ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 1

ШИРОКОВ
ИЛЬЯ ЕВГЕНЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КОВАЛЯ КИРИЛЛА ВИКТОРОВИЧА

Содержание

Лекция 1. Модель скалярной незаряженной частицы

Введение

- Для чего нужен данный курс?

Курс квантовой теории поля необходим для изучения самых глубоких "уровней"мироздания. Фактически квантовая теория поля является частью физики высоких энергий и именно аппарат квантовой теории поля позволяет нам понимать процессы, происходящие с материей и полями на самых высоких энергиях.

- Что значит "в задачах"?

Словосочетание "в задачах"означает, что на протяжении курса мы будем рассматривать и изучать конкретные модели. Поэтому в курсе будет меньше абстракции и больше конкретики.

- Какая структура у курса?

Курс построен в соответствии с книгами Пескин М., Шредер Д. "Введение в квантовую теорию поля"и Райдер Л. "Квантовая теория поля". Вся программа изложена с помощью метода канонического квантования и в нем не будет применяться континуальный интеграл.

Повторение основ квантовой механики

Как известно классическая механика работает с такими классическими величинами как обобщенные координаты q_i и обобщенные импульсы p_i. Суть процедуры квантования к замене классических величин их операторными аналогами:

$$q_i \to \hat{q}_i \qquad p_i \to \hat{p}_i$$

Естественно просто назвать их "операторами"недостаточно. Нужно ввести некоторое пространство, на котором они будут действовать. В квантовой механике этим пространством является Гильбертово пространство $\mathscr{H}$, а его вектора обозначаются $|\psi\rangle$ и называются "состояниями".

Известно что в квантовой механике часто используют представления Гильбертовых пространств. Одно из наиболее удобных - координатное, где операторы зачастую являются дифференциальными (некоторые по сути - умножение), а пространство состоит из волновых функций $\psi = \psi(\vec{x}, t)$. Таким образом квантовая механика в координатном представлении может быть сведена к классической теории поля с классическими полями, которые описываются волновой функцией. К сожалению, такое описание не является Лоренц-инвариантным и в физике высоких энергий не применяется.

Повторение основ классической теории поля

Повторение основ классической теории поля будем осуществлять на примере модели скалярного незаряженного поля(частицы). Напомним что такое плотность функции Лагранжа:

$$L = \int \mathscr{L} d^4x \tag{1.1}$$

Где $\mathscr{L}$ - соответственно плотность функции Лагранжа. Рассмотрим плотность функции Лагранжа модели скалярного незаряженного поля(частицы):

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + V(\varphi) \tag{1.2}$$

По повторяющемся индексам подразумевается суммирование. $V(\varphi)$ - некий потенциал зависящий от полей в порядках, выше квадратичных. На самом деле этот потенциал является большой проблемой. В квантовой теории поля члены с высшими порядками называют **членами взаимодействия**, потому что, как станет ясно далее, они описывают взаимодействия полей.Пока мы будем считать этот потенциал равным нулю $V(\varphi) = 0$.

Теперь вспомним уравнения Лагранжа без диссипации в теоретической механике:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{1.3}$$

Как же записать их для теории поля? Очень просто: любую производную по времени(как частные, так и полные) заменяем производной ∂_μ, а функцию Лагранжа - функцией плотности Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{q_i} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi} = 0 \tag{1.4}$$

Конечно во втором уравнении можно было бы поставить индексы у полей, но пока для простоты мы рассматриваем одно поле. Продифференцируя нашу функцию Лагранжа мы получим уравнение Клейна-Гордона-Фока:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \tag{1.5}$$

Понятное дело эта теория является релятивистской. Мы будем рассматривать только релятивистские теории.

Скобки Пуассона, дельта функция, квантование

А как теперь перейти к квантовому описанию? Для этого вспомним скобки Пуассона:

$$\{A, B\} = \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} \tag{1.6}$$

Для q_i и p_j:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{1.7}$$

Процедура канонического квантования на самом деле состоит в том, что:

1) Каждой величине ставится в соответствие оператор:

$$q_i \to \hat{q}_i \qquad p_i \to \hat{p}_i$$

2) Скобкам Пуассона ставится в соответствие коммутационное соотношение(коммутатор):

$$\{\ \ \} \quad \longrightarrow \quad \frac{ic}{\hbar}[\ \ ]$$

Коммутатор естественно действует между операторами. Таким образом можно например написать уравнение Гейзенберга, ввиду того что мы имеем уравнение через скобки Пуассона для некоторой динамической переменной, а через эти скобки как раз и выводится это уравнение. Напомним, что в Гейзенберговском представлении оператор эволюционирует во времени, а состояние статично. Вообще Гейзенберговское представление нам наиболее удобно, потому что нам удобно когда сами поля (их операторы) зависят от времени.

Теперь в качестве величин, для которых мы будем ставить в соответствие оператор, будем брать сами поля, ибо чистая аналогия между полями и координатами очевидно прослеживается. Но для начала вспомним как коммутатор работает в квантовой механике для $\hat{q}_i$ и $\hat{p}_j$.

$$\left[\hat{q}_i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\delta_{ij} \tag{1.8}$$

Замечание: все выкладки будут в единицах $\hbar = c = 1$. В такой системе единиц все величинах будут измеряться в единицах энергии, например:

$$[mc^2] = [m] = [E] \qquad\qquad [l] = \frac{1}{[m]} = \frac{1}{[E]}$$

Теперь $\hbar$ мы писать больше не будем.

Аналогичные коммутационные соотношения пишутся для двух координат и двух импульсов, которые очевидно будут равны нулю:

$$\left[\hat{q}_i, \hat{q}_j\right] = \left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right] = 0 \tag{1.9}$$

Аналогия между координатой и полем очевидна, но какую аналогию придумать для импульса? Для этого следует вспомнить его определение(с учетом, что имеется одно поле):

$$p(\vec{x},t) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}(\vec{x},t)} \tag{1.10}$$

Заметим, что дифференцируем мы Лагранжиан, а не его плотность. Используем это:

$$p(\vec{x},t) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}(\vec{x},t)} = \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}(\vec{x},t)}\int d^3y\mathscr{L}(\varphi(y)\dot{\varphi}(y)) \tag{1.11}$$

Когда мы будем дифференцировать это выражение, реально у нас будут дифференцироваться только те слагаемые, в которых $x = y$. Т.е. мы как бы разбиваем пространство на кирпичики и дифференцироваться у нас будут только те степени свободы, которые совпадают между друг другом, а все остальные будут являться независимыми. Поэтому "выживут"только те ситуации, где $y = x$ и по сути интеграл у нас снимется, ведь просуммируются в нем только совпадающие части. Но так как это интеграл по объему, то это даст некоторую размерную величину.

$$p(\vec{x},t) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}(\vec{x},t)} = \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}(\vec{x},t)}\int d^3y\mathscr{L}(\varphi(y)\dot{\varphi}(y)) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(\vec{x},t)}d^3x \tag{1.12}$$

Тогда обозначим наши новые величины новыми символами:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(\vec{x},t)} \equiv \pi(\vec{x},t) \qquad\qquad d^3x \equiv \delta V \tag{1.13}$$

В итоге мы получим обобщённую плотность импульса, это и есть наш аналог импульса. Как теперь быть со скобками Пуассона для плотности импульса? Для этого рассмотрим обычную скобку Пуассона(суммируя по всему, разбитому на кубики, пространству):

$$\{A,B\} = \sum_{\vec{x}} \frac{\partial A}{\partial p_x}\frac{\partial B}{\partial \varphi_x} - \frac{\partial A}{\partial \varphi_x}\frac{\partial B}{\partial p_x} = \sum_{\vec{x}} \frac{1}{\delta V}\left[\frac{\partial A}{\partial \pi_x}\frac{\partial B}{\partial \varphi_x} - \frac{\partial A}{\partial \varphi_x}\frac{\partial B}{\partial \pi_x}\right] \tag{1.14}$$

Для того что бы пойти дальше, введем понятие функциональной производной. Как известно $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$, но что делать если i,j становятся континуальными? Для этого существует специальное обозначение:

$$\frac{\delta \varphi_{\vec{x}}}{\delta \varphi_{\vec{y}}} \equiv \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{1.15}$$

Эта функция полезна тем, что как и обычный дискретный дельта символ Кронеккера, она "вырезает"значение функции, но если дельта символ Кронеккера это делает при суммировании по индексу, то дельта функция делает это по координате:

$$\int d^3x \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \tag{1.16}$$

Однако дельта функция имеет размерность объема, это видно из интеграла. Таким образом именно на объем отличается она от обычного дельта символа. Зная про дельта функцию, вернемся к коммутационному соотношению. В нем домножим и поделим на элемент объема, чтобы получить дельта функцию:

$$\{A,B\} = \sum_{\vec{x}} \frac{\delta V}{(\delta V)^2}\left[\frac{\partial A}{\partial \pi_x}\frac{\partial B}{\partial \varphi_x} - \frac{\partial A}{\partial \varphi_x}\frac{\partial B}{\partial \pi_x}\right] = \sum_{\vec{x}} \delta V\left[\frac{\delta A}{\delta \pi_x}\frac{\delta B}{\delta \varphi_x} - \frac{\delta A}{\delta \varphi_x}\frac{\delta B}{\delta \pi_x}\right] \tag{1.17}$$

Если внимательно присмотреться, можно заметить, что это интеграл. Видно, что идёт суммирование между функцией, умноженной на элемент объема, что в континуальном пределе и есть объемный интеграл. Запишем:

$$\sum_{\vec{x}} \delta V\left[\frac{\delta A}{\delta \pi_x}\frac{\delta B}{\delta \varphi_x} - \frac{\delta A}{\delta \varphi_x}\frac{\delta B}{\delta \pi_x}\right] \quad \xrightarrow{CL} \quad \int d^3x\left[\frac{\delta A}{\delta \pi_x}\frac{\delta B}{\delta \varphi_x} - \frac{\delta A}{\delta \varphi_x}\frac{\delta B}{\delta \pi_x}\right] \tag{1.18}$$

Как видно переход от дискретности к непрерывности не сложен, фактически это замена сумм интегралами, а индексов - координатами. Посчитаем коммутационные соотношения для $\pi(\vec{x},t)$ и $\varphi(\vec{x},t)$(пока еще не квантовые):

$$\{\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)\} = \int d^3z\left[\frac{\delta \pi(\vec{x},t)}{\delta \pi(\vec{z},t)}\frac{\delta \varphi(\vec{y},t)}{\delta \varphi(\vec{z},t)} - \frac{\delta \pi(\vec{x},t)}{\delta \varphi(\vec{z},t)}\frac{\delta \varphi(\vec{y},t)}{\delta \pi(\vec{z},t)}\right] \tag{1.19}$$

Обобщенная производная π по φ из второго слагаемого в любом случае даст нам ноль, а вот в первом слагаемом получатся дельта функции. Учтем так же симметричность дельта функции(возможность переставить аргументы местами). Имеем:

$$\{\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)\} = \int d^3z\left[\frac{\delta\pi(\vec{x},t)}{\delta\pi(\vec{z},t)}\frac{\delta\varphi(\vec{y},t)}{\delta\varphi(\vec{z},t)} - \frac{\delta\pi(\vec{x},t)}{\delta\varphi(\vec{z},t)}\frac{\delta\varphi(\vec{y},t)}{\delta\pi(\vec{z},t)}\right] = \tag{1.20}$$

$$= \int d^3z\delta^3(\vec{x}-\vec{z})\delta^3(\vec{x}-\vec{z}) = \delta^3(\vec{y}-\vec{x})$$

И снова видна чистая аналогия с обычными классическими коммутационными соотношениями, в которых присутствует дельта символ. Теперь поставим в соответствие π и φ операторы и построим их коммутаторы по правилам, описанным выше:

$$[\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{1.21}$$

$$[\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)] = [\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)] = 0 \tag{1.22}$$

Коммутаторы мало чего нам дают. Давайте зададим пространство на котором это задано. Т.к. теперь мн-во состояний не может быть счётным (сами поля не счётны), то значит надо обобщить Гильбертовы пространства на некоторое более общее понятие. Таковым понятием является **пр-во Фока**.

Оказывается очень удобным разложить с помощью преобразования Фурье наши поля(уже операторные):

$$\hat{\varphi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\vec{x}}\hat{\varphi}(\vec{p},t) \tag{1.23}$$

В таком случае говорят что мы перешли в импульсное представление,а само значение $\vec{p}$ часто называют импульсом частицы. Почему? Будет рассказано позднее. Фурье образ $\pi(\vec{x},t)$:

$$\hat{\pi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\vec{x}}\hat{\pi}(\vec{p},t) \tag{1.24}$$

Давайте подставим всё это в уравнение Клейна-Гордона-Фока, но в классическом (не квантованном) случае:

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi = \partial_0^2\varphi - \nabla^2\varphi + m^2\varphi = 0 \tag{1.25}$$

Напомним, что мы работаем над пр-вом Минковского с сигнатурой $(1,-1,-1,-1)$. Подставим Фурье преобразование в наше уравнение. Т.к. набла будет действовать только на координату, то со всех трёх дифференцирований вылезет по коэффициенту для p, которые вместе создадут вектор $\vec{p}$:

$$\nabla e^{i\vec{p}x} = i\vec{p}e^{i\vec{p}x} \tag{1.26}$$

Тогда ввиду наличия наблы в квадрате вылезет квадрат $\vec{p}$, а т.к. все три интеграла Фурье в выражении (1.25) можно будет объединить под один интеграл, и учитывая, что всё выражение равно нулю, то можно сделать вывод, что подынтегральное выражение равно нулю. Отсюда с учетом (1.26) получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + (\vec{p}^2 + m^2)\varphi = 0 \tag{1.27}$$

Помните о том, что теперь буква $\varphi = \varphi(\vec{p},t)$ стала образом Фурье исходного поля, а не самим полем$\varphi = \varphi(\vec{x},t)$. Если посмотреть внимательнее, это выражение очень сильно на что-то похоже. Этим "что-то"является гармоническим осциллятором. Действительно, заменим $\vec{p}^2 + m^2$ на $\omega_{\vec{p}}^2$ и получим в чистом видео уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{\varphi} + \omega_{\vec{p}}^2\varphi = 0 \tag{1.28}$$

Правда правильнее было бы заметить, что это не просто гармонический осциллятор, а некоторая совокупность гармонических осцилляторов, ибо каждому импульсу соответствует своя омега. Т.е. наше поле можно представить как континуум гармонических осцилляторов. Стоит отметить, что вообще вся квантовая теория поля умеет работать "нормально"только с теми Лагранжианами, которые напоминают гармонический осциллятор. Теперь, по сути, можно применить для этой квантовой теории теже методы, что использовались для описания гармонического осциллятора. Вспомним основы квантового гармонического осциллятора:

Квантовый гармонический осциллятор

Функция Гаммильтона для квантового гармонического осциллятора выглядит следующим образом:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2\hat{x}^2}{2} \tag{1.29}$$

Для удобства вводят т.н. представление с помощью операторов рождения и уничтожения $\hat{a},\hat{a}^\dagger$:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{1.30}$$

Давайте подставим их:

$$\hat{H} = -\frac{\omega}{4}(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2) + \frac{\omega}{4}(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2 = \tag{1.31}$$

$$= \frac{\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})$$

Т.к. коммутатор $[\hat{x},\hat{p}] = i$, то с помощью него найдем коммутатор оператора рождения и уничтожения:

$$[\hat{x},\hat{p}] = -\frac{i}{2}[\hat{a}+\hat{a}^\dagger,\hat{a}-\hat{a}^\dagger] = -\frac{i}{2}\Big([\hat{a},\hat{a}] - [\hat{a},\hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger,\hat{a}] - [\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger]\Big) = \frac{2\cdot i}{2}[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = i \tag{1.32}$$

Значит:

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1 \tag{1.33}$$

Тогда вернемся к соотношению (1.31) имея на руках (1.33):

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\omega}{2}\Big([\hat{a},\hat{a}^\dagger] + 2[\hat{a}^\dagger,\hat{a}]\Big) = \omega\Big(\frac{1}{2} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\Big) \tag{1.34}$$

Мы получили известное соотношение для гамильтониана, выраженное через операторы рождения и уничтожения. Почему они так называются? Во-первых этот вид порождает некоторый набор состояний, которые обозначают нулевым, $|0\rangle$, первым $|1\rangle$ и так далее. Их называют энергетическими уровнями. Причем $\hat{a}$ действует на нулевое состояние и получается 0. Но как понять что это действительно состояние с нулевой энергией? Подействуем на него функцией Гамильтона:

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{\omega}{2} \tag{1.35}$$

А как действует $\hat{a}^\dagger$? Он является оператором рождения, т.е.:

$$\hat{a}^\dagger\,|0\rangle \sim |1\rangle \tag{1.36}$$

Что бы убедиться в этом, подействуем Гамильтонианом на эту структуру:

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger\,|0\rangle \tag{1.37}$$

Но для начала посчитаем коммутатор Гамильтониана с оператором уничтожения:

$$[\hat{H},\hat{a}] = \omega\Big([\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}] + \frac{1}{2}[\mathbb{I},\hat{a}]\Big) = \omega[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}] = \omega\Big(\hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{a}] + \hat{a}[\hat{a}^\dagger,\hat{a}]\Big) = \tag{1.38}$$

$$= -\omega\hat{a}$$

В первой строчке использовалось правило Лейбница для коммутаторов (третье равно). По аналогии для оператора рождения:

$$[\hat{H},\hat{a}^\dagger] = \omega\hat{a}^\dagger \tag{1.39}$$

Вернем и подставим все эти факты в (1.37):

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger|0\rangle = \omega\hat{a}^\dagger|0\rangle + \hat{a}^\dagger\hat{H}|0\rangle = \omega\left(1+\frac{1}{2}\right)\hat{a}^\dagger|0\rangle \tag{1.40}$$

Т.е. мы создали первое состояние. Если обобщить это понятие, то получится:

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \tag{1.41}$$

Отсюда энергия n-го состояния равна:

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega \tag{1.42}$$

Стоит заметить, что оператор $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ можно назвать оператором числа частиц в системе $\hat{N}$, ведь если подействовать на некое состояние оно даст n. Можно так же написать общие уравнения действия операторов рождения и уничтожения на произвольное состояние $|n\rangle$:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1\rangle \tag{1.43}$$

Хорошо, а теперь давайте найдем выражения для операторов рождения и уничтожения через операторы импульса и координаты. Для этого уравнения (1.30) сложим и вычтем, домножив на соответствующие коэффициенты:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\hat{p} \tag{1.44}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\hat{p} \tag{1.45}$$

Отсюда обозначение оператора уничтожения как комплексного сопряжения очевидно, ведь действительно при комплексном сопряжении (1.44), с учетом эрмитовости $\hat{x}$ и $\hat{p}$ мы получим выражение (1.45).

В силу того, что вся теория нашей модели (1.2) очень похожа на Гармонический осциллятор, хотелось бы ввести такие же операторы рождения и уничтожения и для нее.

Применение аппарата квантового гармонического осциллятора на рассматриваемую модель

Заметим тот факт, что аналогия между нашей моделью и гармоническим осциллятором была выведена не для самих полей $\varphi(\vec{x},t)$ и $\pi(\vec{x},t)$, а для их Фурье образов: $\varphi(\vec{p},t)$ и $\pi(\vec{p},t)$. Поэтому, переходя к операторам и учитывая факт, описанный выше, введем оператор рождения и уничтожения по аналогии:

$$\hat{a}^{\dagger}(\vec{p},t) = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}\hat{\varphi}(\vec{p},t) - i\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}}\hat{\pi}(\vec{p},t) \tag{1.46}$$

$$\hat{a}(\vec{p},t) = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}\hat{\varphi}(\vec{p},t) + i\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}}\hat{\pi}(\vec{p},t) \tag{1.47}$$

Но есть нюанс, а являются ли вещественными эти Фурье образы? Можно проверить, что в действительно Фурье образы не вещественны, это можно проверить следующим образом: вернемся к Фурье образам самих (еще не квантованных) полей:

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}}\varphi(\vec{p},t) \tag{1.48}$$

Если комплексно сопрячь это выражением, получим:

$$\varphi^*(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{x}}\varphi^*(\vec{p},t) \tag{1.49}$$

Для сохранения вещественности провернем следующий трюк: заменим $\vec{p}$ на $-\vec{p}$, тогда вылезет знак минус (из-за d^3p), но и порядок интегрирования у трёх интегралов тоже поменяется, и если мы обратно все три интеграла перевернем, то получится еще один минус перед интегралами, минус на минус даст плюс и теперь у нас получается такое же выражение, но с образом фурье, в котором импульс заменился на минус импульс:

$$\varphi^*(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}}\varphi(-\vec{p},t) \tag{1.50}$$

Получается, чтобы соблюсти вещественность, комплексное сопряжение Фурье образа должно ровняться самому Фурье образу с противоположным импульсом:

$$\varphi^*(\vec{p},t) = \varphi(-\vec{p},t) \tag{1.51}$$

Поэтому когда мы вводили $\hat{a}^{\dagger}(\vec{p},t)$, нужно учесть, что комплексное сопряжение нужно будет поставить и у самих $\hat{\varphi}(\vec{p},t)$ и $\hat{\pi}(\vec{p},t)$:

$$\hat{a}(\vec{p},t) = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}\hat{\varphi}^\dagger(\vec{p},t) + i\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}}\hat{\pi}^\dagger(\vec{p},t) \tag{1.52}$$

Теперь всё введено правильно. Теперь выведем уравнение для $\hat{\varphi}(\vec{x},t)$

$$\hat{\varphi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}}\hat{\varphi}(\vec{p},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{1.53}$$

$$\hat{\pi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{1.54}$$

Эти два разложения были получены соответственно с помощью формул (1.47) и (1.52). Домашнее задание: убедиться, что это действительно так.

Эти выражения дают нам достаточно много вариантов для взаимодействия с ними, например можно ввести функцию Гамильтона(до этого она вводилась только в квантовой механике, в квантовой теории поля мы ее еще не вводили), но об этом в следующей лекции.

Лекция 2. Импульсное представление

Повторение

На прошлой лекции мы ввели функцию Лагранжа (пока без члена взаимодействия):

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{2.1}$$

По сути дела вне теории возмущений мы можем нормально работать только с подобными функциями Лагранжа, без взаимодействий. Почему будет рассказано позднее.

В прошлый раз мы начали процедуру квантования такой модели, которая сводилась к переобозначению скобок Пуассона в коммутатор:

$$\{\ \ \} \quad \longrightarrow \quad \frac{ic}{\hbar}[\ \ ]$$

В качестве обобщенной координаты у нас выступает поле, в качестве обобщенного импульса у нас выступает выражение:

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} \tag{2.2}$$

Соответственно переход от квантовой механики к квантовой теории поля выглядит:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad \longrightarrow \quad [\hat{\varphi}(\vec{x},t), \hat{\pi}(\vec{x},t)] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.3}$$

Ранее было получено, что во многом теория похожа на гармонический осциллятор, но только для преобразования Фурье:

$$\hat{\varphi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\hat{\varphi}(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} \tag{2.4}$$

Именно для $\hat{\varphi}(\vec{p},t)$ теория похожа на гармонический осциллятор. Поэтому как и для гармонического осциллятора вводили операторы рождения и уничтожения: $\hat{a}(\vec{p},t), \hat{a}^\dagger(\vec{p},t)$:

$$\hat{\varphi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{2.5}$$

$$\hat{\pi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}|\left[\hat{a}(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{2.6}$$

Эти соотношения являются полным аналогом соответствующих соотношений для квантовой механики:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \tag{2.7}$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \tag{2.8}$$

Гамильтониан

На самом деле удобно переписать эти выражения иначе, обратив внимания на то, что можно во втором слагаемом выражения (2.6) сделать замену $\vec{p} \to -\vec{p}$ (это можно сделать так как у нас фактически два независящих друг от друга интеграла объединены в один, но их можно разъединить обратно и "играть"со вторым).

Тогда, так же, как мы делали в первой лекции: из-за смены знака поменяются пределы и знак у d^3p, соответственно поменяв пределы обратно, вынесется знак минус, сократится со знаком d^3p и выражение станет таким же, каким оно было, с единственной разницей, что теперь у нас у $\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)$ вместо $\vec{p}$ будет стоять $-\vec{p}$.

Так же стоит отметить что из за определения $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, знак $\omega_{\vec{p}}$ не изменится. А в экспоненте минус пропадет. Имеем:

$$\hat{\varphi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{2.9}$$

$$\hat{\pi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{2.10}$$

Очевидно экспоненту можно вынести. Имеем:

$$\hat{\varphi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}(\vec{p},t) + \hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\right]e^{i\vec{p}\vec{x}} \tag{2.11}$$

$$\hat{\pi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}\left[\hat{a}(\vec{p},t) - \hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\right]e^{i\vec{p}\vec{x}} \tag{2.12}$$

Данное выражение является удобным для последующего счёта Гамильтониана. Будет интересно узнать, похоже ли оно на гармонический осциллятор. К тому же далее будет возможность узнать, соотносится ли этот параметр $\vec{p}$ с настоящим импульсом.

Теперь стоит разобраться с Гамильтонианом, а для этого нужно вспомнить про энергию. Классический Гамильтониан:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L\big|_{\dot{q}(p_i,q_i,t)} \tag{2.13}$$

Гамильтониан отличается от Лагранжиана тем, что он живет в фазовом пространстве (без скоростей, но с импульсами). В теории поля же у имеется тензор энергии импульса (далее: ТЭИ):

$$T_\mu^{\cdot\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \varphi} \partial_\mu \varphi - \mathscr{L} \delta_\mu^{\cdot\nu} \tag{2.14}$$

Тут явно прослеживается аналогия ТЭИ с Гамильтонианом (если внимательно приглядеться, то величины очень похожи, с учетом аналогии, описанной в первой лекции).

Энергия из него выписывается следующим образом:

$$E = \int d^3x T^{00} \tag{2.15}$$

А импульс:

$$P_i = \int d^3x T^{0i} \tag{2.16}$$

Тут надо быть аккуратным, тот импульс, который мы писали до этого $\hat{\pi}(\vec{x},t)$ - это формальная аналогия с обобщенным импульсом из теоретической механики, в свою очередь P_i это уже осмысленный "физический"импульс.

Теперь отождествим энергию с Гамильтонианом, а T^{00} назовем функцией Гамильтоновой плотности $\mathscr{H}$:

$$H \longrightarrow E \qquad\qquad T^{00} \longrightarrow \mathscr{H} \tag{2.17}$$

Давайте посчитаем T^{00} для классической теории. Посчитав в классическом случае, мы сразу сможем перейти в квантовый, просто поставив везде шляпки. Т.к. индекс 00 то разницы между верхними и нижними индексами нет (метрика (1,-1,-1,-1)):

$$T_0^{\cdot 0} = T^{00} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_0 \varphi} \partial_0 \varphi - \mathscr{L} \delta_0^{\cdot 0} = (\partial_0 \varphi)^2 - \mathscr{L} = \tag{2.18}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Можно заметить что первое слагаемое и есть $\pi(\vec{x},t)$:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\pi^2(\vec{x},t) + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \tag{2.19}$$

Осталось перейти к квантовым величинам и самому гамильтониану:

$$\hat{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\hat{\pi}(\vec{x},t)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}^2 \right] \tag{2.20}$$

Нужно подставить все конструкции. Интегрирований теперь будет три, причем при разложении в интеграл Фурье, переменные, по которым мы будем интегрировать, будут разными(p и p' соответственно):

$$\hat{H} = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\left[-\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}{4}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)-\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[\hat{a}(\vec{p}',t)-\hat{a}^\dagger(-\vec{p}',t)\right]e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}}+ \right.$$
$$\left. +\frac{1}{\sqrt{4\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)+\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[\hat{a}(\vec{p}',t)+\hat{a}^\dagger(-\vec{p}',t)\right]e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}}((i\vec{p},i\vec{p}')+m^2)\right] \tag{2.21}$$

Пояснение откуда взялись некоторые члены:

1) Экспоненты в конце каждого слагаемого появились из-за представления (2.11) и (2.12).

2) Член $(i\vec{p},i\vec{p}')$ взялся из градиента, так как градиент берется по пространственной части, а единственная часть зависящая от пространства была экспонента, поэтому вылезли коэффициенты стоящие в экспоненте при $\vec{x}$ (и выродились в скалярное произведение).

3) Член m^2 взялся из-за того, что фактически $(\nabla\hat{\varphi})^2$ и $m^2\hat{\varphi}^2$ отличаются только на множитель m^2 и отсутствием взятия производной по $\vec{x}$. Поэтому мы сократили выкладку и просто занесли m^2 под одну скобку с $(i\vec{p},i\vec{p}')$.

Теперь нужно вспомнить одно из определений (а точнее интеграл Фурье) дельта функции:

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2}e^{i\vec{p}\vec{x}} \tag{2.22}$$

$$\delta^3(\vec{p}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^2}e^{i\vec{p}\vec{x}} \tag{2.23}$$

Заметим, что к формуле (2.21) мы можем применить формулу (2.23), заменив порядок интегрирования и обратив внимания на присутствующие там экспоненты. Таким образом мы превратим их в дельта функции:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')\left[-\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}{4}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)-\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[\hat{a}(\vec{p}',t)-\hat{a}^\dagger(-\vec{p}',t)\right]+ \right.$$
$$\left. +\frac{1}{\sqrt{4\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)+\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[\hat{a}(\vec{p}',t)+\hat{a}^\dagger(-\vec{p}',t)\right](-(\vec{p},\vec{p}')+m^2)\right] \tag{2.24}$$

Применив дельта функцию с учетом того, что в аргументе должна быть разность, а не сумма, т.е. вынеся знак, получим, что все p' заменятся на $-p$:

$$\hat{H}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\Big[-\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}\left[\hat{a}(\vec{p},t)-\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[\hat{a}(-\vec{p},t)-\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\right]+ \tag{2.25}$$

$$+\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)+\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[\hat{a}(-\vec{p},t)+\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\right](\vec{p}^2+m^2)\Big]$$

Последняя скобка - энергия $\omega_{\vec{p}}^2$, поэтому она уйдет в числитель и сократится со знаменателем на один порядок. Перемножим скобки и рассмотрим первый член:

$$\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}(-\vec{p},t) \tag{2.26}$$

Для того что бы понять что это такое, рассмотрим коммутационные соотношения. Как задача для домашнего выполнения даётся доказательство следующие утверждения:

$$[\hat{a}(\vec{p},t),\hat{a}^\dagger(\vec{q},t)]=(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{2.27}$$

$$[\hat{a}(\vec{p},t),\hat{a}^(\vec{q},t)]=[\hat{a}^\dagger(\vec{p},t),\hat{a}^\dagger(\vec{q},t)]=0 \tag{2.28}$$

На всякий случай: $\vec{q}$ - другое обозначение $\vec{p}$, просто обозначение совпадает с обобщенной координатой, но это не обобщенная координата.

Внимательно посмотрев на (2.28), можно сделать вывод, что мы можем переставлять местами $\hat{a}(\vec{p},t)$ и $\hat{a}^(\vec{q},t)\Big|_{\vec{q}=-\vec{p}}$. Поэтому в (2.25) после раскрытия скобок член вида (2.26) уйдёт, т.к. он есть в обоих парах скобок с разным знаком. Аналогично члены с "крестом". Не сократятся только перекрестные члены. Резюмируем:

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}\left[2\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)+2\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\hat{a}(-\vec{p},t)\right] \tag{2.29}$$

Проворачивая ту же замену $\vec{p}\to-\vec{p}$ со вторым членом, получим:

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}\left[2\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)+2\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\hat{a}(\vec{p},t)\right] \tag{2.30}$$

Сократим двойку и в итоге имеем:

$$\hat{H}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}\left[\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)+\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\hat{a}(\vec{p},t)\right] \tag{2.31}$$

Вспомним как выглядело уравнение Гамильтониана для гармонического осциллятора:

$$H=(\frac{\omega}{2}+m\hat{a}^\dagger\hat{a}) \tag{2.32}$$

Попробуем получить такое же соотношение для (2.31). Для этого применим коммутатор (2.27):

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}\left[[\hat{a}(\vec{p},t),\hat{a}^{\dagger}(\vec{p},t)] + 2\hat{a}^{\dagger}(\vec{p},t)\hat{a}(\vec{p},t)\right] \tag{2.33}$$

Но в этом уравнении появилась серьезная проблема. Учитывая соотношение (1.27), мы получим дельта функцию от нуля $\delta^3(\vec{p}-\vec{p}) = \delta^3(0)$. Это, вообще говоря, бесконечность. У нас возникла бесконеная энергия. Обычно это заметают под ковёр, но всё же это большой недочёт. Например, это может сыграть серьезную роль в гравитации. Вопрос в полной мере не решен, но некоторые соображения указывают, что у других полей эти бесконечности с другим знаком, а значит есть шанс, что при суммировании по всем полям, бесконечности могут сократиться. А мы оставим эту проблему пока в стороне, ведь нам интересны уровни энергии. Запишем наше выражение другим образом:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{p}}\left[\hat{a}^{\dagger}(\vec{p},t)\hat{a}(\vec{p},t) + E_{vac}\right] \tag{2.34}$$

Отсюда более четко видно, почему мы так хотели назвать $\vec{p}$ - импульсом. У нас после всех преобразований вылез коэфициент $\omega_{\vec{p}}$, зависящий от массы и этого параметра и единственная физически осмысленная интерпретация этого соотношения - импульс. Можно пойти чуть другим путем, построим оператор импульса и докажем что наше $\vec{p}$ это импульс:

$$T^0_{\cdot i} = \partial_0\varphi\partial_i\varphi \tag{2.35}$$

$$P_i = \int d^3x T^{0i} = -\int d^3x \partial^0\varphi\partial^i\varphi \tag{2.36}$$

$$\vec{P} = -\int d^3x \hat{\pi}(\vec{x},t)\nabla\hat{\varphi}(\vec{x},t) = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}(\hat{a}(\vec{p},t)-\hat{a}^{\dagger}(-\vec{p},t))\cdot \tag{2.37}$$

$$e^{i\vec{p}\vec{x}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}}(\hat{a}(\vec{p}',t)+\hat{a}^{\dagger}(-\vec{p}',t))e^{i\vec{p}'\vec{x}}(i\vec{p}')$$

Применяя тот же прием действие в действие, как в примере (2.21), имеем:

$$\vec{P} = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}[\hat{a}(\vec{p},t)-\hat{a}^{\dagger}(-\vec{p},t)][\hat{a}(\vec{p},t)+\hat{a}^{\dagger}(-\vec{p},t)]\vec{p} \tag{2.38}$$

Рассмотрим снова первое слагаемое после раскрытия скобок:

$$\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^{\dagger}(-\vec{p},t)\vec{p} \tag{2.39}$$

Переставим их местами, т.к. они коммутируют по (2.28):

$$\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\hat{a}(\vec{p},t)\vec{p} \tag{2.40}$$

Сделаем замену переменных $\vec{p} \to -\vec{p}$:

$$\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\hat{a}(\vec{p},t)\vec{p} = -\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\vec{p} \tag{2.41}$$

Мы получили, что выражение равно себе же с противоположным знаком. Такое возможно, только если оно равно нулю.

$$\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\hat{a}(\vec{p},t)\vec{p} = -\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\vec{p} = 0 \tag{2.42}$$

Для обратной конструкции всё тоже самое, поэтому остаются снова только перекрестные члены:

$$\vec{P} = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}[\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{p},t) - \hat{a}^\dagger(-\vec{p},t)\hat{a}(-\vec{p},t)]\vec{p} \tag{2.43}$$

Сделаем во втором выражении снова замену $\vec{p} \to -\vec{p}$, вылезет знак плюс перед вторым слагаемым:

$$\vec{P} = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}[\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{p},t) + \hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\hat{a}(\vec{p},t)]\vec{p} \tag{2.44}$$

В итоге получаем, что выражение для импульса пропорционально нашему Фурье обозначению. Это, в принципе, и доказывает, почему мы можем называть $\vec{p}$ - импульсом.

Состояния, операторы рождения и уничтожения в КТП - продолжение

Что мы помним о состояниях в квантовой механике? $\hat{a}$ - разрушало состояние, $\hat{a}^\dagger$ - создавало:

$$\hat{a}\,|0\rangle = 0 \qquad \hat{a}^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle \tag{2.45}$$

В квантовой теории поля всё точно так же, т.е. можно сказать:

$$\hat{a}(\vec{p},t)\,|0\rangle = 0 \qquad \hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\,|0\rangle = |p\rangle \tag{2.46}$$

Посмотрим как Гамильтониан коммутирует с этим операторами, учтем что т.к. E_{vac} - число, то с ним в любом случае всё коммутирует и получится ноль:

$$[\hat{a}^\dagger(\vec{p},t),\hat{H}] = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{p}}\left[\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{p}',t)\hat{a}(\vec{p}',t) - \hat{a}^\dagger(\vec{p}',t)\hat{a}(\vec{p}',t)\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\right] \tag{2.47}$$

Проккумутируем последние два члена во втором слагаемом с помощью (2.27):

$$[\hat{a}^\dagger(\vec{p},t),\hat{H}] = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{p}}\Big[\hat{a}(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{p}',t)\hat{a}(\vec{p}',t) - \hat{a}^\dagger(\vec{p}',t)[\hat{a}(\vec{p}',t),\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)] - \tag{2.48}$$

$$-\hat{a}^\dagger(\vec{p}',t)\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\hat{a}(\vec{p}',t)\Big]$$

Учитывая, что $\hat{a}^\dagger(\vec{p}',t)$ и $\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)$ коммутируют, получается, что первое и третье слагаемые равны, а значит они сокращаются:

$$[\hat{a}^\dagger(\vec{p},t),\hat{H}] = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{p}}\left[-\hat{a}^\dagger(\vec{p}',t)[\hat{a}(\vec{p}',t),\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)]\right] \tag{2.49}$$

Учтём (1.27) и сразу снимем интеграл:

$$[\hat{a}^\dagger(\vec{p},t),\hat{H}] = -\omega_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger(\vec{p},t) \tag{2.50}$$

Аналогично получим:

$$[\hat{a}(\vec{p},t),\hat{H}] = \omega_{\vec{p}}\hat{a}(\vec{p},t) \tag{2.51}$$

Теперь убедимся, что действие оператора рождения рождает частицу с энергией $\omega_{\vec{p}}$:

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\,|0\rangle = \left([\hat{H},\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)] + \hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\hat{H}\right)|0\rangle \tag{2.52}$$

Очевидно, что $\hat{H}$ действующее на нулевое состояние даст нам просто вакуумную энергию, а первое слагаемое знаем из (2.50). Получаем:

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\,|0\rangle = (\omega_{\vec{p}} + E_{vac})\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\,|0\rangle \tag{2.53}$$

Повторив процедуру для еще раз получим:

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{q},t)\,|0\rangle = (\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}} + E_{vac})\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{q},t)\,|0\rangle \tag{2.54}$$

И так далее. Таким образом, сколько бы частиц мы не рождали, всегда энергия будет просто суммироваться. Аналогично можно проделать с импульсом и аналогично состояния просто будут суммироваться.

Мы продемонстрировали, что используя оператор рождения, мы можем получать многочастичные состояния.

Причем если переставить местами операторы рождения при действии на нулевое состояние, то ничего не поменяется (ввиду коммутационных соотношений):

$$\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\hat{a}^\dagger(\vec{q},t)\left|0\right\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{q},t)\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\left|0\right\rangle \tag{2.55}$$

А это значит, что частицы подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна и являются **Бозонами**.

В чем раскрывается зависимость от времени?

В силу того, что мы работаем в представлении Гейзенберга, т.е. наши операторы зависят от времени, то наши операторы подчиняются уравнению Гейзенберга:

$$i\frac{d\hat{a}(\vec{p},t)}{dt} = [\hat{a}(\vec{p},t),\hat{H}] \tag{2.56}$$

Это уравнение - фактически следствие соотношения из классической механики:

$$\frac{df}{dt} = \{H,f\} \tag{2.57}$$

Коммутатор (1.56) мы уже считали, см. (2.51). Получаем:

$$i\frac{d\hat{a}(\vec{p},t)}{dt} = \omega_{\vec{p}}\hat{a}(\vec{p},t) \tag{2.58}$$

Это простешее дифференциальное уравнение. Его решение:

$$\hat{a}(\vec{p},t) = \hat{a}(\vec{p})e^{-i\omega_{\vec{p}}t} \tag{2.59}$$

Где $\hat{a}(\vec{p})$ не зависит от времени. Благодаря такому представлению очень удобно перейти к другим обозначениям. Пусть $px = p_\mu x^\mu$, где $p_0 = \omega_{\vec{p}}$. Тогда:

$$\hat{\varphi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}(\vec{p})e^{-ipx} + \hat{a}^\dagger e^{ipx}\right] \tag{2.60}$$

Здесь нет ошибки, минус в экспоненте взялся из-за того, как мы определили px. По метрике пространственное слогаемое будет с минусом, поэтому пришлось вынести минус.

Лекция 3. Опережающая и запаздывающая функции Грина

Повторение

В предыдущей лекции мы доказали, что оператор рождения и уничтожения представим в виде:

$$\hat{a}(\vec{p}',t) = \hat{a}(\vec{p})e^{-i\omega_{\vec{p}}t} \tag{3.1}$$

$$\hat{a}^{\dagger}(\vec{p}',t) = \hat{a}^{\dagger}(\vec{p})e^{i\omega_{\vec{p}}t} \tag{3.2}$$

Тогда поле может быть записано в более интересном виде:

$$\hat{\varphi}(\vec{p},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}(\vec{p})e^{-ipx} + \hat{a}^{\dagger}(\vec{p})e^{ipx}\right] \tag{3.3}$$

Где $px \overset{def}{=} p_{\mu}x^{\nu}$. Т.е. теперь в степени находится Лоренц-инвариантное обозначение и сама инвариантность становится более очевидной.Напоминание: до этого писалось классическое 3-х мерное Евклидово обозначение $\vec{p}\vec{x}$, которое не явно Лоренц-инвариантно.

Нормировка

Теперь о нормировке. Следует ввести положения о том, как нормируют состояния. В прошлых лекция упоминалось, что одночастичное состояние создается оператором рождения:

$$\hat{a}(\hat{p})\left|0\right\rangle = \left|\vec{p}\right\rangle \tag{3.4}$$

Таким образом, оператор рождения создает частицу с импульсом $\vec{p}$. Возникает вопрос как нормировать это состояние?

Разумно, если мы ввели нулевое состояние, то нормировать его на единицу:

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{3.5}$$

Но как нормировать состояния вида (3.4)? Например такое: $\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle$ ($\vec{q}$ - другое обозначение импульса). Естественно для этого нужно вспомнить как действуют операторы не только на бра вектора, но и на кет вектора. Для классического квантмеханического гармонического осциллятора действие слева оператора рождения на бра вектор действовало следующим образом:

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle = |1\rangle \tag{3.6}$$

А для вида

$$\langle 0|\hat{a}^\dagger \tag{3.7}$$

существует своя хитрость. Мы можем ввести некоторый единичный оператор следующим образом:

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = I \tag{3.8}$$

Понять что это действительно так достаточно легко. Подействуем им на какоелибо состояние и преобразуем:

$$\sum_n |n\rangle\langle n|1\rangle = \sum_n |n\rangle\delta_{1n} = |1\rangle \tag{3.9}$$

Единичка появилась от того, что дельта символ сохранит в сумме только первое состояние. Стоит так же напомнить, что все состояния здесь ортогональны, поэтому $\langle n|1\rangle = \delta_{1n}$ (из определения нормированности). Сейчас рассматриваются поля, которые очень похожи на гармонический осциллятор, поэтому подобный оператор можно ввести и для исходного поля.

А теперь стоит рассмотреть что произойдет, если на (3.7) справа подействовать единичным оператором. Небольшое пояснение: само по себе выражение (3.7) является оператором, т.к. состоит из композиции линейного функционала $\langle 0|$ и оператора $\hat{a}^\dagger$ и очевидно дает нам тоже оператор. Поэтому действием справа единичным оператором на оператор (3.7) мы получим композицию трех операторов $\langle 0|,\hat{a}^\dagger,I$. Теперь преобразуем это композицию:

$$\sum_n \langle 0|\hat{a}^\dagger|n\rangle\langle n| = \sum_n \langle 0|n+1\rangle\langle n| = \sum_n (0)\langle n| = 0\sum_n \langle n| = 0 \tag{3.10}$$

Т.к. сумма по n начинается с нуля, ни одно из скалярных произведений $\langle 0|n+1\rangle$ не выживает и дают ноль. Затем по свойствам линейного функционала ноль был внесен в функционал и дал ноль.

Аналогично доказывается соотношение:

$$\sum_n \langle 0|\,\hat{a}\,|n\rangle\langle n| = \sum_n \langle 0|n-1\rangle\langle n| = \sum_n \delta_{0,n-1}\langle n| = \langle 1| \tag{3.11}$$

Для полей всё вводится аналогично, только суммирование заменяется интегрированием:

$$I = \int d^3p\,|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| \tag{3.12}$$

Теперь рассмотрим выражение $\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle$. С помощью (3.11) и определения оператора рождения представим выражением в виде:

$$\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle = \langle 0|\,\hat{a}(\vec{q})\hat{a}^\dagger(\vec{p})\,|0\rangle \tag{3.13}$$

Заменим композицию операторов выражением с коммутатором:

$$\begin{gathered}\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle = \langle 0|\,\hat{a}^\dagger(\vec{q})\hat{a}(\vec{p}) + \left[\hat{a}(\vec{q}),\hat{a}^\dagger(\vec{p})\right]|0\rangle = \langle 0|\,\hat{a}^\dagger(\vec{q})\hat{a}(\vec{p})\,|0\rangle + \\ +\langle 0|\left[\hat{a}(\vec{q}),\hat{a}^\dagger(\vec{p})\right]|0\rangle = 0 + \langle 0|\left[\hat{a}(\vec{q}),\hat{a}^\dagger(\vec{p})\right]|0\rangle\end{gathered} \tag{3.14}$$

Откуда:

$$\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle = \langle 0|\left[\hat{a}(\vec{q}),\hat{a}^\dagger(\vec{p})\right]|0\rangle \tag{3.15}$$

В (3.14) после второго "равно"пропал член $\langle 0|\,\hat{a}^\dagger(\vec{q})\hat{a}(\vec{p})\,|0\rangle$. Это произошло из-за того, что оператор рождения подействовал на нулевой бра вектор справа (даёт ноль) а оператор уничтожения на нулевой кет вектор слева (тоже ноль), отсюда получился ноль.

Напоминание: коммутатор из выражения (3.15) равен $(2\pi)^3\delta^3(\vec{q}-\vec{p})$(всё написано для полей теперь). Тогда (3.15) станет:

$$\begin{gathered}\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle = \langle 0|\left[\hat{a}(\vec{q}),\hat{a}^\dagger(\vec{p})\right]|0\rangle = \langle 0|\,(2\pi)^3\delta^3(\vec{q}-\vec{p})\,|0\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{q}-\vec{p})\langle 0|0\rangle = \\ = (2\pi)^3\delta^3(\vec{q}-\vec{p})\end{gathered} \tag{3.16}$$

В (3.16) учтено, что $\langle 0|0\rangle = 1$ и тот факт, что $(2\pi)^3\delta^3(\vec{q}-\vec{p})$ является числом, а значит его можно вынести за выражение векторов.

Таким образом было получено определение нормировки, но оно не очень "хорошее потому что оно не лоренц инвариантно. Это можно продемонстрировать сделав "буст"вдоль любой оси:

$$P_3' = \gamma(P_3 + \beta E) \qquad E' = \gamma(E + \beta P_3) \tag{3.17}$$

Где γ - гамма фактор $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, а $\beta = \frac{v}{c} = v$ (т.к. с = 1)

Теперь посмотрим преобразования. Для дельта функции существует свойство:

$$\delta(f(x-x_0)) = \frac{\delta(x-x_0)}{f'(x_0)}. \tag{3.18}$$

Нужно воспользоваться этим свойством, что бы доказать, что (3.16) лоренц-неинвариантно:

$$\delta^3(\vec{q}-\vec{p}) = \frac{dP_3'}{dP_3}\delta^3(\vec{q}-\vec{p}) \tag{3.19}$$

Здесь берется производная по одному направлению, т.к. буст был сделан только по одному направлению. Поэтому несмотря на степень дельта функции, производная берется только одна.

Теперь требуется вычислить производную, учитывая, что энергия зависит от импульса слеудющим образом(см пред. лекции): $E = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m^2}$.

$$\frac{dE}{dP_3} = \frac{P_3}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m^2}} = \frac{P_3}{E} \tag{3.20}$$

Теперь обратно к (3.19):

$$\delta^3(\vec{q}-\vec{p}) = \frac{dP_3'}{dP_3}\delta^3(\vec{q}-\vec{p}) = \gamma\left(1+\beta\frac{P_3}{E}\right)\delta^3(\vec{q}-\vec{p}) = \frac{\gamma}{E}(E+\beta P_3)\,\delta^3(\vec{q}-\vec{p}) = \tag{3.21}$$

$$\frac{E'}{E}\delta^3(\vec{q}-\vec{p})$$

Тогда если переопределить дельта функцию в (3.16), домножив на E, то получится Лоренц инвариантная величина. Т.е. E будет переходить в E' при преобразованиях:

$$\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle = (2\pi^3)2E_{\vec{p}}\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{3.22}$$

Двойка взялась от произвола выбора, так, банально, удобнее. В будущем будет понятно почему(при вычислении аналога $\langle x|p\rangle$ сократятся ненужные члены). Нулевое состояние нормировано на единицу: $\langle 0|0\rangle = 1$.

Следует отметить, что теперь определение $\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)$ нужно сделать немного другим:

$$\hat{a}^\dagger(\vec{p},t)\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\,|\vec{p}\rangle \tag{3.23}$$

Опережающая и запаздывающая функция Грина

Теперь интересно было бы получить аналог выражения из квантовой механики следующего вида: $\langle x|p\rangle = e^{ipx}$ - волны Де-Бройля.

Из выражения (2.5) лекции 2 имеем:

$$\hat{\varphi}(\vec{x},t)\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{-i\vec{p}\vec{x}}\,|\vec{p}\rangle \tag{3.24}$$

Здесь было введено переобозначение $\omega_{\vec{p}} \to E_{\vec{p}}$, более принятое в стандартной литературе. Так же было учтено, что оператор уничтожения, действуя на нулевое состояния, даёт ноль, поэтому из выражения (2.11) пропал оператор уничтожения и остался только оператор рождения, который дал вектор $|\vec{p}\rangle$. Корень пропал из-за переопределения оператора рождения (3.23).

Теперь можно рассмотреть такую конструкцию, аналогичную $\langle x|t\rangle$:

$$\langle 0|\,\hat{\varphi}(\vec{x},t)\,|\vec{p}\rangle \tag{3.25}$$

Теперь это можно рассматривать с точки зрения оператора $\hat{\varphi}(\vec{x},t)$ действующего на нулевое состояние слева, или с точки зрения преобразования композиции операторов $\langle 0|\,\hat{\varphi}(\vec{x},t)$. Тогда выживет только оператор уничтожения (рождения зануляется, см (3.10)). Получается:

$$\langle 0|\,\hat{\varphi}(\vec{x},t)\,|\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{q}}}e^{i\vec{q}\vec{x}}\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{q}}}e^{i\vec{q}\vec{x}}(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) = \tag{3.26}$$

$$= \int (d^3q)\frac{2E_{\vec{p}}}{2E_{\vec{q}}}e^{i\vec{q}\vec{x}}\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) = \frac{2E_{\vec{p}}}{2E_{\vec{p}}}e^{i\vec{p}\vec{x}} = e^{i\vec{p}\vec{x}}$$

Это выражение может пригодиться в будущем.

До этого работа проводилась с не эволюционирующими системы. Теперь нужно задаться вопросом, как задать эволюцию? Для этого нужно вспомнить конструкцию из квантовой механики - амплитуду перехода:

$$\left\langle q',t'|q'',t''\right\rangle \tag{3.27}$$

По сути - это амплитуда вероятности частицы перейти из положения q',t' в положение q'',t'' .

Ее аналог в квантовой теории поля разумно ввести с помощью следующего состояния:

$$\langle 0|\,\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\,|0\rangle \tag{3.28}$$

где $x=(\vec{x},t), y=(\vec{y},t)$. Т.е. поле находилось в одном состоянии, в одной точке и времени, и перешло в другую точку и время. Это конструкцию можно вычислить(замечание: теперь используются ковариантные представления):

$$\begin{gathered}\langle 0|\,\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\,|0\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\frac{1}{2E_{\vec{q}}}e^{-ipx}e^{iqy}\langle q|p\rangle= \\ =\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\frac{1}{2E_{\vec{q}}}e^{-ipx}e^{iqy}(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\delta^3(\vec{p}-\vec{q})= \\ =\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{ip(y-x)}\overset{def}{=}D(x-y)\end{gathered} \tag{3.29}$$

Примечание, в конце было введено новое обозначение $D(x-y)$, которое в будущем получит большой смысл. Во время выкладок (3.29) использовались стандартные приемы, уравнение (3.22) и (3.24).

В (3.29) можно рассмотреть два случая: пространственно-подобный интервал и времени-подобный. Времениподобный - две частицы в одной точке но в разное время. А пространственноподобный - частицы в одно время в двух разных точках.

1) Времениподобный интервал: $(\vec{x}-\vec{y})=0 \quad ; \quad t,t'$

Тогда $D(x-y)$:

$$D(x-y)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{iE_{\vec{p}}(t'-t)} \tag{3.30}$$

Можно перейти полностью к интегрированию по энергии. Для этого можно заметить, что в интеграле (3.30) присутствует сферическая симметрия по p, потому что $E_{\vec{p}}$ зависит от квадрата p. Тогда перейдем к сферическим координатам и снимем интегрирование по углам:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{iE_{\vec{p}}(t'-t)} = \int d\Omega \int \frac{p^2dp}{(2\pi)^3} e^{iE_{\vec{p}}(t'-t)} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \tag{3.31}$$

Теперь в (3.31) нужно учесть, что интеграл по полному телесному углу равен 4π, а так же следующую серию выражений для замены $p \to E$:

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{p^2+m^2}$$
$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{E}$$
$$pdp = EdE \quad | \cdot p$$
$$p^2dp = EpdE = E\sqrt{E^2-m^2}dE$$

Подставляем последнее(писать индекс $\vec{p}$ у энергии теперь не обязательно):

$$D(x-y) = 4\pi \int_m^{+\infty} \frac{E\sqrt{E^2-m^2}dE}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} e^{iE(t'-t)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_m^{+\infty} dE\sqrt{E^2-m^2} e^{iE(t'-t)} \tag{3.32}$$

Учтём, что если интервал сильно разнесён во времени, т.е. промежуток времени $t'-t$ достаточно большой, то экспонента будет быстро осциллирующей, и такая экспонента при интегрировании достаточно быстро стремится к нулю, поэтому реальный вклад в интеграл (3.32) будет только от членов вблизи массы m. Поэтому аппроксимировать его можно приблизительно:

$$D(x-y) \sim e^{im(t'-t)} \tag{3.33}$$

2) Пространственно подобный интервал: $t' = t \quad ; \quad \vec{x}-\vec{y} \neq 0$

Из повседневной логики кажется, что для него выражение (3.29) будет равняться нулю. Действительно, учитывая что максимальная скорость распространения сигнала - скорость света, то было бы крайне странно, если бы точки, разнесенные друг от друга на большой интервал, размера многократно больше скорости света, влияли бы друг на друга. Стоит попробовать хотя бы приблизительно доказать это.

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{r}} \frac{1}{E_{\vec{p}}}. \tag{3.34}$$

Здесь было учтено, что интервал пространственноподобный и время уходит, в выражении $p(y-x)$ остается только $\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})$ и сделана замена $\vec{y}-\vec{x}=\vec{r}$.

Перейти в сферические координаты так легко не получится теперь, однако это всё еще удобный шаг. Учитывая коэффициент перехода к сферическим координатам $p^2\sin\theta d\theta d\varphi dp$, можно заранее внести $\sin\theta$ в дифференциал и получить косинус с минусом $-d\cos\theta$, а показатель экспоненты $-i\vec{p}\vec{r}$ представить как $-ipr\cos\theta$. Так же стоит $E_{\vec{p}}$ написать по определению. Тогда в выражении (3.34) имеем:

$$D(x-y) = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{1}{2\sqrt{p^2-m^2}} \int_1^{-1} d\cos\theta e^{-ipr\cos\theta} = \tag{3.35}$$

$$= -\frac{2\pi}{ir}\int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{2p\sqrt{p^2-m^2}}\left[e^{ipr}-e^{-ipr}\right]$$

Теперь в первом слагаемом нужно провернуть трюк, который неоднократно проворачивался в курсе: заменить $p \to -p$, тогда вылезет минус и появятся сумма экспонент. Имеем:

$$D(x-y) = \frac{\pi}{ir}\int_0^{\infty} dp \frac{p}{\sqrt{p^2-m^2}} e^{ipr} - \frac{\pi}{ir}\int_0^{-\infty} dp \frac{p}{\sqrt{p^2-m^2}} e^{ipr} = \tag{3.36}$$

$$= \frac{\pi}{ir}\int_0^{\infty} dp \frac{p}{\sqrt{p^2-m^2}} e^{ipr} + \frac{\pi}{ir}\int_{-\infty}^{0} dp \frac{p}{\sqrt{p^2-m^2}} e^{ipr} =$$

$$= \frac{\pi}{ir}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p}{\sqrt{p^2-m^2}} e^{ipr} = -\frac{i\pi}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p}{\sqrt{p^2-m^2}} e^{ipr}$$

Этот интеграл как правило берут с помощью вычетов. Для начала симметризуем его, т.е. уберем двойку и поставим снизу минус бесконечность. Если не углубляться и оценивая на глаз, то без учета точек ветвления интеграл будет браться просто замыканием на верхнюю полуплоскость контура интегрирования.

Тогда после преобразования получится приблизительно следующее выражение(здесь учтёно, что из-за того, что интеграл берется против часовой стрелки):

$$D(x-y) = -2i\pi \frac{i\pi}{\sqrt{2im}} im \frac{e^{-rm}}{r} \tag{3.37}$$

Тут возникает проблема, что получился не ноль. А ранее оговаривалось, что логично было бы ноль. На самом деле это не особо проблема, потому что эта амплитуда не особо физически осмысленна, ибо даже в классической теории поля бывают случаи, когда например групповая скорость быстрее скорости света, но это никак не влияет на физическую интерпретацию результата. Тут же речь о взаимодействии

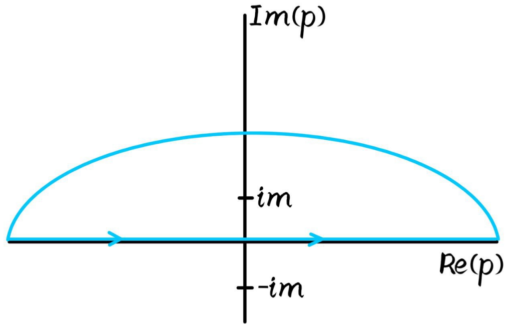

Рис. 3.1. Контур ур-ия (3.37)

полей, так что это не трагедия. Куда интереснее задаться вопросом, может ли измерение в одной точке повлиять на измерение в другой точке, если они разнесены этим "плохим"пространственноподобным интервалом?

В квантовой механике возможность измерения двух величин определяется коммутатором, таким образом куда логичнее вместо (3.28) было бы рассматривать следующее выражение:

$$\langle 0|\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle \tag{3.38}$$

Распишем всё по определению:

$$\langle 0|\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle = \tag{3.39}$$
$$\langle 0|\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}}\left[\hat{a}(\vec{p})e^{-ipx}+\hat{a}^\dagger(\vec{p})e^{ipx},\hat{a}(\vec{q})e^{-iqy}+\hat{a}^\dagger(\vec{q})e^{iqy}\right]|0\rangle$$

Коммутаторы уже были вычислены, выживут только пары рождение-уничтожение и наоборот, которые равны $(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})$. Имеем:

$$\langle 0|\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle = \tag{3.40}$$
$$=\langle 0|\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}}\left[-(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})e^{ipx-iqy}+(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})e^{-ipx+iqy}\right]|0\rangle$$

Ввиду того, что между бра и кет стоит фактически число, то мы можем их "схлопнуть"в единицу. Так же нужно снять интегрирование по дельте. Получается:

$$\langle 0|\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\left[-e^{ip(x-y)}+e^{ip(y-x)}\right] \tag{3.41}$$

, то времениподобный интервал находится внутри этого кон Эта конструкция очень "хорошая". Можно представить себе преобразование лоренца как некую поверхность транзитивности в виде гиперболы:

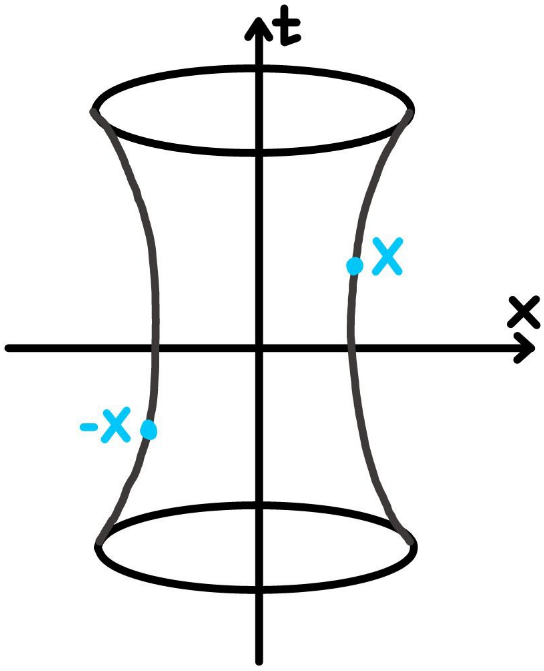

Рис. 3.2. Представление пр-ва Минковского

Времениподобный интервал лежит внутри гиперболы и в нем всегда можно найти такое преобразование, которое переводило точку x в $-x$ или переводить $(x-y) \to (y-x)$. Тогда в силу этого преобразования, экспонента в (3.41) переходит в другую, но знак между ними разный, поэтому разность равна нулю. Отсюда делается вывод:

- Во времениподобном интервале коммутатор равен нолю и измерение можно произвести одновременно.

В свою очередь при пространственноподобном интервале разность будет не ноль, ибо точки находятся вне этого конуса. Получается вывод:

- Во пространственнопободном интервале коммутатор не равен нолю и измерение невозможно провести одновременно.

Тогда, в отличии от предыдущей ситуации, теперь причинность соблюдена и вопрос закрыт.

Перепишем выражение (3.41) в другом виде:

$$\langle 0|\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{ip(y-x)} - \frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{ip(x-y)}\right] \tag{3.42}$$

Пусть мы точно знаем, что $x_0 > y_0$. Вынесем минус у первой экспоненты и саму эту пространственную часть вынесем за скобку. Получается:

$$\langle 0|\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{ip_0(y_0-x_0)} - \frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{-ip_0(y_0-x_0)}\right]e^{i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})} \tag{3.43}$$

Вид скобки очень напоминает какой то интеграл. Действительно, это интеграл следующего плана:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ip_0t}dp_0}{p^2-m^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ip_0t}dp_0}{p_0^2-\vec{p}^2-m^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ip_0t}dp_0}{p_0^2-E_{\vec{p}}^2} \tag{3.44}$$

Этот интеграл берется с помощью вычета по следующему контуру:

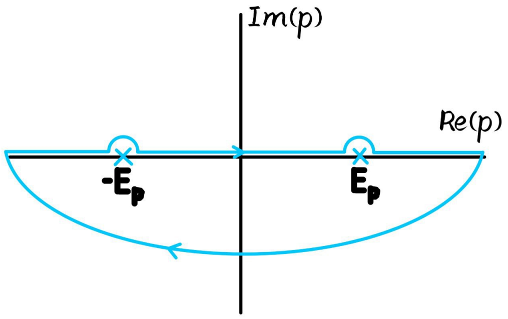

Рис. 3.3. Контур ур-ия (3.44)

Сам интеграл тогда равен:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ip_0t}dp_0}{p_0^2-E_{\vec{p}}^2} = 2\pi i\left(\frac{e^{iE_{\vec{p}}t}}{2E_{\vec{p}}} - \frac{e^{-iE_{\vec{p}}t}}{2E_{\vec{p}}}\right) \tag{3.45}$$

Получилось с точностью до множителя выражение из скобок (3.43). Подставим:

$$\langle 0|\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2}e^{-ip(y-x)} \tag{3.46}$$

Это получилось конкретно для случая $y_0 > x_0$. Выражение (3.46) наз-ся опережающая функция Грина. На следующей лекции они будут подробно изучаться.

Лекция 4: Заряженное скалярное поле

Повторение предыдущей лекции, пропагаторы

Основной результат предыдущей лекции был связан с вычислением следующей величины:

$$\langle 0|\left[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2}e^{-ip(x-y)} \tag{4.1}$$

Тут стоит оговориться: эта структура определена не однозначно, потому что возникают полюса и при вычислении интегралов вычетами есть несколько способов обхода полюсов.

Если учесть обозначение p^2,введенное в интеграле:

$$p_\mu p^\mu = p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 \tag{4.2}$$

Тогда разность в знаменателе будет:

$$p^2 - m^2 = (p_0 - \sqrt{\vec{p}^2+m^2})(p_0 + \sqrt{\vec{p}^2+m^2}) \tag{4.3}$$

Где $\sqrt{\vec{p}^2+m^2} = E_{\vec{p}}$. Таким образом возникают два полюса: $E_{\vec{p}}$ и $-E_{\vec{p}}$

Рассмотрим правила обхода, оговоренные выше:

1) Обход "снизу"в случае $x_0 > y_0$:

   В предыдущей лекции обход до замыкания был выбран как на рисунке (4.1).

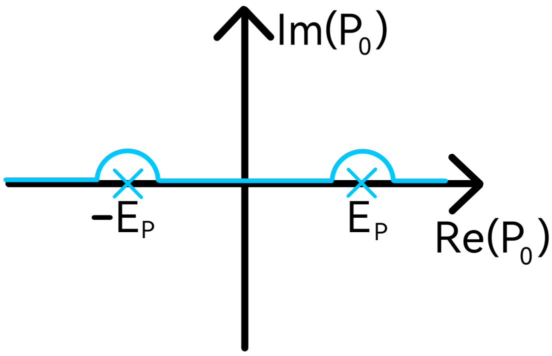

Рис. 4.1. Обход до замыкания

Его можно замкнуть как в верхней полуплоскости, так и в нижней, но естественно его нужно замкнуть там, где экспонента будет убывающей, т.к. в ином случае, в области с ростом экспоненты, теорема о вычетах будет неверна.

Из вида экспоненты в уравнении (4.1) видно, что вещественная часть будет убывать тогда, когда i будет умножаться на число с отрицательной мнимой частью. Таким образом рисунок (4.1) замыкается на нижнюю полуплоскость:

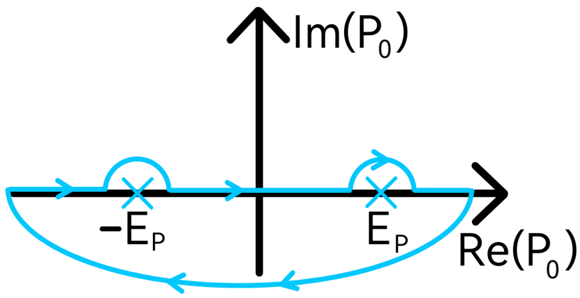

Рис. 4.2. Обход после замыкания $D_R(x-y);x_0 > y_0$

Если замкнуть на верхнюю полуплоскость получится, очевидно, ноль.

Уравнение (4.1) в случае замыкания вида (рис.4.2) называется запаздывающей функцией $D_R(x-y)$ в случае $x_0 > y_0$.

2) Обход "сверху"в случае $x_0 < y_0$

В этом случае обход самих полюсов происходит снизу, а оставшийся обход сверху (см. рис 4.3).

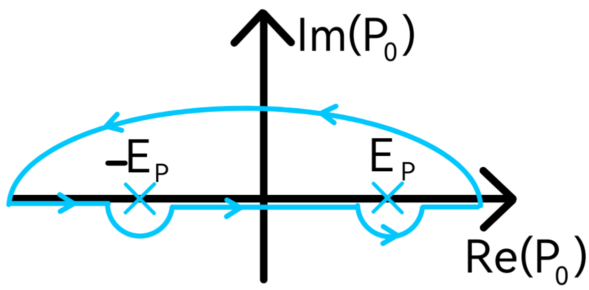

Рис. 4.3. Обход после замыкания $D_A(x-y);x_0 < y_0$

Такой случай называется опережающей функцией, обозначается $D_A(x-y)$.

В действительности эти функции являются функцией Грина уравнения Клейна-Гордона-Фока. Доказать это можно следующим образом: нужно записать импульсное представление D_R с помощью интеграла Фурье

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} D_R(p) \tag{4.4}$$

Теперь нужно применить к этому преобразованию уравнение Клейна-Гордона-Фока:

$$(\partial_x^2 + m^2) D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} ((-ip)^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} D_R(p) \tag{4.5}$$

Действие производной было только на экспоненту (откуда и взялось $(-ip)^2$), т.к. только она зависит от координат. Следует сравнить (4.4) с (4.1). Если внимательно приглядеться, становится очевидно, что $D_R(p) = \frac{i}{p^2-m^2}$. Отсюда, учитывая, что $(-ip)^2 = -p^2$, можно переписать (4.5) следующим образом:

$$(\partial_x^2 + m^2) D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-p^2 + m^2) \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} = \tag{4.6}$$

$$= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}$$

Последнее выражение равно дельта функции. В конечном итоге получается:

$$(\partial_x^2 + m^2) D_R(x-y) = -i\delta^4(x-y) \tag{4.7}$$

А это, по определению функции Грина, означает, что $D_R(x-y)$ является функцией Грина. Еще эту функцию называются пропагатором.

Фейнмановский пропагатор

3) Фейнмановский пропагатор:

   Его особенность в несколько ином обходе точек:

   Данная конструкция обозначается $D_F(x-y)$ и не является ни опережающей, ни запаздывающей функцией. Более того, это единственная из этих трёх функций, которая имеет явное выражение. Правило обхода полюсов можно прямо включить в (4.1) следующим образом:

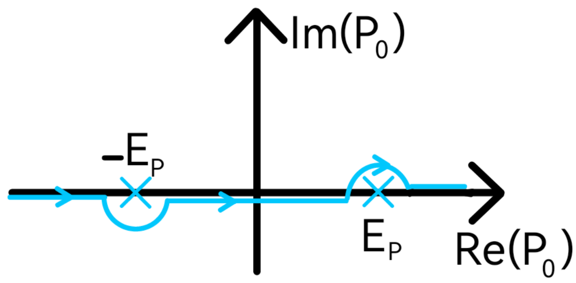

Рис. 4.4. Обход для Фейнмановского пропагатора $D_F(x-y)$

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \tag{4.8}$$

Почему так можно сделать?Эпсилон величина достаточно малая (иногда в литературе ее еще обозначают нулём), поэтому она может немного отклонять линию в какую либо из сторон, что и отражено на рисунке (4.4).

Теперь, что бы изучить эту конструкцию, следует попробовать ее вычислить.

1) $x_0 > y_0$

В таком случае следует замкнуть снизу (по аналогии с первым случаем для D_R). В таком случае полюсом будет выступать E_p:

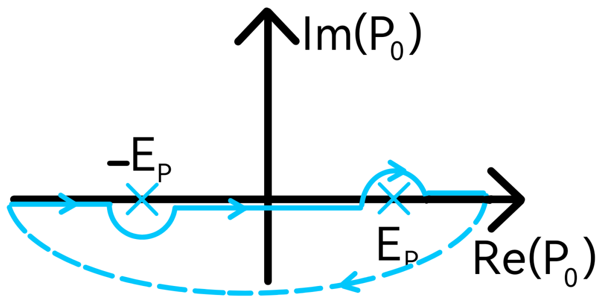

Рис. 4.5. Обход для Фейнмановского пропагатора $D_F(x-y)$ при $x_0 > y_0$

А сам интеграл будет равен (вычисляя вычет):

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} = -2\pi i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} \frac{i}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \tag{4.9}$$

Пояснение:

- $2\pi i$ взялось из формулы вычета;
- d^3p стоит вместо d^4p ввиду вычисления вычета (один интеграл снялся);
- $2E_p$ взялось из формулы (4.3), которая стоит в знаменателе (4.1), отсюда т.к. $-E_p$ полюсом не выступает, а выступает E_p, то вместо p_0 во второй скобке ставится E_p
- Минус перед скобкой взялся, т.к. замыкаем на нижней полуплоскости (см. правила вычисления вычетов).

В итоге (4.9), после сокращений становится следующим:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{i}{2E_p}e^{-ip(x-y)} \tag{4.10}$$

Это выражение уже встречалось в предыдущих лекциях (см. формулу 3.29):

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{i}{2E_p}e^{-ip(x-y)} = \langle 0|\,\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\,|0\rangle = D(x-y) \tag{4.11}$$

2) $x_0 < y_0$

В таком случае полюсом выступает $-E_p$, а замыкание будет на верхней полуплоскости:

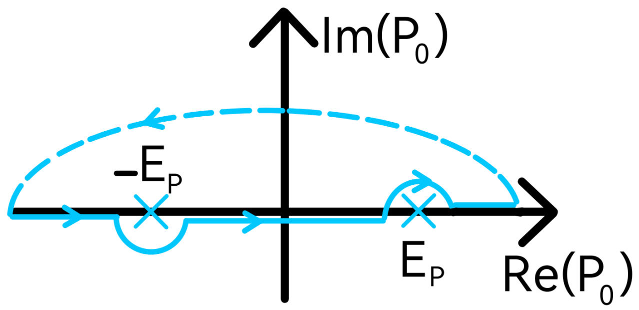

Рис. 4.6. Обход для Фейнмановского пропагатора $D_F(x-y)$ при $x_0 < y_0$

Теперь нужно по аналогии со случаем (1) вычислить интеграл (4.1).

- Вместо p_0 в первой скобке выражения (4.3) ставится $-E_p$, что делает в знаменателе выражение $-2E_p$;

- Вначале появится $2\pi i$, снимется одно интегрирование и перед скобкой будет стоять $+$, т.к. замыкаем на верхней полуплоскости;
- В экспоненте вместо p_0 будет стоять $-E_p$, поэтому учитывая знак экспоненты, минус в экспоненте пропадет.

Тогда (4.1) переходит в:

$$D_F(x-y) = -2\pi i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4}\frac{i}{-2E_p}e^{iE_p(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \tag{4.12}$$

Ввиду сферической симметрии, можно заменить $\vec{p}$ на $-\vec{p}$ (стандартный трюк). Отсюда перед скобкой с векторами появится знак минус и , следовательно, если вынести у всех конструкции знак минус, получится точно такое же выражение, как (4.11), с одной лишь разницей: x и y поменяются местами:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{i}{2E_p}e^{-ip(y-x)} = \langle 0|\,\hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(x)\,|0\rangle = D(y-x) \tag{4.13}$$

Интерпретация: как видно из (4.11) и (4.13)

$$D_F(x-y) \;=\; \begin{cases}\langle 0|\,\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\,|0\rangle & x_0 > y_0\\ \langle 0|\,\hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(x)\,|0\rangle & y_0 > x_0\end{cases} \tag{4.14}$$

Т.е. в зависимости от того, какой момент времени идет позже, такой оператор и будет идти впереди выражения (4.14). Для этого существует специальное обозначение, называемое Т-упорядочиванием. Оно выражается отдельным оператором, который выстраивает операторы в порядке, что более поздний идет первым и так далее по отрезкам времени. Используя его, можно записать (4.14) в следующем виде:

$$D_F(x-y) = \langle 0|\,\hat{T}\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\,|0\rangle \tag{4.15}$$

Где $\hat{T}$ - оператор Т-упорядочивания. Это очень важная характеристика, ибо когда в будущем будут строиться S-матрицы и амплитуды вероятности, понятие временного упорядочивания будет играть существенную роль. Всё будет сводиться к счёту упорядоченных во времени структур.

Заряженное скалярное поле

Теперь рассмотрим новую теорию скалярного заряженного поля. Для этого нужно ввести новую функцию Лагранжа следующего вида:

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^* - U(\varphi \varphi^*) \tag{4.16}$$

Пока рассмотрим свободную теорию (т.е. без потенциала):

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^* \tag{4.17}$$

Особенность этого поля - некоторая симметрия, более интересного плана, чем симметрия в скалярном поле (в скалярном поле была симметрия $\varphi \longrightarrow -\varphi$, так называемся симметрия Z_2).

В теории (4.17) симметрия следующая: $\varphi \to \varphi e^{i\alpha}$, где $\alpha = const$. Аналогично

$$\varphi^* \to \varphi^* e^{-i\alpha}$$

. Если подставить в (4.17), можно заметить, что $\mathscr{L}$ не поменяется, т.к. экспоненты сократятся. Этот случай называют глобальной калибровочной симметрией. Случай локальной калибровочной симметрии ($\alpha = \alpha(x)$) здесь не применим.

Однако если рассмотреть заряженную скалярную теорию с электромагнитным полем, то локальная калибровочная симметрия появится.

Теперь запишем уравнения Лагранжа:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial_\mu \varphi} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi} = 0 \tag{4.18}$$

$$\partial^2 \varphi + m^2 \varphi = 0 \tag{4.19}$$

$$\partial^2 \varphi^* + m^2 \varphi^* = 0 \tag{4.20}$$

Точно такие же уравнения привели к идее пользоваться представлением континуума гармонических осцилляторов, поэтому здесь можно применить тот же аппарат, что и до этого, но с осторожность, ведь нужно учесть, что φ и φ^* связаны комплексным сопряжением(или эрмитовым, если речь об их операторах).

Разложим $\hat{\varphi}$ через операторы рождения и уничтожения, как делали раньше:

$$\hat{\varphi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left[\hat{a}_+(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}_-^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{4.21}$$

$$\hat{\varphi}^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left[\hat{a}_-(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}_+^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{4.22}$$

В данном случае введено две пары операторов рождения уничтожения (т.к. и функций самих по себе две): $\hat{a}_-$ и $\hat{a}_+$ - операторы уничтожения; $\hat{a}_-^\dagger$ и $\hat{a}_+^\dagger$ - операторы рождения.

Выражения (4.21) и (4.22) явно связаны друг с другом сопряжением. Можно определить и по другому, но так более принято в литературе.

Рассмотрим теперь операторы $\hat{\pi}$ и $\hat{\pi}^\dagger$. Тот факт, что $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} = \partial_0\varphi^*$, позволяет сделать вывод, что ориентироваться при построении $\hat{\pi}$ надо на $\hat{\varphi}^\dagger$, а для $\hat{\pi}^\dagger$ на $\hat{\varphi}$. Отсюда:

$$\hat{\pi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{E_p}{2}}\left[\hat{a}_0(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}_+^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{4.23}$$

$$\hat{\pi}^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{E_p}{2}}\left[\hat{a}_+(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}_-^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\vec{x}}\right] \tag{4.24}$$

Коммутационные соотношения заряженной скалярной теории

Как эти операторы будут вести себя между собой? Для этого следует ввести коммутационные соотношения:

$$[\hat{\varphi}(\vec{x},t),\hat{\pi}(\vec{y},t)] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{4.25}$$

Аналогично для выражений с крестом. Естественно не сопряженные элементы коммутируют:

$$\left[\hat{\varphi}(\vec{x},t),\hat{\pi}^\dagger(\vec{y},t)\right] = 0 \tag{4.26}$$

Отсюда можно вывести коммутационные соотношения для $\hat{a}^\dagger$ и $\hat{a}$. Для этого нужно явно высчитать выражение (4.25):

$$[\hat{\varphi}(\vec{x},t),\hat{\pi}(\vec{y},t)] = \tag{4.27}$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}(-i)\sqrt{\frac{E_q}{2}}e^{i(\vec{p}\vec{x}+\vec{q}\vec{y})}\left[\hat{a}_+(\vec{p},t)+\hat{a}_-^\dagger(-\vec{p},t),\hat{a}_-(\vec{q},t)-\hat{a}_+^\dagger(-\vec{q},t)\right]$$

В выражениях (4.21) и (4.23) были вынесены экспоненты по старому алгоритму замены $p \to -p$, поэтому перед коммутатором стоит экспонента. Чтобы в выражении (4.27) получилась дельта функция от $\vec{x}-\vec{y}$, нужно что бы в экспоненте было вычитание $\vec{x}-\vec{y}$, поэтому нужно что бы $\vec{q} \to -\vec{p}$. Поэтому разумно, что бы коммутационные соотношения были между теми $\hat{a}^\dagger$ и $\hat{a}$, у которых разные знаки. Действительно, если сделать так, чтобы $\hat{a}_+^\dagger$ и $\hat{a}_-^\dagger$, $\hat{a}_+$ и $\hat{a}_-$ коммутировали, то останутся только члены, с одинаковым нижним индексом, но разные по сопряжению. Первый из них $-[\hat{a}_+(\vec{p},t),\hat{a}_+^\dagger(-\vec{q},t)]$ стоит в правильном порядке (не сопряженный, сопряженный), поэтому если ввести коммутационное соотношение:

$$\left[\hat{a}_+(\vec{p},t),\hat{a}_+^\dagger(\vec{q},t)\right] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{4.28}$$

И по аналогии для второго оставшегося члена $[\hat{a}_-^\dagger(-\vec{p},t),\hat{a}_0(\vec{q},t)]$ ввести коммутационное соотношение:

$$\left[\hat{a}_-(\vec{p},t),\hat{a}_-^\dagger(\vec{q},t)\right] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{4.29}$$

то после замены порядка в коммутации в $[\hat{a}_-^\dagger(-\vec{p},t),\hat{a}_0(\vec{q},t)]$, весь коммутатор будет равен $2(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{q})$. Подставив в (4.27), можно сделать вывод, что минус сократится, двойка в знаменателе сократится, $\vec{q}$ перейдет в $-\vec{p}$, и итоговое выражение будет:

$$[\hat{\varphi}(\vec{x},t),\hat{\pi}(\vec{y},t)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} ie^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \tag{4.30}$$

Которое, очевидно, будет равно дельта функции из (4.25). Таким образом введенные коммутационные соотношения (4.28) и (4.29) дают правильный ответ.

Гамильтониан заряженного скалярного поля

Из уравнения для тензора энергии импульса:

$$T^{00} = \partial_0\varphi\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} + \partial_0\varphi^*\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi^*)} - \mathscr{L} \tag{4.31}$$

Получаем для энергии:

$$E = \partial_0\varphi\partial_0\varphi^* + \nabla\varphi\nabla\varphi^* + m^2\varphi\varphi^* \tag{4.32}$$

Отсюда для Гамильтониана получаем (почему идет интегрирование см. 2-ую лекцию):

$$\mathscr{H} = \int d^3x(\pi^*\pi + \nabla\varphi\nabla\varphi^* + m^2\varphi\varphi^*) \tag{4.33}$$

Домашнее задание: посчитать (4.33), подставив все величины, определенные ранее (в операторном смысле).

Результат будет следующий:

$$\mathscr{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_p[\hat{a}_+^\dagger\hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger\hat{a}_-] \tag{4.34}$$

Это выражение намекают на то, что эти операторы рождения и уничтожения являются операторами двух разных состояний, другими словами двух частиц, которые имеют одинаковую массу. Например:

$$\hat{a}_+^\dagger(\vec{p},t)\,|0\rangle = |\vec{p},+\rangle \tag{4.35}$$

$$\hat{a}_-^\dagger(\vec{p},t)\,|0\rangle = |\vec{p},-\rangle \tag{4.36}$$

Но следует вопрос: а эти состояния чем нибудь отличимы? Энергию они дают похожим образом. Но какая характеристика у них отличается? Для того, что бы понять их отличие, нужно ввести новую характеристику - заряд. Для этого нужно вспомнить, что в силу симметрии, описанной выше, имеется некоторый Нёторовский ток, который сохраняется:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{4.37}$$

Где $j^\mu = \frac{i}{2}[\varphi^*\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^*\varphi]$

Действительно, если продифференцировать это выражение, то получится:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i}{2}[\partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + \varphi^*\partial^2\varphi - \partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - \partial^2\varphi^*\varphi] \tag{4.38}$$

Учитывая уравнение Клейна-Гордона-Фока, имеем:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i}{2}[-m^2\varphi^*\varphi^+ m^2\varphi^*\varphi] = 0 \tag{4.39}$$

Что и требовалось доказать. Отсюда вводится понятие заряда:

$$Q = \int d^3x j^0 \tag{4.40}$$

Начнем считать эту величину на квантовой уровне (учитывая, что $\partial_0\hat{\varphi} = \hat{\pi}^\dagger$)

$$Q = \int d^3x j^0 = \frac{i}{2}\int d^3x[\hat{\varphi}^\dagger\hat{\pi}^\dagger - \hat{\pi}\hat{\varphi}] = \tag{4.41}$$

$$= \frac{i}{2}\int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{E_q}{4E_p}}\Big\{\Big[\hat{a}_-(\vec{p},t)+\hat{a}_+^\dagger(-\vec{p},t)\Big]\Big[\hat{a}_+(\vec{q},t)-\hat{a}_-^\dagger(-\vec{q},t)\Big] -$$
$$-\Big[\hat{a}_-(\vec{q},t)-\hat{a}_+^\dagger(-\vec{q},t)\Big]\Big[\hat{a}_+(\vec{p},t)+\hat{a}_-^\dagger(-\vec{p},t)\Big]\Big\}e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}}$$

Здесь, в очередной раз, была заменено $p \to -p$, вынесена экспонента. В очередной раз сворачиваем первое интегрирование по иксу с экспонентой в дельта-функцию, снимаем интегрирование по q, меняем все q соответственно на $-p$. Знаки сокращаем, i убираем. Получается:

$$Q = \int d^3x j^0 = \frac{1}{4}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big\{\Big[\hat{a}_-(\vec{p},t)+\hat{a}_+^\dagger(-\vec{p},t)\Big]\Big[\hat{a}_+(-\vec{p},t)-\hat{a}_-^\dagger(\vec{p},t)\Big] - \tag{4.42}$$
$$-\Big[\hat{a}_-(-\vec{p},t)-\hat{a}_+^\dagger(\vec{p},t)\Big]\Big[\hat{a}_+(\vec{p},t)+\hat{a}_-^\dagger(-\vec{p},t)\Big]\Big\}$$

После раскрытия всех скобок и сокращения одинаковых слагаемых, получится:

$$Q = \int d^3x j^0 = \frac{1}{4}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[\hat{a}_+^\dagger(\vec{p},t)\hat{a}_+(\vec{p},t) - \hat{a}_-^\dagger(\vec{p},t)\hat{a}_-(\vec{p},t)\Big] \tag{4.43}$$

Данное выражение очень напоминает Гамильтониан (4.34), но только в случае Гамильтониана, ввиду наличия знака плюс между слагаемыми, разницы между действиями на состояния (4.35) и (4.36) не было, а в случае (4.43) частицы в состоянии4.35будут увеличивать заряд на единичку, а в состоянии (4.36) будут его уменьшать.

Т.е. одним частицам можно приписать заряд плюс, а другим минус. Такой случай показывает существования пар частица-античастица, аналогичных во всех характеристиках, кроме заряда.

Под конец можно записать в данной теории пропагатор. Достаточно несложно вывести, что обычный пропагатор будет равен нулю:

$$\langle 0|\left[\varphi(x)\varphi(y)\right]|0\rangle = 0 \tag{4.44}$$

Единственный не равный нулю пропагатор будет $\langle 0|\left[\varphi(x)\varphi^*(y)\right]|0\rangle$. Т.е. в заряженных теориях пропагаторы надо составлять из сопряженных полей.

$$\langle 0|\left[\varphi(x)\varphi^*(y)\right]|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-i(x-y)p}}{p^2-m^2} \tag{4.45}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ