить в виде:

$$f = a + i\frac{b}{\theta}\vec{\sigma}\vec{n} \ , \tag{1.15}$$

где

$$b = \frac{2Ze\mu'}{hc} = 2Z\alpha\frac{\mu}{e}\ . \tag{1.16}$$

Для получения полного сечения рассеяния необходимо просуммировать (1.15) по всем возможным поляризациям. В таком случае дифференциальное сечение рассеяния будет иметь вид:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |a|^2 + \frac{b^2}{\theta^2} + \frac{2b}{\theta}\,\mathrm{Im}\,a\,\vec{n}\,\vec{\xi}\ , \tag{1.17}$$

где $\vec{\xi}$ - начальная поляризация пучка нейтронов.

В случае $\vec{\xi} = 0$ (неполяризованного пучка) после рассеяния поляризация будет равна:

$$\vec{\xi'} = \frac{2b\,\mathrm{Im}\,a\,\theta}{|a|^2\,\theta^2 + b^2}\,\vec{n}\ . \tag{1.18}$$

Максимальное значение $\vec{\xi}$ достигается при значении угла

$$\theta = \frac{b}{|a|} \tag{1.19}$$

и равно

$$\vec{\xi'}_{\max} = \frac{\mathrm{Im}\,a}{a}\,\vec{n}\ . \tag{1.20}$$

Следовательно, для экспериментального наблюдения рассеяния аномального магнитного момента нейтронов на электрическом поле необходимо подавать неполяризованный пучок нейтронов и смотреть на поляризацию выходного пучка, что может быть осуществлено путем использования поляризаторов.

Семинар 2. Доклад „Сверхтонкая структура. Лэмбовский сдвиг“

Доклад „Выведение g-фактора Брейта для нижнего уровня“

Доклад подготовил Бойцов Михаил Александрович

В курсе лекций было показано, как возникает гиромагнитное отношение для спина электрона в общем случае. В примитивном случае (т.е. случае, когда величина $Z\,\alpha \ll 1$) оно оказывается равным удвоенному магнетону Бора. При этом не было оговорено, в каком состоянии находится электрон. Для свободного или квазисвободного электрона, например, электрона, проходящего через прибор Штерна-Герлаха, - это отношение верно, но в атомах, т.е. в связанных состояниях, гиромагнитное отношение на самом деле будет изменяться, поскольку изменяется состояние электрона. Таким образом, гиромагнитное отношение в атомах может оказаться существенно отличным от двух.

В случае тяжелого ядра поправка Брейта должна учитываться методами спектроскопии, потому что все зеемановские эффекты, которые в нормальной ситуации имеют вклад $L_z + 2s_z$, будут иметь вклад L_z плюс некоторый коэффициент умноженный на s_z.

Рассмотрим вывод g-фактора Брейта для нижнего состояния $1s_{1/2}$.

Воспользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = m = 1$ для удобства записи выкладок. Волновая функция для нижнего состояния $1s_{1/2}$ устроена следующим образом:

$$\psi = \begin{pmatrix} i\,u_0\,v \\ q_0\,\vec{\sigma}\,\vec{n}\,v \end{pmatrix}\ , \tag{2.1}$$

где вывод данной волновой функции не будет рассматриваться в силу его большого объема. Величина v в выражении - спиновый вектор, который ориентирован в некотором произвольном направлении.

Стоит отметить, что верхняя и нижняя компоненты волновой функции (2.1) отличаются по чётности, поэтому если в верхней компоненте присутствует константа u_0, то в нижней компоненте для основного состояния возникает оператор $\vec{\sigma}\,\vec{n}$, который меняет чётность. Нижняя компонента является релятивистской и малой по сравнению с верхней, но она содержит компоненты другой чётности и поэтому должна быть учтена.

Далее обратимся к случаю $1s_{1/2}$ состояния, помещенного в магнитное поле, и будем рассматривать задачу по теории возмущений, считая поправку за счет наличия магнитного поля малой. Выберем векторный потенциал как

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{H} \times \vec{r}\right] \ . \tag{2.2}$$

Выражение (2.2) можно переписать в тензорном виде:

$$A_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ilm}\, H_l\, r_m \ . \tag{2.3}$$

Поправка к энергии за счет наличия магнитного поля будет равна:

$$V_{\text{magn}} = |e|\, \vec{A}\psi^{+}\vec{\alpha}\psi \ . \tag{2.4}$$

Для вычисления данной поправки необходимо в уравнении Дирака сделать замену $\vec{p}$ на $\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ и выписать слагаемое содержащее $\vec{A}$. Данное слагаемое имеет вид $\psi^{+}\,\vec{\alpha}\,\vec{A}\,\psi$ и представляет собой кинетический член. В выражении (2.4) присутствует модуль $|e|$, учитывающий знак заряда, а также из кинетического члена выносится вектор-потенциал. Выражение $\psi^{+}\vec{\alpha}\psi$ является поправкой к гамильтониану за счёт наличия слабого векторного потенциала.

Далее запишем выражение для сдвига по энергии:

$$\delta E = \int \mathrm{d}\vec{r}\ |e|\ \vec{A}\,\psi^{+}\,\vec{\alpha}\,\psi \ . \tag{2.5}$$

С другой стороны обозначим по определению

$$\delta E = -\vec{\mu}\,\vec{H} \ , \tag{2.6}$$

потому что именно таким образом определяется магнитный момент.

Для того чтобы упростить подынтегральное выражение в (2.5), необходимо расписать по определению произведение $\psi^{+}\,\alpha\,\psi$:

$$\psi^{+}\,\alpha\,\psi = \begin{pmatrix} -i\,u_0\,v^{+} & q_0\,v^{+}\,\vec{\sigma}\,\vec{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,u_0\,v \\ q_0\,\vec{\sigma}\,\vec{n}\,v \end{pmatrix} \ . \tag{2.7}$$

Далее после матричного перемножения (2.7) получим:

$$\psi^{+}\,\alpha\,\psi = (u_0\,q_0)\left[-i\,v^{+}\vec{\sigma}\,(\vec{\sigma}\,\vec{n})\,v + i\,v^{+}\,(\vec{\sigma}\,\vec{n})\,\vec{s}\,v\right] \ . \tag{2.8}$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках (2.8) представляет собой коммутатор. Следовательно,

$$\psi^+ \alpha\, \psi = (u_0\, q_0)\, \frac{1}{i} v^+ \left[\sigma_i\,,\, \sigma_j n_j\right] v_i\ . \tag{2.9}$$

Вернёмся к исходному подынтегральному выражению из (2.5). С учетом (2.9) запишем, что

$$e\, \psi^+ \alpha\, \psi \vec{A} = e\, \frac{1}{i} v^+\, n_j\, 2i\underline{\epsilon_{ijk}}\, \sigma_k\, v\, (u_0\, q_0)\ \frac{1}{2}\underline{\epsilon_{ilm}}\, H_l\, r_m\ , \tag{2.10}$$

где в выражении был раскрыт коммутатор сигма-матриц и вынесен множитель n_j, который не имеет отношения к матричному коммутатору. Векторный потенциал в (2.10) также был расписан через тензор Леви-Чивитты. Используем свойство произведения двух символов Леви-Чивитты

$$\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}\ , \tag{2.11}$$

в результате чего перепишем (2.10) в виде:

$$e\, \psi^+ \alpha\, \psi \vec{A} = e\ (u_0\, q_0)\, n_j\, v^+ \sigma_k \left(\delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}\right) H_l\, r_m\, v\ . \tag{2.12}$$

Далее свернем скалярные произведения, используя

$$\delta_{ij}\, a_i\, b_j = \left(\vec{a}\,,\, \vec{b}\right)\ , \tag{2.13}$$

и получим, что

$$e\, \psi^+ \alpha\, \psi \vec{A} = e\, u_0\, q_0\, v^+ \left[\frac{1}{r}\left(\vec{r}\, \vec{H}\right)(\vec{\sigma}\, \vec{r}) - r\left(\vec{\sigma}\, \vec{H}\right)\right]\, v\ . \tag{2.14}$$

Далее вернемся к вычислению интеграла (2.5):

$$\int \mathrm{d}\vec{r}\, e\ (u_0\, q_0)\, v^+ \left[\frac{1}{r}\left(\vec{r}\, \vec{H}\right)(\vec{\sigma}\, \vec{r}) - r\left(\vec{\sigma}\, \vec{H}\right)\right] v\ . \tag{2.15}$$

Величины $\vec{H}$ и $\vec{\sigma}$ постоянны, так как внешнее поле и сигма-матрица являются постоянными, откуда следует, что интеграл будет представлять собой усреднение по радиус-вектору.

Воспользуемся тем, что под знаком интеграла выполняется свойство:

$$r_i\, r_j = \frac{1}{3}\delta_{ij}\, r^2\ , \tag{2.16}$$

в результате чего получим

$$-\frac{2}{3}\int \mathrm{d}\vec{r}\, e\, r\, v^+ \left(\vec{\sigma}\, \vec{H}\right) v\, u_0\, q_0 = e\, v^+ \vec{\sigma}\, \vec{H}\, v \left(-\frac{2}{3}\right) \int \mathrm{d}\vec{r}\, r\, u_0\, q_0\ . \tag{2.17}$$

После интегрирования по угловой части в (2.17) получим выражение:

$$e\, v^{+} \vec{\sigma}\, \vec{H}\, v \left(-\frac{8\pi}{3}\right) \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r^3\, u_0\, q_0 \ . \tag{2.18}$$

Воспользуемся тем, что функции u_0 и q_0 такие, что волновая функция ψ является нормированной на единицу:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r^2 \, \left(u_0^2 + q_0^2\right) = \frac{1}{4\pi} \ . \tag{2.19}$$

Таким образом, коэффициент, стоящий в гиромагнитном отношении перед s_z, будет определяться выражением

$$g = -\frac{8}{3} \int_0^{\infty} r^3\, u_0\, q_0\, \mathrm{d}r \tag{2.20}$$

и называться g-фактором Брейта.

Величины u_0 и q_0 получаются из решения уравнения Дирака и имеют вид:

$$\begin{cases} u_0 = N\, e^{-\gamma r}\, r^{\varkappa-1}\, f \\ q_0 = N\, e^{-\gamma r}\, r^{\varkappa-1}\, \eta \end{cases} \tag{2.21}$$

где величины f и η определяются выражениями:

$$\Big\{ f = 2\sqrt{1+\epsilon}\eta = 2\sqrt{1-\epsilon} \tag{2.22}$$

а величины γ и $\varkappa$, как $\sqrt{1-\epsilon^2}$ и $\sqrt{\left(J+1/2\right)^2 - \left(Z\alpha\right)^2}$.

Величина N в выражениях (2.21) определяется из условия нормировки:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r^2\, e^{-2\gamma r} r^{2\varkappa-2} \left(4 + 4\epsilon + 4 - 4\epsilon\right) = \frac{8\Gamma\left(2\varkappa+1\right)}{\left(2\gamma\right)^{2\varkappa+1}} \ , \tag{2.23}$$

откуда

$$N = \frac{\left(2\gamma\right)^{\varkappa+1/2}}{\sqrt{8\Gamma\left(2\varkappa+1\right)}} \ . \tag{2.24}$$

Таким образом, интеграл в выражении (2.20) преобразуется к виду

$$\int_0^{\infty} r^3\, u_0\, q_0\, \mathrm{d}r = N^2 \int_0^{\infty} r^{2\varkappa+1} e^{-2\gamma r}\, f\, \eta\, \mathrm{d}r \ , \tag{2.25}$$

в результате вычисления которого ответ для g-фактора будет записываться как

$$g = +\frac{4}{3}\gamma\frac{2\varkappa+1}{2\gamma} = +\frac{2}{3}\left(2\varkappa+1\right) \approx \frac{2}{3}\left(1 + 2\sqrt{1-\left(Z\alpha\right)^2}\right) \ . \tag{2.26}$$

Из выражения (2.26) видно, что в случае слабого поля g-фактор в состоянии $1s_{1/2}$ не равен двум и зависит от заряда ядра. При стремлении величины $Z\,\alpha$ к единице g-фактор стремится к величине $2/3$. Таким образом, для малых зарядов ядра можно в гиромагнитном отношении подставлять удвоенный магнетон Бора, но для достаточно больших Z g-фактор не может быть опущен.

Доклад „Сверхтонкая структура. Лэмбовский сдвиг“

Доклад подготовила Лурсманашвили Клавдия Александровна

Прежде чем рассмотреть тему Лэмбовского сдвига, рассмотрим, какие релятивистские эффекты могут быть учтены в виде поправок к основному значению энергии атома водорода. На рис. 2.1 представлена схема нижних уровней энергии атома водорода, из которого видно, что самая большая из релятивистских поправок связана с взаимодействием собственного магнитного момента электрона с магнитным полем, возникающим из-за движения электрона по орбите, в электростатическом поле ядра и других электронов. Это взаимодействие называется спин-орбитальным и приводит к расщеплению уровней энергии атома и образованию тонкой структуры.

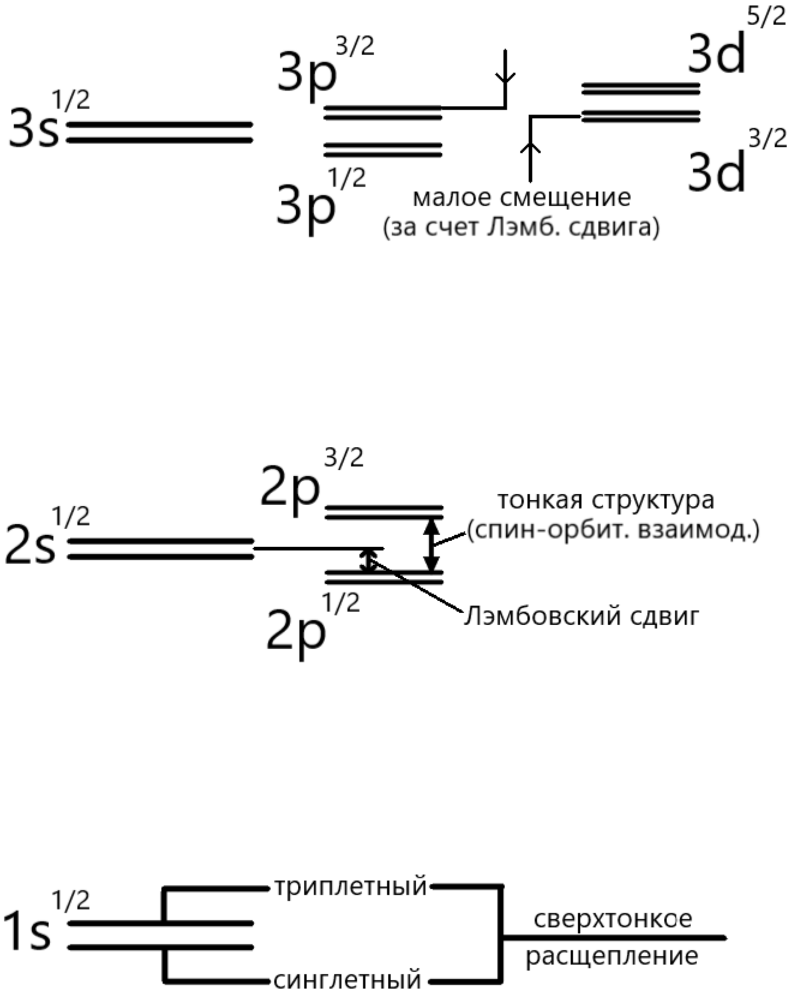

Рис. 2.1. Нижние уровни атома водорода

Замечание 2.1. *Стоит отметить, что уравнение Дирака изначально учитывает все спин-орбитальные эффекты, в том числе и тонкую структуру, причем не в виде поправок, как это происходит в квантовой механике, поскольку оно точно учитывает вклад от спина.*

Вторая релятивистская поправка связана со взаимодействием магнитного поля, создаваемого электронной оболочкой и магнитным моментом ядра. Таким образом, каждый подуровень тонкой структуры имеет сверхтонкую структуру и каждая спектральная линия тонкой структуры в свою очередь расщепляется на несколько компонент, носящих название сверхтонкой структуры спектральной линии.

В 1947 году после измерения тонкой структуры атома водорода, произведённого Лэмбом и Резерфордом, было обнаружено, что уровень $2s_{1/2}$ сдвинут вверх относительно $2p_{1/2}$, а теория Дирака предполагает, что они должны лежать вместе. Такой эффект называется смещением Лэмба, который снимает вырождение уровней с одинаковым значением j и n, но разным l. Сдвиг происходит благодаря взаимодействию электронов с флуктуациями квантованного поля излучения.

Рассмотрим подробнее сверхтонкую структуру, так как сверхтонкое расщепление является конкурирующим процессом к Лэмбовскому смещению.

Напомним, что сверхтонкая структура возникает благодаря взаимодействию протона с магнитным моментом электрона, в результате чего каждый уровень расщепляется на две компоненты в соответствии с двумя возможными значениями полного момента атома. Полный момент при этом складывается из полного момента электрона и полуцелого спина протона.

Для того чтобы оценить эффект сверхтонкого расщепления, воспользуемся не релятивистским приближением для s-состояний.

Гамильтониан, описывающий сверхтонкое расщепление, может быть описан как:

$$H_{\text{hf}} = -\frac{e}{2m}\vec{\sigma}_e \cdot \vec{B} \ , \tag{2.27}$$

где

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \ , \tag{2.28}$$

а A, в свою очередь, выражается через магнитный момент протона:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\vec{\mu}_p \times \vec{\nabla}\frac{1}{r} \ . \tag{2.29}$$

Величина σ_e в выражении (2.27) представляет собой оператор спина электрона. Величина же $\vec{\mu}_p$ может быть записана как:

$$\vec{\mu}_p = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\vec{j}\,(x)\;\mathrm{d}^3x\;, \tag{2.30}$$

где $\vec{j}(x)$- это ток, соответствующий магнитному моменту, локализованному в начале координат.

Если правильно выразить $\vec{j}$ через A, т.е. учесть, что

$$\Delta\vec{A} = -\vec{j}\;, \tag{2.31}$$

то можно получить выражение

$$\vec{j} = -\vec{\mu}_p\times\vec{\nabla}\delta^3\,(r)\;\;. \tag{2.32}$$

Таким образом, гамильтониан сверхтонкого взаимодействия (2.27) может быть переписан в виде:

$$H_{\mathrm{hf}} = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{2m}\vec{\sigma}_e\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{\mu}_p\times\vec{\nabla}\right)\right]\frac{1}{r}\;. \tag{2.33}$$

После преобразования векторного произведения в (2.33) получим:

$$H_{\mathrm{hf}} = \frac{e}{8\pi m}\vec{\sigma}_e\left[\vec{\mu}_p\Delta - \left(\vec{\mu}_p\,\vec{\nabla}\right)\vec{\nabla}\right]\frac{1}{r}\;. \tag{2.34}$$

Поскольку для нахождения среднего от гамильтониана необходимо произвести интегрирование, то усреднение по индексам i и j будет проводится через замену

$$\nabla_i\,\nabla_j \longrightarrow \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\nabla^2\;. \tag{2.35}$$

В результате после усреднения получим выражение

$$\overline{H_{\mathrm{hf}}} = -\frac{e}{3m}\left(\vec{\sigma}_e\,\vec{\mu}_p\right)\,\delta^3\,(r)\;\;. \tag{2.36}$$

Введём гиромагнитное отношение для протона

$$\mu_p = -\frac{g_p\,e}{2m_p}\cdot\frac{\vec{\sigma}_p}{2} \tag{2.37}$$

и для сдвига уровня по нерелятивистской теории получим

$$\Delta E = \left\langle\overline{H}_{\mathrm{hf}}\right\rangle_\psi = \frac{q_p\,e^2}{12m_e m_p}\left(\sigma_e\,\sigma_p\right)\int \mathrm{d}^3r\,\psi^*\,\delta^3\,(r)\;\psi\;. \tag{2.38}$$

Далее воспользуемся нормировкой дельта-функции и получим:

$$\Delta E = \frac{g_p\, e^2}{12 m_e m_p} \left(\vec{\sigma}_e\, \vec{\sigma}_p\right) \left|\psi\left(0\right)\right|^2 \ , \tag{2.39}$$

где под квадратом модуля находится волновая функция s-состояния в начале координат:

$$\psi\left(0\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m\, Z\, \alpha}{n}\right)^{3/2} \ , \tag{2.40}$$

квадрат модуля которой для основного состояния ($n = 1$) может быть выражен как:

$$\left|\psi\left(0\right)\right|^2 = \frac{\left(m_e\, \alpha\right)^3}{\pi} \ . \tag{2.41}$$

В выражении для сдвига уровня присутствует скалярное произведение оператора спина электрона и протона, которое может принимать значения

$$\sigma_e\, \sigma_p = \begin{cases} +1 \ - \ \text{для триплетных состояний} \\ -3 \ - \ \text{для синглетных состояний} \end{cases} \tag{2.42}$$

В результате для случая $n = 1$, $j = 1/2$ окончательно получим

$$\Delta E_{n=1\,,\, j=1/2} = \frac{4}{3} m_e\, \alpha^4 \frac{m_e}{m_p} g_p = 5.89 \cdot 10^{-6}\ \text{эВ} = 1.42 \cdot 10^9 \text{Гц} \ . \tag{2.43}$$

Выражение для величины расщепления n - го уровня в свою очередь будет иметь вид

$$\delta_n = \frac{4}{3} m\, \alpha^2 \left[g_p \frac{Z^3\, \alpha^2}{n^3} \left(\frac{m_e}{m_p}\right)\right] \ . \tag{2.44}$$

Перейдем к рассмотрению Лэмбовского сдвига. Как известно, возбуждённые состояния являются нестабильными и имеют определенную ширину. Атомы могут спонтанно переходить в более низкое состояние, и вероятность такого радиационного перехода в единицу времени определяется величиной:

$$W_{\mu \leftarrow \lambda} = \frac{4}{3} \frac{\left(E_\lambda - E_\mu\right)^3}{2 j_\lambda + 1} \left|\langle \mu | D | \lambda \rangle\right|^2 \ , \tag{2.45}$$

где $D = e\, r$ - дипольный оператор.

Замечание 2.2. *Матричный элемент в выражении (2.45) может быть найден из теоремы Вигнера-Экхарта.*

В качестве примера для перехода с $2p$ на $1s$ данная величина имеет значение:

$$W_{2p\to 1s} = 6.2\cdot 10^8 \text{с}^{-1} = 4.1\cdot 10^{-7}\text{эВ} \ . \tag{2.46}$$

Далее учтем, что заряженные частицы взаимодействуют с флуктуациями квантованного электромагнитного поля, вследствие чего уровни оказываются сдвинуты. Рассмотрим качественное описание Лэмбовского сдвига, предложенное Велтоном.

Будем рассматривать флуктуации координат, которые обусловлены электромагнитным полем. Поскольку координаты электрона испытывают флуктуации, то электрон „чувствует“ несколько размазанный кулоновский потенциал. Поправка к гамильтониану в таком случае имеет вид:

$$\Delta H_{\text{Лэмб}} = \frac{1}{6}\left\langle (\delta r)^2\right\rangle \Delta V \ , \tag{2.47}$$

где $V = -Z\alpha/r$.

Воспользуемся уравнением Пуассона

$$\Delta V = 4\,\pi\, Z\,\alpha\,\delta^3\,(r) \tag{2.48}$$

и учтем, что в рассматриваемом случае возмущение учитывается в первом порядке, и вклад дают лишь s-волны. Следовательно, n-ый уровень оказывается сдвинут на величину

$$\Delta E_{\text{Лэмб}}\,(n) = \frac{2\pi Z\alpha}{3}\left\langle (\delta r)^2\right\rangle \left|\psi_n\,(0)\right|^2 \ . \tag{2.49}$$

Подставим в (2.49) квадрат модуля волновой функции и получим:

$$\Delta E_{\text{Лэмб}}\,(n) = \frac{(2mZ\alpha)^3}{12}\frac{\alpha}{n^3}\left\langle (\delta r)^2\right\rangle \tag{2.50}$$

Для волн более высокого порядка сдвиг значительно уменьшается, так как волновая функция в начале координат будет стремиться к нулю.

Рассмотрим величину $\langle(\delta r)^2\rangle$, которая отвечает за среднеквадратичное отклонение по координате. Для её оценки воспользуемся классическом описанием и рассмотрим движение электрона в флуктуирующем магнитном поле, считая при этом ядро неподвижным, что имеет место, поскольку оно много тяжелее электрона.

Запишем уравнение движения для колебаний электрона:

$$m\delta\ddot{r} = eE \ , \tag{2.51}$$

где E величина, отвечающая за флуктуирующее магнитное поле.

Найдем вклад от компонент флуктуирующего поля E_ω. При этом будем предполагать что между различными модами нет корреляции:

$$m\delta r_\omega = -\frac{e}{\omega^2}E_\omega \ . \tag{2.52}$$

Оценка для $\left\langle(\delta r)^2\right\rangle$ в таком случае будет иметь вид:

$$\left\langle(\delta r)^2\right\rangle = \frac{e^2}{m^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^4}\left\langle E_\omega^2\right\rangle \ . \tag{2.53}$$

Далее рассмотрим полную энергию вакуумного поля, чтобы определить средне квадратичную напряжённость. Положим, что поле является когерентной суперпозицией плоских волн, а энергия вакуума представляет собой сумму энергий нулевых колебаний.

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left(E^2+B^2\right) = \sum_{\lambda=1,2}\sum_k \frac{\omega_{k\,\lambda}}{2} \ , \tag{2.54}$$

где два значения λ отвечают двум поперечным поляризованным состояниям, а сумма по k распространяется на все колебания.

Поместим систему в ящик и сделаем следующий переход:

$$\sum_k \longrightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \, , \, k = \frac{2\pi}{L}n \, , \, L^3 = \int \mathrm{d}^3x \tag{2.55}$$

Для свободных электромагнитных волн верно соотношение:

$$\int \mathrm{d}^3x\, B^2 = \int \mathrm{d}^3x\, E^2 \ , \tag{2.56}$$

в результате чего перепишем интеграл (2.54) в виде:

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left(E^2+B^2\right) = 2L^3\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\omega_k}{2} \ . \tag{2.57}$$

Величина $\langle E^2\rangle$, при этом может быть найдена, как

$$\left\langle E^2\right\rangle = \int \mathrm{d}\omega\left\langle E_\omega^2\right\rangle = \frac{1}{L^3}\int \mathrm{d}^3x\, E^2 = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\omega_k = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi^2}\omega^3 \ . \tag{2.58}$$

Замечание 2.3. *Вообще говоря, интегралы для величины $\langle E^2\rangle$ расходятся. С одной стороны, интеграл вычислялся через вакуумную энергию, а с другой стороны, из уравнения движения, в результате чего можно найти спектральную плотность. При этом важно заметить, что два интеграла оказываются равными (не подынтегральные функции). Возникающая в интегралах на бесконечности расходимость называется ультрафиолетовой, а расходимость в нуле - инфракрасной.*

Ультрафиолетовая расходимость связана с тем, что представленное квантовое рассмотрение является неполным и в действительности на расстояниях порядка комптоновской длины волны происходит высокочастотное обрезание. С другой стороны инфракрасная расходимость, возникающая в области низких частот должна исключаться, потому что формально можно излучить сколько угодно мягких фотонов, которые будут находиться ниже порога регистрации и в первых расчетах по Лэмбовскому сдвигу вводилось обрезание по нижнему энергетическому пределу $9/8m\alpha^2$, что составляет порядка 30 эВ.

Из представленных выше выражений следует, что среднеквадратичное отклонение будет иметь вид

$$\left\langle (\delta r)^2 \right\rangle = \frac{2\alpha}{\pi\, m^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} \sim \frac{2\alpha}{\pi\, m^2} \ln\frac{1}{\alpha}\ , \tag{2.59}$$

откуда величина Лэмбовского сдвига будет равна

$$\Delta E_{\text{Лэмб}}\,(n,l) \sim \frac{4}{3}\frac{m\, Z^4\, \alpha^5}{\pi\, n^3} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \delta_{l,0} \approx 660\,\text{МГц}\ \ (n=2, l=0)\ \ . \tag{2.60}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ