

Наумов Дмитрий Вадимович

Конспект лекций  
КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Конспект выполнен студенткой физфака МГУ  
Андреевой Анной Сергеевной

## Оглавление

<b>Лекция 1. Волны внутри нас.....</b>	<b>8</b>
Как все устроено .....	8
Взаимодействия .....	10
Электромагнитное взаимодействие.....	10
Слабое взаимодействие.....	13
Сильные взаимодействия.....	14
Кварки .....	16
Симметрия физики частиц.....	16
Parity(P)-симметрия. Отражение.....	16
Charge(C)-четность.....	18
<b>Лекция 2. Век открытий.....</b>	<b>20</b>
1886, Беккерель: радиоактивность.....	20
1900, Макс Планк: первый квант энергии.....	20
1905, Альберт Эйнштейн: теория фотоэффекта, СТО .....	20
1909, Милликен: измерен заряд электрона .....	21
1911, открытие атомного ядра .....	21
1913, Нильс Бор.....	22
1925, принцип Паули .....	22
1925, теория квантовой механики .....	23
1926, уравнение Клейна-Фока-Гордона (КФГ).....	23
1928, Поль Дирак: уравнение Дирака.....	23
1932, Андерсон: открытие позитрона.....	24
Бесконечные мучения .....	24
1932, Чедвик: открытие нейтрона.....	24
1934, Энрико Ферми: теория слабого взаимодействия.....	25
1947, Лэмбовский сдвиг.....	25
1947, Г. Бёте .....	27
1948, Швингер и Фейнман: КЭД (ковариантная); Фримен Дайсон.....	28
1953, Штукелберг, Петерсон и Гелл-Ман, Лоу: теории перенормировок.....	29
1964, Питер Хиггс .....	29
1967, Вайнберг, Глэшоу, Салам: Стандартная модель .....	30
<b>Лекция 3. Уравнение Клейна-Фока-Гордона .....</b>	<b>31</b>
Принципы нерелятивистской квантовой механики.....	31
И что не так? .....	32
Уравнение КФГ .....	33
Уравнение непрерывности из уравнения КФГ.....	34
Уравнение КФГ для атома водорода .....	36
Сравнение с результатами нерелятивистской квантовой механики.....	38

<b>Лекция 4. Парадокс Клейна .....</b>	<b>40</b>
Парадокс Клейна .....	40
<b>Лекция 5. Уравнение Дирака.....</b>	<b>46</b>
Уравнение Дирака.....	46
<b>Лекция 6. Спин и орбитальный момент в уравнении Дирака .....</b>	<b>48</b>
Частица в покое.....	48
Проблема положительно определенной плотности вероятности .....	49
Проблема гиромагнитного отношения .....	49
Оператор спина .....	53
Орбитальный момент.....	54
Полный момент.....	54
<b>Лекция 7. <math>\gamma</math>-матрицы Дирака .....</b>	<b>56</b>
Представление Дирака.....	56
Представление $\gamma$ -матриц Дирака .....	58
Следы от $\gamma$ -матриц.....	58
Свертки с $\gamma$ -матрицами .....	60
<b>Лекция 8. Решение свободного уравнения Дирака.....</b>	<b>62</b>
Решение свободного уравнения Дирака .....	62
<b>Лекция 9. Античастицы в уравнении Дирака .....</b>	<b>66</b>
Античастицы в уравнении Дирака .....	66
Релятивистский «тремор».....	69
<b>Лекция 10. Вычисление энергии атома водорода .....</b>	<b>72</b>
Вычисление спектра энергий в атоме водорода .....	72
Симметрии.....	72
Решение уравнения .....	73
<b>Лекция 11. Частица в плоской электромагнитной волне .....</b>	<b>79</b>
Решение Волкова .....	79
Проекционные операторы .....	81
Энергетические проекционные операторы .....	82
Операторы проекции спина .....	83
<b>Лекция 12. Киральные операторы.....</b>	<b>84</b>
Проекционные операторы (продолжение).....	84

Операторы проекции спина .....	84
Спиновая сумма .....	84
Киральные операторы .....	85
Лоренц инвариантность уравнения Дирака .....	87
Пример 1 .....	90
Пример 2 .....	90
Дискретные преобразования .....	91
<b>Лекция 13. Обсуждение релятивистской квантовой механики .....</b>	<b>94</b>
СРТ-преобразование .....	94
Обсуждение релятивистской квантовой механики .....	95
Нарушение причинности .....	97
<b>Лекция 14. Основы классической теории поля .....</b>	<b>102</b>
Основы классической теории поля .....	102
Принцип экстремального действия .....	102
Одномерная задача о бесконечном числе точек, соединенных пружинами .....	104
Поле .....	107
Уравнение Клейна-Фока-Гордона для поля .....	109
<b>Лекция 15. Теорема Нётер .....</b>	<b>110</b>
Теорема Нётер .....	110
Примеры применения теоремы .....	112
Пример 1. $\Phi$ - комплексное поле .....	112
Пример 2. Тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ .....	114
Решение парадоксов в классической теории поля .....	116
Вещественное скалярное поле .....	117
<b>Лекции 16-17. Комплексное скалярное и электромагнитное поле .....</b>	<b>120</b>
Комплексное скалярное поле .....	120
Векторное поле с нулевой массой .....	121
Решение уравнения Максвелла в вакууме (в отсутствии токов) .....	124
Вектор поляризации .....	126
Поляризационная матрица плотности .....	128
Энергия-импульс электромагнитного поля .....	128
<b>Лекция 18. Фермионное поле .....</b>	<b>132</b>
Фермионное поле .....	132
<b>Лекция 19. Функции Грина .....</b>	<b>136</b>
Функции Грина .....	136

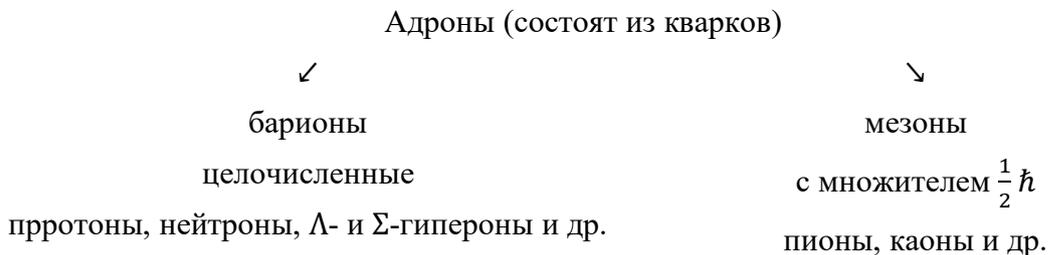
Пример 1.....	136
Пример 2.....	138
Дифракция.....	138
Функция Грина для уравнения Клейна-Фока-Гордона .....	140
Функция Грина для уравнения Дирака .....	140
Функция Грина векторного поля с ненулевой массой .....	141
Функция Грина для векторного поля с нулевой массой .....	143
<b>Лекция 20. Поле квантуется раз!.....</b>	<b>144</b>
Фермионное поле .....	144
Скалярное поле (вещественное).....	145
Вакуумное состояние .....	146
1 частичное состояние .....	147
2 частичное состояние .....	147
Произвольное состояние.....	148
«Частица» .....	149
Нормы.....	149
<b>Лекция 21. Квантовая статистика. Нормальное упорядочение.....</b>	<b>152</b>
Квантовая статистика .....	152
Каноническое квантование.....	152
Квантовая статистика фермионного поля.....	153
Нормальное упорядочивание .....	154
Спин фермиона Дирака .....	155
<b>Лекция 22. Поле квантуется два! .....</b>	<b>158</b>
Причинность в квантовой теории поля.....	158
Сверхсветовые нейтрино .....	161
Состояние с определенной координатой .....	163
<b>Лекция 23. Пропагатор.....</b>	<b>167</b>
Пропагатор .....	167
Запаздывающая функция Грина .....	168
Опережающая функция Грина.....	169
Фейнмановский пропагатор.....	170
Пропагатор фермионного поля .....	171
Пропагатор электрона.....	172
Пропагатор позитрона.....	173
Функция Грина уравнения Дирака .....	174
Причинность фермионного поля.....	175
<b>Лекция 24. S-матрица.....</b>	<b>177</b>

S-матрица .....	177
Представление взаимодействия .....	180
Решение уравнения Шредингера в представлении взаимодействия .....	182
Результат решения уравнения Шредингера .....	185
Выражение для S-матрицы .....	185
<b>Лекция 25. Связь квантового состояния в начальный момент времени. Теоремы Вика .....</b>	<b>187</b>
Связь квантового состояния в начальный и конечный момент времени.....	187
Вероятность перехода.....	188
Экспериментальная точка зрения измерения конечных состояний.....	190
Теоремы Вика.....	193
Скалярное поле .....	193
Пример применения теоремы Вика .....	194
Фермионное поле .....	194
<b>Лекция 26. Притяжение и отталкивание .....</b>	<b>196</b>
Нерелятивистская квантовая механика, Борновское приближение.....	196
Рассеяние электрона на классическом потенциале в квантовой теории поля.....	198
Теория Юкавы.....	201

## Лекция 1. Волны внутри нас

### Как все устроено

Начнем с того, что такое вещество или материя. У этого термина нет строгого определения. *Материя* – это некоторый объем в пространстве и времени, который заполнен чем-то, обладающим массой, энергией, возможно импульсом и другими характеристиками. Если сделать тур вглубь материи, начиная, например, с куска сыра, сделав мысленный зум можно увидеть, что этот кусок состоит из маленьких объектов – *атомов*. Атом в свою очередь состоит из *атомного ядра* и каким-то образом летающих вокруг него отрицательно заряженных *электронов*. Если сделать еще один зум примерно в 100000 раз, будет видно, что атомное ядро тоже состоит из некоторых более элементарных объектов – *положительно заряженных протонов и нейтральных нейтронов*, — это два типа сильно взаимодействующих частиц. Если попробовать сделать еще один зум (уже трудно сказать, во сколько раз, поскольку это довольно плохо определенная вещь), то возможно увидеть, что внутри протонов находятся еще частицы – *кварки и глюоны*. Кварки переносят дробный электрический заряд и взаимодействуют сильным образом. Это сильное взаимодействие осуществляется при помощи глюонов. Вернувшись на уровень выше, к атомным ядрам, можно заглянуть в периодическую таблицу Менделеева и обнаружить, что на сегодняшний день известно 118 атомных ядер (с изотопами их порядка 3000). Из кварков можно сделать целый зоопарк сильно взаимодействующих частиц под названием *адроны*:



Кроме того, уже были упомянуты электроны, это не единственная частица подобного типа. Существуют 3 семейства *лептонов*:  $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ . Каждой из этих частиц соответствует нейтральная по электрическому заряду частица – нейтрино. Эти три пары лептонов образуют дублеты (когда будем проходить Стандартную модель во второй половине курса, такое разбиение будет очень полезным):

лептоны

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

Если говорить о всех этих частицах, то может сложится впечатление, что мир устроен из все более мелких объектов:

размер атома:  $10^{-8}$  см;

размер атомного ядра:  $10^{-13}$  см.

И когда говорят о составляющих атома или атомного ядра, естественным образом хочется сказать, что это какие-то еще более маленькие объекты, похожие на шарики. Подобную философию использовали древние греки. Однако на самом деле в квантовой теории поля таких точечных частиц нет, электроны, мюоны, кварки, например, являются не точечными частицами, а **квантовыми полями**.

Хорошей аналогией для поля является матрац, состоящий из большого количества связанных между собой пружин. Если достаточно сильно ударить рукой по поверхности матраца, то по ней пойдут волны. Эти волны занимают некоторый объем в пространстве, и если издали на них посмотреть, то они могут казаться почти точечными, почти частицами. Так, в рамках квантовой теории поля частицы не существуют, а то, что принято называть частицами – это сгустки волны квантового поля.

Каждое поле несет некоторые характеристики, которые однозначным образом его описывают. Квантовые поля бывают нескольких типов:

- *скалярное поле* (несет единственное число в каждой пространственной точке);
- *фермионное поле* (в каждой точке ведет себя как фермион (частица с полуцелым спином));
- *векторное поле* (в каждой точке ведет себя как четырехмерный вектор);
- *тензорное поле* (каждую точку характеризует тензор).

Обсудим, какие обозначения соответствуют каким частицам. Частицы с полуцелым спином, такие как кварки, лептоны, барионы — это **фермионы**, описываются *фермионными квантовыми полями*.

Векторные поля обладают особой важной ролью, эти поля являются переносчиками взаимодействия. Без векторных полей вещества бы не существовало. Обсудим их подробнее и начнем с *электромагнитного* векторного поля  $A^\mu(x)$ , где  $x = (t, \vec{x})$  – четырехмерный вектор в естественной системе единиц:

$$\begin{aligned}c &= 1, & \hbar &= 1; \\[t] &= [x] = [m]^{-1}; \\[E] &= [m] = [x]^{-1}.\end{aligned}$$

Мир буквально пронизан электромагнитными волнами (радио, телевидение, например). Эти волны играют важную роль, поскольку позволяют существовать атомам – электрон при помощи электромагнитного поля оказывается колеблющимся вокруг атомного ядра, многие другие частицы также связаны при помощи этого поля.

Еще одно поле – *глюонное*, обозначается как  $g_a^\mu(x)$ . Это поле связывает между собой кварки внутри адронов. Существует 8 глюонных полей,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  и  $a = 1, \dots, 8$ . Эти поля гораздо более сложные, чем электромагнитные, поскольку могут взаимодействовать друг с другом напрямую в отличие от электромагнитных полей. Наука, описывающая кварковые взаимодействия называется **квантовой хромодинамикой**, концептуально есть большая аналогия с теорией Стандартной модели

для электрослабого сектора, которая объединяет электромагнитное и слабое взаимодействия.

Слабое взаимодействие реализуется слабыми бозонами:  $W^{\pm\mu}(x), Z^{\mu}(x)$ .

Эти три вида полей входят в основу курса по квантовой теории поля.

Существует одно фундаментальное скалярное поле – *поле Хиггса*. Позже при рассмотрении Стандартной модели будет доказано, что объединить слабое и электромагнитное взаимодействия возможно только в следующем предположении: все элементарные частицы безмассовые. Данное утверждение противоречит экспериментальным данным. Поле Хиггса – хитрый механизм, способный дать массы всем изначально безмассовым полям. У поля Хиггса есть возбуждение, которое можно элементарно обнаружить – *бозон Хиггса*, существование которого доказано в 2012 году.

Все эти квантовые поля, о которых идет речь, нужно представлять как поверхности со своими хитрыми математическими свойствами, заполняющие собой всю Вселенную. При сообщении достаточного количества энергии этому полю, его возбуждение воспринимается как элементарная частица. Одним из слоев совокупности квантовых полей является *поле Хиггса*, которое дает массы возбуждениям всех остальных полей.

Довольно показательная, но неправильная аналогия – представление поля в виде меда. Представим две мухи: одна ползает по поверхности меда, а вторая по поверхности стола. Вторую муху будем считать изначально безмассовой, двигающейся по поверхности стола со скоростью света. Если эта муха попадет в мед, то она подтормаживается и движется медленнее, так будем эффективно приписывать ей некоторую массу. Присутствие поля Хиггса *затормаживает некоторые поля*, и чем сильнее поля взаимодействуют с полем Хиггса, тем большую динамическую массу они приобретают.

## Взаимодействия

### *Электромагнитное взаимодействие*

Теперь поговорим о взаимодействиях на качественном уровне. Разберем, как квантовые поля взаимодействуют друг с другом. Рассмотрим два мощных удара с двух противоположных сторон матраца. Образовавшиеся волны движутся навстречу друг другу и где-то в середине матраца встречаются и взаимодействуют, изменяя первоначальное направление движения. Для описания взаимодействий применяются *диаграммы Фейнмана*. Из базовых элементов возможно составить сколь угодно сложную диаграмму. Также каждому базовому элементу будет соответствовать некоторое алгебраическое выражение. Умения рисовать диаграммы Фейнмана и ставить им в соответствие алгебраические выражения, фактически позволяют получить выражение, которое в результате преобразований можно довести до числа и сравнить с экспериментом.

Пусть есть некоторая точка и линия переходит во вторую точку. Пока для обозначения будем использовать четырехмерные координаты  $x$ ,  $y$ . Если добавить стрелку, то такая картина будет обозначать, что фермион, например электрон, перешел из точки  $x$  в точку  $y$  (рис. 1.1а).

Если то же самое действие произведет электромагнитная волна (в квантовой теории каждой волне соответствует некоторый квант, квант электромагнитной волны – фотон), то между двумя точками изображаем волнистую линию (рис. 1.1б).

Разберем взаимодействие электронов и фотонов. Представим два матраца – электронное квантовое поле и электромагнитное поле. Возможно возбудить волны и в том, и в другом, могут ли волны из одной поверхности многослойного матраца перейти в другой? Да, могут. Самым главным базовым элементом в квантовой электродинамике является следующий: взаимодействие электрона и фотона (рис. 1.1в) – есть волна, которая движется из бесконечности, в некоторой точке она встречается с другой волной, электромагнитной, движущейся из другой бесконечности, первая волна меняет направление и уходит куда-то дальше на бесконечность под другим углом.

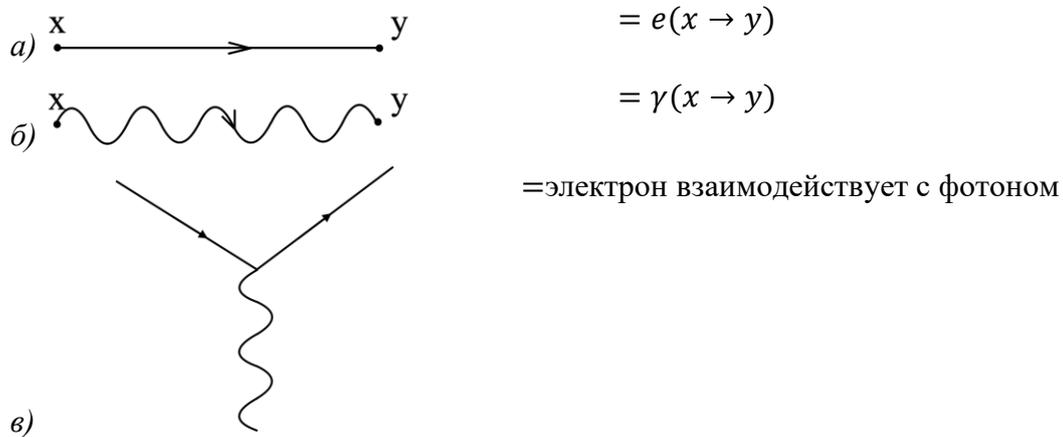


Рис. 1.1. базовые элементы диаграмм Фейнмана: а) переход электрона из точки  $x$  в точку  $y$ ; б) переход фотона из точки  $x$  в точку  $y$ ; взаимодействие электрона с фотоном.

Рассмотрим более сложную диаграмму. Электрон в некоторой точке провзаимодействовал с электромагнитной волной и изменил направление. Можем задать себе вопрос: откуда взялась электромагнитная волна? Возможно ее возбудил другой электрон, который двигался из другой пространственно-временной точки, изменив после этого свою траекторию. Добавим временную и пространственную шкалы. Ограничимся одномерным измерением в пространственных координатах. Так, два электрона двигались на встречу друг другу из разных пространственных точек. Через некоторое время эти электроны движутся по новым траекториям. Диаграмма описывает взаимодействие двух таких электронов (рис. 1.2а). При алгебраическом описании можем поставить в соответствие этой диаграмме какую-то наблюдаемую величину -

вероятность взаимодействия или сечение взаимодействия. Обратите внимание, что эта диаграмма состоит из всех базовых элементов, изображенных выше. То есть таким образом можно будет представить взаимодействие чего угодно с чем угодно.

Рассмотрим, может ли фотон, квант электромагнитного поля, взаимодействовать сам с собой. В квантовой электродинамике такой возможности не существует. Однако представим, что из бесконечности движется квант электромагнитного поля, снизу движется другая электромагнитная волна. Если бы они не провзаимодействовали, то эти две волны прошли бы друг сквозь друга и каждая бы ушла по своей исходной траектории. Это основа теории суперпозиции волн. Преобразуем каждый фотон в элемент взаимодействия электрона с фотоном. В результате получим линию электрона между двумя фотонами, а фотоны преобразовались в пару частиц – электрон и частицу с противоположным электрическим зарядом – позитрон. Далее две частицы могут повторить обратный процесс – превратиться в 2 фотона (рис. 1.2б). При отдалении будут видны две электромагнитные волны, изменившие направление – свет начал взаимодействовать со светом. Это особенность квантового описания, которой нет в классической физике.

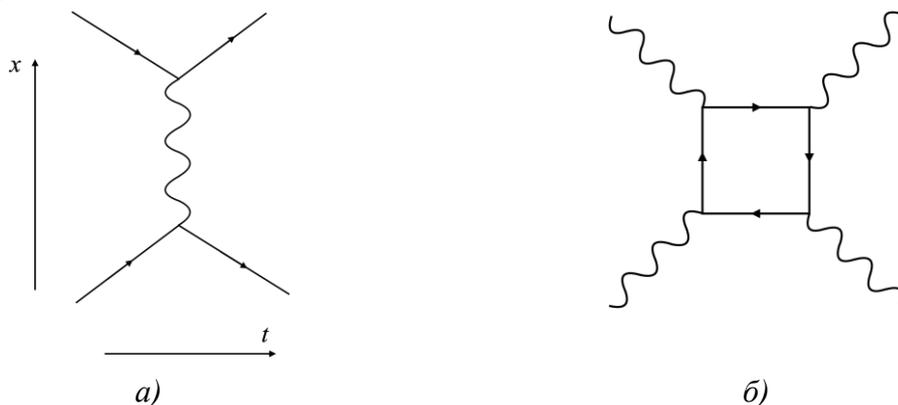
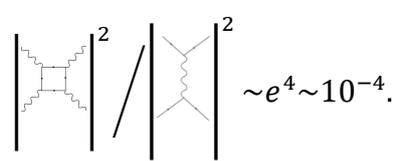


Рис. 1.2. Диаграммы Фейнмана: а) взаимодействие двух электронов; б) взаимодействие двух фотонов.

Для количественного описания эффектов вернемся к исходной диаграмме рис. 1(в), и заметим, что как только встречается точка во взаимодействии электрона и кванта электромагнитной волны, то этой точке необходимо поставить в соответствие некоторое число (позже будет показано, что вместо числа будет стоять некоторая матрица). Это величина электрического заряда, она определяет интенсивность взаимодействия. Точнее говоря, диаграмма определяет амплитуду взаимодействия, а вероятность или интенсивность взаимодействия определяет квадрат амплитуды. Например:

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} \right|^2 \sim e^4; \quad \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} \right|^2 \sim e^8.$$

Используя *константу электромагнитного взаимодействия*  $\alpha_{em}$ , можно сказать, что вероятность рассеяния света на свете по сравнению с вероятностью рассеяния электрона на электроне должна быть подавлена как  $e^4$ :

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137},$$


$\sim e^4 \sim 10^{-4}$ .

Так, можно сказать, что принцип суперпозиции по-прежнему работает, но с поправкой на уровне  $10^{-4}$ .

Рассмотрим еще один вариант взаимодействия. Электромагнитная волна, двигаясь слева направо, в пространственно-временной точке может превратиться в электрон, движущийся вперед по времени и позитрон, движущийся в обратном направлении, то есть в пару электрон-позитрон, а затем снова превратиться обратно в фотон (рис. 1.3а). Подобные картинки приводят к тонким вещам, изменяющим экспериментально наблюдаемые характеристики.

Аналогичную диаграмму можно нарисовать для преобразования электрона. Электрон превращается в пару электрон-фотон, которая превратится в исходный электрон (рис. 1.3б). Подобная диаграмма тоже приводит к экспериментально наблюдаемым следствиям.

Возможность существования таких диаграмм ближе к концу курса приведет нас к кардинальному пересмотру базовых понятий, таких как заряд, масса частицы и так далее (тема ренормировки).



Рис. 1.3. а) преобразование фотона; б) преобразование электрона.

Квантовая электродинамика, оперирующая такими диаграммами на основе одного базового элемента, - очень точная наука, предсказывающая безумное количество экспериментально наблюдаемых явлений с высокой точностью (до 11 знаков после запятой). Цель курса – научить пользоваться аппаратом квантовой теории поля достаточно свободно для проведения подобных вычислений, проектирования экспериментов и предсказания результатов этих экспериментов. Кроме того, курс будет полезен и теоретикам, поскольку большое внимание будет уделено обсуждению постановки экспериментов и их результатов.

### Слабое взаимодействие

Рассмотрим слабое взаимодействие. Один из самых известных примеров слабого взаимодействия – *слабые распады атомных ядер*.

Например, если начать мысленно копать вглубь планеты, то с увеличением глубины будет повышаться температура. Задумаемся, почему внутри планета горячая. Примерно половина тепла происходит из слабых распадов атомных ядер. Нейтрон атомного ядра начинает колебаться и превращается в протон, вылетает электрон и электронное антинейтрино. Ядро становится другим, поэтому процесс и называется распадом атомного ядра. Электрон вылетает с некоторой энергией, и далее, двигаясь сквозь вещество Земли, он эту энергию потеряет и остановится. Энергия перейдет в тепло. Так, радиоактивные распады ядер нагревают нашу планету. На диаграмме (рис. 1.4) представлен процесс преобразования нейтрона в протон с участием переносчика слабого взаимодействия  $W^-$ -бозона. Принцип похож на принцип электромагнитного взаимодействия. Разница в том, что слабое взаимодействие ведет себя не зеркально. Умение ставить в соответствие такой диаграмме алгебраическое выражение дает возможность из первых принципов вывести, с какими энергиями должен вылетать электрон.

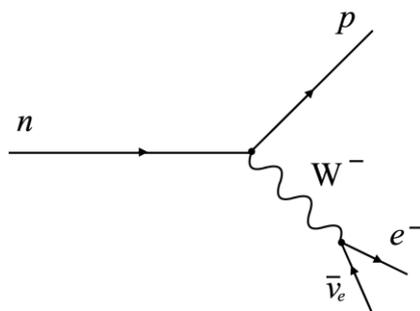


Рис. 1.4. Преобразование нейтрона в протон.

### Сильные взаимодействия

В сильных взаимодействиях участвуют кварки и переносчики этих взаимодействий – глюоны. Рассмотрим, как будет выглядеть аналог рассеяния электрона на электроне – рассеяние кварка на кварке. Кварки обладают еще одним квантовым числом, *цветом* (не имеет ничего общего с обычным цветом). Существует 3 цвета кварков: красный, зеленый, синий.

Пусть красный кварк взаимодействует с синим кварком посредством обмена глюоном (рис. 1.5а). Глюон – квант поля, который несет на себе цвет и антицвет. Глюон забирает красный цвет у красного кварка, а также несет антисиний цвет. Таким образом синий – цвет нового, рассеянного кварка в верхней части диаграммы (красный глюон был преобразован в синий по средствам красного-антисинего глюона). Красный-антисиний глюон попадает на нижний синий кварк, преобразуя его в нейтральный и передавая красный цвет. В соответствии полученной диаграмме точно также можно поставить алгебраическое выражение.

Поскольку глюоны несут цвет и антицвет, то они начинают взаимодействовать друг с другом. Рассмотрим взаимодействие глюона с двумя другими глюонами (рис.1.5б). Эту диаграмму можно понимать как превращение глюона в пару глюонов либо как превращение пары глюонов в один глюон. Так или иначе в отличие от электромагнетизма в сильных взаимодействиях переносчик взаимодействия взаимодействует сам с собой, что делает теорию гораздо более сложной с точки зрения вычислений.

Рассмотрим еще одну диаграмму, где в одной точке сталкиваются 4 глюона (рис.1.5в). Одна такая диаграмма обеспечивает множество возможностей (как и другие диаграммы): преобразование двух глюонов в два других глюона, одного глюона в три, трех глюонов в один.

Совокупность трех диаграмм описывает сильные взаимодействия, которые более замысловатые, чем электромагнитные взаимодействия. Константа взаимодействия, определяющая интенсивность, в отличие от электромагнитной константы, следующая:

$$\alpha_s \sim 1.$$

Поэтому в сильных взаимодействиях есть еще одно усложнение. В электромагнитных взаимодействиях будет достаточно посчитать 1 – 2 диаграммы, чтобы получить значение, близкое к экспериментальному. В сильных взаимодействиях приходится вычислять довольно много сложных диаграмм.

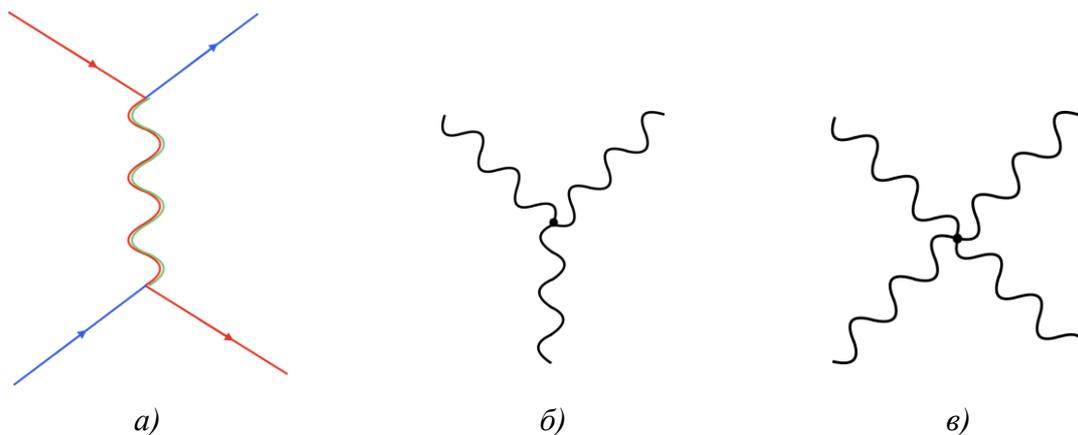


Рис. 1.5. Диаграммы Фейнмана, описывающие сильное взаимодействие: а) взаимодействие красного и синего кварков; б) взаимодействие глюона с двумя другими; в) взаимодействие с четырьмя глюонами.

Рассмотрим качественную аналогию, чтобы понять, насколько сильное взаимодействие сильно. Пусть есть два кварка (кружочки), эти кварки связаны друг с другом глюонами, которые могут быть представлены в виде цилиндра, где постоянно происходит рождение и уничтожение глюонов. Изобразим цилиндр в виде пружины, связывающей два кварка между собой. С какой силой необходимо воздействовать на кварки, чтобы оторвать один от другого? Подвесим к нижнему кварку платформу и разместим на ней полярных медведей. Необходимо 40 полярных медведей, чтобы

оторвать один кварк от другого. Такая огромная сила сосредоточена в каждом протоне, нейтроне, в каждом атомном ядре.

## Кварки

Рассмотрим кварки подробнее. Существует 3 дублета кварков:

$$\begin{aligned} Q = +\frac{2}{3}e & \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}. \\ Q = -\frac{1}{3}e & \end{aligned}$$

Используя кварковый состав можно расписать адроны:

$$\text{протон: } p = uud, \quad \text{где } +\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1;$$

$$\text{нейтрон: } n = udd, \quad \text{где } +\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0;$$

$$\Lambda - \text{гиперон: } \Lambda = uds, \quad \text{где } +\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0;$$

$$\pi^+ - \text{мезон: } \pi^+ = u\bar{d}, \quad \text{где } +\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$\pi^- - \text{мезон: } \pi^- = \bar{u}d, \quad \text{где } -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1.$$

Таким образом можно классифицировать сотни уже экспериментально полученных адронов.

Кроме электрического заряда кварки обладают цветом!

## Симметрия физики частиц

Введем некоторые формулы и обсудим важную тему, которая будет играть все возрастающую роль на протяжении данного курса – симметрия физики частиц. К этой теме будем возвращаться несколько раз на все более глубоком уровне.

Начнем с двух простых симметрий.

### *Parity(P)-симметрия. Отражение*

$$\hat{P} \psi(\vec{r}) \rightarrow \psi(-\vec{r}) \quad \text{или} \quad \hat{P} |\psi(\vec{r})\rangle = |\psi(-\vec{r})\rangle.$$

При эрмитовом сопряжении:

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B})^+ &= \hat{B}^+ \hat{A}^+; \\ \langle \psi(\vec{r}) | \hat{P}^+ &= \langle \psi(-\vec{r}) |. \end{aligned}$$

Перемножим правую и левую части выражений:

$$\langle \psi(-\vec{r}) | \psi(-\vec{r}) \rangle = \langle \psi(\vec{r}) | \hat{P}^+ \hat{P} | \psi(\vec{r}) \rangle.$$

$\langle \psi(-\vec{r}) | \psi(-\vec{r}) \rangle = \langle \psi(\vec{r}) | \psi(\vec{r}) \rangle$  – норма квантового состояния. Тогда в правой части:

$$\hat{P}^+ \hat{P} = \hat{I} = 1 \text{ – единичный оператор;}$$
$$\hat{P}^+ = \hat{P}^{-1}.$$

Применим к исходному оператору операцию отражения дважды:

$$\hat{P} \hat{P} | \psi(\vec{r}) \rangle = \hat{P} | \psi(-\vec{r}) \rangle = | \psi(\vec{r}) \rangle.$$

Тогда:

$$\hat{P} \hat{P} = \hat{I} = 1 \text{ – единичный оператор;}$$
$$\hat{P}^+ = \hat{P} \text{ – эрмитов оператор.}$$

В квантовой механике эрмитовым операторам соответствуют физические наблюдаемые, имеющие вещественную величину.

Определим собственные значения  $\hat{P}$ , предположим, что  $\psi(\vec{r})$  – собственная функция  $\hat{P}$ :

$$\hat{P} | \psi(\vec{r}) \rangle = P | \psi(\vec{r}) \rangle$$
$$\hat{P} \hat{P} | \psi(\vec{r}) \rangle = \hat{P} P | \psi(\vec{r}) \rangle = P P | \psi(\vec{r}) \rangle;$$
$$\hat{P} \hat{P} = 1 \rightarrow P^2 = 1.$$

Поскольку  $\hat{P}$  – эрмитов оператор, его собственные значения могут быть только вещественными:

$$P = \pm 1.$$

Рассмотрим практический пример. Экспериментально измеренные пространственные четности:

$$P(\gamma) = -1,$$
$$P(\pi^0) = -1.$$

Когда есть скалярная частица (частица с нулевым спином),  $P = \pm 1$ . В природе реализуются оба этих механизма (для бозона Хиггса  $P = +1$ ).

Существуют экспериментальные свидетельства в пользу сохранения или несохранения пространственной четности. В электромагнитных и сильных взаимодействиях  $P$  сохраняется. В слабых взаимодействиях  $P$  не сохраняется.

Рассмотрим теперь распад:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma.$$

Если на диаграмме по горизонтали отложена инвариантная масса  $m_{\gamma\gamma}$ , по вертикальной оси количество таких пар. При распадах  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  на диаграмме на общем фоне будет вырисовываться пик на  $m_{\pi^0}$ . Экспериментально используется для калибровки

электромагнитного калориметра. Теперь теоретически докажем, что такой процесс существовать не может. Рассматриваемый распад, очевидно, происходит за счет электромагнитного взаимодействия, так как в конце наблюдаются 2  $\gamma$ -кванта, а время жизни  $\pi^0$  характерно для электромагнитных взаимодействий. Вычислим пространственные четности начального и конечного состояний:

$$P(\pi^0) \text{ и } P^2(\gamma). \\ P(\pi^0) = -1, \quad P^2(\gamma) = (-1)^2 = +1; \\ P(\pi^0) \neq P^2(\gamma).$$

Четность не сохраняется. Действительно, в вычислении не было учтено, что два  $\gamma$ -кванта могут разлетаться с некоторым орбитальным моментом  $L$ , то необходимо приписать дополнительную четность  $P = (-1)^L$ :

$$P(\pi^0) = P^2(\gamma) \cdot (-1)^L.$$

Тогда  $L$  – нечетное:

$$-1 = +1 \cdot (-1)^{1,3,\dots}$$

Таким образом, использование экспериментально обнаруженного закона сохранения пространственной четности и значений внутренней пространственной четности тех или иных частиц, приводит к нетривиальному выводу:  $\pi^0$ - мезон, который, допустим, находится в покое и распадается на 2  $\gamma$ -кванта, вылетающих в противоположные стороны по закону сохранения импульса и при этом вращающихся с  $L = 1, 3, \dots$  (орбитальный момент будет определен при рассмотрении симметрию замены частицы на античастицу).

### **Charge(C)-четность**

Рассмотрим *операцию зарядового сопряжения*  $\hat{C}$ . Эта операция меняет частицу на античастицу, то есть меняются все ее квантовые числа – электрический заряд, барионный заряд, лептонный заряд, но масса остается той же самой.

Опустим часть выводов и запишем, что собственные значения оператора зарядовой четности могут также принимать значения:

$$\eta_C = \pm 1.$$

Собственные состояния такого оператора должны быть полностью нейтральными, например  $e^+e^-, \pi^+\pi^-$ . Рассмотрим связанное состояние  $e^+e^-$ , которое может образовывать атом позитроний:

*парапозитрон*,  $S = 0$  (спины  $e^+$  и  $e^-$  антипараллельны)  
четность  $\eta = +1$ , время жизни  $\tau = 0.2$  нс;

нижнее состояние  $L = 0$

*ортопозитрон*,  $S = \pm 1$  (спины  $e^+$  и  $e^-$  параллельны)  
четность  $\eta = -1$ , время жизни  $\tau = 142$  нс.

Знание простых диаграмм Фейнмана и некоторых симметрий позволят на качественном уровне понять разницу во временах жизни.

$$\eta(e^+e^-) = (-1)^{L+S}$$

Рассмотрим распады:

$$\begin{aligned} S = 0: & \quad \eta = 1 \rightarrow \gamma\gamma (\eta = 1): & \quad e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma; \\ S = 1: & \quad \eta = -1 \rightarrow \gamma\gamma\gamma (\eta = (-1)^3 = -1): & \quad e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma. \end{aligned}$$

Оценим вероятности распадов:

$$\frac{P(e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma)}{P(e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma)} \sim \frac{1}{\alpha} \approx 137.$$

Время жизни обратно пропорционально вероятностям распада, поэтому ортопозитрон будет жить примерно в 137 раз дольше парапозитрона. На самом деле видно, что значения только оценочные, полный расчет достаточно сложный.

Вернемся к распаду  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $L = 1, 3, \dots$ . Вспомним, что фотон – векторная частица,  $S_\gamma = 1$ . Если  $L = 3$ , то  $\max(S_{\gamma\gamma}) = 2 < 3$ , а  $S_{\pi^0} = 0$ . Поскольку полный орбитальный момент должен сохраняться:  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , то равенство получить невозможно:

$$0 \neq \vec{2} + \vec{3}.$$

Так, единственно возможный орбитальный момент в распаде  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$   $L = 1$ .

Теперь можно определить С-четность  $\pi^0$ :

$$\begin{aligned} \eta(\gamma\gamma) &= (-1)^{L+S}(-1)(-1) = (-1)^{1+1} = +1, \\ \eta(\pi^0) &= +1. \end{aligned}$$

Итак, подчеркнем результат, с использованием двух понятий – пространственной и зарядовой четности было получено:

$$\begin{aligned} \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \\ L = 1, S = 1 \end{aligned} \rightarrow \text{квантовая аномалия.}$$

## Лекция 2. Век открытий

В 1878 году считалось, что в физике открыто почти все, осталось решить две проблемы: парадокс эфира и парадокс излучения абсолютно черного тела. Однако в следующие годы произошла серия фундаментальных открытий, которые навсегда изменили наше представление о том, как устроена природа.

### **1886, Беккерель: радиоактивность**

Древние греки, например считали, что атомы – неделимые сущности, но это была только умозрительная философская концепция. 1986 год – конец этой концепции с точки зрения эксперимента. Беккерель открыл, что атомные ядра не стабильные, а некоторые из них спонтанно распадаются.

Это явление было подробно исследовано Беккерелем и Пьером и Мари Кюри, получившим Нобелевскую премию за открытие явления радиоактивности. В этом открытии проявлялись все три вида взаимодействия, о которых речь шла на прошлой лекции.

### **1900, Макс Планк: первый квант энергии**

Макс Планк пытался решить задачу излучения абсолютно черного тела. Классическая теория не могла правильно описать излучение абсолютно черного тела на низких частотах. Планк предположил, что сможет воспроизвести формулу, описывающую экспериментальные данные. Так, Планк постулировал следующее:

$$E = h\nu,$$

где  $h$  – константа, *постоянная Планка*.

Долгие годы Планк считал выведенную формулу исключительно математическим приемом. Первым, кто понял, что в формуле Планка заложена глубокая физика, был Альберт Эйнштейн.

### **1905, Альберт Эйнштейн: теория фотоэффекта, СТО**

Эйнштейн развил теорию Планка и сформировал *теорию фотоэффекта*. Было хорошо известно, что при облучении металлической пластины излучением, с поверхности этой пластины начинали вылетать электроны. При этом энергия вылетающих электронов не зависит от интенсивности излучения, но при увеличении частоты электромагнитного излучения энергия электронов увеличивалась. Эйнштейн объяснил явление следующим образом: *электромагнитные волны – это кванты энергии*. Поэтому энергия электронов пропорциональна энергии квантов.

Другая важная теория Эйнштейна – *специальная теория относительности (СТО)*. Одним из результатов теории является не совсем верное соотношение (не учитывает импульс частицы):

$$E = mc^2.$$

Так, даже в малом количестве вещества скрыта огромная энергия. В одном грамме вещества сосредоточена энергия, соответствующая железнодорожному составу с углем длиной 700 км.

### ***1909, Милликен: измерен заряд электрона***

В 1909 году был измерен электрический заряд электрона. Милликен повторил опыт европейских коллег по измерению электрического заряда ионизованных капель воды. Капли достаточно быстро испарялись, результаты были нестабильными. Работать над этой проблемой начал аспирант Милликена, Флетчер. Вместо капель воды было предложено использовать капли масла, ионизованные рентгеновским излучением. Ионизованные капли попадали в зазор конденсатора и подбором электрического поля, экспериментаторы добивались подбором напряжений того, что капли зависали ли двигались равномерно, то есть равновесия сил. Из равенства сил вычислялись заряды капель. Минимальный наблюдаемый заряд назвали зарядом электрона., остальные заряды капель были кратны ему. Милликен предложил Флетчеру отказаться от соавторства в этих работах, взамен пообещав поддержку карьеры Флетчера. Флетчер согласился. Поэтому нобелевскую премию получил только Милликен.

Также измерение заряда иллюстрирует еще один важный эффект. Речь пойдет о психологическом влиянии на получаемый результат. Если открыть книгу Particle Data Group, в которой собраны свойства всех известных частиц, то в рубрике исторических страниц обнаружим константы и их значения в зависимости от года публикации (были улучшены измерительные методики, найдены систематические ошибки и др.). Можно заметить, что у многих констант есть странные особенности (рис. 2.1). На протяжении некоторого временного отрезка значения близки с учетом погрешностей, при этом в следующий временной отрезок происходит нестатистический скачок, новое значение значительно отличается от предыдущих. И в этом новом временном промежутке снова результаты оказываются близки друг к другу. На определенных временных отрезках есть свой авторитет, к которому прислушиваются. И остальные убеждают себя, что сделали ошибки, меняют критерий отбора, чтобы получить похожий результат, пока не появляется кто-то, не знающий об этом авторитете или не слишком его ценящий. Так появляется новый классик и новая группа результатов. На сегодняшний день ученые знают об этом психологическом эффекте и стараются избегать его с помощью слепого анализа, когда итоговый результат невозможно заранее определить.

Оказалось, что Милликен неправильно измерил заряд электрона, потому что подставил неправильное значение для вязкости воздуха.

### ***1911, открытие атомного ядра***

Это открытие связано с именем Резерфорда, но сами результаты были получены его учениками, Гейгером и Марсденом, в 1909 году. Они рассеивали  $\text{He}^4$  на тонкой фольге. Резерфорд придумал интерпретацию странным результатам, которые они получили.

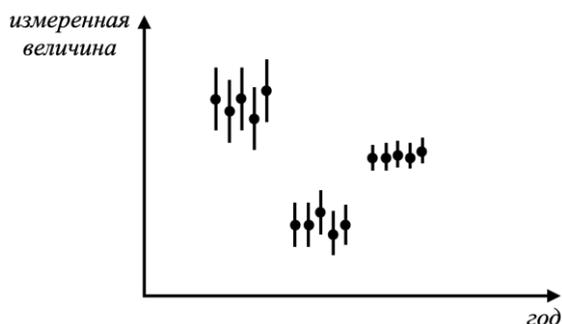


Рис. 2.1. Особенности определения значения константы (формирование групп результатов).

В тот момент доминировала следующая картина: атом похож на пудинг, электроны вкраплены как изюм в этот пудинг. Сегодняшняя картина (тоже неправильная), где в центре каждого атома находится ядро, вокруг которого летают электроны, противоречила квантовой электродинамике. Потому что вращающиеся электроны обладают ускорением, соответственно они должны излучать, то есть время жизни атома было бы очень мало.

Резерфорд предложил проверить, не получится ли так, что какие-то из атомов гелия отклоняются от фольги на очень большие углы.

Представим бильярдный стол, на котором разложены шарики от пинпонга. Через этот стол катится тяжелый бильярдный шар. Очевидно, что тяжелый бильярдный шар не отскочит от шарика для пинпонга на 180 градусов. Эта картина наиболее близка к тому, если бы атом был как пудинг. Тяжелый шар может отскочить только в том случае, если столкнется с чем-то еще более тяжелым.

Оказалось, атомы гелия действительно отскакивают назад. Резерфорд пришел к странному выводу: в центре атома есть тяжелое ядро, которое тяжелее ядра  $\text{He}^4$ . Но возникла проблема стабильности атома.

### 1913, Нильс Бор

Нильс Бор сформулировал набор правил, которые объясняли, почему электрон, вращаясь вокруг положительно заряженного ядра, не падает на это ядро. *Электрон должен находиться на некоторых стабильных орбитах и может переходить с орбиты на орбиту, излучая фотон* (старая квантовая теория, набор постулатов).

### 1925, принцип Паули

Принцип Паули пытался решить сразу несколько проблем. Одна из них заключалась в том, почему даже в рамках старой квантовой механики все атомы не одного размера, почему все электроны не могут находиться на нижней орбите с минимальной энергией.

Кроме того, атомы обладают разной химической активностью. Атомы с числами электронов 2, 8, 18 оказывались гораздо более стабильными по сравнению с другими. Одна из гипотез заключалась в том, что электроны некоторым образом группируются.

Другой эффект, над которым думал Паули – эффект Зеемана, расщепление спектров энергий в магнитном поле.

Пытаясь решить эти 3 проблемы, Паули предложил существование еще одного квантового числа у электрона – спина. Это квантовое число часто не верно ассоциируется с внутренним вращением. Принцип Паули заключается в том, что два электрона в одном квантовом состоянии с абсолютно одинаковыми квантовыми числами находиться не могут находиться на одном уровне. На нижней орбите с минимальной энергией не могут находиться два электрона с противоположенными спинами (первое магическое число 2), следующая более высокоэнергетичная орбита может содержать уже 8 электронов и так далее.

В 1940 году Паули обобщил принцип, доказал в виде теоремы.

### **1925, теория квантовой механики**

Теория квантовой механики была создана в работах нескольких ученых и на первый момент существовала в виде двух разных теорий.

С одной стороны была группа ученых Гейзенберг, Борн и Йордон. Они создали матричную теорию (на тот момент это не было распространенным явлением, теория плохо развивалась и не пользовалась спросом).

Параллельно работал Шредингер, открывший уравнение Шредингера. Это дифференциальное уравнение решается достаточно просто. Теория Шредингера пользовалась популярностью, ее применяли к различным системам.

В конце концов и Шредингер, и Дирак показали, что эти две теории эквивалентны, но представлены в разных математических аппаратах.

### **1926, уравнение Клейна-Фока-Гордона (КФГ)**

В 1926 году состоялась попытка объединить квантовую механику, созданную в 1925 году (нерелятивистская теория), со специальной теорией относительности Эйнштейна. Было открыто первое релятивистское уравнение, которое объединяло квантовую механику (еще старую) и специальную теорию относительности.

### **1928, Поль Дирак: уравнение Дирака**

Уравнение Дирака описывает релятивистскую частицу со спином 1/2:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

Это фундаментальное уравнение одно из самых важных в физике. Кроме того, что это уравнение действительно объяснило, что такое спин у фермиона, оно еще и объяснило, почему электрон взаимодействует с электромагнитным полем за счет своего спина по-

другому, в сравнении с наивными ожиданиями классической теории. Также это уравнение предсказало существование античастиц (позитронов), то есть антиматерии.

### ***1932, Андерсон: открытие позитрона***

В 1932 году американский экспериментатор Андерсон, работая с космическими лучами, открыл позитроны.

Представим, что на Землю падает космическое излучение (результат жизни сверхновых), и эти частицы можно наблюдать. Андерсон соорудил установку, в которой была пузырьковая камера, позволяющая регулярно делать фотографии. Когда заряженная частица проходила через эту пузырьковую камеру, оставался след. По этому следу можно только детектировать частицу, но ничего нельзя сказать о ее энергии, импульсе или типе. Если поместить такую пузырьковую камеру в магнитное поле, тогда если частица продолжает лететь по прямой, то она нейтральная. Положительно заряженные частицы отклоняются в одну сторону, а отрицательно заряженные в другую (в зависимости от ориентации магнитного поля). Однако видя только часть траектории нельзя сказать, с какой стороны пришла частица и положительным или отрицательным зарядом она обладает. Чтобы разрешить эту проблему Андерсен кладет в середине камеры тяжелую свинцовую плиту. Проходя через свинец, частица потеряет большую часть импульса. И будет двигаться по окружности другого радиуса. Теперь можно было однозначно определить начало и конец траектории.

### ***Бесконечные мучения***

Уже существовала квантовая механика в том виде, в котором ее преподают сегодня, специальная теория относительности и попытки и желание объединить эти теории – уравнение КФГ и уравнение Дирака. Очень скоро стало понятно, что сами по себе эти уравнения описывают лишь часть картины и обладают недостатками, если их интерпретировать как просто релятивистские уравнения в духе квантовой механики. Стало понятно, что необходимо переходить на язык квантовой теории поля.

Первая версия квантовой электродинамики (КЭД) была создана к 1930 году, это попытка объединить квантовую механику, теорию поля и СТО.

Сформулированную квантовую электродинамику начали применять к различным системам, например, к атому водорода. И в том же году Роберт Оппенгеймер заметил, что при вычислении в раках первой КЭД уровней энергии атома водорода, теория предсказывает бесконечность. Эти «бесконечные» мучения продолжались не один десяток лет.

### ***1932, Чедвик: открытие нейтрона***

Нейтрон оказывается тяжелее протона и, также как и протон, находится внутри атомного ядра. До открытия нейтрона думали, что ядро состоит из протонов и ядерных

электронов. Люди уже хорошо умели измерять вес атома и его электрический заряд, и было очевидно, что эти два числа не соответствовали друг другу.

### 1934, Энрико Ферми: теория слабого взаимодействия

Если внутри атомного ядра существуют протоны и нейтроны, то превращение нейтрона в фотон с излучением электрона и электронного антинейтрино – процесс слабого взаимодействия. Ферми создал теорию слабого взаимодействия. Из этой теории стало понятно, что частицы могут рождаться, изменяться и умирать. Однако журнал Nature отклонил его публикацию с формулировкой, что статья не может быть интересна читателям в виду ее абстрактности и отдаленности от реальности. Ферми был настолько потрясен этим удивительным ответом, что решил сменить род деятельности и стать экспериментатором. На этом поприще Ферми сделал важнейшее открытие, за которое получил Нобелевскую премию.

### 1947, Лэмбовский сдвиг

Это важнейший физический эффект, который изменил подход теоретиков к квантовой теории поля, а бесконечные мучения начали сходиться на нет.

Если рассмотреть атом водорода, то спектр энергии атома водорода зависит только от одного главного квантового числа  $n$ :

$$E_n = \frac{136 \text{ эВ}}{n^2}.$$

$n$  зависит от орбитального квантового числа  $l$ . Если рассмотреть атом водорода с  $n = 2$ , то есть две возможности:  $2S$ -состояние с  $l = 0$  и  $2P$ -состояние с  $l = 1$ . Поскольку у электрона есть еще спин, нужно говорить еще и о полном моменте  $j = l + s$ . Для обоих состояний возможно  $j = 1/2$  ( $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$ ).

В теории Шредингера все определялось только  $n$ , спектр энергии представлен на рис. 2.2а. Рассмотрим атом водорода в теории Дирака. Здесь картина становится более интересной (рис. 2.2б), уровни расщепляются. Лэмб использовал новую технику и обнаружил, что уровни энергии  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  отличаются на величину порядка  $4 \cdot 10^{-6}$  эВ (*Лэмбовский сдвиг*). Это важнейшее экспериментальное открытие показывало, что теория Дирака не справляется с экспериментальным фактом.

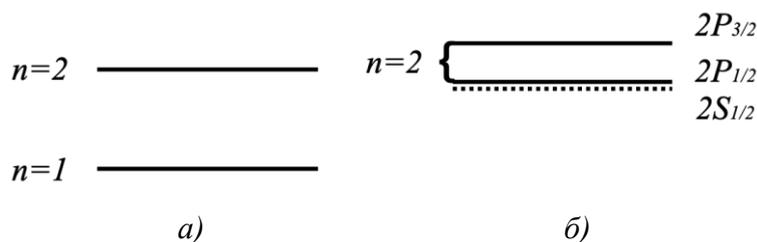


Рис. 2.2. Энергетический спектр атома водорода: а) теория Шредингера; б) теория Дирака.

В первой лекции речь шла о том, что вся Вселенная как слоями заполнена квантовыми полями. Рассмотрим, к чему может привести сам факт существования этих квантовых полей.

Квантовое поле отличается от классического в нескольких вещах. Одним из отличий является то, что квантовое поле никогда не находится в покое. В каждой точке квантового поля постоянно происходят колебания внутреннего осциллятора, связанного с этой пространственно-временной точкой. Такой квантовый осциллятор не может находиться в покое даже в состоянии с наименьшей энергией. Простое объяснение связано с принципом неопределенности Гейзенберга: если предположить, что квантовый осциллятор покоится в определенной точке, то становится неопределенным его импульс, что противоречит величине его энергии.

Что такое квантовое электромагнитное поле? Электромагнитное поле – это поле, в котором постоянно происходит изменение напряженностей электрического поля и магнитного. Электрическое поле постоянно действует на электрически заряженные частицы, находящиеся в поле его действия. Представим, что в каждой точке квантового поля вектора напряженности электрического поля крутятся в самые разные стороны с самыми разными частотами. Помести в определенную точку точечный электрон. Он будет следовать за движением каждого отдельного вектора напряженности электрического поля, будет описывать достаточно сложную зигзагообразную траекторию. Но в среднем он окажется в начальной точке, поскольку все вектора в среднем крутятся вокруг какого-то своего нулевого значения:

$$\langle \delta \vec{r} \rangle = 0.$$

Дисперсия отклонения:

$$\langle \delta \vec{r}^2 \rangle \neq 0.$$

Посмотрим, к чему это может привести с точки зрения энергии атома водорода. Рассмотрим потенциал взаимодействия между атомным ядром (протоном) и электроном:

$$V(\vec{r}) = \frac{e^2}{r}.$$

Посмотрим, как потенциал изменится с учетом того, что сам радиус-вектор со временем меняет свое положение:

$$\begin{aligned} \langle V(\vec{r} + \delta \vec{r}) \rangle &= \langle V(\vec{r}) + \delta \vec{r} \vec{\nabla} V(\vec{r}) + \frac{1}{2} \delta r_i \delta r_j \frac{d^2 V(\vec{r}) + \dots}{dr_i dr_j} \rangle \\ \langle \delta V(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{2 \cdot 3} \langle \delta \vec{r}^2 \rangle \left\langle \frac{d^2 V(\vec{r})}{dr^2} \right\rangle = \frac{1}{6} \langle \delta \vec{r}^2 \rangle \int d^3 r \psi^*(\vec{r}) \nabla^2 V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \\ \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) &= -4\pi \delta^3(\vec{r}), \end{aligned}$$

где  $\delta(\vec{r})$  –  $\delta$ -функция Дирака, обобщенная сингулярная функция, равна нулю всюду, где ее аргумент отличен от нуля и стремится бесконечности там, где аргумент равен нулю.

$$\int d^3r \delta^2(\vec{r}) f(\vec{r}) = f(0).$$

$$\langle \delta V(\vec{r}) \rangle = -\frac{e^2}{6} \langle \delta \vec{r}^2 \rangle \int d^3r \psi^*(\vec{r}) (-4\pi\delta^3(\vec{r})) \psi(\vec{r}) = \frac{2\pi e^2}{3} \langle \delta \vec{r}^2 \rangle |\psi(0)|^2.$$

Так, потенциал взаимодействия протона с электроном теперь немного отличается от исходного. Добавка зависит от величины электрического заряда, пропорциональна дисперсии положения и значению волновой функции электрона в точке 0. Этого достаточно для объяснения Лэмбовского сдвига на качественном уровне. Если рассмотреть в рамках квантовой механики атом водорода и посмотрим на его волновые функции, то увидим, что S-состояние сферически симметричное с максимумом в нуле. В P-состоянии волновая функция в нуле равна нулю (рис. 2.3). Применим эту картину для интерпретации полученной формулы.

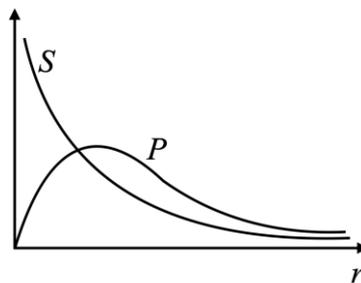


Рис. 2.3. Волновые функции S- и P-состояний.

В P-состоянии дисперсия положения не приводит к сдвигу энергии, в S-состоянии электрон испытывает максимальный эффект за счет расшатывания его положения при взаимодействии с квантовым электромагнитным полем. Лэмбовский сдвиг – смещение S-состояния по энергии.

Вернемся к дисперсии:

$$\langle \delta \vec{r}^2 \rangle = \lambda_c^2 \sim \frac{1}{m_c},$$

где  $\lambda_c \sim 10^{-11}$  см – комптоновская длина волны, величина, которая в 100 раз больше радиуса протона. То есть за счет взаимодействия с полем точка вырастает до сферы.

Если подставим числа в энергетический сдвиг, то получим хорошее согласие с экспериментом. Но если посмотрим на квантовую теорию поля тех лет, то обнаружим проблему:

$$\langle \delta \vec{r}^2 \rangle = \infty.$$

Так, теория становится абсурдной.

### 1947, Г. Бёте

Когда на первой послевоенной конференции Лэмб представил свой результат, ученые поняли, что экспериментальный результат правильный и нужно изменять теорию. Ганс Бёте, возвращаясь с конференции провел вычисление, которое устранило

бесконечности. Он рассмотрел *свободный электрон* и *электрон в поле атомного ядра*, вычел бесконечности свободного электрона из электрона атомного ядра, получив в итоге величину порядка  $\lambda_c^2$ . С этого момента квантовая электродинамика превратилась в теорию, хорошо согласующуюся с экспериментом.

### **1948, Швингер и Фейнман: КЭД (ковариантная); Фримен Дайсон**

В 1948 году состоялась вторая послевоенная конференция в Поконо, организованная Оппенгеймером. На этой конференции выступали Швингер и Фейнман, у каждого был уникальный взгляд на мир и на теоретическую физику. Но оба, вдохновленные результатом Бёте, они создали **ковариантную** квантовую электродинамику, близкую к современной форме.

На этой конференции присутствовали все выдающиеся теоретики тех лет (Н. Бор, Р. Оппенгеймер, Г. Бёте, Э. Ферми, П. Дирак и многие другие). Швингер был математическим гением, Фейнман больше был физическим интуитом, мог угадать правильный ответ и после прийти к нему математически.

Первым выступал Швингер, и когда он пытался придать некоторым из своих сложных формул физическую интерпретацию, появлялись уточняющие вопросы, на которые Швингер не отвечал.

Фейнман перестроил свой доклад на математический лад по примеру Швингера, показав свои экстравагантные на те годы диаграммы. Показывая диаграммы, Фейнман утверждал, что все траектории возможны (теория интеграла по путям), теоретики не понимали практически каждое утверждение.

Фейнман не сдался и понял, что нужно написать понятную научную работу. В том же университете, что и Фейнман тогда работал молодой пост.док. из Англии, Фримен Дайсон. Дайсон был восхищен Фейнманом и был огорчен исходом конференции в Поконо. Дайсон решил разобраться в обеих теориях и начал ходить на лекции Швингера, общался с ним лично. Дайсон осознал, что Швингер использует квантовую теорию поля. Фейнман же говорил на странном языке, используя картинки, которые ниоткуда не следовали, может показаться, что Фейнман не знал квантовой теории поля и не хотел ее учить. Но тем не менее, и Швингер, и Фейнман получали физические результаты, наблюдаемые величины. Дайсон предположил, что теории эквивалентны, он понял, как из теории Швингера можно получить теорию Фейнмана с выводом все картинок.

Дайсон, окрыленный своим открытием, поехал в Принстон, чтобы провести семинар на эту тему. Но Дайсона ждал холодный прием, поскольку к тому моменту Оппенгеймер съездил в Европу и пообщался с Нильсом Бором, перенеяв полное пренебрежение к квантовой теории поля. Семинар состоялся в худшем из возможных стилей. Оппенгеймер комментировал и перебивал Дайсона через каждую фразу. Дайсон провел второй семинар, который прошел немного лучше. Весть о неудачных семинарах дошла до Бёте. Он уговорил Оппенгеймера провести еще один семинар и приехал лично. И вдруг Оппенгеймер начал понимать, что говорил Дайсон, восхищаться его теорией.

После успешного третьего семинара состоялся четвертый, затем пятый. После этого Оппенгеймер диаметрально изменил свое отношение. Кроме того, в то же время Оппенгеймер получил письмо из Японии от теоретика Таманаги, в котором излагалась теория квантовой электродинамики, похожая на результаты Швингера и Фейнмана. После этого язык Фейнмана стал основным языком у теоретиков.

### **1953, Штукелберг, Петерсон и Гелл-Ман, Лоу: теории перенормировок**

В этот год было покончено с мучившими теоретиков бесконечностями в двух работах Штукелберга, Петерсога и Гелл-Мана, Лоу. Были созданы теории перенормировок, которые систематически и на правильном математическом языке избавляли от бесконечностей в квантовой теории поля.

После этого квантовая теория поля стала инструментом, в котором со знаком равенства можно провести вычисления до самого конца и сравнить с экспериментом. Было проведено переосмысление физических величин. Оказалось то, что считается константами, на более глубоком уровне должны зависеть от расстояния, например, между частицами, то же самое относится к массам. На рисунке 2.4 представлена зависимость константы электромагнитного взаимодействия от расстояния. На расстоянии  $r = \frac{1}{m_Z}$ , где  $m_Z$  – масса Z-бозона,  $\alpha_{em}^{-1} = 128$ . Интересно, что числа экспериментально проверены. Такое новое понимание называется «бегущей» константой.

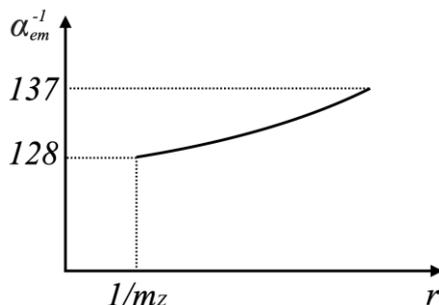


Рис. 2.4. «Бегущая» константа, постоянная электромагнитного взаимодействия.

Можно объяснить это явление на качественном языке. Если рассмотрим исходный электрон в какой-нибудь пространственной точке, взаимодействующий с электромагнитным полем, то можем вспомнить, что электромагнитное поле постоянно превращается в пары  $e^+e^-$ . Электрон взаимодействует с этой парой, поэтому ближе к нему оказывается  $e^+$ , подальше  $e^-$  - диполь, ориентированный своим положительным концом в сторону исходного электрона. Такие диполи постоянно частично экранируют электрический заряд. Поэтому заряд электрона становится зависящим от расстояния.

### **1964, Питер Хиггс**

Несколько теоретических групп независимо друг от друга открыли одно и то же явление. Они придумали динамический механизм, когда безмассовая частица вдруг за счет взаимодействия с бозоном Хиггса приобретает массу.

Хиггс послал статью с описанием механизма в журнал, ее не приняли, как недостаточно интересную. Хиггс дописал, что его теория предсказывает существование новой частицы (статью приняли). Хиггс получил Нобелевскую премию, когда его частица действительно была экспериментально обнаружена.

Начиная с этого года стало понятно, что можно создать теорию, которая бы объединяла квантовую электродинамику и слабые взаимодействия.

### **1967, Вайнберг, Глэшоу, Салам: Стандартная модель**

Независимо друг от друга тремя авторами была сформулирована теория, объединяющая КЭД и слабые взаимодействия. В этой теории было применено несколько нетривиальных механизмов: механизм Хиггса и принцип калибровочной симметрии. Три автора предположили, что электромагнитное и слабое взаимодействия — это одно взаимодействие, если температура окружающей среды превышает  $10^{15}$  К, которая существовала на самых ранних этапах рождения Вселенной. После остывания Вселенной слабые и электромагнитные взаимодействия стали разными.

Такая необычная теория и есть самая успешная на сегодняшний момент квантовая теория поля – **Стандартная модель (СМ)**. Эта теория согласуется с катастрофической точностью почти со всеми экспериментальными данными. *Существует только два вида экспериментальных данных, связанных с космологией, которые не описываются этой теорией: темная энергия и темная материя во Вселенной.*

В 1979 году авторы получили Нобелевскую премию за создание такой успешной теории.

Начиная с этих лет во всем мире была создана интенсивная программа по исследованию физики частиц, которая предсказывалась этой теорией. Были открыты W- и Z-бозоны, новые виды кварков, создано квантовая хромодинамика. Тогда же была инициирована огромная задача, связанная с тем, чтобы найти бозон Хиггса, предсказавший всю эту теорию. Эта задача стала центральной на последующие 40 лет. И в 2012 году в результате колоссальных усилий человечества были созданы коллайдеры, детекторы, использующие все существующие достижения, проведены экспериментальные анализы и было объявлено, что бозон Хиггса действительно существует. Масса бозона Хиггса:

$$m_{\chi} \sim 125 \text{ ГэВ.}$$

За годы были исследованы многие свойства бозона Хиггса, все эти свойства находятся в прекрасном согласии со Стандартной моделью.

## Лекция 3. Уравнение Клейна-Фока-Гордона

Прежде чем говорить о релятивистской квантовой механики стоит вспомнить основы нерелятивистской квантовой механики.

### Принципы нерелятивистской квантовой механики

- 1) Квантовая система описывается вектором в Гильбертовом пространстве:

$$|\psi(t)\rangle.$$

Пространство бесконечномерное и в нем определены скалярные произведения.

- 2) Эволюцию квантовой системы во времени описывает уравнение Шредингера:

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle,$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}.$$

- 3) Постулируется коммутатор между операторами координаты и импульса:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i.$$

- 4) Каждой физической величине ставится в соответствие оператор. Если квантовое состояние обладает строго определенным значением этого оператора, то система находится в одном из собственных состояний этого оператора. Примеры таких операторов:

- импульс  $\rightarrow \hat{P}$ ;
- свободная энергия  $\rightarrow \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ ;

Рассмотрим произвольный оператор  $\hat{\Omega}$  с собственным состоянием  $|\varphi_n\rangle$ :

$$\hat{\Omega} |\varphi_n\rangle = \omega_n |\varphi_n\rangle,$$

где  $\omega_n$  – вещественное число, если оператор эрмитов. Так, любое квантовое состояние можно разложить в ряд по собственным состояниям эрмитового оператора:

$$|\psi(t)\rangle = \sum C_n(t) |\varphi_n\rangle.$$

В качестве собственных состояний обычно используются состояния:

- определенной координаты  $|x\rangle$ :  $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$ ;
- определенного импульса  $|p\rangle$ :  $\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle$ ;

Соответствующие проекции:

$$\langle x|\psi(t)\rangle = \psi(t, x),$$

$$\langle p|\psi(t)\rangle = \tilde{\psi}(t, p).$$

Уравнение Шредингера в координатном представлении:

$$i \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = \left[ \frac{\left(-i \frac{d}{dx}\right)^2}{2m} + V(x) \right] \psi(t, x).$$

Это дифференциальное уравнение, имеющее строго определенное решение при заданных граничных условиях.

- 5) **Правило Борна:** в результате измерений можно обнаружить систему в одном из собственных состояний  $|\varphi_n\rangle$  оператора  $\hat{\Omega}$  и получить собственное значение квантового оператора  $\omega_n$  с **плотностью вероятности**  $|C_n(t)|^2$ .

В этом правиле сама процедура измерения никак не описана.

### И что не так?

Важно понимать, что у любой теории есть область применимости. Нерелятивистская квантовая механика сыграла важную роль для объяснения стабильности атомов и многих процессов на молекулярном и томном уровне. Но с развитием физики ускорителей, изучением космических лучей сверхвысоких энергий стало понятно, что в нерелятивистской теории есть ограничения, которые невозможно обойти:

- 1) Используется нерелятивистское приближение:

$$\frac{p^2}{2m} \ll mc^2$$

В такой теории *невозможно рождение частиц*, которое подразумевает энергию, которая по крайней мере больше массы.

- 2) В принципах нерелятивистской квантовой механики постулируется, что все операторы эрмитовы, все их собственные значения вещественные и типичное поведение волновой функции имеет вид:

$$\psi \sim e^{-iEt}.$$

Распады частиц описываются подстановкой:

$$E \rightarrow E - i\frac{\Gamma}{2},$$
$$|\psi(t)|^2 \sim e^{-\Gamma t}.$$

- 3) Предполагается  $c = \infty$ . Это приближение приводит к тому, что возможно обсуждать квантовую систему на языке волновых функций, зависящих от времени и координаты и их образов, зависящих от времени и импульса:

$$\psi(t, x), \quad \tilde{\psi}(t, p).$$

Вспомним, что скорость света конечна. Между координатой и импульсом появляется соотношение:

$$\Delta x \sim c \Delta t.$$

Запишем неопределенность Гейзенберга, учитывая релятивистские соотношения:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \rightarrow \Delta p \geq \frac{1}{2} \Delta x = \frac{1}{2c \Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta p \rightarrow \infty.$$

Тогда  $\tilde{\psi}(t, p)$  невозможна, значит невозможна и  $\psi(t, x)$ .

- 4) Если рассматривать электрон и приблизиться к нему на расстояние  $\delta x \sim \lambda_c = \frac{1}{m}$ , то обнаружим, что исходный электрон окружен облаком из пар  $e^+e^-$ . Тогда невозможно указать, где был исходный электрон, теряет смысл измерение координаты на расстояниях много меньших комптоновской длины волны или сопоставимых с ней.

## Уравнение КФГ

Необходимо построить теорию, которая бы решала эти проблемы или по крайней мере их часть. Начнем с прямолинейного обобщения, построим релятивистскую квантовую механику, в которой также возникают противоречия.

В 1926 году независимо 3 учеными (Клейн, Фок, Гордон) была предпринята первая попытка построить релятивистскую квантовую механику.

Гамильтониан в релятивистской форме:

$$\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2} = \sqrt{(-i\vec{\nabla})^2 + m^2}.$$

Можно получить уравнение:

$$i \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial t} = \sqrt{(-i\vec{\nabla})^2 + m^2} \phi(t, \vec{x}).$$

Разложение в ряд Тейлора квадратного корня:

$$\sqrt{m^2 + \hat{p}^2} = m \sqrt{1 + \frac{\hat{p}^2}{2m}} \approx m \left( 1 + \frac{\hat{p}^2}{4m} + \dots \right).$$

Тогда:

$$i \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial t} = m \left( 1 + \frac{(-\vec{\nabla})^2}{2 \cdot 2m} + \dots \right) \phi(t, \vec{x}).$$

В записанном уравнении бесконечное число производных. Клейн, Фок и Гордон предложили **квадрирование уравнения**.

Пусть есть коммутирующие операторы  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ . Тогда:

$$\hat{A}|\psi\rangle = \hat{B}|\psi\rangle \rightarrow \hat{A}^2|\psi\rangle = \hat{B}^2|\psi\rangle, \hat{A}^n|\psi\rangle = \hat{B}^n|\psi\rangle.$$

Доказательство:

$$\hat{A}^2|\psi\rangle = \hat{A}\hat{A}|\psi\rangle = \hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \hat{B}\hat{A}|\psi\rangle = \hat{B}\hat{B}|\psi\rangle = \hat{B}^2|\psi\rangle.$$

Аналогично для любой другой степени.

Тогда справедливо и следующее:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = \left((-i\vec{\nabla})^2 + m^2\right) \phi \rightarrow$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right] \phi = 0 - \text{уравнение КФГ.}$$

**Уравнение КФГ (Клейна, Фока, Гордона)** одно из фундаментальных уравнений.

Определим, что в этом уравнении будет играть роль плотности вероятности. Для этого вспомним *уравнение непрерывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

Из этого уравнение следует сохранение интеграла от плотности:

$$\int dV \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV \rho = - \int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \int_S d\vec{s} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV \rho(t, \vec{x}) = 0.$$

В нерелятивистской квантовой механике тоже есть сохраняющаяся величина:

$$\rho = |\psi(t, \vec{x})|^2 - \text{плотность вероятности.}$$

### **Уравнение непрерывности из уравнения КФГ**

Получим уравнение непрерывности, которое следует из уравнения КФГ. Для этого, построим комплексно сопряженное уравнение к уравнению КФГ. Исходное уравнение слева домножим на  $\phi^*$ , а комплексно сопряженное справа на  $\phi$ :

$$\phi^* \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right] \phi = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right] \phi^* \phi = 0.$$

Найдем разность уравнений:

$$\phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} - (\phi^* \vec{\nabla}^2 \phi - \phi \vec{\nabla}^2 \phi^*) = 0.$$

Упростим полученное выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\right) = \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} - \phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} = \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2};$$

$$\phi^* \vec{\nabla}^2 \phi - \phi \vec{\nabla}^2 \phi^* = \vec{\nabla} \cdot (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*).$$

Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) - \vec{\nabla} \cdot (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*) = 0 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) &\sim \rho, \\ (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*) &\sim -\vec{j}. \end{aligned}$$

Итак, подытожим:

$$\begin{aligned} \rho &= i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right), \\ \vec{j} &= \frac{1}{i} (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*). \end{aligned}$$

*Частное решение* уравнения КФГ имеет вид:

$$\phi_1(t, \vec{x}) = e^{-iEt + i\vec{p}\vec{x}},$$

где  $\vec{p}\vec{x}$  – скалярное произведение трехмерных координаты и импульса.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \phi(t, \vec{x}) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-iEt} = -iE e^{-iEt} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-iEt} = (-iE)^2 e^{-iEt} = -E^2 e^{-iEt} \rightarrow$$

$$(-E^2 - (-\vec{p}^2) + m^2) e^{-iEt + i\vec{p}\vec{x}} = 0 \rightarrow$$

$$E_p^2 = \vec{p}^2 + m^2.$$

Запишем второе частное решение, подставим теперь в частное решение  $E$  с другим знаком:

$$\phi_2(t, \vec{x}) = e^{iEt + i\vec{p}\vec{x}}.$$

Выпишем общее решение:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a(p) e^{-iEt + i\vec{p}\vec{x}} + b^*(p) e^{iEt - i\vec{p}\vec{x}}]$$

Вернемся к вычислению плотности в уравнении непрерывности, выведенного из КФГ. Для этого рассмотрим частный случай с  $e^{-iEt + i\vec{p}\vec{x}}$ :

$$\rho_+ = i \left( e^{iEt - i\vec{p}\vec{x}} (-iE) e^{-iEt + i\vec{p}\vec{x}} - (+iE) \right) = i(-i2E) = 2E = 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Рассмотрим теперь второе частное решение:

$$\rho_- = -2E = -2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Так, для одного из частных решений плотность вероятности отрицательная. В общем решении присутствуют как положительные, так и отрицательные энергии, то есть  $\rho$  является *знаконеопределенной величиной*.

При  $\rho \sim \psi\psi^*$  плотность вероятности будет положительной, но сохраняться не будет,  $\int dV |\psi|^2$  будет зависеть от времени.

### Уравнение КФГ для атома водорода

Продолжим изучение уравнения. Рассмотрим атом водорода в уравнении КФГ. В уравнении Шредингера взаимодействие было включено следующим образом:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V \right) \psi.$$

Как добавить взаимодействие в уравнение КФГ? Ответ на этот вопрос можно дать только для очень простых случаев, а именно для включения электромагнитного взаимодействия. Для включения электромагнитного взаимодействия в уравнение КФГ существует прием, который позже будет доказан строго.

Рассмотрим частицу с четырехимпульсом  $p^\mu = (E, \vec{p})$  и зарядом  $q$ . Электромагнитное поле задается электромагнитным потенциалом  $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ . Из уравнений Максвелла и классической электродинамики следует возможность замены:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu.$$

Новая величина также подчиняется свободному уравнению.

В квантовой механике каждой наблюдаемой величине можем поставить в соответствие некоторый оператор. Четырехимпульсу можно поставить в соответствие механический оператор:

$$p^\mu \rightarrow i\partial^\mu,$$

$$\partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right).$$

Вспомним, что:

$$A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B},$$

$$A^2 = A \cdot A = (A^0)^2 - (\vec{A})^2.$$

Тогда запишем в релятивистских обозначениях уравнение, эквивалентное исходному уравнению КФГ:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(t, \vec{x}) = 0 \rightarrow (\partial^2 + m^2) \phi(t, \vec{x}) = 0,$$

$$\partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla} \right)$$

$$((i\partial)^2 - m^2) \phi(t, \vec{x}) = 0 \rightarrow$$

$$((i\partial_\mu)(i\partial^\mu) - m^2) \phi(t, \vec{x}) = 0.$$

Замена:

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu.$$

Тогда:

$$[(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2]\phi(t, \vec{x}) = 0.$$

Так, в уравнение КФГ было добавлено взаимодействие с электромагнитным полем, воспользовавшись электродинамикой. Этот прием будет использоваться неоднократно.

Рассмотри атом водорода, а именно электрон в некотором потенциале. Для этого упростим ситуацию. Пусть магнитное поле отсутствует, есть только электрический потенциал, создаваемый положительным зарядом протона  $e$ :

$$A^\mu = \left(\frac{e}{r}, \vec{0}\right).$$

Упростим уравнение КФГ:

$$\begin{aligned} \mu = 0: \quad i\partial_0 &= i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - qA_0 = i\frac{\partial}{\partial t} + e\frac{e}{r} = i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e^2}{r}; \\ \mu = 1, 2, 3: \quad i\partial_i &= -i\vec{\nabla}_i \rightarrow \\ [(i\partial_0 - qA_0)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2] &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e^2}{r}\right)^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2\right]. \\ \left[\left(\frac{i\partial}{\partial t} + \frac{e^2}{r}\right)^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2\right] \phi(t, \vec{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Будем искать решение в виде:

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= e^{-iEt} \phi(\vec{x}) \rightarrow \\ \left(\frac{i\partial}{\partial t} + \frac{e^2}{r}\right) e^{-iEt} &= \left(E + \frac{e^2}{r}\right) e^{-iEt} \rightarrow \left(\frac{i\partial}{\partial t} + \frac{e^2}{r}\right)^2 e^{-iEt} = \left(E + \frac{e^2}{r}\right)^2 e^{-iEt} \rightarrow \\ \left[\left(E + \frac{e^2}{r}\right)^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2\right] e^{-iEt} \phi(\vec{x}) &= 0 \rightarrow \\ \left[\left(E + \frac{e^2}{r}\right)^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2\right] \phi(\vec{x}) &= 0 \rightarrow \left[E^2 + \frac{2Ee^2}{r} + \frac{e^4}{r^2} + \vec{\nabla}^2 - m^2\right] \phi(\vec{x}) = 0. \end{aligned}$$

Можно предположить, что поскольку мы рассматриваем связанное состояние (атом водорода), то его энергии будет меньше массы.

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla}^2 + \frac{2Ee^2}{r} + \frac{e^4}{r^2}\right] \phi(\vec{x}) &= -(E^2 - m^2)\phi(\vec{x}). \\ \vec{\nabla}^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{r^2} + \frac{e^4}{r^2} + \frac{2Ee^2}{r} \right] \phi(\vec{x}) = -(E^2 - m^2) \phi(\vec{x}).$$

$$\vec{x} = (r, \theta, \varphi) \rightarrow$$

$$\phi(\vec{x}) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \phi(r),$$

где  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  – собственная функция  $\hat{L}^2$ :

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Проведем подстановку:

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1) - e^4}{r^2} + \frac{2Ee^2}{r} \right] \phi(r) = -(E^2 - m^2) \phi(r).$$

Полученное уравнение напоминает уравнение для атома водорода в нерелятивистской квантовой механике. Поставив в соответствие то, что мы получили из уравнения КФГ, результату нерелятивистской квантовой механики.

### Сравнение с результатами нерелятивистской квантовой механики

В нерелятивистской квантовой механике при рассмотрении атома водорода получаем выражение:

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2me^2}{r} \right] \phi = -2m\tilde{E} \phi,$$

$$\tilde{E}_n = -\frac{e^4 m}{2n^2}, \quad n - l \geq 1.$$

Хитрые замены:

$$\begin{cases} 2m\tilde{E} \rightarrow E^2 - m^2 \\ me^2 \rightarrow -Ee^2 \\ l'(l'+1) \equiv l(l+1) - e^4 \\ n - l = 1, 2 \dots \rightarrow n' - l' = 1, 2 \dots \end{cases} \rightarrow$$

$$2m\tilde{E} = -\frac{e^4 2m^2}{2n^2} = -\frac{(me^2)^2}{(n')^2} \rightarrow$$

$$E^2 - m^2 = -\frac{(Ee^2)^2}{(n')^2} \rightarrow$$

$$E^2 \left( 1 + \frac{e^4}{(n')^2} \right) = m^2, \quad E = \pm \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{(n')^2}}} \rightarrow$$

$$\text{т.к. } m > E, \quad \text{то } E_{n'l'} = + \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{(n')^2}}}$$

$$\begin{cases} l'(l'+1) = l(l+1) - e^4 \\ n - l = n' - l' \end{cases} \rightarrow (l')^2 + l' - (l(l+1) - e^4) = 0 \rightarrow$$

$$l' = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + l(l+1) - e^4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4} \rightarrow$$

если электрический заряд слишком мал, то  $l' = l$ , тогда:

$$l' = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4}.$$

Тогда:

$$n' = n - (l - l') = n - \left(l + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4}.$$

$$E_{nl} = + \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{\left(-\left(l + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4}\right)^2}}}.$$

Сравним полученный результат с экспериментальными данными и нерелятивистской квантовой механикой.

$$\begin{aligned} \frac{E_{nl} - m}{m} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{(n')^2}}} = -\frac{e^4}{2n^2} - \frac{e^4}{n^4} \left(\frac{n}{2l+1} - \frac{3}{8}\right) + \dots \\ &-\frac{e^4}{2n^2} = -\frac{13.6 \text{ эВ}}{n^2}. \end{aligned}$$

Если сравнить следующие слагаемые (поправки) с экспериментальными данными, то заметим: *замена  $l \rightarrow l \pm \frac{1}{2}$  привела бы к великоленному согласию с экспериментом.* Так, при сравнении с экспериментом теория в первом приближении правильно предсказывает энергию атома водорода, но следующая поправка не верна. Позднее будет показано, что полученное уравнение описывает частицу с нулевым спином.

Итак, релятивистское обобщение уравнения Шредингера – уравнение Клейна-Фока-Гордона, которое компактно можно записать в следующем виде:

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0.$$

В это уравнение может быть включено взаимодействие с электромагнитным полем. Также в материалах лекции проведено вычисление спектра энергии атома водорода. Полученное выражение в первом порядке хорошо согласуется с экспериментом, в следующем порядке возникает рассогласование. Еще одна проблема в уравнении заключается в том, что плотность вероятности оказывается закононеопределенной.

## Лекция 4. Парадокс Клейна

### Парадокс Клейна

Рассмотрим еще одну проблему, возникающую в уравнении Клейна-Гордона – парадокс Клейна.

Пусть есть одномерное пространство с потенциальным барьером некоторой высоты  $V$  в начале координат, распространяющийся в правую полуплоскость до бесконечности (рис. 4.1). В классической физике такой потенциал может представлять собой стену. Если энергия мяча больше энергии потенциальной стены, то мяч может преодолеть этот барьер, иначе останется в левой части. В квантовой физике если слева на потенциальный барьер падает волна с энергией, меньшей  $V$ , то эта волна начинает частично проникать в правую часть. Если барьер распространяется до бесконечности, то проникновение мало, в результате мы имеем чисто отраженную волну.

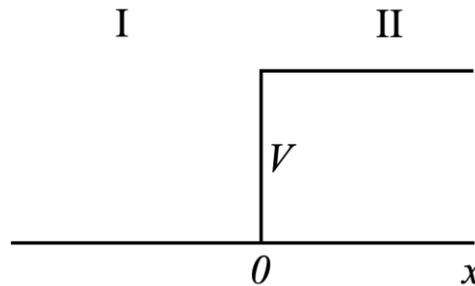


Рис. 4.1. Потенциальный барьер в одномерном пространстве.

Рассмотрим ту же задачу в уравнении Клейна-Фока-Гордона. Для этого запишем уравнение КФГ в левой и правой частях:

$$I: \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - m^2 \right] \phi_I(t, x) = 0;$$

$$II: \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t} - qV \right)^2 - \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - m^2 \right] \phi_{II}(t, x) = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$e^{-iEt \pm ipx},$$

$$I: \phi_I(t, x) = e^{-iEt + ipx} + r e^{-iEt - ipx};$$

$$II: \phi_{II}(t, x) = t e^{-i\tilde{E}t + i\tilde{p}x}.$$

Условия сшивки (граничные условия):

$$\begin{cases} \phi_I(t, 0) = \phi_{II}(t, 0) \\ \phi'_{x,I}(t, 0) = \phi'_{x,II}(t, 0). \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} \phi_I(t, 0) = e^{-iEt} + r e^{-iEt} = e^{-iEt} (1 + r) \\ \phi_{II}(t, 0) = t e^{-i\tilde{E}t}. \end{cases}$$

Можем потребовать  $\tilde{E} = E$ , иначе невозможно выполнение условий шивки:

$$1 + r = t. \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \Phi_I(t, x) = ip e^{-iEt+ipx} - ipr e^{-iEt-ipx} \rightarrow \frac{d}{dx} \Phi_I(t, 0) = i e^{-iEt} p(1-r) \\ \frac{d}{dx} \Phi_{II}(t, x) = i\tilde{p}t e^{-iEt+i\tilde{p}x} \rightarrow \frac{d}{dx} \Phi_{II}(t, 0) = e^{-iEt} i\tilde{p}t. \\ p(1-r) = \tilde{p}t. \end{cases} \quad (4.2)$$

Уравнения 4.1 и 4.2 связывают между собой два неизвестных коэффициента.

Подставим теперь решения в уравнение КФГ и получим:

$$\begin{aligned} (E^2 - p^2 - m^2) &= 0 \rightarrow p = \sqrt{E^2 - m^2}; \\ ((E - qV)^2 - \tilde{p}^2 - m^2) &= 0 \rightarrow \tilde{p} = \pm \sqrt{(E - qV)^2 - m^2}. \end{aligned}$$

Решим теперь систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ p(1-r) = \tilde{p}t \end{cases} \rightarrow t = \frac{2}{1 + \frac{\tilde{p}}{p}} = \frac{2p}{p + \tilde{p}}$$

$$1 + r = \frac{2p}{p + \tilde{p}} \rightarrow r = \frac{2p}{p + \tilde{p}} - \frac{p + \tilde{p}}{p + \tilde{p}} = \frac{p - \tilde{p}}{p + \tilde{p}}$$

$$\begin{cases} t = \frac{2p}{p + \tilde{p}} \\ r = \frac{p - \tilde{p}}{p + \tilde{p}}. \end{cases}$$

$\tilde{p}$  в зависимости от потенциала может быть как вещественной, так и мнимой (рис. 4.2).

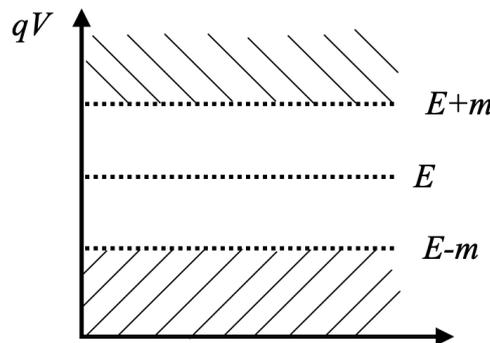


Рис. 4.2. Границы слабого, среднего и сильного полей.

1) В случае *слабого поля*:

$$qV < E - m \rightarrow (E - qV)^2 - m^2 > 0 \rightarrow \tilde{p} - \text{вещественная величина.}$$

Определим теперь знак  $\tilde{p}$ . Рассмотрим *групповую скорость частицы*:

$$v = \frac{\tilde{p}}{E - qV} > 0 \rightarrow p > 0$$

для волны, движущейся слева направо. Тогда и  $\tilde{p} > 0$ .

2) В **сильном поле**:

$$qV > E + m \rightarrow E - qV < -m \rightarrow (E - qV)^2 - m^2 < 0 \rightarrow \tilde{p} - \text{мнимая величина.}$$

3) Теперь рассмотрим случай **среднего поля**:

$$E - m < qV < E + m,$$

$$\begin{cases} E - qV > -m \\ E - qV < m \end{cases} \rightarrow |E - qV| > m \rightarrow (E - qV)^2 - m^2 > 0 \rightarrow \tilde{p} - \text{вещ.}$$

Полученный результат новый по сравнению с нерелятивистской квантовой механикой, где есть только два первых случая.

Вычислим групповую скорость:

$$v = \frac{\tilde{p}}{E - qV} \rightarrow \tilde{p} < 0.$$

Подведем итог. Существует 3 области, в которых возможно сравнить энергию взаимодействия с электростатическим потенциалом с величиной энергии частицы. Важными величинами становятся отклонения энергии на  $\pm m$ . Для слабого поля  $\tilde{p} > 0$ , вещественная величина. В сильном поле  $\tilde{p}$  мнимая. В случае среднего поля  $\tilde{p} < 0$ , вещественная величина.

Определим коэффициенты прохождения и отражения. Сначала вычислим поток частиц, падающих слева направо:

$$\phi = e^{-iEt+ipx}, j = \frac{1}{2Ei} \left( \phi^* \frac{d\phi}{dx} - \phi \frac{d\phi^*}{dx} \right) = \frac{1}{2Ei} (ip + ip) = \frac{2p}{2E} = v \rightarrow$$

$$j_{in} = v.$$

Для области I:

$$j_I = \frac{1}{2Ei} \left( \Phi_I^* \frac{d\Phi_I}{dx} - \Phi_I \frac{d\Phi_I^*}{dx} \right) \rightarrow$$

$$\Phi_I = e^{-iEt} (e^{+ipx} + r e^{-ipx}),$$

$$\frac{d\Phi_I}{dx} = ip e^{+ipx} - ip r e^{-ipx} = ip (e^{+ipx} - r e^{-ipx}),$$

$$\Phi_I^* \frac{d\Phi_I}{dx} = (e^{-ipx} + r^* e^{+ipx}) ip (e^{+ipx} - r e^{-ipx}) = 1 - |r|^2 + r^* e^{+i2px} - r e^{-i2px} ip,$$

$$\Phi_I \frac{d\Phi_I^*}{dx} = -ip (1 - |r|^2 + r e^{-ipx} - r^* e^{+i2px}),$$

$$\left( \Phi_I^* \frac{d\Phi_I}{dx} - \Phi_I \frac{d\Phi_I^*}{dx} \right) = 2ip(1 - |r|^2) \rightarrow$$

$$j_I = \frac{2ip(1 - |r|^2)}{2Ei} = v(1 - |r|^2).$$

Для области II:

$$j_{II} = \frac{1}{2Ei} \left( \Phi_{II}^* \frac{d\Phi_{II}}{dx} - \Phi_{II} \frac{d\Phi_{II}^*}{dx} \right)$$

$$\Phi_{II} = e^{-iEt} t e^{i\tilde{p}x}, \quad \frac{d\Phi_{II}}{dx} = ti\tilde{p}e^{i\tilde{p}x}, \quad \Phi_{II}^* = t^* e^{-i\tilde{p}^*x},$$

$$\Phi_{II}^* \frac{d\Phi_{II}}{dx} = |t|^2 i\tilde{p} e^{ix(\tilde{p}-\tilde{p}^*)},$$

$$\Phi_{II} \frac{d\Phi_{II}^*}{dx} = |t|^2 (-i\tilde{p}^*) e^{-ix(\tilde{p}^*-\tilde{p})},$$

$$\left( \Phi_{II}^* \frac{d\Phi_{II}}{dx} - \Phi_{II} \frac{d\Phi_{II}^*}{dx} \right) = 2ip(1 - |r|^2) \rightarrow$$

$$j_{II} = \frac{|t|^2 i}{2Ei} (\tilde{p} e^{ix(\tilde{p}-\tilde{p}^*)} + \tilde{p}^* e^{-ix(\tilde{p}^*-\tilde{p})}) = \frac{|t|^2}{2E} (\tilde{p} + \tilde{p}^*) e^{ix(\tilde{p}-\tilde{p}^*)}.$$

Если  $\tilde{p}$  – мнимое:

$$\tilde{p} + \tilde{p}^* = 0 \rightarrow j_{II} = 0.$$

Если  $\tilde{p}$  – вещественное:

$$\tilde{p} - \tilde{p}^* = 0 \rightarrow j_{II} = \frac{\tilde{p}}{E} |t|^2.$$

Вычислим теперь вероятности отражения и прохождения.

$$j_I = v(1 - |r|^2)$$

$$j_{II} = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{p} \text{ – мнимое} \\ \frac{\tilde{p}}{E} |t|^2, & \text{если } \tilde{p} \text{ – вещественное} \end{cases} \rightarrow$$

$$t = \frac{2p}{p + \tilde{p}}$$

$$r = \frac{p - \tilde{p}}{p + \tilde{p}}$$

Вероятность прохождения:

$$T = \frac{j_{II}}{j_{in}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{p} \text{ – мнимое} \\ \frac{\tilde{p}}{Ev} |t|^2 = \frac{\tilde{p}}{p} |t|^2 = \frac{\tilde{p}}{p} \frac{4p^2}{(p + \tilde{p})^2} = \frac{4p\tilde{p}}{(p + \tilde{p})^2}, & \text{если } \tilde{p} \text{ – вещественное} \end{cases}$$

Вероятность отражения:

$$R = \frac{j_{in} - j_l}{j_{in}} = |r|^2 = \frac{|p - \tilde{p}|^2}{|p + \tilde{p}|^2}$$

1) Слабое поле,  $\tilde{p} > 0$ , вещественная величина:

$$T = \frac{4p\tilde{p}}{(p + \tilde{p})^2}, \quad R = \frac{(p - \tilde{p})^2}{(p + \tilde{p})^2}, \quad T + R = \frac{4p\tilde{p} + p^2 - 2p\tilde{p} + \tilde{p}^2}{(p + \tilde{p})^2} = 1.$$

2) Среднее поле,  $\tilde{p}$  – мнимое:

$$T = 0, \quad R = \frac{|p - \tilde{p}|^2}{|p + \tilde{p}|^2} = \frac{p^2 + \tilde{p}^2}{p^2 + \tilde{p}^2} = 1, \quad T + R = 1.$$

3) Сильное поле,  $\tilde{p} < 0$ , вещественная величина:

$$T = -\frac{4p|\tilde{p}|}{(p - |\tilde{p}|)^2}, \quad R = \frac{(p + |\tilde{p}|)^2}{(p - |\tilde{p}|)^2}, \quad T + R = \frac{-4p|\tilde{p}| + p^2 + 2p|\tilde{p}| + \tilde{p}^2}{(p - |\tilde{p}|)^2} = 1.$$

Первые два случая традиционные для нерелятивистской квантовой механики. Результат, полученный для сильного поля, является парадоксальным – при увеличении поля относительно второго случая коэффициент прохождения отличен от нуля, но при этом вероятность прохождения отрицательная  $T < 0$  и  $R > 1$  – **парадокс Клейна**.

При рассмотрении очень сильных полей ( $qV > 2m$ ), то **начинают рождаться пары частица-античастица**. Частица отражается от потенциала и уходит влево, к падающему потоку добавляются частицы, рождающиеся из вакуума. Античастицы уходят вправо. Отрицательная вероятность прохождения связана с тем, что для античастицы  $p \rightarrow -p$ ,  $E \rightarrow -E$ ,  $q \rightarrow -q$ .

Покажем, что уравнение КФГ действительно описывает и частицу, и античастицу. Для этого необходимо ввести взаимодействие с электромагнитным полем:

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu$$

$$(-\partial^2 - m^2)\phi = 0 = ((i\partial)^2 - m^2)\phi \rightarrow [(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2]\phi = 0$$

$$[-\partial^2 + q^2 A^2 - iq(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) - m^2]\phi = 0 \rightarrow$$

$$[-\partial^2 + q^2 A^2 - iq\{\partial_\mu, A^\mu\} - m^2]\phi = 0 -$$

уравнение Клейна-Фока-Гордона для частицы с зарядом  $q$  и волновой функцией  $\phi$  в электромагнитном потенциале  $A^\mu$ . Комплексное сопряжение:

$$[-\partial^2 + q^2 A^2 + iq\{\partial_\mu, A^\mu\} - m^2]\phi^* = 0 -$$

описывает аналогичную частицу, но с противоположным зарядом – **античастицу**.

Уравнение КФГ действительно хорошо описывает релятивистское соотношение между энергией и импульсом. Подводя итоги, стоит еще раз подчеркнуть, что уравнение Клейна-Фока-Гордона имеет вид  $(\partial^2 + m^2)\phi = 0$  и обладает несколькими проблемами:

- 1) при рассмотрении свободного уравнения  $\rho$  из уравнения непрерывности является *знаконеопределенной величиной*;
- 2) спектр атома водорода  $E_{nl}$  *не описывает тонкую структуру атома водорода*;
- 3) при рассмотрении рассеяния частиц на потенциале в рамках уравнения КФГ для сильных полей возникает *парадокс Клейна* – отражается больше частиц, чем падает на барьер, в подбарьерную область течет ток с отрицательной вероятностью;
- 4) *уравнение предсказывает существование античастиц*.

*Вторая проблема явно указывает на спин  $1/2$ , остальные проблемы связаны с 1-частичной интерпретацией  $\phi$ .*

## Лекция 5. Уравнение Дирака

### Уравнение Дирака

Уравнения Дирака – вторая попытка построения релятивистской квантовой механики. К первой проблеме уравнения КФГ Дирак подошел с математической точки зрения.

$$\rho = \frac{i}{2E} \left( \phi^* \frac{d\phi}{dt} - \phi \frac{d\phi^*}{dt} \right),$$

так,  $\rho$  – законнеопределенная величина, поскольку содержит производные по времени. Если преобразовать уравнение КФГ в уравнение первого порядка, то в выражении для  $\rho$  производных не будет, при этом необходимо сохранить релятивистское соотношение энергии и импульса:

- 1)  $\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \phi(t, \vec{x}) = 0 \rightarrow i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi,$
- 2)  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2.$

Гамильтониан также должен содержать только первые производные для правильных релятивистских преобразований:

$$\hat{H} \psi = [\alpha_i (-i) \nabla_i + \beta m] \psi.$$

Квадрируем полученное уравнение:

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi &= \hat{H}^2 \psi = (-i \nabla_i \alpha_i + \beta m) (-i \alpha_j \nabla_j + \beta m) \psi \rightarrow \\ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= [-\nabla_i \nabla_j \alpha_i \alpha_j \beta^2 m^2 - im(\nabla_i \alpha_i \beta + \beta \nabla_j \alpha_j)] \psi. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta$  были подобраны так, что уравнение Дирака при квадрировании в точности преобразовывалось бы в уравнение КФГ.

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j \psi &= \nabla_j \nabla_i \psi \rightarrow \nabla_i \nabla_j \psi = \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_j + \nabla_j \nabla_i) \psi, \\ \nabla_i \nabla_j \alpha_i \alpha_j \psi &= \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_j + \nabla_j \nabla_i) \alpha_i \alpha_j \psi = \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j \alpha_i \alpha_j + \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j \alpha_j \alpha_i \rightarrow \end{aligned}$$

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\nabla_i \nabla_j (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)}{2} + \beta^2 m^2 - imx \nabla_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \right] \psi = 0,$$

$$\nabla_i \nabla_j \delta_{ij} = \nabla_i \nabla_i = \vec{\nabla}^2 \rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0. \\ \beta^2 = 1 \end{cases}$$

Посмотрим, имеет ли такая система решение.

Пусть  $\alpha_i$  и  $\beta$  – числа. Предположим:

$$\beta = e^{i\alpha}, \quad \beta^2 = e^{i2\alpha} = 1, \quad \alpha_i + \alpha_i = 0 \rightarrow \alpha_i = 0 \rightarrow$$

тогда не удовлетворяется первое уравнение системы.  $\alpha_i$  и  $\beta$  не могут быть числами.

Пусть  $\alpha_i$  и  $\beta$  – матрицы. Пусть  $A$  – некоторая матрица с собственным вектором  $x$ :

$$Ax = \lambda x,$$

где  $\lambda$  – собственное значение.

$$A^2x = \lambda^2x \rightarrow$$

$$\beta^2 = 1 \rightarrow \lambda_\beta^2 = 1, \lambda_\beta = \pm 1.$$

$$\alpha_i^2 = 1 \rightarrow \lambda_{\alpha_i}^2 = 1, \lambda_{\alpha_i} = \pm 1.$$

Определим четность размерности матриц. Вспомним, что

$$\text{Tr}A = \sum_i \lambda_A^i, \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \rightarrow$$

$$\text{Tr}(\alpha_i\beta) = -\text{Tr}(\beta\alpha_i),$$

$$\alpha_i\beta = -\beta\alpha_i \rightarrow \beta\alpha_i\beta = -\beta^2\alpha_i = -\alpha_i \rightarrow$$

$$\text{Tr}(\beta\alpha_i\beta) = \text{Tr}(\beta^2\alpha_i) = \text{Tr}(\alpha_i) - \text{Tr}(\alpha_i) = 0.$$

$$\alpha_i\beta = -\beta\alpha_i \rightarrow \beta = -\alpha_i\beta\alpha_i \rightarrow$$

$$\text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\alpha_i\beta\alpha_i) = -\text{Tr}(\beta) = 0.$$

Так, при диагонализации на диагонали стоят  $\pm 1$  и их число должно быть одинаковым, то есть **размерность матриц четная**.

## Лекция 6. Спин и орбитальный момент в уравнении Дирака

В материалах прошлых лекций было показано:

$$\begin{aligned} \alpha_i, i = 1, 2, 3 &\rightarrow \lambda_{\alpha_i} = \pm 1, \quad \text{Tr} \alpha_i = 0; \\ \beta &\rightarrow \lambda_{\beta} = \pm 1, \quad \text{Tr} \beta = 0. \end{aligned}$$

Обе матрицы имеют четную размерность.

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} I$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

Пусть  $N = 2$ . Такой размерностью обладают матрицы Паули.

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Однако  $i = 1, 2, 3$ , а для уравнения Дирака необходимы 4 матрицы.

Пусть  $N = 4$ . Запишем эти матрицы и проверим, что они действительно удовлетворяют условиям:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_i \\ \sigma_i & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = 0_{4 \times 4}$$

Условие  $\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} I$  предлагается проверить самостоятельно.

Вернемся к уравнению Дирака, которое имеет вид:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\alpha_i (-i) \nabla_i + \beta m] \psi.$$

Так как  $\alpha_i$  и  $\beta$  – матрицы  $4 \times 4$ , то  $\psi$  – столбец.

### Частица в покое

Рассмотрим возможное решение:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta(x) \\ \lambda(x) \end{pmatrix},$$

где  $\eta(x)$  и  $\lambda(x)$  – двухкомпонентные столбики. Рассмотрим частицу в покое:

$$-i \vec{\nabla} \psi = \vec{0} \psi \rightarrow$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \eta \\ \lambda \end{pmatrix} = \beta m \begin{pmatrix} \eta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\eta \\ -m\lambda \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} i \frac{\partial \eta}{\partial t} = m\eta \rightarrow \eta = e^{-imt} \tilde{\eta}(\vec{x}) \\ i \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -m\lambda \rightarrow \lambda = e^{+imt} \tilde{\lambda}(\vec{x}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\psi(x) = e^{-imt} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\lambda}(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Наличие второй компоненты в решении говорит о наличии античастиц.

## Проблема положительно определенной плотности вероятности

Запишем уравнение Дирака и комплексно сопряженное к нему:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \alpha_i \nabla_i \psi + \beta m \psi$$

$$-i \frac{\partial \psi^+}{\partial t} = +i (\nabla_i \psi^+) \alpha_i^+ + \psi^+ \beta^+ m$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \alpha_i^+, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \beta^+ \rightarrow$$

$$-i \frac{\partial \psi^+}{\partial t} = +i (\nabla_i \psi^+) \alpha_i + \psi^+ \beta m.$$

Домножим уравнение Дирака слева на  $\psi^+$ , а комплексно сопряженное уравнение на  $\psi$  и найдем разность этих двух уравнений:

$$\frac{\partial(\psi^+ \psi)}{\partial t} = \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi + \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

$$m \psi^+ \beta \psi - \psi^+ \beta \psi = 0,$$

$$-i(\psi^+ \alpha_i \nabla_i \psi) - i(\nabla_i \psi^+) \alpha_i \psi = -i \nabla_i (\psi^+ \alpha_i \psi),$$

$$i \frac{\partial(\psi^+ \psi)}{\partial t} = -i \nabla_i (\psi^+ \alpha_i \psi) \rightarrow$$

$$\frac{\partial(\psi^+ \psi)}{\partial t} + \nabla_i \vec{j}_i = 0 \text{ — уравнение непрерывности,}$$

где  $\rho = \psi^+ \psi$ :

$$\int d^3x \psi^+(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) = const.$$

Так, уравнение Дирака решило проблему уравнения Клейна-Фока-Гордона, связанную со знаконеопределенностью плотности вероятности:

$$\rho = \psi^+ \psi = |\psi|^2 \geq 0.$$

## Проблема гиромагнитного отношения

Рассмотрим другую проблему – проблему гиромагнитного отношения. Магнитный момент в магнитном поле разворачивается так, чтобы занять состояние с наименьшей энергией, в гамильтониане взаимодействия описывается как  $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ .

Для макроскопического тела магнитный момент может быть связан с намагниченностью. При переходе на более фундаментальный уровень оказывается, что магнитный момент как правило связан с вращением электрического заряда или плотности электрического заряда. Поэтому между орбитальным моментом и магнитным моментом должна существовать линейная связь:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{L},$$

где  $\frac{e}{2m} = \mu_B$  – магнетон Бора. Однако при интерполировании этого уравнения на внутреннюю степень вращения, если считать, что электрон, обладающий спином  $\frac{1}{2}$ , обладает некоторым внутренним вращением, то получим следующее:

$$\vec{L} \rightarrow \vec{S}: \vec{\mu} = \mu_B \vec{S}.$$

Но эксперимент показывает отличие в 2 раза:

$$\vec{\mu} = 2\mu_B \vec{S} = g\mu_B \vec{S}.$$

*g - гиромагнитное отношение.*

Проверим, получится ли этот коэффициент из уравнения Дирака автоматически? Включим взаимодействие в уравнение Дирака:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu, \quad i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - qA^\mu,$$

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}),$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - q\Phi, \quad -i\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{\nabla} - q\vec{A} \rightarrow$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi = (\vec{\alpha}(-i\vec{\nabla}) + \beta m)\psi, \text{ где } \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - q\Phi\right)\psi = (\vec{\alpha}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) + \beta m)\psi.$$

$$-i\vec{\nabla} - q\vec{A} = \vec{\pi} \rightarrow$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi = (\vec{\alpha}\vec{\pi} + \beta m + q\Phi)\psi.$$

Запишем уравнение, описывающее взаимодействие электрона с электромагнитным полем, учитывая спинор. Для этого вспомним **уравнение Паули**:

$$i\frac{\partial \chi}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi - \vec{\mu}\vec{B} \right] \chi,$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu} = g\mu_B \vec{S}, \quad g = 2, \quad \vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}.$$

**Уравнение Дирака:**

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi = (\vec{\alpha}\vec{\pi} + \beta m + q\Phi)\psi.$$

Рассмотрим это уравнение в нерелятивистском приближении.

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \vec{\pi}\vec{\alpha} = \vec{\pi} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\pi}\vec{\sigma} \\ \vec{\pi}\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \vec{\pi}\vec{\alpha}\psi = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\pi}\vec{\sigma} \\ \vec{\pi}\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\pi}\vec{\sigma}\eta \\ \vec{\pi}\vec{\sigma}\chi \end{pmatrix} \\ \beta m\psi = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\chi \\ -m\eta \end{pmatrix} \rightarrow \\ q\Phi\psi = \begin{pmatrix} q\Phi\chi \\ q\Phi\eta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \begin{pmatrix} i\frac{\partial\chi}{\partial t} \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} \\ i\frac{\partial\eta}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\pi}\vec{\sigma}\eta \\ \vec{\pi}\vec{\sigma}\chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q\Phi\chi \\ q\Phi\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\chi \\ -m\eta \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} i\frac{\partial\chi}{\partial t} = (m + q\Phi)\chi + \vec{\pi}\vec{\sigma}\eta \\ i\frac{\partial\eta}{\partial t} = (-m + q\Phi)\eta + \vec{\pi}\vec{\sigma}\chi \end{cases}$$

Будем искать решение в виде, в котором оно должно быть в нерелятивистской теории:

$$\begin{aligned} \chi(t, \vec{x}) &= e^{-imt} \tilde{\chi}(t, \vec{x}), \\ \eta(t, \vec{x}) &= e^{-imt} \tilde{\eta}(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= m\chi + e^{-imt} i\frac{\partial\tilde{\chi}(t, \vec{x})}{\partial t}, \\ i\frac{\partial\eta}{\partial t} &= m\eta + e^{-imt} i\frac{\partial\tilde{\eta}(t, \vec{x})}{\partial t}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m\tilde{\chi} + i\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial t} = m\tilde{\chi} + q\Phi\tilde{\chi} + \vec{\pi}\vec{\sigma}\tilde{\eta} \\ m\tilde{\eta} + i\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t} = -m\tilde{\eta} + q\Phi\tilde{\eta} + \vec{\pi}\vec{\sigma}\tilde{\chi} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} i\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial t} = q\Phi\tilde{\chi} + \vec{\pi}\vec{\sigma}\tilde{\eta} \\ i\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t} = -2m\tilde{\eta} + q\Phi\tilde{\eta} + \vec{\pi}\vec{\sigma}\tilde{\chi} \end{cases}.$$

Введем 2 приближения:

- 1) Пусть  $\left| i\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t} \right| \ll m\tilde{\eta}$  – приближение медленно меняющейся нижней компоненты (имеет смысл только в нерелятивистском приближении).
- 2) Потребуем также, чтобы электростатический потенциал, в котором находится электрон был не таким сильным по сравнению с энергией покоя частицы:  $|q\Phi| \ll m$ .

Тогда:

$$\tilde{\eta} = \frac{\vec{\pi}\vec{\sigma}}{2m} \tilde{\chi} \rightarrow$$

из уравнения Дирака в нерелятивистском приближении получим:

$$i \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} = q\Phi \tilde{\chi} + \frac{(\vec{\pi}\vec{\sigma})^2}{2m} \tilde{\chi}.$$

Сведем это уравнение к уравнению Паули. Вспомним свойства матриц Паули:

$$\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} I$$

$\varepsilon_{ijk}$  — полностью антисимметричный тензор (например,  $\varepsilon_{123} = 1, \varepsilon_{113} = 0$ ). Если  $i = j$ , то

$$\sigma_i^2 = I.$$

Если  $i \neq j$ , то

$$\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 = i \varepsilon_{123} \sigma_3 = i \sigma_3.$$

Рассмотрим квадрат скалярного произведения:

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})^2 = A_i \sigma_i A_j \sigma_j \equiv \sum_{i,j} A_i A_j \sigma_i \sigma_j = A_i A_j \sigma_i \sigma_j = A_i A_j (\delta_{ij} I + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) = \vec{A}^2 + i \varepsilon_{ijk} A_i A_j \sigma_k$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_k = \varepsilon_{ijk} A_i B_j \rightarrow$$

$$\vec{A}^2 + i \varepsilon_{ijk} A_i A_j \sigma_k = \vec{A}^2 + i(\vec{A} \times \vec{A}) \cdot \vec{\sigma}.$$

Обобщим:

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{A}\vec{B} + i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}.$$

$$(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 + i(\vec{\pi} \times \vec{\pi}) \cdot \vec{\sigma}$$

$$\begin{aligned} (\vec{\pi} \times \vec{\pi}) \tilde{\chi} &= (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) \times (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) \tilde{\chi} = (-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} + iq\vec{A} \times \vec{\nabla} + iq\vec{\nabla} \times \vec{A} + q^2 \vec{A} \times \vec{A}) \tilde{\chi} = \\ &= iq(\vec{A} \times \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \times \vec{A}) \tilde{\chi} \rightarrow \end{aligned}$$

$$(\vec{A} \times \vec{\nabla})_k = \varepsilon_{ijk} A_i \nabla_j, \quad (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \varepsilon_{ijk} \nabla_i A_j \rightarrow$$

$$(\vec{A} \times \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \times \vec{A})_k \tilde{\chi} = (\varepsilon_{ijk} A_i \nabla_j + \varepsilon_{ijk} \nabla_i A_j) \tilde{\chi},$$

$$\varepsilon_{ijk} \nabla_i A_j \tilde{\chi} = \varepsilon_{ijk} (\nabla_i A_j) \tilde{\chi} + \varepsilon_{ijk} A_j \nabla_i \tilde{\chi} = \varepsilon_{ijk} (\nabla_i A_j) \tilde{\chi} - \varepsilon_{ijk} A_i \nabla_j \tilde{\chi} \rightarrow$$

$$(\vec{A} \times \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \times \vec{A})_k \tilde{\chi} = \varepsilon_{ijk} (\nabla_i A_j) \tilde{\chi}.$$

Вспомним, что

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}), \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Тогда:

$$iq(\vec{A} \times \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \times \vec{A}) \tilde{\chi} = iq\vec{B} \tilde{\chi},$$

$$(\vec{A} \times \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \times \vec{A})_k \tilde{\chi} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k \tilde{\chi}.$$

$$(\hat{p} - q\vec{A})^2 = \vec{\pi}^2 \rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = (\hat{p} - q\vec{A})^2 - q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}.$$

$$i \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{p} - q\vec{A})^2}{2m} - 2 \frac{q}{2m} \frac{\vec{\sigma}}{2} \vec{B} \right] \tilde{\chi}.$$

$g = 2$  появилось в уравнении Дирака автоматически.

Позднее этот фактор будет подвергнут некоторому сомнению, поскольку этот успех не является следствием того, что уравнение Дирака релятивистское и правильно описывает взаимодействие спинового магнитного момента с магнитным полем. Фактор  $g$  – следствие того, как введено взаимодействие. В лекции было введено минимальное взаимодействие, которое даже в нерелятивистском приближении приводит к  $g = 2$ .

Подведем промежуточные итоги:

1) Было записано уравнение Дирака и определены его матричные коэффициенты:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m + q\Phi) \psi$$

2) Уравнение Дирака приводит к сохранению некоторого тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0 \rightarrow \begin{cases} \rho = |\psi|^2 \\ \vec{j} = \psi^+ \vec{\alpha} \psi \end{cases}$$

3) При взаимодействии с электромагнитным полем уравнение предсказывает гиромагнитное отношение  $g = 2$ .

## Оператор спина

Оператор спина для уравнения Дирака имеет вид:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Это обобщение нерелятивистского оператора на случай четырехмерного спинора  $\psi$ . Если снова обратиться к нерелятивистской теории, то можно вспомнить: в отсутствии взаимодействия электрон не меняет направления спина и направления движения. Проверим, сохраняет ли электрон направление спина в отсутствии взаимодействия в релятивистской теории. Рассмотрим эволюцию вектора со временем – вычислим коммутатор соответствующего вектора с гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\vec{\nabla} \vec{\alpha} + \beta m \rightarrow$$

$$[\hat{H}, \vec{S}] = [-i\nabla_i \alpha_i + \beta m, S_k].$$

$$\begin{aligned} [\alpha_i, S_k] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \sigma_k \\ \sigma_i \sigma_k & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \sigma_i \\ \sigma_k \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_k] \\ [\sigma_i, \sigma_k] & 0 \end{pmatrix}. \\ \sigma_i \sigma_j &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} I \\ \sigma_j \sigma_i &= i \varepsilon_{jik} \sigma_k + \delta_{ji} I \rightarrow [\sigma_i, \sigma_j] = i 2 \varepsilon_{ijk} \sigma_k. \end{aligned}$$

$$[\alpha_i, S_k] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_k] \\ [\sigma_i, \sigma_k] & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{ikj} \sigma_j \\ \varepsilon_{ikj} \sigma_j & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} [\beta, S_k] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix} = \emptyset. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \vec{S}] &= \nabla_i \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{ikj} \sigma_j \\ \varepsilon_{ikj} \sigma_j & 0 \end{pmatrix}. \\ \nabla_i \varepsilon_{ikj} \sigma_j &= -\varepsilon_{ijk} \nabla_i \sigma_j = (\vec{\nabla} \times \vec{\sigma})_k \rightarrow \\ [\hat{H}, \vec{S}] &= - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\nabla} \times \vec{\sigma} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \times \vec{\nabla} \\ \vec{\sigma} \times \vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix}_k = (\vec{\alpha} \times \vec{\nabla})_k. \end{aligned}$$

Коммутатор  $[\hat{H}, \vec{S}]$  не обращается в 0. Так, даже у свободного электрона спин прецессирует.

### Орбитальный момент

Интуитивно кажется очевидным рассмотреть не отдельно вектор спина и орбитальный момент, а **полный момент** частицы. Для вычисления полного момента необходимо вычислить коммутатор гамильтониана с оператором орбитального момента:

$$\begin{aligned} \vec{L}_k &= (\vec{r} \times \vec{p})_k = \varepsilon_{mnk} r_m p_n = \varepsilon_{mnk} r_m (-i \nabla_n) \rightarrow \\ [\hat{H}, \vec{L}_k] &= [-i \nabla_i \alpha_i + \beta m, \varepsilon_{mnk} r_m (-i \nabla_n)]. \\ [\nabla_i, r_m \nabla_n] &= \nabla_i r_m \nabla_n - r_m \nabla_n \nabla_i = (\nabla_i r_m) \nabla_n + r_m \nabla_i \nabla_n - r_m \nabla_n \nabla_i = (\nabla_i r_m) \nabla_n = \delta_{im} \nabla_n \rightarrow \\ [\hat{H}, \vec{L}_k] &= -\alpha_i \delta_{im} \nabla_n \varepsilon_{mnk} = -\alpha_m \nabla_n \varepsilon_{mnk} = -(\vec{\alpha} \times \vec{\nabla})_k \rightarrow \\ [\hat{H}, \vec{S}] &= -[\hat{H}, \vec{L}_k] \end{aligned}$$

### Полный момент

Вектор полного момента определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{L} + \vec{S} \rightarrow \\ [\hat{H}, \vec{J}] &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\vec{J}$  **сохраняется во времени**. При этом орбитальный момент и спин не сохраняются в релятивистской теории. Это важнейшее отличие релятивистского уравнения Дирака от нерелятивистского уравнения Шредингера.

Чтобы определить физический смысл этого явления нужно получить полное свободное решение уравнения Дирака. Если рассматривать электрон, через мгновение даже свободный электрон оказывается окруженным *парами электрон-позитрон*. Эти

пары будут распространяться в произвольных направлениях и иметь произвольные (в рамках разрешенных значений) орбитальный и спиновый моменты. *Спин и орбитальный момент рассматриваемого электрона будут прецессировать относительно начального положения.*

## Лекция 7. $\gamma$ -матрицы Дирака

### Представление Дирака

Рассмотрим подробнее матрицы Дирака. Ранее уже были приведены три матрицы  $\alpha_i$  и матрица  $\beta$ . В предыдущей лекции было показано, что уравнение Дирака предсказывает гиромагнитное отношение  $g = 2$  и дает намеки на нетривиальную физику, поскольку орбитальный и спиновый моменты электрона прецессируют.

Перепишем уравнение Дирака в более ковариантном виде, домножим слева и на матрицу  $\beta$  и перенесем все компоненты в левую часть:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = [-i \vec{\nabla} \vec{\alpha} + \beta m] \psi \rightarrow$$

$$i \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \vec{\nabla} \beta \vec{\alpha} \psi - \beta^2 m \psi = 0 \rightarrow$$

$$i \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \vec{\nabla} \beta \vec{\alpha} \psi - m \psi = 0.$$

Введем четырехвектор:

$$\gamma^\mu = (\beta, \vec{\gamma}), \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha}, \quad \beta \equiv \gamma^0 \rightarrow$$

$$\left( i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\nabla} \vec{\gamma} - m \right) \psi = 0,$$

$$\partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \quad \partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla} \right) \rightarrow$$

$$i \gamma^\mu \partial_\mu = i (\gamma^0 \partial_0 + \vec{\gamma} \vec{\partial}) = i (\gamma^0 \partial_0 - \gamma^i \partial_i) \rightarrow$$

$$(i \partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi = 0.$$

Перезапись не сделала уравнение ковариантным, но такой вид намекает на возможность перехода к ковариантному виду, поскольку в уравнении присутствует скалярное произведение двух инвариантных четырехвекторов. Полученный вид уравнения Дирака будет полезен в дальнейших вычислениях.

Введем дополнительное обозначение для произведения четырехвекторов. В литературе встречается 2 вида обозначений свертки четырехвекторов:

$$\partial_\mu \gamma^\mu = \begin{cases} \hat{\partial} & \text{русскаяязычная литература} \\ \eth & \text{англияязычная литература} \end{cases}$$

Оба обозначения страдают от определенных недостатков.  $\hat{\partial}$  часто путают с оператором,  $\eth$  напоминает зачеркнутое неверное обозначение.

**В лекциях будет использовано следующие обозначения:**

$$A_\mu \gamma^\mu = \hat{A} - \text{свертка четырехвектора,}$$

$$\widehat{A} - \text{оператор.}$$

Теперь все соотношения, связывающие  $\beta$  и  $\vec{\alpha}$  друг с другом, используемые для реализации перехода уравнения Дирака в уравнение Клейна-Гордона при кривдрировании, можно записать в виде одного выражения:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I_{4 \times 4},$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Действительно:

$$\mu = 0 = \nu = 0: \quad (\gamma^0)^2 + (\gamma^0)^2 = 2\beta^2 = 2I = 2g^{00}I;$$

$$\mu = \nu = i: \quad \begin{aligned} & (\gamma^i)^2 + (\gamma^i)^2 = 2(\gamma^i)^2 = 2\beta\alpha^i\beta\alpha^i = \\ & = \begin{bmatrix} \alpha^i\alpha^j + \alpha^i\alpha^j = 2\delta_{ij}I \\ \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \\ \beta^2 = 1 \end{bmatrix} = -2\beta\beta\alpha^i\alpha^i = -2I = 2g^{ii}I; \end{aligned}$$

$$\mu = i, \nu = j: \quad \begin{aligned} \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i &= \beta\alpha^i\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta\alpha^i = -\beta\beta\alpha^i\alpha^j - \beta\beta\alpha^j\alpha^i = \\ &= -(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i) = -2\delta_{ij}I = 2g^{ij}I. \end{aligned}$$

Введем еще одну специальную матрицу:

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\ \gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu &= 0, \end{aligned}$$

например,

$$\begin{aligned} \mu = 2: \quad \gamma^2\gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \\ &= (-1)^2 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^2\gamma^3 = (-1)^3 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2 = \gamma^5\gamma^2. \end{aligned}$$

Можно определить  $\gamma_5$  методом опускания индексов с помощью метрического тензора:

$$\gamma_5 = ig_{00}\gamma^0g_{11}\gamma^1g_{22}\gamma^2g_{33}\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Запишем матрицы **в представлении Дирака**:

$$\gamma^5 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим полученные соотношения и уравнение Дирака с более общей стороны. Можно реализовать преобразование по правилу:

$$\gamma^\mu \rightarrow \tilde{\gamma}^\mu = V\gamma^\mu V^+,$$

где  $V$  – унитарная матрица,  $VV^+ = I$ . Покажем, что при таком преобразовании сохраняются коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu &= V\gamma^\mu V^+V\gamma^\nu V^+ + V\gamma^\nu V^+V\gamma^\mu V^+ = V(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)V^+ = \\ &= V2g^{\mu\nu}IV^+ = 2g^{\mu\nu}I. \end{aligned}$$

Рассмотрим преобразование уравнения Дирака:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi = (i\partial_\mu \gamma^\mu - m)V V^+ \psi = (i\partial_\mu \gamma^\mu V^+ - m V^+) V \psi = 0 \rightarrow$$

Слева домножим выражение на  $V$

$$(i\partial_\mu V \gamma^\mu V^+ - m) V \psi = (i\partial_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m) \tilde{\psi} = 0 \rightarrow$$

при  $\begin{matrix} \psi \rightarrow V \psi = \tilde{\psi} \\ \gamma^\mu \rightarrow V \gamma^\mu V^+ = \tilde{\gamma}^\mu \end{matrix}$   $(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi = 0 \rightarrow (i\partial_\mu \tilde{\gamma}^\mu - m)\tilde{\psi} = 0.$

### Представление $\gamma$ -матриц Дирака

Итак, можно выбрать любое удобное преобразование  $V$ , от его явного вида конечный результат зависеть не будет.

Выделяют 3 вида матриц, которые называются **представлениями  $\gamma$ -матриц**:

1) Представление Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Представление Вейля:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_\pm^\mu = (1, \pm \vec{\sigma}).$$

3) Спинорное представление:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_+^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим переход из представления Дирака в представление Вейля. Пусть  $\gamma_D^\mu$ -матрицы в представлении Дирака,  $\gamma_W^\mu$  – в представлении Вейля:

$$\gamma_W^\mu = V \gamma_D^\mu V^+.$$

Например:

$$\begin{aligned} \gamma_W^0 &= V \gamma_D^0 V^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрицы Дирака – важные объекты, с которыми нужно научиться работать. В первую очередь надо уметь вычислять следы от  $\gamma$ -матриц.

### Следы от $\gamma$ -матриц

- $Tr \gamma^\mu = 0$

$$Tr \gamma^0 = Tr \beta = 0,$$

$$Tr \gamma^i = Tr(\beta \alpha^i) = -Tr(\alpha^i \beta), \quad \text{т.к. } Tr(\beta \alpha^i) \equiv Tr(\alpha^i \beta) \rightarrow Tr \gamma^i = 0.$$

- $Tr \gamma^5 = 0$

$$Tr \gamma^5 = Tr \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad Tr (V\gamma^5 V^+) = Tr(V^+ V\gamma^5) = 0.$$

$$Tr[i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] \rightarrow iTr[iV\gamma^0 V^+ V\gamma^1 V^+ V\gamma^2 V^+ V\gamma^3 V^+] = Tr[Vi\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 V^+] =$$

$$= Tr (V\gamma^5 V^+).$$

- $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = Tr[\gamma^\nu \gamma^\mu] = \frac{1}{2}(Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] + Tr[\gamma^\nu \gamma^\mu]) = \frac{1}{2}Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) =$$

$$= \frac{1}{2}2g^{\mu\nu} Tr I = 4g^{\mu\nu}.$$

- $Tr[\hat{p}\hat{q}] = 4(pq)$

$$Tr[\hat{p}\hat{q}] = Tr[p_\mu \gamma^\mu q_\nu \gamma^\nu] = p_\mu q_\nu Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} p_\mu q_\nu = 4(pq).$$

- $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha] = 0$

$$(\gamma^5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha] = Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^5] = Tr[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5] = (-1)^3 Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^5] =$$

$$= -Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha] \rightarrow$$

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha] = 0.$$

- $Tr[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0$

$$Tr[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = Tr[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma^5 \gamma^5] =$$

$$= (-1)^{2n+1} Tr[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0.$$

Так, След от произведения нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю.

- $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0$

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3],$$

$$\mu = \nu = 0: \quad Tr[\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5] = 0,$$

$$\mu = \nu = 1: \quad Tr[\gamma^1 \gamma^1 \gamma^5] = 0,$$

$$\mu = 0, \nu = 1: \quad Tr[\gamma^0 \gamma^1 i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] = i(-1)Tr[\gamma^0 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] = iTr[\gamma^2 \gamma^3] = 0.$$

- $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha})$

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = Tr[(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 2g^{\mu\nu} Tr[\gamma^\alpha \gamma^\beta] - Tr[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta] =$$

$$= 8g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - Tr[\gamma^\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\alpha \gamma^\mu) \gamma^\beta] =$$

$$= 8g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - 2g^{\mu\alpha} Tr[\gamma^\nu \gamma^\beta] + Tr[\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta] =$$

$$\begin{aligned}
 &= 8g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - 8g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + Tr[\gamma^\nu\gamma^\alpha(2g^{\mu\beta} - \gamma^\beta\gamma^\mu)] = \\
 &= 8g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - 8g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + 8g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - Tr[\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu] = \\
 &= 8g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - 8g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + 8g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta] \rightarrow \\
 &Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta] = 4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}).
 \end{aligned}$$

Примененный метод подходит для любого количества четных матриц. Такой редуцированный метод также используется в компьютерном моделировании.

При вычислении следа от произведения четного числа матриц всегда будет появляться множитель 4. Все индексы поочередно будут спариваться друг с другом. Для определения знаков существует мнемоническое правило: если пары матриц стоят рядом друг с другом, то в конечном выражении появятся со знаком «+», иначе – со знаком «-».

- $Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5] = -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
 &\mu = 0, \nu = 1, \alpha = 2, \beta = 3 \rightarrow \\
 &(-i)Tr[i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5] = -4i, \quad \varepsilon^{0123} = 1.
 \end{aligned}$$

### Свертки с $\gamma$ -матрицами

Рассмотрим еще одну полезную технику, которой будем активно пользоваться. При вычислении довольно сложных процессов, таких как комптоновское рассеяние вычисляемые следы будут состоять из большого числа  $\gamma$ -матриц, произведение которых нужно уметь сводить к произведению меньшего числа  $\gamma$ -матриц. Эта техника называется *сверткой с  $\gamma$ -матрицами*.

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I \rightarrow$$

$$A_\mu\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu A_\mu = 2g^{\mu\nu}A_\mu I \rightarrow \hat{A}\gamma^\nu + \gamma^\nu\hat{A} = 2A^\nu I \rightarrow$$

$$\hat{A}\gamma^\nu R_{\gamma^\nu} + \gamma^\nu\hat{A}R_{\gamma^\nu} = 2R_{\gamma^\nu}A^\nu = 2R\hat{A}.$$

1)  $R = I \rightarrow$

$$\hat{A}\gamma^\nu\gamma_\nu + \gamma^\nu\hat{A}\gamma_\nu = 2\hat{A},$$

т. к.  $\gamma^\nu\gamma_\nu = (\gamma^0)^2 - (\vec{\gamma})^2 = 4I \rightarrow$

$$4\hat{A} + \gamma^\nu\hat{A}\gamma_\nu = 2\hat{A} \rightarrow \gamma^\nu\hat{A}\gamma_\nu = -2\hat{A}.$$

2)  $R = \hat{B} \rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \hat{A}\gamma^\nu\hat{B}\gamma_\nu + \gamma^\nu\hat{A}\hat{B}\gamma_\nu &= 2\hat{B}\hat{A} \rightarrow \\
 \gamma^\nu\hat{A}\hat{B}\gamma_\nu &= 2\hat{B}\hat{A} + 2\hat{A}\hat{B} = 2(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}), \\
 (\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)A_\mu B_\nu &= 2g^{\mu\nu}A_\mu B_\nu I = 2(AB)I \rightarrow \\
 \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} &= 2(AB)I \rightarrow \\
 \gamma^\nu\hat{A}\hat{B}\gamma_\nu &= 4(AB)I.
 \end{aligned}$$

$$3) R = \hat{B}\hat{C} \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \hat{A}\gamma^\nu\hat{B}\hat{C}\gamma_\nu + \gamma^\nu\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_\nu &= 2\hat{B}\hat{C}\hat{A} \rightarrow \\
 \gamma^\nu\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_\nu &= 2\hat{B}\hat{C}\hat{A} - 4(BC)\hat{A} = 2(\hat{B}\hat{C} - (BC))\hat{A} = -2\hat{C}\hat{B}\hat{A}.
 \end{aligned}$$

## Лекция 8. Решение свободного уравнения Дирака

### Решение свободного уравнения Дирака

Рассмотрим сводное уравнение Дирака:

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0.$$

Будем искать его решение в виде:

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{e^{-ipx} u(\vec{p})}{\sqrt{2p_0V}}.$$

$$i\hat{\partial}e^{-ipx} = i\gamma^\mu \partial_\mu e^{-ipx} = i\gamma^\mu (\partial_\mu(-ipx)) e^{-ipx}$$

$$\partial_\mu(px) = \partial_\mu(p_\alpha x^\alpha) = p_\alpha \partial_\mu x^\alpha = p_\mu \rightarrow$$

$$i\hat{\partial}e^{-ipx} = i\gamma^\mu (\partial_\mu(-ipx)) e^{-ipx} = \gamma^\mu p_\mu e^{-ipx} = \hat{p}e^{-ipx} \rightarrow$$

$$\frac{(\hat{p} - m)e^{-ipx} u(\vec{p})}{\sqrt{2E_p V}} = 0,$$

где  $E_p = p_0$ , тогда

$$(\hat{p} - m)u(\vec{p}) = 0 \quad \text{или} \quad \hat{p}u(\vec{p}) = mu(\vec{p}).$$

Найдем решения этого уравнения.

$$\hat{p} = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \vec{p}$$

В представлении Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & -p_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{p}\vec{\sigma} \\ -\vec{p}\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$(\hat{p} - m)u(\vec{p}) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} p_0 - m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p_0 - m \end{pmatrix} u = 0,$$

$$u = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} p_0 - m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p_0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} (p_0 - m)\chi - \vec{p}\vec{\sigma}\eta = 0 \\ \vec{p}\vec{\sigma}\chi - (p_0 + m)\eta = 0 \end{cases} \rightarrow \eta = \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{(p_0 + m)}\chi \rightarrow$$

$$(p_0 - m)\chi - \frac{(\vec{p}\vec{\sigma})^2}{(p_0 + m)}\chi = 0 \rightarrow [(p_0 - m)(p_0 + m) - (\vec{p}\vec{\sigma})^2]\chi = 0 \rightarrow$$

$$(p_0^2 - m^2 - \vec{p}^2)\chi = 0 \rightarrow p_0^2 = m^2 + \vec{p}^2 \quad \forall \chi \rightarrow$$

$$p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \text{ пусть } p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = E_p.$$

Итак, было получено решение  $\psi$  с положительным знаком энергии:

$$\psi^{(+)}(t, \vec{x}) = \frac{e^{-i(E_p t - \vec{p}\vec{x})}}{\sqrt{2E_p V}} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{(p_0 + m)}\chi \end{pmatrix}.$$

Потребуем следующее:

$$\int d^3x \psi^+(t, \vec{x})\psi(t, \vec{x}) = 1$$

$$\int d^3x \frac{u^+(\vec{p})u(\vec{p})}{2E_p V} = \frac{u^+(\vec{p})u(\vec{p})}{2E_p} = 1 \rightarrow$$

$$u^+(\vec{p})u(\vec{p}) = 2E_p.$$

Домножим спинор на нормировочный множитель N:

$$u = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} N.$$

Определим N исходя из нормировки:

$$u^+u = |N|^2 \left( \chi^+, \chi^+ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E_p + m} \right) \begin{pmatrix} \frac{\chi}{E_p + m} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E_p + m}\chi \end{pmatrix} = |N|^2 \left( \chi^+\chi + \chi^+ \frac{(\vec{p}\vec{\sigma})^2}{(E_p + m)^2}\chi \right) =$$

$$= |N|^2 \chi^+\chi \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{(E_p + m)^2} \right) = 2E_p \rightarrow$$

$$|N|^2 \chi^+\chi \left( \frac{E_p^2 + 2E_p m + m^2 + \vec{p}^2}{(E_p + m)^2} \right) = |N|^2 \chi^+\chi \frac{2E_p(E_p + m)}{(E_p + m)^2} = 2E_p.$$

Нормировка, характерная для спиноров:  $\chi^+\chi = 1$ , тогда:

$$|N|^2 = E_p + m \rightarrow N = \sqrt{E_p + m}.$$

$$u(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E_p + m}\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{\sqrt{E_p + m}}\chi \end{pmatrix},$$

$\vec{p} = |\vec{p}|\hat{n}_p = \sqrt{E_p^2 - m^2}\hat{n}_p$ , где  $\hat{n}_p$  – единичный вектор. Тогда:

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m}\chi \\ \sqrt{E_p - m}\hat{n}_p\vec{\sigma}\chi \end{pmatrix}.$$

Полученное выражение можно упростить, введя **спиральность**. Потребуем, чтобы спинор  $\chi$  был собственным состоянием оператора спиральности:

$$\hat{n}_p \vec{\sigma} \chi_r = r \chi_r, \quad r = \pm 1,$$

где  $\hat{n}_p \vec{\sigma}$  – оператор спиральности. Это означает, что удвоенная проекция спина направлена по импульсу или против. Тогда можем записать:

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \chi_r \\ \sqrt{E_p - m} r \chi_r \end{pmatrix}$$

В нерелятивистском пределе нижняя компонента обращается в малую величину. В ультрарелятивистском случае, когда скорости частиц близки к скорости света, обе компоненты равноправны, так как массами можно пренебречь.

Таким образом, запишем решение с положительной энергией:

$$\psi_r^{(+)}(\vec{p}) = \frac{e^{-i(E_p t - \vec{p} \vec{x})}}{\sqrt{2E_p V}} \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \chi_r \\ \sqrt{E_p - m} r \chi_r \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь решение с отрицательной энергией. Решение уравнения

$$(i\hat{d} - m)\psi = 0$$

Будем искать в виде:

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{e^{+i(E_p t + \vec{p} \vec{x})} v(\vec{p})}{\sqrt{2E_p V}} \rightarrow \frac{e^{+i(px)} v(\vec{p})}{\sqrt{2E_p V}},$$

где  $E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ,  $px = E_p t - \vec{p} \vec{x}$ . Тогда:

$$i\hat{d} e^{+i(px)} = -\hat{p} e^{+i(px)} \rightarrow (\hat{p} + m)v(p) = 0,$$

$$\hat{p} = \gamma^0 E_p - \vec{\gamma} \vec{p} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{p} \vec{\sigma} \\ -\vec{p} \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & -\vec{\sigma} \vec{p} \\ \vec{p} \vec{\sigma} & -E_p \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} \eta \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} E_p + m & -\vec{\sigma} \vec{p} \\ \vec{\sigma} \vec{p} & -E_p + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (E_p + m)\eta - \vec{\sigma} \vec{p} \chi = 0 \\ \vec{\sigma} \vec{p} \eta - (E_p - m)\chi = 0 \end{cases} \rightarrow \eta = \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E_p + m} \chi \rightarrow$$

$$\left[ \frac{(\vec{\sigma} \vec{p})^2}{E_p + m} - (E_p - m) \right] \chi = 0 \rightarrow [\vec{p}^2 - (E_p^2 - m^2)] \chi = 0$$

$$\vec{p}^2 - (E_p^2 - m^2) \equiv 0 \rightarrow \forall \chi.$$

Запишем

$$v(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E_p + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix},$$

Введем отрицательную нормировку:

$$\int d^3x |\psi|^2 = 1 \rightarrow v^+ v = 2E_p \rightarrow$$
$$v(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p - m} \hat{n}_p \vec{\sigma} \chi \\ \sqrt{E_p + m} \chi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{E_p - m} r \chi_r \\ \sqrt{E_p + m} \chi_r \end{pmatrix}.$$

Итак, были найдены **2 частных решения уравнения Дирака**:

$$\psi^{(+)} = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2E_p V}} \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \chi_r \\ \sqrt{E_p^2 - m^2} r \chi_r \end{pmatrix} = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2E_p V}} u_r(\vec{p}),$$
$$\psi^{(-)} = \frac{e^{+ipx}}{\sqrt{2E_p V}} \begin{pmatrix} \sqrt{E_p - m} r \chi_r \\ \sqrt{E_p + m} \chi_r \end{pmatrix} = \frac{e^{+ipx}}{\sqrt{2E_p V}} v_r(\vec{p}).$$

Запишем **общее решение свободного уравнения Дирака**:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_r(\vec{p}) e^{-ipx} u_r(\vec{p}) + b_r^*(\vec{p}) e^{+ipx} v_r(\vec{p})],$$

где  $a_r(\vec{p}), b_r^*(\vec{p})$  – произвольные функции.

## Лекция 9. Античастицы в уравнении Дирака

### Античастицы в уравнении Дирака

В прошлой лекции было получено общее решение свободного уравнения Дирака в виде интеграла по всем возможным импульсам частиц:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_s(\vec{p})e^{-ipx}u_s(\vec{p}) + b_s^*(\vec{p})e^{+ipx}v_s(\vec{p})],$$

удовлетворяющее уравнениям

$$(\hat{p} - m)u(\vec{p}) = 0, \quad (\hat{p} + m)v(\vec{p}) = 0 \rightarrow \\ (i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0.$$

Рассмотрим частицы с разными зарядами в электромагнитном поле.

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu.$$

В этом случае уравнение Дирака для частицы с зарядом  $q$ :

$$(i\hat{\partial} - q\hat{A} - m)\psi(x) = 0.$$

Для частицы с противоположным зарядом  $-q$ :

$$(i\hat{\partial} + q\hat{A} - m)\psi_c(x) = 0.$$

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - qA_\mu\gamma^\mu - m)\lambda\psi = 0 \rightarrow$$

при комплексном сопряжении:

$$(-i\partial_\mu(\gamma^\mu)^* - qA_\mu(\gamma^\mu)^* - m)\psi^* = 0.$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0 \rightarrow \bar{\psi}\gamma^0 = \psi^+(\gamma^0)^2 = \psi^+,$$

$$(\bar{\psi}\gamma^0)^T = \gamma^0(\bar{\psi})^T = \psi^* \rightarrow$$

$$\gamma^0(-i\partial_\mu(\gamma^\mu)^* - qA_\mu(\gamma^\mu)^* - m)\gamma^0(\bar{\psi})^T = 0 \rightarrow \\ \gamma^0(-i\partial_\mu(\gamma^\mu)^*\gamma^0\gamma^0 - qA_\mu(\gamma^\mu)^*\gamma^0\gamma^0 - m)\gamma^0(\bar{\psi})^T = \\ = (-i\partial_\mu\gamma^0(\gamma^\mu)^*\gamma^0 - qA_\mu\gamma^0(\gamma^\mu)^*\gamma^0 - m)(\bar{\psi})^T = 0,$$

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^+\gamma^0 = \gamma^\mu \rightarrow (\gamma^0(\gamma^\mu)^+\gamma^0)^T = (\gamma^\mu)^T \rightarrow \gamma^0(\gamma^\mu)^*\gamma^0 = (\gamma^\mu)^T \rightarrow$$

$$(-i\partial_\mu(\gamma^\mu)^T - qA_\mu(\gamma^\mu)^T - m)(\bar{\psi})^T = 0.$$

Предположим, что существует некоторая матрица  $C$ , такая что:

$$C^{-1}C = C^+C = I \rightarrow$$

$$(-i\partial_\mu(\gamma^\mu)^T - qA_\mu(\gamma^\mu)^T - m)C^+C(\bar{\psi})^T = 0 \rightarrow$$

$$C(-i\partial_\mu(\gamma^\mu)^T - qA_\mu(\gamma^\mu)^T - m)C^+C(\bar{\psi})^T = 0 \rightarrow$$

Пусть  $C(\gamma^\mu)^T C^+ = -\gamma^\mu$ , тогда:

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu + qA_\mu\gamma^\mu - m)\psi_c = 0, \text{ где } \psi_c = C(\bar{\psi})^T.$$

Итак, мы пришли к уравнению с зарядом с противоположным знаком.

Выясним, существует ли матрица  $C$ , обладающая всеми необходимыми свойствами. Такая матрица существует и имеет вид:

$$C = i\gamma^2\gamma^0.$$

Проверим:

$$\begin{aligned} C^+ &= (i\gamma^2\gamma^0)^+ = -i(\gamma^0)^+(\gamma^2)^+, \\ \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (\gamma^i)^+ = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i^+ \\ \sigma_i^+ & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^i \rightarrow \\ C^+ &= -i\gamma^0(-\gamma^2) = i\gamma^0\gamma^2. \end{aligned}$$

$$C^+C = i\gamma^0\gamma^2i\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0(\gamma^2)^2\gamma^0 = 1.$$

$C(\gamma^\mu)^TC^+ = -\gamma^\mu$  проверим для всех четырех  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \mu = 0: C(\gamma^0)^TC^+ &= i\gamma^2\gamma^0\gamma^0i\gamma^0\gamma^2 = \\ &= -\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = +\gamma^2\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu = 1: C(\gamma^1)^TC^+ &= i\gamma^2\gamma^0(\gamma^1)^Ti\gamma^0\gamma^2, \\ (\gamma^1)^T &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1^T \\ \sigma_1^T & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^1, \quad \text{т.к. } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ C(\gamma^1)^TC^+ &= \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^1(\gamma^0)^2\gamma^2 = \gamma^1\gamma^2\gamma^2 = -\gamma^1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu = 3: C(\gamma^3)^TC^+ &= i\gamma^2\gamma^0(\gamma^3)^Ti\gamma^0\gamma^2 \\ (\gamma^3)^T &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3^T \\ \sigma_3^T & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^3, \quad \text{т.к. } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ C(\gamma^3)^TC^+ &= -\gamma^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu = 2: C(\gamma^2)^TC^+ &= i\gamma^2\gamma^0(\gamma^2)^Ti\gamma^0\gamma^2 \\ (\gamma^2)^T &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2^T \\ \sigma_2^T & 0 \end{pmatrix} = \gamma^2, \quad \text{т.к. } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ C(\gamma^2)^TC^+ &= -\gamma^2(-\gamma^2\gamma^0)\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^2. \end{aligned}$$

Итак, была найдена связь спинора  $\bar{\psi}$  частицы с зарядом  $q$  со спинором  $\psi_c$  частицы с зарядом  $-q$ :

$$\psi_c = C(\bar{\psi})^T.$$

Так, если есть решение для частицы с одним зарядом, то можно сразу определить решение для частицы с противоположным зарядом.

$$\begin{aligned}\psi_c &= C(\bar{\psi})^T = C(\psi^+ \gamma^0)^T = C\gamma^0 \psi^* = i\gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 \psi^* = i\gamma^2 \psi^*, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow i\gamma^2 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Вернемся к частному случаю:

$$\begin{aligned}E > 0: \psi_r^{(+)}(x, p) &= \frac{e^{-ipx} u_r(\vec{p})}{\sqrt{2E_p V}}, \\ E < 0: \psi_r^{(-)}(x, p) &= \frac{e^{+ipx} v_r(\vec{p})}{\sqrt{2E_p V}}.\end{aligned}$$

Когда частица помещена в электромагнитное поле, решение уравнения Дирака становится чувствительным к знаку заряда этой частицы. Не является ли решение с отрицательной энергией решением для античастицы? Проверим.

$$\begin{aligned}i\gamma^2 (\psi_r^{(+)}(x, p))^* &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{e^{+ipx} u_r^*(\vec{p})}{\sqrt{2E_p V}}, \\ u_r(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \chi_r(\vec{p}) \\ \sqrt{E-m} r \chi_r(\vec{p}) \end{pmatrix} \rightarrow u_r^*(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \chi_r^*(\vec{p}) \\ \sqrt{E-m} r \chi_r^*(\vec{p}) \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \chi_r^*(\vec{p}) \\ \sqrt{E-m} r \chi_r^*(\vec{p}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{E-m} r i \sigma_2 \chi_r^* \\ \sqrt{E+m} (-i\sigma_2) \chi_r^* \end{pmatrix}. \\ v_r(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{E-m} r \chi_r(\vec{p}) \\ \sqrt{E+m} \chi_r(\vec{p}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, пусть импульс направлен вдоль оси z:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= (0, 0, p) \rightarrow \\ \chi_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 \chi_+ &= +\chi_+, \quad \sigma_3 \chi_- = -\chi_-. \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\chi_- \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\chi_+ \end{cases} \rightarrow i\sigma_2 \chi_r^* = -r \chi_{-r} \rightarrow \begin{cases} r = +1 \rightarrow -\chi_- \\ r = -1 \rightarrow +\chi_+ \end{cases}.\end{aligned}$$

Так, получаем спинор следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \chi_r^*(\vec{p}) \\ \sqrt{E-m} r \chi_r^*(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-m} r i \sigma_2 \chi_r^* \\ \sqrt{E+m} (-i\sigma_2) \chi_r^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-m} r (-r) \chi_{-r} \\ \sqrt{E+m} (+r) \chi_{-r} \end{pmatrix} =$$

$$= r \begin{pmatrix} \sqrt{E-m} (-r) \chi_{-r} \\ \sqrt{E+m} \chi_{-r} \end{pmatrix}.$$

С точностью до множителя  $r$  получаем решение для частицы с отрицательной энергией. При записи экспоненты  $e^{+ipx}$  было изменено направление импульса, поэтому между решением с положительной энергией и решением с отрицательной энергией существует фундаментальная связь:

$$u(-E, -\vec{p}, -r) = v(E, \vec{p}, r).$$

**Частица с противоположными энергией, направлением импульса, и направлением спина – античастица.** Итак, мы получили физическое объяснение решения с отрицательной энергией.

Еще раз выпишем общее решение:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_s(\vec{p}) e^{-ipx} u_s(\vec{p}) + b_s^*(\vec{p}) e^{+ipx} v_s(\vec{p})],$$

Часть  $a_s(\vec{p}) e^{-ipx} u_s(\vec{p})$  соответствует частице,  $b_s^*(\vec{p}) e^{+ipx} v_s(\vec{p})$  античастице.

Однако остался вопрос, над которым стоит еще подумать. Этот вопрос приведет к переосмыслению уравнения Дирака и всей релятивистской квантовой механики. При построении уравнения Дирака были использованы аналогии с уравнением Шредингера, где  $\psi(x)$  – волновая функция, а  $|\psi(x)|^2$  – вероятность найти частицу в какой-то точке. Общее решение уравнения Дирака одновременно описывает и частицу, и античастицу. Поэтому появляется серьезный вопрос об одночастичной интерпретации волновой функции. Что такое  $|\psi(x)|^2$  для общего решения уравнения Дирака.

### Релятивистский «тремор»

С этой темой тесно связан следующий вопрос: **релятивистский «тремор»**. При получении уравнения Дирака было получено также уравнение непрерывности, имеющее вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \vec{\nabla} \vec{j} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int dV |\psi|^2 = 0,$$

$|\psi|^2$  – сохраняющаяся величина.

Плотность тока задается выражением:

$$\vec{j} = \psi^+ \vec{\alpha} \psi, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

При рассмотрении уравнения Клейна-Гордона и уравнения Шредингера с плоскими волнами в качестве решения плотность тока – это скорость частицы, в случае волнового пакета – средняя скорость. Тогда  $\vec{\alpha}$  – **оператор 3-скорости**. Однако у матриц  $\alpha_i$  собственно значения  $\pm 1$ ,  $\alpha_i^2 = 1$ . В естественной системе единиц скорость света  $c = 1$ . Значит  $\alpha_i^2 = 1$  отвечает собственному значению, равному скорости света.

Это явление иногда неверно интерпретируют так, как будто частица, например, электрон, описываемая уравнением Дирака движется со скоростью света по крайней мере часть своего пути.

$$\frac{u^+ \vec{\alpha} u}{2E} = \frac{\vec{p}}{E} = \vec{v},$$

$$\frac{v^+ \vec{\alpha} v}{2E} = \frac{\vec{p}}{E} = \vec{v}.$$

Так, если взять среднее значение оператора скорости по состояниям с определенной энергией, то можно увидеть, что они описывают обычную частицу со средней скоростью  $v$ .

Теперь рассмотрим самое общее решение и вычислим ток:

$$\vec{j} = \langle \vec{v} \rangle_+ + \langle \vec{v} \rangle_- + \text{тремор}(t).$$

Выпишем общее решение и комплексно сопряженное:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_s(\vec{p}) e^{-ipx} u_s(\vec{p}) + b_s^*(\vec{p}) e^{+ipx} v_s(\vec{p})],$$

$$\psi^+(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} [a_r^*(\vec{k}) e^{+ikx} u_r^+(\vec{k}) + b_r(\vec{k}) e^{-ikx} v_r^+(\vec{k})].$$

$$\vec{j} = \psi^+ \vec{\alpha} \psi \rightarrow$$

$$\vec{j} = \int d^3 x \vec{j}(t, \vec{x}) =$$

$$= \int d^3 x \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_r^*(\vec{k}) e^{+ikx} u_r^+(\vec{k})$$

$$+ b_r(\vec{k}) e^{-ikx} v_r^+(\vec{k})] \vec{\alpha} [a_s(\vec{p}) e^{-ipx} u_s(\vec{p}) + b_s^*(\vec{p}) e^{+ipx} v_s(\vec{p})].$$

$$\int d^3 x e^{+ikx - ipx} = \int d^3 x e^{+ix(k-p)} = \int d^3 x e^{it(E_k - E_p) - i\vec{x}(\vec{k} - \vec{p})} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) e^{it(E_k - E_p)}$$

$$= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}), \text{ т. к.}$$

$$E_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}, \quad E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \rightarrow$$

$$e^{it(E_k - E_p)} = 1.$$

$$\int d^3 x e^{-ikx - ipx} = \int d^3 x e^{-ix(k+p)} = \int d^3 x e^{-it(E_k + E_p) + i\vec{x}(\vec{k} + \vec{p})}$$

$$= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} + \vec{p}) e^{-it(E_k + E_p)} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} + \vec{p}) e^{-i2E_p t}.$$

$$\begin{aligned}
 \vec{J} &= \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_k 2E_p}} \left[ a_r^*(\vec{k}) a_s(\vec{p}) u_r^+(\vec{k}) \vec{\alpha} u_s(\vec{p}) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \right. \\
 &\quad + b_r(\vec{k}) b_s^*(\vec{p}) v_r^+(\vec{k}) \vec{\alpha} v_s(\vec{p}) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \\
 &\quad + a_r^*(\vec{k}) b_s^*(\vec{p}) u_r^+(\vec{k}) \vec{\alpha} v_s(\vec{p}) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} + \vec{p}) e^{-i2E_p t} \\
 &\quad \left. + b_r(\vec{k}) a_s(\vec{p}) v_r^+(\vec{k}) \vec{\alpha} u_s(\vec{p}) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} + \vec{p}) e^{-i2E_p t} \right] = \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[ a_r^*(\vec{p}) a_s(\vec{p}) u_r^+(\vec{p}) \vec{\alpha} u_s(\vec{p}) + b_r(\vec{p}) b_s^*(\vec{p}) v_r^+(\vec{p}) \vec{\alpha} v_s(\vec{p}) \right. \\
 &\quad + a_r^*(-\vec{p}) b_s^*(\vec{p}) u_r^+(-\vec{p}) \vec{\alpha} v_s(\vec{p}) e^{-i2E_p t} \\
 &\quad \left. + b_r(-\vec{p}) a_s(\vec{p}) v_r^+(-\vec{p}) \vec{\alpha} u_s(\vec{p}) e^{-i2E_p t} \right], \\
 &\quad u_r^+(\vec{p}) \vec{\alpha} u_s(\vec{p}) = v_r^+(\vec{p}) \vec{\alpha} v_s(\vec{p}) = 2\vec{p} \delta_{rs}, \\
 &\quad u_r^+(-\vec{p}) \vec{\alpha} v_s(\vec{p}) = v_r^+(-\vec{p}) \vec{\alpha} u_s(\vec{p}) = 2E_p \delta_{rs} \vec{n}_p \rightarrow \\
 \vec{J} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[ |a_s(\vec{p})|^2 \vec{v}_p + |b_s(\vec{p})|^2 \vec{v}_p + 2\text{Re}\{a_r^*(-\vec{p}) b_r^*(\vec{p}) e^{+i2E_p t} \vec{n}_p\} \right]
 \end{aligned}$$

Первые 2 слагаемых – скорости волнового пакета частицы и античастицы. Третье слагаемое зависит от времени, которое занулится только в случае отсутствия одной из компонент, например  $a_r^*(-\vec{p})$ . В общем случае такое слагаемое всегда присутствует.

Рассмотрим решение, описывающее состояние локализованного, например, фермиона, тогда увидим, что при попытке локализовать состояние на размерах порядка комптоновской длины волны частицы, то  $a$  и  $b$  становятся одного порядка. Для нелокализованного состояния можно уменьшить  $b$ , минимизировав «тремор».

Итак, в случае уравнения Дирака классическая траектория постоянно сбивается, амплитуда этого дрожания порядка комптоновской длины волны, если частица изначально локализована в таком состоянии. Частота колебаний определяется энергиями:

$$\text{частота} \geq (2m)^{-1}.$$

Для электрона  $\sim \frac{10^{21} \text{рад}}{\text{сек}}$ . Само по себе уравнение Дирака в рамках релятивистской квантовой механики не объясняет причину колебаний траектории. Объяснение появляется только в рамках квантовой теории поля: электрон постоянно рождает пары частица-античастица. При попытке определить положение электрона на уровне ниже комптоновской длины волны нельзя отличить исходный электрон от виртуального электрона или позитрона, отлетающих на расстояние комптоновской длины волны.

## Лекция 10. Вычисление энергии атома водорода

### Вычисление спектра энергий в атоме водорода

Вычисление спектра энергий в атоме водорода – первый и самый главный пример, на котором проверялась теория Дирака. Несмотря на то, что теория дает практически блестящее описание атома водорода, в нем будет серьезный изъян – отсутствие лэмбовского сдвига.

Свободное уравнение Дирака имеет вид:

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0.$$

Сделаем замену, включим в уравнение взаимодействие частицы с электромагнитным полем.

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu.$$

Частицу, описываемую уравнением Дирака, будем называть электроном,  $q_{e^-} = -e$ , тогда:

$$i\partial_\mu - qA_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu.$$

Поместим электрон в электромагнитное поле, создаваемое атомным ядром с зарядом  $Z$ , находящимся в начале координат:

$$A_\mu = \left( \frac{Ze}{4\pi r}, \vec{0} \right).$$

Будем рассматривать уравнение Дирака в виде:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \hat{H}\psi, & \hat{H} &= \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m \rightarrow \\ i\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{Ze^2}{4\pi}, & \alpha &= \frac{e^2}{4\pi} \rightarrow \\ i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left( \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m - \frac{Z\alpha}{r} \right) \psi. \end{aligned}$$

Для решения этого уравнения будем использовать симметрии.

### Симметрии

Симметрии всегда связаны с законами сохранения. В свободном уравнении Дирака полный момент коммутирует со свободным гамильтонианом:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad [\vec{L}, \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m] = 0.$$

Полный момент сохраняется, значит можно выбрать спинор Дирака таким образом, чтобы он был и собственным состоянием гамильтониана, и собственным состоянием оператора полного момента.

Самостоятельно предлагается проверить сохранение полного момента для уравнения, учитывающего взаимодействие с электромагнитным полем:

$$\left[ \vec{L}, \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m - \frac{Z\alpha}{r} \right] = 0.$$

Это означает, что  $\psi$  – собственная функция  $\hat{H}, \hat{J}, \hat{J}^2, \hat{J}_z$ .

Теперь вернемся к уравнению Дирака. Чтобы задача имела отношение к атому водорода, необходимо рассмотреть *стационарную задачу* – задачу на собственные функции оператора энергии:

$$\left( \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m - \frac{Z\alpha}{r} \right) \psi = E\psi.$$

В представлении Дирака:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

$$[\vec{L}, \vec{S}] \neq 0, \quad [\vec{L}, \hat{H}] \neq 0$$

Потребуем:  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ , где  $\varphi, \chi$  – двухкомпонентные спиноры Паули.

Потенциальная энергия взаимодействия инвариантна относительно инверсии пространства:

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x}: V(r) \rightarrow V(r) = \frac{Z\alpha}{r}.$$

С этим преобразованием связано квантовое число – пространственная четность. Поэтому если гамильтониан обладает P-четностью, то и волновые функции можно выбрать такими, чтобы они были собственными функциями оператора пространственной четности:

$$\psi(\vec{x}) \rightarrow \psi'(-\vec{x}) = \pm\psi(\vec{x}).$$

Для этого между паулевскими спинорами  $\varphi, \chi$  должна существовать связь. В отличие от спинора Дирака паулевские спиноры могут обладать определенными орбитальным моментом и спином, но у  $\varphi$  и  $\chi$  они будут разными.

Запишем спинор Дирака с учетом симметрий:

$$\psi_{jm} = \begin{pmatrix} \frac{iG_{lj}}{r} \varphi_{jm}^l(\theta, \varphi) \\ \frac{F_{lj}}{r} \frac{\vec{\sigma}\vec{r}}{r} \varphi_{jm}^l(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

### Решение уравнения

Подставим полученный спинор в уравнение Дирака.

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} m - \frac{Z\alpha}{r} & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -m - \frac{Z\alpha}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(m - \frac{Z\alpha}{r}\right)\varphi + \vec{\sigma}\vec{p}\chi = E\varphi \\ \vec{\sigma}\vec{p}\varphi - \left(m + \frac{Z\alpha}{r}\right)\chi = E\chi \end{cases}.$$

Для решения полученной системы уравнений будем использовать следующее:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) &= \vec{a}\vec{b} + i(\vec{a} \times \vec{b})\vec{\sigma}, \\ \sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \end{aligned}$$

Запишем тождество:

$$\vec{\sigma}\vec{p} = \frac{(\vec{\sigma}\vec{r})(\vec{\sigma}\vec{r})}{r^2}(\vec{\sigma}\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma}\vec{r}}{r^2}(\vec{r}\vec{p} + i(\vec{r} \times \vec{p})\vec{\sigma}) = \frac{\vec{\sigma}\vec{r}}{r^2} \left( -ir \frac{\partial}{\partial r} + i\vec{L}\vec{\sigma} \right).$$

$\varphi$  и  $\chi$  выбираем так, что они являются собственными состояниями орбитального момента, полного момента и его проекции на ось  $z$ . Значит, имеет смысл выражение:

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} I\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & I\vec{\sigma} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_i \end{pmatrix} &= (\vec{L} + \vec{S})^2 = \vec{L}^2 + 2\vec{L}\vec{S} + \vec{S}^2 \\ &= \vec{L}^2 + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} I\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & I\vec{\sigma} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_i \end{pmatrix} = \\ &= \vec{L}^2 + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} I\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & I\vec{\sigma} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \vec{L}^2 + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} I\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & I\vec{\sigma} \end{pmatrix} + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \varphi_{jm}^l &= j(j+1)\varphi_{jm}^l \rightarrow \\ \vec{L}^2 \varphi_{jm}^l &= l(l+1)\varphi_{jm}^l \end{aligned}$$

$$(\vec{L}\vec{\sigma})\varphi_{jm}^l = \left( \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \frac{3}{4} \right) \varphi_{jm}^l = \left( j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \varphi_{jm}^l.$$

Так, оператор  $(\vec{L}\vec{\sigma})$  возвращает то же состояние  $\varphi_{jm}^l$ , умноженное на некоторую константу, то есть состояние  $\varphi_{jm}^l$  – собственное состояние оператора  $(\vec{L}\vec{\sigma})$ . Собственное значение удобно записать в виде:

$$\left( j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \varphi_{jm}^l = -(1 + \kappa)\varphi_{jm}^l.$$

Рассмотрим 2 случая для значения полного орбитального момента:

- 1)  $j = l + \frac{1}{2} \rightarrow \left( l + \frac{1}{2} \right) \left( l + \frac{3}{2} \right) - l^2 - l - \frac{1}{4} = l = -1 - \kappa \rightarrow \kappa = -(l + 1);$
- 2)  $j = l - \frac{1}{2} \rightarrow \left( l - \frac{1}{2} \right) \left( l + \frac{1}{2} \right) - l^2 - l - \frac{3}{4} = -l - 1 = -1 - \kappa \rightarrow \kappa = l.$

$$\vec{\sigma}\vec{p}\frac{f(r)}{r}\varphi_{jm}^l = \left(-i\frac{d}{dr}\left(\frac{f}{r}\right) - i(1+\kappa)\frac{f}{r^2}\right)\frac{\vec{\sigma}\vec{r}}{r}\varphi_{jm}^l = -i\left(\frac{f'}{r} + \kappa\frac{f}{r^2}\right)\left(\frac{\vec{\sigma}\vec{r}}{r^2}\right)\varphi_{jm}^l \rightarrow$$

запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(E - m + \frac{Z\alpha}{r}\right)G_{lj} = -\frac{dF_{lj}}{dr} + \kappa\frac{F_{lj}}{r} \\ \left(E + m + \frac{Z\alpha}{r}\right)F_{lj} = +\frac{dG_{lj}}{dr} + \kappa\frac{G_{lj}}{r} \end{cases}$$

Рассмотрим асимптотику  $r \rightarrow \infty$ .

$$\begin{cases} (E - m)G = -\frac{dF}{dr} \rightarrow G = -\frac{dF}{dr}\frac{1}{E - m} \rightarrow \\ (E + m)F = +\frac{dG}{dr} \rightarrow F = +\frac{dG}{dr}\frac{1}{E + m} \rightarrow \end{cases}$$

$$(E + m)F = -\frac{d^2F}{dr^2}\frac{1}{E - m} \rightarrow F'' + (E^2 - m^2)F = 0,$$

$$(E - m)G = -\frac{d^2G}{dr^2}\frac{1}{E + m} \rightarrow G'' + (E^2 - m^2)G = 0$$

Введем обозначение:  $E^2 - m^2 = -p^2$ , поскольку энергия связанного состояния должна быть меньше массы покоя. Тогда  $p = \sqrt{m^2 - E^2}$ .

Итак, получена система независимых уравнений, каждое из которых легко решается:

$$F = G = Ae^{-pr} + Be^{+pr}, \quad F'' = p^2F$$

Слагаемое с бесконечно растущей экспонентой не годится для решений с  $r \rightarrow \infty$ . Поэтому положим  $B = 0$ .

Рассмотрим теперь другую асимптотику  $r \rightarrow 0$ . Слагаемые вида  $\frac{1}{r}$  будут давать наибольший вклад. Тогда:

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r}\right)F + \frac{Z\alpha}{r}G = 0 \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r}\right)G - \frac{Z\alpha}{r}F = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(r\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} + \frac{\kappa^2 - Z^2\alpha^2}{r}\right)G = 0 \\ \left(r\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - \frac{\kappa^2 - Z^2\alpha^2}{r}\right)F = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$F = G = Ar^s + Br^{-s}, \quad s = \sqrt{\kappa^2 - Z^2\alpha^2}.$$

Если  $s > 0$ , то при малых  $r$  решение стремится к бесконечности, поэтому положим  $A = 0$ .

Будем искать функции  $F$  и  $G$  в виде:

$$\begin{cases} F(r) = e^{-pr}r^s f(r) \\ G(r) = e^{-pr}r^s g(r) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \left( \frac{d}{pdr} - 1 + \frac{s - \kappa}{pr} \right) f - \left( \frac{m - E}{p} - \frac{Z\alpha}{pr} \right) g = 0 \\ \left( \frac{d}{pdr} - 1 + \frac{s + \kappa}{pr} \right) g - \left( \frac{m + E}{p} + \frac{Z\alpha}{pr} \right) f = 0 \end{cases}'$$

Введем замену:

$$\rho \equiv pr \rightarrow f = f(\rho), g = g(\rho) \rightarrow$$

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \rho^n, \quad g(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \rho^n.$$

Опуская некоторые выкладки, запишем итоговые соотношения:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (s + n - \kappa) f_n - f_{n-1} - \frac{m - E}{p} g_{n-1} - 1 + Z\alpha g_n \right] \rho^{n-1} = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (s + n + \kappa) g_n - g_{n-1} - \frac{m + E}{p} f_{n-1} - 1 + Z\alpha f_n \right] \rho^{n-1} = 0. \end{cases}$$

$$\sum_n f_n x^n = 0, \quad f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots = 0 \quad \forall x \rightarrow$$

$$f_0 = 0,$$

$$f_1 + 2f_2 x + \dots = 0 \rightarrow f_1 = 0,$$

Рекурсивно можно доказать, что  $f_n = 0 \quad \forall n$ . Тогда

$$\begin{cases} \left[ (s + n - \kappa) f_n - f_{n-1} - \frac{m - E}{p} g_{n-1} + Z\alpha g_n \right] = 0 \\ \left[ (s + n + \kappa) g_n - g_{n-1} - \frac{m + E}{p} f_{n-1} + Z\alpha f_n \right] = 0. \end{cases}$$

Введем параметр

$$\lambda = \frac{m - E}{p} = \sqrt{\frac{m - E}{m + E}},$$

$$\frac{m + E}{p} = \frac{1}{\lambda}.$$

Перепишем теперь уравнения, подставив  $\lambda$ :

$$\begin{cases} (s + n - \kappa) f_n - f_{n-1} - \lambda g_{n-1} + Z\alpha g_n = 0 \\ (s + n + \kappa) g_n - g_{n-1} - \frac{1}{\lambda} f_{n-1} + Z\alpha f_n = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Домножим первое уравнение на  $\frac{1}{\lambda}$  и вычтем из него второе:

$$\frac{1}{\lambda}(s+n-\kappa)f_n + \frac{1}{\lambda}Z\alpha g_n - (s+n+\kappa)g_n - Z\alpha f_n = 0 \rightarrow$$

$$f_n = g_n \frac{(s+n+\kappa)\lambda - Z\alpha}{(s+n-\kappa) + Z\alpha\lambda} \rightarrow$$

при  $n \rightarrow \infty$   $f_n = g_n\lambda$ , тогда, подставив в исходное выражение найденную связь, получим:

$$n \rightarrow \infty \begin{cases} f_n = \frac{2}{n}f_{n-1} = \frac{2^2}{n(n-1)}f_{n-2} = \dots = \frac{2^n}{n!}f_0 \rightarrow \\ g_n = \frac{2}{n}g_{n-1} = \dots = \frac{2^n}{n!}g_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \rho^n = \dots \sum_{n>N} \frac{2^n}{n!} \rho^n f_0 = \dots e^{+2\rho} f_0 \rightarrow \\ g(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \rho^n = \dots \sum_{n>N} \frac{2^n}{n!} \rho^n g_0 = \dots e^{+2\rho} g_0 \end{cases}$$

$$F = r^{-s} e^{-pr} f(\rho) \rightarrow r^{-s} e^{-pr} e^{+2pr} \rightarrow \infty \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Так, мы получили расходящиеся ряды. Чтобы сделать их сходящимися, оборвем их на каком-то члене:

$$\exists n_{max}: f_{n_{max}+1} = g_{n_{max}+1} = 0.$$

В таком случае решение будет конечным.

Пусть  $n = n_{max} + 1$ , тогда:

$$\begin{cases} -f_{n_{max}} - \lambda g_{n_{max}} = 0 \\ -g_{n_{max}} - \frac{1}{\lambda} f_{n_{max}} = 0 \end{cases} \rightarrow f_{n_{max}} = -\lambda g_{n_{max}} \rightarrow$$

$$-\lambda g_{n_{max}} = g_{n_{max}} \frac{(s+n_{max}+\kappa)\lambda - Z\alpha}{(s+n_{max}-\kappa) + 2Z\alpha\lambda} \rightarrow$$

получено уравнение на  $\lambda$ , являющееся также уравнением на энергию. **Решив квадратное уравнение, получаем энергию:**

$$E_{nj} = m \left[ 1 + \left( \frac{Z\alpha}{n_{max} + \sqrt{\kappa^2 - Z^2\alpha^2}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= m \left[ 1 + \left( \frac{Z\alpha}{n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}, n = n_{max} + |\kappa|.$$

В результате был получен спектр энергии атома водорода.

Запишем несколько явных выражений для некоторых уровней энергии:

$$\text{уровень } 1S_{\frac{1}{2}}, \quad n = 1, l = 0, j = \frac{1}{2}: \quad E_{1S_{\frac{1}{2}}} = m\sqrt{1 - (Z\alpha)^2};$$

$$\text{уровень } 2S_{\frac{1}{2}}, \quad n = 2, l = 0, j = \frac{1}{2}: \quad E_{2S_{\frac{1}{2}}} = m\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}}{2}};$$

$$\text{уровень } 2P_{\frac{1}{2}}, \quad n = 2, l = 1, j = \frac{1}{2}: \quad E_{2P_{\frac{1}{2}}} = m\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}}{2}}.$$

Теория Дирака предсказывает одинаковые энергии для уровней  $2S_{\frac{1}{2}}$  и  $2P_{\frac{1}{2}}$ :

$$E_{2S_{\frac{1}{2}}} = E_{2P_{\frac{1}{2}}}.$$

Однако Лэмб в соавторстве с Ризерфордом экспериментально обнаружили, что энергии этих состояний различны:

$$\Delta E \sim 4 \cdot 10^{-6} \text{ эВ.}$$

Чтобы объяснить разницу между энергиями этих двух уровней, необходимо перейти к квантовой теории поля (объясняется взаимодействием электрона в атоме водорода с нулевыми колебаниями вакуумного электромагнитного поля).

## Лекция 11. Частица в плоской электромагнитной волне

### Решение Волкова

Еще одно решение, которое можно получить точно из теории Дирака, найдено советским теоретиком Д.М. Волковым. Это *решение для частицы в плоской классической электромагнитной волне*.

$$A^\mu(x) = A^\mu(kx) = A^\mu(\phi),$$

Решение уравнения будем искать в виде  $e^{-i\phi}$ , где  $\phi$  – фаза.

Сделаем замену:

$$\begin{aligned} i\partial_\mu &\rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu \rightarrow \\ (i\hat{\partial} - q\hat{A} - m)\psi &= 0. \end{aligned}$$

Калибровка Лоренца:

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu &= 0 \rightarrow \\ \partial_\mu \phi \frac{dA^\mu}{d\phi} &= k_\mu \frac{dA^\mu}{d\phi} = k^\mu A'_\mu = 0 \rightarrow \\ \frac{d}{d\phi} (k^\mu A_\mu) &= 0 \rightarrow k^\mu A_\mu = const = 0. \end{aligned}$$

Сделаем предварительные выкладки, запишем тензор электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu \phi A'_\nu - \partial_\nu \phi A'_\mu = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu.$$

Квадрируем исходное уравнение Дирака:

$$\begin{aligned} (i\hat{\partial} - q\hat{A} + m)(i\hat{\partial} - q\hat{A} - m)\psi &= 0 \rightarrow \left[ (\partial - qA)^2 - m^2 - \frac{i}{2} q F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \psi = 0. \\ ((i\partial_\mu - qA_\mu)\gamma^\mu + m)((i\partial_\nu - qA_\nu)\gamma^\nu - m) &= \\ = (i\partial_\mu - qA_\mu)\gamma^\mu (i\partial_\nu - qA_\nu)\gamma^\nu - m^2 - m(i\partial_\mu - qA_\mu)\gamma^\mu + m(i\partial_\nu - qA_\nu)\gamma^\nu &= \\ = (i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial_\nu - qA_\nu)\gamma^\mu\gamma^\nu - m^2; \end{aligned}$$

$$(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial_\nu - qA_\nu) = i\partial_\mu i\partial_\nu - qA_\mu qA_\nu - qi\partial_\mu A_\nu - iqA_\mu \partial_\nu;$$

$$\partial_\mu A_\nu = (\partial_\mu A_\nu) + A_\nu \partial_\mu \rightarrow$$

$$(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial_\nu - qA_\nu) = -\partial_\mu \partial_\nu - iqA_\mu \partial_\nu - iq(\partial_\mu A_\nu) - iA_\nu \partial_\mu + q^2 A_\mu A_\nu;$$

$$\begin{aligned} (i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial_\nu - qA_\nu)\gamma^\mu\gamma^\nu &= \\ = -\partial_\mu \partial_\nu \gamma^\mu\gamma^\nu - iq(\partial_\mu A_\nu)\gamma^\mu\gamma^\nu - iq(A_\mu \partial_\nu + A_\nu \partial_\mu)\gamma^\mu\gamma^\nu + q^2 A_\mu A_\nu \gamma^\mu\gamma^\nu. \end{aligned}$$

Распишем компоненты:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \partial_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu + \partial_\nu \partial_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu 2g^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu = \partial^2;\end{aligned}$$

$$A_\mu A_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \hat{A} \hat{A} = A^2;$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu &= \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu + \partial_\nu A_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - \partial_\nu A_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu) + g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = \\ &= [g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\mu = 0] = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu.\end{aligned}$$

Последнее выражение можно привести к симметричному виду, используя следующее:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}),$$

$$S_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = S_{\nu\mu} A^{\nu\mu} = S_{\mu\nu} (-A^{\mu\nu}) = 0 \rightarrow$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \rightarrow \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = i\sigma^{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}.$$

Подставим все найденные выражения:

$$(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial_\nu - qA_\nu)\gamma^\mu \gamma^\nu = -\partial^2 + qF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + qA^2 - iq(A_\mu\partial_\nu + A_\nu\partial_\mu)\gamma^\mu \gamma^\nu,$$

$$\begin{aligned}A_\nu\partial_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu &= A_\mu\partial_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu \rightarrow (A_\mu\partial_\nu + A_\nu\partial_\mu)\gamma^\mu \gamma^\nu = A_\mu\partial_\nu(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \\ &= A_\mu\partial_\nu 2g^{\mu\nu} = 2A_\mu\partial^\mu.\end{aligned}$$

Теперь можем записать:

$$(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial_\nu - qA_\nu)\gamma^\mu \gamma^\nu = -\partial^2 + qF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + q^2A^2 - 2iqA_\mu\partial^\mu.$$

Квадрированное уравнение Дирака перепишем в виде:

$$(-\partial^2 - 2iqA_\mu\partial^\mu + q^2A^2 - m^2 - iq\hat{k}\hat{A}')\psi = 0.$$

Будем искать решение в виде плоской волны:

$$\psi = e^{-ipx} F(\phi) \rightarrow$$

$$\partial^\mu \psi = -ip^\mu e^{-ipx} F(\phi) + e^{-ipx} F'(\phi) \partial^\mu \phi = e^{-ipx} (-ip^\mu F + k^\mu F'),$$

$$\partial^2 \psi = \partial_\mu \partial^\mu \psi = \partial_\mu (e^{-ipx} (-ip^\mu F + k^\mu F')) =$$

$$\begin{aligned}&= -ip_\mu e^{-ipx} [-ip^\mu F + k^\mu F'] + e^{-ipx} (-ip^\mu) F' k_\mu + e^{-ipx} k^\mu F'' k_\mu = [k^\mu k_\mu = k^2 = 0] = \\ &= e^{-ipx} (-m^2 F - 2i(p \cdot k) F') \rightarrow\end{aligned}$$

$$m^2 F + 2i(p \cdot k) F' - 2iqA_\mu \partial^\mu - ip^\mu F + k^\mu F' + q^2 A^2 F - m^2 F - iq\hat{k}\hat{A}' F = 0 \rightarrow$$

$$F'[2i(p \cdot k) - 2iq(A \cdot k)] + F[-2q(A \cdot p) + q^2 A^2 - iq\hat{k}\hat{A}'] = 0 \rightarrow$$

Используя калибровку Лоренца, получим  $(A \cdot k) = 0$ , тогда:

$$F'[2i(p \cdot k)] + F[-2q(A \cdot p) + q^2 A^2 - iq\hat{k}\hat{A}'] = 0.$$

Из теории дифференциальных уравнений:

$$f'(x) + g(x)f(x) = 0 \rightarrow f(x) = C \exp\left(-\int g(x)dx\right) \rightarrow$$

$$F' + \frac{[-2q(A \cdot p) + q^2 A^2 - iq\hat{k}\hat{A}']}{2i(p \cdot k)} F = 0 \rightarrow$$

$$F(\phi) = C \exp\left(-\int d\phi \frac{-2q(A \cdot p) + q^2 A^2 - iq\hat{k}\hat{A}'}{2i(p \cdot k)}\right) \frac{u(p)}{\sqrt{2E_p}}.$$

Итак, мы получили **решение Волкова** уравнения Дирака. Заметим, что в решении стоят нетривиальные объекты, необходимо брать экспоненты от матриц  $4 \times 4$ .

Полученное решение можно еще упростить. Не все степени матрицы  $\hat{k}\hat{A}'$  отличны от нуля.

$$(\hat{k}\hat{A}')^2 = \hat{k}\hat{A}'\hat{k}\hat{A}',$$

$$\hat{A}'\hat{k} = A'_\mu \gamma^\mu k_\nu \gamma^\nu = A'_\mu k_\nu (2g^{\mu\nu}I - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2(A' \cdot k) - \hat{k}\hat{A}' = -\hat{k}\hat{A}' \rightarrow$$

$$(\hat{k}\hat{A}')^2 = \hat{k}\hat{A}'\hat{k}\hat{A}' = -\hat{k}\hat{k}\hat{A}'\hat{A}' = -k^2(A')^2 = 0.$$

Значит и любая другая степень старше 2 обращается в ноль. То есть разложение экспоненты в ряд Тейлора ограничивается первыми двумя членами.

$$F(\phi) = \left[1 + \int_0^\phi \frac{q}{2(p \cdot k)} \hat{k}\hat{A}' d\tilde{\phi}\right] \frac{u(p)}{\sqrt{2E_p}} e^{iS} = \left[1 + \frac{q}{2(p \cdot k)} \hat{k}\hat{A}'(\phi)\right] \frac{u(p)}{\sqrt{2E_p}} e^{iS},$$

$$S = -px - \frac{q}{(p \cdot k)} \int_0^{kx} \left[(pA(\phi)) - \frac{q^2}{2} A^2(\phi)\right] d\phi.$$

$S$  – классическое действие для частицы в электромагнитном поле.

Полученное решение имеет большую практическую ценность. Например, при рассмотрении электрона в электромагнитном поле очень сильной лазерной волны, гораздо удобнее начинать с решения Волкова, чем с квантовой теории поля (вакуумного состояния).

Итак, была рассмотрена вторая точно решаемая задача – решение Волкова.

## Проекционные операторы

Это техническая тема, позволяющая получить несколько полезных соотношений. Эти соотношения будут активно использоваться при вычислении диаграмм Фейнмана.

Вспомним 2 основных уравнения:

$$(\hat{p} - m)u = 0, \quad (\hat{p} + m)v = 0,$$

$$\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu.$$

### Энергетические проекционные операторы

Общее решение – суперпозиция состояний с положительной и отрицательной энергией. Введем матрицу, называемую **проекционным оператором**:

$$\Lambda_\pm = \frac{\pm \hat{p} + m}{2m}.$$

Свойства:

1)  $\Lambda_+ = \frac{\hat{p} + m}{2m} \rightarrow$

$$\Lambda_+ u = \frac{1}{2m} (\hat{p} + m) u = \frac{m + m}{2m} u = u,$$

$$\Lambda_+ v = \frac{1}{2m} (\hat{p} + m) v = \frac{-m + m}{2m} v = 0.$$

Тогда для произвольного состояния:

$$\Lambda_+ (\alpha u + \beta v) = \alpha u.$$

$\Lambda_+$  проецирует произвольное состояние на состояние с положительной энергией.

2)  $\Lambda_- = \frac{-\hat{p} + m}{2m} \rightarrow$

$$\Lambda_- v = \frac{-\hat{p} + m}{2m} v = \frac{2m}{2m} v = v,$$

$$\Lambda_- u = \frac{-\hat{p} + m}{2m} u = \frac{-m + m}{2m} u = 0.$$

Тогда для произвольного состояния:

$$\Lambda_- (\alpha u + \beta v) = \beta v.$$

$\Lambda_-$  проецирует произвольное состояние на состояние с отрицательной энергией.

3)

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = \frac{\hat{p} + m - \hat{p} + m}{2m} = 1.$$

4)  $\Lambda_+^2 = \Lambda_+$ :

$$\left( \frac{\hat{p} + m}{2m} \right)^2 = \frac{\hat{p}\hat{p} + 2\hat{p}m + m^2}{4m^2} = \frac{p^2 + 2\hat{p}m + m^2}{4m^2} = \frac{\hat{p} + m}{2m} = \Lambda_+.$$

5)  $\Lambda_-^2 = \Lambda_-$ :

$$\left( \frac{-\hat{p} + m}{2m} \right)^2 = \frac{\hat{p}\hat{p} - 2\hat{p}m + m^2}{4m^2} = \frac{p^2 - 2\hat{p}m + m^2}{4m^2} = \frac{-\hat{p} + m}{2m} = \Lambda_-.$$

6)  $(\Lambda_+ + \Lambda_-)^2 = 1 = \Lambda_+^2 + \Lambda_-^2 + 2\Lambda_+\Lambda_- \rightarrow \Lambda_+\Lambda_- = 0$

$$\Lambda_+\Lambda_- = \frac{(\hat{p} + m)(-\hat{p} + m)}{4m^2} = \frac{-\hat{p}^2 + m^2}{4m^2} = \frac{-m^2 + m^2}{4m^2} = 0.$$

Действительно:

$$\Lambda_+\Lambda_- (\alpha u + \beta v) = \Lambda_+\beta v = 0.$$

## Операторы проекции спина

Определим похожие операторы проекций спина:

$$\Sigma_r = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \hat{s}_r), \quad r = \pm 1.$$

$s$  – четырехмерный вектор спина,  $s = (0, \vec{s})$ .

$$\vec{s}^2 = 1, \quad s^2 = 0 - \vec{s}^2 = -1.$$

Такой четырехмерный вектор можно определить только в системе покоя частицы, обозначим систему покоя \*:

$$s_* = (0, \vec{s}_*).$$

Зная вектора в состоянии покоя, можем перейти в лабораторную систему, используя преобразование Лоренца. Поэтому в лабораторной системе отсчета:

$$s = \left( \frac{\vec{s}_* \vec{p}}{m}, \vec{s}_* + \frac{\vec{p}(\vec{s}_* \vec{p})}{m(E + m)} \right).$$

Свойство вектора:

$$\begin{aligned} p_* &= (m, \vec{0}), & s_* p_* &= 0 \rightarrow \\ p &= (E, \vec{p}), & sp &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} sp &= \frac{E(\vec{s}_* \vec{p})}{m} - \vec{p} \left( \vec{s}_* + \frac{\vec{p}(\vec{s}_* \vec{p})}{m(E + m)} \right), \\ \vec{p} \vec{s}_* &= \lambda \rightarrow \\ \lambda + \frac{\vec{p}^2 \lambda}{m(E + m)} &= \lambda \left( 1 + \frac{E^2 - m^2}{m(E + m)} \right) = \lambda \left( 1 + \frac{E - m}{m} \right) \lambda = \frac{\lambda E}{m} \rightarrow \\ sp &= \frac{E\lambda}{m} - \frac{\lambda E}{m} = 0. \end{aligned}$$

Заметим:

$$s = s(\vec{s}_*) = -s(-\vec{s}_*).$$

## Лекция 12. Киральные операторы

### Проекционные операторы (продолжение)

#### Операторы проекции спина

На прошлой лекции было показано, что

$$s = s(\vec{s}_*) = -s(-\vec{s}_*).$$

Тогда:

$$\Sigma_r = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \hat{s}_r), \quad r = \pm 1 \rightarrow$$

$$\Sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5 \hat{s}_{\pm}).$$

Для таких проекционных операторов можно записать следующий соотношения:

- 1)  $\Sigma_+ + \Sigma_- = 1$ ;
- 2)  $[\Sigma_r, \Lambda_{\pm}] = 0$

$$[\Sigma_r, \Lambda_{\pm}] = \Sigma_r \Lambda_{\pm} - \Lambda_{\pm} \Sigma_r, \quad \Lambda_{\pm} = \frac{\pm \hat{p} + m}{2m} \rightarrow$$

$$[1 + \gamma_5 \hat{s}_r, \hat{p} + m] = [\gamma_5 \hat{s}_r, \hat{p}] = \gamma_5 \hat{s}_r \hat{p} - \hat{p} \gamma_5 \hat{s}_r = \gamma_5 \hat{s}_r \hat{p} + \gamma_5 \hat{p} \hat{s}_r = \gamma_5 \hat{s}_r \hat{p} - \gamma_5 \hat{s}_r \hat{p} = 0,$$

т. к.  $\hat{A}\hat{B} = A_{\mu}\gamma^{\mu}B_{\nu}\gamma^{\nu} - A_{\mu}B_{\nu}(2g^{\mu\nu}I - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = 2AB - \hat{B}\hat{A}, \quad ps = 0 \rightarrow$

- 3)  $\Sigma_r u_{r'} = \delta_{rr'} u_r$   
 $\Sigma_r v_{r'} = \delta_{rr'} v_r$

предлагается проверить самостоятельно.

Итак, теперь возможно разложить произвольное состояние по стояниям с положительной и отрицательной энергией и с положительным и отрицательным направлением спина на произвольную ось.

#### Спиновая сумма

$\Lambda_{\pm}, \Sigma_{\pm}$  - операторы, которые важны для получения соотношения «*спиновая сумма*», которое будет использоваться повсеместно.

При вычислении диаграмм Фейнмана всегда встречается конструкция (без суммирования по  $r$ ):

$$u_r(p)\bar{u}_r(p) = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$u_r(p)\bar{u}_r(p) = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)(1 + \gamma_5 \hat{s}_r).$$

Проведем суммирование:

$$\sum_r u_r(p) \bar{u}_r(p) = \hat{p} + m.$$

Похожее соотношение будет справедливо для решения с отрицательной энергией:

$$v_r(p) \bar{v}_r(p) = \frac{1}{2} (\hat{p} - m)(1 + \gamma_5 \hat{s}_r) \rightarrow$$

$$\sum_r v_r(p) \bar{v}_r(p) = \hat{p} - m.$$

Получим введенные формулы, используя проекционные операторы.

$$u_+ \bar{u}_+ = a \Lambda_+ \Sigma_+ + b \Lambda_+ \Sigma_- + c \Lambda_- \Sigma_+ + d \Lambda_- \Sigma_-,$$

$$\Lambda_+ u_+ \bar{u}_+ = u_+ \bar{u}_+ = a \Lambda_+ \Sigma_+ + b \Lambda_+ \Sigma_-,$$

$$\Sigma_+ u_+ \bar{u}_+ = u_+ \bar{u}_+ = a \Lambda_+ \Sigma_+ \rightarrow$$

Для того, чтобы определить  $a$ , воспользуемся нормировкой спиноров:

$$\bar{u}u = 2m, \quad \bar{v}v = -2m \rightarrow$$

$$u_+ \bar{u}_+ u_+ = a \Lambda_+ \Sigma_+ u_+ = a u_+ \rightarrow$$

$$u_+ 2m = a u_+ \rightarrow a = 2m.$$

Тогда:

$$u_+ \bar{u}_+ = 2m \Lambda_+ \Sigma_+ = 2m \frac{\hat{p} + m}{2m} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \hat{s}_+).$$

На этом завершим доказательство. Полный вывод выражения для  $u_r(p) \bar{u}_r(p)$  предлагается проделать в качестве домашнего задания.

### Киральные операторы

Рассмотрим теперь проекционные операторы, связанные с таким квантовым числом как *киральность* (направленность).

$$P_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5), \quad P_L + P_R = 1,$$

$$P_L \psi = \psi_L,$$

$P_L$  – левокиральный оператор,  $P_R$  – правокиральный оператор.

$\psi_L$  – собственное состояние матрицы  $\gamma_5$ :

$$\gamma^5 \psi_L = \gamma^5 P_L \psi = -P_L \psi = -\psi_L,$$

т. к.  $\gamma^5 P_L = \gamma^5 \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) = \frac{1}{2} (\gamma^5 - 1) = -P_L.$

Аналогично:

$$P_R \psi = \psi_R,$$

$$\gamma^5 P_R = \gamma^5 \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) = \frac{1}{2} (\gamma^5 + 1) = P_R \rightarrow$$

$$\gamma^5 \psi_R = \gamma^5 P_R \psi = P_R \psi = \psi_R.$$

В безмассовом случае действию оператора каральности можно придать смысл, связанный с направлением спина. Рассмотрим еще раз спинор:

$$u_r = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \chi_r \\ \sqrt{E-m} r \chi_r \end{pmatrix}.$$

В ультрарелятивистском пределе  $E \gg m$  или безмассовом случае:

$$u_r = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_r \\ r \chi_r \end{pmatrix}.$$

Подействуем на спинор  $u_r$  матрицей  $P_L$ :

$$P_L u_r = \sqrt{E} P_L \begin{pmatrix} \chi_r \\ r \chi_r \end{pmatrix},$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$P_L u_r = \frac{\sqrt{E}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_r \\ r \chi_r \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{E}}{2} \begin{pmatrix} (1-r)\chi_r \\ -(1-r)\chi_r \end{pmatrix}$$

$$r = +1 \rightarrow P_L u_+ = 0$$

$$r = -1 \rightarrow P_L u_- = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_- \\ -\chi_- \end{pmatrix},$$

где  $\chi_-$  - паулевский спинор, который описывает направление спина, противонаправленное импульсу – лево-киральным, лево-спиральным спинор.

Равенство спиральности и киральности справедливо только в ультрарелятивистском пределе или безмассовом случае.

Если рассмотрим частицу в покое, то лево-киральным спинор будет суммой лево-спиральных и право-спиральных спиноров в соотношении 50/50. Рассмотрим предел  $|\vec{p}| \rightarrow 0$ :

$$E \rightarrow m,$$

$$u_r = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_L u_r = \frac{\sqrt{2m}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2m}}{2} \begin{pmatrix} \chi_r \\ -\chi_r \end{pmatrix}.$$

Эти соотношения будут важны при построении Стандартной модели, поскольку киральные проекции сохраняют лоренц-инвариантность, в то время как спиральные проекции не сохраняют лоренц-инвариантность.

Представим частицу, движущуюся с импульсом  $\vec{p}$ , а значит с некоторой скоростью. Если масса частицы отлична от нуля, то эта скорость будет меньше скорости света. Теперь представим наблюдателя в ракете, летящей со скоростью, большей скорости частицы. Тогда посмотрев на частицу из ракеты, тогда в своей системе покоя наблюдатель увидит частицу, движущуюся в противоположном направлении, но с изначальной проекцией спина. То есть в этом случае импульс и спин сонаправлены.

Так, в лабораторной системе отсчета частица лево-спиральная, в быстро движущейся системе отсчета частица становится право-спиральной. Квантовое число спиральности не является релятивистски инвариантной величиной.

### Лоренц инвариантность уравнения Дирака

Рассмотрим, как будет меняться спинор Дирака, чтобы форма уравнения при преобразовании Лоренца оставалась неизменной.

В системе координат  $S$ :

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0 \text{ или } (i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi(x) = 0.$$

Перейдем в систему координат  $S'$  с  $x'$ ,  $\partial'_\mu$ ,  $\psi'(x')$ . Уравнение Дирака в этой системе координат запишем в исходном виде:

$$(i\partial'_\mu\gamma^\mu - m)\psi'(x') = 0.$$

Определим, как будет выглядеть  $\psi'(x')$  и связь этого спинора с преобразованием  $S \rightarrow S'$ .

В общем случае преобразование Лоренца записывается в виде линейной комбинации:

$$x' = \Lambda x,$$

где  $\Lambda$  – матрица преобразований Лоренца  $4 \times 4$ . При движении вдоль оси со скоростью  $v$ :

$$x'_0 = \gamma(x_0 - vx^1),$$

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vx_0),$$

$$x'_2 = x_2,$$

$$x'_3 = x_3,$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

В общем случае:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu.$$

Теперь рассмотрим производные:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial'_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \rightarrow \Lambda^\nu_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}.$$

Для спиноров связь должна даваться некоторой матрицей, запишем ее в виде:

$$\psi'(x') = S_\Lambda \psi(x) \rightarrow \psi(x) = S_\Lambda^{-1} \psi'(x') \rightarrow$$

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi(x) = 0 \rightarrow (i\partial_\mu\gamma^\mu - m)S_\Lambda^{-1}\psi'(x') = 0$$

Домножим слева на  $S_\Lambda$ :

$$(i\partial_\mu S_\Lambda \gamma^\mu S_\Lambda^{-1} - m)\psi'(x') = 0.$$

Перейдем от производной в системе  $S$  к производной в системе  $S'$ :

$$\begin{aligned} (i\partial'_\nu \Lambda_\mu^\nu S_\Lambda \gamma^\mu S_\Lambda^{-1} - m)\psi'(x') &= 0 \rightarrow \\ \gamma^\nu &= \Lambda_\mu^\nu S_\Lambda \gamma^\mu S_\Lambda^{-1} \rightarrow \\ S_\Lambda^{-1} \gamma^\nu S_\Lambda &= \Lambda_\mu^\nu \gamma^\mu. \end{aligned}$$

Для решения этого уравнения сначала рассмотрим *бесконечно малое преобразование Лоренца*, перейдем в систему отсчета, движущуюся очень медленно относительно исходной. Тогда любое конечное преобразование будет последовательным переходом во все более и более быструю систему отсчета.

$$\Lambda^{\mu\nu} = 1 + \Delta\omega^{\mu\nu},$$

где  $\omega$  – *быстрота*, аддитивна в релятивистской теории в отличие от скорости.

$$S_\Lambda = S_{1+\Delta\omega} = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu},$$

где  $\sigma_{\mu\nu}$  – пока неизвестные матрицы,  $\Delta\omega^{\mu\nu}$  – определяют переход из одной системы отсчета в другую. Обратное бесконечно малое преобразование записывается следующим образом:

$$S_{1+\Delta\omega}^{-1} = 1 + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu}.$$

Легко показать, что  $S_{1+\Delta\omega} S_{1+\Delta\omega}^{-1} = 1$ :

$$S_{1+\Delta\omega} S_{1+\Delta\omega}^{-1} = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} + o(\Delta\omega^2) = 1.$$

При рассмотрении преобразования Лоренца, можно увидеть, что коэффициенты  $\Delta\omega^{\mu\nu}$  должны быть антисимметричными при перестановке индексов:

$$\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}.$$

Тогда при свертке ненулевое значение может быть получено в случае антисимметричного тензора, тогда из определения матрицы  $S_\Lambda$  следует антисимметричность тензора  $\sigma_{\mu\nu}$ :

$$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$$

Подставим  $S_{1+\Delta\omega}$  и  $S_{1+\Delta\omega}^{-1}$  в матричное уравнение и получим:

$$\begin{aligned} \Delta\omega^{\nu\mu} \gamma^\nu &= \frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} [\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] \rightarrow \sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta], \\ \frac{1}{2} \sigma_{0i} &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, задача решена для бесконечно малого преобразования.

Построим *конечное собственное преобразование Лоренца*.

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu},$$

$$\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega (K_x)_{\nu}^{\mu},$$

Если  $S'$  движется относительно  $S$  со скоростью  $\Delta v$ , то  $\Delta\omega = \Delta v$ . Тогда

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x'^0 = \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 = x^0 - \Delta v x^1 \\ x'^1 = \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 = -\Delta v x^0 + x^1 \end{cases}$$

Перейдем к конечной скорости:

$$\Delta v = \Delta\omega = \frac{\omega}{N},$$

где  $N$  – число шагов.

$$x'^{\mu} = \left(1 - K_x \frac{\omega}{N}\right)_{\alpha_1}^{\mu} \left(1 - K_x \frac{\omega}{N}\right)_{\alpha_2}^{\alpha_1} \dots \left(1 - K_x \frac{\omega}{N}\right)_{\alpha_N}^{\alpha_{N-1}} x^{\alpha_N}.$$

Найдем предел:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - K_x \frac{\omega}{N}\right)_{\alpha_1}^{\mu} \left(1 - K_x \frac{\omega}{N}\right)_{\alpha_2}^{\alpha_1} \dots \left(1 - K_x \frac{\omega}{N}\right)_{\alpha_N}^{\alpha_{N-1}} x^{\alpha_N} = (e^{-\omega K_x})_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \rightarrow$$

$$x'^{\mu} = (e^{-\omega K_x})_{\nu}^{\mu} x^{\nu}.$$

Заметим некоторые простые свойства:

$$K_x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_x^3 = K_x.$$

Поэтому итоговую матрицу можно переписать в виде:

$$(e^{-\omega K_x})_{\nu}^{\mu} x^{\nu} = (\cosh(\omega K_x) - \sinh(\omega K_x))_{\nu}^{\mu} x^{\nu} = (1 - K_x^2 + K_x^2 \cosh \omega - K_x \sinh \omega)_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega & 0 & 0 \\ \sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\cosh \omega = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma, \quad \tanh \omega = v = \frac{\sinh \omega}{\cosh \omega}, \quad \sinh \omega = \gamma v.$$

Итак, из бесконечно малого преобразования Лоренца было получено конечное преобразование.

Теперь можем построить конечное преобразование Лоренца для спинора, зная, как выглядит бесконечно малое преобразование Лоренца.

$$S_{1+\Delta\omega} = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu},$$

$$\omega^{\mu\nu} = \Delta\omega^{\mu\nu} N, \quad \Delta\omega^{\mu\nu} = K_x \omega = (K_x)^{\mu\nu} \frac{\omega}{N} \rightarrow$$

$$S_\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} K_x^{\mu\nu} \frac{\omega}{N} \right) \rightarrow$$

$$\psi'(x') = S_\Lambda \psi(x) = \exp\left(-\frac{i}{4} \omega \sigma_{\mu\nu} K_x^{\mu\nu}\right) \psi(x).$$

### Пример 1

Рассмотрим теперь конкретный пример, явный вид этого выражения для матрицы  $K_x$ :

$$\text{Вдоль оси } x: \exp\left(-\frac{i}{4} \omega \sigma_{01} K_x^{01} 2\right) = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega \sigma_{01} K_x^{01}\right) = \cosh \frac{\omega}{2} I - \sinh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \frac{\omega}{2} & -\sinh \frac{\omega}{2} \sigma_1 \\ -\sinh \frac{\omega}{2} \sigma_1 & \cosh \frac{\omega}{2} \end{pmatrix} \rightarrow$$

Рассмотрим спинор  $\psi(x)$  для частицы в покое:

$$\psi(x) = e^{-im\tau} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} + \dots,$$

где  $\tau$  – время в системе покоя частицы.

$$\cosh \omega = \gamma, \quad \sinh \omega = \gamma v \rightarrow$$

$$\cosh \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}, \quad \sinh \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \rightarrow$$

$$\psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4} \omega \sigma_{\mu\nu} K_x^{\mu\nu}\right) \psi(x) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\omega}{2} & -\sinh \frac{\omega}{2} \sigma_1 \\ -\sinh \frac{\omega}{2} \sigma_1 & \cosh \frac{\omega}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-im\tau} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \frac{\omega}{2} \chi \\ -\sinh \frac{\omega}{2} \sigma_1 \chi \end{pmatrix} e^{-im\tau} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \chi \\ -\sqrt{E-m} \sigma_1 \chi \end{pmatrix} e^{-ip'x'},$$

$$p'x' = m\tau.$$

Итак, получено то же решение, что и при явном построении решения уравнения Дирака.

### Пример 2

До сих пор рассматривалось только движение вдоль оси  $x$ . На самом деле есть 6 матриц  $\sigma_{\mu\nu}$  (в силу антисимметричности). Для движения вдоль осей  $x, y, z$  соответственно:

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда преобразование для скорости с компонентами  $x, y, z$  принимает вид:

$$\vec{K} = (K_x, K_y, K_z), \quad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \rightarrow$$

$$S_\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\vec{\omega}\vec{K}^{\mu\nu}\right).$$

Введем **матрицы поворота**:

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поворот системы координат на угол  $\theta$ :

$$\vec{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z).$$

Рассмотрим, например поворот вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$  спинора:

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= e^{+\frac{i}{2}\varphi\sigma_{12}}\psi(x) = \left(\cos\frac{\varphi}{2}I + i\sin\frac{\varphi}{2}\sigma_{12}\right)\psi(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\sigma_3 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\sigma_3 \end{pmatrix}\psi(x). \end{aligned}$$

При подстановке угла  $2\pi$  вся конструкция приобретет знак « $\rightarrow$ », а не вернется в исходную точку:

$$\text{при } \varphi = 2\pi: \psi'(x') = -\psi'(x'),$$

$$\text{при } \varphi = 4\pi: \psi'(x') = \psi'(x').$$

Это интересная и глубокая особенность спиноров. *Спиноры не являются обычными векторами. Их можно очень условно вообразить в виде корня из вектора, но гораздо более точная аналогия – вектор на поверхности, описываемой листом Мебиуса.*

Явление проиллюстрировано в видеоматериалах лекции с помощью приема «*ремень Дирака*», впервые показанного Дираком. Этот опыт показывает, что спиноры – это фактически листы Мебиуса, а спиноры – это электроны и протоны.

## Дискретные преобразования

В прошлом разделе были рассмотрены непрерывные преобразования – бесконечно малые и конечные. Посмотрим, исчерпываются ли преобразования, сохраняющие инвариантность группы Лоренца, только этими преобразованиями. Очевидно, что нет.

Если рассмотреть интервал  $x^2 = t^2 - \vec{x}^2$ , то будет видно, что интервал инвариантен относительно таких замен:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{T}}: & t \rightarrow -t, \\ \hat{\mathcal{P}}: & x \rightarrow -x.\end{aligned}$$

Кроме этих двух замен рассмотрим операцию, не связанную с преобразованиями Лоренца, но имеющую отношение к квантовой теории, операцию замены частицы на античастицу  $\hat{C}$ .

1)  $\hat{\mathcal{P}}$  – преобразование:

$$\begin{aligned}(i\partial_t\gamma^0 + i\vec{\nabla}\vec{\gamma} - m)\psi(t, \vec{x}) &= 0, \\ x \rightarrow -x: (i\partial_t\gamma^0 - i\vec{\nabla}\vec{\gamma} - m)\psi(t, -\vec{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Вернем уравнение к исходному виду. Перед  $\psi$  вставим единицу  $I = \gamma^0\gamma^0$ , а слева домножим уравнение на  $\gamma^0$ :

$$\begin{aligned}(i\partial_t\gamma^0\gamma^0 - i\vec{\nabla}\gamma^0\vec{\gamma}\gamma^0 - m)\gamma^0\psi(t, -\vec{x}) &= 0, \\ \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i \rightarrow & \\ (i\partial_t\gamma^0\gamma^0 + i\vec{\nabla}\vec{\gamma} - m)\psi_P(t, \vec{x}) = 0 \rightarrow & \\ \psi_P(t, \vec{x}) = \hat{\mathcal{P}}\psi(t, \vec{x}) = P\psi(t, -\vec{x}), \quad P = \gamma^0. &\end{aligned}$$

2)  $\hat{\mathcal{T}}$  – преобразование:

$$\begin{aligned}(i\partial_t\gamma^0 + i\vec{\nabla}\vec{\gamma} - m)\psi(t, \vec{x}) &= 0, \\ t \rightarrow -t: (-i\partial_t\gamma^0 + i\vec{\nabla}\vec{\gamma} - m)\psi(-t, \vec{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Запишем комплексно сопряженное уравнение:

$$(+i\partial_t\gamma^0 - i\vec{\nabla}\vec{\gamma}^* - m)\psi^*(-t, \vec{x}) = 0$$

Вставим перед  $\psi^*$  произведение двух матриц  $T$ :

$$TT = I.$$

И слева домножим на матрицу  $T$ :

$$\begin{aligned}T(+i\partial_t\gamma^0 - i\vec{\nabla}\vec{\gamma}^* - m)TT\psi^*(-t, \vec{x}) &= 0 \rightarrow \\ (+i\partial_t T\gamma^0 T - i\vec{\nabla}T\vec{\gamma}^*T - m)T\psi^*(-t, \vec{x}) &= 0 \rightarrow\end{aligned}$$

Если  $T\gamma^0 T = \gamma^0$ ,  $T\vec{\gamma}^* T = -\vec{\gamma}^*$ , то

$$\psi_T(t, \vec{x}) = \hat{\mathcal{T}}\psi(t, \vec{x}) = T\psi^*(-t, \vec{x}).$$

Такая матрица  $T$  существует:

$$T = i\gamma^1\gamma^3.$$

Проверим:

$$TT = i\gamma^1\gamma^3 i\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^3\gamma^1\gamma^3 = \gamma^1\gamma^1\gamma^3\gamma^3 = 1,$$

$$T\gamma^0T = i\gamma^1\gamma^3\gamma^0 i\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^1 = \gamma^0,$$

$$T(\gamma^1)^*T = i\gamma^1\gamma^3\gamma^1 i\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^3\gamma^1\gamma^1\gamma^3 = \gamma^1\gamma^3\gamma^3 = -\gamma^1,$$

$$T(\gamma^3)^*T = i\gamma^1\gamma^3\gamma^3 i\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\gamma^3 = \gamma^1\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^3,$$

$$T(\gamma^2)^*T = T(-\gamma^2)T = -i\gamma^1\gamma^3\gamma^2 i\gamma^1\gamma^3 = \gamma^1\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^3 = \gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^3\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^2\gamma^1 = \gamma^2\gamma^1\gamma^1 = -\gamma^2.$$

Так, явным вычислением доказано, что  $T = i\gamma^1\gamma^3$  обладает нужными свойствами. Тогда получаем в точности исходное уравнение Дирака, действующее на спинор после операции обращения времени:

$$(i\partial_t\gamma^0 + i\vec{\nabla}\vec{\gamma} - m)\psi_T(t, \vec{x}) = 0.$$

3)  $\hat{C}$  – преобразование:

$$\psi_C(t, \vec{x}) = \hat{C}\psi(t, \vec{x}) = C(\bar{\psi})^T(t, \vec{x}),$$

$$\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0, \quad (\bar{\psi})^T = \gamma^0\psi^* \rightarrow$$

$$\psi_C(t, \vec{x}) = C\gamma^0\psi^*.$$

## Лекция 13. Обсуждение релятивистской квантовой механики

### СРТ-преобразование

Вспомним:

- 1)  $\psi_P(t, \vec{x}) = \hat{P}\psi(t, \vec{x}) = P\psi(t, -\vec{x}), P = \gamma^0;$
- 2)  $\psi_T(t, \vec{x}) = \hat{T}\psi(t, \vec{x}) = T\psi^*(-t, \vec{x}), T = i\gamma^1\gamma^3;$
- 3)  $\psi_C(t, \vec{x}) = \hat{C}\psi(t, \vec{x}) = C(\bar{\psi})^T(t, \vec{x}) = C\gamma^0\psi^*(t, \vec{x}), C = i\gamma^2\gamma^0.$

Рассмотрим преобразование спинора после действия всех трех операций:

$$\begin{aligned}\psi_{CPT} &= \hat{C}\hat{P}\hat{T}\psi(t, \vec{x}) = \hat{C}\hat{P}T\psi^*(-t, \vec{x}) = \hat{C}PT\psi^*(-t, -\vec{x}) = C\gamma^0(PT\psi^*(-t, -\vec{x}))^*, \\ &P^* = P, \quad T^* = -T \rightarrow \\ \psi_{CPT} &= -C\gamma^0PT\psi(-t, -\vec{x}) \rightarrow \\ -C\gamma^0PT &= -i\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^0i\gamma^1\gamma^3 = \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = (-i)i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (-i)\gamma^5 \rightarrow \\ \psi_{CPT} &= -i\gamma^5\psi(-t, -\vec{x}).\end{aligned}$$

При СРТ-преобразовании есть симметрия, но точно не на уровне волновой функции Дирака. Рассмотрим, к чему относится **СРТ-теорема в контексте релятивистской квантовой механики**.

Пусть есть некоторая наблюдаемая величина  $o$ , ей соответствует оператор  $\hat{O}$ . Тогда среднее значение этой величины по квантовому состоянию:

$$\langle \hat{O} \rangle = \psi^\dagger(t, \vec{x})\hat{O}\psi(t, \vec{x}).$$

Применим операцию СРТ-преобразования к этим полям:

$$\psi^\dagger(t, \vec{x})\hat{O}\psi(t, \vec{x}) \xrightarrow{CPT} \psi_{CPT}^\dagger(t, \vec{x})\hat{O}\psi_{CPT}(t, \vec{x}),$$

$$\begin{aligned}\psi_{CPT}^\dagger(t, \vec{x}) &= [-i\gamma^5\psi(-t, -\vec{x})]^\dagger = i\gamma^5\psi^\dagger(-t, -\vec{x}) \rightarrow \\ \psi_{CPT}^\dagger(t, \vec{x})\hat{O}\psi_{CPT}(t, \vec{x}) &= \psi^\dagger(-t, -\vec{x})i\gamma^5\hat{O}(-i\gamma^5)\psi(-t, -\vec{x}) = \\ &= \psi^\dagger(-t, -\vec{x})\gamma^5\hat{O}\gamma^5\psi(-t, -\vec{x}).\end{aligned}$$

$\hat{O}$  может быть дифференциальным оператором, например:

$$-i\vec{\nabla}, \quad \vec{r} \times \vec{p} \text{ и т. д.}$$

$\hat{O}$  может быть матрицей:

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

- 1) Если  $\hat{O}$  дифференциальный оператор, то очевидно, что матрица  $\gamma^5$  может быть с ним переставлена местами:

$$\gamma^5\hat{O}\gamma^5 = \hat{O}\gamma^5\gamma^5 = \hat{O} \rightarrow$$

$$\langle \hat{O} \rangle = \psi^+(-t, -\vec{x}) \hat{O} \psi(-t, -\vec{x}) = \langle \hat{O} \rangle = \psi^+(t, \vec{x}) \hat{O} \psi(t, \vec{x}).$$

2) Если  $\hat{O}$  матрица, то:

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\langle \hat{O} \rangle = \psi^+(-t, -\vec{x}) \hat{O} \psi(-t, -\vec{x}) = \langle \hat{O} \rangle = \psi^+(t, \vec{x}) \hat{O} \psi(t, \vec{x}).$$

Итак, если провести преобразование  $C$ ,  $P$ , и  $T$  четности в релятивистской теории, то наблюдаемые величины не изменятся. Для этого требуется:

- лоренц-инвариантность;
- локальность;
- эрмитовость  $\hat{H}$ .

Все эти условия в квантовой механике выполняются. Также теорему можно переформулировать через Лагранжианы, которые будут рассмотрены в следующих лекциях, а СРТ-теорема будет переформулирована в рамках квантовой теории поля.

Экспериментально СРТ-инвариантность наблюдается в 100% случаев. При этом теоретически не требуется, чтобы теория была инвариантна относительно какого-либо из преобразований по-отдельности. Однако если обратить внимание на эксперимент, то можно заметить следующее:

- Гравитационные, электромагнитные и сильные взаимодействия сохраняют по-отдельности все эти преобразования  $P$ ,  $C$ ,  $T$ .
- В слабых взаимодействиях нарушаются все три вида симметрии.

### Обсуждение релятивистской квантовой механики

Соберем все полученные результаты в единую картину и посмотрим на нее непредвзятым взглядом.

Было построено уравнение Клейна-Фока-Гордона, оно имеет следующий вид:

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0.$$

В это уравнение может быть включено взаимодействие.

Радости и печали:

+ Это уравнение предсказало существование античастиц.

- Плотность вероятности  $\rho$  – знаконеопределенная величина.

- При применении уравнения к атому водорода, была получена неправильная тонкая структура.

? В уравнении возникает парадокс Клейна: при рассеивании частицы на потенциале выше 2 масс падающих частиц в запрещенной области появляется отрицательная вероятность тока.

Затем было введено уравнение Дирака, без взаимодействия имеет следующий вид:

$$(i\hat{d} - m)\psi = 0.$$

В этом уравнении есть целый ряд важных достижений:

- + Предсказывает античастицы;
- + Плотность вероятности является положительно определенной величиной:

$$\rho = |\psi|^2 \geq 0.$$

+ При вычислении спектра энергий атома водорода позволяет получить правильный спектр (тонкая структура);

+ Предсказывает гиромагнитное отношение  $g = 2$ .

- Для спектра атома водорода  $E_{2S_{1/2}} = E_{2P_{1/2}}$ , в эксперименте  $E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}} \neq 0$ .

Так, в обоих уравнениях есть как достоинства, так и недостатки. Также при их рассмотрении было изучено много полезной математики.

Рассмотрим результаты критически. Начнем с уравнения Дирака.

Волновая функция  $\psi(t, \vec{x})$  состоит из двух частей – вклада, относящегося к частицам, и вклада, относящегося к античастицам. Тогда плотностью вероятности чего является величина  $|\psi(t, \vec{x})|^2$ ? До сих пор мы рассматривали все эти уравнения как обобщение уравнения Шредингера, в котором  $\psi$  или  $\phi$  – это волновая функция, интерпретируемая в терминах одночастичных состояний, их плотность вероятности определяла вероятность найти одну частицу в точке  $\vec{x}$  в момент времени  $t$ . Волновая функция в уравнении Дирака описывает сразу две частицы в одной точке. Поэтому  $\rho = |\psi|^2 \geq 0$  не является предметом для радости, так как  $|\psi|^2$  нельзя интерпретировать как плотность вероятности...

В литературе часто можно увидеть  $g = 2$ , но это только предсказание релятивистской теории. Это следствие того, как вводится взаимодействие с электромагнитным полем. Это следствие минимального способа введения взаимодействия, а именно:

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu \rightarrow$$
$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-\vec{\alpha}(\vec{p} - q\vec{A}) - \beta m + q\Phi)\psi.$$

Такой способ введения взаимодействия не единственный возможный. Уравнение может быть модифицировано следующим образом:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\vec{\alpha}(\vec{p} - q\vec{A}) - \beta m + q\Phi + \frac{K\beta}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\psi.$$

Последнее слагаемое является калибровочно-инвариантным. Это добавочное взаимодействие оказывается эквивалентным выражению

$$K \begin{pmatrix} -\vec{B}\vec{\sigma} & i\vec{E}\vec{\sigma} \\ -i\vec{E}\vec{\sigma} & +\vec{B}\vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  – напряженности электрического и магнитного полей соответственно,  $\vec{\sigma}$  – вектор из матриц Паули. При нерелятивистском приближении как раз появлялись слагаемые  $\vec{B}\vec{\sigma}$ , перед которыми возник коэффициент  $g = 2$ . Однако теперь видно, что можно добавить слагаемое с любым коэффициентом  $K$ , тогда можно получить любое  $g$ .

Кроме того, уравнение Дирака не решает проблемы для спектра энергий атома водорода. И это не все проблемы уравнения Дирака.

Большой проблемой является предсказание античастиц, поскольку античастицы соответствуют состояниям с отрицательной энергией. Мы дали им правильную интерпретацию. Но теперь, когда эти частицы могут взаимодействовать с электромагнитным полем, возникает проблема. Рассмотрим электрон с положительной энергией. При взаимодействии с электромагнитным полем электрон может испустить фотон и превратиться в электрон с отрицательной энергией. Чем большую энергию унесет фотон, тем более отрицательной энергией будет обладать электрон. Формально не существует никакого ограничения. Дирак предположил следующее: вакуумное состояние вселенной устроено таким образом, что все состояния с отрицательными энергиями уже заняты – *море Дирака или вакуум Дирака*. Тогда переход электрона в состояние с отрицательной энергией невозможно в силу принципа Паули.

Однако по всей видимости эта идея не имеет никакого отношения к реальности по нескольким причинам. Во-первых, если всерьез относиться к этой идее, тогда энергия вакуума должна быть бесконечно большой и отрицательной. Это категорически противоречит наблюдаемым данным, поскольку энергия вакуумного состояния измерена и близка к нулю. Очевидно, что состояние с бесконечно большой отрицательной энергией привело бы к тому, что Вселенная сколлапсировала бы обратно в точку и ни в коем случае не расширялась бы, как происходит сейчас. Кроме того, вернемся к уравнению Клейна-Фока-Гордона, где все то же самое, но для бозонов нет запрета Паули. Поэтому переход, например, пиона в область с отрицательной энергией будет не только не запрещен, но и благоприятен. Если объяснение Дирака не работает для пионов, то почему следует доверять ему в случае фермионов? И наконец, если сегодня мы знаем, что античастицы – частицы с отрицательными энергиями, то эти частицы ничем не хуже других частиц. Так, на сегодняшний день механизм Дирака полностью исключен и является научным курьезом. Последний аргумент – нарушение причинности. Следствие события всегда должно быть после того, как это событие произошло. В релятивистской теории это незыблемый факт. Явным вычислением покажем, что в релятивистской квантовой механике, несмотря на внушительное число достижений, есть нарушение причинности.

## Нарушение причинности

Пусть есть некоторое квантовое состояние  $|\vec{x}\rangle$  в трехмерной точке  $\vec{x}$ . Вычислим амплитуду перехода из этой точки в другую точку  $\vec{y}$  через время  $t$ . Для этого подействуем на состояние  $|\vec{x}\rangle$  оператором эволюции.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi,$$

Уравнение Шредингера будем рассматривать как релятивистское. Тогда решение можно записать в виде:

$$\psi(t) = e^{-i\hat{H}t} \psi(0).$$

$e^{-i\hat{H}t}$  – **оператор эволюции во времени**, переводящий состояние из нулевого момента времени в момент  $t$ .

Запишем теперь амплитуду перехода из одного состояния в другое:

$$\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}, t) = \langle \vec{y} | e^{-i\hat{H}t} | \vec{x} \rangle.$$

Найдем решение этого уравнения в нерелятивистской теории Шредингера. Добавим операторную единицу в виде разложения по базисным состояниям с определенными импульсами:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = 1 \rightarrow$$

$$\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}, t) = \langle \vec{y} | e^{-i\hat{H}t} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} | e^{-i\hat{H}t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| | \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} | \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\hat{H}t} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| | \vec{x} \rangle,$$

$$\hat{H} |\vec{p}\rangle = E_p |\vec{p}\rangle \rightarrow e^{-i\hat{H}t} |\vec{p}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hat{H}t)^n}{n!} |\vec{p}\rangle.$$

Для второго слагаемого:

$$(-i\hat{H}t)^2 |\vec{p}\rangle = (-it)^2 \hat{H} \hat{H} |\vec{p}\rangle = (-it)^2 \hat{H} E_p |\vec{p}\rangle = (-iE_p t)^2 |\vec{p}\rangle \rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hat{H}t)^n}{n!} |\vec{p}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iE_p t)^n}{n!} |\vec{p}\rangle = e^{-iE_p t} |\vec{p}\rangle.$$

Вспомним:

$$\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = e^{+i\vec{p}\vec{x}}.$$

Тогда выражение для амплитуды можно записать в виде:

$$\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{p}\vec{y}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} e^{-iE_p t} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-iE_p t} e^{+i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})}.$$

Проверим, можно ли перейти из точки  $\vec{x}$  в точку  $\vec{y}$ , если они разделены интервалом, который нельзя преодолеть за время  $t$ , двигаясь со скоростью  $c$ . Введем интервал:

$$(x - y)^2 = t^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 = t^2 - (-\vec{r})^2 < 0,$$

Такой интервал называется **причинно-несвязанным**.

1) Нерелятивистское выражение:

$$E_p = \frac{\vec{p}^2}{2m} \rightarrow \mathcal{A} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{p^2}{2m}t + i\vec{p}\vec{r}},$$

$$d^3p = p^2 dp \sin \theta d\theta d\varphi, \quad \text{пусть } \vec{p}\vec{r} = pr \cos \theta,$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty p^2 dp e^{-i\frac{p^2}{2m}t + i\cos \theta pr} = [d\theta \sin \theta = -d \cos \theta] =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^\infty p^2 dp e^{-i\frac{p^2}{2m}t + i\cos \theta pr} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \frac{e^{+ipr \cos \theta} - e^{-ipr \cos \theta}}{2ipr} \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 ir} \int_0^\infty p dp e^{-i\frac{p^2}{2m}t} (e^{+ipr} - e^{-ipr}) = \left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{3/2} e^{-\frac{im\vec{r}^2}{2t}} \neq 0.$$

При  $t^2 < \vec{r}^2$  амплитуда не обращается в ноль. Однако в нерелятивистской теории скорость света формально стремится к бесконечности. Поэтому в этой теории сигналы могут переходить из точки  $\vec{x}$  в точку  $\vec{y}$  за бесконечно малое время.

2) Рассмотрим тот же вывод, но с релятивистским соотношением между энергией и импульсом:

$$E_p = \sqrt{p^2 + m^2}.$$

И изменим единичный оператор.

$$\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}, t) = \langle \vec{y} | e^{-i\hat{H}t} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} | \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\hat{H}t} \frac{|\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|}{2E_p} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} | \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\hat{H}t} \frac{|\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \vec{x} \rangle}{2E_p},$$

$$\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \sqrt{2E_p} e^{+i\vec{p}\vec{x}} \rightarrow$$

$$\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-iE_p t} e^{+i\vec{p}\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^2 ir} \int_0^\infty p dp e^{-iE_p t} (e^{+ipr} - e^{-ipr}),$$

$$\int_0^\infty p dp e^{-iE_p t - ipr} = \int_0^{-\infty} p dp e^{-iE_p t + ipr} \rightarrow$$

$$\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2 ir} \left( \int_0^\infty + \int_{-\infty}^0 \right) p dp e^{-iE_p t + ipr} = \frac{1}{(2\pi)^2 ir} \int_{-\infty}^\infty p dp e^{-iE_p t + ipr}.$$

Отсюда можно получить ответ в виде функции Бесселя, которую нужно рассматривать графически или через асимптотики простыми функциями. Сделаем приближения и определим характер поведения этой функции. Для это нужно использовать приемы оценки интегралов. Чтобы реализовать эту идею можно построить функцию, которая будет являться фазой экспоненты:

$$e^{-iE_p t + i p r} = e^{-i\varphi(p)}, \quad \varphi(p) = E_p t - p r.$$

В данном случае заметим, что при стремлении импульса к бесконечности, получаем быстро осциллирующие функции, но с разными знаками в экспонентах, поэтому будет очень узкая полоса импульсов, связанная с  $r$  и  $t$ , в которой интеграл не занулится:

$$\varphi'(p) = 0 = E'(p)t - r = \frac{p}{E_p} t - r \rightarrow p t = r E_p \rightarrow$$

$$p^2 t^2 = r^2 E_p^2 = r^2 (p^2 + m^2), \quad p^2 = \frac{(m r)^2}{t^2 - r^2} \rightarrow$$

$$p = \frac{i m r}{\sqrt{r^2 - t^2}}$$

$$E_p = \sqrt{-\frac{m^2 r^2}{r^2 - t^2} + m^2} = \sqrt{-\frac{m^2 r^2}{r^2 - t^2} + m^2} = \frac{m}{\sqrt{r^2 - t^2}} \sqrt{-t^2} = \frac{i m t}{\sqrt{r^2 - t^2}}$$

Теперь можно записать выражение для фазы:

$$\varphi(p) = \frac{i m t^2}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{i m r^2}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{i m}{\sqrt{r^2 - t^2}} (t^2 - r^2) = -i m \sqrt{r^2 - t^2} \rightarrow$$

$$e^{-i\varphi(p)} = e^{-m \sqrt{r^2 - t^2}} \neq 0.$$

Это выражение экспоненциально затухает в причинно-несвязанной области и при этом не равно нулю. **Релятивистская квантовая механика нарушает причинность.** Это означает, что есть что-то неправильное в интерпретации этой теории.

Итак, все описанные трудности, в том числе нарушение причинности, закрывает возможность рассматривать релятивистскую квантовую теорию как последовательную теорию, которую можно применять для описания квантовой физики на больших скоростях. **Необходимо сменить интерпретацию:** волновую функцию в уравнении КФГ, волновую функцию в уравнении Дирака мы будем считать теперь полями. Поля. – реальные объекты, которые могут находиться во Вселенной. Хороший пример – электромагнитное поле, описываемое четырехмерным потенциалом. У полей в каждой точке пространства-времени есть некоторый набор вполне осязаемых величин. В точке поля могут обладать плотностью энергии  $\rho_E$ , плотностью импульса  $\rho_p$ , давлением и т.д. в отличие от волновых функций, которые живут в своих отдельных пространствах.

Поля могут быть как классическими, так и квантовыми. Рассмотрим сначала гипотезу о том, что волновые функции – классические поля. В ходе этого рассмотрения будет получено противоречие, после чего станет очевидна необходимость рассматривать квантовые поля. Будет показано, что квантовое поле, описываемое в уравнении Дирака отвечает статистике Ферми-Дирака, а поле в уравнении Клейна-Фока-Гордона

описывается статистикой Бозе-Эйнштейна. После снятия противоречий появится стройная картина, в рамках которой можно будет проводить конкретные вычисления.

## Лекция 14. Основы классической теории поля

### Основы классической теории поля

Рассмотрим простые примеры, например, распространение света в прозрачной среде. Пусть луч света распространяется из точки А в вакууме, при попадании в прозрачную среду, луч движется под меньшим углом к нормали границы раздела сред. На выходе из этой прозрачной среды в вакуум, угол распространения света становится прежним, луч попадает в точку В (рис. 14.1).

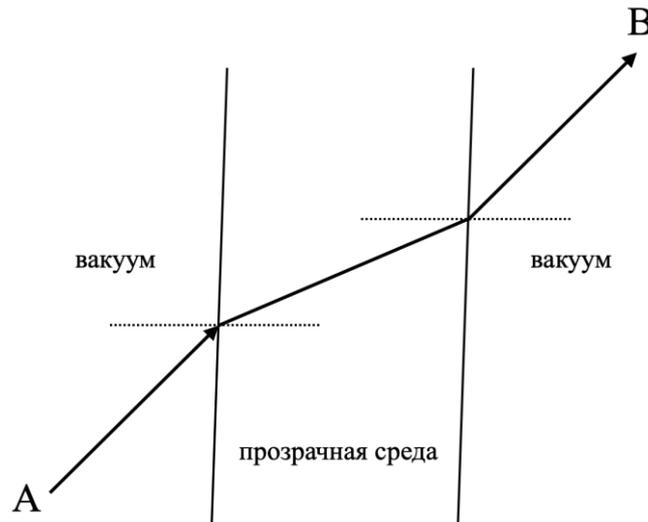


Рис. 14.1. Преломление луча в прозрачной среде.

В 1862 году Ферма сформулировал правило для распространения света между точками А и В. Он постулировал **принцип наименьшего времени**: свет распространяется, затрачивая минимальное время, требуемое для преодоления пути. Отсюда можно вывести **закон Снелиуса**.

Сегодня принцип наименьшего времени рассматривается как частый случай другого принципа – **принципа наименьшего действия (экстремального действия)**.

#### **Принцип экстремального действия**

Представим пространственно-временную диаграмму и рассмотрим две точки А и В, между которыми под действием некоторых сил движется некоторое тело. В классической механике такие задачи решаются с использованием закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = F.$$

Решив уравнение, получим траекторию.

Рассмотрим задачу с другой стороны. Изобразим другие траектории, отличные от истинной. Чем они отличаются? Для каждой траектории можем определить средние кинетическую и потенциальную энергии:

$$\bar{T} = \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m(\dot{x}(t))^2}{2},$$

$$\bar{V} = \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} dt V(x(t)),$$

где  $\tau = t_2 - t_1$  – временной интервал.

Параметризуем траектории: траектория  $x(t)$  задается уравнением Ньютона,  $x(t) + \delta x(t)$  – произвольная траектория, если  $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$ . Определим некоторый параметр и вычислим средние значения энергий для всех траекторий.

Параметром  $\varepsilon$  параметризуем отклонение траектории от истинной. Построим график (рис. 14.2). По горизонтальной оси отложим параметр  $\varepsilon$ , по вертикальной – разность средних значений потенциальной и кинетической энергий. При  $\varepsilon = 0$  будем считать, что траектория совпадает с истинной. В этом случае зависимость  $\bar{T} - \bar{V}$  от  $\varepsilon$  принимает экстремальное значение – минимум или максимум.

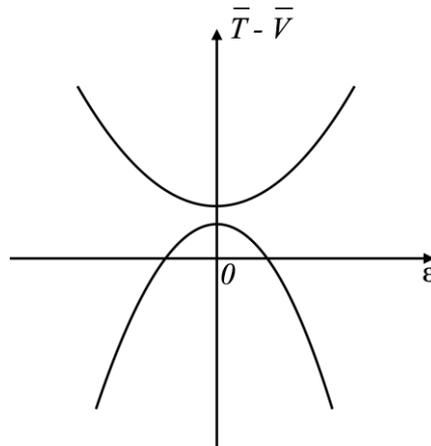


Рис. 14.2. Отклонение траектории от истинной в зависимости от параметра  $\varepsilon$ .

Например, в качестве дополнительной траектории можно рассмотреть следующее:

$$\varepsilon \sin \pi \frac{t - t_1}{\tau} \rightarrow \text{при } t = t_1 \sin \pi \frac{t - t_1}{\tau} = 0, \quad \text{при } t = t_2 \sin \pi \frac{t - t_1}{\tau} = 0.$$

Интересно, что, просто посмотрев на семейство всевозможных траекторий, можно заметить, что есть величина  $L = \bar{T} - \bar{V}$ , уникальная для истинной траектории. ***L - функция Лагранжа:***

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x).$$

Посмотрим, как эта функция приводит к уравнению движения. Для этого определим величину ***действия:***

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \tau(\bar{T} - \bar{V}).$$

Вычислим вариацию действия вокруг предполагаемой истинной траектории:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right], \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d \delta x(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \rightarrow \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta x(t) \left[ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \right] + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta x(t) \left[ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \right]. \end{aligned}$$

Потребуем  $\delta S = 0$  для любых  $\delta x(t)$ . Это возможно только при

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] = 0.$$

Полученное уравнение – **уравнение Эйлера-Лагранжа**. Решением этого дифференциального уравнения будет истинная траектория  $x(t)$ .

Уравнение Эйлера-Лагранжа эквивалентны уравнению Ньютона:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} = F.$$

Однако уравнение Эйлера-Лагранжа гораздо более полезно, поскольку обобщается на случай полей и позволяет использовать принцип наименьшего действия для них.

Теперь можно вернуться к исходной формуле и записать:

$$\delta S = \tau(\delta \bar{T} - \delta \bar{V}) = 0$$

Только такая траектория, которая на которой изменение кинетической энергии сопровождается точно таким же изменением потенциальной энергии, и есть истинная траектория.

Воспроизведем теперь принцип наименьшего времени Ферма. Обратим внимание на то, что свет, электромагнитная волна, при прохождении через прозрачные среды не меняет своей энергии. Тогда:

$$S = \tau E, \quad \delta S = 0 = \delta \tau.$$

Поэтому принцип Ферма – частный случай принципа экстремального действия для задач, в которых энергия не изменится.

**Одномерная задача о бесконечном числе точек, соединенных пружинами**

В качестве первого шага в сторону теории поля рассмотрим систему из бесконечного числа материальных точек, расположенных вдоль одной линии и соединенных между собой пружинами (первое приближение к аналогии квантовых с матрицами, приведенной в первых лекциях) (рис. 14.3).



Рис. 14.3. Система материальных точек, соединенных пружинами.

Запишем функцию Лагранжа для такой системы:

$$L = \sum_i \frac{m\dot{x}_i^2}{2} - V = \sum_i \frac{m\dot{x}_i^2}{2} - \frac{1}{2!} \sum_{i,j} k_{ij}x_i x_j - \frac{1}{3!} \sum_{i,j,m} k_{ijm}x_i x_j x_m - \dots$$

Обобщим уравнение Эйлера-Лагранжа на такую систему. Каждая переменная является независимой переменной, тогда уравнение Эйлера-Лагранжа преобразуется в систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0.$$

Опуская кубические отклонения запишем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= m\dot{x}_i; \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{1}{2} \sum_{m,n} k_{mn}x_m x_n \right) = -\frac{1}{2} \sum_{m,n} k_{mn} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_m x_n), \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (x_m x_n) &= \frac{\partial x_m}{\partial x_i} x_n + \frac{\partial x_n}{\partial x_i} x_m = \delta_{mi}x_n + \delta_{ni}x_m \rightarrow \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -\frac{1}{2} \sum_{m,n} k_{mn} [\delta_{mi}x_n + \delta_{ni}x_m] = -\frac{1}{2} \sum_n k_{in}x_n - \frac{1}{2} \sum_m k_{mi}x_m. \end{aligned}$$

Так как второе слагаемое в Лагранжиане такой системы симметрично по индексам  $i$  и  $j$ , то  $k_{ij}$  также симметрично. Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_n k_{in}x_n.$$

Подставим полученные выкладки в уравнения Эйлера-Лагранжа, получим систему:

$$m\ddot{x}_i + \sum_n k_{in}x_n = 0.$$

Эту систему удобно переписать в виде матричного уравнения:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \Omega = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\ddot{\vec{x}} + \Omega \vec{x} = 0.$$

Один из способов решения такого уравнения – диагонализация матрицы  $\Omega$ . Пусть

$$\vec{x} = U \vec{y} \rightarrow$$

$$U \ddot{\vec{y}} + \Omega U \vec{y} = 0 \rightarrow U^T U \ddot{\vec{y}} + U^T \Omega U \vec{y} = 0 \rightarrow \ddot{\vec{y}} + U^T \Omega U \vec{y}.$$

Выберем  $U$  таким образом, чтобы матрица  $U^T \Omega U$  была диагональной:

$$U^T \Omega U = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{pmatrix}.$$

Так, получаем систему линейно независимых уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = 0 \\ \dots \\ \ddot{y}_N + \omega_N^2 y_N = 0. \end{cases}$$

Решение каждого из этих уравнений хорошо известно:

$$y_i = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t.$$

Итак, были найдены собственные значения  $\omega_i^2$  матрицы  $\Omega$  и собственные векторы  $u_i$ . Теперь исходная переменная, отклонение от положения равновесия системы в задаче связанных между собой пружинами точек, есть самая общая сумма колебаний с определенными собственными частотами. Теперь любое колебание можем представить в виде суперпозиции колебаний с собственными частотами. *Это хорошая аналогия для квантовой теории поля, когда свободные поля будут сталкиваться друг с другом, но не будут взаимодействовать (частоты не изменяются).* Взаимодействие в механической системе точек с пружинами появляется при включении кубических членов лагранжиана – в уравнении Эйлера-Лагранжа появятся квадратичные слагаемые, приводящие к изменению частот встречных волн. Аналогом в квантовой теории поля будет являться взаимодействие.

Теперь, когда рассмотрена одномерная цепочка (рис. 14.3.), можно постепенно уточнять и усложнять это рассмотрение. Возможно перейти к двумерной и трехмерной моделям (рис. 14.4). Разработанный формализм Эйлера-Лагранжа позволяет достаточно прямолинейно рассмотреть и двумерную цепочку. Необходимо только суметь записать потенциальную и кинетическую энергии.

Трехмерная система является хорошей рабочей моделью, являющейся самой близкой аналогией к «матрацу» квантовых полей.

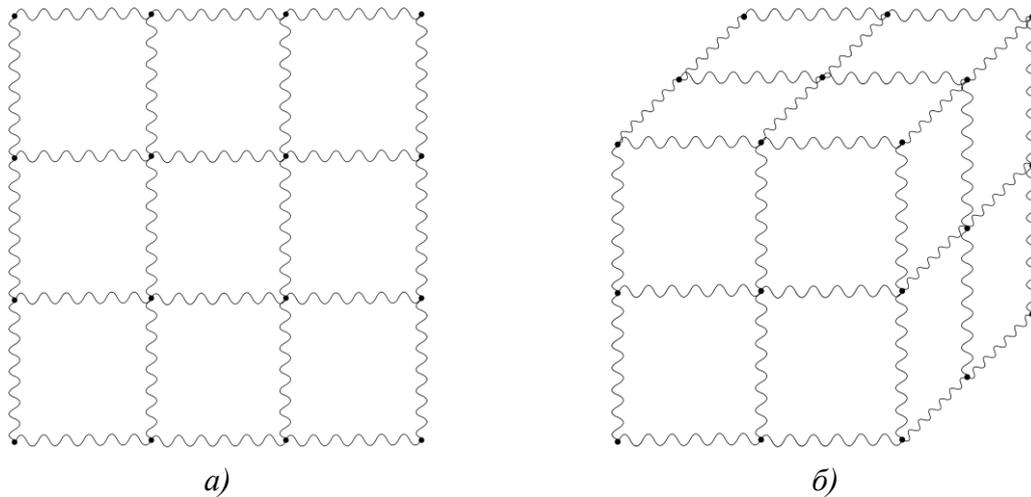


Рис. 14.4. а) Двумерная и б) трехмерная модели системы материальных точек, связанных пружинами.

### Поле

К понятию поля можно прийти следующим образом: количество точек, соединенных между собой, устремляется к бесконечности. Тогда будут точки с координатами  $\vec{x}_i$ . Но если будем рассматривать куб с количеством точек, например, порядка числа Авогадро, издалека, то все точки будут обладать примерно одной координатой. Далее будет еще один куб, но с другой координатой и т.д. Кучу точек в одном кубе можно заменить на некоторое поле, которое будет описывать величину, которую эти точки представляют, которая определена в точке, являющейся средней точкой для точек в кубике:

$$\vec{x}_i \rightarrow \Phi(\vec{x}).$$

Тогда  $\dot{\vec{x}}_i$  – изменение во времени этой функции:

$$\dot{\vec{x}}_i \rightarrow \dot{\Phi}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}_i \rightarrow \Phi(\vec{x}, t).$$

Это простое правило позволяет перейти от точек, каким-то образом соединенных или не соединенных, к некоторой непрерывной величине, являющейся полем.

Вернемся теперь к определению действия и будем говорить о полях, а не о точках:

$$L = L(\Phi, \dot{\Phi}, t) \rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\Phi, \dot{\Phi}, t), \quad \delta S = 0 \rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \delta \dot{\Phi} \right],$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \delta \Phi \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \right] \delta \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \delta \dot{\Phi} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \right] \right] \delta \Phi + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \delta \Phi \right] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \right] \right] \delta \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \delta \Phi \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \right] \right] \delta \Phi \rightarrow \\ &\quad \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение – уравнение Эйлера-Лагранжа для поля. Однако в этом уравнении явно выделено время.

Сформулируем действие для релятивистской классической теории поля:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\Phi, \dot{\Phi}) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

$\mathcal{L}$  – *плотность функции Лагранжа, Лагранжиан*. Так, была получена релятивистская форма действия с использованием Лагранжиана, зависящего от поля и всех его частных производных по координатам.

Обратим внимание на размерности:

$$\begin{cases} [S] = m^0 \\ [d^4x] = m^{-4} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{L}] = m^4.$$

Кроме того, в релятивистской теории будем требовать, чтобы Лагранжиан был лоренц-инвариантным. Этих требований достаточно, чтобы строить разумные Лагранжианы без апелляции к шарикам на пружинах.

Теперь получим уравнение движения для релятивистских полей из требования экстремума действия:

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &= \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \right], \\ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right] &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu \delta = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \rightarrow \\ \delta S &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] \right] \delta \Phi + \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right]. \end{aligned}$$

Второе слагаемое по теореме Гаусса может быть сведено к поверхностному интегралу, но эта поверхность будет ограничивать трехмерный объем. Потребуем, чтобы вариация по всей этой ограничивающей поверхности обращалась в ноль. Тогда второе слагаемое действительно обратится в ноль. Окончательно получим уравнение:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] = 0.$$

### Уравнение Клейна-Фока-Гордона для поля

В качестве примера получим уравнение Клейна-Фока-Гордона из определенного Лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \Phi) (\partial^\alpha \Phi) - \frac{m^2}{2} \Phi^2.$$

Такой Лагранжиан должен быть релятивистски-инвариантным объектом.  $\Phi$  – релятивистски-инвариантна, как и  $\Phi^2$ , но производная теряет инвариантность, при этом скалярное произведение двух 4-векторов – релятивистский инвариант. Коэффициенты  $\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$  необходимы для получения правильного уравнения КФГ.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -m^2 \Phi;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \Phi)} ((\partial_\alpha \Phi) (\partial^\alpha \Phi)) = \frac{1}{2} \frac{\partial (\partial_\alpha \Phi)}{\partial (\partial_\mu \Phi)} (\partial^\alpha \Phi) + \frac{1}{2} \frac{\partial (\partial^\alpha \Phi)}{\partial (\partial_\mu \Phi)} (\partial_\alpha \Phi) = \\ &= \delta_{\alpha\mu} \partial^\alpha \Phi = \partial^\mu \Phi. \end{aligned}$$

Итак, запишем:

$$-m^2 \Phi - \partial_\mu \partial^\mu \Phi = -(\partial^2 + m^2) \Phi = 0.$$

Полученное уравнение – уравнение не на волновую функцию, а на поле.

## Лекция 15. Теорема Нётер

### Теорема Нётер

**Теорема Нётер** связывает некоторые симметрии Лагранжиана с законами сохранения, как будет показано на конкретных примерах. Из симметрии Лагранжиана относительно сдвига по времени, например, следует сохранение энергии. Если перенос начала системы отсчета в другую точку не изменяет Лагранжиан, то сохраняется трехмерный импульс. Если оборот вокруг некоторой оси не изменяет Лагранжиан, то сохраняется орбитальный момент.

В 1915 году Гильберт предложил Эмми Нётер разобрать вопрос сохранения энергии в общей теории относительности. Работая над этой темой, она открыла теоремы Нётер.

В конце предыдущей лекции было определено действие:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)).$$

Экстремум этого действия (минимум или максимум) приводит к тому, что поле  $\Phi(x)$  подчиняется уравнениям движения, которые называются *уравнениями Эйлера-Лагранжа* и имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial^\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \Phi)} \right] = 0.$$

Если расписать Лагранжиан в терминах поля  $\Phi(x)$  и его производных, то будут получены уравнения движения, которым подчиняются эти поля.

Следующий вопрос – насколько однозначно поле  $\Phi(x)$ . Можно ли сделать следующее непрерывное преобразование:

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \delta\Phi(x),$$

чтобы при этом уравнения движения остались неизменными? Если уравнения движения остаются неизменными, то и вся связанная с таким полем физика остается неизменной. Очевидно, что если при таком преобразовании Лагранжиан переходит сам в себя:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L},$$

то уравнения движения остаются неизменными. Кроме того, можно допустить следующее: пусть Лагранжиан изменится на некоторую величину, но такую, чтобы действие оставалось неизменным. Тогда вся физика остается неизменной, поскольку уравнение движения выводится из принципа экстремума действия. Для того, чтобы действие оставалось неизменным, к лагранжиану может быть добавлено слагаемое:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu J^\mu$$

где  $\partial_\mu J^\mu$  четыре-дивергенция от тока. Тогда

$$S \rightarrow S + \int d^4x J^\mu.$$

Далее по теореме Гаусса, которую можно обобщить с трехмерного на четырехмерный случай, реализуется переход к интегралу по трехмерной поверхности (нормаль ориентирована с помощью индекса  $\mu$ ):

$$\int d^4x J^\mu = \int d^3\Sigma_\mu J^\mu.$$

Если ток  $J^\mu$  убывает на бесконечной границе этой трехмерной поверхности быстрее, чем растет площадь, которая в данном случае равна объему этой трехмерной поверхности, то весь интеграл обращается в ноль.

Выделим следствия. Для этого найдем изменение Лагранжиана при вышеописанном преобразовании поля:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\delta(\partial^\mu\Phi) = \partial_\mu J^\mu.$$

Воспользуемся математическими преобразованиями, упростим левую часть:

$$\delta(\partial^\mu\Phi) = \partial^\mu\delta\Phi;$$

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\delta\Phi\right) = \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\right)\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\partial^\mu(\delta\Phi) \rightarrow$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\partial^\mu(\delta\Phi) = \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\delta\Phi\right) - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\right)\delta\Phi = \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\delta\Phi\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi.$$

Тогда:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\delta\Phi\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi = \partial_\mu J^\mu \rightarrow$$

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\delta\Phi - J_\mu\right) = 0.$$

Таким образом, из того, что при непрерывном преобразовании поля Лагранжиан может измениться на величину  $\partial_\mu J^\mu$  следует сохранение некоторого 4-тока.

Пусть

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}\delta\Phi - J_\mu = j_\mu,$$

тогда запишем **теорему Нётер** о сохранении тока:

$$\partial^\mu j_\mu = 0.$$

Наличие симметрии Лагранжиана и инвариантность действия при непрерывном преобразовании поля приводят к сохранению 4-тока.

Теорему можно записать в другом виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}j_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int j_0(t, \vec{x}) d^3x = - \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) d^3x = - \int d^2\hat{s} \vec{j} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t) = 0,$$

где  $Q = \int j_0(t, \vec{x}) d^3x$ . Таким образом,  $Q = const$ .

## Примеры применения теоремы

### Пример 1. $\Phi$ - комплексное поле

Рассмотрим скалярное комплексное поле  $\Phi$ . В качестве двух компонент удобно использовать  $\Phi$  и  $\Phi^*$  - реальная и мнимая части.

Лагранжиан для комплексного поля:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi^* - m^2 \Phi \cdot \Phi^* \quad (15.1)$$

Разберем, как строятся такие Лагранжианы. Как было показано ранее, Лагранжиан должен быть релятивистским инвариантом, поскольку действие – релятивистский инвариант:

$$S = \int d^4x \mathcal{L},$$

где  $d^4x$  – также релятивистский инвариант. Тогда  $\mathcal{L}$  - релятивистский инвариант. Если  $\mathcal{L}$  зависит от  $\Phi$  и  $\Phi^*$ , то необходимо составить релятивистски инвариантные комбинации, которых может быть много.

Поскольку речь идет о свободной теории, то количество комбинаций уменьшается. Можно составить комбинации из степеней поля, поскольку оно само по себе является релятивистским инвариантом. Кроме того, Лагранжиан зависит от частных производных.  $\partial_\mu \Phi$  – 4-вектор, не является релятивистским инвариантом, поэтому требуется домножить его на другой 4-вектор. Любая степень такого произведения 4-векторов будет релятивистским инвариантом. Таким образом, возможны варианты:

$$\Phi^n, \quad \Phi^n \cdot \Phi^{*m}, \quad \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi, \quad \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi^*, \quad \partial_\mu \Phi^* \cdot \partial^\mu \Phi^*.$$

При построении Лагранжиана необходимо учитывать, что действие – безразмерная величина. Значит Лагранжиан должен обладать размерностью, обратной размерности четырехмерного объема:

$$[d^4x] = m^{-4} \rightarrow [\mathcal{L}] = m^4.$$

Тогда единственная комбинация, обладающая правильной размерностью и являющаяся при этом релятивистским инвариантом – выражение. (15.1).

Коэффициенты 1 и  $m^2$  получены из уравнения движения. Проверим, что именно с такими коэффициентами будет получено правильное уравнение движения. Для скалярного поля получим уравнение Клейна-Фока-Гордона.

Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \Phi)} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \Phi^*)} \right) = 0 \end{cases}$$

Распишем подробно:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \Phi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial^\mu \Phi)} (\partial_\alpha \Phi \cdot \partial^\alpha \Phi^*) = \frac{\partial}{\partial (\partial^\mu \Phi)} (\partial^\alpha \Phi \cdot \partial_\alpha \Phi^*) = \partial_\alpha \Phi^* \delta_{\alpha\mu} = \partial_\mu \Phi^*.$$

Подставим Лагранжиан в уравнения движения и перепишем:

$$\begin{aligned} -m^2 \Phi^* - \partial^\mu \partial_\mu \Phi^* &= 0 \rightarrow \\ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Phi^* &= 0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение – уравнение Клейна-Фока-Гордона для поля  $\Phi^*$ . Понятно, что второе уравнение приведет к уравнению движения для поля  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} -m^2 \Phi - \partial^\mu \partial_\mu \Phi &= 0 \rightarrow \\ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Phi &= 0. \end{aligned}$$

Определим, есть ли симметрия у записанного Лагранжиана. Применим теорему Нётер, введем преобразование:

$$\begin{cases} \Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi \\ \Phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \Phi^* \end{cases}, \quad \text{тогда } \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \quad \text{где} \\ \alpha = \text{const, веществ.} \end{cases}$$

Лагранжиан остается неизменным, а значит по теореме Нётер сохраняется некоторый ток:

$$J^\mu = 0, \quad j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \delta \Phi^*.$$

Разложим в ряд  $\Phi$  при малом  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{i\alpha} \Phi = (1 + i\alpha) \Phi \rightarrow \\ \delta \Phi &= i\alpha \Phi, \\ \delta \Phi^* &= -i\alpha \Phi^*, \end{aligned}$$

тогда:

$$j^\mu = \partial^\mu \Phi^* i\alpha \Phi + \partial^\mu \Phi (-i\alpha \Phi^*) = i\alpha (\partial^\mu \Phi^* \Phi - \partial^\mu \Phi \Phi^*).$$

Ток  $j^\mu$  сохраняется при любом  $\alpha$ , значит сохраняется

$$j^\mu = i(\partial^\mu \Phi^* \Phi - \partial^\mu \Phi \Phi^*).$$

Такой же ток сохранялся в уравнении Клейна-Фока-Гордона. Но когда уравнение КФГ использовалось как квантово-механическое уравнение для релятивистской квантовой механики, считая, что  $\Phi$  – волновая функция, тогда в этом токе нулевой компоненте была дана интерпретация плотности вероятности. Эта плотность вероятности оказывалась знаконеопределенной, что является парадоксом. При рассмотрении поля

сохраняющийся ток – следствие инвариантности Лагранжиана, нулевая компонента этого тока – плотность электрического заряда. Эта величина, конечно, может иметь любой знак. Таким образом, парадокс полностью исчезает при смене интерпретации.

Сейчас было рассмотрено комплексное поле, но комплексное поле содержит в себе вещественное поле в качестве частного случая. Если  $\Phi = \Phi^*$ , то  $j^\mu = 0$ .

Тогда рассматривая комплексное скалярное поле, можно сделать следующие выводы:

- 1) Если поле действительно комплексное, то сохраняется некоторый ток, интерпретируемый как ток электрического заряда.
- 2) Если  $\Phi = \Phi^*$ , то поле нейтральное.

Триплет пионов является хорошим примером для иллюстрации этого утверждения.

### Пример 2. Тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$

Здесь появятся законы сохранения, связанные с законами сохранения энергии и импульса. В этом случае рассмотрим изменение системы координат. Сместим всю систему координат (в том числе и время) на некоторый постоянный вектор  $a^\mu$ :

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu.$$

Тогда переход для поля следующий:

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x + a).$$

Пусть  $a$  бесконечно малое, тогда по формуле Тейлора:

$$\Phi(x + a) = \Phi(x) + a^\nu \partial_\nu \Phi(x),$$

где изменение поля

$$a^\nu \partial_\nu \Phi(x) = \delta\Phi(x).$$

При таком преобразовании Лагранжиан испытает трансформацию:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x + a) = \mathcal{L}(x) + a^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x),$$

где изменение Лагранжиана

$$a^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x) = \delta\mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu,$$

$$J^\mu = a^\mu \mathcal{L}.$$

По теореме Нётер должен сохраняться ток:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi - J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} a^\nu \partial_\nu \Phi(x) - a^\mu \mathcal{L}.$$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu,$$

$$a^\nu \partial_\nu = \partial^\nu a_\nu \rightarrow$$

$$j^\mu = a_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = a_\nu T^{\mu\nu}.$$

Тензор  $T^{\mu\nu}$  – *тензор энергии-импульса*.

Итак, теорема Нётер утверждает, что сохраняется ток  $j^\mu = a_\nu T^{\mu\nu}$ , где вектор  $a_\nu$  константный. Сохранение 4-тока означает сохранение 4-дивергенции:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0 \rightarrow \\ \partial_\mu a_\nu T^{\mu\nu} &= 0 \rightarrow a_\nu (\partial_\mu T^{\mu\nu}) = 0. \end{aligned}$$

Тогда приходим к выводу:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Запись представляет собой 4 уравнения:

$$\begin{cases} \partial_\mu T^{\mu 0} = 0 \\ \partial_\mu T^{\mu 1} = 0 \\ \partial_\mu T^{\mu 2} = 0 \\ \partial_\mu T^{\mu 3} = 0 \end{cases} - 4 \text{ закона сохранения.}$$

Первое уравнение отвечает закону сохранения энергии. Второе – закону сохранения импульса вдоль первой оси  $x$ , третье – закону сохранения импульса вдоль оси  $y$ , четвертое – закону сохранения импульса вдоль оси  $z$ .

Сам тензор энергии-импульса состоит из 16 компонент. Расшифруем каждую из них.

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

$T^{00}$  – плотность энергии;

$T^{10}, T^{20}, T^{30}$  – плотность потока энергии;

$T^{01}, T^{02}, T^{03}$  – плотность импульса;

$T^{11}$  – давление на площадку, перпендикулярную оси  $x$ ,  $T^{22}$  – давление на площадку, перпендикулярную оси  $y$ ,  $T^{33}$  – давление на площадку, перпендикулярную оси  $z$ .

Остальные элементы  $T^{ij}$ , где  $i \neq j$ , являются элементами тензора напряжения (давление вдоль оси, соответствующей индексу  $i$ , движение вдоль перпендикулярной оси – хорошей аналогией является тубик зубной пасты).

В 2018 году коллаборация JLab представила результаты интересного измерения. При помощи рассеяния электронов на протонах было измерено давление внутри протона. На рисунке 15.1 представлен график, где по горизонтальной оси отложено расстояние от центра протона  $r$ , по вертикальной оси  $r^2 p(r)$ , где  $p(r)$  – давление.

Давление в центре нулевое, что соответствует свободным кваркам. Затем давление вырастает до  $10^{35}$  Па, что больше давления в центре нейтронной звезды. На расстоянии от центра примерно 0.6 фм давление обращается в ноль, затем переходит в отрицательную область, поскольку ядерные силы, направленные внутрь протона, начинают втягивать кварки обратно (похоже на давление внутри мыльного пузыря), стабилизируя протон. Общая картина соответствует асимптотической свободе кварков в нуле и связыванию кварков (конфайнменту) на расстоянии  $r = 1$ .

Позднее проведение подобного исследования, вероятно, связано с тем, что рассматривая квантовую теорию поля, авторы обычно не изучали элементы тензора напряжения и давления.

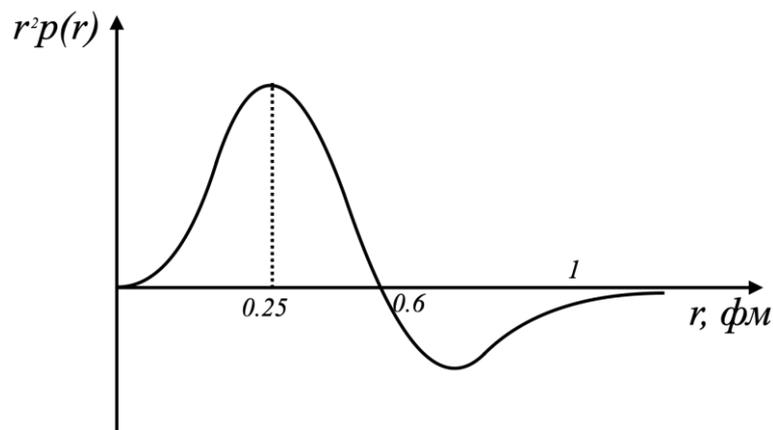


Рис. 15.1. График зависимости давления в протоне от расстояния  $r$  от его центра.

### Решение парадоксов в классической теории поля

В начале курса была рассмотрена нерелятивистская квантовая механика, приводящая к ряду ограничений. Попытка релятивизации привнесла уравнение Клейна-Фока-Гордона, уравнение Дирака и то, что релятивистская квантовая механика с этими уравнениями – все равно противоречивая наука. Следующий шаг – изменение интерпретации: переход от волновых функций к квантовым полям. В начале лекции были рассмотрены уравнения движения и теорема Нётер. Рассмотрим, решает ли теорема Нётер и законы сохранения, которые из нее следуют, те противоречия теорий, рассмотренных ранее.

Теорема Нётер говорит о том, что из симметрии Лагранжиана по времени и координате следует сохранение энергии-импульса. Рассмотрим, решает ли классическая теория поля проблему с плотностью энергии. В уравнении Клейна-Фока-Гордона релятивистской квантовой механики есть два решения – с положительной и отрицательной энергией, что приводило к ряду проблем.

Согласно теореме Нётер есть тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

Рассмотрим все поля: вещественное скалярное, комплексное, векторное и спинорное.

### Вещественное скалярное поле

Лагранжиан вещественного скалярного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{m^2}{2} \Phi^2 = \frac{1}{2} (\partial_0 \Phi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 - \frac{m^2}{2} \Phi^2.$$

Самостоятельно предлагается убедиться в соответствии коэффициентов уравнению движения.

Плотность энергии для такого поля:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi)} \partial^0 \Phi - g^{00} \mathcal{L} = \partial_0 \Phi \partial^0 \Phi - \frac{1}{2} (\partial_0 \Phi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \frac{m^2}{2} \Phi^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left( (\partial_0 \Phi)^2 + (\vec{\nabla} \Phi)^2 + m^2 \Phi^2 \right). \end{aligned}$$

Полученное выражение содержит сумму трех квадратов. Это значит, что плотность энергии больше или равна нулю:

$$T^{00} \geq 0.$$

В релятивистском уравнении Клейна-Фока-Гордона присутствовала занаконеопределенность энергии, плотность энергии могла быть отрицательной. В теории классического поля плотность энергии вещественного скалярного поля больше нуля, поэтому при смене интерпретации проблема решилась автоматически.

Запишем теперь плотность импульса вдоль  $i$ -ой оси:

$$T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi)} \partial^i \Phi - g^{0i} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi)} \partial^i \Phi.$$

Применим теорему Нётер, чтобы показать следующее: если взять интеграл по трехмерному пространству от плотности энергии или от плотности импульса, то эти величины не будут зависеть от времени. Проведем подробное вычисление.

Введем энергию, обозначим ее  $H$  и определим ее следующим образом:

$$H = \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}).$$

$i$ -ая компонента импульса:

$$p^i = \int d^3x T^{0i}(t, \vec{x}).$$

Решение для свободного уравнения Клейна-Фока-Гордона:

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a(\vec{p})e^{-ipx} + a^*(\vec{p})e^{ipx}] = \Phi^*(x),$$

где  $p = (E_p, \vec{p})$ ,  $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Распишем компоненты плотности энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} e^{-i(E_p t - \vec{p}\vec{x})} &= -i e^{-i p x} \rightarrow \partial_0 \Phi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-i E_p}{\sqrt{2E_p}} [a(\vec{p}) e^{-i p x} - a^*(\vec{p}) e^{i p x}]; \\ (\partial_0 \Phi)^2 &= \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6} \frac{(-i E_p)(-i E_k)}{\sqrt{2E_p 2E_k}} [a(\vec{p}) e^{-i p x} - a^*(\vec{p}) e^{i p x}] [a(\vec{k}) e^{-i k x} - a^*(\vec{k}) e^{i k x}]; \\ \vec{\nabla} e^{-i(E_p t - \vec{p}\vec{x})} &= i \vec{p} e^{-i p x} \rightarrow \vec{\nabla} \Phi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i \vec{p}}{\sqrt{2E_p}} [a(\vec{p}) e^{-i p x} - a^*(\vec{p}) e^{i p x}]; \\ (\vec{\nabla} \Phi)^2 &= \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6} \frac{i \vec{p} i \vec{k}}{\sqrt{2E_p 2E_k}} [a(\vec{p}) e^{-i p x} - a^*(\vec{p}) e^{i p x}] [a(\vec{k}) e^{-i k x} - a^*(\vec{k}) e^{i k x}]; \\ m^2 \Phi^2 &= \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\sqrt{2E_p 2E_k}} [a(\vec{p}) e^{-i p x} + a^*(\vec{p}) e^{i p x}] [a(\vec{k}) e^{-i k x} + a^*(\vec{k}) e^{i k x}]. \end{aligned}$$

Вычислим энергию:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 x d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_p 2E_k}} [e^{-i(p+k)x} a(\vec{p}) a(\vec{k}) (-E_p E_k - \vec{p}\vec{k} + m^2) + \\ &+ e^{i(p+k)x} a^*(\vec{p}) a^*(\vec{k}) (-E_p E_k - \vec{p}\vec{k} + m^2) + e^{-i(p-k)x} a(\vec{p}) a^*(\vec{k}) (E_p E_k + \vec{p}\vec{k} + m^2) + \\ &+ e^{i(p-k)x} a^*(\vec{p}) a(\vec{k}) (E_p E_k + \vec{p}\vec{k} + m^2)]. \end{aligned}$$

Вспомним вычисление трехмерных интегралов:

$$\begin{aligned} \int d^3 x e^{-i(p+k)x} &= \int d^3 x e^{-i(E_p + E_k)t + i(\vec{p} + \vec{k})\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{k}) e^{-i2E_p t}, \\ \int d^3 x e^{-i(p-k)x} &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}). \end{aligned}$$

Тогда для энергии можем записать:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^3 2E_p} [a(\vec{p}) a(\vec{k}) e^{-i2E_p t} \delta^3(\vec{p} + \vec{k}) (-E_p E_k - \vec{p}\vec{k} + m^2) + \\ &+ a^*(\vec{p}) a^*(\vec{k}) e^{i2E_p t} \delta^3(\vec{p} + \vec{k}) (-E_p E_k - \vec{p}\vec{k} + m^2) + \\ &+ a(\vec{p}) a^*(\vec{k}) \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) (E_p E_k + \vec{p}\vec{k} + m^2) + \\ &+ a^*(\vec{p}) a(\vec{k}) \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) (E_p E_k + \vec{p}\vec{k} + m^2)] \rightarrow \\ H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} [a(\vec{p}) a(-\vec{p}) e^{-i2E_p t} (-E_p^2 + \vec{p}^2 + m^2) + \\ &+ a^*(\vec{p}) a^*(-\vec{p}) e^{i2E_p t} (-E_p^2 + \vec{p}^2 + m^2) + a(\vec{p}) a^*(\vec{p}) (E_p^2 + \vec{p}^2 + m^2) + \\ &+ a^*(\vec{p}) a(\vec{p}) (E_p^2 + \vec{p}^2 + m^2)]. \end{aligned}$$

Учтем, что  $\vec{p}^2 + m^2 = E_p^2$ , и получим следующее:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [a(\vec{p})a^*(\vec{p}) + a^*(\vec{p})a(\vec{p})].$$

Так, полная энергия скалярного поля не зависит от времени.

Если рассматриваем классическое поле, то  $a$  и  $a^*$  - функции импульса, которые можно переставлять местами. В квантовом случае была бы получена такая же формула, но  $a$  и  $a^+$  были бы операторами, переставлять которые таким образом нельзя.

Для классического поля получаем итоговое выражение для энергии:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p |a(\vec{p})|^2.$$

Тогда  $a(\vec{p})$  – амплитуда плотности вероятности найти в поле  $\Phi(x)$  импульс  $\vec{p}$ . В таком случае  $|a(\vec{p})|^2$  – плотность вероятности. В результате *полная энергия является квантово-механическим средним.*

## Лекции 16-17. Комплексное скалярное и электромагнитное поле

На прошлой лекции было рассмотрено свободное скалярное вещественное поле. Плотность энергии скалярного вещественного поля положительна. Кроме того, была вычислена полная энергия скалярного поля и показано, что она не зависит от времени. Делая точно такие же выкладки, на концептуальном уровне можно показать, что  $i$ -ая компонента импульса также не зависит от времени:

$$p^i = \int d^3x T^{0i}(t, \vec{x}) = const = \int \frac{d^3z}{(2\pi)^3} p^i |a(\vec{p})|^2.$$

### Комплексное скалярное поле

Реализуем аналогичные выкладки для комплексного поля:  $\Phi, \Phi^*$ . Запишем тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \partial^\nu \Phi^* - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Лагранжиан для такой пары полей:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi^* - m^2 \Phi \Phi^*.$$

Предлагается доказать, что плотность энергии-импульса скалярного поля больше нуля:

$$T^{00} = |\partial_0 \Phi|^2 + |\vec{\nabla} \Phi|^2 + m^2 \Phi^2 \geq 0.$$

Так, комплексное скалярное поле также не обладает отрицательной плотностью энергии. Свободное решение в случае комплексного поля записывается в виде:

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a(\vec{p})e^{-ipx} + b^*(\vec{p})e^{+ipx}]$$

Записанный Лагранжиан обладает двумя симметриями:

- 1) сдвиг относительно начала координат в четырехмерном пространстве-времени (приводит к сохранению энергии-импульса);
- 2)  $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi, \Phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \Phi^*: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ .

Сохраняется ток:

$$j^\mu = i(\partial^\mu \Phi^* \Phi - \partial^\mu \Phi \Phi^*).$$

Сохраняется электрический заряд:

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [|a(\vec{p})|^2 - |b(\vec{p})|^2].$$

Для энергии и импульса также можем записать итоговое выражение:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [|a(\vec{p})|^2 + |b(\vec{p})|^2],$$

$$p^i = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{P}_i [|a(\vec{p})|^2 + |b(\vec{p})|^2].$$

## Векторное поле с нулевой массой

Уравнения Максвелла оперируют напряженностями электрического и магнитного полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , а также токами  $\vec{j}$ . Запишем уравнения Максвелла в вакууме:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (16.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (16.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (16.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (16.4)$$

Уравнения говорят о том, что существует электрический заряд, а магнитного не существует, а также показывают связь ротора с изменениями полей во времени и токами.

Уравнения Максвелла обладают интересной историей. Уравнения, которые на самом деле предложил Максвелл, представляли собой систему из 20 уравнений с 20 неизвестными величинами. В них были перемешаны и напряженности полей, и потенциалы. Хевисайд в течение нескольких лет изучал уравнения Максвелла, и выделил суть: все можно свести к напряженностям электрических и магнитных полей, токам и их плотностям. Он переписал уравнения в векторном виде, система получила название уравнения Хевисайда-Максвелла.

Уравнения Максвелла можно еще сильнее упростить и сделать еще более компактными, введя *четырёхмерный векторный потенциал*:

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}).$$

Напряженности электрического и магнитного полей могут быть записаны в следующем виде:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Раньше часто можно было встретить утверждение о том, что  $A^\mu$  – математическая абстракция, вспомогательная величина, помогающая упростить уравнение. На уровне классической электродинамики действительно трудно понять, что более фундаментально – напряженности или  $A^\mu$ . При переходе к квантовой физике стало очевидно, что  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  следуют из  $A^\mu$ , которое в квантовой механике можно увидеть напрямую (например, эксперимент Ааронова-Бома).

Перейдем на следующий уровень. Введем *электромагнитный тензор*

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Тензор  $F^{\mu\nu}$  антисимметричный. Его компоненты записываются следующим образом:

$$F^{0i} = -F^{i0} = -\vec{E}^i,$$

$$F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} \vec{B}^*.$$

Сам электромагнитный тензор можно переписать в виде матрицы:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С этими тензорами можно составить релятивистски инварианты:

- 1)  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2);$
- 2)  $F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = 4\vec{E} \cdot \vec{B};$

Используя записанные выражения выпишем уравнения Максвелла в другом виде. Уравнения 16.1 и 16.4:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} = 0. \quad (16.5)$$

Уравнения 16.2 и 16.3:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (16.6)$$

где  $j^\nu = (\rho, \vec{j})$  – четырехмерный ток.

В терминах  $A^\mu$  уравнение 16.6 можно переписать в виде:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu.$$

Этому уравнению подчиняется векторный потенциал – функция, которую можно изменить без изменений  $F^{\mu\nu}$ . Если не изменится  $F^{\mu\nu}$ , то и уравнения Максвелла не изменятся. Легко показать, что соответствующее изменение следующее:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu f;$$

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) = F^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu f - \partial^\nu \partial^\mu f = F^{\mu\nu}.$$

Значит функцию  $A^\mu$  можно переопределить, то есть не все компоненты являются независимыми (четвертая выражается через остальные три). Это называется **калибровкой**. Можно придумать бесконечное число калибровок, запишем наиболее популярные:

- 1) калибровка Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = 0;$$

- 2) кулоновская калибровка

$$\vec{\nabla} \vec{A} = 0;$$

- 3) аксиальная калибровка

$$A^3 = 0;$$

- 4) калибровка Вееля

$$A^0 = 0.$$

Воспользуемся калибровкой Лоренца, тогда  $\partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$ . Уравнение Максвелла в таком случае принимает вид:

$$\partial^2 A^\nu = j^\nu.$$

Если рассматривать вакуум, в котором нет никаких других частиц  $j^\nu = 0$ , то уравнение упрощается до вида:

$$\partial^2 A^\nu = 0.$$

Полученное уравнение – **уравнение Клейна-Фока-Гордона с нулевой массой**. Так, масса электромагнитного поля нулевая, значит электромагнитные волны распространяются с максимально большой скоростью – скоростью света.

Введем Лагранжиан, из которого следовали бы уравнения Максвелла:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu.$$

Вспомним уравнение движения для скалярного поля:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \Phi)} \right) = 0.$$

Для векторного поля:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A_\alpha)} \right) = 0.$$

Подставим Лагранжиан в уравнение движения и проверим, будут ли получены уравнения Максвелла.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} = -\frac{\partial (j_\mu A^\mu)}{\partial A^\alpha} = -j_\mu \delta_{\mu\alpha} = -j_\alpha;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\alpha)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial^\mu A^\alpha)} (F_{\lambda\delta} F^{\lambda\delta}) = -\frac{1}{4} \frac{\partial F_{\lambda\delta}}{\partial (\partial^\mu A^\alpha)} F^{\lambda\delta} - \frac{1}{4} \frac{\partial F^{\lambda\delta}}{\partial (\partial^\mu A^\alpha)} F_{\lambda\delta} = \frac{1}{2} \frac{\partial F^{\lambda\delta}}{\partial (\partial^\mu A^\alpha)} F_{\lambda\delta},$$

$$\frac{\partial F^{\lambda\delta}}{\partial (\partial^\mu A^\alpha)} = \frac{\partial (\partial^\lambda A^\delta - \partial^\delta A^\lambda)}{\partial (\partial^\mu A^\alpha)} = \delta_{\lambda\mu} \delta_{\delta\alpha} - \delta_{\delta\mu} \delta_{\lambda\alpha} \rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\alpha)} = -\frac{1}{2} F_{\lambda\delta} (\delta_{\lambda\mu} \delta_{\delta\alpha} - \delta_{\delta\mu} \delta_{\lambda\alpha}) = -\frac{1}{2} (F_{\mu\alpha} - F_{\alpha\mu}) = -F_{\mu\alpha};$$

Полученные выражения подставим в уравнение движения:

$$-j_\alpha - \partial^\mu (-F_{\mu\alpha}) = 0 \rightarrow$$

$$\partial^\mu (F_{\mu\alpha}) = j_\alpha \rightarrow \partial_\mu F^{\mu\alpha} = j^{\nu\alpha}.$$

Записанное уравнение соответствует уравнению Максвелла (16.6).

В компактной записи уравнения Максвелла представляют собой 2 уравнения. При этом из Лагранжиана было получено только одно (16.6). Почему из динамики взаимодействия токов и векторных потенциалов не следует уравнение 16.5? Уравнение 16.5 – тривиальное уравнение, получаемое из математической структуры тензора, то есть не имеет отношения к динамике взаимодействия. Всю динамику взаимодействия определяет единственное уравнение 16.6.

Подведем итоги. В свое время Максвелл написал большой трактат, в котором было 20 уравнений с напряженностями электрических полей и потенциалами, использовалась сложная математика. Вместо векторов использовались кватернионы. Хевисайд превратил эту систему уравнений в 4 уравнения, которые, как было показано, можно преобразовать в единственное уравнение:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu.$$

Решим уравнение Максвелла в вакууме.

### Решение уравнения Максвелла в вакууме (в отсутствии токов)

В общем виде можно записать  $A^\mu$  в виде Фурье-преобразования:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (a^\mu(k)e^{-ikx} + a^{\mu*}(k)e^{+ikx}),$$

где  $a^\mu$  – неизвестная. Выбор неизвестных коэффициентов в виде  $a^\mu(k)$  и  $a^{\mu*}(k)$  обуславливает вещественность  $A^\mu(x)$ .

Уравнение Максвелла в вакууме:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 &\rightarrow \\ \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu A^\nu &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ik^\mu e^{-ikx} a^\nu(k) + ik^\mu e^{+ikx} a^{\nu*}(k)) = \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (e^{-ikx} [-ik^\mu a^\nu] + \text{к. с.}); \end{aligned}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (e^{-ikx} [(-ik_\mu)(-ik^\mu) a^\nu] + \text{к. с.});$$

$$\partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (e^{-ikx} [(-ik_\mu)(-ik^\nu) a^\mu] + \text{к. с.});$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (e^{-ikx} [-k^2 a^\nu + (k \cdot a)k^\nu] + \text{к. с.}) = 0.$$

Такие экспоненты являются независимыми решениями:

$$\psi(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{+ikx} \tilde{\psi}(k), \quad \tilde{\psi}(k) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \psi(x);$$

$$\psi(x) = 0 \rightarrow \tilde{\psi}(k) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{+ikx} 0 = 0.$$

Так, уравнение на неизвестные:

$$-k^2 a^\nu + (k \cdot a)k^\nu = 0.$$

Предположим:

1)

$$\begin{aligned} a^\nu &= a_3 k^\nu \rightarrow \\ ka &= k_\nu a^\nu = a_3 k_\nu k^\nu = a_3 k^2 \rightarrow \\ &-k^2 a_3 k^\nu + a_3 k^2 k^\nu = 0. \end{aligned}$$

Действительно,  $a^\nu = a_3 k^\nu$  является решением уравнения. Однако есть тонкость – в уравнении присутствует квадрат четырехвектора  $k$ . Ранее, при получении уравнение, которому удовлетворяет векторный потенциал  $A^\mu$ , было получено уравнение Клейна-Фока-Гордона с нулевой массой. Нулевая масса означает, что квадрат четырехвектора, равный квадрату массы, зануляется. Тогда решение  $a^\nu = a_3 k^\nu$  справедливо при  $k^2 \neq 0$ , иначе уравнение тривиально.

2) В случае электромагнитного поля  $k^2 = 0 \rightarrow$

$$k^\nu (ka) = 0 \rightarrow$$

$k$  ортогонален  $a$ .

$$\begin{aligned} ka &= 0 \rightarrow \\ a^\nu(k) &= a_3 k^\nu \rightarrow \\ ka &= a_3 k^2 = 0. \end{aligned}$$

Возможные решения:

- $k^2 = 0$ .
- $a^\nu(k) = a(k)\varepsilon^\nu(k) = a(k) \left(0, \vec{\varepsilon}(\vec{k})\right) \rightarrow ka = -\vec{k}\vec{\varepsilon}(\vec{k})a(\vec{k}) = 0 \rightarrow \vec{k}\vec{\varepsilon}(\vec{k}) = 0$ .

Легко сообразить, что для каждого вектора  $\vec{k}$  есть два линейно-независимых вектора, которые ему ортогональны:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Тогда:

$$a_n^\nu(k) = a_n(k) \left(0, \vec{\varepsilon}(\vec{k})\right), \quad n = 1, 2,$$

где нет суммирования по  $n$ .

В решениях есть некоторая математическая неаккуратность. В записи векторного потенциала присутствует интегрирование по четырехмерному  $k$ , то есть присутствует нулевая и пространственная компонент,  $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$ . В то время как в интеграле  $k_i$  являются независимыми переменными. При интегрировании по независимым переменным нельзя ожидать соблюдения равенства  $k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$ . При этом можно предположить, что  $a_3(k)$  и  $a_n(k)$  пропорциональны дельта-функции от  $k^2$ :

$$a_n(k) = \delta(k^2)\tilde{a}_n(k).$$

Снимем интегрирование по одной из переменных,  $k_0$ , и запишем решение, избавившись от неудачных обозначений:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} [a_n(\vec{k}) \varepsilon_n^\mu(\vec{k}) e^{-ikx} + a_n^*(\vec{k}) \varepsilon_n^{\mu*}(\vec{k}) e^{ikx}] + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} [a_3(\vec{k}) k^\mu e^{-ikx} + a_3^*(\vec{k}) k^\mu e^{ikx}].$$

где  $\varepsilon_n^\mu(\vec{k})$  – **вектор поляризации**, вторая часть не является наблюдаемой. Вспомним, что  $A^\mu$  определена с точностью до добавления частной производной от произвольной функции:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu f.$$

Выберем  $f(x)$  такое, что

$$f(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} [a_3(\vec{k}) e^{-ikx} + \text{к. с.}] \rightarrow$$

$$\partial^\mu f = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} [k^\mu a_3(\vec{k}) e^{-ikx} + \text{к. с.}].$$

Тогда для  $A^\mu(x)$  продольная компонента пропадает. Поэтому электромагнитное поле описывается перпендикулярными векторами  $\varepsilon_n^\mu(\vec{k})$ , в которых кроется вся физика электромагнитного поля.

### Вектор поляризации

Рассмотрим подробно вектора поляризации. Рассмотрим трехмерный вектор движения электромагнитной волны вдоль оси z:

$$\vec{k} = (0, 0, k).$$

Вектора поляризации ортогональны этому вектору и будут направлены соответственно вдоль осей x и y:

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0),$$

$$\varepsilon_n = (0, \vec{\varepsilon}_n), \quad \text{где } n = 1, 2.$$

$$\vec{\varepsilon}_n \vec{\varepsilon}_m = \delta_{nm}.$$

Такая ситуация отвечает случаю *линейно поляризованной волны* (рис. 16.1 (а)): при  $\vec{E}_1 \sim \vec{\varepsilon}_1$  колебания вектора напряженности электрического поля вдоль оси x; при  $\vec{E}_2 \sim \vec{\varepsilon}_2$  колебания вдоль оси y.

В общем случае вектор напряженности не обязан колебаться вдоль какой-либо оси, а может совершать круговое или эллиптическое вращение.

При *круговой поляризации* вектор со временем описывает окружность (рис. 16.1 (б)). Если движение происходит против часовой стрелки, то такая поляризация называется *левой*, по ходу часовой стрелки – *правая поляризация*. При этом направление движения зависит от точки зрения, от того с какой стороны наблюдаем

электромагнитную волну. Будем определять поляризацию с точки зрения источника, как принято в физике высоких энергий. В таком случае она отвечает правильному определению спина:

$$\vec{\epsilon}_L \sim J_z = +1;$$

$$\vec{\epsilon}_R \sim J_z = -1;$$

$$\vec{\epsilon}_L = (1, i, 0), \quad \vec{\epsilon}_R = (1, -i, 0).$$

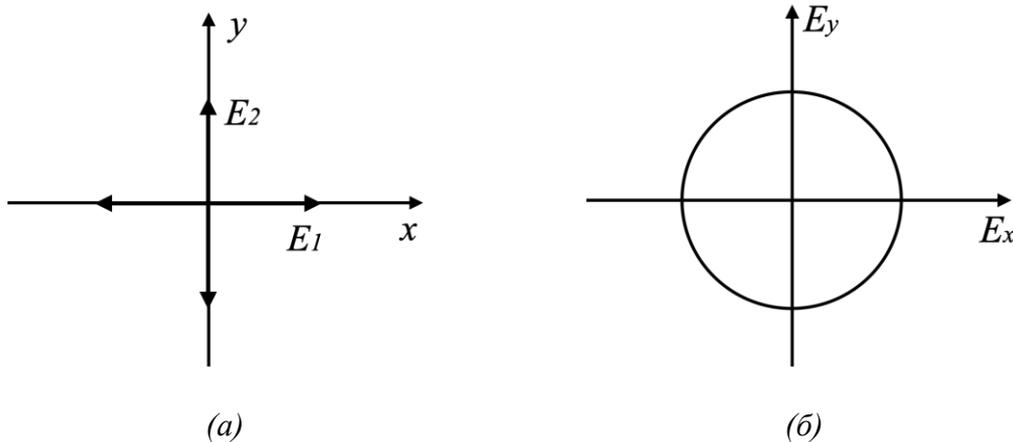


Рис.16.1. Линейная поляризация (а), круговая поляризация (б).

Рассмотрим волну, которая распространяется вдоль оси z:

$$k > 0, \quad \vec{E} \sim \text{Re}\{\vec{\epsilon}_L e^{-i(\omega t - kz)}\} = \text{Re}\{(1, i, 0)e^{-i(\omega t - kz)}\};$$

$$E_x = \text{Re}\{e^{-i(\omega t - kz)}\} = \cos(\omega t - kz),$$

$$E_y = \text{Re}\{ie^{-i(\omega t - kz)}\} = \sin(\omega t - kz).$$

Тогда получаем вектор, который колеблется в плоскости x-y:

$$(E_x, E_y) = (\cos(\omega t - kz), \sin(\omega t - kz)).$$

Если зафиксировать z, то можно рассматривать полученную функцию как функцию времени. Начинаем с момента времени, равного нулю:

$$t = 0, z = 0 \rightarrow (E_x, E_y) = (1, 0);$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2}, z = 0 \rightarrow (E_x, E_y) = (0, 1);$$

$$\omega t = \pi, z = 0 \rightarrow (E_x, E_y) = (-1, 0).$$

В результате получаем круговое вращение против часовой стрелки.

Не трудно показать, что при рассмотрении  $\vec{\epsilon}_R$ , то вектор будет вращаться против часовой стрелки.

## Поляризациянная матрица плотности

Следующий объект, который будет рассмотрен – поляризациянная матрица плотности. Такие матрицы будут полезны при вычислении диаграмм Фейнмана.

Итак, решение для электромагнитной волны пропорционально четырехмерному вектору  $\varepsilon_n^\mu(p)$ . Можем составить матрицу плотности:

$$\rho^{\mu\nu}(\vec{p}) = \sum_{n=1}^2 \varepsilon_n^\mu(\vec{p}) \varepsilon_n^\nu(\vec{p}),$$

$$\varepsilon_n^\mu(\vec{p}) p_\mu = 0 \rightarrow p_\mu \rho^{\mu\nu} = 0 = p_\nu \rho^{\mu\nu}.$$

Рассмотрим частный случай – движение вдоль оси z:

$$p = (\omega_0, 0, 0, p) \rightarrow$$

$$\varepsilon_1 = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 0, 1, 0) \rightarrow$$

$$\rho^{\mu\nu} = \varepsilon_1^\mu \varepsilon_1^\nu + \varepsilon_2^\mu \varepsilon_2^\nu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся ортогональностью для получения матрицы плотности, независимой от  $p$ . Для безмассового случая рассмотрим вспомогательную матрицу:

$$\rho_0^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что

$$p_\mu \rho_0^{\mu\nu} = 0, \quad p_\nu \rho_0^{\mu\nu} = 0.$$

Переопределим  $\rho^{\mu\nu}$ :

$$\rho^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = -g^{\mu\nu}.$$

$g^{\mu\nu}$  не зависит от направления импульса:

$$\rho^{\mu\nu}(\vec{p}) = -g^{\mu\nu}.$$

Это свойство будет использовано в дальнейших вычислениях. Такая поляризациянная матрица будет получаться во многих диаграммах Фейнмана, где есть фотоны.

## Энергия-импульс электромагнитного поля

При построении квантовой релятивистской механики важной проблемой было возникновение решений с отрицательными энергиями, приводящие к тем или иным парадоксам. Уже было показано, что переход к классическому скалярному полю вещественная или комплексная плотность энергии оказывается положительно

определенной величиной для свободного поля. Сохраняется ли это свойство для электромагнитного поля? Вычислим плотность энергии электромагнитного поля.

Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме без каких-либо токов и зарядов. Тогда Лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Упростим Лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \cdot \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \cdot \partial^\mu A^\nu) = \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\nu A^\mu). \end{aligned}$$

Преобразуем вторую компоненту:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (A_\nu \cdot \partial^\nu A^\mu) &= \partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\nu A^\mu + A_\nu (\partial_\mu \partial^\nu A^\mu) \rightarrow \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\nu A^\mu) = \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu) + A_\nu (\partial^\nu \partial_\mu A^\mu)). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu J^\mu \rightarrow \text{нет вклада в ур. движения} \rightarrow$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\mu A^\nu + A_\nu (\partial^\nu \partial_\mu A^\mu)).$$

$\partial_\mu A^\mu$  – это 4-дивергенция, 4-потенциал определен неоднозначно, следовательно можно потребовать калибровку. Воспользуемся калибровкой Лоренца, тогда:

$$\partial_\mu A^\mu = 0.$$

В результате получим

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \cdot \partial^\mu A^\nu.$$

С таким Лагранжианом удобнее проводить вычисления тензора энергии-импульса.

Тензор энергии-импульса для электромагнитного поля:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\lambda)} \partial^\nu A_\lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} \left( -\frac{1}{2} \partial_\alpha A_\beta \cdot \partial^\alpha A^\beta \right) = \\ &= -\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} \partial^\alpha A^\beta = -\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda} \partial^\alpha A^\beta = -\partial^\mu A^\lambda \rightarrow \\ T^{\mu\nu} &= -\partial^\mu A^\lambda \cdot \partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha A_\beta \cdot \partial^\alpha A^\beta.\end{aligned}$$

Запишем решение для свободного уравнения электромагнитного поля для векторного потенциала  $A$ , вычислим производные, возьмем интеграл по трехмерному  $\vec{x}$  и получим ответ.

$$\begin{aligned}A^\lambda(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_n(\vec{p}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) e^{-ipx} + \text{к. с.}]; \\ \partial^\mu A^\lambda &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-ip^\mu}{\sqrt{2E_p}} [a_n(\vec{p}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) e^{-ipx} - \text{к. с.}].\end{aligned}$$

Тензор энергии-импульса:

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= \\ &= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} \left[ -(-ip^\mu)(-ik^\nu) \{a_n(\vec{p}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) e^{-ipx} - \text{к. с.}\} \{a_m(\vec{k}) \varepsilon_{m\lambda}(\vec{k}) e^{-ikx} - \text{к. с.}\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (-ip_\alpha)(-ik^\alpha) \{a_n(\vec{p}) \varepsilon_{n\beta}(\vec{p}) e^{-ipx} - \text{к. с.}\} \{a_m(\vec{k}) \varepsilon_m^\beta(\vec{k}) e^{-ikx} - \text{к. с.}\} \right]\end{aligned}$$

Заметим индексы суммирования  $\beta$  и  $\lambda$ , проведя замену, получим одинаковые выражения. Значит произведения двух фигурных скобок одинаковы и могут быть вынесены:

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} \{a_n(\vec{p}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) e^{-ipx} - \text{к. с.}\} \{a_m(\vec{k}) \varepsilon_{m\lambda}(\vec{k}) e^{-ikx} - \text{к. с.}\} \times \\ &\quad \times \left[ p^\mu k^\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (p \cdot k) \right].\end{aligned}$$

Рассмотрим энергию электромагнитного поля:

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x T^{00} = \int \frac{d^3x d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} \{...\} \{...\} \left[ E_p E_k - \frac{1}{2} (p \cdot k) \right] = \\ &= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} \left[ E_p E_k - \frac{1}{2} (p \cdot k) \right] \times \\ &\quad \times (a_n(\vec{p}) a_m(\vec{k}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}(\vec{k}) e^{-i2E_p t} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{k}) + \\ &\quad + a_n^*(\vec{p}) a_m^*(\vec{k}) \varepsilon_n^{\lambda*}(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}^*(\vec{k}) e^{+i2E_p t} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{k}) - \\ &\quad - a_n^*(\vec{p}) a_m(\vec{k}) \varepsilon_n^{\lambda*}(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}(\vec{k}) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \\ &\quad - a_n(\vec{p}) a_m^*(\vec{k}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}^*(\vec{k}) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})).\end{aligned}$$

Воспользуемся  $\delta$ -функциями для снятия интеграла по  $k$ :

$$\begin{aligned}
 H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} & \left[ a_n(\vec{p}) a_m(-\vec{p}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}(-\vec{p}) e^{-i2E_p t} \left( E_p^2 - \frac{1}{2} (E_p^2 - \vec{p}(-\vec{p})) \right) \right. \\
 & + a_n^*(\vec{p}) a_m^*(-\vec{p}) \varepsilon_n^{\lambda*}(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}^*(-\vec{p}) e^{+i2E_p t} \left( E_p^2 - \frac{1}{2} (E_p^2 - \vec{p}(-\vec{p})) \right) \\
 & - a_n(\vec{p}) a_m^*(\vec{p}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}^*(\vec{p}) \left( E_p^2 - \frac{1}{2} (E_p^2 - \vec{p}\vec{p}) \right) \\
 & \left. - a_n^*(\vec{p}) a_m(\vec{p}) \varepsilon_n^{\lambda*}(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}(\vec{p}) \left( E_p^2 - \frac{1}{2} (E_p^2 - \vec{p}\vec{p}) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Слагаемые, зависящие от времени, исчезают:

$$\begin{aligned}
 E_p^2 - \vec{p}(-\vec{p}) &= E_p^2 - \vec{p}^2 = 2E_p^2 \rightarrow E_p^2 - \frac{1}{2} (E_p^2 - \vec{p}(-\vec{p})) = 0 \rightarrow \\
 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} & [a_n(\vec{p}) a_m(\vec{k}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}(\vec{k}) e^{-i2E_p t} \left( E_p^2 - \frac{1}{2} (E_p^2 - \vec{p}(-\vec{p})) \right)].
 \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 H &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} [-a_n(\vec{p}) a_m^*(\vec{p}) \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}^*(\vec{p}) - a_n^*(\vec{p}) a_m(\vec{p}) \varepsilon_n^{\lambda*}(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}(\vec{p})]; \\
 \varepsilon_n^\lambda(\vec{p}) \varepsilon_{m\lambda}^*(\vec{p}) &= -\delta_{nm} \rightarrow
 \end{aligned}$$

индексы  $n$  и  $m$  сокращаются, слагаемые становятся одинаковыми, общее выражение значительно упрощается:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p |a_n(\vec{p})|^2.$$

В результате для энергии получено выражение, аналогичное выражению для скалярных полей. Явным образом было показано, что из Лагранжиана свободного электромагнитного поля следует сохранение энергии.

## Лекция 18. Фермионное поле

Энергия электромагнитного поля не зависит от времени в согласии с теоремой Нётер. Осталось показать, что плотность энергии электромагнитного поля является положительно определенной величиной.

Опустив вывод, запишем выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\lambda} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\lambda}F_{\alpha\lambda}.$$

Тензор, записанный в таком виде симметричный по индексам  $\mu$  и  $\nu$ . Запись тензора в таком виде удобна для записи плотности энергии и плотности трехмерного импульса в терминах напряженностей электрического и магнитного полей.

Плотность энергии:

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2).$$

Плотность импульса:

$$\vec{\mathcal{P}}_i = (\vec{E} \times \vec{B})_i.$$

Итак, плотность энергии электромагнитного поля – положительно определенная величина. Были рассмотрены скалярное поле, вещественное, комплексное, электромагнитное. Кажется, что при смене интерпретации и переходе к классической теории поля исчезают проблемы, присутствовавшие в релятивистской квантовой механике. Проверим, положительна ли энергия в случае фермионного поля.

### Фермионное поле

Лагранжиан для фермионного поля:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_{\alpha}(i\hat{\partial} - m)_{\alpha\beta}\psi_{\beta},$$

где  $\bar{\psi} = (\cdot \cdot \cdot \cdot)$  - строка,  $\psi = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$  - столбец.

Уравнения движения:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}} - \partial^{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu} \bar{\psi}_{\alpha})} \right) = 0 \rightarrow (i\hat{\partial} - m)_{\alpha\beta}\psi_{\beta} = 0 \rightarrow (i\hat{\partial} - m)\psi = 0.$$

Тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu} \psi_{\alpha})} \partial^{\nu} \psi_{\alpha} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Особенность такого Лагранжиана для фермионного поля заключается в том, что, когда поле  $\psi$  является решением уравнения движения, Лагранжиан обращается в ноль. Тогда тензор энергии-импульса можно переписать в виде:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi_\alpha)} \partial^\nu \psi_\alpha.$$

Распишем Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_\beta (i\gamma^\lambda \partial_\lambda - mI)_{\beta\alpha'} \psi_{\alpha'} \rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial(\partial^\mu \psi_\alpha)} (\bar{\psi}_\beta i\gamma^\lambda_{\beta\alpha'} \partial_\lambda \psi_{\alpha'}) = \bar{\psi}_\beta i\gamma^\lambda_{\beta\alpha'} \delta_{\beta\lambda} \delta_{\alpha\alpha'} = \bar{\psi}_\beta i\gamma^\mu_{\beta\alpha}.$$

Тогда для тензора энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \bar{\psi}_\beta i\gamma^\mu_{\beta\alpha} \partial^\nu \psi_\alpha = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial^\nu \psi.$$

Распишем компоненты:

$$\begin{cases} T^{00} = \bar{\psi} \gamma^0 i \partial^0 \psi = [\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0] = \psi^\dagger i \partial^0 \psi \rightarrow \mathcal{P}^\mu = \psi^\dagger i \partial^\mu \psi = \psi^\dagger \hat{p}^\mu \psi, \\ T^{0i} = \bar{\psi} \gamma^0 i \partial^i \psi = \psi^\dagger i \partial^i \psi \end{cases}$$

где  $\hat{p}^\mu$  – квантово-механический оператор.

Запишем решение для свободного поля Дирака:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + b_s^*(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{+ipx}].$$

Вычислим 4-импульс:

$$p^\mu = \int d^3 x \mathcal{P}^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3 x \psi^\dagger i \partial^\mu \psi;$$

$$i \partial^\mu e^{-ipx} = p^\mu e^{-ipx} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} p^\mu &= \int \frac{d^3 x d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_p 2E_k}} [a_s^*(\vec{p}) u_s^+(\vec{p}) e^{+ipx} + b_s(\vec{p}) v_s^+(\vec{p}) e^{-ipx}] k^\mu \times \\ &\times [a_r(\vec{k}) u_r(\vec{k}) e^{-ikx} - b_r^*(\vec{k}) v_r(\vec{k}) e^{+ikx}] \\ &= \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^3 2E_p} [a_s^*(\vec{p}) a_r(\vec{k}) u_s^+(\vec{p}) u_r(\vec{k}) k^\mu \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) - \\ &- b_s(\vec{p}) b_r^*(\vec{k}) v_s^+(\vec{p}) v_r(\vec{k}) k^\mu \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) - a_s^*(\vec{p}) b_r^*(\vec{k}) u_s^+(\vec{p}) v_r(\vec{k}) e^{+i2E_p t} \delta^3(\vec{p} + \vec{k}) k^\mu + \\ &+ b_s(\vec{p}) v_s^+(\vec{p}) a_r(\vec{k}) u_r(\vec{k}) e^{+i2E_p t} \delta^3(\vec{p} + \vec{k}) k^\mu] = \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^\mu}{2E_p} [a_s^*(\vec{p}) a_r(\vec{p}) u_s^+(\vec{p}) u_r(\vec{p}) - b_s(\vec{p}) b_r^*(\vec{p}) v_s^+(\vec{p}) v_r(\vec{p})] + \\ &+ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{p}^\mu}{2E_p} [-a_s^*(\vec{p}) b_r^*(-\vec{p}) u_s^+(\vec{p}) v_r(-\vec{p}) e^{+i2E_p t} + b_s(\vec{p}) a_r(-\vec{p}) v_s^+(\vec{p}) u_r(-\vec{p}) e^{-i2E_p t}], \end{aligned}$$

где  $\vec{p} = (E_p - \vec{p})$ . Поскольку возникают ортогональные комбинации

$$u_s^+(\vec{p})v_r(-\vec{p}) = 0, \quad v_s^+(\vec{p})u_r(-\vec{p}) = 0,$$

второй интеграл в формуле для  $p^\mu$  зануляется, так что  $p^\mu$  не зависит от времени. Поскольку

$$u_s^+(\vec{p})u_r(\vec{p}) = 2E_p\delta_{sr}, \quad v_s^+(\vec{p})v_r(\vec{p}) = 2E_p\delta_{sr},$$

перепишем:

$$p^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu [a_s^*(\vec{p})a_s(\vec{p}) - b_s(\vec{p})b_s^*(\vec{p})].$$

Последнее слагаемое обладает коэффициентом -1, при  $\mu = 0$  4-импульс будет знаконеопределенной величиной.

Так, энергия классического фермионного поля может быть положительной или отрицательной. В этом заключается парадокс классического описания фермионного поля.

Вычислим теперь сохраняющийся переменный заряд фермионного поля. Для Лагранжиана

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi$$

введем преобразования:

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{+i\alpha}, \quad \alpha = const.$$

Тогда по теореме Нётер получим:

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,$$

где  $e$  – электрический заряд или любая другая константа.

Рассчитаем сохраняющийся заряд:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x j^0(t, \vec{x}) = \\ &= \int \frac{d^3x d^3p d^3k}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_p 2E_k}} [a_s^*(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p})e^{+ipx} + b_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p})e^{-ipx}] \gamma^0 \times \\ &\times [a_r(\vec{k})u_r(\vec{k})e^{-ikx} + b_r^*(\vec{k})v_r(\vec{k})e^{-ikx}] \\ &= e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [a_s^*(\vec{p})a_r(\vec{p})u_s^+(\vec{p})u_r(\vec{p}) + b_s(\vec{p})b_r^*(\vec{p})v_s^+(\vec{p})v_r(\vec{p})]. \end{aligned}$$

Заметим

$$u_s^+(\vec{p})u_r(\vec{p}) = 2E_p\delta_{sr}, \quad v_s^+(\vec{p})v_r(\vec{p}) = 2E_p\delta_{sr},$$

тогда можно переписать выражение для заряда в виде:

$$Q = e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [a_s^*(\vec{p})a_s(\vec{p}) + b_s(\vec{p})b_s^*(\vec{p})].$$

Под интегралом сумма двух положительных величин, значит  $Q \geq 0$ .

Полученный результат парадоксален. Поскольку при рассмотрении уравнения Дирака в рамках релятивистской квантовой механики было показано, что это уравнение описывает две частицы. Это была одна из причин, по которым отказались от интерпретации  $\psi$  как одночастичной волновой функции. Можно было ожидать, что в электрическом заряде могут проявляться разные знаки.

*Парадоксы законнеопределенности энергии фермионного поля и знакоопределенности его заряда не решаются в классической теории поля, что вынуждает перейти к квантовой теории поля, в рамках которой удастся решить все эти парадоксы.*

Прежде чем перейти к квантовой теории поля рассмотрим функции Грина – крайне полезный инструмент, который без каких-либо изменений переносится на случай квантовой теории поля.

## Лекция 19. Функции Грина

### Функции Грина

Представим, что нужно решить задачу с дифференциальным оператором:

$$\hat{L}f(x) = j(x),$$

где  $j(x)$  – источник, некоторая известная функция. Не каждое дифференциальное уравнение такого рода легко решить напрямую. Но есть способ, использующий метод функций Грина, который позволяет решить эту задачу.

Алгоритм заключается в следующих шагах:

- 1) решить задачу  $\hat{L}f_0(x) = 0$ ;
- 2) решить задачу  $\hat{L}_x G(x, x') = \delta(x - x')$ ;
- 3) тогда знаем решение исходной задачи:  $f(x) = f_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} dy G(x - y)j(y)$ .

Пункт 3 легко доказать:

$$\hat{L}f(x) = \hat{L}_x f_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \hat{L}_x G(x - y)j(y) = [\text{т.к. } \hat{L}_x G(x, y) = \delta(x - y)] = j(x).$$

Рассмотрим некоторые примеры.

#### Пример 1

Найдем  $G$  для дифференциального оператора

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \gamma, \quad \gamma = \text{const.}$$

$$\hat{L} = G(t, t') = \delta(t - t') \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right) G(t - t') = \delta(t - t'), \text{ где}$$

$$G(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \tilde{G}(\omega),$$

$$\delta(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \cdot 1.$$

Тогда исходное уравнение преобразуется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (-i\omega + \gamma) \tilde{G}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} 1.$$

Это равенство справедливо, когда

$$(-i\omega + \gamma) \tilde{G}(\omega) = 1 \rightarrow \tilde{G}(\omega) = \frac{1}{-i\omega + \gamma}.$$

Зная Фурье-образ вычислим  $G(t - t')$ :

$$G(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \frac{1}{-i\omega + \gamma}$$

Такие интегралы вычисляются методом функции комплексной переменной. Необходимо перейти к комплексной плоскости и воспользоваться теоремой о вычетах.

Пусть  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  – комплексная переменная, где  $\omega_R$  и  $\omega_I$  – действительная и мнимая части соответственно. Рассмотрим экспоненту:

$$e^{-i\omega(t-t')} = e^{-i\omega_R(t-t')} e^{-i\omega_I(t-t')}$$

$e^{-i\omega_R(t-t')}$  – осциллирующая экспонента,  $e^{-i\omega_I(t-t')}$  – может или расти до бесконечности, или стремиться к нулю.

Для того, чтобы замкнуть контуру, необходимо чтобы интеграл по этому контуру обращался в ноль. Рассмотрим 2 случая:

1)  $t - t' > 0$

Для того, чтобы экспонента  $e^{-i\omega_I(t-t')} = e^{\omega_I(t-t')}$  стремилась к нулю на дуге большого радиуса, необходимо чтобы  $\omega_I$  было отрицательным. В этом случае контур замыкается снизу (рис. 19.1).

2)  $t - t' < 0$

В этом случае необходимо положительное  $\omega_I$ , контур замыкается сверху (рис. 19.1)

Выбор контура не связан с остальной частью подынтегральной функции.

Рассмотрим теперь оставшуюся часть:

$$-i\omega + \gamma = -i(\omega + i\gamma).$$

В комплексной плоскости возникает полюс в точке  $\omega = -i\gamma$ .

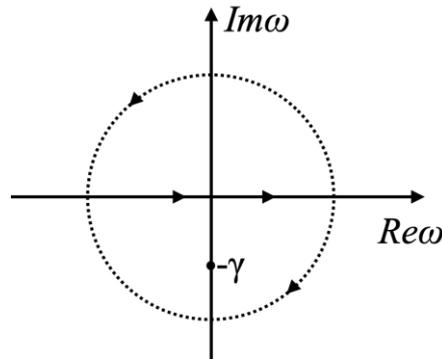


Рис.19.1. Контур интегрирования в комплексной плоскости.

Вычислим интеграл:

$$G(t - t') = \frac{1}{2\pi(-i)} \oint d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + i\gamma} = \frac{1}{2\pi(-i)} \begin{cases} -2\pi i e^{-i(t-t')(-i\gamma)} & \text{при } t > t' \\ 0 & \text{при } t < t' \end{cases} = e^{-\gamma(t-t')} \theta(t - t'),$$

где  $\theta(t - t') = \begin{cases} 1 & \text{при } t > t' \\ 0 & \text{при } t < t' \end{cases}$  - функция Хевисайда.

### Пример 2

Рассмотрим теперь составной дифференциальный оператор:

$$\hat{L} = \hat{L}_2 \hat{L}_1.$$

Пусть для каждого оператора есть своя функция Грина  $\hat{L}_2 \rightarrow G_2$ ,  $\hat{L}_1 \rightarrow G_1$ . Тогда функция Грина для составного оператора может быть найдена следующим образом:

$$G(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} dy G_1(x, y) \cdot G_2(y, x'),$$

что нетрудно показать:

$$\hat{L}G(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{L}_2 \hat{L}_1 G_1(x, y) \cdot G_2(y, x') = \delta(x - x').$$

Пусть

$$\hat{L} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right)^2,$$

найдем функцию Грина:

$$\begin{aligned} G(t - t') &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 G_1(t, t_1) \cdot G_1(t_1, t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \theta(t - t_1) e^{-\gamma(t-t_1)} \theta(t_1 - t') e^{-\gamma(t_1-t')} = \\ &= e^{-\gamma(t-t')} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \theta(t - t_1) \theta(t_1 - t'). \end{aligned}$$

Так, для дифференциального оператора  $\hat{L} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right)^2$  была получена такая же функция Грина, как и для  $\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \gamma$ .

### Дифракция

Рассмотрим дифракцию с помощью метода функции Грина. Если задуматься о том, как нужно описывать распространение волны через череду преград математически, не пользуясь физическими аналогиями, то полезным оказывается метод функции Грина.

Начнем с теоремы Остроградского-Гаусса, которая утверждает следующее:

$$\int dV \vec{\nabla} \vec{A} = \int d\hat{s} \vec{A}.$$

Векторное поле запишем через скалярные величины  $\phi$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi \rightarrow \\ \vec{\nabla} \vec{A} &= \vec{\nabla} (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi, \end{aligned}$$

тогда теорему Остроградского-Гаусса можно переписать в следующем виде:

$$\int dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \int d\hat{s} (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi).$$

Записанное соотношение также известно как **второе тождество Грина**.

Многие задачи, как в классической волновой механике, так и в квантовой механике, при переходе к стационарному случаю сводятся к **уравнению Гельмгольца**:

$$(\nabla^2 + k^2)f(\vec{x}) = 0.$$

Предположим, что  $\phi$  – решение уравнения Гельмгольца,  $\psi$  – функция Грина уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\phi &= 0, \\ (\nabla_x^2 + k^2)G(\vec{x}, \vec{x}') &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned}$$

Запишем теперь объемный интеграл:

$$\begin{aligned} &\int d^3x' (\phi(\vec{x}') \nabla_{x'}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla_{x'}^2 \phi(\vec{x}'))); \\ \nabla_{x'}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - k^2 G(\vec{x}, \vec{x}'), \quad \nabla_{x'}^2 \phi(\vec{x}') = -k^2 \phi(\vec{x}') \rightarrow \\ &\int d^3x' (\phi(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - k^2 \phi(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') + k^2 G(\vec{x}, \vec{x}') \phi(\vec{x}')) = \\ &= \int d^3x' (\phi(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')) = \phi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Воспользуемся вторым тождеством Грина:

$$\phi(\vec{x}) = \int d\hat{s}' (\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}_x G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}_x \phi(\vec{x}')).$$

Предположим, что существует сложная конфигурация, например, поле падает на круговую щель в непрозрачном экране (рис. 19.2). Необходимо вычислить сигнал в удаленной точке  $x$ . В результате несложных операций можно рассчитать функцию в любой другой точке, зная функцию Грина для уравнения Гельмгольца и функцию на этой щели (задана).

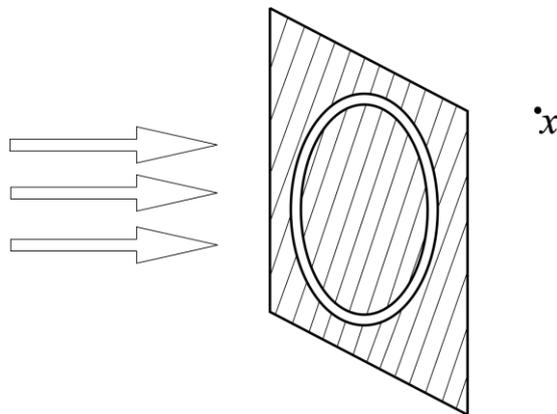


Рис. 19.2. Падение поля на круговую щель.

Выпишем функцию Грина для уравнения Гельмгольца (вывод предлагается проделать в качестве самостоятельного упражнения):

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{e^{ik|x-x'|}}{4\pi|x-x'|}$$

В этой формуле узнаем формулу сферической волны – одинакова на сфере с фиксированным радиусом.

### Функция Грина для уравнения Клейна-Фока-Гордона

Вычислим функцию Грина для уравнения Клейна-Фока-Гордона. Уравнение КФГ имеет вид:

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0 \rightarrow$$

$$(\partial^2 + m^2)G(x - y) = -i\delta^4(x - y),$$

где

$$G(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) e^{-ip \cdot (x-y)},$$

$$\delta^4(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)},$$

$$\partial_x^2 e^{-ip \cdot (x-y)} = -p^2 e^{-ip \cdot (x-y)}.$$

Уравнение можно переписать в виде:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} [-p^2 + m^2] \tilde{G}(p) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \rightarrow$$

$$\tilde{G}(p) = -\frac{i}{-p^2 + m^2} = \frac{i}{p^2 - m^2},$$

где  $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$  – квадрат четырехмерного вектора.

Сделаем технический скачок, запишем выражение для функции Грина:

$$G(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\delta(t - r)}{r} + m\theta(t - r) \frac{J_1(ms)}{s} \right),$$

Где  $s = \sqrt{t^2 - r^2}$  – интервал в СТО,  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$ ,  $r = |\vec{r}|$ ,  $t = x_0 - y_0$ .

### Функция Грина для уравнения Дирака

Вычислим функцию Грина для уравнения Дирака. Уравнение Дирака имеет вид:

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0 \rightarrow$$

$$(i\hat{\partial}_x - m)S(x - y) = i\delta^4(x - y)I_{4 \times 4},$$

где  $S(x - y)$  – матрица  $4 \times 4$ , функция Грина для уравнения Дирака. Будем искать функцию Грина в виде интеграла Фурье:

$$S(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{S}(p) e^{-ip \cdot (x-y)}.$$

Так как

$$i\hat{\partial}_x e^{-ip \cdot (x-y)} = i\gamma^\mu \partial_{\mu x} e^{-ipx} = \gamma^\mu p_\mu e^{-ipx} = \hat{p} e^{-ipx},$$

можем переписать уравнение в виде:

$$(i\hat{\partial}_x - m)S(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\hat{p} - m)\tilde{S}(p)e^{-ip \cdot (x-y)} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} I_{4 \times 4} \rightarrow$$

$$(\hat{p} - m)\tilde{S}(p) = iI_{4 \times 4} \rightarrow \tilde{S}(p) = i(\hat{p} - m)^{-1}.$$

Интересно, что матрицу  $(\hat{p} - m)^{-1}$  легко найти, угадав следующим образом:

$$\tilde{S}(p) = i(\hat{p} - m)^{-1} = i \tilde{S}(p) = i \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}.$$

Проверим, что такое решение действительно правильное:

$$(\hat{p} - m)(\hat{p} + m) = \hat{p}\hat{p} - m^2 = p^2 - m^2.$$

Так, была решена задача на функцию Грина уравнения Дирака. Решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} S(x - y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} i \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} = (i\hat{\partial}_x + m) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} = \\ &= (i\hat{\partial}_x + m)G(x - y), \end{aligned}$$

где  $G(x - y)$  – функция Грина для скалярного поля.

### Функция Грина векторного поля с ненулевой массой

Рассмотрим функцию Грина для векторного массивного поля. Такие поля будут полезны при изучении электрослабой теории.

Лагранжиан для векторного поля ненулевой массы можно записать в виде:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu.$$

Для решения задачи сначала необходимо получить уравнение движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} - \partial^\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\beta A^\alpha)} \right) &= 0, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned}$$

Распишем компоненты:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} = \frac{m^2}{2} 2A_\alpha,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \\ &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha} - \delta_{\nu\beta} \delta_{\mu\alpha}) = -\frac{1}{2} F_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}.\end{aligned}$$

Уравнение движения для поля с ненулевой массой:

$$\begin{aligned}m^2 A_\alpha - \partial^\beta (-F_{\beta\alpha}) &= 0 \rightarrow \\ \partial^\beta F_{\beta\alpha} + m^2 A_\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Упростим уравнение:

$$\begin{aligned}\partial^\beta (\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta) + m^2 A_\alpha &= (\partial^2 + m^2) A_\alpha - \partial^\beta \partial_\alpha A_\beta = 0 \rightarrow \\ (g^{\alpha\beta} (\partial^2 + m^2) - \partial^\alpha \partial^\beta) A_\beta &= 0.\end{aligned}$$

Определим теперь функцию Грина  $G_{\beta\lambda}(x-y)$  для этого уравнения. Распишем дифференциальный оператор:

$$(g^{\alpha\beta} (\partial^2 + m^2) - \partial^\alpha \partial^\beta)_x G_{\beta\lambda}(x-y) = i\delta^4(x-y)\delta_\lambda^\alpha.$$

Функция Грина:

$$\begin{aligned}G_{\beta\lambda}(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_{\beta\lambda}(p) e^{-ip \cdot (x-y)} \rightarrow \\ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (g^{\alpha\beta} (-p^2 + m^2) + p^\alpha p^\beta) \tilde{G}_{\beta\lambda}(p) e^{-ip \cdot (x-y)} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} i\delta_\lambda^\alpha \rightarrow \\ (g^{\alpha\beta} (-p^2 + m^2) + p^\alpha p^\beta) \tilde{G}_{\beta\lambda}(p) &= i\delta_\lambda^\alpha.\end{aligned}$$

Для решения полученного уравнения зададим форму  $\tilde{G}_{\beta\lambda}(p)$ :

$$\tilde{G}_{\beta\lambda}(p) = A g_{\beta\lambda} + B p_\beta p_\lambda,$$

где  $A$  и  $B$  константы. Распишем компоненты уравнения:

$$\begin{aligned}g^{\alpha\beta} g_{\beta\lambda} &= \delta_\lambda^\alpha, \\ g^{\alpha\beta} p_\beta p_\lambda &= p^\alpha p_\lambda, \\ p^\alpha p^\beta g_{\beta\lambda} &= p^\alpha p_\lambda, \\ p^\alpha p^\beta p_\beta p_\lambda &= p^2 p^\alpha p_\lambda.\end{aligned}$$

Вернемся теперь к уравнению:

$$A(-p^2 + m^2)\delta_\lambda^\alpha + A p^\alpha p_\lambda + B(-p^2 + m^2)p^\alpha p_\lambda + B p^2 p^\alpha p_\lambda = i\delta_\lambda^\alpha,$$

заметим, что в левой части встречаются структуры с индексами на импульсах, в правой части таких элементов нет. Тогда слагаемые с индексами на импульсах должны исчезнуть:

$$A = \frac{i}{-p^2 + m^2} \rightarrow$$

$$p^\alpha p_\lambda \left( \frac{i}{-p^2 + m^2} + B[(-p^2 + m^2) + p^2] \right) = 0 \rightarrow \frac{i}{-p^2 + m^2} + Bm^2 = 0 \rightarrow$$

$$B = \frac{i}{(p^2 - m^2)m^2}.$$

Итак,  $\tilde{G}_{\beta\lambda}(p)$  была расписана в виде суммы двух структур, выражаемых через метрический тензор и произведение импульсов. Были вычислены все возможные свертки, которые даются левой частью уравнения, действующей на эти структуры. В результате получаем уравнение, в котором  $\delta_\lambda^\alpha$  присутствует и в правой, и в левой частях. В левой части присутствуют также слагаемые, содержащие  $p^\alpha p_\lambda$  – должны исчезнуть. Отсюда легко определить коэффициенты  $A$  и  $B$  Фурье-образа функции Грина для векторного массивного поля:

$$\tilde{G}_{\beta\lambda}(p) = \frac{i}{-p^2 + m^2} g_{\beta\lambda} + \frac{i}{(p^2 - m^2)m^2} p_\beta p_\lambda = \frac{i}{p^2 - m^2} \left( -g_{\beta\lambda} + \frac{p_\beta p_\lambda}{m^2} \right).$$

В квантовой теории поля такая функция превратится в пропагатор и появится непосредственно в диаграммах Фейнмана.

Найдем теперь саму функцию Грина, заметим связь:

$$G_{\beta\lambda}(x - y) = \left( -g_{\beta\lambda} + \frac{\partial_\beta \partial_\lambda}{m^2} \right) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2} = \left( -g_{\beta\lambda} + \frac{\partial_\beta \partial_\lambda}{m^2} \right) G(x - y),$$

где  $G(x - y)$  – функция Грина, соответствующая уравнению Клейна-Фока-Гордона.

### Функция Грина для векторного поля с нулевой массой

Рассмотрим векторное поле  $A^\mu$  с нулевой массой. Лагранжиан такого поля:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Оператор движения:

$$(g^{\alpha\beta} \partial^2 - \partial^\alpha \partial^\beta) A_\beta = 0.$$

Воспользуемся калибровкой Лоренца, тогда

$$\partial^\beta A_\beta = 0 \rightarrow \partial^2 A^\alpha = 0.$$

При решении задачи на функцию Грина получим:

$$g^{\alpha\beta} (-p^2) \tilde{G}_{\beta\lambda}(p) = i \delta_\lambda^\alpha,$$

тогда функция Грина для электромагнитного поля:

$$\tilde{G}_{\beta\lambda} = -\frac{i g_{\beta\lambda}}{p^2}.$$

Все эти функции Грина, полученные в импульсном представлении, будут играть фундаментальную роль в квантовой теории поля.

## Лекция 20. Поле квантуется раз!

В предыдущих лекциях была воспроизведена нерелятивистская квантовая механика. Эта теория хороша, но обладает рядом ограничений, которые делают ее непригодной для описания взаимодействий элементарных частиц, особенно при высоких энергиях.

Следующий этап – релятивистская квантовая механика, ее уравнения также обладают непреодолимыми проблемами. Уравнения релятивистской квантовой механики обладают решениями с отрицательными энергиями. В связи с этим в некоторых задачах возникают парадоксы, например, туннелирование Клейна или «частица» и «античастица» в уравнении Дирака, записанном для одночастичной волновой функции.

В результате был сделан вывод о необходимости смены интерпретации: был реализован переход от волновых функций к полям. Подход классической теории поля решает ряд проблем, однако уравнение Дирака привело к тому, что плотность энергии и сама энергия оказались закононеопределенными для классического фермионного поля. При этом электрический заряд оказался строго законоопределенного знака. Решить эти парадоксы можно только в рамках квантовой теории поля.

Построим формализм квантовой теории поля, которым будем пользоваться для вычисления величин

### Фермионное поле

В предыдущих лекциях была получена энергия фермионного поля:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [a_s^*(\vec{p})a_s(\vec{p}) - b_s(\vec{p})b_s^*(\vec{p})].$$

Заряд сохраняющегося тока фермионного поля:

$$Q = e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [a_s^*(\vec{p})a_s(\vec{p}) + b_s(\vec{p})b_s^*(\vec{p})].$$

При получении этих результатов предполагалось, что  $a_s(\vec{p})$  и  $b_s(\vec{p})$  обычные функции, но сохранили порядок, который возникал при вычислении сохраняющихся величин по теореме Нётер. Решение проблемы закононеопределенности энергии и законоопределенности заряда следующее: будем считать  $a_s(\vec{p})$  и  $b_s(\vec{p})$  операторами рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned} a_s(\vec{p}) &\rightarrow \hat{a}_s(\vec{p}), & a_s^*(\vec{p}) &\rightarrow \hat{a}_s^+(\vec{p}); \\ b_s(\vec{p}) &\rightarrow \hat{b}_s(\vec{p}), & b_s^*(\vec{p}) &\rightarrow \hat{b}_s^+(\vec{p}). \end{aligned}$$

Постулируем, что операторы  $\hat{a}_s(\vec{p})$ ,  $\hat{a}_s^+(\vec{p})$ ,  $\hat{b}_s(\vec{p})$ ,  $\hat{b}_s^+(\vec{p})$  подчиняются антикоммутиционным соотношениям:

$$\{\hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r^+(\vec{q})\} \equiv \hat{a}_s(\vec{p})\hat{a}_r^+(\vec{q}) + \hat{a}_r^+(\vec{q})\hat{a}_s(\vec{p}) = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta^3(\vec{p} - \vec{q});$$

$$\{\hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r^+(\vec{q})\} \equiv \hat{b}_s(\vec{p})\hat{b}_r^+(\vec{q}) + \hat{b}_r^+(\vec{q})\hat{b}_s(\vec{p}) = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta^3(\vec{p} - \vec{q});$$

остальные антикоммутируют равны нулю, например:

$$\begin{aligned} \{\hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r(\vec{q})\} &= 0; \\ \{\hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r(\vec{q})\} &= 0; \\ \{\hat{a}_s(\vec{p}), \hat{b}_r(\vec{q})\} &= 0 \dots \end{aligned}$$

В таком случае энергия и заряд становятся операторами.

$\hat{H}$  – оператор энергии:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [\hat{a}_s^+(\vec{p})\hat{a}_s(\vec{p}) + \hat{b}_s^+(\vec{p})\hat{b}_s(\vec{p})] - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p (2\pi)^3 \delta^3(0) \delta_{ss}, \text{ т. к.}$$

$$\hat{b}_s(\vec{p})\hat{b}_s^+(\vec{p}) = (2\pi)^3 \delta_{ss} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}) - \hat{b}_s^+(\vec{p})\hat{b}_s(\vec{p}).$$

$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p (2\pi)^3 \delta^3(0) = E_{vac}$  – вакуумная энергия, бесконечно большая, будет рассмотрена позже,  $\delta_{ss} = 2$

$\hat{Q}$  – оператор заряда:

$$\hat{Q} = e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\hat{a}_s^+(\vec{p})\hat{a}_s(\vec{p}) - \hat{b}_s^+(\vec{p})\hat{b}_s(\vec{p})] + e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(0) \delta_{ss},$$

где  $e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(0) = Q_{vac}$  – вакуумный заряд.

Постулирование антикоммутирующих операторов энергии и заряда дает логичную картину. Комбинации  $\hat{a}_s^+(\vec{p})\hat{a}_s(\vec{p})$  и  $\hat{b}_s^+(\vec{p})\hat{b}_s(\vec{p})$  – операторы числа заполнения частиц и античастиц соответственно, собственные значения таких операторов — это целые, положительно определенные величины. Тогда, гамильтониан становится положительно определенным оператором. Для оператора заряда частицы вносят положительный вклад, античастицы – отрицательный.

Существует эквивалентный способ получить такие соотношения – *метод канонического квантования*, будет рассмотрен позже.

Рассмотрим подробнее расходящиеся величины:

$$Q_{vac} = e \delta(0) \int d^3p = \infty;$$

$$E_{vac} = \int d^3p E_p \delta(0) = \infty, \text{ поскольку } \int d^3p E_p > 0, \delta(0) = \infty.$$

$E_{vac}$  подробно будет рассмотрено в разделе «вакуумная катастрофа».

### Скалярное поле (вещественное)

В случае скалярного вещественного поля была получена энергия в виде:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [a^*(\vec{p})a(\vec{p}) + a(\vec{p})a^*(\vec{p})].$$

Постулируем коммутационные соотношения:

$$a(\vec{p}) \rightarrow \hat{a}(\vec{p}), \quad a^*(\vec{p}) \rightarrow \hat{a}^+(\vec{p});$$

$$[\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}^+(\vec{q})] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}).$$

Тогда можем записать следующее:

$$\hat{a}(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{q}) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) + \hat{a}^+(\vec{q})\hat{a}(\vec{p}).$$

При переходе к вантовой теории запишем оператор энергии:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [\hat{a}^+(\vec{p})\hat{a}(\vec{p}) + \hat{a}(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{p})] + \frac{1}{2} \int d^3p E_p \delta^3(0) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [\hat{a}^+(\vec{p})\hat{a}(\vec{p})] + \frac{E_{vac}}{2}. \end{aligned}$$

$E_{vac}$  входит в выражение для  $\hat{H}$  фермионного и скалярного полей с разными знаками и разными коэффициентами (соотношение 4:1).

Рассмотрим трехмерный импульс для фермионного и скалярного поле. Для фермионного поля в классическом случае:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} [a_s^*(\vec{p})a_s(\vec{p}) - b_s(\vec{p})b_s^*(\vec{p})] \rightarrow$$

в квантовом случае:

$$\hat{\vec{P}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} [\hat{a}_s^+(\vec{p})\hat{a}_s(\vec{p}) + \hat{b}_s^+(\vec{p})\hat{b}_s(\vec{p})] - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \delta^3(0) \delta_{ss},$$

где  $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \delta^3(0) = \vec{p}_{vac} = 0$  - вакуум в фермионной теории не движется с бесконечно большим импульсом. Нетрудно показать, что для скалярного поля получим такую же добавку с другим знаком и коэффициентом, которая занулится.

### Вакуумное состояние

Без вакуумной добавки оператор энергии для скалярного поля принимает вид:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [\hat{a}^+(\vec{p})\hat{a}(\vec{p})].$$

Определим собственные состояния и собственные значения оператора энергии. Собственными состояниями такого оператора являются n-частичные состояния.

Постулируем, что существует вакуумное состояние  $|0\rangle$ , такое что:

$$\hat{a}(\vec{p})|0\rangle = 0 \rightarrow \hat{H}|0\rangle = 0.$$

Тогда становится понятно, почему бесконечные добавки имеют смысл вакуумных энергии и заряда – это константы. При действии операторов этой константой на вакуумное состояние, которое уничтожается оператором  $\hat{a}$ , эта добавка остается. Если рассмотрим

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [\hat{a}^+(\vec{p})\hat{a}(\vec{p})] + \frac{E_{vac}}{2},$$

то получим

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}E_{vac}|0\rangle.$$

$|0\rangle$  – собственное состояние,  $\frac{1}{2}E_{vac}$  – собственное значение оператора энергии.

### 1 частичное состояние

Определим состояние следующим образом:

$$\sqrt{2E_k}\hat{a}^+(\vec{k})|0\rangle \equiv |\vec{k}\rangle.$$

Такое состояние – состояние с определенным импульсом  $\vec{k}$ . Действие оператора энергии без вакуумной добавки на это состояние:

$$\hat{H}|\vec{k}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [\hat{a}^+(\vec{p})\hat{a}(\vec{p})] \sqrt{2E_k}\hat{a}^+(\vec{k})|0\rangle,$$

где  $\hat{a}(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{k}) = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) + \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{p})$ . Второе слагаемое не дает вклада при действии на вакуумное состояние. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \hat{H}|\vec{k}\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}^+(\vec{p}) \sqrt{2E_k} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) |0\rangle = E_k |\vec{k}\rangle \rightarrow \\ \hat{H}|\vec{k}\rangle &= E_k |\vec{k}\rangle. \end{aligned}$$

Состояние  $|\vec{k}\rangle$  является собственным состоянием свободного гамильтониана с собственной энергией  $E_k$ , задаваемой правильным релятивистским соотношением:

$$E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}.$$

Для оператора трехмерного импульса можно показать:

$$\hat{p}|\vec{k}\rangle = \vec{k}|\vec{k}\rangle,$$

то есть  $|\vec{k}\rangle$  – состояние с определенным импульсом. Так, состояние с определенным импульсом обладает определенной энергией.

### 2 частичное состояние

Пусть есть двухчастичное состояние  $|\vec{k}, \vec{q}\rangle$ , определяемое двумя импульсами:

$$|\vec{k}, \vec{q}\rangle \equiv \sqrt{2E_k 2E_q} \hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}^+(\vec{q}) |0\rangle.$$

Тогда действие гамильтониана можно записать в виде:

$$\hat{H}|\vec{k}, \vec{q}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [\hat{a}^+(\vec{p})\hat{a}(\vec{p})] \sqrt{2E_k 2E_q} \hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}^+(\vec{q}) |0\rangle,$$

где  $\hat{a}(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{q})|0\rangle$  имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{a}^+(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{q})|0\rangle &= [(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{k}) + \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{p})]\hat{a}^+(\vec{q})|0\rangle = \\ &= (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{k})\hat{a}^+(\vec{q})|0\rangle + \hat{a}^+(\vec{k})[(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) + \hat{a}^+(\vec{q})\hat{a}^+(\vec{p})]|0\rangle = \\ &= (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{k})\hat{a}^+(\vec{q})|0\rangle + (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\hat{a}^+(\vec{k})|0\rangle.\end{aligned}$$

Тогда для действия оператора энергии на двухчастичное состояние можно записать:

$$\begin{aligned}\hat{H}|\vec{k}, \vec{q}\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}^+(\vec{p}) \sqrt{2E_k 2E_q} (2\pi)^3 (\delta^3(\vec{p}-\vec{k})\hat{a}^+(\vec{q}) + \delta^3(\vec{p}-\vec{q})\hat{a}^+(\vec{k})) |0\rangle = \\ &= E_k \hat{a}^+(\vec{k}) \sqrt{2E_k 2E_q} \hat{a}^+(\vec{q}) |0\rangle + E_q \hat{a}^+(\vec{q}) \sqrt{2E_k 2E_q} \hat{a}^+(\vec{k}) |0\rangle.\end{aligned}$$

$\hat{a}^+(\vec{k})$  и  $\hat{a}^+(\vec{q})$  коммутируют друг с другом и могут быть переставлены:

$$\hat{H}|\vec{k}, \vec{q}\rangle = \sqrt{2E_k 2E_q} [E_k + E_q] \hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}^+(\vec{q}) |0\rangle = [E_k + E_q] |\vec{k}, \vec{q}\rangle.$$

Так, при рассмотрении двухчастичного состояния приходим к выводу, что такое состояние является собственным состоянием двухчастичного свободного гамильтониана, а собственным значением является сумма энергий.

Для оператора импульса:

$$\hat{p}|\vec{k}, \vec{q}\rangle = (\vec{k} + \vec{q}) |\vec{k}, \vec{q}\rangle.$$

### Произвольное состояние

Аналогично можно рассмотреть трехчастичное и произвольное n-частичное состояния. Все эти состояния оказываются собственными состояниями гамильтониана. Таким образом, собственные состояния гамильтониана включают в себя вакуумное состояние с нулевой собственной энергией после отбрасывания вакуумной добавки, одночастичное, двухчастичное и произвольное n-частичное состояния.

В реальности квантовые состояния не обязаны обладать определенным импульсом и даже определенным количеством частиц. Самое общее состояние может быть записано в виде разложения в ряд по n-частичным состояниям

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\psi\rangle.$$

$\hat{I}_n \equiv |n\rangle \langle n|$  – операторная единица.

Например, вычислим действие  $\hat{I}_1$  на одночастичное состояние:

$$\hat{I}_1 \equiv |1\rangle \langle 1| = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{|\vec{p}\rangle \langle \vec{q}|}{2E_p},$$

$$\hat{I}_1 |\vec{k}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{|\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|\vec{k}\rangle}{2E_p}.$$

Распишем элементы:

$$|\vec{k}\rangle = \sqrt{2E_k} \hat{a}^+(\vec{k})|0\rangle, \quad \langle\vec{p}| = \langle 0|\hat{a}(\vec{p})\sqrt{2E_p}.$$

Тогда можно записать:

$$\langle\vec{p}|\vec{k}\rangle = \sqrt{2E_p 2E_k} \langle 0|\hat{a}(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{k})|0\rangle.$$

Воспользуемся коммутационным соотношением:

$$\begin{aligned} \hat{a}(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{k}) &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) + \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{p}) \rightarrow \\ \langle\vec{p}|\vec{k}\rangle &= \sqrt{2E_k} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \langle 0|0\rangle, \end{aligned}$$

где  $\langle 0|0\rangle = 1$  – нормировка одночастичного состояния. Тогда  $\hat{I}_1$  при действии на  $|\vec{k}\rangle$  возвращает  $|\vec{k}\rangle$ :

$$\hat{I}_1|\vec{k}\rangle = |\vec{k}\rangle.$$

Определим действие операторной единицы  $\hat{I}_1$  на более сложное состояние:

$$\hat{I}_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k})|\vec{k}\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k})|\vec{k}\rangle.$$

Такие единичные операторы могут быть двухчастичными:

$$\hat{I}_2 = |1\rangle\langle 1| = \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{|\vec{p}, \vec{k}\rangle\langle\vec{p}, \vec{k}|}{2E_p 2E_k}.$$

Можно проверить, что действие такого оператора на двухчастичное состояние тоже будет действовать как единичный оператор. Аналогично можно записать  $\hat{I}_n$ .

### «Частица»

Определим теперь, что такое «частица» в данном случае. Под «частицей» в  $n$ -частичном базисе подразумеваются состояния со строго определенными импульсами. Однако состояния со строго определенными импульсами в квантовой механике обладают абсолютной неопределенностью координаты. Состояние с определенным импульсом равномерно заполняет всю Вселенную, что максимально далеко от точечной частицы в привычном представлении.

Для того, чтобы представить картину, действительно похожую на частицу, то нужно обратиться к волновому пакету  $\psi(\vec{k})|\vec{k}\rangle$ . Если волновая функция  $\psi(\vec{k})$  будет узко сжата вокруг некоторого импульса, то в координатном представлении это состояние будет действительно описывать некоторое облако, которое все еще размазано, но уже сконцентрировано вокруг определенной координаты.

### Нормы

Говоря о нормировках, также стоит отметить, что скалярные произведения  $\langle \vec{p} | \vec{k} \rangle$  называются нормами (аналогично для многочастичных. Коэффициенты  $\sqrt{2E_k}$  необходимы для лоренц-инвариантности норм.

Докажем это утверждение, предположим, что есть некоторая лабораторная система, в которой 4-импульс следующий:

$$p = (E_p, p_x, p_y, p_z).$$

Перейдем в систему отсчета вдоль оси z, проведем преобразование со скоростью  $\beta$ :

$$p' = (E_{p'}, p_{x'}, p_{y'}, p_{z'}).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} E_{p'} &= \gamma(E_p + \beta p_z), \\ p_{z'} &= \gamma(p_z + \beta E_p). \end{aligned}$$

Изменение  $\delta$ -функции при таком преобразовании:

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta(p_x - k_x) \delta(p_y - k_y) \delta(p_z - k_z).$$

Найдем  $\delta(p_z - k_z)$ :

$$\delta(p_z - k_z) \rightarrow \delta(p_{z'} - k_{z'}) = \delta(p_z - k_z) \frac{dp_z}{dp_{z'}}.$$

Вычислим производную  $\frac{dp_z}{dp_{z'}}$ . Для этого найдем обратную производную:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{z'}}{dp_z} &= \gamma \left( 1 + \beta \frac{dE_p}{dp_z} \right), \\ \frac{dE_p}{dp_z} &= \frac{d}{dp_z} \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2} = \frac{p_z}{E_p} \rightarrow \\ \frac{dp_{z'}}{dp_z} &= \gamma \left( 1 + \beta \frac{p_z}{E_p} \right) = \frac{\gamma}{E_p} (E_p + \beta p_z) = \frac{E_{p'}}{E_p}. \end{aligned}$$

Тогда для  $\delta$ -функции можем записать:

$$\delta(p_{z'} - k_{z'}) = \delta(p_z - k_z) \frac{E_p}{E_{p'}}.$$

Так,  $\delta$ -функция преобразуется при преобразовании Лоренца с коэффициентом  $\frac{E_p}{E_{p'}}$ .

Конструкция

$$E_{p'} \delta(p_{z'} - k_{z'}) = \delta(p_z - k_z) E_p$$

является лоренц-инвариантной при переходе между системами отсчета. Такая конструкция возникает при вычислении скалярного произведения двух состояний, соответственно в каждое из состояний необходимо внести корень из двух энергий, тогда их произведение превращается в энергию.

Итак, без коэффициентов  $\sqrt{2E_k}$  преобразование Лоренца приводило бы к тому, что состояния  $\langle \vec{p} | \vec{k} \rangle$  не были бы релятивистски инвариантно нормированными.

## Лекция 21. Квантовая статистика. Нормальное упорядочение

### Квантовая статистика

При постулировании коммутационных и антикоммутационных соотношений можно многое сказать о квантовой статистике полей.

Для скалярных частиц:

$$|\vec{p}, \vec{k}\rangle = \sqrt{2E_p 2E_k} \hat{a}^+(\vec{p}) \hat{a}^+(\vec{k}) |0\rangle = \sqrt{2E_p 2E_k} \hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}^+(\vec{p}) |0\rangle = |\vec{k}, \vec{p}\rangle.$$

Такие частицы называются **бозонами** и подчиняются **статистике Бозе-Эйнштейна**.

Для фермионных полей:

$$|\vec{p}, s; \vec{k}, r\rangle = \sqrt{2E_p 2E_k} \hat{a}_s^+(\vec{p}) \hat{a}_r^+(\vec{k}) |0\rangle = -\sqrt{2E_p 2E_k} \hat{a}_r^+(\vec{k}) \hat{a}_s^+(\vec{p}) |0\rangle = -|\vec{k}, r; \vec{p}, s\rangle.$$

Такие частицы называются **фермионами** и подчиняются **статистике Ферми-Дирака**.

### Каноническое квантование

В нерелятивистской квантовой механике приходится постулировать следующее для операторов координаты и импульса:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i.$$

Для квантовых полей есть аналог этого соотношения. Для скалярного поля  $\Phi$ :

$$x_i \rightarrow \Phi(t, \vec{x}),$$

$$\dot{x}_i \rightarrow \dot{\Phi}(t, \vec{x}).$$

Для квантового поля:

$$\hat{\Phi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [\hat{a}(\vec{p}) e^{-ipx} + \hat{a}^+(\vec{p}) e^{+ipx}].$$

**Плотность канонического импульса** для такого поля будет оператор:

$$\hat{\pi}^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}}.$$

Лагранжиан для скалярного вещественного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - m\Phi^2 = \frac{1}{2} (\dot{\Phi})^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\Phi)^2 - m^2\Phi^2.$$

Тогда  $\hat{\pi}^0 = \hat{\Phi}$ . Можем записать аналог соотношению неопределенностей на языке квантового поля:

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}^0(t, \vec{y})].$$

$$\hat{\pi}^0 = \hat{\Phi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-iE_k}{\sqrt{2E_k}} [\hat{a}(\vec{k}) e^{-iky} - \hat{a}^+(\vec{k}) e^{+iky}] \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 [\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}^0(t, \vec{y})] &= \\
 &= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{(-iE_k)}{\sqrt{2E_k 2E_p}} [(\hat{a}(\vec{p})e^{-ipx} + \hat{a}^+(\vec{p})e^{ipx}), (\hat{a}(\vec{k})e^{-iky} - \hat{a}^+(\vec{k})e^{iky})] = \\
 &= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{(-iE_k)}{\sqrt{2E_k 2E_p}} \{-[\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}^+(\vec{k})]e^{-ipx+iky} + [\hat{a}^+(\vec{p}), \hat{a}(\vec{k})]e^{+ipx-ipy}\} = \\
 &= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{(-iE_k)}{\sqrt{2E_k 2E_p}} \{-(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})e^{-ipx+iky} - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})e^{+ipx-ipy}\} = \\
 &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_k}{2E_p} \{-e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)}\}.
 \end{aligned}$$

Нулевые компоненты  $(t, \vec{x}) = x$  и  $(t, \vec{y}) = y$  абсолютно одинаковы поэтому:

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}^0(t, \vec{y})] = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_k}{2E_p} \{e^{+ip(\vec{x}-\vec{y})} - e^{-ip(\vec{x}-\vec{y})}\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Действительно можно увидеть, что между полем и плотностью канонического импульса существует соотношение, похожее на соотношение для координаты и импульса в нерелятивистской квантовой механике.

Процедура канонического квантования заключается в следующем: вместо постулирования коммутационных соотношений между  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$ , постулируем:

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}^0(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Отсюда можно вывести:

$$[\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}^+(\vec{k})] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}).$$

Эти два способа эквивалентны.

### Квантовая статистика фермионного поля

Вернемся к квантовой статистике фермионного поля. Было показано, что для состояния двух фермионов

$$|\vec{p}, s; \vec{k}, r\rangle = -|\vec{k}, r; \vec{p}, s\rangle.$$

Отсюда следует, что для состояний с одинаковыми импульсами и проекциями спинов

$$|\vec{p}, s; \vec{p}, s\rangle = -|\vec{p}, s; \vec{p}, s\rangle.$$

Тогда единственное решение:

$$|\vec{p}, s; \vec{p}, s\rangle = -|\vec{p}, s; \vec{p}, s\rangle = 0.$$

Вывод: в природе не может существовать двух фермионов в одинаковом квантовом состоянии. Или если рассмотреть один электрон на Земле, а второй на Луне и у них будут одинаковые проекции спинов, то квантовая механика предсказывает, что такое невозможно. Это не так, поскольку при обсуждении электрона на Земле и электрона на Луне речь идет о локализованном электроны, в то время как состояния с определенными импульсами не локализованы, полностью занимают всю Вселенную.

Рассмотрим квантовое состояние двух электронов и разложим его по координатному базису:

$$|\psi\rangle = \int d^3x d^3y |\vec{x}, \vec{y}\rangle \langle \vec{x}, \vec{y} | \psi \rangle,$$

где  $\int d^3x d^3y |\vec{x}, \vec{y}\rangle \langle \vec{x}, \vec{y} | = I_{2,x}$  – операторная единица в координатном базисе. Вычислим проекцию квантового состояния с определенными координатами  $\psi(\vec{x}, \vec{y})$ :

$$|\psi\rangle = \int d^3x d^3y |\vec{x}, \vec{y}\rangle \psi(\vec{x}, \vec{y}).$$
$$\psi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\vec{x})\psi_2(\vec{y}) - \psi_1(\vec{y})\psi_2(\vec{x})).$$

Норма состояния:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 - \int d^3x \psi_1(\vec{x}) \psi_2^*(\vec{x}) \int d^3y \psi_1^*(\vec{y}) \psi_2(\vec{y}).$$

Возможны 2 случая:

1) Если волновые функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  не перекрываются, то

$$\int d^3x \psi_1(\vec{x}) \psi_2^*(\vec{x}) \sim 0,$$
$$\langle \psi | \psi \rangle = 1.$$

2) Если перекрытие  $\psi_1$  и  $\psi_2$  максимально возможное ( $\psi_1(\vec{x}) = \psi_2(\vec{x})$ ), то

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 - 1 = 0.$$

В таком случае действует принцип Паули, исключаящий состояния фермионов с равными квантовыми числами.

## Нормальное упорядочивание

На некоторое время вернемся к проблеме существования бесконечно больших добавок к энергиям – отрицательных для фермионного поля и положительных для скалярного. Решения этой проблемы на данный момент не существует, рассмотрим способ – *нормальное упорядочивание*.

Определим оператор нормального упорядочивания, который будет действовать на операторы рождения или уничтожения.

Для скалярных операторов:

$$N(\hat{a}(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{k})) = \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{p}) =: \hat{a}(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{k}):$$

Для трех операторов:

$$: \hat{a}(\vec{p})\hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{q}) : = \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{q})\hat{a}(\vec{p}).$$

Для фермионных полей перестановки осуществляются с учетом антикоммутации:

$$N(\hat{a}_s(\vec{p})\hat{a}_r^+(\vec{k})) \equiv: \hat{a}_s(\vec{p})\hat{a}_r^+(\vec{k}) := -\hat{a}_r^+(\vec{k})\hat{a}_s(\vec{p}).$$

*При переходе от классической теории к квантовой все операторы обязательно должны быть записаны в нормально упорядоченном виде.* Тогда при рассмотрении фермионного поля в классическом случае с учетом нормального упорядочивания:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [a_s^*(\vec{p})a_s(\vec{p}) - b_s(\vec{p})b_s^*(\vec{p})] \rightarrow$$

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p [a_s^+(\vec{p})a_s(\vec{p}) + b_s^+(\vec{p})b_s(\vec{p})].$$

В таком случае бесконечные добавки не появляются. Нормальное упорядочивание является не решением проблемы, а только способом избавиться от бесконечных добавочных членов.

### Спин фермиона Дирака

Было показано, что квантовое поле, которое является решением уравнения Дирака, подчиняется статистике Ферми-Дирака, по крайней мере его n-частичные состояния. Поэтому уравнение Дирака описывает фермионы – частицы с полуцелым спином. Определим, чему действительно равен спин фермиона Дирака.

При обсуждении теоремы Нётер было показано, что симметрия Лагранжиана относительно некоторых преобразований приводит к законам сохранения. Симметрия относительно сдвига по четырехмерной координате на произвольный вектор приводит к сохранению энергии-импульса. Вращение вокруг произвольной оси приводит к сохранению орбитального момента. Опуская математику, можно записать, что в уравнении Дирака сохраняется *полный орбитальный момент*:

$$\vec{J} = \int d^3x \psi^+(x) \left[ \vec{x} \times (-i\vec{\nabla}) + \frac{\vec{\Sigma}}{2} \right] \psi(x),$$

где  $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ .

Пусть теперь все поля – квантовые операторы. Далее обозначение оператора крышечкой будет опущено. Постулируем, что все операторы должны быть нормально упорядоченными:

$$\vec{J} = \int d^3x: \psi^+(x) \left[ \vec{x} \times (-i\vec{\nabla}) + \frac{\vec{\Sigma}}{2} \right] \psi(x):$$

Упростим рассмотрение, поскольку необходимо только найти численное значение спина фермиона. Рассмотрим фермион, который находится в покое, например, электрон:

$$\vec{J} = \int d^3x: \psi^+(x) \frac{\vec{\Sigma}}{2} \psi(x):$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx} + b_s^+(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{+ipx}],$$

$$\psi^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} [a_r^+(\vec{k})u_r^+(\vec{k})e^{-ikx} + b_r(\vec{k})v_r^+(\vec{k})e^{+ikx}].$$

$$\vec{J} = \int \frac{d^3x d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} : (a_r^+(\vec{k})u_r^+(\vec{k})e^{-ikx} + b_r(\vec{k})v_r^+(\vec{k})e^{+ikx}) \frac{\vec{\Sigma}}{2} \times \\ \times (a_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx} + b_s^+(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{+ipx}).$$

Для проекции полного орбитального момента:

$$J_3 = \int \left\{ +a_r^+(\vec{k})b_s^+(\vec{p})u_r^+(\vec{k})\frac{\Sigma_3}{2}v_s(\vec{p})e^{+i(k+p)x} + b_r(\vec{k})a_s(\vec{p})v_r^+(\vec{k})\frac{\Sigma_3}{2}u_s(\vec{p})e^{-i(k+p)x} \right\}$$

$$J_3 = \int \frac{d^3x d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} \left\{ a_r^+(\vec{k})a_s(\vec{p})u_r^+(\vec{k})\frac{\Sigma_3}{2}u_s(\vec{p})e^{-i(k-p)x} - \right. \\ \left. - b_s^+(\vec{p})b_r(\vec{k})v_r^+(\vec{k})\frac{\Sigma_3}{2}v_s(\vec{p})e^{-i(k-p)x} + \right. \\ \left. + a_r^+(\vec{k})b_s^+(\vec{p})u_r^+(\vec{k})\frac{\Sigma_3}{2}v_s(\vec{p})e^{+i(k+p)x} + \right. \\ \left. + b_r(\vec{k})a_s(\vec{p})v_r^+(\vec{k})\frac{\Sigma_3}{2}u_s(\vec{p})e^{-i(k+p)x} \right\}.$$

Слагаемые 3 и 4 исчезнут в силу ортогональности векторов. Упрощенное выражение принимает вид:

$$J_3 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left\{ a_r^+(\vec{p})a_s(\vec{p})u_r^+(\vec{p})\frac{\Sigma_3}{2}u_s(\vec{p}) - b_s^+(\vec{p})b_r(\vec{p})v_r^+(\vec{p})\frac{\Sigma_3}{2}v_s(\vec{p}) \right\}.$$

Рассмотрим состояние электрона с определенными импульсом и проекцией спина  $|\vec{k}, a\rangle_e$ . Подействуем оператором  $J_3$  на это состояние:

$$J_3|e^-(\vec{k}, a)\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} a_r^+(\vec{p})a_s(\vec{p})u_r^+(\vec{p})\frac{\Sigma_3}{2}u_s(\vec{p})\sqrt{2E_k}a_a^+(\vec{k})|0\rangle \\ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} a_r^+(\vec{p})u_r^+(\vec{p})\frac{\Sigma_3}{2}u_s(\vec{p})(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{k})\delta_{sa}\sqrt{2E_k}|0\rangle \\ = \frac{1}{2E_k} u_r^+(\vec{k})\frac{\Sigma_3}{2}u_a(\vec{k})\sqrt{2E_k}a_r^+(\vec{k})|0\rangle.$$

Рассмотрим электрон в покое,  $\vec{k} = 0$ :

$$J_3|e^-(0, a)\rangle = \frac{1}{2m} u_r^+(0)\frac{\Sigma_3}{2}u_a(0)\sqrt{2m}a_r^+(0)|0\rangle.$$

В базисе, где  $s$  – собственное значение оператора спиральности:

$$u_s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \chi_s(\vec{p}) \\ \sqrt{E_p - m} s \chi_s(\vec{p}) \end{pmatrix} \rightarrow u_s(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2m} \chi_s(0) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\frac{\Sigma_3}{2} u_a(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2m} \chi_a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 \sqrt{2m} \chi_a \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$u_r^+(0) \frac{\Sigma_3}{2} u_a(0) = (\sqrt{2m} \chi_r^+, 0) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 \sqrt{2m} \chi_a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \chi_r^+ \sigma_3 \chi_a 2m.$$

Тогда для действия оператора проекции полного орбитального момента на состояние покоя электрона можно записать:

$$J_3 |e^-(0, a)\rangle = \frac{1}{2} \chi_r^+ \sigma_3 \chi_a |0, r\rangle.$$

$\chi_a$  – собственный спинор матрицы  $\Sigma_3$ , тогда получаем следующее:

$$J_3 |e^-(0, a)\rangle = \frac{1}{2} a |0, a\rangle, \quad a = \pm 1.$$

Так,  $|e^-(0, a)\rangle$  – собственное состояние оператора  $J_3$  с собственным значением  $\pm \frac{1}{2}$ . Фермион, описываемый уравнением Дирака, является частицей со спином  $\frac{1}{2}$ . Позитрон будет отличаться от электрона только операторами  $b_s^+(\vec{p})$ ,  $b_r(\vec{p})$  и знаком. Так, для антифермиона получим спин  $\frac{1}{2}$ , но направление спина отличается знаком от направления спина фермиона.

## Лекция 22. Поле квантуется два!

### Причинность в квантовой теории поля

При рассмотрении квантовой механики было продемонстрировано нарушение причинности. Обсудим причинность в квантовой теории поля, рассмотрение начнем со скалярного вещественного поля:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_k e^{-ik \cdot x} + a_k^\dagger e^{+ik \cdot x}].$$

Интуитивное представление о состоянии с определенной координатой следующее: при действии оператора на вакуумное состояние получаем состояние, локализованное в точке  $x$ , то есть

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot x}}{2E_k} |\vec{k}\rangle = |x\rangle,$$

где  $|\vec{k}\rangle = \sqrt{2E_k} a_k^\dagger |0\rangle$ .

Больше свидетельств правильности такой интерпретации можем получить, вычислив скалярное произведение состояния с определенной координатой и состояния с определенным импульсом:

$$\langle \vec{p} | x \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot x}}{2E_k} \langle \vec{p} | \vec{k} \rangle, \text{ где}$$

$$\langle \vec{p} | = \sqrt{2E_p} \langle 0 | a_p,$$

$$\langle \vec{p} | \vec{k} \rangle = \sqrt{2E_p 2E_k} \langle 0 | a_p a_k^\dagger | 0 \rangle = [a_p a_k^\dagger \equiv [a_p, a_k^\dagger] + a_k^\dagger a_p] = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \rightarrow$$

$$\langle \vec{p} | x \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot x}}{2E_k} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) 2E_p = e^{ipx}.$$

В нерелятивистской квантовой механике такое скалярное произведение имеет очень похожий вид, за исключением того, что в нерелятивистской квантовой механике рассматриваются состояния с определенным импульсом и состояния с определенной трехмерной координатой:

$$\langle \vec{p} | \vec{x} \rangle = e^{-i\vec{p}\vec{x}}.$$

Так, будем считать состояние  $\hat{\phi}(x)|0\rangle = |x\rangle$  состоянием с определенной трехмерной координатой в определенный момент времени  $x_0$ .

Вычислим амплитуду перехода из точки состояния с определенной координатой  $x$  в состояние с определенной координатой  $y$ :

$$\begin{aligned}
 D(x, y) &= \langle y|x \rangle = \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0 \rangle = \\
 &= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} \langle 0|[a_k e^{-iky} + a_k^+ e^{iky}][a_p e^{ipx} + a_p^+ e^{ipx}]|0 \rangle = \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(y-x)}}{2E_p}.
 \end{aligned}$$

Рассматривая вопрос причинности в квантовой теории поля, а именно обращается ли амплитуда в ноль в **причинно несвязанных областях**, необходимо вспомнить, что такое причинно несвязанные области. Если взять две пространственные точки с четырехмерными координатами  $x$  и  $y$ , то для того, чтобы говорить о причинной связанности или несвязанности этих точек, вычисляют квадрат **интервал**:

$$(x - y)^2 = (x_0 - y_0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 = \begin{cases} > 0 \text{ причинно связанный} \\ = 0 \text{ световой конус} \\ < 0 \text{ причинно несвязанный} \end{cases}$$

Представим, что  $(x - y)^2 > 0$ , поскольку речь идет о квадрате 4-вектора, который является лоренц-инвариантным. Значит можно перейти в любую другую инерциальную систему отсчета. Всегда можно будет найти такую систему отсчета, при которой слагаемое  $(\vec{x} - \vec{y})^2$  зануляется. Так, рассматриваем одну и ту же точку в разные моменты времени – положительно определенный интервал является причинно связанным. Если  $(x - y)^2 < 0$ , то можно найти такую систему отсчета, в которой времена становятся одинаковыми,  $x_0 - y_0 = 0$ , отрицательность связана со вторым слагаемым. В такой системе отсчета события являются одновременными, но происходят в разных точках. В таком случае, ни один сигнал, движущийся с конечной скоростью, не способен передать информацию из одной точки в другую. Такие точки являются причинно несвязанными.

Пусть  $(x - y)^2 < 0$ . Амплитуда  $D(x, y)$  является релятивистским инвариантом, поскольку экспонента зависит от скалярного произведения 4-векторов, а  $\frac{d^3p}{E_p}$  также является релятивистским инвариантом. Тогда перейдем в удобную систему отсчета чтобы попытаться оценить этот интеграл и увидеть, обращается ли он в ноль. Перейдем в систему отсчета, где  $(x - y)^2 \Rightarrow -(\vec{x} - \vec{y})^2 = -\vec{r}^2$ ,  $x_0 = y_0$ , тогда:

$$D(x, y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\vec{p}\vec{r}}}{2E_p}.$$

В сферической системе координат:

$$d^3p = dp p^2 \sin \theta d\theta d\varphi = dp p^2 (-d \cos \theta) d\varphi.$$

Минус используем для изменения пределов интегрирования, поскольку  $\theta \Big|_0^\pi \rightarrow \cos \theta \Big|_1^{-1}$ .

Тогда:

$$\begin{aligned}
 D(x, y) &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p^2 \int_{-1}^1 d \cos \theta e^{ipr \cos \theta} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{E_p} \frac{1}{ipr} (e^{ipr} - e^{-ipr}) = \\
 &= \frac{1}{8\pi^2 ir} \int_0^\infty \frac{dp p}{E_p} (e^{ipr} - e^{-ipr}) = \frac{1}{8\pi^2 ir} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp p}{E_p} e^{ipr}.
 \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла воспользуемся методами ТФКП. Изобразим контур в комплексной плоскости,  $p$  будем рассматривать как комплексную переменную. Заметим:

$$E_p = \sqrt{p^2 + m^2},$$

если  $p$  становится комплексной величиной, то существует 2 точки, в которых энергия может обратиться в ноль, обе эти точки находятся на мнимой оси:

$$p = \pm im.$$

Для того, чтобы воспользоваться методами ТФКП нужно построить интеграл по некоторому замкнутому контуру. Выберем окружность так, чтобы интеграл по ней обращался в ноль при стремлении радиуса этой окружности к бесконечности. Рассмотрим экспоненту  $e^{ipr}$ :

$$e^{ipr} = e^{i(\text{Re } p + i \text{Im } p)r} = e^{i \text{Re } p r} \cdot e^{-\text{Im } p r}.$$

Теперь видно, что при  $p \rightarrow \infty$  мнимая часть  $\text{Im } p \rightarrow +\infty$ , значит  $e^{-\text{Im } p r}$  будет экспоненциально быстро затухать. Тогда нужно будет замыкать контур в верхней полуплоскости, обойдя вдоль мнимой оси точку ветвления  $p = +im$  (рис. 22.1).

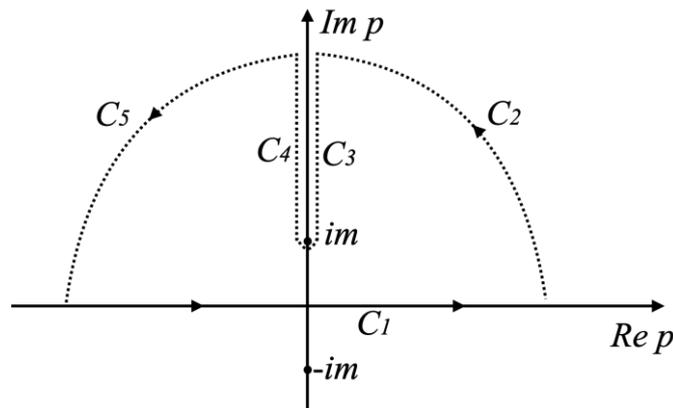


Рис. 22.1. Контур интегрирования в верхней полуплоскости..

Рассмотрим интеграл по всему замкнутому контуру:

$$\oint dp f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp f(p) + \left( \int_{C_2} + \int_{C_5} \right) dp f(p) + \int_{i\infty}^{im} dp f(p) + \int_{im}^{i\infty} dp f(p) e^{i\pi} = 0.$$

Изменим пределы интегрирования  $C_3$ , перенесем интегралы по  $C_3$  и  $C_4$  в правую часть и сведем исходный интеграл по вещественной оси к интегралу по мнимой оси. Интегралы

по дугам с бесконечно большими радиусами зануляются из-за присутствия экспоненты в подынтегральной функции. Итак,

$$D(x, y) = \frac{1}{8\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp p}{E_p} e^{i p r} = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{im}^{i\infty} \frac{dp p}{E_p} e^{i p r},$$

$p$  – чисто мнимая величина:

$$\begin{aligned} p &= i\rho \\ dp p &= -\rho d\rho \\ E_p &= \sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{-\rho^2 + m^2} \end{aligned}$$

Тогда:

$$D(x, y) = \frac{-1}{4\pi^2 r} \int_{im}^{i\infty} \frac{d\rho \rho}{\sqrt{-\rho^2 + m^2}} e^{-\rho r}.$$

Этот интеграл может быть вычислен точно и будет водиться к бесселевой функции. Рассмотрим, как ведет себя подынтегральная функция. Заметим, что при очень больших  $\rho$  функция быстро затухает. Функция максимальна там, где знаменатель обращается в ноль, при этом функция интегрируема. Так, интеграл насыщается при  $\rho$  близких к  $m$ . Можно оценить интеграл следующим образом:

$$D(x, y) \sim \frac{e^{-\rho r}}{r}.$$

Вспомним, что вычисляем амплитуду перехода из точки  $x$  в точку  $y$ , когда эти точки находятся в причинно несвязанных областях. Ожидается, что эта амплитуда обращается в ноль, поскольку квантовая теория поля построена с учетом релятивистской инвариантности. Однако в результате была получена быстро убывающая, но ненулевая амплитуда. Несохраниение причинности означает возможность путешествовать во времени, приводящая к парадоксам.

### Сверхсветовые нейтрино

Итак, полученный результат парадоксален. Прежде чем дать объяснение этому факту и разобрать, как формулируется принцип причинности в квантовой теории поля, обсудим историю, которая связана с экспериментальным, якобы, наблюдением нарушения причинности.

Речь идет об объявлении коллаборацией OPERA в марте 2011 году наблюдения сверхсветовых нейтрино. Коллаборация OPERA построила прецизионный уникальный детектор в подземной лаборатории в Гран-Сассо в Италии. Из ЦЕРНа ускоритель направлял пучок нейтрино под землю в сторону Италии в подземную лабораторию, детектирующую нейтрино. Расстояние между ускорителем и детектором составляло 732 км. Задача коллаборации заключалась в обнаружении трансформации изначальных мюонных нейтрино в тау-нейтрино. В эксперименте использовалась прецизионная

фотоэмульсионная методика для сканирования тысячи фотографий ядерных эмульсий при помощи продвинутых технологий, чтобы определить присутствие тау-лептона. Кроме того, группа исследователей, работавшая в этом эксперименте, в тайне от остальных участников проделала дополнительный эксперимент. Расстояние  $L$  между источником и детектором были измерены прецизионно, а также время вылета нейтрино из ускорителя и время его детектирования и построили отношение одного к другому. К шокирующему удивлению, многих было обнаружено

$$\frac{L}{\Delta t} = c_\nu > c.$$

Говоря о времени прихода нейтрино на детектор:

$$\Delta t_\nu < \Delta t_\gamma \text{ на } 60 \text{ нс.}$$

Как принято в физике, особенно в физике высоких энергий, любое наблюдение должно сопровождаться утверждением о статистической значимости. Общеизвестным физическим открытием считается эксперимент со статистической значимостью, превышающей 5 стандартных отклонений. Этот результат был заявлен на уровне в 6 стандартных отклонений. Физики из этой коллаборации выступали на радио, телевидении, давали интервью в газетах о том, как им удалось достичь такого выдающегося результата.

Спустя некоторое время люди из ЦЕРНа предложили поставить специальный эксперимент, чтобы проверить результаты коллаборации OPERA: необходимо было сделать пучок протонов, которые сбрасывались на мишень и давали в итоге пучок нейтрино, очень узким по времени. Дело в том, что ускорители работают с частицами в виде порций, которые занимают некоторый размер в пространстве и соответственно во времени. Порция нейтрино имела ширину по времени порядка 10 мкс, что много больше результата, на который ориентировалась OPERA при объявлении открытия. Поэтому был проведен эксперимент с пучком шириной 1 нс. В среднем такой пучок действительно приходит на 60 нс раньше, но распределение широкое  $\pm 100$  нс.

Тогда сотрудники коллаборации OPERA вспомнили, что под горой, где находится лаборатория, есть узкое место, где толщина горы была не очень большой. Здесь в детектор OPERA проникали космические мюоны. При этом прямо на пути этих мюонов располагался еще один детектор – LVD. Космические мюоны могли пройти через оба детектора. Так, можно было ретроспективно посмотреть в своих данных на то, когда мюоны регистрировались в LVD, а когда в OPERA.

В результате был построен график, где по оси ординат была отложена разница времен между детектированием датчиком LVD и OPERA, по оси абсцисс – время, когда это произошло (годы) (рис. 22.2). Оказалось, что в декабре 2010 года разница времен резко изменилась на 60 нс, некоторое время оставалась на этом уровне, а затем вернулась к исходному состоянию. Этот скачок совпал по времени с установлением коллаборацией связи с GPS-спутником, при помощи которого разница времени должна была определяться максимально точно. Контакт, который по кабелю соединялся с прибором,

регистрирующим GPS-сигнал, был не плотно затянут. Соответственно вся система OPERA получила сдвиг по времени и стало казаться, что сигналы приходят раньше. После этого история стала фольклором.

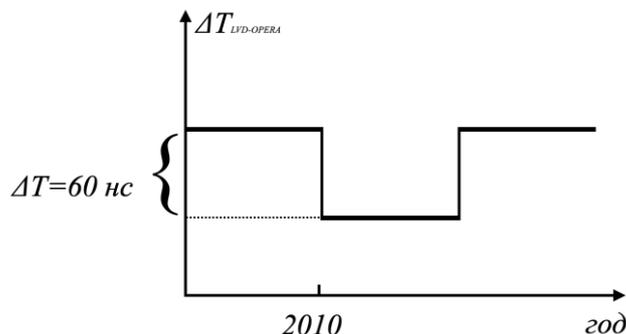


Рис. 22.2. Разница времен между детектированием датчиком LVD и датчиком OPERA в зависимости от года эксперимента.

### Состояние с определенной координатой

В чем же тогда заключается парадокс квантовой теории поля? По всей видимости было сделано допущение, которое показалось логичным, но неправильным. Дело в определении состояния с определенной координатой:

$$|x\rangle = \hat{\Phi}(x)|0\rangle.$$

Строго говоря, утверждение является неправильным. Данное утверждение правильно только приблизительно. Рассмотрим одномерное пространство, подействуем оператором на вакуумное состояние. Итоговое распределение состояния по состояниям с определенными координатами будет не дельта-функцией, а распределением с наиболее вероятной координатой  $x$ , но обладающим шириной  $\sim 1/m$ , где  $m$  – масса исследуемой скалярной частицы из определения энергии (рис. 22.3 (а)). Поэтому при проецировании состояния  $x$  на состояние  $y$  было получено ненулевое перекрытие. Если распределение похоже не экспоненциальное, то амплитуда также пропорциональна  $\sim e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}$ , где  $m$  – обратная ширина распределения (рис. 22.3 (б)). Таким образом объясняется получение ненулевой амплитуды.

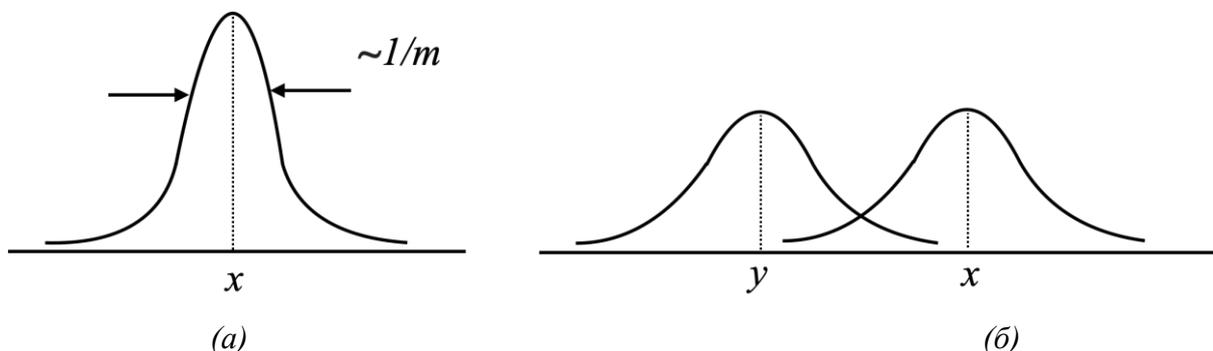


Рис. 22.3. а) Итоговое распределение состояния по состояниям с определенными координатами; б) перекрытие распределений состояний.

Тогда возникает вопрос: как сформулировать принцип причинности в квантовой теории поля, если все состояния не строго локализованные, а размазаны относительно координаты. Кажется, что в квантовой теории поля нельзя построить состояние со строго определенной координатой, однако это можно сделать. Для этого стоит перейти на один абстрактный уровень вверх.

Представим, что существует некоторый произвольный оператор  $\hat{A}(x)$ , который измеряет физическую наблюдаемую величину в точке  $x$ . Это может быть оператор энергии, орбитальный момент, оператор импульса. Другой оператор  $\hat{B}(y)$  измеряет физическую наблюдаемую величину в точке  $y$ . Рассмотрим абстрактное, сколь угодно сложное, квантовое состояние  $|\psi\rangle$ . Последовательно подействуем на это состояние операторами:

$$\hat{A}(x)\hat{B}(y)|\psi\rangle.$$

Если точки  $x$  и  $y$  находятся в причинно несвязанной области, то не должно быть разницы, в какой последовательности применяются операторы:

$$\hat{A}(x)\hat{B}(y)|\psi\rangle = \hat{B}(y)\hat{A}(x)|\psi\rangle.$$

Сигнал не может передаться от  $\hat{B}(y)$  к  $\hat{A}(x)$  и наоборот. Из этого соображения приходим к выводу: если состояние  $|\psi\rangle$  произвольно, то для любых операторов  $\hat{A}(x)$  и  $\hat{B}(y)$  в случае  $(x - y)^2 < 0$  должно быть справедливо и

$$\hat{A}(x)\hat{B}(y) = \hat{B}(y)\hat{A}(x).$$

Так, **принцип причинности в квантовой теории поля следующий: любые операторы должны коммутировать в причинно несвязанной области**, то есть

$$[\hat{A}(x), \hat{B}(y)] = 0.$$

Любой оператор можно представить в виде бесконечного ряда Тейлора по операторам поля

$$\hat{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{\Phi}^n(x), \quad \hat{B}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \hat{\Phi}^m(y).$$

Тогда

$$[\hat{A}(x), \hat{B}(y)] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m [\hat{\Phi}^n(x), \hat{\Phi}^m(y)] = 0.$$

Предположим, что

$$[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)] = 0 \text{ для } (x - y)^2 < 0,$$

тогда нетрудно показать, что

$$[\hat{\Phi}^n(x), \hat{\Phi}^m(y)] = 0.$$

Рассмотрим, например, частный случай:

$$\begin{aligned} [\hat{\Phi}^2(x), \hat{\Phi}^3(y)] &= \hat{\Phi}^2(x)\hat{\Phi}^3(y) - \hat{\Phi}^3(y)\hat{\Phi}^2(x) = \hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}^3(y) - \hat{\Phi}^3(y)\hat{\Phi}^2(x) = \\ &= \hat{\Phi}^3(y)\hat{\Phi}^2(x) - \hat{\Phi}^3(y)\hat{\Phi}^2(x) = 0. \end{aligned}$$

Проверим гипотезу  $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)] = 0$ :

$$\begin{aligned} [\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)] &= \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p}2E_k} [a_k e^{-ikx} + a_k^+ e^{+ikx}, a_p e^{-ipy} + a_p^+ e^{+ipy}], \text{ т. к.} \\ \hat{\Phi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a_k e^{-ikx} + a_k^+ e^{+ikx}). \end{aligned}$$

Можно заметить, что при раскрытии коммутатора два из четырех слагаемых обращаются в ноль, поскольку операторы рождения коммутируют друг с другом и операторы уничтожения коммутируют друг с другом. Тогда

$$\begin{aligned} [\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)] &= \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p}2E_k} ([a_k, a_p^+] e^{-ikx} e^{+ipy} + [a_k^+, a_p] e^{+ikx} e^{-ipy}) = \\ &= \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p}2E_k} ((2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) e^{-ikx} e^{+ipy} - \\ &- (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) e^{+ikx} e^{-ipy}) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)}) = D(y-x) - D(x-y). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь конкретный случай, когда  $(x-y)^2 < 0$ . Значит можно будет найти такую систему координат, в которой времена становятся одинаковыми, а пространственные координаты разные, то есть

$$(x-y)^2 = -r^2,$$

тогда

$$[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{+ip\vec{r}} - e^{-ip\vec{r}}).$$

Сделаем замену переменных:

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p},$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3p &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \rightarrow \\ &- \int_{+\infty}^{-\infty} dp_x \int_{+\infty}^{-\infty} dp_y \int_{+\infty}^{-\infty} dp_z = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z. \end{aligned}$$

Так, при замене интеграл с определенными пределами остается неизменным. Тогда в результате получаем

$$[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)] \equiv 0.$$

Таким образом, коммутатор операторов скалярных полей обращается тождественно в ноль в причинно несвязанной области.

Заострим внимание на самом полученном результате. При формулировании принципа причинности в квантовой теории поля было показано, что результат действия оператора поля на вакуумное состояние всегда будет приводить к размазыванию состояния вокруг координаты, указанной в операторе поля. Поэтому всегда состояние, зависящее от этой координаты  $x$ , будет перекрываться другим состоянием, зависящим от другой координаты  $y$ . Перекрытие будет пропорционально экспоненте  $e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}$ . Принцип причинности можно ввести, потребовав, чтобы коммутатор любых операторов, зависящих от точки  $x$  и  $y$  в причинно несвязанной области обращался в ноль. Этот коммутатор действительно обращается в ноль, если предположить, что коммутатор самих полей обращается в ноль:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0.$$

Это утверждение было доказано, значит причинность в квантовой теории. Поля сохраняется строго без каких-либо отклонений.

Можно также показать, что оператор не обращается в ноль в причинно связанной области. Если

$$(x - y)^2 > 0,$$

тогда

$$(x - y)^2 = t^2.$$

Коммутатор  $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$  в этой области:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-iE_p t} - e^{+iE_p t}).$$

Экспоненты не переходят друг в друга. При вычислении интеграла с помощью таблиц интегралов и спецфункций увидим

$$(e^{-iE_p t} - e^{+iE_p t}) \sim (e^{-imt} - e^{+imt}).$$

## Лекция 23. Пропагатор

### Пропагатор

Пропагатор – функция, которая обеспечивает распространение частицы или поля из одной точки в другую. Пропагатор тесно связан с функцией Грина, рассмотренной ранее. Если рассматривать скалярное поле  $\phi$ , которое подчиняется уравнению Клейна-Фока-Гордона, где существует правая часть

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = j(x),$$

то функцией Грина называется функция, которая удовлетворяет решению

$$(\partial^2 + m^2)G(x - y) = -i\delta^4(x - y).$$

Функция Грина может быть представлена в виде четырехмерного интеграла:

$$G(x - y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2}.$$

Возьмем интеграл по нулевой компоненте импульса:

$$G(x - y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2}.$$

Для частицы, которую будем называть реальной, справедливо соотношение:

$$p^2 = E_p^2 - \vec{p}^2 = m^2,$$

В рассматриваемом случае  $p_0, p_x, p_y, p_z$  независимы друг относительно друга, поэтому  $p^2$  не обязательно равен  $m^2$ .

Воспользуемся ТФКП, чтобы вычислить интеграл по  $p_0$ . Для этого преобразуем интеграл в интеграл по комплексной плоскости. Знаменатель представляет собой произведение двух функций:

$$p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 = \left[ p_0 - (\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \right] \left[ p_0 + (\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \right],$$
$$\vec{p}^2 + m^2 = E_p.$$

Тогда

$$p^2 - m^2 = [p_0 - E_p][p_0 + E_p].$$

Так, функция имеет два полюса в точках  $p_0 = \pm E_p$ . Оба полюса расположены на вещественной оси. Интеграл проходит по оси, на которой расположены полюса, поэтому необходимо договориться, как эти полюса обходить. Существует 4 способа: 1) обойти оба полюса сверху, 2) обойти оба полюса снизу, 3) обойти правый полюс сверху, левый снизу и 4) обойти правый полюс снизу, левый сверху.

### Запаздывающая функция Грина

Пусть контур интегрирования обходит оба полюса сверху. Распишем подынтегральную функцию:

$$\frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)}$$

Замкнем контур так, чтобы гарантировать равенство нулю интеграла по этому контуру.

$$\frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)} = \frac{e^{-i(\operatorname{Re} p_0 + i \operatorname{Im} p_0)(x_0-y_0)}}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)} = \frac{e^{-i \operatorname{Re} p_0(x_0-y_0)} e^{\operatorname{Im} p_0(x_0-y_0)}}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)}$$

Необходимо рассмотреть 2 случая (рис. 23.1):

- 1)  $x_0 - y_0 > 0$ , тогда для обнуления интеграла по дуге необходимо выполнение условия  $\operatorname{Im} p_0 < 0$ . В этом случае следует замкнуть контур снизу.
- 2)  $x_0 - y_0 < 0$ , тогда необходимо выполнение условия  $\operatorname{Im} p_0 > 0$ . В этом случае следует замкнуть контур сверху.

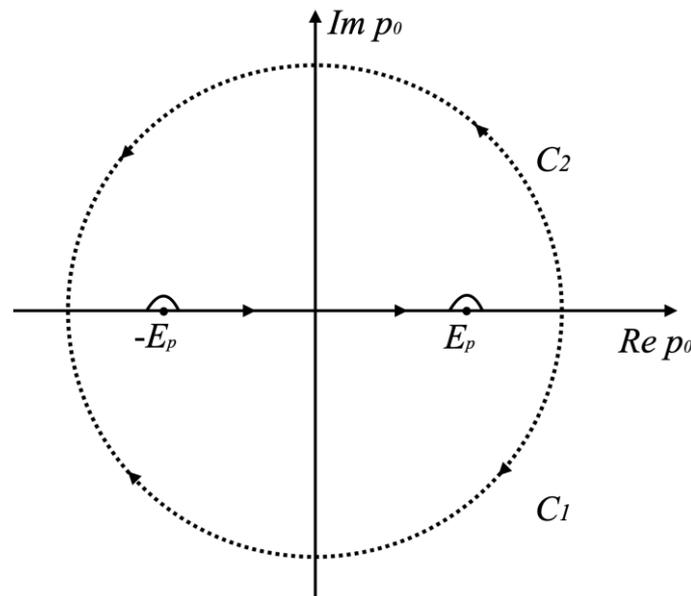


Рис.23.1. Контур интегрирования при обходе обоих полюсов сверху.

Вычислим интеграл по  $p_0$  для каждого из этих случаев.

Рассмотрим  $x_0 - y_0 > 0$ . Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)} = \oint_{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)}$$

Обе особые точки находятся внутри замкнутого контура. Воспользуемся теоремой Коши для того, чтобы вычислить интеграл с помощью вычетов. Обход контура по часовой стрелке, значит знак отрицательный:

$$\oint_{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)} = -\frac{2\pi i}{2\pi} \left( \frac{e^{-iE_p(x_0-y_0)}}{2E_p} + \frac{e^{+iE_p(x_0-y_0)}}{-2E_p} \right) =$$

$$= i \left( \frac{e^{+iE_p(x_0-y_0)}}{2E_p} - \frac{e^{-iE_p(x_0-y_0)}}{2E_p} \right).$$

Запишем выражение для  $G(x - y)$ :

$$G(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-iE_p(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} - e^{+iE_p(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}) =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x_0-y_0)} - e^{+ip(x_0-y_0)}) = D(x - y) - D(y - x).$$

Рассмотрим  $x_0 - y_0 < 0$ . Внутри контура не содержится ни одной особой точки. Поэтому интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Оба условия можно объединить с помощью функций Хевисайда:

$$\theta(x_0 - y_0) = \begin{cases} 1, & x_0 > y_0 \\ 0, & x_0 < y_0 \end{cases} \rightarrow G(x - y) = \theta(x_0 - y_0)(D(x - y) - D(y - x)).$$

Поскольку эта функция отлична от нуля только при  $x_0 > y_0$ , то эта функция называется **запаздывающей функцией Грина** – сигнал появляется после начала действия источника. Такая функция называется **запаздывающим пропагатором** в квантовой теории поля.

### Опережающая функция Грина

Выберем теперь способ обхода полюсов снизу (рис. 23.2).

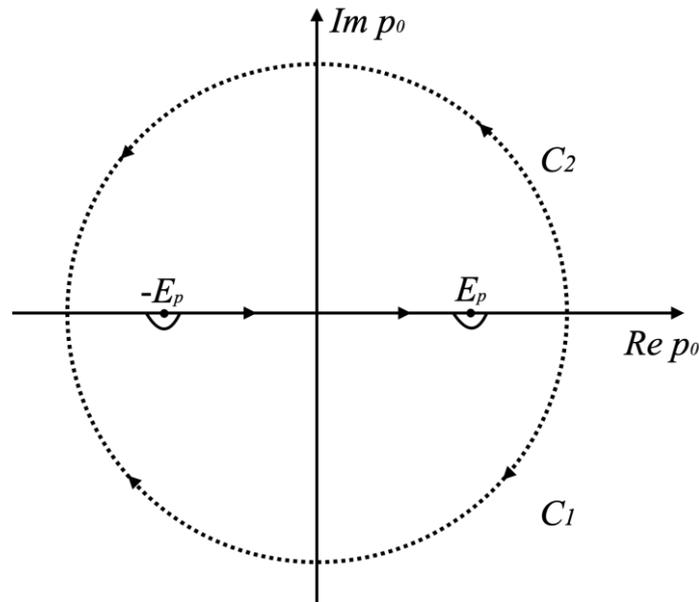


Рис. 23.2. Контурны интегрирования при обходе обоих полюсов снизу.

То, по какому контуру будет замыкание в случаях  $x_0 > y_0$  и  $x_0 < y_0$ , не зависит от того, с какой сторон обходим полюса. Однако теперь нижний контур интегрирования

для  $x_0 > y_0$  не содержит особых точек. Оба полюса находятся внутри верхнего контура, соответствующего  $x_0 < y_0$ . Единственное отличие в том, что верхний контур идет против часовой стрелки, значит будет отличен знак интеграла. Так, для верхнего контура, где  $x_0 < y_0$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} i \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)} &= i \oint_{C_2} \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)} = \\ &= \frac{2\pi i}{2\pi} \cdot i \int \left( \frac{e^{-iE_p(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2E_p} - \frac{e^{+iE_p(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2E_p} \right) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [e^{+ip(x-y)} - e^{-ip(x-y)}] = D(y-x) - D(x-y). \end{aligned}$$

Тогда функция Грина может быть записана в виде:

$$G(x-y) = \theta(y_0 - x_0)(D(y-x) - D(x-y)).$$

Такая функция Грина называется *опережающей* или *опережающим пропагатором*.

### Фейнмановский пропагатор

Если известен источник в прошлом, породивший поле, которое необходимо определить в будущем, тогда необходимо использовать запаздывающую функцию Грина. Если известно решение в будущем и необходимо определить источник в прошлом, то следует использовать опережающую функцию Грина.

В квантовой теории поля наиболее полезной является другая функция Грина, связанная с другим способ обхода полюсов – левая точка обходится снизу, правая сверху (рис. 23.2). Рассмотрим, чему будет равна функция Грина при таком способе обхода полюсов. Рассмотрим 2 случая соотношений между  $x_0$  и  $y_0$ .

1)  $x_0 > y_0$ , контур интегрирования замыкается снизу. Такой контур содержит только один полюс, правый:

$$G(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-iE_p(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2E_p} = D(x-y).$$

2)  $x_0 < y_0$ , контур замыкается сверху и содержит левый полюс:

$$G(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+iE_p(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{-2E_p} 2\pi i \cdot i = D(y-x).$$

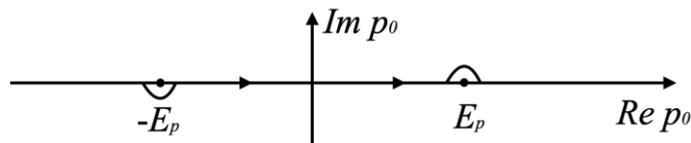


Рис. 23.3. Способ обхода полюсов.

Так, функция Грина является или амплитудой перехода из точки  $y$  в точку  $x$ , или наоборот. Эти амплитуды можно объединить:

$$G_F(x - y) \equiv \theta(x_0 - y_0)D(x - y) + \theta(y_0 - x_0)D(y - x).$$

Эта формула будет использоваться при построении S-матрицы. Такое правило обхода придумал Ричард Фейнман, и соответственно такая функция Грина называется **фейнмановским пропагатором**.

Покажем, что фейнмановская функция Грина связана с объектом, использующим только квантовые поля и вакуумное среднее. Рассмотрим вакуумное среднее  $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$  в случаях  $x_0 > y_0$  и  $x_0 < y_0$ .

1)  $x_0 > y_0$

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle &= \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p} \sqrt{2E_k}} (a_k e^{-ikx} + a_k^+ e^{+ikx})(a_p e^{-ipy} + a_p^+ e^{+ipy}) \right| 0 \right\rangle = \\ &= \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p} \sqrt{2E_k}} a_k a_p^+ e^{-ikx} e^{+ipy} \right| 0 \right\rangle = \\ &= \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p} \sqrt{2E_k}} ([a_k, a_k^p] + a_p^+ a_k) e^{-ikx} e^{+ipy} \right| 0 \right\rangle = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} = D(x - y) \end{aligned}$$

2)  $x_0 < y_0$

$$\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle = D(y - x).$$

Введем хронологическое упорядочение:

$$T(\phi(x)\phi(y)) \equiv \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x_0 > y_0 \\ \phi(y)\phi(x), & x_0 < y_0, \end{cases}$$

тогда можно записать компактно:

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = \theta(x_0 - y_0)D(x - y) + \theta(y_0 - x_0)D(y - x) = G_F(x - y).$$

Так, вакуумное среднее от упорядочивания двух полей является фейнмановским пропагатором.

### Пропагатор фермионного поля

Проверим, будет ли верно то же самое для более сложных полей, таких как фермионное дираковское поле. Особенно интересны пропагатор и принцип причинности для фермионного поля.

Определим аналог состояния с определенной координатой. Фермионное поле может быть записано следующим образом:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_{ps} u_{ps} e^{-ipx} + b_{ps}^+ v_{ps} e^{+ipx}],$$

индексы  $p$  и  $s$  указывают на зависимость от импульса и спина. Эрмитово сопряженное:

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_{ps}^+ \bar{u}_{ps} e^{+ipx} + b_{ps} \bar{v}_{ps} e^{-ipx}].$$

$\psi(x)$  – спинор, столбец из 4-х компонент;  $\bar{\psi}(x)$  – строка из 4-х компонент. Рассмотрим действие компоненты спинора на вакуумное состояние:

$$\psi_a(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} v_{ps}^a e^{+ipx} |\vec{p}, s\rangle_{e^+} = |e^+(x)\rangle.$$

Можно подумать, что это стояние позитрона в координате  $x$ . Тогда для состояния электрона в координате  $x$ :

$$\bar{\psi}_a(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \bar{u}_{ps}^a e^{+ipx} |\vec{p}, s\rangle_{e^-} = |e^-(x)\rangle.$$

### Пропогатор электрона

Построим теперь аналог амплитуды перехода из точки  $y$  в точку  $x$  для электрона:

$$\langle e^-(x) | e^-(y) \rangle = \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle = \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} a_{ps} u_{ps}^a e^{-ipx} a_{kr}^+ \bar{u}_{kr}^b e^{iky} \right| 0 \right\rangle$$

При рассмотрении вакуумной катастрофы необходимо было постулировать подчинение операторов рождения и уничтожения фермионов антикоммутиационным соотношениям для того, чтобы энергия вакуума и заряд были правильным образом определены. Воспользуемся антикоммутиационным соотношением:

$$\{a_{ps}, a_{kr}^+\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{sr},$$

$$a_{ps} a_{kr}^+ = \{a_{ps}, a_{kr}^+\} - a_{kr}^+ a_{ps}.$$

Тогда:

$$\langle e^-(x) | e^-(y) \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} u_{ps}^a \bar{u}_{ps}^b e^{-ip(x-y)},$$

$$u_{ps}^a \bar{u}_{ps}^b = (u_{ps} \cdot \bar{u}_{ps})^{ab}$$

$(u_{ps} \cdot \bar{u}_{ps})^{ab}$  – элемент матрицы 4 на 4. Если просуммируем по спину, то получим следующее:

$$(u_{ps} \cdot \bar{u}_{ps})^{ab} = (\hat{p} + m)^{ab},$$

где  $\hat{p}$  – свертка с  $\gamma$ -матрицей:

$$\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu.$$

Тогда:

$$\langle e^-(x) | e^-(y) \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(\hat{p} + m)^{ab}}{2E_p} e^{-ip(x-y)}.$$

Важно заметить, что множитель  $(\hat{p} + m)$  можно получить в результате дифференцирования экспоненты. Рассмотрим дифференцирование по индексу  $\mu$  и координате  $x$ :

$$\begin{aligned}\partial_\mu e^{-ipx} &= -ip_\mu e^{-ipx} \rightarrow \\ i\partial_\mu e^{-ipx} &= p_\mu e^{-ipx} \rightarrow \\ i\partial_\mu \gamma^\mu e^{-ipx} &= \hat{p} e^{-ipx} \equiv i\hat{\partial} e^{-ipx}.\end{aligned}$$

Это позволяет записать амплитуду перехода из точки  $y$  в точку  $x$  в виде:

$$\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle = (i\hat{\partial}_x + mI) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_p} = (i\hat{\partial}_x + m)D(x-y),$$

где  $(i\hat{\partial}_x + mI)$  – матрица 4 на 4,  $I$  – единичная матрица. Итак, это значит, что амплитуда перехода фермиона из одной точки в другую связана оператором дифференцирования с амплитудой перехода скалярного поля.

### Пропагатор позитрона

Можно составить также выражения для перехода позитрона из точки  $y$  в точку  $x$ :

$$\begin{aligned}\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle &= \langle e^+(x)|e^+(y)\rangle, \text{ т. к.} \\ \psi_a(x)|0\rangle &= |e^+(x)\rangle, \quad \langle 0|\bar{\psi}_b(y) = \langle e^+(y)|.\end{aligned}$$

Так, если переставить местами операторы в выражении для амплитуды перехода электрона из точки  $y$  в точку  $x$ , получим амплитуду перехода из точки  $y$  в точку  $x$  для позитрона. В этом есть глубокий смысл. Вспомним интерпретацию Фейнмана: античастица – это частица, движущаяся вспять по времени. Движение позитрона из точки  $y$  в точку  $x$  похоже на движение электрона из точки  $x$  в точку  $y$ . Распишем амплитуду для позитрона:

$$\begin{aligned}\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle &= \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} b_{ps} \bar{v}_{ps}^b e^{-ipy} b_{kr}^+ v_{ps}^a e^{ikx} \right| 0 \right\rangle = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \bar{v}_{ps}^b v_{ps}^a e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (v_{ps} \bar{v}_{ps})^{ab} e^{-ip(x-y)} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\hat{p} - m)^{ab} e^{-ip(x-y)} = \\ &= (-i\hat{\partial}_x - m)D(y-x) = -(i\hat{\partial}_x + m)D(y-x).\end{aligned}$$

Вычисление проведено на основании интуитивных представлениях. Состояние электрона определено так, что это никогда не будет состоянием со строго определенной координатой, а будет размазано по комптоновской длине волны  $\frac{1}{m}$ . Действительно, никогда нельзя локализовать квантовое состояние точнее, чем его длина волны.

## Функция Грина уравнения Дирака

Сделаем следующий шаг и сложим амплитуды для электрона и позитрона:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) + \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle &= \langle 0 | \{ \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) \} | 0 \rangle = \\ &= (i\hat{\partial}_x + m)(D(x-y) - D(y-x)) = (i\hat{\partial}_x + m)G_R(x-y) \end{aligned}$$

$(D(x-y) - D(y-x))$  ни что иное как запаздывающий пропагатор скалярного поля. И векторные, и фермионные поля сводятся к запаздывающему пропагатору скалярного поля. Заметим также, что слева стоит антикоммутирующий оператор  $\{ \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) \}$  между обкладками вакуумного состояния. Антикоммутирующий – число, в котором нет никаких операторов, вычислим его:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} [a_{ks} u_{ks} e^{-ikx} + b_{ks}^+ v_{ks} e^{+ikx}] \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \{ \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) \} &= \\ &= \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_k 2E_p}} \{ a_{ks} u_{ks} e^{-ikx} + b_{ks}^+ v_{ks} e^{+ikx}, a_{pr}^+ \bar{u}_{pr} e^{+ipy} + b_{pr} \bar{v}_{pr} e^{-ipy} \} = \\ &= \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_k 2E_p}} (\{ a_{ks}, a_{pr}^+ \} u_{ks} \bar{u}_{pr} e^{-ikx+ipy} + \{ b_{ks}^+, b_{pr} \} v_{ks} \bar{v}_{pr} e^{+ikx-ipy}) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (u_{ps} \bar{u}_{ps} e^{-ip(x-y)} + v_{ps} \bar{v}_{ps} e^{+ip(x-y)}) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} ((\hat{p} + m) e^{-ip(x-y)} + (\hat{p} - m) e^{+ip(x-y)}) = \\ &= (i\hat{\partial}_x + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)}) = (i\hat{\partial}_x + m)(D(x-y) - D(y-x)). \end{aligned}$$

Так, антикоммутирующий действительно является числом, не зависит от операторов и выражается через запаздывающую функцию Грина скалярного поля.

Теперь предположим, что полученный результат является пропагатором фермионного поля и матрица  $S$

$$S \equiv S(x-y) = (i\hat{\partial}_x + m)(D(x-y) - D(y-x)) = (i\hat{\partial}_x + m)G_R(x-y)$$

является **функцией Грина для уравнения Дирака**.

Подставим матрицу  $S$  в уравнение Дирака:

$$\begin{aligned} (i\hat{\partial}_x - m)S(x-y) &= (i\hat{\partial}_x - m)(i\hat{\partial}_x + m)G_R(x-y), \\ (i\hat{\partial}_x - m)(i\hat{\partial}_x + m) &= (i\hat{\partial})^2 - m^2 = -(\hat{\partial}\hat{\partial} + m^2). \end{aligned}$$

Пусть есть произвольный вектор  $\hat{A}$ , свернутый с  $\gamma$ -матрицей:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A_\mu \gamma^\mu, \\ \hat{A}\hat{A} &= A_\mu \gamma^\mu A_\nu \gamma^\nu = A_\mu A_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu. \end{aligned}$$

Воспользуемся антикоммутиационным соотношением:

$$\begin{aligned} A_\mu A_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu &= A_\mu A_\nu (2g^{\mu\nu} I - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2A^2 I - A_\mu A_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu = 2A^2 I - \hat{A}^2 \rightarrow \\ \hat{A}^2 &= 2A^2 I - \hat{A}^2 \rightarrow \\ \hat{A}^2 &= A^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (i\hat{\partial}_x - m)(i\hat{\partial}_x + m) &= -(\partial^2 + m^2) \rightarrow \\ (i\hat{\partial}_x - m)S(x - y) &= -(\partial^2 + m^2)G_R(x - y). \end{aligned}$$

Полученное уравнение – уравнение на функцию Грина скалярного поля, значит

$$(i\hat{\partial}_x - m)S(x - y) = i\delta^4(x - y).$$

Так, показано, что матрица  $S(x - y)$ , являющаяся антикоммутиатором фермионных полей, является функцией Грина для фермионного поля, но в отличие от скалярного поля для согласования необходим другой знак. Наконец вспомним, что при вычислении запаздывающей функции Грина была возможность обходить полюса либо оба сверху, либо оба снизу, либо один сверху, другой снизу. К запаздывающей функции Грина привел обход обоих полюсов снизу. Можно воспользоваться результатами, полученными для скалярной функции Грина и сказать, что выражение для обхода полюсов сверху поределяет запаздывающую функцию Грина  $S_R(x - y)$  для фермионного поля. При выборе другого способа обхода полюсов можно получить опережающую или фейнмановскую функцию Грина.

### Причинность фермионного поля

Прежде чем перейти к определению фейнмановского пропагатора для фермионного поля, который является важнейшим в этом разделе, поскольку будет применяться при построении правил Фейнмана, сделаем последнее замечание относительно причинности, связанной с фермионным полем.

Причинность присутствует для скалярного поля, для которого было показано, что коммутатор полей в причинно несвязанной области обращается в ноль. Ранее для фермионного поля была получена важная формула:

$$\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = (i\hat{\partial}_x + m)(D(x - y) - D(y - x)) = (i\hat{\partial}_x + m)[\phi(x), \phi(y)].$$

Так, если в причинно несвязанной области коммутатор скалярных полей  $[\phi(x), \phi(y)]$  обращается в ноль, то антикоммутиатор фермионных полей в причинно несвязанной области также обращается в ноль.

Можно, однако, вспомнить, что ранее было потребовано, что любые операторы физически наблюдаемых величин должны коммутировать в причинно несвязанной области:

$$[\hat{A}(x), \hat{B}(y)] = 0, \text{ если } (x - y)^2 < 0.$$

Для того, чтобы согласовать два условия, заметим, что любой наблюдаемый оператор, который строится из фермионных полей, то такой оператор всегда содержит четные степени фермионных полей (будет пояснено позже):

$$\hat{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi^{2n}(x), \quad \hat{B}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \psi^{2m}(y).$$

Если это действительно так, то

$$[\hat{A}(x), \hat{B}(y)] = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m [\psi^{2n}(x), \psi^{2m}(y)] = 0.$$

Это легко показать, например, пусть  $n = 1, m = 1$

$$[\psi^2(x), \psi^2(y)] = \psi^2(x)\psi^2(y) - \psi^2(y)\psi^2(x),$$

$$\begin{aligned} \psi^2(x)\psi^2(y) &= \psi(x)\psi(x)\psi(y)\psi(y) = -\psi(x)\psi(y)\psi(x)\psi(y) = \\ &= \psi(x)\psi(y)\psi(y)\psi(x) = \psi^2(y)\psi^2(x) \rightarrow \end{aligned}$$

$$[\psi^2(x), \psi^2(y)] = \psi^2(y)\psi^2(x) - \psi^2(y)\psi^2(x) = 0.$$

Использованная запись символическая, усложнения можно сформулировать более четко, но для осознания идеи такой записи достаточно.

На этом можно завершить доказательство того, что причинность в квантовой теории поля сохраняется.

## Лекция 24. S-матрица

### S-матрица

S-матрица – важнейший объект в квантовой теории поля, при анализе которого возникает правила Фейнмана. Правила Фейнмана значительно упрощают вычисление вероятностей различных процессов в рамках квантовой теории поля.

Ранее в рамках квантовой теории поля в курсе лекций рассматривались свободные поля, не несущие практической пользы. К сожалению, невозможно получить решение в самом общем виде для произвольного взаимодействия. Таких решений очень мало или нет вообще. Поэтому необходимо научиться работать в рамках квантовой теории поля с приближенными методами для вычисления ответов для взаимодействий. Идея S-матриц заключается в использовании всех знаний, полученных для свободной теории, взаимодействия вводятся в качестве поправок к траекториям полей, описываемых свободной теорией.

Квантовая теория поля в первую очередь возникла для понимания результатов экспериментов. Рассмотрим, как выглядит характерный эксперимент. Его можно представить в виде трех шагов:

- 1) Приготовление начального состояния  $|i\rangle$  (например, ускорение частиц до определенных энергий);
- 2) Взаимодействие начальных частиц;
- 3) Регистрация конечного состояния  $|f\rangle$ .

Рисунок 24.1 демонстрирует пространственно-временную диаграмму взаимодействия. Необходимо научиться связывать начальное состояние с конечным. Экспериментаторы смотрят преимущественно на две величины – сечение и величину.

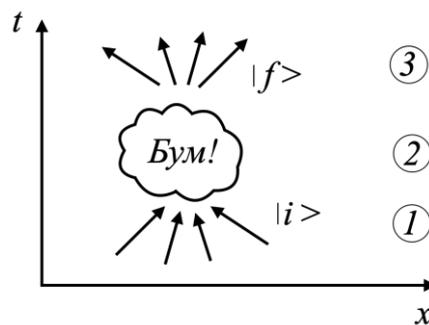


Рис. 24.1. Пространственно-временная диаграмма взаимодействия.

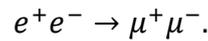
**Сечение взаимодействия** с экспериментальной точки зрения – это число взаимодействий в единицу времени, деленное на поток начальных частиц и число мишеней, с которыми сталкиваются нормальные частицы.

$$\sigma = \frac{\text{число взаимодействий в ед. времени}}{\text{поток начальных частиц} \cdot \text{число мишеней}}$$

$$[\sigma] = \frac{[\text{время}^{-1}]}{[\text{площадь}^{-1}] \cdot [\text{время}^{-1}]} = [\text{площадь}].$$

При столкновении шариков, а не частиц такое определение тоже годится, тогда сечением бы было геометрическое сечение пересечения шариков.

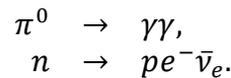
Так, с точки зрения экспериментатора задача ставится предельно просто. Например, пусть сталкиваются две частицы, позитрон и электрон, и в результате рождается пара мюонов:



Рождение мюонов произошло в результате взаимодействия, поэтому число взаимодействий будет равно числу образовавшихся мюонных пар. Электроны и позитроны сталкиваются в коллайдере, для описания вводится обобщение – переход в систему покоя электронов или наоборот позитронов для определения потока начальных частиц и количества мишеней. Так, сечение рождения пар  $\mu^+\mu^-$ :

$$\sigma = \frac{\frac{dN_{\mu^+\mu^-}}{dt}}{\text{поток} \cdot \text{число мишеней}}.$$

Другой хорошо определенной величиной является *ширина распада*. Она относится к случаю, когда есть нестабильная распадающаяся частица, например:



Ширина распада определяется следующим образом:

$$\Gamma = \text{ширина} = \frac{\text{число распадов в единицу времени}}{\text{начальное число частиц}} = \frac{dN}{dt N_0},$$

$$[\text{ширина}] = [\text{время}^{-1}] = \frac{1}{\tau} = [\text{энергия}].$$

В естественной системе единиц (для физики частиц), где  $\hbar = c = 1$ , обратное время имеет размерность энергии.

С точки зрения экспериментатора нет проблем при определении ширины. Например, начальные частицы попадают в детектор, в результате взаимодействия формируется пучок частиц, среди которых возникает частица, пожившая перед распадом и распавшаяся в конечном итоге на несколько других частиц. Этот распад экспериментатор видит потому, что частица жила достаточно долго и успела отлететь от начальной точки взаимодействия (виден трек или смещенную точку распада). В таком случае нужно идентифицировать продукты распада, восстановить, что распалась именно интересующая частица, измерить расстояние  $d$  ( $d_{min} \sim \text{мкм}$ ), которое эта частица пролетела, ее энергию по продуктам распада и соответственно скорость  $v$ , а значит и *время*  $t$ :

$$t = \frac{d}{v}.$$

Такой метод справедлив для долгоживущих частиц, которые распадаются в основном за счет электрослабых распадов. Примерами являются распад нейтрона,  $\Lambda$ -гиперона, мюона

$$\begin{aligned} n &\rightarrow pe^{-}\bar{\nu}_e, \\ \Lambda &\rightarrow p\pi^{-}, \\ \mu^{-} &\rightarrow e^{-}\bar{\nu}_e\nu_{\mu}. \end{aligned}$$

Однако, есть частицы, которые не взаимодействуют слабым образом. Такие частицы гораздо более вероятно будут взаимодействовать за счет электромагнитных или сильных взаимодействий. Тогда точка распада фактически совпадает с точкой рождения. Метод измерения расстояния в таком случае не применим. В таком случае определяются все продукты распада, как и в первом методе, и вычисляется *инвариантная масса* – сумма всех 4-импульсов распадающихся частиц в квадрате:

$$m_{inv}^2 = (p_1 + p_2 + \dots)^2.$$

В таком случае невозможно отделить продукты распада интересующей частицы от остальных частиц. В части вариантов действительно попадем на частицы, возникшие из распада интересующей нас частицы, но в большинстве случаев будут относиться к трекам, не имеющим отношения к распадающейся частице. Далее может быть построен график, где по горизонтальной оси откладывается инвариантная масса, по вертикальной – число состояний с такой массой (рис. 24.2). Распределение по инвариантной массе будет иметь полиномиальный вид с пиком, соответствующим распавшейся частице. Остальное – случайные комбинаторные ситуации. Этих результатов достаточно для аппроксимации. Пик представляет собой не дельта-функцию, а некоторую размазанную функцию, ширина пика при этом будет являться искомой шириной взаимодействия  $\Gamma$ .

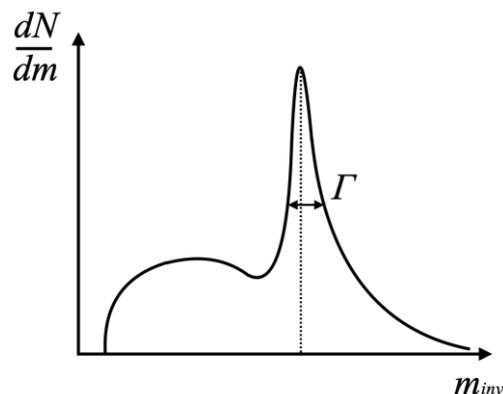


Рис. 24.2. Распределение частиц по инвариантной массе.

Рассмотрим эту проблему теперь с точки зрения теории. Прежде чем разобрать успешный приближенный метод решения этой задачи, рассмотрим более подробно проблемы теоретического исследования таких задач.

Для теоретического решения задачи необходимо записать Лагранжиан и уравнение Лагранжа, из которого выводится уравнение движения. Например, Лагранжиан для фермионного поля:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi,$$

уравнением движения для фермионного поля является уравнение Дирака:

$$(i\hat{d} - m)\psi = 0.$$

Лагранжиан для электромагнитного поля:

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow$$

$$\partial^2 A_\mu = 0.$$

Электромагнитное и фермионное поля можно связать друг с другом. В электродинамике Максвелл и Хевисайд сформулировали теорию электромагнетизма. И было показано, что простая замена  $i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu$  приводит к тому, что частица в электромагнитном поле описывается как свободная частица. Можно воспользоваться этим приемом, пусть  $q = -e, e > 0$ , тогда два мира могут быть объединены:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'_f + \mathcal{L}_{em} = \bar{\psi}(i\hat{d} + e\hat{A} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

$$\mathcal{L}'_f = \bar{\psi}(i\hat{d} + e\hat{A} - m)\psi.$$

$\mathcal{L}$  - лагранжиан электродинамики, который после того, как поля  $\psi$  и  $A$  становятся квантовыми, становится **лагранжианом квантовой электродинамики**. Этот Лагранжиан удобно записывать в виде суммы трех слагаемых:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{d} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}e\hat{A}\psi,$$

первые два слагаемых описывают свободные поля, третье – **Лагранжиан взаимодействия**, связывает в одной пространственно-временной точке фермионное и электромагнитное поля.

Чтобы получить решения необходимо записать уравнения Эйлера-Лагранжа, однако получить решения крайне сложно. Поэтому необходимо ввести новые методы. Важнейшим шагом является представление взаимодействия.

### Представление взаимодействия

Идея представления взаимодействия является простой. Запишем обобщенное уравнение Шредингера. Пусть существует некоторое квантовое состояние  $|\psi(t)\rangle$ , эволюцию по времени которого описываем, тогда справа стоит некоторый гамильтониан, который действует на то же квантовое состояние:

$$\frac{i\partial}{\partial t}|\psi_S(t)\rangle = \hat{H}_S|\psi_S(t)\rangle.$$

Под такое абстрактное определение попадает и уравнение Дирака. Запишем гамильтониан в виде суммы свободного гамильтониана и части, относящейся к взаимодействию:

$$\hat{H}_S|\psi_S(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V})|\psi_S(t)\rangle.$$

Квантовое состояние в представлении Шредингера можно записать в виде:

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{0,S}t}|\psi_I(t)\rangle,$$

где  $|\psi_I(t)\rangle$  – состояние в представлении взаимодействия. Тогда исходное уравнение Шредингера можно переписать в виде:

$$\frac{i\partial}{\partial t}|\psi_S(t)\rangle = \hat{H}_{0,S}e^{-i\hat{H}_{0,S}t}|\psi_I(t)\rangle + e^{-i\hat{H}_{0,S}t}i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle \rightarrow$$

$$\hat{H}_{0,S}e^{-i\hat{H}_{0,S}t}|\psi_I(t)\rangle + e^{-i\hat{H}_{0,S}t}i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle = \hat{H}_{0,S}e^{-i\hat{H}_{0,S}t}|\psi_I(t)\rangle + \hat{V}_Se^{-i\hat{H}_{0,S}t}|\psi_I(t)\rangle \rightarrow$$

$$e^{-i\hat{H}_{0,S}t}i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle = \hat{V}_Se^{-i\hat{H}_{0,S}t}|\psi_I(t)\rangle.$$

Домножим левую и правую части слева на экспоненту  $e^{+i\hat{H}_{0,S}t}$ , тогда:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle = e^{+i\hat{H}_{0,S}t}\hat{V}_Se^{-i\hat{H}_{0,S}t}|\psi_I(t)\rangle,$$

где  $e^{+i\hat{H}_{0,S}t}\hat{V}_Se^{-i\hat{H}_{0,S}t} \equiv \hat{V}_I(t)$  – потенциал взаимодействия в представлении взаимодействия, зависящий от времени. Полученное уравнение – аналог уравнения Шредингера, только теперь из гамильтониана исчезла свободная часть, осталась только энергия взаимодействия:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle = \hat{V}_I(t)|\psi_I(t)\rangle.$$

Если энергия взаимодействия равна нулю, то эволюция квантового состояния  $|\psi_I(t)\rangle$  элементарна и не зависит от времени. Если гамильтониан взаимодействия отличен от нуля, но мал, то можно считать эволюцию по времени достаточно медленной.

Тогда можно переформулировать всю теорию в теорию для взаимодействующих квантовых полей, при этом все взаимодействия, описываемые соответствующими гамильтонианами, будут давать небольшие поправки к квантовому состоянию. В представлении взаимодействия необходимо сделать все то же самое для всех операторов. Пусть есть произвольный оператор в представлении Шредингера, тогда в представлении взаимодействия:

$$\hat{O}_S \rightarrow \hat{O}_I(t) = e^{+i\hat{H}_{0,S}t}\hat{O}_Se^{-i\hat{H}_{0,S}t}.$$

Для оператора  $\hat{H}_0$ :

$$\hat{H}_{0,S} \rightarrow \hat{H}_{0,I} = e^{+i\hat{H}_{0,S}t}\hat{H}_{0,S}e^{-i\hat{H}_{0,S}t} = \hat{H}_{0,S} \equiv \hat{H}_0,$$

так  $\hat{H}_{0,S}$  полностью совпадает с  $\hat{H}_{0,I}$  и может не зависеть от времени, есть  $\hat{H}_{0,S}$  изначально не зависит от времени, что действительно так для всех известных гамильтонианов.

Тогда при получении уравнения эволюции произвольного оператора в представлении взаимодействия индекс S будем опускать:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{O}_I(t) = -\hat{H}_0e^{+i\hat{H}_0t}\hat{O}_Se^{-i\hat{H}_0t} + e^{+i\hat{H}_0t}\hat{O}_S\hat{H}_0e^{-i\hat{H}_0t} = -\hat{H}_0\hat{O}_I(t) + \hat{O}_I(t)\hat{H}_0 = [\hat{H}_0, \hat{O}_I(t)].$$

Так, все операторы в представлении взаимодействия зависят от времени, эволюция от времени определяется только свободным гамильтонианом  $\hat{H}_0$ . **Значит все операторы подчиняются свободному уравнению.** Это ключ к построению теории со взаимодействиями, поскольку все квантовые поля в квантовой теории поля являются квантовыми операторами, то есть подчиняются свободному уравнению. Это значит, что если рассмотреть, например, фермионное поле в представлении взаимодействия, то получим уравнение Дирака

$$(i\hat{\partial} - m)\psi_I(t) = 0,$$

решение которого выражается через суперпозицию решений с положительной и отрицательной энергией. Если рассматривать векторное безмассовое поле в представлении взаимодействия, то, согласно полученному уравнению, электромагнитное поле подчиняется свободному уравнению:

$$\partial^2 A_\mu = 0.$$

Для оператора скалярного поля, обладающего массой в представлении взаимодействия можно записать уравнение Клейна-Фока-Гордона:

$$(\partial^2 + m^2)\phi_I(x) = 0.$$

Так, в представлении взаимодействия эволюция всех квантовых операторов дается свободными уравнениями. Вся сложность задачи переместилась на решение для квантового состояния. Однако вторым ключом является разбиение задачи на три фазы: приготовление простых свободных состояний, взаимодействие, и получение конечных состояний, которые также являются свободными. При взаимодействии происходит рождение очень сложного квантового состояния, однако на самом деле необходимо только уметь связать начальное состояние с конечным. Результат взаимодействий будем искать в виде поправок к начальным состояниям. Такой подход позволяет получать результаты, сравнимые с экспериментом.

### Решение уравнения Шредингера в представлении взаимодействия

Решим теперь уравнение Шредингера в представлении взаимодействия. Это решение будет очень полезным для определения S-матрицы. Уравнение имеет вид:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle = \hat{V}_I(t)|\psi_I(t)\rangle.$$

Перепишем дифференциальное уравнение в интегральном виде:

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(0)\rangle - i \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) |\psi_I(t_1)\rangle.$$

Это уравнение может быть решено методом итераций:

$$|\psi_I^{(n)}(t)\rangle = |\psi_I(0)\rangle - i \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) |\psi_I^{(n-1)}(t_1)\rangle,$$

где  $n$  – номер шага. Начнем с  $n = 1$ , тогда:

$$|\psi_I^{(1)}(t)\rangle = |\psi_I(0)\rangle - i \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) |\psi_I^{(0)}(t_1)\rangle,$$

где  $|\psi_I^{(0)}(t)\rangle = |\psi_I(0)\rangle$ . Тогда можем переписать это уравнение в виде:

$$|\psi_I^{(1)}(t)\rangle = |\psi_I(0)\rangle - i \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) |\psi_I(0)\rangle.$$

Так, пусть есть начальное состояние в нулевой момент времени. Для того, чтобы узнать решение для квантового состояния на первом итерационном шаге необходимо взять начальное состояние и вычесть из него интеграл по взаимодействию, который описывается при помощи свободного уравнения и действует на начальное состояние. Это решение можно уточнить, рассмотрев приближение на следующем шаге:

$$\begin{aligned} |\psi_I^{(2)}(t)\rangle &= |\psi_I(0)\rangle - i \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) |\psi_I^{(1)}(0)\rangle = \\ &= |\psi_I(0)\rangle - i \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) \left[ |\psi_I(0)\rangle - i \int_0^{t_1} dt_2 \hat{V}_I(t_2) |\psi_I(0)\rangle \right] = \\ &= \left[ 1 + (-i) \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) + (-i)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) \right] |\psi_I(0)\rangle. \end{aligned}$$

Так, приближения на втором шаге является суммой приближения на первом шаге и некоторого дополнительного слагаемого, связанного с двумя интегралами. Далее легко найти закономерность. На третьем шаге получим:

$$\begin{aligned} |\psi_I^{(3)}(t)\rangle &= \left[ 1 + (-i) \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) + (-i)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) + \right. \\ &\quad \left. + (-i)^3 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) \hat{V}_I(t_3) \right] |\psi_I(0)\rangle. \end{aligned}$$

Далее можно выписать решение на самом произвольном шаге. Однако сначала заметим, что формула может быть записана еще компактнее. Для этого вернемся ко второму шагу и рассмотрим второй интеграл. Изобразим график зависимости  $t_2$  от  $t_1$  (рис. 24.3), проведем прямую, соответствующую  $t_1 = t_2$ .  $t_1$  меняется от нуля до  $t$ ,  $t_2$  меняется от нуля до  $t_1$ , а значит также до  $t$ . Заметим, что  $t_2$  при фиксированном  $t_1$  меняется от нуля до  $t_1$ , интегрирование идет вдоль вертикальной линии. Если  $t_1$  меняется от 0 до  $t$ , то будет формироваться нижний треугольник. Интегрирование по этому треугольнику можно производить и в другом порядке. Можно зафиксировать  $t_2$  и

интегрировать вдоль горизонтальных полос (от  $t_1$  до  $t$ ), а затем проварьировать  $t_2$  от нуля до  $t$ . Поэтому можно записать:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 F(t_1, t_2) = \int_0^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 F(t_1, t_2).$$

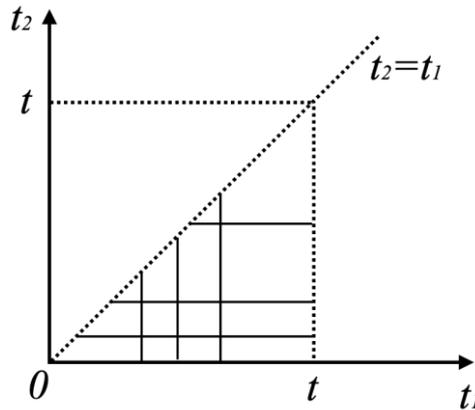


Рис. 24.3. График зависимости  $t_2$  от  $t_1$  для определения пределов интегрирования.

Сделаем замену обозначений  $t_1 \leftrightarrow t_2$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 F(t_1, t_2) &= \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 F(t_2, t_1) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 F(t_1, t_2) + \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 F(t_2, t_1) \right). \end{aligned}$$

Используем операцию хронологического упорядочения

$$T(\phi(t_1)\phi(t_2)) \equiv \begin{cases} \phi(t_1)\phi(t_2), & t_1 > t_2 \\ \phi(t_2)\phi(t_1), & t_1 < t_2 \end{cases}$$

для операторов  $\hat{V}_I(t_1)$  и  $\hat{V}_I(t_2)$ :

$$T(\hat{V}_I(t_1)\hat{V}_I(t_2)) \equiv \begin{cases} \hat{V}_I(t_1)\hat{V}_I(t_2), & t_1 > t_2 \\ \hat{V}_I(t_2)\hat{V}_I(t_1), & t_1 < t_2. \end{cases}$$

Тогда:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 F(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 T(\hat{V}_I(t_1)\hat{V}_I(t_2)).$$

При помощи упорядочивания по времени можно для слагаемых со вложенными интегралам привести интегралы к интегралам с одинаковыми пределами. Хронологическое упорядочение может быть упрощено с применением теорем Вика, которые будут рассмотрены позднее.

## Результат решения уравнения Шредингера

Такой же прием можно реализовать и для интегралов третьего, четвертого и n-го порядка. В результате можно получить решение в виде бесконечного ряда:

$$|\psi_I(t)\rangle = \left[ 1 + (-i) \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 T(\hat{V}_I(t_1)\hat{V}_I(t_2)) + \frac{(-i)^3}{3!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 T(\hat{V}_I(t_1)\hat{V}_I(t_2)\hat{V}_I(t_3)) + \dots \right] |\psi_I(0)\rangle.$$

Полученное выражение напоминает разложение экспоненты:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Поэтому можем вынести операцию хронологического упорядочения и получить:

$$\begin{aligned} [ ] &= T \left[ 1 + \frac{(-i)}{1!} \int_0^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \hat{V}_I(t_1)\hat{V}_I(t_2) + \dots \right] \\ &= T \exp \left( -i \int_0^t d\tau \hat{V}_I(\tau) \right), \end{aligned}$$

Тогда:

$$|\psi_I(t)\rangle = T \left( e^{-i \int_0^t d\tau \hat{V}_I(\tau)} \right) |\psi_I(0)\rangle,$$

где  $T \left( e^{-i \int_0^t d\tau \hat{V}_I(\tau)} \right) = U(t)$  является **оператором эволюции**. Удобно будет обобщить:

$$\begin{aligned} |\psi_I(t)\rangle &= U(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle, \\ U(t, t_0) &= T \exp \left( -i \int_{t_0}^t d\tau \hat{V}_I(\tau) \right). \end{aligned}$$

## Выражение для S-матрицы

То, что называется S-матрицей, является предельным случаем оператора эволюции при  $t_0 \rightarrow -\infty$ , где существуют максимально простые начальные состояния, а  $t \rightarrow \infty$ , где конечные состояния максимально просты:

$$S = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty}} U(t, t_0) = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \hat{V}_I(\tau) \right).$$

Такое рассмотрение является максимально общим, не связанным с конкретной теорией и видом потенциала взаимодействия, то есть годится для любого вида взаимодействия.

Однако такое взаимодействие должно быть достаточно слабым, чтобы в практических вычислениях можно было бы ограничиться не слишком высоким порядком.

Следующим шагом свяжем энергию взаимодействия с Лагранжианом взаимодействия. В классической механике функцию Лагранжа можно записать как разность функции, относящейся к свободному распространению, и потенциальной энергии:

$$L = L_0 - V.$$

При переходе к Лагранжианам можно ввести плотность потенциала взаимодействия:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{V},$$
$$V = \int d^3x \mathcal{V}.$$

Тогда:

$$S = T \exp \left( +i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{int}(\tau, \vec{x}) \right),$$

где  $\mathcal{L}_{int}(\tau, \vec{x})$  – Лагранжиан взаимодействия.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{int}(\tau, \vec{x}) = \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x) \rightarrow$$

$$S = T \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x) \right).$$

Из этого выражения для S-матрицы будем получать правила Фейнмана.

## Лекция 25. Связь квантового состояния в начальный момент времени.

### Теоремы Вика

#### Связь квантового состояния в начальный и конечный момент времени

На прошлой лекции было получено выражение для  $S$ -матрицы, являющейся оператором эволюции, переводящий начальное состояние в момент  $-\infty$  к конечному состоянию в момент  $+\infty$ . Конечно, эти времена являются формальными – достаточно просто уйти несколько дальше по времени в прошлое и будущее, чтобы считать начальное и конечное состояние свободными. Так, квантовое состояние в конечный момент времени можно связать с состоянием в начальный момент времени с помощью оператора  $S$ :

$$|\psi(+\infty)\rangle = S|\psi(-\infty)\rangle.$$

Лагранжиан взаимодействия в свою очередь зависит от теории, которую рассматриваем. Например, для квантовой электродинамики полный Лагранжиан может быть записан в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + e\bar{\psi}\hat{A}\psi,$$

где  $e\bar{\psi}\hat{A}\psi = \mathcal{L}_{int}$  – интеграл взаимодействия, может быть переписан в другом виде

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\hat{A}\psi = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = ej^\mu A_\mu,$$

где  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  – фермионный ток. Выражение для Лагранжиана взаимодействия лоренц-инвариантно, поскольку представляет собой произведение двух 4-векторов.

Кроме того, стоит вспомнить, что для квантовых операторов необходимо нормальное упорядочение (все операторы рождения стоят левее операторов уничтожения). Например

$$N(aa^+) =: (aa^+) := a^+a,$$

если операторы рождения и уничтожения относятся к фермионам, то необходимо учитывать, что фермионы при перестановке операторов должны изменять знак:

$$N(a_{ps}a_{kr}^+) = -a_{kr}^+a_{ps}.$$

Постулирование нормального упорядочения – вынужденный шаг, необходимый чтобы избавиться от бесконечностей для вакуумного состояния. При рассмотрении скалярного поля без нормального упорядочения вакуумное состояние приобретало бесконечно большую положительную добавку, для фермионного поля – бесконечно большую отрицательную добавку. При введении нормального упорядочения бесконечные добавки не возникают. Однако этим постулатом необходимо пользоваться для всех вычислений.

## Вероятность перехода

Ситуация сильно упрощается, если начальное и конечное состояния, которые рассматриваем, будут простыми состояниями – одночастичными, с определенными импульсами. Тогда конечное состояние следующее:

$$|\psi(+\infty)\rangle = S|\psi(-\infty)\rangle.$$

Можно предположить, что конечное состояние  $|\psi(-\infty)\rangle$  является базисным состоянием:

$$|\psi(-\infty)\rangle = |\phi_n\rangle,$$

То есть, например, один электрон с конкретным импульсом. Можно воспользоваться базисными состояниями для записи операторной единицы:

$$\hat{I} = \sum_m |\phi_n\rangle\langle\phi_n|.$$

Тогда:

$$|\psi(-\infty)\rangle = \sum_m |\phi_n\rangle\langle\phi_n|S|\phi_n\rangle = \sum_m |\phi_n\rangle S_{mn},$$

где  $S_{mn} = \langle\phi_n|S|\phi_n\rangle$  – *матричный элемент S-матрицы*. Ситуация упростится еще сильнее, если известно, например, из эксперимента, что конечное состояние фиксируется также в виде базисного состояния. В таком случае вся физика перехода из начального в конечное состояние будет заключена в матричном элементе  $S_{mn}$ .

Рассмотрим, как этот матричный элемент может быть связан с наблюдаемыми величинами – сечением и шириной. Прежде всего задумаемся, является ли матричный элемент безразмерной величиной и можно ли его использовать в качестве амплитуды по аналогии с нерелятивистской квантовой механикой. Сама по себе S-матрица является безразмерной, поскольку является экспонентой. Однако проблема в том, что состояния,  $\phi_n$  в  $\langle\phi_n|S|\phi_n\rangle$  обладают ненулевой размерностью. Если рассмотреть одночастичное состояние с определенным импульсом, то получим следующее:

$$[|\vec{p}\rangle] = ?$$

$$\begin{aligned} \langle\vec{q}|\vec{p}\rangle &= \langle 0|a_q\sqrt{2E_q}\sqrt{2E_p}a_p^+|0\rangle = \sqrt{2E_p2E_q}[a_q, a_p^+] = \\ &= \sqrt{2E_p2E_q}(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})\langle 0|0\rangle = \sqrt{2E_p2E_q}(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \\ \langle 0|0\rangle &= 1. \end{aligned}$$

$\sqrt{2E_p2E_q}$  и  $\delta^3(\vec{p} - \vec{q})$  – размерные величины, воспользуемся определением:

$$\begin{aligned} \int d^3p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) &= 1 \rightarrow \\ [\delta^3(\vec{p} - \vec{q})] &= m^{-3}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$[\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle] = mm^{-3} = m^{-2} \rightarrow [|\vec{p}\rangle] = m^{-1}.$$

Так, матричный элемент является размерной величиной, при этом размерность зависит от того, каким являются начальное и конечное состояния – одночастичным, двухчастичным или многочастичным. Матричный элемент необходимо обезразмерить нормой начальных и конечных состояний. Введем **безразмерную амплитуду вероятности перехода** следующим образом:

$$\mathcal{A}_{mn} = \frac{S_{mn}}{\sqrt{\langle m|m\rangle\langle n|n\rangle}}$$

Матричный элемент может быть записан в виде:

$$S_{mn} = (2\pi)^4 \delta^4(p_m - p_n) i\mathcal{M}_{mn},$$

где  $p_m, p_n$  – сумма всех импульсов в начальном конечном состояниях,  $\mathcal{M}_{mn}$  – сингулярный матричный элемент, содержащий в себе всю динамику взаимодействия. Рассмотрим норму начального и конечного состояний в случае плоской волны. Пусть есть одночастичное состояние с определенным импульсом:

$$\langle \vec{p} | \vec{p} \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(0),$$

$\delta^3(0)$  является бесконечной величиной. Если состояние не одночастичное, то таких бесконечностей будет больше. Возникающие  $\delta^3(0)$  не являются дефектом квантовой теории поля, а представляют собой дефект способа преподавания – стремления как можно скорее получить конечную формулу. Существует подход, основанный на том, что вместо состояний со строго определенными импульсами рассматриваются состояния в виде волновых пакетов. Такой подход длинный и трудоемкий, поэтому в лекциях изложен не будет. Вывод рекомендуется изучить по литературе.

Сейчас будет разобран стандартный, менее удовлетворительный подход получения вероятностей. Для того, чтобы придать физический смысл объекту  $\langle \vec{p} | \vec{p} \rangle$ , вообще говоря, являющемуся бесконечным, вспомним определение  $\delta$ -функции:

$$(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}) = \int d^3x e^{+i\vec{p}\vec{x}}.$$

Пусть  $\vec{p} = 0$ , тогда

$$(2\pi)^3 \delta^3(0) = \int d^3x = \lim_{V \rightarrow \infty} V,$$

где  $V$  – объем. Будем надеяться, что при получении наблюдаемых величин объемы сократятся. Тогда получим:

$$\langle \vec{p} | \vec{p} \rangle = 2E_p V.$$

Если состояние, например, двухчастичное, тогда получим:

$$\langle \vec{p}, \vec{k} | \vec{p}, \vec{k} \rangle = 2E_p V \cdot 2E_k V.$$

Для  $n$ -частичного состояния конструкция будет повторяться  $n$  раз. Вычислим теперь вероятность:

$$|\mathcal{A}_{mn}|^2 = \frac{|S_{mn}|^2 |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{\prod_i (2E_i V) \prod_f (2E_f V)},$$

где  $|S_{mn}|^2$  имеет вид

$$|S_{mn}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_m - p_n) (2\pi)^4 \delta^4(0),$$

$$(2\pi)^4 \delta^4(p) = \int d^4x e^{+ipx} \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(0) = \int d^4x = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} T \cdot V.$$

Тогда можем переписать вероятность в виде:

$$|\mathcal{A}_{mn}|^2 = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_m - p_n) T \cdot V |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{\prod_i (2E_i V) \prod_f (2E_f V)}.$$

### Экспериментальная точка зрения измерения конечных состояний

Следующий шаг заключается в том, что при рассмотрении задачи с экспериментальной точки зрения на измерение конечных состояний, невозможно измерить импульс с нулевой неопределенностью. Импульсы всегда будут измерены внутри некоторого интервала. Тогда по принципу неопределенности Гейзенберга возникает их неопределенность по трехмерной координате. Это приводит к тому, что для связи вероятности с экспериментальной наблюдаемой есть смысл умножить вероятность на количество состояний, описываемых конечными частицами:

$$|\mathcal{A}_{mn}|^2 \prod_f \frac{d^3p_f d^3x_f}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Этот переход позволяет перейти от состояний со строго определенными импульсами к состояниям с импульсами внутри некоторых интервалов.

Экспериментально детекторы обычно не способны слишком хорошо (на уровне атомного ядра) измерять координаты частиц. Для перехода от абстракций к конкретике рассмотрим простую формулу, которая связывает между собой пространственные размеры и импульсные размеры:

$$\hbar c = 198 \text{ МэВ} \cdot \text{фм} \rightarrow 1 \approx 200 \text{ МэВ} \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Представим, что в эксперименте при высоких энергиях среди конечных состояний есть частица, например, мюон, импульс которого по модулю  $|p| = 1 \text{ ГэВ}$ . Детектор способен измерить этот импульс с определенной точностью. Точность может достигать единиц процентов, но не может быть порядка единиц эВ для таких энергий. Неопределенность в импульсе зададим как

$$\sigma_p = 10^{-2} p = 10^{-2} \text{ ГэВ} = 10^2 \text{ МэВ}.$$

Квантовая точность неопределенности координаты такого мюона по принципу неопределенности Гейзенберга:

$$\sigma_p \sigma_x \geq \frac{1}{2} \rightarrow \sigma_x \geq \frac{1}{2\sigma_p} = \frac{1}{200 \text{ МэВ}} = 10^{-13} \text{ см.}$$

Так, если представлять мюон в виде волнового пакета, то ширина этого волнового пакета с квантовой точки зрения не может быть известна точнее, чем  $10^{-13}$  см, что эквивалентно радиусу протона. На сегодняшний день в физике высоких энергий не существует прибора, способного измерять координату с точностью, равной радиусу протона. Самый точный прибор, способный измерять координаты – ядерные фотоэмульсии, они обладают точностью порядка мкм, что значительно больше квантовой неопределенности, задаваемой измерением импульса. Поэтому при интегрировании интервала по координате может быть проведено интегрирование от  $+\infty$  до  $-\infty$ . Тогда

$$|\mathcal{A}_{mn}|^2 \prod_f \frac{d^3 p_f d^3 x_f}{(2\pi\hbar)^3} \rightarrow |\mathcal{A}_{mn}|^2 \prod_f \frac{d^3 p_f V}{(2\pi)^3}$$

Полученная величина – макроскопическая вероятность перехода в строго определенное состояние, умноженная на количество квантовых состояний, диктуемых принципом неопределенности Гейзенберга. Кроме того, учтено, что квантовая неопределенность координаты значительно меньше реального разрешения детекторов. Итак, с учетом формул выше получаем:

$$|\mathcal{A}_{mn}|^2 \prod_f \frac{d^3 p_f V}{(2\pi)^3} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_m - p_n) T \cdot V |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{\prod_i (2E_i V)} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} = W_{mn}.$$

Бесконечные объемы, относящиеся к конечному состоянию, сократились.

Следующий шаг заключается в том, что будем говорить не о вероятности перехода, а о скорости процесса  $dR$  – количестве таких переходов в единицу времени:

$$dR = \frac{dW_{mn}}{dT} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_m - p_n) V |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{\prod_i (2E_i V)} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}.$$

Чтобы связать теоретические выкладки с экспериментальным наблюдением, определим теоретическим образом сечение и ширину. Покажем, что в этих наблюдаемых величинах бесконечные объемы сократятся.

При обсуждении сечения всегда подразумевается, что начальных частиц ровно две, при этом конечных частиц может быть сколь угодно много. Вместо того, чтобы говорить о скорости таких событий, будем говорить о сечении, поскольку скорость зависит от вероятности взаимодействия (зависит от динамики взаимодействия), количества падающих частиц и количества мишеней. Так, чем больше падающих частиц и мишеней, тем больше скорость. Для сравнения разных экспериментов полезно избавиться от потока и количества мишеней. Для этого вводят сечение. Пусть сталкиваются 2 частицы, одна из которых покоится, тогда:

$$d\sigma = \frac{dR}{v_a n_b}$$

где  $v_a$  – скорость частицы  $a$ ,  $n_b = 1$  – число мишеней. В таком случае

$$d\sigma = \frac{dR}{V n_b} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_m - p_n) V |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2E_a V 2E_b V \frac{v_a}{V}} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \rightarrow$$

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |i\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(P_a \cdot P_b) - m_a^2 m_b^2}} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f},$$

где  $\sqrt{(P_a \cdot P_b) - m_a^2 m_b^2} = E_a E_b v_a$ . Рассмотрим случай с покоящейся мишенью

$$P_a = (E_a, \vec{P}_a), \quad P_b = (m_b, 0) \quad \rightarrow \quad (P_a \cdot P_b) = E_a m_b,$$

$$(P_a \cdot P_b)^2 = E_a^2 m_b^2 \quad \rightarrow \quad (P_a \cdot P_b)^2 - m_a^2 m_b^2 = (E_a^2 - m_a^2) m_b^2 = \vec{P}_a^2 m_b^2.$$

Воспользуемся тем, что релятивистское соотношение, связывающее скорость частицы с ее энергией и импульсом следующее:

$$v_a = \frac{\vec{P}_a}{E_a} \quad \rightarrow \quad \sqrt{(P_a \cdot P_b) - m_a^2 m_b^2} = E_a E_b v_a.$$

Полученная формула для сечения является правильной и будет использоваться при вычислении наблюдаемых сечений. В этой формуле есть все для вычисления наблюдаемого сечения и его связи с тем, что видят экспериментаторы:

- множитель  $(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)$  гарантирует сохранение энергии-импульса во всем процесс;
- $\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}$  – фазовый множитель, появляется из учета числа конечных квантовых состояний для конечных частиц;
- $4\sqrt{(P_a \cdot P_b) - m_a^2 m_b^2}$  – потоковый фактор, связан с относительными потоками частиц  $a$  и  $b$ ;
- вся динамика взаимодействия, связанная с Лагранжианом взаимодействия, определяется квадратом матричного элемента  $|i\mathcal{M}_{fi}|^2$ .

Поэтому основная задача будет заключаться в том, чтобы научиться как можно быстрее и проще вычислять  $|i\mathcal{M}_{fi}|^2$ . Далее станет возможно получать правила Фейнмана для произвольного Лагранжиана, рисовать диаграммы Фейнмана и проводить простые вычисления. Затем останется взять соответствующий интеграл от дифференциальной формы сечения. Проинтегрированная величина будет иметь непосредственное отношение к эксперименту.

Обратим внимание также на то, что в случае одной распадающейся частицы для ширины распада можно записать:

$$dR = d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |i\mathcal{M}_{fi}|^2}{2E_i} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}.$$

## Теоремы Вика

### Скалярное поле

В формулах для вычисления сечения взаимодействия и ширины распада присутствует матричный элемент  $i\mathcal{M}_{fi}$ , связанный с матричным элементом S-матрицы:

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle f|Te^{i\int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)}|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) i\mathcal{M}_{fi}.$$

Для того, чтобы сделать вычисление матричного элемента  $i\mathcal{M}_{fi}$  максимально простым, существует теоремы Вика. Теоремы Вика позволяют связать  $T$ -упорядоченные произведения и нормально упорядоченные произведения.

Начнем с простейшего случая, рассмотрим свободное скалярное поле, которое запишем в виде:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{+ipx}] \equiv \phi_+(x) + \phi_-(x).$$

Рассмотрим произведение квантовых операторов, предположим  $x_0 > y_0$ , тогда

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(y) &= (\phi_+(x) + \phi_-(x))(\phi_+(y) + \phi_-(y)) \\ &= \phi_+(x)\phi_+(y) + \phi_-(x)\phi_+(y) + \phi_-(x)\phi_-(y) + \phi_+(x)\phi_-(y). \end{aligned}$$

С точки зрения нормального упорядочения первое, второе и третье слагаемые являются нормально упорядоченным, последняя комбинация не является нормально упорядоченной. Поменяем местами множители в последнем слагаемом:

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(y) &= \phi_+(x)\phi_+(y) + \phi_-(x)\phi_+(y) + \phi_-(x)\phi_-(y) + \phi_-(y)\phi_+(x) + \\ &+ [\phi_+(x), \phi_-(y)] = : \phi(x)\phi(y) : + [\phi_+(x), \phi_-(y)]. \end{aligned}$$

Распишем коммутатор:

$$\begin{aligned} [\phi_+(x), \phi_-(y)] &= \int \frac{d^3p d^3k}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_k}} [a_p e^{-ipx}, a_k^\dagger e^{iky}] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_p} = D(x-y). \end{aligned}$$

Тогда для произведения квантовых операторов можно записать

$$\phi(x)\phi(y) = : \phi(x)\phi(y) : + D(x-y).$$

Если  $x_0 < y_0$ , рассмотрим конструкцию  $\phi(y)\phi(x)$ :

$$\phi(y)\phi(x) = : \phi(y)\phi(x) : + D(y-x).$$

Объединим формулы для  $\phi(x)\phi(y)$  и  $\phi(y)\phi(x)$ :

$$\begin{aligned} T(\phi(x)\phi(y)) &= : \phi(x)\phi(y) : + \theta(x_0 - y_0)D(x-y) + \theta(y_0 - x_0)D(y-x) = \\ &= : \phi(x)\phi(y) : + D_F(x-y). \end{aligned}$$

Таким образом, T-произведение от пары полей сводится к нормальному упорядочению этих полей (Фейнмановский пропагатор является числом и может быть вынесен в нормальное упорядочение):

$$T(\phi(x)\phi(y)) =: \phi(x)\phi(y): + D_F(x - y).$$

Этот простой и фундаментально важный результат – частный случай теоремы Вика. Фейнмановский пропагатор также может быть обозначен иначе, в виде свертки:

$$D_F(x - y) \equiv \overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv \text{свертка.}$$

Такое определение более простое для формулирования теоремы Вика в более общем случае.

Представим, что есть сколько угодно полей, тогда **теорема Вика утверждает следующее:**

$$T(\phi(x_1)\phi(x_2) \dots \phi(x_n)) =: \phi(x_1)\phi(x_2) \dots \phi(x_n): + \text{свертки:}$$

Для того, чтобы расписать этот алгоритм, необходимо рассмотреть конкретный пример.

### Пример применения теоремы Вика

Рассмотрим пример, а именно пусть будет 4 поля. В этом примере для краткости введем переобозначение:

$$\phi(x_i) = \phi_i.$$

$$\begin{aligned} T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) = & : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4: + \overbrace{:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:} + \overbrace{:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:} + \overbrace{:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:} + \\ & + \overbrace{:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:} + \overbrace{:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:} + \overbrace{:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:} + \\ & + \overbrace{:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:} + \overbrace{:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:} + \overbrace{:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:} \end{aligned}$$

Общая теорема позволяет перевыразить произведение полей через нормальные произведения и нормальные свертки. Все свертки в свою очередь являются пропагаторами.

Вычислим в этом примере вакуумное среднее от левой части и правой частей:

$$\langle 0|T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4)|0\rangle = D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3)D(x_2 - x_4) + \\ + D(x_1 - x_4)D(x_2 - x_3)$$

Остались 3 последних слагаемые из правой части, остальные дают нулевые вакуумные средние. Доказательство этой теоремы достаточно простое, предлагается сделать его самостоятельно методом индукции. Для случая двух полей теорема была доказана в ходе лекции.

### Фермионное поле

Для фермионного поля существует аналогичная теорема:

$$T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = N(\psi(x)\bar{\psi}(y)) + \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)}.$$

От случая скалярного поля фермионное поле будет отличаться антикоммутиация операторов полей. Поэтому будет отличаться свертка:

$$\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = \begin{cases} \{\psi_+(x), \bar{\psi}_-(y)\}, & x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}_+(y), \psi_-(x)\}, & y^0 > x^0. \end{cases}$$

## Лекция 26. Притяжение и отталкивание

Прежде чем начать вычисления покажем, что теория S-матрицы описывает понятные вещи. В качестве первого примера рассмотрим задачу о притяжении и отталкивании в рамках квантовой теории поля.

### Нерелятивистская квантовая механика, Борновское приближение

Сначала следует вернуться нерелятивистскую квантовую механику, чтобы вспомнить, как решается задача о притяжении и отталкивании в этой теории. Квантовое состояние в представлении взаимодействия может быть записано в виде:

$$|\psi_I(t)\rangle = S|\psi_I(t_0)\rangle \rightarrow$$

$$|\psi_I(\infty)\rangle = S|\psi_I(-\infty)\rangle = T e^{-i \int d\tau \hat{V}_I(\tau)} |\psi_I(-\infty)\rangle.$$

При разложении экспоненты в бесконечный ряд, то нулевым членом разложения будет единица, а следующий исчезающий член будет содержать потенциал взаимодействия. Этого второго слагаемого будет достаточно, чтобы описать всю физику этого процесса в первом приближении. Такое приближение называется **борновским приближением**:

$$|\psi_I(\infty)\rangle = \left( 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \hat{V}_I(\tau) \right) |\psi_I(-\infty)\rangle.$$

Теперь предположим, что начальное состояние – заряженная частица с определенным импульсом:

$$|\psi_I(-\infty)\rangle = |\vec{p}\rangle.$$

Конечное состояние может быть целым волновым пакетом:

$$|\psi_I(\infty)\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) |\vec{k}\rangle.$$

Тогда

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) |\vec{k}\rangle = \left( 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \hat{V}_I(\tau) \right) |\vec{p}\rangle.$$

Это уравнение позволяет определить волновую функцию конечного состояния. Для этого домножим левую и правую часть на вектор  $\langle \vec{p}' |$ . При этом справедлива нормировка:

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \rightarrow$$

$$\psi(\vec{p}') = \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \vec{p}' | \hat{V}_I(\tau) | \vec{p} \rangle.$$

Поскольку  $\hat{V}_I(\tau)$  – оператор в представлении взаимодействия, то выражение можно упростить, вспомнив его определение:

$$\langle \vec{p}' | \hat{V}_I(\tau) | \vec{p} \rangle = \langle \vec{p}' | e^{+i\hat{H}_0\tau} \hat{V}_S e^{-i\hat{H}_0\tau} | \vec{p} \rangle,$$

где  $\hat{V}_S$  – оператор в представлении Шредингера. Состояния с определенными импульсами здесь являются свободными состояниями с определенными импульсами. Результатом действия на состояние с определенным импульсом экспоненты со свободным гамильтонианом станет появление энергии, зависящей от импульса вместо свободного гамильтониана:

$$e^{-i\hat{H}_0\tau} | \vec{p} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hat{H}_0\tau)^n}{n!} | \vec{p} \rangle,$$

$$\hat{H}_0 | \vec{p} \rangle = E_p | \vec{p} \rangle \rightarrow$$

$$e^{-i\hat{H}_0\tau} | \vec{p} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iE_p\tau)^n}{n!} | \vec{p} \rangle = e^{-iE_p\tau} | \vec{p} \rangle.$$

Тогда:

$$\langle \vec{p}' | \hat{V}_I(\tau) | \vec{p} \rangle = \langle \vec{p}' | \hat{V}_S | \vec{p} \rangle e^{-i(E_{p'} - E_p)\tau},$$

после чего можно снять интеграл по  $\tau$ :

$$\psi(\vec{p}') = \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle - i2\pi\delta(E_{p'} - E_p) \langle \vec{p}' | \hat{V}_S | \vec{p} \rangle.$$

Присутствие  $\delta(E_{p'} - E_p)$  указывает на то, что в нерелятивистской квантовой механике в задачах о рассеяниях энергия сохраняется при рассеянии в потенциале. Это может удивить. Если рассмотрим электрон, рассеивающийся на притягивающем потенциале, то увидим, что его энергия не увеличивается под действием потенциала. Легко сообразить, что так и должно быть, если рассматриваем переход между временами  $-\infty$  и  $\infty$ . Сначала энергия будет расти при приближении к потенциалу, затем при удалении от центра притягивающего потенциала энергия будет уменьшаться.

Итак, для того, чтобы узнать волновую функцию, необходимо вычислить выражение, где вся динамика взаимодействия закодирована в матричном элементе  $\langle \vec{p}' | \hat{V}_S | \vec{p} \rangle$ . Обычно потенциал в квантовой механике определен в координатном представлении. Для того, чтобы вычислить его в обкладках между импульсными состояниями, необходимо воспользоваться переходом в координатное представление:

$$\langle \vec{p}' | \hat{V}_S | \vec{p} \rangle = \int d^3x d^3y \langle \vec{p}' | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \hat{V}_S | \vec{y} \rangle \langle \vec{y} | \vec{p} \rangle,$$

поскольку единица в координатном представлении:

$$\int d^3x | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | = I.$$

Далее запишем

$$\langle \vec{p}' | \hat{V}_S | \vec{p} \rangle = \int d^3x d^3y e^{-i\vec{p}'\vec{x}} e^{+i\vec{p}\vec{y}} \langle \vec{x} | \hat{V}_S | \vec{y} \rangle.$$

Воспользуемся следующим:

$$\hat{V}_S|\vec{y}\rangle = \hat{V}_S(\vec{y}) \text{ и } \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \rightarrow$$

$$\langle \vec{p}'|\hat{V}_S|\vec{p}\rangle = \int d^3x e^{-i(\vec{p}'-\vec{p})\vec{x}} \hat{V}_S(\vec{x}) = \tilde{V}(\vec{q}).$$

$\tilde{V}(\vec{q})$  – Фурье-образ потенциальной энергии в импульсном представлении. Таким образом, волновая функция может быть записана в виде:

$$\psi(\vec{p}') = \langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle - i2\pi\delta(E_{p'} - E_p)\tilde{V}(\vec{q}).$$

Запишем формулу для волновой функции, используя элемент S-матрицы:

$$|\psi_I(\infty)\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k})|\vec{k}\rangle = S|\vec{p}\rangle \rightarrow$$

$$\psi(\vec{p}') = \langle \vec{p}'|S|\vec{p}\rangle.$$

Эта формула позволит получить информацию о притяжении и отталкивании в квантовой теории поля. Для определенности будем считать, что  $\vec{p}' \neq \vec{p}$ . Тогда

$$\langle \vec{p}'|S|\vec{p}\rangle = -i2\pi\delta(E_{p'} - E_p)\tilde{V}(\vec{q}).$$

### Рассеяние электрона на классическом потенциале в квантовой теории поля

В качестве первого примера в рамках квантовой теории поля рассмотрим рассеяние электрона на классическом потенциале. Лагранжиан взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{L}_{int} = e:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi:A_\mu,$$

где потенциал отвечает кулоновскому потенциалу:

$$A_\mu(x) = \left( \frac{Ze}{4\pi|\vec{x}|}, \vec{0} \right).$$

Вычислим матричный элемент:

$$\langle \vec{p}', s' | T e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)} | \vec{p}, s \rangle = \langle \vec{p}', s' | \vec{p}, s \rangle + \langle \vec{p}', s' | ie \int d^4x : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) | \vec{p}, s \rangle =$$

$$= \langle \vec{p}', s' | \vec{p}, s \rangle + ie \langle \vec{p}', s' | \int d^4x : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) | \vec{p}, s \rangle.$$

Все записанные квантовые поля записаны в представлении взаимодействия, то есть все квантовые поля подчиняются свободному уравнению движения, решения которых известны. Тогда можем записать:

$$:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x): = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_k 2E_{k'}}} : (a_{k'r'}^+ \bar{u}_{k'r'} e^{+ik'x} + b_{k'r'} \bar{v}_{k'r'} e^{-ik'x}) \gamma^\mu \times$$

$$\times (a_{kr} u_{kr} e^{-ikx} + b_{kr}^+ v_{kr} e^{+ikx}) : \rightarrow$$

$$:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x): = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_k 2E_{k'}}} : (a_{k'r'}^+ a_{kr} \bar{u}_{k'r'} \gamma^\mu u_{kr} e^{+i(k'-k)x} +$$

$$+ a_{k'r'}^+ b_{kr}^+ \bar{u}_{k'r'} \gamma^\mu v_{kr} e^{+i(k'+k)x} + b_{k'r'} a_{kr} \bar{v}_{k'r'} \gamma^\mu u_{kr} e^{-i(k'+k)x} -$$

$$- b_{kr}^+ b_{k'r'} \bar{v}_{k'r'} \gamma^\mu v_{kr} e^{-i(k'-k)x}) :$$

Каждое из полученных слагаемых теперь необходимо вычислить в обкладках  $\langle \vec{p}', s' | \dots | \vec{p}, s \rangle$

$$|\vec{p}, s\rangle = \sqrt{2E_p} a_{ps}^+ |0\rangle,$$

$$\langle \vec{p}', s' | = \langle 0 | \sqrt{2E_{p'}} a_{p's'}.$$

Рассмотрим третье слагаемое, обратим внимание на структуру, связанную с рождением и уничтожением:

$$\langle 0 | a_{p's'} b_{k'r'} a_{kr} a_{ps}^+ | 0 \rangle.$$

Не трудно понять, что это выражение зануляется, поскольку операторы  $b_{k'r'}$  и  $a_{kr}$  антикоммутируют друг с другом, при перестановке их местами изменится знак,  $b_{k'r'}$  и  $a_{ps}^+$  антикоммутируют, при перестановке их местами также изменится знак, а при действии  $b_{k'r'}$  на правый вакуум получим ноль. Для второго слагаемого:

$$\langle 0 | a_{p's'} a_{k'r'}^+ b_{kr}^+ a_{ps}^+ | 0 \rangle,$$

$b_{kr}^+$  при действии на левый вакуум рождает ноль. Аналогично можно записать и для четвертого слагаемого. Тогда необходимо рассмотреть только первое слагаемое:

$$\langle 0 | a_{p's'} a_{k'r'}^+ a_{kr} a_{ps}^+ | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') \delta_{s'r'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \delta_{sr}, \quad \text{т. к.}$$

$$a_{kr} a_{ps}^+ = \{a_{kr}, a_{ps}^+\} - a_{ps}^+ a_{kr},$$

$$a_{p's'} a_{k'r'}^+ = \{a_{p's'}, a_{k'r'}^+\} - a_{k'r'}^+ a_{p's'}.$$

Так, один раз проделав простые выкладки, подобные операции можно будет делать в уме. Таким образом, при подставлении в интересующие обкладки фермионного тока появляются множители, которые снимут оба интеграла. В поле  $A$  операторов нет, поэтому ничего дополнительно рассматривать не нужно.

$$\langle \vec{p}', s' | \int d^4x: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x): A_\mu(x) | \vec{p}, s \rangle = \int d^4x A_\mu(x) \bar{u}_{p's'} \gamma^\mu u_{ps} e^{i(p'-p)x}.$$

Полученное выражение – четырехмерный Фурье-образ:

$$\int d^4x A_\mu(x) \bar{u}_{p's'} \gamma^\mu u_{ps} e^{i(p'-p)x} = \bar{u}_{p's'} \gamma^\mu u_{ps} \tilde{A}_\mu(p' - p).$$

Таким образом, можно переписать матричный элемент в первом порядке. При переписывании заметим, что в выбранном потенциале присутствует только нулевая компонента. Поэтому несмотря на то, что в выражении присутствует свертка по всем четырем индексам, в действительности срабатывает только индекс  $\mu = 0$ :

$$\langle \vec{p}', s' | S | \vec{p}, s \rangle = ie \bar{u}_{p's'} \gamma^0 u_{ps} \tilde{A}_0(p' - p).$$

Заметим также, что потенциал в реальности зависит только от трехмерной координаты, то есть интеграл по  $x_0$  снимается:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{i(E_{p'} - E_p)x_0} = 2\pi\delta(E_{p'} - E_p) \rightarrow$$

$$\langle \vec{p}', s' | S | \vec{p}, s \rangle = ie\bar{u}_{p's'}\gamma^0 u_{ps}\tilde{A}_0(p' - p) = ie2\pi\delta(E_{p'} - E_p)\bar{u}_{p's'}\gamma^0 u_{ps}\tilde{A}_0(\vec{p}' - \vec{p}).$$

Для того, чтобы сравнить полученную формулу с результатом борновского приближения в нерелятивистской квантовой механике, останется учесть еще одно обстоятельство – состояния в релятивистской квантовой теории поля содержат дополнительный множитель (корень из двух энергий) по сравнению с квантовой механикой. Разделим теперь выражение для квантовой теории поля на множители начального и конечного состояний:

$$-\frac{e\bar{u}_{p's'}\gamma^0 u_{ps}\tilde{A}_0(\vec{p}' - \vec{p})}{\sqrt{2E_p}\sqrt{2E_{p'}}} = \tilde{V}(\vec{p}' - \vec{p}).$$

Для того, чтобы говорить о потенциале в релятивистской теории можно говорить только в нерелятивистском приближении, когда энергии равны массам:

$$\tilde{V}(\vec{p}' - \vec{p}) = -\frac{e\bar{u}_{p's'}\gamma^0 u_{ps}}{2m}\tilde{A}_0(\vec{p}' - \vec{p}).$$

Полученное выражение – выражение для потенциальной энергии в квантовой теории поля, когда электрон рассеивается на кулоновском потенциале. Проверим правильность полученного результата:

$$\gamma^0\gamma^0 = 1 \rightarrow$$

$$\tilde{V}(\vec{p}' - \vec{p}) = -\frac{eu_{p's'}^+ u_{ps}}{2m}\tilde{A}_0(\vec{p}' - \vec{p}).$$

При вычислении будем предполагать, что электроны являются нерелятивистскими частицами. Спинор для состояния с определенной проекцией спина можно записать в виде

$$u_{ps} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m}\chi_s \\ \sqrt{E_p - m}\chi_s \end{pmatrix}.$$

В нерелятивистском приближении

$$u_{ps} \cong \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$u_{p's'}^+ u_{ps} = 2m\chi_s^+ \chi_s = 2m\delta_{s's}.$$

Так, в нерелятивистском случае спин электрона не изменяет своей проекции. В итоге получаем формулу:

$$\tilde{V}(\vec{p}' - \vec{p}) = -e\tilde{A}_0(\vec{p}' - \vec{p}).$$

Для того, чтобы вычислить потенциал, необходимо вычислить обратный Фурье-образ. Однако ранее уже был записан потенциал в координатном представлении. Возвращаясь

в координатное представление из импульсного, для потенциальной энергии получим то же выражение, домноженное на  $-e$ :

$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi|\vec{x}|}$$

Так, получена потенциальная энергия притягивающего потенциала в классическом электромагнитном поле.

Для позитрона начальное состояние будет содержать  $b^+$  и  $b$ . В таком случае сохранится только четвертое слагаемое, где ток определяется через спиноры  $\bar{v}_{k'r'}\gamma^\mu v_{kr}$ , что в нерелятивистском приближении приведет к точно таким же выражениям, но с дополнительным сохранившимся знаком «-». Тогда для потенциальной энергии в случае позитрона получаем отталкивание:

$$V = +\frac{Ze^2}{4\pi|\vec{x}|}$$

## Теория Юкавы

Рассмотрим случай, когда электрон может взаимодействовать с некоторым скалярным полем. Изучим, к чему приведет это взаимодействие в контексте взаимодействия электронов друг с другом, а также электронов с позитронами и позитронов с позитронами. Такая теория носит название «*теория Юкавы*».

Для того, чтобы сформулировать теорию, в первую очередь необходимо записать Лагранжиан. На данном уровне можно сказать, что Лагранжианы для теорий «угадываются». Единственные требования – правильная размерность и релятивистская инвариантность. При этом на Лагранжианы можно накладывать некоторые условия симметрии, что дает богатую физическую информацию. Так, в представлении взаимодействия Лагранжиан для теории Юкавы, содержащий и фермионные, и скалярные поля имеет вид

$$\mathcal{L} =: \bar{\psi}_I(i\hat{\partial} - m)\psi_I + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_I)^2 - \frac{m^2}{2}\phi_I^2 - g\bar{\psi}_I\psi_I\phi_I:$$

где  $g$  – безразмерная константа. Использованы соображения о размерности Лагранжиана, действие имеет вид:

$$\text{действие} = S = \int d^4x \mathcal{L}.$$

Действие – безразмерная величина, поэтому для любого Лагранжиана справедливо

$$[\mathcal{L}] = m^4.$$

$$[\bar{\psi}_I m \psi_I] = m^4 \rightarrow [\psi_I] = m^{\frac{3}{2}},$$

$$[m^2 \phi_I^2] = m^4 \rightarrow [\phi_I] = m.$$

Определим потенциал взаимодействия при рассеянии электронов друг на друге, например. Рассмотрим следующую задачу

$$|i\rangle = |e^-(\vec{p}_1, s_1), e^-(\vec{p}_2, s_2)\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^-(\vec{p}'_1, s'_1), e^-(\vec{p}'_2, s'_2)\rangle.$$

Для вычисления потенциала взаимодействия запишем матричный элемент:

$$\langle \vec{p}'_1, s'_1; \vec{p}'_2, s'_2 | T \exp(+i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)) | \vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2 \rangle$$

Поскольку здесь не фигурируют классические поля, процедура связывания потребует уточнения, которое будет описано позже. Разложим экспоненту до первого ненулевого порядка, который бы дал ненулевой матричный элемент:

$$\begin{aligned} T \exp\left(+i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)\right) &= \\ &= 1 + (-ig) \int d^4x : \bar{\psi}_I(x) \psi_I(x) \phi_I(x) : + \\ &+ \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4x d^4y T (: \bar{\psi}_I(x) \psi_I(x) \phi_I(x) :: \bar{\psi}_I(y) \psi_I(y) \phi_I(y) :) + \dots \end{aligned}$$

Второе слагаемое зануляется, третье дает уже ненулевое выражение.