М.В. Либанов

КТП II. Гармонический осциллятор и скалярное поле

Содержание

Одномерная теория поля ⇔ гармонический осциллятор

- Рассмотрим поле $\varphi(t)$ в $1+0$ пространстве

$$\mathscr{L} = a\dot{\varphi}^2 + b\dot{\varphi} + c\varphi\dot{\varphi} + d\varphi^2 + e\varphi + f, \tag{1}$$

где $a, \ldots, f$ -- константы. Последние три слагаемые в (1) при $d \neq 0$ можно сгруппировать

$$d\left(\varphi + \frac{e}{2d}\right)^2 + f - \frac{e^2}{4d}. \tag{2}$$

Переопределяя поле

$$\varphi + \frac{e}{2d} \to \varphi, \tag{3}$$

приходим к наиболее общему виду лагранжиана такой теории

$$\mathscr{L} = a\dot{\varphi}^2 + d\varphi^2. \tag{4}$$

- Тензор энергии-импульса

$$E = T^{00} = E = a\dot{\varphi}^2 - d\varphi^2. \tag{5}$$

$$E > -\infty \Rightarrow a > 0, d \leq 0 \tag{6}$$

- При $d \neq 0$ решение уравнений движения (см. ниже) имеет вид

$$\varphi = c^{+}\exp\left(\sqrt{\frac{d}{a}}t\right) + c^{-}\exp\left(-\sqrt{\frac{d}{a}}t\right), \tag{7}$$

где $c^{\pm}$ произвольные амплитуды (константы интегрирования) $\Rightarrow$

$$E = -4d \cdot c^{+}c^{-}. \tag{8}$$

  - $d > 0 \Rightarrow c^{\pm}$ -- произвольные $\Rightarrow E < -\infty$
  - $d < 0 \Rightarrow c^{+} = (c^{-})^{*} \Rightarrow c^{+}c^{-} > 0$ -- Ok!

- Общая константа перед $\mathscr{L}$ не влияет на УД $\Rightarrow$ Каноническая нормировка

$$a = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{\omega^2}{2}. \tag{9}$$

Тогда лагранжиан примет вид

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\omega^2}{2}\varphi^2. \tag{10}$$

- Уравнение движения

$$\delta S = S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} dt(\dot{\varphi} \cdot \partial_t(\delta\varphi) - \omega^2\varphi\delta\varphi + \mathscr{O}((\delta\varphi)^2)). \tag{11}$$

$$\delta S = \dot{\varphi}\delta\varphi\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt(\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi)\delta\varphi + \mathscr{O}(\delta\varphi)^2. \tag{12}$$

Граничный (поверхностный) член исчезает в силу $\delta\varphi(t_1) = \delta\varphi(t_2) \equiv 0$ (начальные/граничные условия фиксированы) $\Rightarrow$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \tag{13}$$

- Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a^+ \mathrm{e}^{i\omega t} + a^- \mathrm{e}^{-i\omega t}\right). \tag{14}$$

Условие действительности поля φ приводит к требованию

$$(a^+)^* = a^-. \tag{15}$$

Гамильтонов формализм

- $q(t) \equiv \varphi(t)$ -- обобщенная координата
- Канонически сопряженный импульс

$$p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q}, \tag{16}$$

- Гамильтониан

$$H = p\dot{q} - \mathscr{L} = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}, \tag{17}$$

- Уравнения Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q \tag{18}$$

- M степеней свободы $H = \sum_{a=1}^{M} p_a \dot{q}_a - \mathscr{L}$

$$\dot{q}_a = \{H, q_a\}, \quad \dot{p}_a = \{H, p_a\}, \quad a, b \ldots = 1, \ldots, M, \tag{19}$$

и в общем случае для произвольной функции от координаты и импульса

$$\frac{dA(p,q)}{dt} = \{H, A\}, \tag{20}$$

где фигурными скобками обозначены скобки Пуассона, определенные как

$$\{A, B\} = \sum_{a=1}^{M} \frac{\partial A}{\partial p_a}\frac{\partial B}{\partial q_a} - \frac{\partial A}{\partial q_a}\frac{\partial B}{\partial p_a}. \tag{21}$$

- В частности, скобки Пуассона координат и импульсов имеют вид

$$\{p_a, q_b\} = \delta_{ab}, \quad \{p_a, p_b\} = \{q_a, q_b\} = 0. \tag{22}$$

- Снова осциллятор

$$p = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a^{+}e^{i\omega t} - a^{-}e^{-i\omega t}\right) \tag{23}$$

гамильтониан

$$H = \frac{\omega}{2}\left(a^{+}a^{-} + a^{-}a^{+}\right), \tag{24}$$

$$a^{\pm} = \frac{e^{\mp i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}(\omega q \mp ip) \tag{25}$$

скобки Пуассона между амплитудами

$$\{a^{-}, a^{+}\} = i, \quad \{a^{-}, a^{-}\} = \{a^{+}, a^{+}\} = 0. \tag{26}$$

- M степеней свободы

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_a K_{ab} \dot{\varphi}_b - \frac{1}{2}\varphi_a \Omega_{ab} \varphi_b, \tag{27}$$

- $E > -\infty \Rightarrow K_{ab} > 0$ и $\Omega_{ab} \geq 0 \Rightarrow$ диагонализация

$$K_{ab} = \delta_{ab} \quad \Omega_{ab} = \mathrm{diag}(\omega_a) \Rightarrow \tag{28}$$

-

$$\mathscr{L} = \sum_{a=1}^{M} \mathscr{L}_a = \sum_{a=1}^{M} \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}_a^2 - \frac{\omega_a^2}{2}\varphi_a^2 \right). \tag{29}$$

-

$$\{a_a^-, a_b^+\} = i\delta_{ab}. \tag{30}$$

Каноническое квантование

- $p \mapsto \hat{p}$, $q \mapsto \hat{q}$
- действуют на независящий от t вектор $|\psi\rangle$
- $A(p,q) \mapsto \hat{A}(\hat{p},\hat{q})$ -- оператор
- Замена скобок Пуассона коммутатором

$$\{A,B\} \mapsto \frac{i}{\hbar}[\hat{A},\hat{B}] = \frac{i}{\hbar}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \ , \qquad (31)$$

NB: Согласованно с

- линейностью $\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A,C\} + \beta\{B,C\}$
- антисимметричностью $\{A,B\} = -\{B,A\}$
- Тождеством Якоби

$$\{A,\{B,C\}\} + \{C,\{A,B\}\} + \{B,\{C,A\}\} \equiv 0 \qquad (32)$$

- эрмитовым сопряжением:

$$(\{A,B\})^* = \{A^*,B^*\} \mapsto (i[\hat{A},\hat{B}])^\dagger = -i([\hat{A},\hat{B}])^\dagger = -i[\hat{B}^\dagger,\hat{A}^\dagger] = i[\hat{A}^\dagger,\hat{B}^\dagger] \qquad (33)$$

- Коммутатор канонических переменных

$$[\hat{p},\hat{q}] = -i \ , \ \ [\hat{p},\hat{p}] = [\hat{q},\hat{q}] = 0 \ , \tag{34}$$

- Уравнение Гамильтона становится уравнением Гейзенберга

$$i\frac{d\hat{A}(\hat{p},\hat{q})}{dt} = [\hat{A},\hat{H}] \ . \tag{35}$$

- Наблюдаемая

$$A(t) = \langle\psi|\hat{A}(t)|\psi\rangle \ . \tag{36}$$

- Формальное решение (35)

$$\hat{A}(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{-i\hat{H}t} \tag{37}$$

- Тогда

$$A(t) = \langle\psi|\mathrm{e}^{i\hat{H}t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle \equiv \langle\psi(t)|\hat{A}(0)|\psi(t)\rangle \ , \tag{38}$$

где по определению

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle \ \Rightarrow \tag{39}$$

- Шредингеровская картина

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi(t)\rangle\ . \tag{40}$$

- Введем λ - полный набор наблюдаемых $\Rightarrow$

$$\psi_\lambda(t) = \langle\lambda|\psi(t)\rangle\text{--волновая функция в представлении } \lambda \Rightarrow \tag{41}$$

- Уравнение Шредингера в представлении λ

$$i\frac{\partial\psi_\lambda(t)}{\partial t} = \hat{H}_\lambda\psi_\lambda(t)\ , \tag{42}$$

Представление чисел заполнения $\Leftrightarrow$ фоковсое представление в КТП

- Квантовый осциллятор

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+] = 1, \tag{43}$$

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^+ \hat{a}^- + \frac{\omega}{2} \tag{44}$$

- Собственные состояния гамильтониана $\Leftrightarrow$ состояния с определенной энергией

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle. \tag{45}$$

- Заметим

$$\hat{H}\hat{a}^-|E\rangle = (E-\omega)\hat{a}^-|E\rangle \Rightarrow \hat{a}^-|E\rangle = \#|E-\omega\rangle \tag{46}$$

$$\hat{a}^+|E\rangle = \#|E+\omega\rangle \Rightarrow \tag{47}$$

- Значит

$$\exists |0\rangle : \tag{48}$$

$$\hat{a}^{-}|0\rangle = 0, \tag{49}$$

$$\langle 0|\hat{a}^{+} = 0, \tag{50}$$

$$\langle 0|0\rangle = 1, \tag{51}$$

- Вектора

$$|n\rangle = \left|\frac{\omega(2n+1)}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle \tag{52}$$

являются ортонормированными,

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \tag{53}$$

собственными векторами оператора Гамильтона с собственными значениями $\omega(n+1/2)$

$$\hat{H}|n\rangle = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle. \tag{54}$$

- Эти состояния также являются собственными векторами оператора *чисел заполнения* $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}^-$, (очевидно) коммутирующего с гамильтонианом,

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \tag{55}$$

$\hat{N}$ -- аналог оператора числа частиц в КТП

- M степеней свободы: после диагонализации

$$\hat{N} = \sum_{a=1}^{M} \hat{N}_a = \sum_{a=1}^{M} \hat{a}_a^+ \hat{a}_a^-, \tag{56}$$

$$\hat{H} = \sum_{a=1}^{M} \hat{H}_a = \sum_{a=1}^{M} \omega_a \left(\hat{a}_a^+ \hat{a}_a^- + \frac{1}{2}\right) = \sum_{a=1}^{M} \omega_a \left(\hat{N}_a + \frac{1}{2}\right), \tag{57}$$

где повышающие и понижающие операторы имеют следующие коммутационные соотношения

$$[\hat{a}_a^-, \hat{a}_b^+] = \delta_{ab}, \quad [\hat{a}_a^+, \hat{a}_b^+] = [\hat{a}_a^-, \hat{a}_b^-] = 0. \tag{58}$$

- Нормированный вектор, описывающий состояние, в котором a-ая степень свободы (мода) имеет число заполнения n_a, с полной энергией

$$E = \sum_{a=1}^{M} \omega_a \left(n_a + \frac{1}{2} \right), \tag{59}$$

имеет вид

$$|n_1, n_2, \ldots, n_M\rangle = \prod_{a=1}^{M} \otimes |n_a\rangle = \prod_{a=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{n_a!}} (\hat{a}_a^+)^{n_a} |0\rangle. \tag{60}$$

Обсуждение

NB: Для некоторых систем (фермионы) последовательно заменять скобки Пуассона на антикоммутаторы

$$\{A, B\} \mapsto \frac{i}{\hbar}\{\hat{A}, \hat{B}\} = \frac{i}{\hbar}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) \ . \tag{61}$$

NB: Еще более последовательно для таких систем считать, что “классические” (не операторы!) обобщенные координаты и импульсы антикоммутируют, например, $p_a q_b = -q_b p_a, q_a q_b = -q_b q_a$. Такие величины называются *грассмановами*.

NB: В теории поля вектора состояний характеризуются непрерывными параметрами -- импульсами. В случае нескольких частиц не принято писать нормировочный фактор $1/\sqrt{N!}$ в векторе состояния, если импульсы двух и более тождественных частиц (бозонов) совпадают (так как такие состояния представляют собой множество меры нуль и их практически невозможно изготовить):

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots\rangle = \prod_i \hat{a}^+_{\mathbf{k_i}}|0\rangle. \tag{62}$$

Однако этот фактор необходимо учитывать при вычислении интегральных величин.

Скалярное поле

- Наиболее общий лагранжиан свободного действительного скалярного

$$x \to x' = Lx, \quad \varphi'(x') = \varphi(x) \tag{63}$$

поля

$$\mathscr{L} = a(\partial\varphi)^2 + b\varphi^2 + c\varphi + d\ , \tag{64}$$

$a, b, \ldots$ -- константы.

- При $b \neq 0$ замена

$$\varphi + \frac{c}{2b} \mapsto \varphi\ \Rightarrow \tag{65}$$

- Плотность энергии

$$\mathscr{L} = a(\partial\varphi)^2 + b\varphi^2\ \Rightarrow \tag{66}$$

$$T^{00} = a\left((\partial_0\varphi)^2 + (\partial_i\varphi)^2\right) - b\varphi^2\ . \tag{67}$$

- Пусть $\varphi(x) \approx \mathrm{const}$ -- большое (в каком смысле?)

$$E = \int d^3x T^{00} \simeq \int d^3x(-b\varphi^2) > -\infty \Rightarrow b \leq 0 \tag{68}$$

- Пусть $|\partial_\mu \varphi|$ -- большие, $|\varphi|$ -- мало

$$E \simeq \int d^3xa \left((\partial_0\varphi)^2 + (\partial_i\varphi)^2\right) > -\infty \Rightarrow a > 0 \tag{69}$$

$a = 0$ -- не представляет интереса

Общий множитель перед лагранжианом не влияет на уравнения движения $\Rightarrow$ удобная каноническая нормировка

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 . \tag{70}$$

NB: $m^2 \geq 0$ только для свободного поля

- Уравнение движения $=$ уравнение Клейна-Гордона

$$\partial^2\varphi + m^2\varphi = 0 . \tag{71}$$

- Преобразование Фурье $\Leftrightarrow$ разложение по базису e^{ikx} -- плоские волны

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{\varphi}(k) \ . \tag{72}$$

$$\varphi = \varphi^* \Rightarrow \tilde{\varphi}^*(k) = \tilde{\varphi}(-k) \ . \tag{73}$$

NB: Можно раскладывать по другим базисам (сферические волны).

- Уравнение Клейна-Гордона

$$\partial^2\varphi + m^2\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ik_\mu x^\mu} (-k^2 + m^2)\tilde{\varphi}(k) = 0 \overset{e^{ikx}\text{-- базис}}{\Rightarrow} \tag{74}$$

$$(k^2 - m^2)\tilde{\varphi}(k) = 0 \Rightarrow \tag{75}$$

$$\left[\begin{array}{l} k^2 \neq m^2 \Rightarrow \tilde{\varphi} = 0 \\ k^2 = m^2 \Rightarrow \tilde{\varphi}\text{-- произвольное} \end{array}\right. \Rightarrow \tilde{\varphi} = \delta(k^2 - m^2)\varphi(k) \Rightarrow \tag{76}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{ikx} \varphi(k) \ . \qquad (77)$$

- Интегрируем по $k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2$ (-- гиперболоид!) с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{|f'(x)|}{|f'(x)|} \delta(f(x)) = \int \frac{df}{|f'(x)|} \delta(f(x)) = \sum_{\text{по нулям } f(x)} \frac{1}{|f'(x)|} \qquad (78)$$

- Нули $k^0_\pm = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Производная $2k^0 \equiv 2k^0_+$. Связь между k^0_+ и $\vec{k}$ называется законом дисперсии $\Leftrightarrow$ формула Эйнштейна $E = mc^2$
- Итак

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x) \qquad (79)$$

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k^0}} e^{\pm ikx} \varphi^\pm(\mathbf{k}) \Big|_{k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \qquad (80)$$

где

$$\varphi^{\pm}(\mathbf{k}) \equiv \varphi^{\pm}_{\mathbf{k}} \equiv 1\cdot a^{\pm}(\mathbf{k}) \equiv 1\cdot a^{\pm}_{\mathbf{k}} = \frac{\varphi(\pm k)}{\sqrt{2k^0}}\Big|_{k^0=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}$$ -- трехмерные амплитуды (81)

- Выкладка для φ^-

$$(2\pi)^{3/2}\varphi^-(x) = \int \frac{d^3k}{2k^0} \mathrm{e}^{-i(k^0x^0+\vec{k}\vec{x})}\varphi(-k^0,\vec{k})\Big|_{k^0=k^0_+} \overset{\vec{k}\to-\vec{k}}{=} \tag{82}$$

$$\int \frac{d^3k}{2k^0} \mathrm{e}^{-i(k^0x^0-\vec{k}\vec{x})}\varphi(-k^0,-\vec{k})\Big|_{k^0=k^0_+} = \int \frac{d^3k}{2k^0} \mathrm{e}^{-ikx}\varphi(-k)\Big|_{k^0=k^0_+} = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} \mathrm{e}^{-ikx}\varphi^-(\mathbf{k})\Big|_{k^0=k} \tag{83}$$

- Подставляем (80) в тензор ЭИ и находим

$$P^{\mu} = \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\cdot k^{\mu}(\varphi^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^-(\mathbf{k})\varphi^+(\mathbf{k}))\ , \tag{84}$$

или в явно ковариантном виде

$$P^{\mu} = \frac{1}{2}\int dk\cdot k^{\mu}\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)(\varphi^+(k)\varphi^-(k) + \varphi^-(k)\varphi^+(k))\ . \tag{85}$$

NB: $\varphi^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k})$ можно интепретировать как плотность числа частиц с импульсом $k^\mu = (\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \vec{k})$.

NB: Важно!!!: Получить (84), (85)

NB: Почему $\theta(k^0)$ является релятивистским инвариантом и почему удобно интегрировать по k^0 при получении (80)?

NB: Сравните представленный анализ со случаем гармонического осциллятора.

Поле как механическая система с бесконечным числом степеней свободы.

- $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 \,.$$
- “Посадим” систему в “ящик” и на пространственную (но не временную!) решетку: N ячеек, нумеруемых $a = 1, \ldots, N$.
- В пределах одной ячейки считаем поле не зависящим от $\vec{x}_a$:

$$\varphi(t, \vec{x}_a) \equiv q_a(t) \text{-- обобщенные координаты!} \qquad (86)$$

- Градиентный член в лагранжиане $-(\partial_i \varphi)^2$ на решетке:

  1. Не содержит производных по времени
  2. Зависит от q_a, q_b -- квадратичная форма
  3. Имеет тот же знак, что и $-m^2$

- Поэтому градиентный член следует отнести к m^2 (свойство 1)
- Получим недиаганальную (свойство 2) знакоопределенную (свойство 3) квадратичную форму

$$-\frac{1}{2} q_a \Omega_{ab} q_b \tag{87}$$

- В результате приходим к лагранжиану (ср. с (27)), который следует диагонализовать. В терминах новых обобщенных координат (сохраняем для них те же обозначения)

$$L(t) = \int d^3x \mathscr{L}(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^{N} \mathscr{L}(q_a(t), \dot{q}_a(t)) \triangle V_a \, . \tag{88}$$

- $\Uparrow$ -- система с бесконечным ($N \to \infty$) числом степеней свободы

- Введем канонически сопряженный импульс

$$p_a(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_a} \triangle V_a \ , \qquad (89)$$

- И плотность импульса

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)} \ , \quad p_a = \pi_a \triangle V_a \ . \qquad (90)$$

- Функцией Гамильтона нашей системы является

$$H = \sum_a T^{00}(\mathbf{x}_a, t) \triangle V_a = \sum_a p_a(t) \dot{q}_a(t) - L(t) \stackrel{N \to \infty}{=} \int d^3x (\pi \dot{\varphi} - \mathscr{L}) \ . \qquad (91)$$

Каноническое квантование скалярного поля.

- Квантование $q_a(t), p_a(t) \to \hat{q}_a(t), \hat{p}_a(t)$
- Скобки Пуассона становятся коммутатором $\{,\} \to i[,] \Rightarrow$

$$[\hat{p}_a(t), \hat{q}_b(t)] = -i\delta_{ab} \tag{92}$$

или

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}_a, t), \hat{q}(\mathbf{x}_b, t)] = -i\frac{\delta_{ab}}{\triangle V_b} \overset{N\to\infty}{=} -i\delta^3(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)\ . \tag{93}$$

- В пределе непрерывного пространства получаем следующие *одновременные* коммутационные соотношения:

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = [\hat{\dot{\varphi}}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\ , \tag{94}$$

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] = 0\ , \quad [\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = 0\ . \tag{95}$$

- Квантовые уравнения движения (уравнение Гейзенберга)

$$i\frac{d\hat{A}(\hat{p},\hat{q})}{dt} = [\hat{A},\hat{H}] \ . \qquad (96)$$

- Можно построить представление Фока $\Leftrightarrow$ представление чисел заполнения (сейчас делать не будем).

Заключение

- С помощью процедуры канонического квантования можно проквантовать любую систему. Однако эта процедура имеет один основной недостаток. В ней отсутствует *явная* релятивистская инвариантность, которую, конечно, можно восстановить.
- Поле (не только скалярное) представляет собой бесконечный набор осцилляторов. Его можно проквантовать теми же методами, что используются в квантовой механике.
- В частности, не используя решения уравнений движения, можно установить канонические коммутационные соотношения (94).
- Чтобы построить базис в пространстве состояний (что необходимо для проведения дальнейших вычислений) необходимо, как и в случае гармонического осциллятора, иметь явный вид решений классических уравнений, чем мы и займемся в дальнейшем.