ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

КУЛИК
СЕРГЕЙ ПАВЛОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Содержание

1 Лекция 1. Введение в квантовую электронику **5**
1.1 Введение в квантовую электронику. Единицы измерения 5
1.2 Из истории 6
1.3 Основные понятия квантовой электроники 8
1.4 Обратная связь. О квантовой электронике 14

2 Лекция 2. Выражения для вероятностей переходов во внешнем поле. Теория возмущений **16**
2.1 Взаимодействие излучения с веществом. Переходы во внешнем поле. Нестационарное уравнение Шредингера. Невозмущенная задача 16
2.2 Гамильтониан с внешним полем. Теория возмущений. Вероятность вынужденного перехода в системе во внешнем поле. 19

3 Лекция 3. Переходы в монохроматическом поле. Уширение спектральных линий. Золотое правило Ферми **26**
3.1 Краткое содержание предыдущей лекции 26
3.2 Приближение вращающейся волны. Режимы включения внешнего поля. Скорость перехода 27
3.3 Уширение спектральных линий. Время жизни. Золотое правило Ферми. Частота Раби. Переходы между расщепленными уровнями 33

4 Лекция 4. Переходы в случайном поле **39**
4.1 Напоминание из предыдущей лекции 39
4.2 Переходы в случайном поле. Корреляционная функция и её измерение. Мгновенная интенсивность. Видность. Время когерентности и длина когерентности 41

5 Лекция 5. Коэффициент Эйнштейна. Яркость излучения **52**
5.1 Спонтанные переходы. Коэффициенты Эйнштейна 52
5.1.1 Равновесное поле 53
5.2 Число фотонов на моду. Яркость излучения. Эффективная температура 57

6 Лекция 6. Линейная восприимчивость. Поглощение поля. Дисперсионные отношения **63**
6.1 Линейная восприимчивость. Ее свойства 63
6.2 Поглощение поля в веществе 67

6.3 Дисперсионные соотношения. Отклик среды на излучаемую волну . . . 69

7 Лекция 7. Линейная восприимчивость 73

7.1 Обыкновенные и необыкновенные волны. Вещественная и мнимая часть диэлектрической проницаемости. Фазовая и групповая скорость. Закон дисперсии. 73

7.2 Получение линейной восприимчивости. Классический подход. 76

7.3 Приближения формулы для линейной восприимчивости. Фононный резонанс. 78

8 Лекция 8. Уравнение Неймана. Осциллирующее решение. Матрица плотности 81

8.1 Уравнение Неймана. Следствие для СФ гамильтона. 81

8.2 Осциллирующее решение уравнения Неймана. Учет затухания в системе. Феноменологическая константа затухания. 82

8.3 Вычисление характеристик среды с помощью матрицы плотности. Учет релаксации и действия внешнего поля. Средний дипольный момент системы и поляризация. 85

9 Лекция 9. Эффект насыщения. Фактор насыщения 88

9.1 Эффект насыщения. Оценка скорости перехода. Резонансные переходы 88

9.2 Разность населенностей при действии поля (уравнение Неймана, двухуровневая система). Эффективная температура. Фактор насыщения . . 91

Лекция 1. Введение в квантовую электронику

Введение в квантовую электронику. Единицы измерения

Рассмотрим широкий класс-эффект в широком диапазоне длин волн (примерно от радиоволн до гамма-излучения). Где радиодиапазон – 10^5см, а гамма диапазон – 10^{-8}см. При этом видимый диапазон 400-700нм:

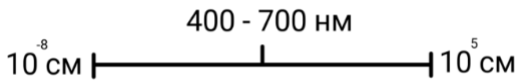

Рис. 1.1. Диапазон от гамма до радио

Можно увидеть существующие общие принципы взаимодействия излучения. Но видимый диапазон в масштабах 13-и порядков – это малая часть (т.е. нет даже октавы – двукратного увеличения длины волны).

Преимущественно работа будет идти не в системе СИ, а в системе СГСЕ:

	СИ	СГСЕ
мкм	10^{-6}м	10^{-4}см
нм	10^{-9}м	10^{-7}см
$\mathring{A}$	10^{-10}м	10^{-8}см

Кроме того, будут использоваться разные внесистемные единицы. Например, интенсивность света принято в этой науке измерять в Вт/см^2. Также важная внесистемная единица – частота. Так частота ($\mathcal{V} = \frac{1}{T}$) и циклическая частота ($\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{T}$) измеряются в обратных сантиметрах, а не в герцах. Циклическая частота $\sim 10^{15}$Гц, но это очень большая величина и, чтобы не тащить на вычислениях, делят на скорость света ($c = 3 * 10^{10}$см/с). Поэтому:

$$\left[\mathcal{V}_1\ \boldsymbol{\omega}\right]_{\text{см}^{-1}} \equiv \frac{\mathcal{V}}{c^1} = \text{см}^{-1}$$

Электрон-вольт (эВ) – это энергия, которую приобретает свободный электрон в разности потенциалов один вольт (заряд электрона умножить на напряжение):

$$\text{эВ} \ \rightarrow e * u = \underbrace{10^{-19}\text{Кл} * 1\text{В}}_{\text{СИ}} = 10^{-19}\text{Дж/с} = 10^{-12}\text{эрг}$$

Сравним энергию с $\hbar\omega$ (энергия кванта, фотона). Т.е. оценить в середине видимого диапазона и сравнить с эВ, который еще не зависит ни от диапазона и ни от чего другого.

Если $\hbar \sim 10^{-27}$, а $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi c}{\lambda} = \dfrac{2*3*3*10^{10}}{5*10^{-5}} \sim 3,5*10^{15}$Гц, то:

$$\hbar\omega = 10^{-27}*3,5*10^{15} = 3,5*10^{-12}$$

Таким образом, энергия в 3,5 раза больше в середине видимого диапазона.

Из истории

Данная наука начинается с эффектов, которые связаны с взаимодействием излучения с веществом.

1600 г.	Ньютон	дисперсия света
1730 г.	Бугер	эмпирический закон
1880 г.	Лоренц	классическая теория дисперсии
1830-1850 гг.	Максвелл	классическая электродинамика
1900 г.	Планк	понятие равновесного излучения
30-е г.	Блох, Парсел	радиоспектроскопия, ЯМР
1940 г.	В.А. Фабрикант	теория об усилении
40-е г.	война	радиолокация
50-е г.	Фейнман	квантовая электродинамика
1954 г.	Басов, Прохоров, Таунс	Нобелевская премия по физике
1960 г.	Нейман	рубиновый лазер

Ньютон произвел первое количественное исследование, обнаружил, что некотрые прозрачные материальные тела (диэлектрики) при определенных условиях могут отклонить свет, а угол отклонения определяется длиной волны. Это и есть дисперсия, то есть зависимость материальных свойств среды от длины волны.

Эмпирический закон Бугера – в поглощающей среде интенсивность излучения экспоненциально затухает.

В 1900 году для данной науки из работ Планка важно понятие *равновесного* или *теплового* излучения, которое находится в равновесии со стенками полости. Если взять какой-то объем, нагреть стенки до термодинамической температуры (t), то

спустя некоторое время принято считать, что излучение *электромагнитное*, которое есть внутри, тоже имеет такую температуру. А чтобы вывести это излучение с полости, надо сделать дырку. Т.е. полость перестает быть черным телом, а то, что выходит из дырки имеет почти термодинамическую температуру (t) с коэффициентом поправки. На квантовом уровне вышеуказанное впервые было интерпретировано Планком. Потом появились Бор, Энштейн, Гейзенберг и квантовые теории дисперсии.

В 1930-е годы идут более прикладные аспекты. Это, прежде всего, радиоспектроскопия. Здесь стоит отметить Блоха и Парсела. Также спектроскопия газовая, магнитная, ядерный магнитный резонанс (ЯМР) и другие.

В 1940г. российский советский физик Валентин Александрович Фабрикант, который работал во всесоюзном радиотехническом институте, теоретически предложил использовать среду, в которой есть инверсия населённости, для усиления интенсивности света. Это была первая по приоритетности работа в данной области. Очень важный шаг на пути к созданию лазера – теоретические аспекты лазерной генерации в оптическом диапазоне или микроволновом, которые были положены работами Фабриканта. То есть усиление в среде с инверсией населенности.

Затем в 40-е года – радиолокация, которая вызвана потребностью в военное время.

В 50-е годы, прежде всего, Фейнман с работой о квантовой электродинамике. То есть после Максвелла 200 лет спустя завершил Фейнман.

В 1954 году нобелевской премии по физике были удостоены Таунс, Прохоров и Басов. Первая количественная теория (мазер) Басова и Прохорова в это же время. Они впервые рассчитали порог, коэффициент усиления. Это другой диапазон, так как лазер – невидимый диапазон, а мазер – инфракрасный диапазон, молекулы аммиака (NH_3).

В 1950 году Нейман построил первый рубиновый лазер с оптической накачкой. Это был взрыв – создание нового инструмента.

Во-первых, включает в себя лазерное разделение изотопов, лазерное охлаждение – спектроскопия, материаловедение. Таким образом, много вещей основываются на применении лазеров.

Во-вторых, следующее направление – квантовая информатика, экспериментальная часть. То есть квантовая связь и то, что связано с квантовыми симуляторами,

во многом опирается на основные принципы квантовой электроники. Потому что это всегда есть взаимодействие излучения с веществом.

Если говорить о модели квантовых вычислений, как нейтральные атомы в ловушках, то берется один атом, подвешивается в ловушке, и с ним идут буквально переговоры с помощью неклассических состояний света. Т.е. можно возбуждать, некоторое время ждать, получать отклик. Если атомы поместить на известном расстоянии в линейку или уникум матриц, то получается регистр. Современная техника позволяет ставить атомы в виде висящего кристалла. Из атомов, которые будут стоять на регулярном расстоянии порядка 3,4 мкм в объеме, можно создать гексагональную из отдельных атомов. И к каждому можно иметь индивидуальный доступ. Все построено на очень элементарных, но фундаментальных эффектах квантовой электроники.

Основные понятия квантовой электроники

Основная модель работы: есть колба (стенки), задан объем, где летают нейтральные атомы, у которых есть электронная структура – терма. Данным образом обозначают уровни энергии из всего спектра, а именно двухуровневая система (Рис. 1.2). На рисунке можно увидеть, что если атом в $\mathcal{E}_2$, то это значит, что он находится возбужденном состоянии. Если атом в $\mathcal{E}_1$, то он находится в основном состоянии.

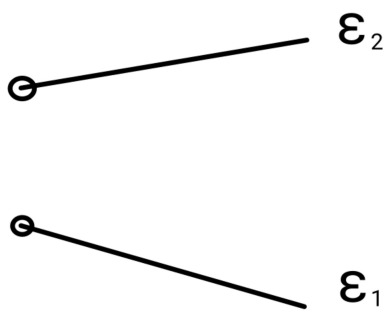

Рис. 1.2. Двухуровневая модель энергии

Таким образом, вещество представлено картиной энергетических уровней. Остальные уровни не очень важны, хотя иногда это приводит к существенным ошибкам. При этом $\mathcal{E}$ будет обозначать энергию, а E – напряженность поля.

Пусть оставим атом в возбужденном состоянии, и пусть налетает фотон с энергией $\hbar\omega$, а частота перехода равна:

$$\omega = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{\hbar}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Иначе, частота излучения, которая налетает, совпадает с частотой перехода (Боровской частотой). Тогда возникает эффект *вынужденного излучения*. Один налетающий фотон вынуждает атом (двухуровневую систему) перейти вниз, чтобы сохранилась энергия, и при этом излучает фотон. Значит, на выходе получается два фотона (Рис. 1.3).

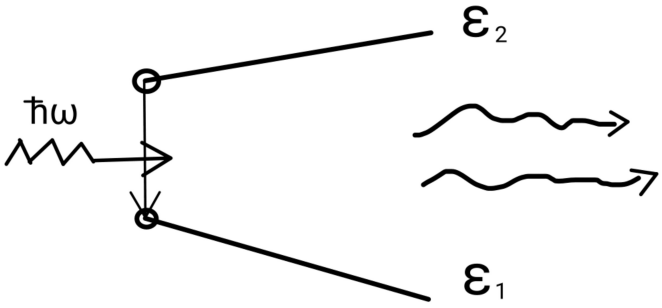

Рис. 1.3. Эффект вынужденного излучения

Таким образом, атом понижает свою энергию, но, чтобы она сохранилась, он излучает дополнительный фотон. Это называется **принципом копирования** или **принципом когерентности**, когда два фотона ничем не отличаются от исходного фотона. Но *принципом копирования* неправильно называть, потому что в квантовой механике и квантовой информатике есть одна из фундаментальных теорем *о запрете клонирования* неизвестного квантового состояния. То есть по теореме вышенарисованное запрещено. Но по данному эффекту есть очень простое объяснение – никакого копирования в этом смысле не происходит.

Вынужденное излучение характеризуется некой скоростью перехода в единицу времени - W, измеряется в обратных секундах. Есть переход *вынужденный* и *спонтанный* (т.е. без внешнего воздействия). Спонтанный переход характеризуется системой, которая может перейти вниз без внешнего фактора. Также есть обратные переходы, вынужденные переходы вверх. Т.е. налетающее резонансное поле, система находится внизу, и тогда фотон поглощается, а система переходит в возбужденное состояние. Таким образом, скорость вынужденных переходов относится к скорости спонтанных переходов и равна числу фотонов в моде:

$$\frac{W_{\text{вын}}}{W_{\text{спонт}}} = n$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В этом случае фотон один, и отношение скорости вынужденного перехода к спонтанному равно 1. Система может собираться 50% вынужденным образом, а 50% спонтанным. Таким образом, назвать спонтанным излученный фотон нельзя.

Если при вынужденном излучении атомов много, то число фотонов будет экспоненциально возрастать.

Подтвердим рассуждения количественным образом. Для этого N – населенность уровней, это число атомов в единице объема, то есть концентрация, которая находится в энергии (Рис. 1.4).

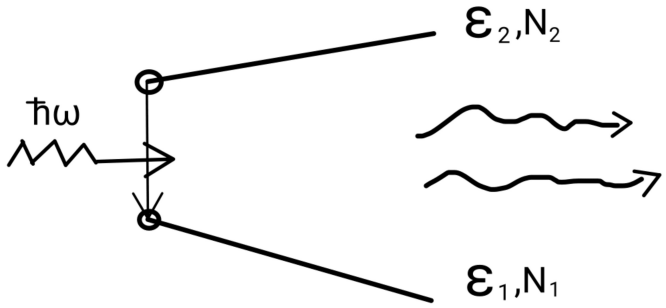

Рис. 1.4. Эффект вынужденного излучения

Кинетические уравнения для населенности (слева стоит изменение во времени, производная величины N, а справа то, чем она определяется):

$$\frac{d\ N_1}{d\ t} = +W_{12}\ N_2 - W_{21}\ N_1$$

При этом N_1 – изменение населенности нижнего уровня под действием внешнего поля. Утверждается, что эта величина имеет два вклада – со знаком «+» и со знаком «–». Для двухуровневой системы со знаком «+» – это переход частиц на нижний уровень со второго уровня. Индексы читаются наоборот. В таком случае скорость переходов с уровня 2 на уровень 1 со знаком «+» и пропорциональна числу вынужденных частиц на уровне 2. Далее уход частиц с уровня 1 на уровень 2 пропорционально числу частиц на уровне 1.

На втором уровне будет аналогично, но со знаком «–»:

$$\frac{d\ N_2}{d\ t} = +W_{21}\ N_1 - W_{12}\ N_2 = -\frac{d\ N_1}{d\ t}$$

В размерности фигурирует населённость уровней (концентрация, т.е. число частиц в единице объёма на уровне i) и число переходов в единицу времени:

$$\left[N_i\right] = \frac{1}{\text{см}^3}$$
$$\left[W_{ij}\right] = \frac{1}{\text{с}}$$

Рассмотрим стационарный случай, когда величина населенности dN_1 не изменяется во времени:

$$\frac{d\ N_1}{d\ t} = 0$$

Принцип детального равновесия гласит, что вынужденные переходы с уровня 2 на уровень 1 совпадают со скоростью вынужденных переходов с уровня 1 на уровень 2:

$$W_{12} = W_{21}$$

И при учете принципа детального равновесия и стационарного фактора получается соотношение:

$$0 = \frac{d\ N_1}{d\ t} = W(N_2 - N_1) = -W\Delta N$$

При условиях:

$$\Delta N = N_1 - N_2,$$
$$N_1 + N_2 = const$$

В данном случае W – величина, которая определяется внешним полем, т.е. не нулевая, а пропорциональная интенсивности внешнего поля.

В итоге рассматривается динамика системы только между двумя уровнями, населенность не меняется за счет переходов на другие уровни. Эта модель является одной из наиболее продуктивных.

Таким образом, любое внешнее резонансное поле стремится к тому, чтобы населенности выровнялись. Это парадокс в рамках данной модели. Он возникает потому,

что в кинетических уравнениях не учли релаксацию, то есть факторы, которые определяются, например, спонтанными переходами.

Рассмотрим аналогичное соотношение, но с точки зрения динамики фотонов. Так есть двухуровневые системы, на каждой системе происходит удвоение числа фотонов, если они находятся в возбужденном состоянии. Для этого пишется уравнение переноса числа фотонов:

$$\frac{dn}{dt} + \vec{\nabla}\vec{F} = \frac{dN_1}{dt}$$
$$\vec{F} = n\vec{V},$$

где n – это плотность числа фотонов, $[n] = \frac{1}{\text{см}^3}$;

F – плотность потока фотонов, $[F] = \frac{1}{\text{см}^2\text{с}}$;

∇ – пространственная производная от векторной величины.

Далее стационарный одномерный случай по числу фотонов, которые пересекают какую-то площадку:

$$\vec{\nabla} \to \frac{d}{dz}$$
$$\frac{dF}{dz} = \frac{dN_1}{dt} = -\Delta NW$$

Теперь необходимо связать F (плотность потока фотонов, то есть излучения, которые попадают на среду)и W (скорость переходов), так как, скорее всего, они пропорциональны. Линейная зависимость такова:

$$W = \sigma F,$$

где $[\sigma] = \text{см}^2$.

Таким образом, плотность потока фотонов пропорциональна скорости переходов с коэффициентом:

$$\Rightarrow \frac{dF}{dz} = \frac{dN_1}{dt} = -\Delta NW = -\Delta N\sigma F$$

Значит, величина дифференцируется в пространстве и производная пропорциональна величине F. Если продифференцирвать, то получится:

$$F(z) = F(0)e^{-\alpha z}$$

$$\alpha = \Delta N \sigma,$$

где $[\alpha] = \frac{1}{\text{см}^{-1}}$.

Если $\alpha > 0$, то тогда $F(z)$ – интенсивность ($I \simeq \hbar\omega F$), и происходит экспоненциальное затухание. Это и есть **закон Бугера**. Если $\alpha < 0$, то тогда происходит экспоненциальное нарастание, что и заметил В.А. Фабрикант.

При этом σ – неотрицательная величина, а N может быть либо с «+», либо с «–». В равновесной среде распределение населенности определяется *Войновским распределением*:

$$N_m \sim e^{-\frac{\mathcal{E}_m}{\text{KT}}}$$

Т.е. чем выше энергия уровня за счет «минуса», тем меньше населенность в равновесном случае. Поэтому в равновесии всегда низколежащие уровни более заселены, чем высоколежащие.

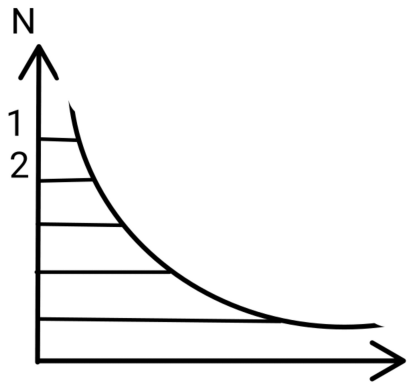

Рис. 1.5. Уровни в равновесии

Поэтому в равновесии всегда $N_1 - N_2 > 0$, то есть α будет со знаком «+». И закон Бугера дает экспоненциальное затухание в равновесии. Это значит, что большее число частиц находится внизу, поэтому внешнее излучение там поглощается. По модели большая часть находится внизу, поэтому летающие фотоны поглощаются, а вещества возбуждаются. А если есть инверсия, то есть $\Delta N < 0$, значит большая часть атомов находится наверху. Поэтому возникает усиление света.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Также есть еще один случай насыщения, когда $\Delta N = 0$. Тогда число частиц на верхнем уровне совпадает с числом частиц на нижнем уровне в виде концентрации, а свет, который проходит через среду, не замечает. Это называется *эффектом просветления.*

Надо попробовать оценить по формуле Бугера усиление в e раз. Какие параметры среды нужны для того, чтобы интенсивность увеличилась в e раз? Чтобы показатель экспоненты $-\alpha z = 1$.

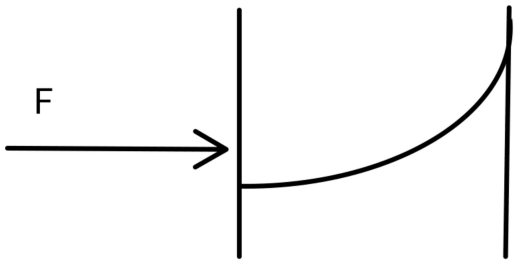

Рис. 1.6. Интенсивность

При этом $\alpha z = \sigma \Delta N z$. z – продольная координата.

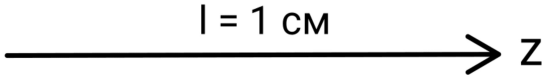

Рис. 1.7. Интенсивность

Необходимо, чтобы $\alpha z = \sigma \Delta N z$. $z = 1$, где $\sigma \sim \lambda^2$. При этом $\lambda = 10^{-4}$, поэтому сечение $\sigma \sim 10^{-8}$см^2. Поэтому $\Delta N \sim 10^8$. При том, что 1тор $\sim 10^{16} \frac{1}{\text{см}^3}$, где тор - миллиметр ртутного столба (мм. рт. ст.). Значит давление $= 10^{-8}$ тор – это сверхвысокий вакуум.

Обратная связь. О квантовой электронике

Для получения эффекта генерации ставится среда с α и окружается двумя плоскими зеркалами. Свет пробегает много раз через резонатор Фабри-Перо (Рис. 1.8).

Спектр такого резонатора содержит узкие пики (расстояние между ними обратно пропорционально длине) (Рис. 1.9).

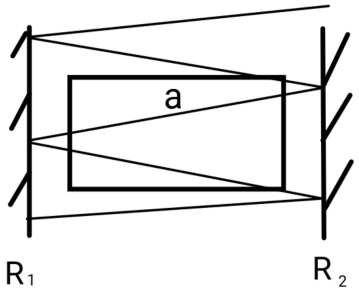

Рис. 1.8. Интенсивность

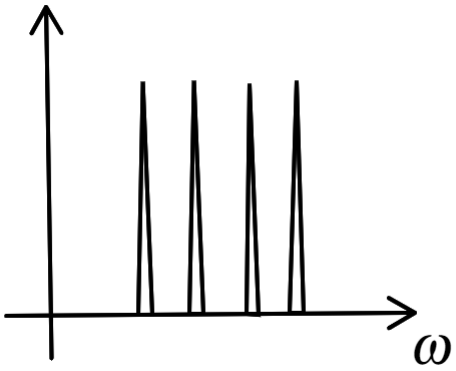

Рис. 1.9. Спектр резонатора

Поскольку система замыкается при двух проходах, то надо сравнить потери за два прохода с усилением, то есть коэффициенты отражения зеркала R_1 и R_2. Тогда:

$$R_1 R_2 e^{-2\alpha L} > 1,$$

где L – расстояние между зеркалами.

Должно быть больше единицы, чтобы была генерация. Равенство единице – это пороговый случай.

Далее рассчитываем α:

$$R_1 = R_2 = 0,99$$

$$R^2 = e^{2\alpha L}$$

$$2\alpha L = 2 \underbrace{lnR}_{1} 0^{-2}$$

$$\alpha = \frac{10^{-2}}{10} \sim 10^{-3}\text{см}^{-1}$$

Таким образом, данная наука строится на инверсии населенности, вынужденных излучениях и обратной связи.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2. Выражения для вероятностей переходов во внешнем поле. Теория возмущений

Взаимодействие излучения с веществом. Переходы во внешнем поле. Нестационарное уравнение Шредингера. Невозмущенная задача

Последовательно двигаемся на пути к выводу основных соотношений, связанных с динамикой населенности двухуровневой системы. За прообраз системы берется замкнутый объем, где летают атомы, которые имеют некий спектр энергии только для тех случаев, которые не оговариваются. Примером может быть активная среда газового лазера.

Уравнение Шрёдингера – пси-волновая функция, где аргументами выступают пространственные координаты летающих атомов и время:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(\hat{r},t) = \mathcal{H}\psi(\vec{r},t)$$
$$\vec{r} = \vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n,$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V(t)$$
$$\mathcal{H}_0 = \mathrm{K} + \mathrm{T}$$

где $\vec{r}$ – обобщенный радиус вектор;

$\mathcal{H}$ – энергия невозмущенной системы и внешнее возмущение, зависящее от времени внешнего электрического поля;

$\frac{d}{dt}$ – производная по времени.

Задача делится на этапы:

1. Вычисление волновой функции в отсутствии возмущения.

$$V(t) = 0$$
$$i\,\hbar\dot{\psi} = \mathcal{H}_0\psi$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теперь необходимо найти решение волновой функции в виде разложения в ряд по известным функциям:

$$\psi(r,t) = \sum_n C_n \ \Phi_n(r,t)$$

Данные функции факторизуются: отдельно прописывается пространственная часть ϕ_n и отдельно временная в тривиальном виде экспоненциально $e^{-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}}$:

$$\Phi_n(r,t) = \phi_n(r) \ e^{-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}}$$

Коэффициенты, которые необходимо найти в виде C_n, не зависят от времени, в отличие от невозмущенных, потому что внешнее возмущение отсутствует. Функции в пространстве – стационарные, они удовлетворяются собственными функциями гамильтониана:

$$\mathcal{H}_0\phi_n = \mathcal{E}_n \ \phi_n$$

$\mathcal{H}_0$ – оператор, который действует на функцию. Если это функция собственная, значит, оператор действует на собственную функцию, получаются значение и сама функция. В векторном пространстве ϕ_n – вектор, и на выходе получается энергия, длина вектора меняется, а направление не меняется.

Значит, ϕ_n – собственные функции задачи, $\mathcal{E}_n$ – собственное значение, то есть спектр энергии по задаче. $\mathcal{H}_0$ соответствует физическая величина, энергия. Поэтому среднее значение оператора всегда действительно. Для Эрмитова оператора собственные функции являются ортонормированными. Важное условие, т.к. от него сразу получается нормировка функций.

Рассмотрим координатные представления волновой функции, условие орнормированности функций:

$$\int d^3r \phi_m \ ^*\phi_n = \delta_{mn}$$

Далее можно сразу получить условие нормировки волновой функции и физический смысл коэффициентов C_n:

$$\int d^3r \ \left|\psi(r,t)\right|^2 = \int d^3r \ \sum_n \sum_m C_m \ ^*C_n \ \phi_m \ ^* \ \phi_n \ e^{\frac{i(\mathcal{E}_m \ - \ \mathcal{E}_n)t}{\hbar}} = \sum_n \left|C_n\right|^2 = 1$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Квадрат модуля – это всегда сопряженная величина на саму величину, но поскольку стоит сумма, необходимо брать разные индексы, чтобы учитывать все слагаемые. Из-за условия ортонормированности комбинация дает символ Кронекера, уходит интеграл и одна сумма.

Таким образом, получается выражение нормировки волновой функции, то есть сумма квадратов коэффициентов в разложении волновой функции равна единице. Их физический смысл: это амплитуды вероятности того, что энергия окажется на уровне с энергией $\mathcal{E}_n$, то есть это *населенность*.

Это факт можно проиллюстрировать с другой стороны. Вычисление средних в квантовой механике:

$$\mathcal{E} \equiv \langle\ \mathcal{H}_0\ \rangle\ \equiv\ \int d^3r\ \psi^*\ \underbrace{\mathcal{H}_0\ \psi}_{\mathcal{H}_0\ \phi_n = \mathcal{E}_n\ \phi_n}$$

Угловые скобки в квантовой механике означают *усреднение по волновой функции.*

Далее производятся те же манипуляции, то есть вместо ψ^* подставляется разложение с суммированием по индексам n и m. Оператор действует на соответствующие функции, то есть функцию нельзя поместить перед оператором, а числа можно все выносить. В итоге останется комбинация: $\mathcal{H}_0$ действует на ϕ_n, остается число, умноженное на функцию, а слева будет стоять такая же функция, только сопряженная со знаком m. Интеграл даст ортонормированность, то есть символ Кронекера. В итоге получится:

$$\mathcal{E} \equiv \langle\ \mathcal{H}_0\ \rangle\ \equiv\ \int d^3r\ \psi^*\ \underbrace{\mathcal{H}_0\ \psi}_{\mathcal{H}_0\ \phi_n = \mathcal{E}_n\ \phi_n}\ = \sum_n\ \mathcal{E}_n\ \left|C_n\right|^2$$

То есть энергия, как средние значения гамильтониана, как взвешенная сумма всех состояний со всеми энергиями. Имеет смысл найти систему на том или ином уровне энергии с индексом.

Таким образом, разобраны решения невозмущенной задачи. То есть найдено разложение волновой функции, показан физический смысл функций, по которым раскладывается Φ_n, и физический смысл коэффициентов разложения.

Гамильтониан с внешним полем. Теория возмущений. Вероятность вынужденного перехода в системе во внешнем поле.

2. Условие, когда:

$$V(t) \neq 0$$

$$i\,\hbar\dot{\psi} = \mathcal{H}_0\psi$$

Для невозмущенной задачи волновая функция раскладывается в ряд, и коэффициент C_n не зависит от времени. Стоит попробовать оставить разложение волновой функции таким же, но ввести коэффициент зависимости от времени, то есть искать решение в виде:

$$\psi(r,t) = \sum_n C_n(t)\ \Phi_n(r,t)$$

Так можно делать, потому что эти функции – набор, по которым раскладывается, представляют собой полное решение невозмущенной задачи. Получается, что когда включили внешнее поле, которое взаимодействует с набором двухуровневых систем, населенности $C_n(t)$ перераспределяются от времени. Найти систему на каком-то уровне от времени, которая имеет функциональное выражение.

Необходимо учесть, что уравнение Шрёдингера, которое решено на предыдущем шаге, справедливо для тех функций, по которым раскладывали исходную функцию:

$$i\,\hbar\ \dot{\Phi}_n = \mathcal{H}_0\ \Phi_n$$

Это упростит решение задачи.

Далее производится дифференцирование:

$$i\,\hbar\ \sum_n \dot{C}_n\ \Phi_n = \sum_n C_n\ \hat{V}(t)\ \Phi_n$$

То есть ушло два слагаемых, поскольку удовлетворяется уравнение Шрёдингера для невозмущенной задачи. Далее делается прием, домножится все слева на функцию (оператор) $\int \Phi_m{}^*\ d^3\ r$.Так как комбинация $\Phi_m{}^*\Phi_n$, будучи проинтегрированы, дает символ Кронекера. А данный символ помогает суммировать ряды.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$i\,\hbar\,\dot{C}_m = \sum_m C_n\ {}^3\ r\ \Phi_m\ {}^*\ V(t)\ \Phi_n = \sum_m C_n\ Wmn = \sum_m Wmn\ C_n,$$

где $Wmn = \int\ d^3\ r\ \Phi_m\ {}^*\ V(t)\ \Phi_n$.

При этом функции $\Phi_m\ {}^*$ зависят и от координаты, и от времени:

$$Wmn = \int\ d^3\ r\ \Phi_m\ {}^*\ V(t)\ \Phi_n = \underbrace{\int\ d^3\ r\ \phi_m\ {}^*\ \widehat{V}(t)\ \phi_n\ e^{i\ \omega_{mn}t}}_{V_{mn}},$$

Эти конструкции называются **матричными элементами перехода**. Ведь в откладках функций стоит оператор возмущения, задействовано два уровня, и суммирования нет.

При этом $\omega_{mn} = \frac{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n}{\hbar}$ – *боровская частота перехода.* Разность энергий, деленная на постоянную планку, и есть размерность частоты.

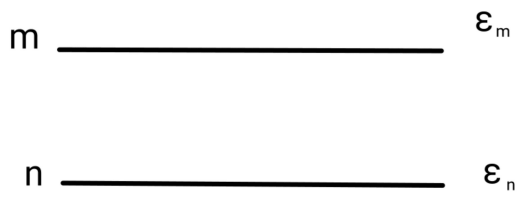

Рис. 2.1. Энергии на уровнях

В итоге получилось:

$$i\,\hbar\,\dot{C}_m = \sum_n W_{mn}\ C_n$$

Это равенство называется **уравнением Шрёдингера в энергетическом представлении**. Потому что коэффициенты C показывают населенность, будучи возведенную по модулю в квадрате, то есть вес энергии данного уровня.

Исходная функция, которая была использована, показывает как, зная коэффициенты разложения, найти волновую функцию в координатном представлении:

$$\psi(r,t) = \sum_n C_n(t)\ \Phi_n(r,t)$$

То есть выражает между собой волновую функцию в координатном представлении и волновую функцию в энергетическом представлении.

Чтобы сделать наоборот, то есть надо все выражение домножить слева на интегральный оператор, тогда получается:

$$\int d^3\ r\ \Phi_{mn}{}^*\ \psi(r,t) = C_m$$

Если известны коэффициенты и функция в первом разложении, то можно найти волновую функцию. А в следующем разложении наоборот, зная волновую функцию, можно вычислить коэффициент.

Для уравнения Шредингера в энергетическом представлении необходимо найти явную зависимость от времени коэффициентов C_n в приближениях. Используя теорию возмущения, коэффициенты сначала можно разложить в ряд по степеням возмущения:

$$C_n(t) = C_n^{(0)} + C_n^{(1)} + C_n^{(2)} + \ \dots\ + C_n^{(k)}$$
$$C_n^{(k)} \sim V^k$$

Далее подставим в выражение, и сохранив слева и справа одного порядка малости по внешнему возмущению:

1) $i\ \hbar\ \dot{C}_m^{(0)} = 0$

2) $i\ \hbar\ \dot{C}_m^{(1)} = \sum_n\ W_{mn}\ C_n^{(0)}$

3) $i\ \hbar\ \dot{C}_m^{(k)} = \sum_n\ W_{mn}\ C_n^{(k-1)}$

Можно ограничиться только первым порядком теории возмущения, который поможет найти в рамках данного приближения явный вид.

Одно из необходимых приближений – линейность. Предположим, что в начальный момент система находилась на каком-то определенном уровне, например, 1.

$$C_n^{(0)} = \delta_{n1}$$

То есть рассматривается временная зависимость в системе на уровне m, динамика состояния определяется всеми переходами со всех уровней n с некими скоростями переходов с n на m. Тогда:

$$i\,\hbar\,\dot{C}_m^{(1)} = W_{m1}$$
$$\dot{C}_m^{(1)} = \frac{1}{i\,\hbar}\int dt'\;W_{m1}\;e^{i\omega_{m1}t'}$$

Теперь t устремим к бесконечности, большое время наблюдения за системой. Выражение справа также напоминает преобразование Фурье. Если пределы устремить в бесконечность, то справа выписано преобразование Фурье. То есть это результат, который показывает, что в первом порядке теории возмущения система откликается только на гармонику внешней силы, похоже на гармонический осциллятор. Спектры внешней силы должны присутствовать только в гармонике. Но в эксперименте числа $C_m^{(1)}$ – комплексные, они не меряются, так как меряются действительные числа, то есть вероятности перехода. Поэтому ответ получается с условной верояностью P:

$$P(m,t|n,t_0) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int dt'\;V_{mn}\;e^{i\omega_{mn}t'}\right|^2$$

Условная вероятность, потому что было начальное существенное условие.

Важное свойство данного соотношения – что вероятности прямых и обратных переходов совпадают в рамках приближений, которые были рассмотрены:

$$P_{mn} = P_{nm}$$

Напоминая терминологию, рассматриваются вынужденные переходы под действием внешнего поля между уровнями m и n. Это называется **вынужденный переход**. Значит, населенности перераспределяются под действием внешнего поля. При этом скорость переходов – это вероятность в единицу времени. То есть если вероятность – безразмерную величину – поделить на время, то получится размерная величина в герц, что является скоростью перехода.

Вероятности прямых и обратных переходов совпадают, поскольку надо поменять индекс в этом выражении и принять во внимание, что оператор возмущения (физическая величина) есть Эрмитов оператор. Если оператор Эрмитов, то матричные элементы обладают свойствами эрмитости:

$$V_{mn} = V_{nm}{}^{*}$$

При учете данного соотношения сразу получится результат, что вероятность прямых и обратных переходов совпадает.

Также надо ответить на вопрос, что нужно для того, чтобы в таких условиях произошел переход. Для этого надо, чтобы внешнее поле имело резонансную частоту. Но этого недостаточно. Очень важно, чтобы $V_{mn} \equiv 0$. Так как если матричный элемент ноль, то вероятность перехода равна нулю. Этот признак можно проиллюстрировать примером.

В рамках такого приближения переходы между уровнями состояния с одинаковой четностью запрещены. А именно в дипольном приближении:

$$\widehat{V} = -\widehat{d}\ E$$

Все вышерассматриваемое является полуклассическим приближением, когда вещество $\widehat{d}$ описывается квантовым образом, а внешнее поле E описывается классическим. Оператор взаимодействия излучения с веществом $\widehat{V}$ имеет два множителя в разложении в дипольный момент. На уровне размерности:

$$\widehat{\vec{d}} = \sum_i e_i\ \widehat{\vec{r}_i}$$

В простом случае одной частицы, например, размер атома равный боровскому радиусу:

$$e\ r \sim e\ a_0 \sim 10^{-10}\ 10^{-8} \sim 10^{-18}\ \text{СГСЕ}$$

Конечная величина в терминах дипольного момента называется **1 дебай**, то есть произведение заряда электрона на боровский радиус.

Значит, матричный элемент, который фигурирует в формуле, будет:

$$V_{mn} \sim e \int d^3r \; \phi_m{}^* \; r \; \phi_n$$

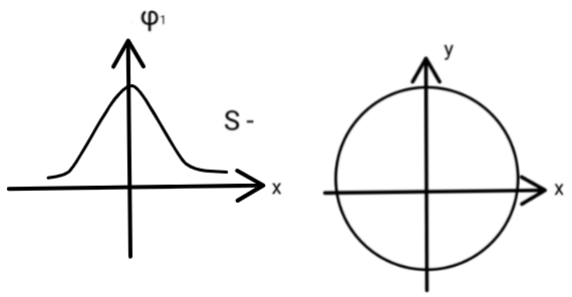

Рис. 2.2. Волновая функция на S орбиталей

На рисунке изображена пространственная зависимость волновой функции на S орбиталей. Профиль этой функции выглядит как конусоида, а сверху это выглядит как круг. Симметричное распределение.

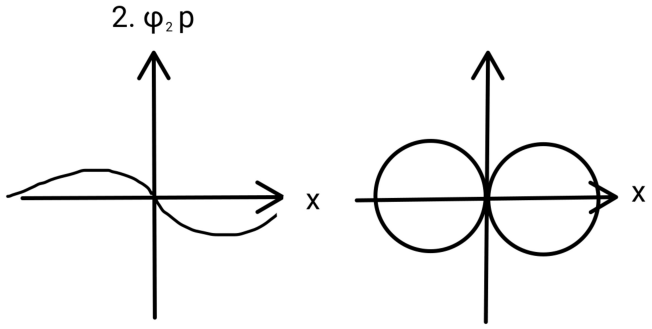

Рис. 2.3. Распределение электронной плотности на p орбиталей

Таким образом, существует симметричное распределение и антисимметричное.

В заключение необходимо оценить матричный элемент дипольным приближением:

$$Vmn \sim D_{mn},$$

где величина d_{mn} порядка 1-го дебая, радиус бора умножить на заряд электрона. То есть энергия возмущения под действием электрического поля. Также можно посчитать энергию возмущения под действием магнитного поля:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$V = -\mu\ H,$$

где

$$mu = \frac{e\hbar}{2mc} \sim \frac{10^{-10}\ 10^{-27}}{10^{-27}10^{10}} \sim 10^{-20}$$

При этом дипольный момент 10^{-18}, то есть разница в 2 порядка. Так как вероятность перехода пропорциональна квадрату матричного элемента, то разница в 4 порядка. Это один из мощных факторов, которые заставляют рассматривать электродипольные переходы.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3. Переходы в монохроматическом поле. Уширение спектральных линий. Золотое правило Ферми

Краткое содержание предыдущей лекции

Рассматриваются переходы во внешнем поле двухуровневой системы. Было решено уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar\dot{\psi}(r,t) = \mathcal{H}\psi(r,t)$$

Гамильтониан представлялся поэтапно. Первая часть: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$, то есть невозмущенная задача, когда нет внешнего поля. Затем было добавлено внешнее возмущение, зависящее от времени:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} + V(t)$$

Следующая часть: дифференцирование уравнения Шрёдингера было переписано в другом виде и названо **уравнением Шрёдингера в энергетическом представлении гамильтониана**. Далее показано, как коэффициенты между собой связываются, искалась волновая функция в виде ряда:

$$\psi(r,t) = \sum_n C_n(t)\ \Phi_n(r,t)$$

Далее действие по теории возмущения: была выписана цепочка уравнений, где совпадают степени внешнего возмущения слева и справа. Нулевое слагаемое тривиальное (ничего не зависит от времени), первое слагаемое линейное, когда решение пропорционально первой степени внешнего возмущения поля. Также было введено дипольное приближение:

$$\hat{V} = -\hat{d}\,E,$$

где $\hat{V}$ – энергия возмущения;

$\hat{d}$ – дипольный момент;

E – напряженность внешнего поля, которая действует на систему.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Все пока происходит в рамках полуклассического приближения, когда оператор дипольного момента относится к веществу, то есть квантуется, а поле представляется классическим образом.

Также производились оценки, то есть говорится, что все, что происходит в нашей науки – это оптический диапазон. Масштабы величин $\lambda \sim 10^{-4}$см. А характерные масштабы соответствующего матричного элемента, т.е. матричные элементы через оператор возмущения (переход к матричным элементам дипольного момента):

$$d \sim e\ a_0 \sim 10^{-10}\ 10^{-8} \sim 10^{-18}\ \text{СГСЕ(1Дб)}$$

В данной науке занимаемся электро - дипольными переходами, потому что магнито - дипольные на 2 порядка меньше, а в квадрате 4 порядка. Также была затронута условная вероятность, где двухуровневая система:

$$P_{mn} = P_{nm}(m,t\big|n,t_0) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_0}^{t} dt'\ V_{mn}\ e^{i\omega_{mn}t'}\right|^2$$

Приближение вращающейся волны. Режимы включения внешнего поля. Скорость перехода

Чтобы двигаться далее, необходимо воспользоваться одним правилом. Гораздо удобнее работать с экспонентами, чем с тригонометрией. Поэтому обычно электрическое поле, которое является классической величиной, удобнее представлять в виде экспоненты (это комплексная величина):

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[E, e^{-i\omega t} + E_0\ {}^*e^{i\omega t}\right]$$

Это комплексно сопряженное. Для этого есть известное правило – если к числу прибавить его же, но комплексно сопряженное, то получатся две реальные части этого числа:

$$A + A^* \ = 2R(A)$$

То есть поле – наблюдаемая действительная величина. Так как содержится гармоническая зависимость от времени, то применять синусы и косинусы неудобно. Поэтому лучше использовать вышеуказанный прием.

E_0 – const, то есть в спектре поля присутствует гармоника. Также эта величина может зависеть от времени.

Далее подставляем в вышеуказанную формулу, так как $V_{mn} = -d_{mn}E$:

$$P_{mn} = \left\| \frac{d_{mn}E_0}{2\hbar} \right\|^2 \left\| \frac{exp\left\{ i(\omega_{mn} - \omega)t \right\} - 1}{i(\omega_{mn} - \omega)} + \frac{exp\left\{ i(\omega_{mn} + \omega)t \right\} - 1}{i(\omega_{mn} + \omega)} \right\|^2$$

Далее продолжаются приближения. В $\omega_{mn} - \omega$ явно видно условие резонанса, то есть если частота внешнего поля совпадает с боровской частотой перехода, то надо ожидать роста эффекта. Но, поскольку слагаемых два, то дальше используется прием, который называется **приближением вращающейся волны**.

Электрическое поле на комплексной плоскости представляется двумя векторами с мнимой и реальной частями поля.

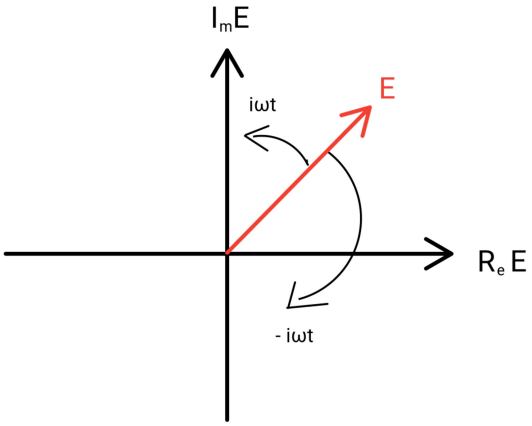

Рис. 3.1. Электрическое поле на комплексной плоскости

Один вектор вращается по часовой стрелке с частотой $-i\omega t$, а второй вектор вращается в противоположную сторону с частотой $i\omega t$. Это и есть *первый* момент приближения.

Второй момент приближения. Имеется два уровня m и n, если переход происходит снизу вверх, то это называется **вынужденное поглощение света**. Считается, что для него боровская частота положительная.

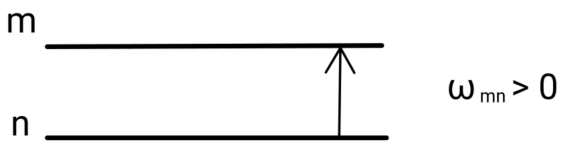

Рис. 3.2. Переход на двухуровневой системе

Теперь, учитывая эти обстоятельства и посмотрев на выражение $\omega_{mn} - \omega$, если положительная частота внешнего поля совпадает с положительной боровской частотой, то есть в случае вынужденного поглощения, тогда наступает резонанс для первого слагаемого, а для второго резонанса нет. И наоборот, если рассматривать переходы вниз, то это вынужденное испускание системы с уровня m на уровень n. В этом случае резонансным станет второе слагаемое. И в физике обычно отбрасывают те слагаемые, множители, которые по порядку отличаются от других.

Таким образом, рассмотрен резонансный случай или приближение вращающейся волны. Вращающейся, потому что есть две волны, и одна из них дает вклад в резонанс, а вторая нет. Поэтому отбрасывается та, которая не дает вклад в резонанс. Соответственно, это приводит к тому, что из этих двух слагаемых остается только одно, например, первое. Случай вынужденного поглощения света, и продолжается работа только с первым слагаемым:

$$P_{mn} = \left\| \frac{d_{mn}E_0}{2\hbar} \right\|^2 \left\| \frac{exp\left\{ i(\omega_{mn} - \omega)t \right\} - 1}{i(\omega_{mn} - \omega)} + \frac{exp\left\{ i(\omega_{mn} + \omega)t \right\} - 1}{i(\omega_{mn} + \omega)} \right\|^2 = \left\| \frac{d_{mn}E_0}{2\hbar} \right\|^2 \left(\frac{sin\frac{\omega_{mn}-\omega}{2}t}{\frac{\omega_{mn}-\omega}{2}} \right)^2$$

Значение интеграла на нижнем пределе – это единица в выражении, но физически эта единица зависит от того, каким образом включается внешнее поле.

Единица получалась, если:

$$V = V_0 \ cos\omega t, t \geqslant 0$$

$$V = 0, t \leqslant 0$$

Иначе, мгновенное включение поля. Поэтому единица на нижнем пределе была получена в предположении того, что до нулевого момента времени внешнее возмущение не существовало. Оно включилось мгновенно в виде косинуса.

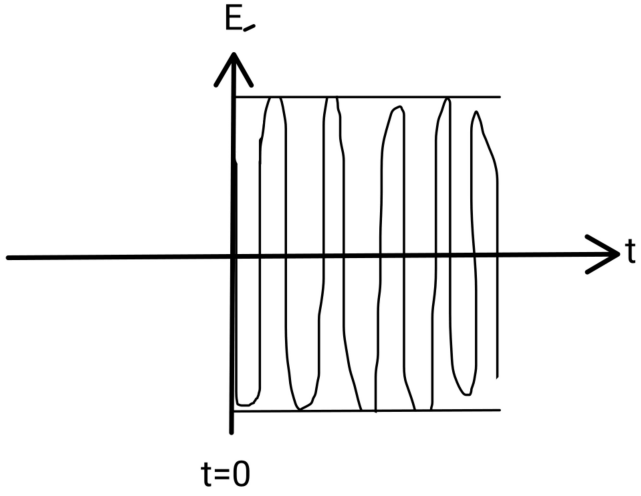

Рис. 3.3. Мгновенное включение внешнего возмущения

Также есть адиабатический режим:

$$V \sim V_0 e^{\delta t}\ cos\omega t, \delta \geqslant 0$$

Тогда поле будет экспоненциально нарастать до какой-то величины при адиабатическом включении.

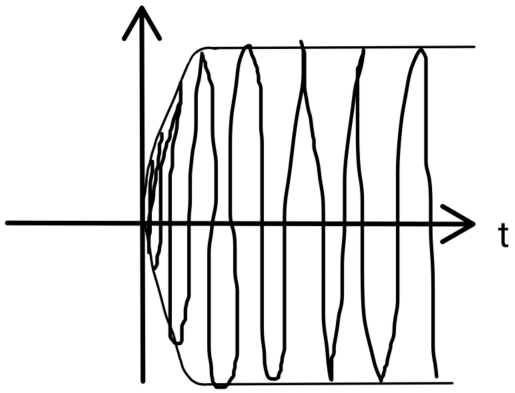

Рис. 3.4. Поле при адиабатическом включении

При этом $e^{\delta t}$ – экспоненциальный фактор, который потом выключается, но подчеркивает, как поле нарастает во времени по экспоненте при маленьких временах.

В выражении стоит единица, подразумевая, что характер включения поля мгновенный. Но правильнее писать:

$$exp\left\{i(\omega_{mn}-\omega)t\right\}-\sigma,$$

где σ – это значение интеграла на нижнем пределе.

Продолжая работать с функцией, будет рассмотрен предел

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{sin\frac{\tilde{\omega}t}{2}}{\frac{\tilde{\omega}}{2}}\right)^2=2\pi\ t\ \delta(\tilde{\omega})$$
$$\tilde{\omega}=\omega_{mn}-\omega$$

Это одно из представлений ω-функции. Также есть другое представление:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int dye^{ixy}$$

Если подробнее, рассматривая предел:

$$\lim_{t\to\infty}\underbrace{\frac{sin^2\alpha t}{\pi\alpha^2 t}}_{=A(t)}$$

1) Если $\alpha\neq 0$, то предел:

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=0$$

2) Если $\alpha=0$, то предел:

$$\lim\to\infty$$

3) По площади единица дает функцию:

$$\int d\alpha\ \frac{sin^2\alpha t}{\pi\alpha^2 t}=[\alpha t=\xi]=\frac{1}{\pi}\frac{\int d\xi}{t}\frac{sin^2\xi}{\alpha\xi}-\frac{1}{\pi}\int\frac{sin^2\xi}{\xi^2}d\xi$$

Далее необходимо переписать выражение для вероятности перехода при больших временах:

$$P_{mn} = \left\| \frac{d_{mn}E_0}{2\hbar} \right\|^2 2\pi t \delta(\tilde{\omega})$$

Также есть второе представление, когда нет предела:

$$P_{mn} = \left\| \frac{d_{mn}E_0}{2\hbar} \right\|^2 t^2 sinc^2(\frac{\tilde{\omega}}{2}t)$$

Теперь можно разобрать физически, начиная с формулы без предела. Функция $\frac{sinx}{x}$ показывает близость к резонансу.

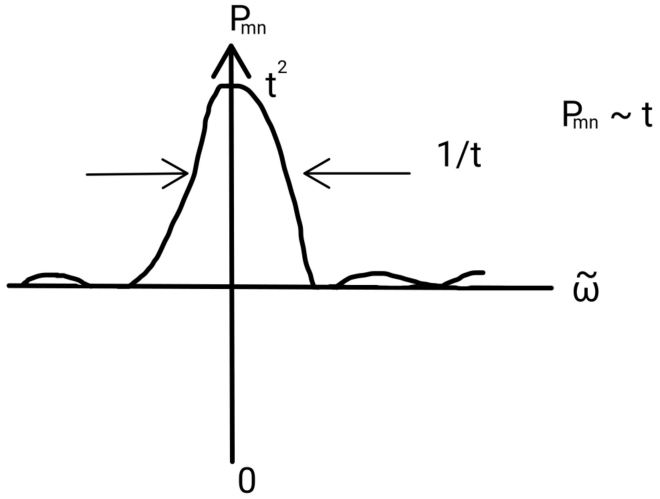

Рис. 3.5. Интегральная формула по всем частотам

С другой стороны, если взять точный резонанс, то $\frac{sinx}{x} = 1$. Поэтому в максимуме вероятность перехода между парой уровней под действием резонансного поля пропорционально t^2. При точном резонансе вероятность квадратично зависит от времени. Если резонанс неточный, интегральная формула берется, и вероятность будет пропорциональна времени.

Теперь обращаясь к первой формуле, когда очень долго наблюдают за системой $t \to \infty$. Пропорциональность вероятности перехода времени дает основание ввести более полезную величину – скорость перехода:

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{t} = \left\| \frac{d_{mn}E_0}{2\hbar} \right\|^2 2\pi t \delta(\tilde{\omega})$$

Данная величина уже не зависит от времени.

Уширение спектральных линий. Время жизни. Золотое правило Ферми. Частота Раби. Переходы между расщепленными уровнями

В предыдущих лекциях утверждали, что в терминах двухуровневой системы существование энергии вертикальной оси (населенности) и уровней энергии дает факт, что уровни энергии бесконечно узкие.

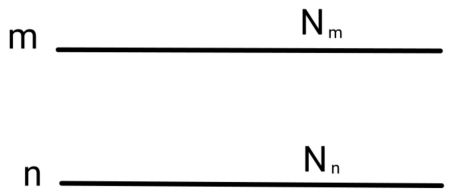

Рис. 3.6. Уровни энергии

В частотном спектре это представлено как дельта - функция. В жизни такого не бывает, всегда уровни уширены. Если взять сопряженную величину – время (для бесконечно узких спектральных линий время жизни – бесконечность), то выводится конечное время жизни. Это реалистичное условие, которое необходимо рассмотреть, – основные механизмы уширения спектральных линий.

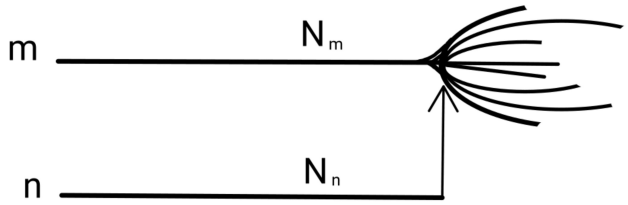

Рис. 3.7. Уширение спектральных линий

Допустим, что нижний уровень – основной. Уширение может быть различное: дискретное, непрерывное. Но на данный момент пусть будет непрерывное. Таким образом, верхний уровень уширяется.

Принцип заключается в том, что скорость перехода определяется дельта - функцией для случая точного резонанса, когда время жизни бесконечно. Физические причины уширения могут быть, например: некое ограниченное пространство – колба, там летают атомы, каждый из которых представляет собой квантовую систему, с которой взаимодействует поле. Атомы летают потому, что есть термодинамическая температура у стенок, есть распределения по скоростям Максвелла. Распределение по скоростям – это гауссоида вида $e^{-\frac{x^2}{a^2}}$. Где x – переменная (частотная отстройка), a – параметр задачи гауусоиды, ширина.

Если была бы неподвижная квантовая система, то есть один атом зажат, то в нем частота перехода ω_{mn}. Если атом двигается, то частота смещается:

$$\omega_{mn} \to \omega_{mn} + \vec{K}\vec{\mathcal{V}},$$

где $\vec{K}$ – волновое число;

$\vec{\mathcal{V}}$ – скорость волнового числа.

Эффект Доплера. Если он двигается от объекта, то частота перехода уменьшается, а если к объекту, то увеличивается. Атом селектирует в зависимости от его скорости частоты внешнего поля. Но поскольку атомов много, то необходимо выражение для скорости или для вероятности перехода проинтегрировать по скоростям. Значит частоты перехода будут разные, и из всех атомов в колбе только некоторые будут попадать в резонанс с фиксированной частотой поля.

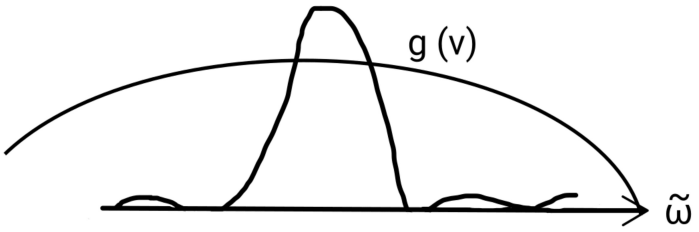

Рис. 3.8. Частотная отстройка

Когда производится интегрирование некой формулы по функции распределения, то обращается внимание на масштабы величин. Если функция $g(\mathcal{V})$ очень широкая, а гауссоида узкая, то интегрирование сводится к интегрированию дельта-функции. Это и есть физический прием.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Интегрировать дельта-функцию комфортно, потому что:

$$\int dyF(x-y)\delta y = F(x)$$

Узкое распределение, которое сидит в формуле для вероятности, для скорости перехода, интегрируется по широкому распределению. После интегрирования вместо узкой дельта - функции остается широкая функция распределения.

Поэтому на выходе формула скорости перехода превратится в следующую формулу:

$$W_{mn} = \left\| \frac{d_{mn}E_0}{2\hbar} \right\|^2 2\pi g(\widetilde{\omega})$$

Это форм - фактор, та функция, которая реально описывает спектральное распределение в формуле.

Существует несколько механизмов уширения. Первый, который уже был рассмотрен, – **механизм Доплера**. Он отражает тот факт, что у каждой квантовой системы каждый атом имеет свою скорость, есть распределение Гаусса. Причем ширина этого распределение $\Delta\omega_{\text{Доплера}} \sim \omega_{mn}\frac{\overline{v}}{c}$.

Второй механизм называется **столкновительный**: $\Delta\omega_{\text{ст}} \sim \frac{2}{\tau}$. τ – среднее время между соударениями. Квантовые системы сталкиваются между собой, что тоже приводит к характерному уширению уровня. Уширение описывается распределением Лоренца: $\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}$. Если ввести нормировку на единицу по площади, то это будет:

$$g_{\text{л}} \sim \frac{\frac{2}{\pi\Delta\omega}}{1+\left(\frac{2\widehat{\omega}}{\Delta\omega}\right)^2}$$

Интеграл данной функции будет равен 1.

Таким образом, механизм Лоренца заключается в том, что за счет давления системы сталкиваются, и время (спектральная ширина) ограниченно средним временем между ударениями.

Третий механизм следует из того, что, если время не очень велико, то характер зависимости будет $\frac{sinx}{x}$. Механизм называется **уширение благодаря конечному времени взаимодействия**. То есть поле взаимодействует с квантовой системой,

конечное время маленькое, тогда характер (ширина линии) будет описываться фактором $\frac{sinx}{x}$.

Разные функции, нормированные на одну и ту же величину, чтобы можно было сравнивать по шкале.

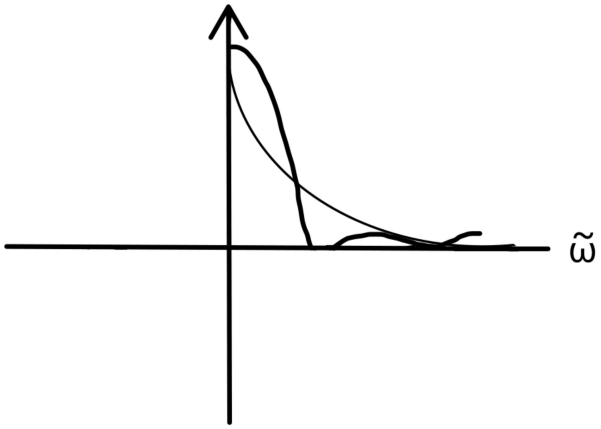

Рис. 3.9. Частотная отстройка

Хвосты функции Лоренца гораздо длиннее, чем хвосты двух других механизмов. Но все эти механизмы необходимо учитывать.

Последняя выведенная формула называется **золотым правилом Ферми**:

$$W_{mn} = \left\| \frac{d_{mn}E_0}{2\hbar} \right\|^2 2\pi g(\tilde{\omega})$$

Данная формула показывает: слева стоит величина W_{mn}, которая назвается скорость переходов, то есть вероятность в единицу времени. Размерность $[\frac{P}{t}] =$ Гц, то есть штуки в секунду (скорость перехода или вероятность в единицу времени). Также важно заметить, что фигурирует квадрат модуля – это величина и есть частота.

Комбинация $\frac{d_{mn}E_0}{\hbar} = \Omega$ – **частота Раби**. Она представляет собой силовой параметр перехода.

Об уширении линий. 1 уровень в приближении, когда время жизни системы на уровне бесконечно. Далее рассмотрим дискретный случай, то есть расщепление как набор подуровней.

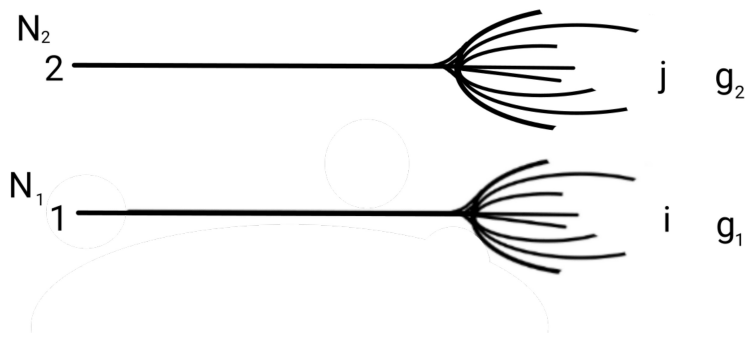

Рис. 3.10. Дискретное уширение уровней

i и j – номера подуровней, g_1 и g_2 – числа уровней. Обычно считается, что распределение населенности по подуровням равномерно, но не всегда. Если равномерно, то $N_{1i} = \frac{N_1}{g_1}$ и $N_{2j} = \frac{N_2}{g_2}$. Но это не так, потому что чем выше энергия, тем меньше вероятность в равновесной системе.

Когда не учитывали распределения и расщепления уровней, то было:

$$\dot{N}_1 = (N_1 - N_2)\ W_{21}$$

Теперь с учетом вырождения, например, взяв один подуровень i. Для этого необходимо просуммировать переходы на этот конкретный подуровень со всех подуровней с индексом j. Тогда:

$$\dot{N}_{1i} = \sum_{j=1}^{g_2} N_{2j}\ W_{2j,1i} = \frac{N_2}{g_2} \sum$$

Соответственно, если интерес полного числа переходов в зоне i, то необходимо еще просуммировать по N_1:

$$\dot{N}_1 = \sum_{i=1}^{g_1} \dot{N}_1 i = \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{g_2} \dots$$

В итоге формула без учета распределения и расщепления перейдет:

$$\dot{N}_1 = (N_1 - N_2)\ W_{21} \to \left(\frac{N_2}{g_2} - \frac{N_1}{g_1}\right) \sum_{i=1,j=1}^{g_1,g_2} W_{2j,1i}$$

Таким образом, если учитывать вырождение уровней, то есть их раасщепление, то мнемоническое правило, что населенность и скорость перехода переходят:

$$N \to \frac{N}{g}$$
$$W \to \sum W_{2j,1i}$$

Одно существенное приближение, что распределение по уровням равномерно.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4. Переходы в случайном поле

Напоминание из предыдущей лекции

Были разобраны переходы в монохроматическом поле. А также было получено «золотое правило Ферми», выражение для скорости вынужденных переходов под действием внешнего монохроматического поля. Поле представлялось в виде:

$$E(t) = \frac{E_0\ e^{-i\omega t}}{2} + \text{к.с.} \tag{4.1}$$

Присутствует одна гармоника в данном спектре. В итоге получилось, что скорость переходов пары уровней представляет собой:

$$W_{21} = 2\pi \left| \frac{d_{21} E_0}{2\hbar} \right|^2 g\underbrace{(\omega - \omega_{21})}_{\tilde{\omega}} \tag{4.2}$$

где g – форм-фактор, та функция, которая описывает в формуле уширение;

ω – частота поля;

ω_{21} – боровская частота перехода между парой уровней.

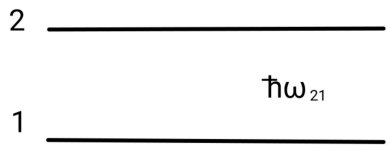

Рис. 4.1. Разность энергии между парой уровней

Также рассматривались разные механизмы уширения: Доплера, который описывается функцией Гаусса, контур Лоренца, то есть столкновительное уширение. У Лоренца только один параметр – ширина. Функция Лоренца имеет следующий вид:

$$g_{\text{л}} \sim \frac{\frac{2}{\pi\Delta\omega}}{1 + \left(\frac{2\hat{\omega}}{\Delta\omega}\right)^2}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отличительным признаком является наличие $\widehat{\omega} = 0$ (ширина лоренциана). То есть частота поля совпадает с частотой перехода. Функцию Лоренца можно выбирать поразному. Данная функция нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\text{л}}(\widehat{\omega}) d\widehat{\omega} = 1$$

Основной формулой является «*золотое правило Ферми*». Но в эксперименте обычно меряют не скорость перехода, а, например, сечение поглощения или коэффициент поглощения, усиления.

Выведем переходные формулы, которые позволяют перейти от теоретической формулы к реально наблюдаемым величинам в эксперименте, то есть к сечению. Если знать сечение, то можно легко найти коэффициент усиления или поглощения: $\alpha = \sigma \Delta N$.

Правила перехода простые, но надо знать некоторые соотношения. Во-первых, интенсивность излучения связана с плотностью потока фотонов $\sigma, I = \hbar\omega F$. Во-вторых, скорость перехода связана линейно с плотностью потока фотонов через сечение: $W = \sigma F$. В-третьих, интенсивность выражается таким образом: для плоской волны в разреженном газе плотность энергии (энергия в единицу объема) необходимо домножить на скорость света при показателе света равный единице:

$$\frac{\mathcal{E}}{V} C \equiv I = \frac{|E_0|^2}{8\pi} C$$

Теперь есть соотношения для того, чтобы явно выразить сечение через формулу:

$$\sigma = \frac{W}{F} = \frac{W}{I}\hbar\omega = \frac{\hbar\omega 2\pi |d_{21}|^2 |E_0|^2 g\ 8\pi}{4\hbar^2 |E_0|^2 C} = \frac{4\pi^2 |d_{21}|^2 \omega g}{\hbar C}$$

Если в выражении Лоренца $\widehat{\omega} = 0$, тогда:

$$g_{\text{л}} \to \frac{2}{\pi \Delta\omega}$$

В резонансном случае сечение представляет собой:

$$\sigma|_{\omega=\omega_{mn}} = \frac{8\pi |d_{21}|^2 \omega_{21}}{\hbar C \Delta\omega} \tag{4.3}$$

Соответственно можно будет также найти α – коэффициент поглощения усиления. Также можно получить квадрат модуля матричного элемента.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В точном резонансе, если скорость перехода по золотому правилу Ферми, то скорость вынужденных переходов под действием поля будет:

$$W_{21} \sim \frac{\Omega^2}{\Delta\omega} \tag{4.4}$$

По определению частота Раби:

$$\Omega = \frac{d_{21}E_0}{\hbar}$$

По размерности dE – энергия возмущения, в единицах постоянной Планка получается частота.

Переходы в случайном поле. Корреляционная функция и её измерение. Мгновенная интенсивность. Видность. Время когерентности и длина когерентности

Разберем случай, когда поле не монохроматическое. Есть выражение для разложения в виде действительной и мнимой части суммы электрического поля, которое используется для монохроматического поля. Его называют **квазимонохроматическое поле**, то есть случайное. Представление лишь немного меняется:

$$E(t) = \frac{1}{2}E_0(t)\ e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}E_0\ ^*\ (t)\ e^{i\omega t} = E^+ +\ E^- = 2Re\ E^+$$

E_0 – это амплитуда. Для монохроматической волны $E_0 - -const$, а для случайного поля амплитуда медленно меняется со временем. Если говорят, что медленно меняется, то это тождественно квазимонохроматическому полю. Ширина спектра поля много меньше, чем несущая частота поля: $\Delta\omega \ll \omega$.

По определению:

$$E^+ \equiv \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t}E(\omega)$$
$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t}E(t) = E^*(-\omega),$$

где $E(\omega)$ – спектр поля.

На комплексной плоскости это изображено на (Рис. 4.2). Вектор E^+ вращается по часовой стрелке, проекция на действительную ось – $\frac{E(t)}{2}$.

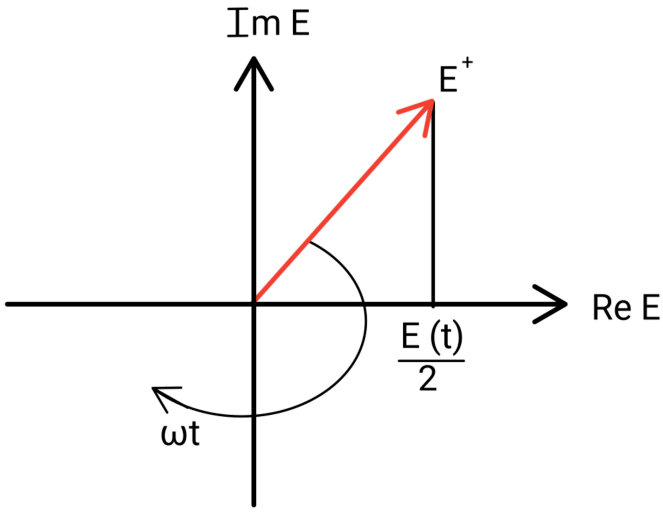

Рис. 4.2. E^+ на комплексной плоскости

Если бы волна была монохроматическая, то есть от времени амплитуды бы не зависели, тогда движение вектора происходило бы по окружности. Поскольку есть зависимость от времени, то вектор описывает спиралевидную траекторию, но не окружность. Масштаб изменений за один оборот определяется зависимостью от времени.

При решении уравнения Шрёдингера была получена волновая функция разложения в ряд, коэффициенты C зависели от времени. Явный вид зависимости от времени данных коэффициентов во втором порядке теории возмущения:

$$C^{(2)} = \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'[-d_{21}E(t)]e^{i\omega_{21}t'}$$

Если предел раздвинуть, то это Фурье преобразование.

Далее был найден квадрат модуля данной коэффициента в монохроматическом поле, и получилась вероятность. Но теперь так делать не корректно. Нужно найти квадратичную форму, которая по физическому смыслу была бы вероятностью. Надо коэффициент $C^{(2)}$ умножить на комплексно-сопряженный квадрат модуля.

Возникает два момента времени, то есть два слагаемых перемножаются. Если моменты времени одинаковые, то это автокорреляционная функция. Если моменты времени раздвигать и искать средние значения, то возникает понятие «корреляционная функция». В данной функции будет стоять произведение двух полевых множите-

лей, взятых в разные моменты времени, и среднее. И поскольку важны наблюдаемые величины, то необходимо усреднить:

$$< P >= \frac{1}{\hbar^2} \int \int dt' \; dt'' \; |d_{21}|^2 \; < E(t') \; E^*(t'') > e^{i\omega_{21}(t'-t'')}$$

Произведение двух полей в разные моменты времени в <> называется **корреляционной функцией поля**. Такая функция имеет собственное обозначение:

$$G(t',t'') =< E(t') \; E^*(t'') >$$

Величина G – тензор, поэтому ее необходимо снабдить пространственными индексами:

$$G_{\alpha\beta}(t',t'') =< E_\alpha(t') \; E^*_\beta(t'') > \tag{4.5}$$
$$\alpha, \beta = x, y, z$$

Значения полей берутся не только в разные моменты времени, но и в разные координаты. Но в основном будем полагать, что они совпадают, и в этом случае автокорреляционная функция, когда $\alpha = \beta$.

Значение корреляционной функции можно измерить по-разному. Один из случаев – **интерферометр Маха-Цендера**. Два полупрозрачных зеркала, которые половину отражают наверх, а половину пропускают, два глухих зеркала, два полупрозрачных выхода.

Если плоская волна есть на входе, а затем расщепляется, зеркала вносят задержку. Нижнее глухое зеркало либо призму можно двигать. Суть состоит в том, что надо сбить на правом верхнем зеркале две компоненты поля. А они берутся из исходного с задержкой. Это и является полным аналогом экспериментальной реализации выражения.

$$E(t) = \frac{E_1(t) + E_2(t)}{2} = \frac{E(t') + e(t'')}{2}$$

$E(t)$ – поле на выходе интерферометра. Поскольку наблюдаемое в оптике поле осциллирует с оптической частотой 10^{15}Гц, никакой детектор пока не отслеживает такие колебания. Все детекторы в оптике квадратичны, то есть они отслеживают

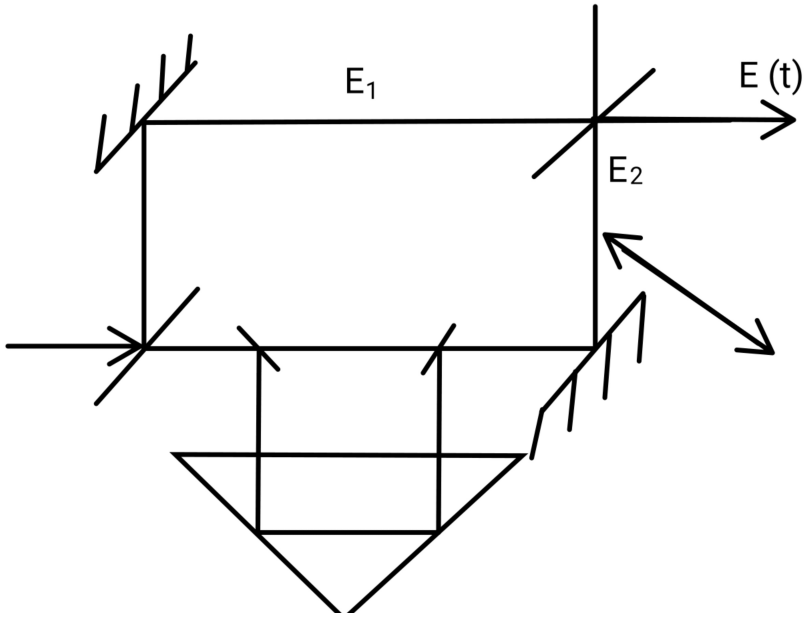

Рис. 4.3. Интерферометр Маха-Цендера

квадрат модуля от величины, регистрируют интенсивность. Картина, которая наблюдается либо детектором, либо на экране, оцифровывается и представляет собой результат возведения в квадрат по модулю суммы.

Существует другой интерферометр – **Майкельсона**. Установлены зеркало, которое делит пучок пополам, и два глухих зеркала. Пучок отщепляется, отражается назад, и внизу можно поставить либо детектор, либо глаз и наблюдать интерференционную картину, аналогичную предыдущей.

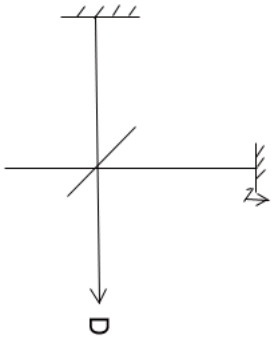

Рис. 4.4. Интерферометр Майкельсона

Единственная разница в данном интерферометре, что, если глухое правое зеркало

масштабировать в два раза, то оно чувствительнее, чем в другом случае. Элементарный шаг зеркала увеличивает длину плеча в два раза.

Теперь приведем наблюдаемое значение интенсивности на выходе интерферометра к тому значению корреляционной функции, которые выведено ранее. Для этого понадобится промежуточная вспомогательная величина $I(t)$, которая называется **мгновенная интенсивность**. По определению она представляет собой:

$$I(t) \equiv \frac{\overline{E^2(t)}}{2} \tag{4.6}$$

Когда ставим черту усреднения по высокочастотным колебаниям, это означает усреднение по быстрой осцилляции поля, с частотой колебаний этого поля. То есть в задаче есть два параметра. Быстрая осцилляция – это частота 10^{15}Гц, то, что стоит в экспоненте, – $i\omega t$. Период в оптическом диапазоне – фемтосекунда. И есть медленная частота – скорость изменения огибающей, амплитуды E_0. В описанном случае имеется в виду усреднение по 10^{15}Гц. Распишем:

$$I(t) \equiv \frac{\overline{E^2(t)}}{2} = \frac{\overline{(E^+ + E^-)^2}}{2} = \frac{\overline{E^{+2} + 2E^+E^- + E^{-2}}}{2} = E^+E^- \equiv \left|E^+\right|^2 = \frac{1}{4}\left|E_0(t)\right|^2 \tag{4.7}$$

По определению, $E(t)$ – сумма положительных частот сигнала и отрицательной части. E^+ – это огибающая E_0 на экспоненту $E^{-i\omega t}$. Если возвести E^+ в квадрат, в экспоненте появится гармоника $2\omega t$. Усредним по осцилляциям, и от первого слагаемого получится ноль. Произведение числа и комплексно-сопряженного – квадрат модуля E^+. Остается усреднение по медленной частоте.

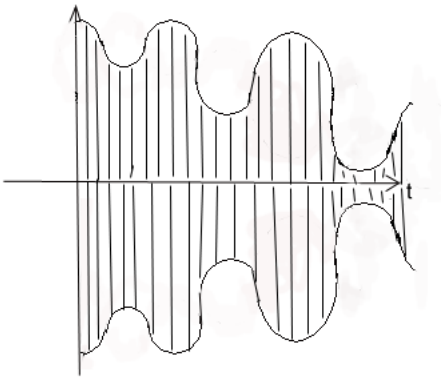

Рис. 4.5. Изменения амплитуды внешнего поля

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На временной шкале (Рис. 4.5) абстрактно изображены медленные изменения, не обязательно периодические, амплитуды внешнего поля с некой высокочастотной набивкой. Медленная зависимость от времени – огибающая, быстрая – это экспонента. Мгновенная интенсивность – это то, что можно наблюдать глазом, если изменения не слишком быстрые.

В интерферометре Маха-Цендера $E(t) = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$. $E_1 = E_1^+ + E_1^-$, а $E_2 = E_2^+ + E_2^-$. $E_1^- E_2^+ + E_1^+ E_2^-$ – сумма числа и комплексно-сопряженного. Посчитаем значение интенсивности на выходе интерферометра:

$$\begin{aligned} I(t) \equiv \frac{\overline{E^2(t)}}{2} &= \frac{\overline{\{(E_1^+ + E_1^-) + (E_2^+ + E_2^-)\}^2}}{4 \cdot 2} = \\ &= \frac{1}{4}\{I_1(t) + I_2(t) + \overline{(E_1^+ + E_1^-)(E_2^+ + E_2^-)}\} = \\ &= \frac{1}{4}\{I_1(t) + I_2(t) + E_1^- E_2^+ + E_1^+ E_2^-\} = \\ &= \frac{1}{4}\{I_1 + I_2 + 2Re(E_1^- E_2^+)\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Предположим, что зеркала в интерферометре симметричны, и $I_1 = I_2$. По амплитуде эти поля одинаковые, разница только во временном сдвиге. Усредним полученное выражение по медленным изменениям во времени огибающей:

$$< I' >= \frac{1}{2}\{< I > + Re \underbrace{< E_1^- E_2^+ >}_{G(t_1 t_2)}\} \tag{4.9}$$

Стационарный случай. В стационарном случае функция G зависит только от разности двух времен. К каждому из аргументов прибавим одно и то же произвольное значение t_0, и значение функции не изменится:

$$G(t_1, t_2) \xrightarrow{\text{стац}} G(t_1 - t_2) \equiv G(t_1 + t_0, t_2 + t_0)$$

t_0 – любое. Если, например, $t_0 = -t_1$, то получим $G(0, t_1 - t_2)$, то есть τ:

$$\tau = t_1 - t_2$$

$$G(t_1, t_2) \xrightarrow{\text{стац}} G(\tau) \tag{4.10}$$

Это *автокорреляционная функция времени.* Теорема Винера – Хинчина связывает корреляционную функцию и спектральную плотность. *Спектральную плотность*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

можно вывести через Фурье-преобразование, связанное с корреляционной функцией поля:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G\tau \tag{4.11}$$

Интерферометр Брауна – Твисса использует корреляционную функцию более высокого порядка, то есть четыре поля E_1, E_2, E_3, E_4. Иногда это называют *корреляционной функцией интенсивности* I_1 и I_2. Каждая интенсивность – это два поля.

Часто вводят *нормированную корреляционную функцию*. Ее обозначают так: $g(t_1, t_2)$.

$$< I' >= \frac{< I >}{2}\{1 + Re \cdot g(t_1, t_2)\}$$
$$< E_1^- E_2^+ >= \frac{1}{4} < E*(0)E(\tau) > e^{i\omega\tau}$$

Реальная часть Re от экспоненты – это косинус.

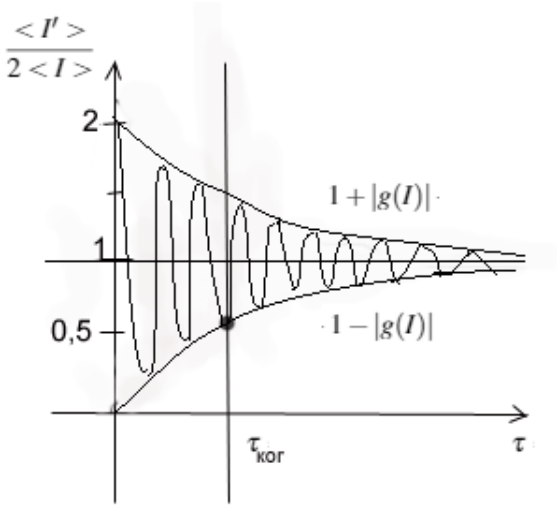

Рис. 4.6. Время когерентности

На (Рис. 4.6) τ – время разбалансировки интерферометра. Если $\tau = 0$, то плечи равновеликие. Тогда интенсивность на выходе всегда максимальна. Через половину периода она станет практически нулевой. Медленная зависимость и стремление к единице осцилляций показывает модуль корреляционной функции. Разность времен

– величина, которая показывает, насколько одно плечо длиннее другого в единице времени. *Видность* – размах колебания.

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Если видность падает до нуля, то она всегда максимальная. Там, где видность интерференционной картины падает в 2 раза, временной масштаб называется **временем когерентности**, или **временем корреляции**:

$$\tau_{\text{ког}} \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega} \tag{4.12}$$

Зная время когерентности, всегда можно оценить ширину спектра $\Delta\omega$, и наоборот. Другая величина с размерностью пространства - **длина когерентности**, которая равна произведению скорости света и времени когерентности:

$$L \equiv c\tau_{\text{ког}} \tag{4.13}$$

Пример 4.1. *Люминесцентная лампа*

Люминесцентные лампы устроены следующим образом: есть колба, а внутри нее ртуть. Ртуть в видимом диапазоне имеет три яркие линии, в ультрафиолете – одну яркую линию. Колба покрыта люминофором - веществом, которое под воздействием ультрафиолета начинает светиться во всем спектре. Если разбить лампу или снять люминофор, она будет светиться сине-голубым светом. Например, ртутные лампы без люминофора используют для дезинфекции в больницах.

Поскольку давление в лампе не очень высокое, то линия, которая вызывает свечение люминофора, узкая и определяется только давлением с уширением.

Воспользуемся интерферометром Майкельсона или Маха – Цендера. Поставим ртутную лампу напротив небольшой щели, чтобы образовался пучок света (Рис. 4.7):

Необходимо раздвинуть в пространстве или во времени L. Чтобы видность упала в 2 раза, нужно физически сместить зеркало на длину когерентности, равную примерно 10 см.

Когда еще не было лазеров, подобные лампы низкого давления использовали как монохроматический источник. Однако необходимо помнить, что кроме ультрафиолетовой линии в лампе есть желтые и зеленые линии. Их нужно отсекать какими-либо фильтрами.

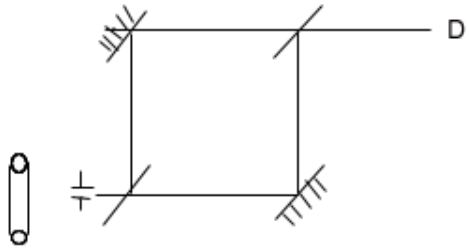

Рис. 4.7. Пример с люминесцентной лампой

Пример 4.2. *Газовый лазер*

С его устройством связано два момента. Во-первых, у газового лазера есть обратная связь – зеркала, которые обеспечивают полосу усиления. У резонатора есть потери. Они определяются потерями внутри и коэффициентами отражения. Во-вторых, газовый лазер (например, аргоновый, гелий-неоновый или гелий-кадмиевый) представляет собой замкнутый объем, в котором летают возбужденные молекулы и атомы. Поскольку они летают, то обязательно нужно учитывать доплеровское уширение (Рис. 4.8).

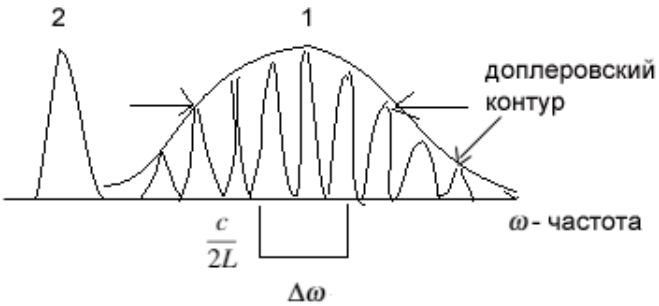

Рис. 4.8. Пример с лазером

Ширина линии на полувысоте достигает порядка ГГц. 1 ГГц = 10^9 Гц. Коэффициент отражения зеркал высокий - две-три девятки. Вся широкая линия будет испещрена модами резонатора. Они образуют спектр Фабри – Перо. Расстояние между соседними модами равно $\frac{c}{2L}$. У гелий-неонового лазера L равно 10 см. $\Delta\omega$ – масштаб.

$$\Delta\omega = \frac{3 \cdot 10^{10}}{2^{10}} \approx 10^9 \text{ Гц} \approx 1 \text{ ГГц}$$

В колокольчик Доплера попадает одна линия. Это называется «одномодовый лазер». Остальные линии расположены далеко. Как правило, зеркала стараются ста-

билизировать при помощи металлического кожуха. Для того, чтобы зафиксировать расстояние между зеркалами, используются варовые стержни. Очевидно, что сделать это с точностью до длины волны невозможно, поэтому эта одна мода всегда перемещается из стороны в сторону. Вторая мода не попадает в контур.

Пусть дается доплеровский контур. Из него резонатором вырезается узкая линия. В таком одномодовом лазере длина когерентности достигает десятков метров. Чтобы измерить, как в 2 раза падает видность, нужно в пределах одной лаборатории установить множество зеркал. Получится узкополосное излучение.

Пример 4.3. *Солнечный свет*

Если загнать свет в интерферометр и точно настроить разность длин плеч, то всегда автоматически будет устанавливаться полная видность интерференции. Далее достаточно сдвинуть зеркало на расстояние порядка λ. Ширина спектра излучения сравнима с несущей частотой. Смещение одного зеркала на порядок длины волны сразу же приводит к разрушению интерференционной картины.

Выведем выражение для вероятности:

$$P = \frac{1}{\hbar^2} \iint\limits_{t_0 \to -\infty}^{t \to +\infty} dt' dt'' \left|d_{21}\right|^2 e^{i\omega(t'-t'')} G(t'-t'') = \frac{2\pi}{\hbar^2} \left|d_{21}\right|^2 G(\omega_{21}) t$$

d_{21} – дипольный момент. Пределы интегрирования t_0 и t фиксированы. Пусть наблюдаем за системой за время много больше, чем время когерентности. Тогда эти пределы устремляются к $-\infty$. $\tau = t' - t''$.

Линейная зависимость вероятности перехода от времени позволяет вывести скорость переходов:

$$W_{21} = \frac{P}{t} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \left|d_{21}\right|^2 G(\omega_{21}) \tag{4.14}$$

Сравним полученную формулу с «золотым правилом Ферми» для монохроматического поля:

$$W = 2\pi \left|\frac{d_{21} E_0}{2\hbar}\right|^2 g(\omega - \omega_{21})$$

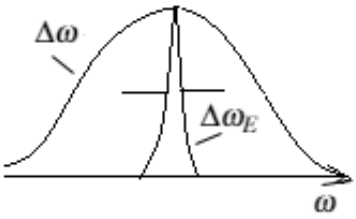

Рис. 4.9. Сравнение величин

Общее здесь – квадрат модуля матричного элемента дипольного момента в дипольном приближении. Вместо комбинации интенсивности E_0 и форм-фактора $g(\omega - \omega_{21})$ стоит спектральная плотность поля на частоте перехода.

На (Рис. 4.9) изображены две величины: $\Delta\omega$ – ширина линии перехода и $\Delta\omega_E \sim \frac{1}{\tau_{\text{ког}}}$ – ширина спектра поля, пропорциональная единице, поделенной на время когерентности. Если ширина спектра поля много меньше ширины линии перехода, то нужно использовать «золотое правило Ферми». Если наоборот, то нужно пользоваться вторым правилом. Для широкополосного поля нужно брать спектральную плотность поля на частоте перехода.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5. Коэффициент Эйнштейна. Яркость излучения

Спонтанные переходы. Коэффициенты Эйнштейна

Выражение, похожее на «золотое правило Ферми», но используемое для квазихроматического поля:

$$W_{21} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |d_{21}|^2 G(\omega_{21})$$

Энергия возмущения:

$$\hat{V} = -\hat{d}E$$

Преобразуем $G(\omega_{21})$ в спектральную плотность энергии:

$$\frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{< E^2 > + < H^2 >}{8\pi} = \frac{< E^2 >}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega 0} G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\omega G(\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \rho(\omega)$$

Плотность энергии – энергия в единице объема. Для плоской волны, изотропных случаев, немагнитных сред величины совпадают. $< E^2 >= G(\tau = 0)$. Эта величина связана со спектральной плотностью. Из преобразований видно, что:

$$G(\omega) = 2\pi\rho(\omega) \tag{5.1}$$

В случае изотропной среды:

$$G_{xx} = G_{yy} = G_{zz} = \frac{2\pi}{3}\rho(\omega) \tag{5.2}$$

На каждую компоненту приходится треть величины. В этом выражении были связаны спектр поля со спектральной плотностью энергии. Подставим формулу в выражение для скорости переходов:

$$W_{21} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |d_{21}|^2 G(\omega_{21}) = \frac{4\pi^2}{3\hbar^2} |d_{21}|^2 \rho(\omega) \equiv B\rho(\omega)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

B – один из коэффициентов Эйнштейна.

$$\boxed{B = \frac{4\pi^2}{3\hbar^2}\left|d_{21}\right|^2} \tag{5.3}$$

Скорость переходов под действием шумового поля пропорциональна спектральной плотности энергии. Коэффициент пропорциональности – коэффициент Эйнштейна B.

$$\omega_{21} = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{\hbar}$$

Если поле монохроматическое, оно будет резонансным. Частота поля совпадает с боровской частотой. В данном случае поле шумовое. У поля есть спектр. Рассмотрим кинетические уравнения применительно к шумовому полю. Для монохроматического поля:

$$\dot{N}_1 = W_{21}(N_2 - N_1) \to 0$$

N_2 – приход частиц на уровень, N_1 – их уход. Эта формула противоречива. Из нее следует ложное утверждение, потому что в стационарном случае, когда нет изменений во времени населенности, разность населенностей пытается выровняться, и наступает насыщение. Этого не может быть. Поэтому нужно дописать вручную спонтанные переходы.

Равновесное поле

Хорошая модель равновесного поля – замкнутая полость (Рис. 5.1). Термодинамическая температура стенок – T. Внутри – электромагнитное поле. Поскольку есть термодинамическое равновесие, то поле находится в равновесии со стенками, то есть оно имеет температуру T. Такое поле называется *равновесным*, или планковским, тепловым. С другой стороны, это довольно бессмысленная конструкция, потому что это поле надо уметь выводить. Поле существует в замкнутой полости, но оно бесполезно. Чтобы его вывести, нужно проделать отверстие, а отверстие нарушает равновесие. Есть разные способы выйти из этого противоречия: например, сделать маленькое отверстие или ввести коэффициенты серости.

В случае, когда есть термодинамическое равновесие, или когда действует равновесное поле, населенности распределены по закону Больцмана

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\hbar\omega_{21}}{kT}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

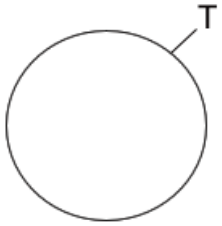

Рис. 5.1. Равновесное поле

В равновесном поле с температурой T устанавливается равновесная больцмановская разность населенности.

$$\dot{N}_1 = W_{21}(N_2 - N_1) + AN_2 \to 0 \tag{5.4}$$

Величина A имеет физический смысл и называется скоростью спонтанных переходов.

$$W_{21}(N_1 - N_2) = AN_2$$

$$W_{21} = B\rho$$

$$\frac{A}{B} = \rho(\frac{N_1}{N_2} - 1)$$

ρ – спектральная плотность энергии. Она определяется формулой Планка:

$$\rho = \frac{\hbar k^3}{\pi^2}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Берем спектральную плотность энергии поля на частоте перехода. k в первом множителе – волновое число, k во втором множителе – постоянная Больцмана. Волновое число:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{5.5}$$

Подставляем в формулу $\frac{A}{B}$ вместо ρ формулу Планка и получаем:

$$\frac{A}{B} = \rho(\frac{N_1}{N_2} - 1) = \frac{\hbar k^3}{\pi^2}$$

Также по размерности:

$$k = \frac{\omega}{c}$$

ω – циклическая частота.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{\hbar k^3}{\pi^2} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}$$

Итак:

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \tag{5.6}$$

Отсюда можно вычислить коэффициент A:

$$A = B\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} = \frac{4\pi^2}{3\hbar^2}\left|d_{21}\right|^2 \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} = \frac{4}{3}\frac{\left|d_{21}\right|^2 \omega^3}{\hbar c^3} \approx \frac{(10^{-18})^2(3\cdot 10^{15})^3}{3^3\cdot 10^{30}\cdot 10^{-27}} \approx \frac{10^9}{10^3} \approx 10^6 \approx 1\ \text{МГц} \tag{5.7}$$

Берем дипольный момент порядка Дебая – 10^{-18}. Частота – до середины видимого диапазона $3\cdot 10^{15}$ Гц.

Доплеровский механизм:

$$\Delta\omega_{\text{допл}} \sim 10^9 - 10^{10}\text{Гц} \tag{5.8}$$

Столкновительное:

$$\Delta\omega_{\text{ст}} \sim 10^8\text{Гц} \tag{5.9}$$

Естественное:

$$\Delta\omega_{\text{ест}} \approx A \sim 10^6\text{Гц} \tag{5.10}$$

Таким образом, коэффициент Эйнштейна A выражает скорость спонтанных переходов, не зависит от внешнего поля и равен порядка 1 МГц. Увеличение частоты означает уменьшение длины волны, посинение спектра. Чем выше частота, тем

больше скорость спонтанных переходов. В свое время это было существенным препятствием для создания ультрафиолетовых и рентгеновских лазеров, потому что спонтанные переходы, как и любой механизм релаксации, препятствуют созданию инверсной населенности, а инверсная населенность – это один из «китов», на которых стоит принцип действия лазера.

Для описания спонтанного излучения в рамках полуклассической теории может быть использована феноменологическая модель излучения атомами цугов волн. Эта модель пропорциональна произведению ступенчатой функции Хевисайда и некой затухающей экспоненты $e^{-\frac{at}{2}}$:

$$E^*(t) \sim \theta(t) e^{-\frac{At}{2}} \cos(\dot{\omega} t + \varphi_0)$$

Начало момента излучения определяется функцией $\theta(t)$. Затухающая экспонента ограничивает спектр, обрезает картину во временном представлении и определяется коэффициентом A. Наглядно цуг излучения можно представить себе на шкале времени:

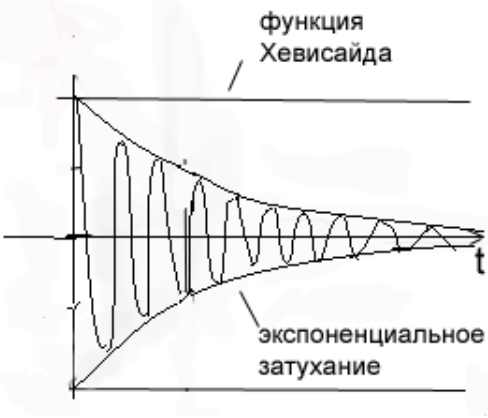

Рис. 5.2. Цуг излучения

Спектр цуга $\Delta\omega$ равен величине A – скорости спонтанных переходов. Это предельная ширина линии излучения, если было подавлено доплеровское и столкновительное излучение. Остается уширение, связанное с конечным временем жизни на уровне, относящемся к спонтанному переходу. Спонтанные переходы возможны только сверху вниз.

В выражение для сечения перехода вместо $\Delta\omega$ подставим естественную ширину линии, которая определяется коэффициентом Эйнштейна A:

$$\sigma = \frac{8\pi|d_{21}|^2\omega_{21}}{\hbar\Delta\omega c} = \frac{8\pi|d_{21}|^2\omega_{21}\cdot 3c^3\hbar}{4\hbar|d_{21}|^2\omega^3 c} = \frac{6\pi c^2}{\omega^2}$$

В вакууме:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Поэтому:

$$\frac{6\pi c^2}{\omega^2}\cdot\frac{6\pi\lambda^2}{4\pi^2} = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \tag{5.11}$$

Сечение спонтанного перехода определяется квадратом длины волны.

Число фотонов на моду. Яркость излучения. Эффективная температура

Отношение скорости вынужденных переходов к скорости спонтанных переходов:

$$\frac{W_{\text{вын}}}{W_{\text{спонт}}} \equiv \frac{B\rho}{A} = \frac{\pi^2c^3}{\hbar\omega^3}\rho = \frac{\rho}{\hbar\omega}\cdot\frac{\pi^2c^3}{\omega^2} = N \tag{5.12}$$

N – **число фотонов на моду**. Размерность величины $\frac{\rho}{\hbar\omega}$ – $\frac{\text{сек}}{\text{см}^3}$. Размерность величины $\frac{\pi^2c^3}{\omega^2}$ – $\frac{\text{см}^3}{\text{сек}^3}\cdot\text{сек}^2 = \frac{\text{см}^3}{\text{сек}}$.

$$g_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3}$$

g_ω – плотность мод. $g_\omega^{-'}$ – величина, обратная плотности мод, – расстояние между модами в спектре.

Мода – 1) пространственное решение волнового уравнения; 2) тип колебаний.

В бесконечном пространстве пространственным решением волнового уравнения является плоская монохроматическая волна, когда нет никаких ограниченных условий.

Рассмотрим моду на примере резонатора Фабри – Перо (Рис. 5.3).

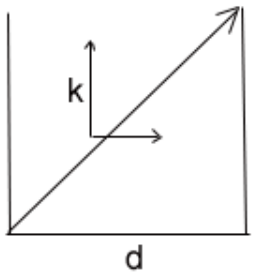

Рис. 5.3. Компоненты волнового вектора

Здесь мода – суперпозиция двух бегущих так, что у них квантуются поперечные компоненты волнового вектора. Величина d в данном случае – расстояние между зеркалами. Обратная ей величина – $\frac{2\pi}{d}$. Поперечная компонента волнового вектора должна быть кратна этой величине с точностью до целого числа. У волны есть продольная компонента (k) и поперечная компонента. Могут существовать и другие ограниченные условия – например, сферические или цилиндрические.

Число фотонов на моду поля – важная величина, которая связана с другой метрологической характеристикой – **спектральной яркостью излучения**. Спектральная яркость излучения – это интенсивность (энергия на единицу площади) в единицу телесного угла в единицу частоты (единичный спектральный интервал):

$$S_{\Omega\omega} = \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2\ \text{ср}\ \text{Гц}}$$

Интенсивность в этой науке часто измеряется не в Эрг, а в Вт. Единица телесного угла – стерадиан.

Свяжем спектральную яркость излучения с числом фотонов на моду. Выводим интенсивность в единичный спектральный диапазон. Она равна произведению половины спектральной плотности энергии и скорости света. Делим ее на 4π стерадиан:

$$I_\omega = \frac{\rho c}{2} \to S_{\omega\Omega} \equiv I_{\omega\Omega} = \frac{\rho c}{8\pi}$$

$$\rho = N \cdot \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$$

Подставляем в формулу выше и получаем:

$$S_{\omega\Omega} \equiv \frac{\rho c}{8\pi} = \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} N = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} N \tag{5.13}$$

Преобразуем формулу через λ:

$$\frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^2} = \frac{\hbar c}{\lambda^3}$$

Спектральная яркость пропорциональна числу фотонов на моду. Если число фотонов на моду равно 1, это случай вакуума. Тогда величина $\frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^2}$ называется *спектральной яркостью вакуума.* Когда $N = 1$:

$$S_{\omega\Omega}^{\text{вак}} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^2} \equiv \frac{\hbar c}{\lambda^3} = \frac{10^{-27}\,3\cdot 10^{10}}{(10^{-4})^3} = 3\cdot\frac{10^{-17}}{10^{-12}} = 3\cdot 10^{-5} \tag{5.14}$$

В формуле выше предполагается, что длина волны равна 1 микрону.

Связь спектральной яркости в единицах длин волн и в единицах частот, но в единичный телесный угол:

$$S_{\lambda\Omega} \equiv \left|\frac{d\omega}{d\lambda}\right| S_{\omega\Omega} = \frac{2\pi c}{\lambda^2} S_{\omega\Omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Пусть даны замкнутая полость, температура T. В полости наблюдается равновесное тепловое излучение.

$$\rho \sim \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Число фотонов на моду N – величина измеряемая. Если выделить спектральную моду и поставить счетчик фотонов (измеритель мощности), то можно измерить эту величину. Если излучение не равновесное, число фотонов на моду можно измерить таким же образом, с помощью детектора мощности.

Понятие **эффективной температуры**. Сравним два случая. 1 – случай идеального теплового источника, где есть планковское излучение числа фотонов. Ему соответствует термодинамическая температура T. 2 – другой источник, не равновесный. У него можно померить число фотонов на моду и по формуле Планка пересчитать, чему будет равна соответствующая температура. Температуру неравновесного источника назовем *эффективной температурой.* То есть, эффективная температура – термодинамическая температура равновесного теплового излучения, которое имеет столько же фотонов на моду, сколько и то излучение, с которым его сравнивают.

Оценим эффективную температуру Солнца. Ясно, что это не равновесный источник. Нет никакой полости. В грубом приближении его считают излучением черного тела. Это неправильно. Чтобы оценить эффективную температуру Солнца нужно посчитать, какую бы температуру имело настоящее излучение черного тела, которое имеет такое же число фотонов на моду, как и солнечный свет.

Интенсивность Солнца:

$$I \sim \frac{0,1\ \text{Вт}}{\text{см}^2}$$

Яркость – интенсивность в единичный телесный угол.

$$I_\Omega \sim \frac{0,1\ \text{Вт}}{\text{см}\ (0,5^\circ)^2} \sim 10^3\ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2\ \text{ср}}$$

Чтобы перейти к спектральной яркости, нужно поделить все на ширину спектра Солнца. Большая часть энергии солнечного света приходится на зеленую полосу. $\dot{A}$ – ангстрем.

$$I_{\Omega,\lambda} \sim \frac{10^3\ \text{Вт}}{\text{см}^2\ \text{ср}\ 1000\,\dot{A}} = 1\ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2\ \text{ср}\,\dot{A}} = \frac{10^7\ \text{эрг}}{\text{см}^2\ \text{ср}\ 10^{-8}\ \text{см}} \sim 10^{15}\ \text{СГСЕ}$$

Все, что относится к Солнцу, обычно обозначается символом $\odot$.

$$S_{\omega,\Omega} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2}\, N_\odot$$

$$S_{\lambda\Omega} = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \cdot S_{\omega,\Omega}$$

Воспользуемся связью между яркостью в единичную длину и яркостью спектральной:

$$S_{\omega,\Omega} = \frac{S_{\lambda,\Omega}}{2\pi c}\,\lambda^2$$

$$N_\odot = \frac{S_{\omega,\Omega}}{\hbar\omega^3} \cdot 8\pi^3 c^2 = \frac{S_{\lambda,\Omega}}{2\pi c}\,\lambda^2 \cdot \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} = S_{\lambda,\Omega} \cdot \frac{\lambda^3}{\hbar c} \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi c} = S_{\lambda,\Omega}\,\frac{\lambda^5}{\hbar c^2 2\pi}$$

Для длины волны 1 микрон:

$$N_\odot = 10^{15}\,\frac{10^{-20}}{10^{-27} \cdot 10 \cdot 10^{20} \cdot 6} = \frac{10^{-5}}{10^{-6} \cdot 6} = \frac{1}{6} \cdot 10 \sim 1\ \text{фм} \tag{5.15}$$

Выходит порядка фотона на моду.

$$\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT_{\text{эфф}}}}-1}=1$$

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT_{\text{эфф}}}}=2$$

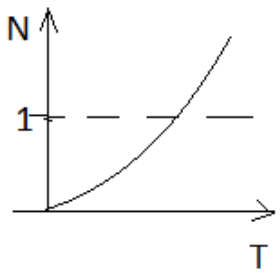

Рис. 5.4. Зависимость числа фотонов на моду от температуры

С ростом температуры экспонента на графике 5.4 будет стремиться вверх, так как число фотонов на моду нарастает. Эти графики не стоит путать с известными графиками планковского распределения, потому что в формуле Планка есть еще и плотность мод. Характерный масштаб для $N-1$ фотон на моду, то, что приписывается вакууму.

Д. Н. Клышко предсказал явление спонтанного параметрического рассеяния света. Фотон попадает в лазер, в прозрачный кристалл. За счет квадратичной восприимчивости он спонтанно разваливается на два фотона. Сохраняется закон сохранения энергии импульса. Одно из феноменологических описаний этого эффекта – спонтанный распад происходит под действием вакуумных флуктуаций. А в вакуумных флуктуациях число фотонов на моду равно 1. Кривая для планковского равновесного излучения числа фотонов на моду на графике пересекается с единицей при очень высокой температуре. Яркость флуктуации вакуума – это то, для чего характерно наличие одного фотона в моде. Для того, чтобы физически это реализовать, необходимо взять тепловой источник равновесного поля, нагреть его до температуры порядка 10000 градусов Кельвина, и тогда из него будет выходить излучение с яркостью примерно 1 фотон на моду. Это один из парадоксальных результатов, которые заслуживают внимания.

Эффективная температура Солнца для этого диапазона составляет порядка 6000 градусов. Если выбирать середину видимого диапазона, то оказывается, что Солнце

светит с эффективной температурой, равной нескольким тысячам градусов Кельвина.

Второй момент. Можно построить график зависимости числа фотонов на моду от частоты при фиксированной комнатной температуре $T = 300^\circ$ К. От частоты экспонента будет падать (Рис. 5.5). Универсальная вакуумная единица и спадающая экспонента пересекутся на частоте, соответствующей длине волны около 70 мкм. Видимый диапазон – это полмикрона, а это на два порядка больше – далекий K-диапазон.

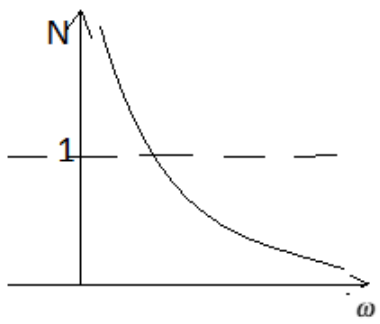

Рис. 5.5. Зависимость числа фотонов на моду от частоты

Из коэффициентов Эйнштейна получаем следующие формулы:

1) Скорость переходов вниз складывается из вынужденных переходов и спонтанных переходов:

$$W \downarrow = B\rho + A = AN + A = A(N+1) \tag{5.16}$$

2) Скорость переходов вверх состоит только из вынужденных переходов:

$$W \uparrow = B\rho = AN \tag{5.17}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6. Линейная восприимчивость. Поглощение поля. Дисперсионные отношения

Линейная восприимчивость. Ее свойства

Поле — это кусок осцилляторов. Поле, которое проникает внутрь и взаимодействует с осцилляторами. 2 подхода: микроскопический и макроскопический. Микроскопический подход — это считаются заданными поля, под действием этих полей вычисляются движения элементарных зарядов и макроскопические характериситики такие как χ — восприимчивость,

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$$

— связывает между собой индукцию и электрическое поле.

Поляризация — дипольный момент единицы объема:

$$P = \chi E$$

Поляризация или отклик порождает электрические поля. Облучение вещества полем, возникновение отклика и генерация поля.

Определение 6.1. *Линейная восприимчивость — это коэффициент пропорциональности между дипольным моментом единицы объема и полем.*

В спектральном представлении. Под действием поля находится дипольный момент в ед. объема:

$$P_\alpha(\omega) = \sum_\beta \chi(\omega)_{\alpha\beta} E_\beta(\omega), \tag{6.1}$$

где $\alpha, \beta = x, y, z$

Фурье преобразование:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt$$

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) \equiv f^*(\omega)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) свойство восприимчивости:

$$\begin{cases} f(\omega) = f'(\omega) + if''(\omega) \\ f(-\omega) = f'(-\omega) + if''(-\omega) \\ f^*(\omega) = f(\omega) - if''(\omega) \end{cases}$$

Делаем вывод:

$$f'(\omega) = f'(-\omega)$$

$$f''(\omega) = -f''(-\omega)$$

2) свойство восприимчивости (правило кинетических коэффициентов):

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\beta\alpha}$$

для изотропной среды:

$$\chi = \delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} x & . & . \\ . & x & . \\ . & . & x \end{pmatrix}$$

одноосные кристаллы:

$$\chi = \begin{pmatrix} x_\perp & & \\ & x_\perp & \\ & & x_{||} \end{pmatrix}$$

Поляризация – поле воздействует вещество, возникает и наводится дипольный момент в ед. объема.

Временное представление:

$$P(t) = \int_0^t \chi(\tau) E(t-\tau) d\tau$$

Вещество облучается очень коротким импульсом поля:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$E(t) \sim \delta(t)$$

Импульс поля короче, чем период самого высокочастотного колебания в среде.

Импульс физически короткий, а спектра широкий, т.е. константа:

$$E(\omega) \sim const$$

Поляризация пропорциональна $\chi(\omega)$:

$$P(\omega) \approx \chi(\omega)$$

Свойства вещества по отношению к внешним воздействиям зависит от параметра γ. Если вклад больше проводимости σ, то это металл, а если ε, то это диэлектрик:

$$\gamma \sim \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Временное представление поляризации:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \sim \theta(t),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Рассматриваем частоту как комплексную переменную, поэтому под интегралом оказывается сумма(или произведение двух экспонент):

$$e^{\omega=\omega+i\omega''}$$

Первая экспонента – это ограниченная функция, от времени не нарастает, что хорошо:

$$e^{-i\omega' t}$$

Вторая экспонента "плохой"множитель:

$$e^{\omega'' t},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

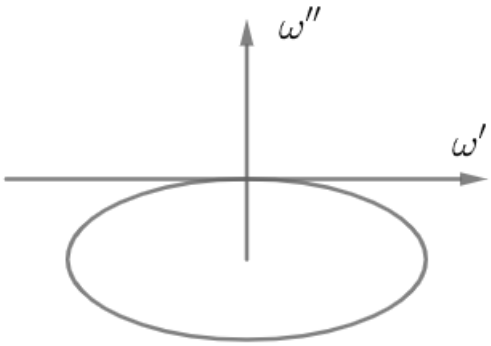

Рис. 6.1. Всю область значений аргумента разбивают на комплексной плоскости

если $t < 0$, то рассматриваем интеграл по верхней полуплоскости (Рис. 6.1).

При $t < 0$ интеграл зануляется, значит в верхней полуплоскости у этой функции нет полюсов.

Следствие того, что $P(t)$ пропорциональна Функции Хевисайда без вывода. Преобразования (соотношения) Крамерса-Кронига.

Следствие того, что функция отклика пропорциональна ступенчатой функции Хевисайда:

$$\pi\chi'(\omega) = \frac{\chi''(\omega_1)}{\omega - \omega_1} d\omega_1$$

и аналогично

$$\pi\chi''(\omega) = \frac{\chi'(\omega_1)}{\omega_1 - \omega} d\omega_1$$

Вещество состоит из частиц и представляет собой набор осцилляторов. Действительная часть восприимчивости отвечает за эффект дисперсии, а мнимая часть отвечает за поглощения и потери. Если есть поглощения $\chi'' \neq 0$, то обязательно есть дисперсия, причем связать нелокальная по частотам. На одной частоте может быть поглощение, на другой частоте – дисперсия, связанная с этим поглощением.

По мере поглощения можно оценить дисперсию. Наглядный пример – оконное стекло. Дисперсия окна – восприимчивость.

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$$

Поглощение поля в веществе

Если есть граничные условия, например, стекло, тогда восприимчивость определяет отражение, преломление и поглощение вещества в любом спектральном диапазоне.

Пример 6.1. ***Поглощение заданного поля***

Рассматриваем изотропную среду, не магнитную, т.е. скаляр, а не тензор. Уравнение Максвелла:

Индукция:

$$D = \varepsilon E$$

Поляризация:

$$P = \chi E$$

Индукция складывается из того поля, которое действует на вещество плюс кусочек от отклика поляризации:

$$D = E + 4\pi = (\hat{I} + 4\pi\hat{\chi})\overrightarrow{E}$$

магнитная индукция:

$$B = H$$

среда электродипольная:

$$\mu = 1$$

$$c\,\mathrm{rot}H - \dot{D} = 4\pi j = 0,$$

где c – скорость света, $\dot{D}$ – производная по времени, j – плотность сторонних токов. Нет сторонних токов.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$c\,\mathrm{rot}\,E + \dot{H} = 0$$

$$\mathrm{div}\,D = 4\pi\rho$$

$$\mathrm{div}\,H = 0$$

Поглощаемая единицей объема мощность:

$$\mathscr{P} \equiv -\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{S} = -\frac{c}{4\pi}\,\mathrm{div}[EH] = \frac{c}{4\pi}(E\,\mathrm{rot}\,H - H\,\mathrm{rot}\,E), \tag{6.2}$$

где S – поглощение поля ед. объема вещества, $[E \times H]$ – вектор Пойнтинга.

Подставляем уравнение Максвелла в (6.2):

$$\mathscr{P} = \frac{1}{4\pi}(E\dot{D} + H\dot{H})$$

Нас интересует средняя мощность. Если предположим, что поле внешнее:

$$E(t) = \frac{1}{2}\{E_0 exp\{-i\omega t\} + E_0^* exp\{i\omega t\}\}$$

$$\dot{E}(t) = \frac{1}{2}\{-i\omega E_0 \exp\{-i\omega t\} + i\omega E_0^* \exp\{i\omega t\}\}$$

Точно так же дифференцируем магнитное поле и берем $E\dot{E}$, которая возникает в первом слагаемом $E\dot{D}$ в уравнении (6.2):

$$E\dot{E} + 4\pi E\dot{P}$$

Комбинация типа:

$$\overline{E\dot{E}} = \overline{H\dot{H}} = 0$$

Таким образом,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\mathscr{P} = \frac{1}{4\pi}(E\dot{D} + H\dot{H}) = E\dot{P} = \frac{1}{4}(E_0 P_0^* i\omega - i\omega E_0^* P_0) = \frac{i\omega}{4}(E_0 P_0^* - E_0^* P_0)$$

$$\overline{\mathscr{P}} = \frac{1}{4} 2\omega \operatorname{Im}(E_0^* P_0) = \frac{\omega}{2}|E_0|^2 \chi''$$

что и требовалось доказать.

Если $\chi'' > 0$, то мощность поглощается, а если $\chi'' < 0$, то мощность выделяется.

Дисперсионные соотношения. Отклик среды на излучаемую волну

Под дисперсионным соотношением понимается связь между длиной волнового числа $|\overrightarrow{k}|$ и частотой ω. Это закон дисперсии.

Поляризация – источник нового поля.

Считаем, что в веществе заданный источник, некая поляризация.

$$P = P_0 exp\{-i\omega t + \overline{k}\overline{r}\}$$

Уравнение Максвелла:

$$c\,\mathrm{rot}\,H - \dot{D} = 4\pi j = 0$$

$$c\,\mathrm{rot}\,E + \dot{H} = 0$$

$$P = \sum e_i r_i$$

$$\dot{P} = \sum_i e_i \dot{r}_i = \sum_i e_i v_i = j,$$

где $\dot{r}_i$ – скорость, j – плотность тока.

Тогда,

$$c\,\mathrm{rot}\,H - \dot{D} = 4\pi j = 4\pi \dot{P}$$

Вспомним ротор:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\mathrm{rot}F = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial F_z})\overrightarrow{i} + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})\overrightarrow{j} + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\overrightarrow{k} \tag{6.3}$$

Возникают частные производные, например:

$$\frac{\partial}{\partial x, y, z}(Hexp\{...\})$$

Дифференцируем по x, y, z, поэтому возникнет множество типа:

$$ik_{z,y,z}$$

Теперь подставим первое уравнение Максвелла $\mathrm{rot}H$ в (6.3):

$$\mathrm{rot}H = (H_z ik_y - H_y ik_z)\overrightarrow{i} + (H_x ik_z - H_z ik_x)\overrightarrow{j} + (H_y ik_x - H_x ik_y)\overrightarrow{k}\, e^{-(i\omega t + \bar{k}\bar{r})}$$

Вспоминаем векторное произведение:

$$[\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}] \equiv (a_y b_z - a_z b_y)\overrightarrow{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\overrightarrow{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\overrightarrow{k}$$

Видно, что ротор вырождается в векторное произведение:

$$\mathrm{rot}H = i[\overrightarrow{k}\,H_0]exp\{...\}$$

Подставляем в первое уравнение Максвелла, а $D = \varepsilon E$, то:

$$ic[kH_0] + i\omega\varepsilon E_0 = -\omega 4\pi P_0 \tag{6.4}$$

Введем вектор:

$$\overrightarrow{n} \equiv \frac{c\overrightarrow{K}}{\omega}$$

Тогда остается от (6.4):

$$[\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{H}_0] + \varepsilon E_0 = -4\pi P_0 \tag{6.5}$$

Второе уравнение Максвелла:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$ic[\overrightarrow{k}E] - i\omega H_0 = 0$$

Выражаем H_0 и подставляем в первое уравнение:

$$[nE_0] = H_0$$

Подставим в (6.5):

$$[n[nE_0]] + \varepsilon E_0 = -4\pi P_0$$

Вспомним двойное векторное произведение:

$$[a[bc]] = b(ac) - c(ab)$$

Остается проектор:

$$\hat{\prod} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{K_\alpha K_\beta}{K^2},$$

где K – волновой вектор.

$$[...[... \times ....]] = (n^2 \prod - \varepsilon)E_0 = -4\pi P_0$$

где $\prod$ – оператор проецирования по направлению перпендикулярное вектору K.

Можно ввести функцию:

$$GG^{-1} = G^{-1}G = I,$$

где I – единичная матрица.

$$E_0 = -4\pi P_0 G^{-1},$$

где G – спектральная функция Грина для уравнения Максвелла. Определяет поле, которое излучается с заданной поляризацией.

Пример 6.2. *Если* $K||Z$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда проектор:

$$\prod_{xx} = \delta_{xx} - 0 = 1$$

$$\prod_{yy} = 1$$

$$\prod_{zz} = 1 - 1 = 0$$

Поэтому поле равно:

$$E_{x,y} = \frac{-4\pi P_{0x,y}}{(n^2 - \varepsilon)}$$

$$E_z = -\frac{4\pi P_0}{\varepsilon}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7. Линейная восприимчивость

Обыкновенные и необыкновенные волны. Вещественная и мнимая часть диэлектрической проницаемости. Фазовая и групповая скорость. Закон дисперсии.

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \cdot \vec{P} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \cdot \chi,$$

где χ - восприимчивость.

В среде существуют следующие векторы:

$$\vec{D} \perp \vec{k} \perp \vec{H}$$

Также существует вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$$

Следовательно, вектор $\vec{H}$ перпендикулярен остальным четырем векторам, а значит эти честыре вектора лежат в одной плоскости.

Закон Дисперсии

Уравнение Френеля имеет вид:

$$det\ (n^2 - \varepsilon) = 0$$

Для заданного направления вектора $\vec{k}$, например, вдоль z, это уравнение имеет два решения.

Уравнение Френеля также определяет закон распространения собственных волн (волн без источников), и связь, которая возникает между волновым числом K и частотой ω:

$$K = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Такая связь называется *законом дисперсии* и изображается в виде диаграммы, представленной на (Рис. 7.1).

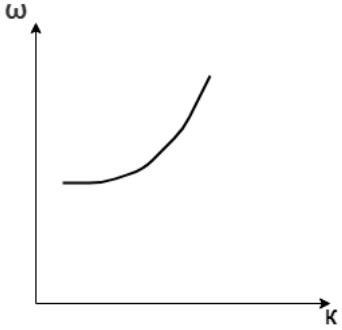

Рис. 7.1. Зависимость частоты от длины волнового вектора

Закон дисперсии также позволяет определить различные зависимости, такие как $W(\omega), n(\lambda)$ и другие.

- Следствие из закона дисперсии

  Пусть среда — вакуум, т.к. вакуум – единственная среда, в которой не может существовать дисперсии. В таком случае закон дисперсии будет выглядеть как прямая, наклон которой определяется скоростью света.

  Это говорит о том, что нелинейность закона дисперсии – это следствие присутствия материального объекта в среде, и чем сильнее изгиб кривой, тем сильнее поле взаимодействует с веществом.

Фазовая и групповая скорость

Рассмотрим характеристики закона дисперсии.

Групповая скорость — тангенс угла наклона кривой зависимости на (Рис. 7.1):

$$V_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial K}$$

Фазовая скорость:

$$V_f = \frac{\omega}{K}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Очевидно, что в среде без дисперсии (в вакууме), групповая скорость совпадает с фазовой.

Вещественная и мнимая часть диэлектрической проницаемости

Обнаружим связи между действительной и мнимой частями ε и действительной и мнимой частями волнового числа.

$$K = \widetilde{K} + i \cdot \frac{\alpha}{2}$$

Такой вид комплексности в волновом числе приводит к следующем равенству:

$$E = E_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} r} \cdot exp\{i\widetilde{K} \cdot r - i\omega t\}$$

Так, действительная часть отвечает за распространение волны, а мнимая - за экспоненциальное затухание волны.

Мы знаем, что

$$K = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon}$$
$$(\widetilde{K} + i \cdot \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon(\omega)$$

Таким образом,

$$\widetilde{K} = \frac{\omega}{c} \cdot Re\sqrt{\varepsilon}$$
$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\omega}{c} \cdot Im\sqrt{\varepsilon}$$

Подставим полученные значения

$$K^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon(\omega)$$
$$K_\alpha = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon''(\omega)$$

В случае малого поглощения, т.е. если $\alpha^2 \ll k^2$:

$$K^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'$$
$$\alpha \approx K \cdot \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

Получение линейной восприимчивости. Классический подход.

Для получения линейной восприимчивости необходимо записать уравнение движения для осцилятора:

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m}E_{lok}$$

где γ-фенологическая константа затухания;

ω_0^2-собственная частота осцилятора;

E_{lok}-энергия локального поля.

Переходим к поляризации

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P = \frac{e^2 \cdot N}{m}E_{lok} = \frac{\omega_p^2}{4\pi}E_{lok},$$

где

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 \cdot N \cdot 4\pi}{m}$$

ω_p – плазменная частота, некоторая характеристика среды, указывающая на ее инерционность по отношению к полям.

Восприимчивость – это связь между поляризацией и внешним полем, поэтому необходимо, чтобы в выражении фигурировало поле E. Рассмотрим уравнение Максвелла:

$$div\ \vec{D} = 4\pi\rho$$

В то же время:

$$D = \varepsilon E = E + 4\pi P = (1 + 4\pi\chi)E$$

$$div\ \vec{D} = div\ \vec{E} + 4\pi \cdot div\ \vec{P} = 4\pi\rho$$

$$div\ E = 4\pi\rho_{eff}$$

$$E_{lok} = E + \frac{4\pi}{3}P$$

Подставим полученное выражение для энергии локального поля в преобразованное уравнение движения для осцилятора.

$$\frac{\omega_p^2}{4\pi}E_{lok} = \frac{\omega_p^2}{4\pi}E + \frac{\omega_p^2}{3}P$$
$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P = \frac{\omega_p^2}{4\pi}E + \frac{\omega_p^2}{3}P$$

Преобразуем выражение.

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P}(\omega_0^2 - \frac{\omega_p^2}{3}) = \frac{\omega_p^2}{4\pi}E$$

Поле записываем как монохроматическую компоненту.

$$E = E_0 \cdot exp\{-i\omega t\}$$
$$P = P_0 \cdot exp\{-i\omega t\}$$

Подставляем и дифференцируем.

Примем $\omega_0^2 - \frac{\omega_p^2}{3} = \omega_0^2$

$$\omega^2 P_0 - 2i\omega P_0 + P_0\omega_0^2 = \frac{\omega_p^2}{4\pi}E_0$$

В изотропном случае:

$$P_0 \equiv \chi E_0$$

Для одного резонанса:

$$\chi = \frac{\omega^2 P/4\pi}{\omega_0^2 - 2i\omega\gamma - \omega^2}$$

Для многих резонансов:

$$\chi(\omega) = \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - 2i\omega\gamma_j - \omega^2}$$

где f_j-сила осцилятора

$$\sum_j f_j = 1$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Приближения формулы для линейной восприимчивости. Фононный резонанс.

- Случай изолированного резонанса.

$$\chi = \chi_\infty + \frac{2\gamma\delta\omega_0}{\omega_0^2 - 2i\omega\gamma - \omega^2}$$

$$\delta\chi = \frac{f\omega_p^2}{8\pi\gamma\omega_0}$$

$$\chi = \chi_\infty + \frac{\delta\chi}{\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega_0} - \frac{2i\gamma\omega}{2\gamma\omega_0}} = \omega \sim \omega_0 \cdot \gamma$$

$$\chi = \chi_\infty + \frac{\delta\chi}{\frac{(\omega_0-\omega)}{\gamma} - i}$$

Введем величину x $\equiv \frac{\omega-\omega_0}{\gamma}$.

$$\chi = \chi_\infty - \frac{\delta\chi}{x+i} = \chi_\infty - \frac{(x-i)\delta\chi}{x^2+1}$$

Так, действительная часть:

$$\chi'(\omega) = \chi_\infty - \frac{x\delta\chi}{x^2+1}$$

Мнимая часть:

$$\chi'' = \frac{\delta\chi}{x^2+1}$$

Изобразим на графике 7.2. Действительная часть восприимчивости всегда шире мнимой. Это значит, что там, где поглощение уже слишком мало и им можно пренебречь, дисперсия еще значительная. Область, где действительная часть восприимчивости прямопропорциональна частоте, называется нормальной дисперсией, а часть, где восприимчивость убывает с ростом частоты – аномальной.

- Случай пренебрежения затуханием $\gamma \to 0$.

$$\omega \sim \omega_0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

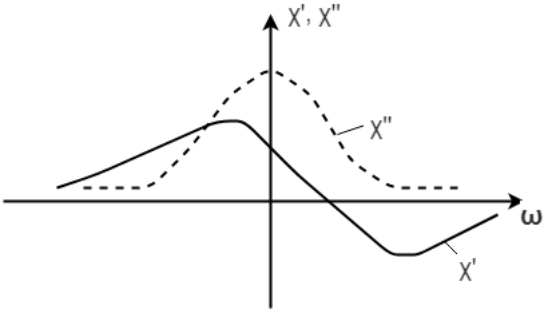

Рис. 7.2. Зависимость мнимой и действительной части восприимчивости от частоты

$$\chi = \chi_\infty + \frac{f\omega_P^2/4\pi}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Введем величину χ_0-значение восприимчивости при $\omega = 0$:

$$\chi_0 = \chi_\infty + \frac{f\omega_P^2/4\pi}{\omega_0^2}$$

$$\frac{f\omega_p^2}{4\pi} = (\chi_0 - \chi_\infty)\omega_0^2$$

$$\chi = \chi_\infty + \frac{\chi_0 - \chi_\infty}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Изобразим на (Рис. 7.3) график.

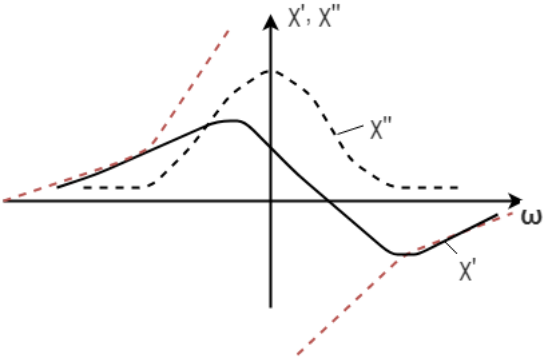

Рис. 7.3. Зависимость мнимой и действительной части восприимчивости от частоты

Фононный резонанс

Вспомним, что зависимость частоты от длины волнового вектора в вакууме имеет линейную зависимость. При запускании в вакуум молекул воздуха наклон прямой

изменится, и прямая с увеличением молекул постепенно превратится в кривую, а дисперсия в среде станет возможной.

На графике зависимости частоты от длины волнового вектора кривая закона дисперсии оптических фононов будет пересекаться с кривой закона дисперсии света. В точке пересечения возникает волновой резонанс.

Лекция 8. Уравнение Неймана. Осциллирующее решение. Матрица плотности

Уравнение Неймана. Следствие для СФ гамильтона.

Под действием внешнего поля за счет дипольного момента в среде устанавливается неравновестное поведение, т.к. населенности под действием поля перераспределяются.

В квантовой механике есть три подхода, которые описывают временное поведение системы:

1) Подход Шредингера:
$$< f(t) >= S_p \rho(t) \hat{f};$$

2) Подход Гейзенберга:
$$< f(t) >= S_p \rho \hat{f}(t);$$

3) Подход Дирака:
$$< f(t) >= S_p \rho(t) \hat{f}(t).$$

Получим уранвение для матрицы плотности. Для этого рассмотрим существенно замкнутую систему.

$$\psi(r,t) = \sum_n a_n(t) \phi_n(r)$$

Полученную функцию подставим в уравнение Шредингера.

$$i\hbar \dot{\psi}(r,t) = H\psi(r,t)$$
$$i\hbar \sum_n \dot{a}_n \phi_n = \sum_n a_n(t) H \phi_n(t)$$

Домножим левую и правую части выражения на интегральный оператор $\int dr \phi_m^*$, учитывая, что в правой части образуется матричный элемент H_{mn}.

$$i\hbar \dot{a}_m = sum_n H_{mn} a_n$$
$$H_{mn} = \int dr \phi_m^* \hat{H} \phi_n$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$H_{mn} \equiv H^*_{nm}$$

Домножаем левую и правую части на a^*_k.

$$i\hbar a^*_k \dot{a}_m = \sum_n H_{mn} a^*_k a_n \tag{8.1}$$

$$i\hbar a_k \dot{a}^*_m = -\sum_n H_{nm} a_k a^*_n$$

$$i\hbar a_m \dot{a}^*_k = -\sum n H_{nk} a_m a^*_n \tag{8.2}$$

Сложим формулы (8.1) и (8.2).

$$i\hbar(a^*_k \dot{a}_m + a_m \dot{a}^*_k) = \sum_n (H_{mn} a^*_k a_n - a_m a^*_n H_{nk})$$

$$i\hbar \dot{\rho}_{mk} = \sum_n (H_{mn}\rho_{nk} - \rho_{mn} H_{nk}) = (H\rho - \rho H)_{mk} = [H, \rho]_{mk}$$

Таким образом, путем арифмитичеких преобразований уравнение Шредингера сводится к уравнению Неймана.

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho]$$

Осциллирующее решение уравнения Неймана. Учет затухания в системе. Феноменологическая константа затухания.

Предположим, что ϕ_m — собственные функции гамильтониана $\hat{H}$. Тогда:

$$H_{mn} = \int dr \phi^*_m \hat{H} \phi_n = E_n \delta_{mn},$$

где $\hat{H}\phi_n = E_n \phi_n$.

Аналогично:

$$H_{nk} = \int \phi^*_n H \phi_k dr = E_n \delta_{nk}$$

$$i\hbar \dot{\rho}_{mk} = \sum_n (H_{mn}\rho_{nk} - \rho_{mn} H_{nk})$$

Подставлем H_{mn} и H_{nk} в выражение выше:

$$i\hbar\dot{\rho}_{mk} = E_m\rho_{mk} - \rho_{mk}E_k = \rho_{mk}(E_m - E_k)$$

$$\dot{\rho}_{mk} = -i\omega_{mk}\rho_{mk} \tag{8.3}$$

Решим равенство (8.3) и получим осциллирующий вид недиагональных $m \neq k$ компонентов матрицы плотности:

$$\rho_{mk}(t) = \rho_{mk}^{(0)} exp\{-i\omega_{mk}t\} \tag{8.4}$$

А диагональные элементы матрицы не осциллируют и равны константе.

Среднее значение оператора дипольного момента:

$$< d >= Sp(\rho d) = Sp(d\rho) = \sum_{m,k} d_{mk}\rho_{km}$$

Подставим явную зависимость полученных компонентов от времени (8.4) в выражение выше:

$$< d >= \sum_{m,k} d_{mk}\rho^{(0)} e^{-i\omega_{mk}t}$$

Можем заметить, что полученное для матрицы плотности выражение (8.4) приводит к неправильным физическим результатам. Среднее значение оператора дипольного момента осциллирует с боровскими частотами. Из классической механики знаем, что осциллирующий дипольный момент излучает поле, а значит энергия уходит из системы. Представляем замкнутую систему, поэтому возникает противоречие. Формализм матрицы плотности позволяет добавить затухающие слагаемые в выражение для того, чтобы избежать противоречия.

1) Недиагональные элементы $m \neq k$

$$\dot{\rho}_{mk} = -i\omega_{mk}\rho_{mk} - \gamma_{mk}\rho_{mk}$$

2) Диагональные элементы m

$$\dot{\rho}_{mm} = \sum_n W_{mn}\rho_{nn} - W_{nm}\rho_{mm}, \tag{8.5}$$

где W_{mn}—скорость перехода с уровня n на уровень m.

γ_{mk} — феноменологическая константа затухания

$$\gamma_{mk} = \frac{1}{T_2},$$

где T_2—время поперечной релаксации, проявляющееся в уширении спектральных линий.

Поперечную релаксацию фазы описывают различные механизмы:

1) Механизм столкновения $(\tau_{ct})^{-1} \approx \Delta\omega \approx 2\gamma_{mk}$

2) Естественная ширина линии

$$A \sim 2\gamma_{mk} = \Delta\omega_{ect}$$

Если рассматриваются двухуровневые системы с уровнями (1) и (2), то вводят соответствующие феноменологические константы W_{21} и W_{12}.

$$(T_1)^{(-1)} = W_{21} + W_{12},$$

где (T_1)—время продольной релаксации.

В стационарном случае сумма выражения (8.5) обращается в ноль. В таком случае выполняется принцип детального равновесия:

$$W_{mn}\rho_{nn} = W_{nm}\rho_{mm}$$
$$\frac{W_{mn}}{W_{nm}} = \frac{\rho_{mm}}{\rho_{nn}}$$

Таким образом, физически отношение скоростей переходов равно отношению населенностей этих уровней.Отношение населенностей в равновесии — это распределение Больцмана. Значит:

$$\frac{W_{mn}}{W_{nm}} = \frac{\rho_{mm}}{\rho_{nn}} = exp\{\frac{\omega_{mn}t}{kT}\}$$

Фактически скорости переходов определяются моделью термостата. Представим замкнутую систему, среднее значение дипольного момента осциллирует и энергия уходит в термостат.

Скорось переходов сверху вниз равна сумме вынужденных и спонтанных переходов:

$$W_{12}\downarrow = B\rho + A,$$

где B,—коэффициенты Энштейна

ρ—спектральная плотность энергии.

Скорость переходов снизу вверх:

$$W_{21}\uparrow = B\rho$$
$$B\rho = AN,$$

где N—фактор вырождения фотонов

По определению:

$$(T_1)^{(-1)} = W_{21} + W_{12} = 2AN + A = A(2N+1) = A(\frac{2}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}+1) = A(\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}+1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}) = A\cdot cth\ (x),$$

где $x = \frac{\hbar\omega}{2kT}$

Рассмотрим случай при нулевой термодинамической температуре.

$$T\to 0 \Rightarrow x\to\infty \Rightarrow cth\ (x) = 1$$

Так, в модели при нулевой температуре, когда термостатом является вакуум, отношение продольной и поперечной времен релаксации имеет вид:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{2}{T_2} = A$$

Вычисление характеристик среды с помощью матрицы плотности. Учет релаксации и действия внешнего поля. Средний дипольный момент системы и поляризация.

Подставим выражение для среднего значения дипольного момента в явное выражение для соответствующих компонентов матрицы плотности.

Обозначим, что гамильтониан – это сумма невозмущенной задачи, возмущения со стороны термостата и энергии взаимодействия с полем:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_t(t) + V_E(t),$$
$$\hat{V}_E = -\hat{d}E,$$
$$V_{mn}^{(E)} = -d_{mn}E$$

Исходя из этого запишем уравнение для недиагональных компонентов матрицы плотности и решим его по теории возмущений:

$$\dot{\rho}_{mk} = -i\omega_{mk}\rho_{mk} - \gamma_{mk}\rho_{mk} + \frac{[V^{(E)}\rho]_{mk}}{i\hbar}$$
$$\rho_{mk} = \rho_{mk}^{(0)} + \rho_{mk}^{(0)} + \cdots + \rho_{mk}^{(N)}$$
$$\dot{\rho}_{mk}^{(1)} = -i\omega_{mk}\rho_{mk}^{(1)} - \gamma_{mk}\rho_{mk}^{(1)} + \frac{[V^{(E)}\rho^{(0)}]_{mk}}{i\hbar}, \tag{8.6}$$

где

$$[V^{(E)}\rho^{(0)}] = \sum_n (V_{mn}\rho_{nk}^{(0)} - \rho_{mn}^{(0)}V_{nk}),$$

V_{mn}—матричный элемент возмущения в дипольном приближении;

$\rho_{nk}^{(0)}$—невозмущенная система.

Учитывая:

$$\rho_{nk}^{(0)} = \rho_k^{(0)}\delta_{nk}$$
$$\rho_{mn}^{(0)} = \rho_m^{(0)}\delta_{mn}$$

Получим:

$$[V^{(E)}\rho^{(0)}] = \sum_n (V_{mn}\rho_{nk}^{(0)} - \rho_{mn}^{(0)}V_{nk}) = V_{mk}\rho_k^{(0)} - \rho_m^{(0)}V_{mk} = Vmk(\rho_k^{(0)} - \rho_m^{(0)}) = V_{mk}\Delta_{mk}^{(0)}$$

Подставим полученные равенства в выражение (8.6):

$$\dot{\rho}_{mk}^{(1)} = -i\omega_{mk}\rho_{mk}^{(1)} - \gamma_{mk}\rho_{mk}^{(1)} + \frac{[V_{mk}\Delta_{mk}^{(0)}]}{i\hbar}$$

Пусть поле — монохроматичное.

$$V_{mn} = -d_{mn}(\frac{E_0}{2}exp\{-i\omega t\} + k.c.)$$

$$\rho_{mk}^{(1)} = \rho_{mk}exp\{-i\omega t\}$$

$$-i\omega\rho_{mk} = -i\omega_{mk}\rho_{mk} - \gamma_{mk}\rho_{mk} = \frac{V_{mk}\Delta_{mk}^{(0)}}{i\hbar}$$

$$\rho_{mk} = \frac{\frac{V_{mk}\Delta_{mk}^{(0)}}{i\hbar}}{(i\omega_{mk} + \gamma_{mk} - i\omega)}$$

$$\rho_{mk} = \frac{V_{mk}\Delta_{mk}^{(0)}}{\hbar(\omega - \omega_{mk} + i\gamma_{mk})}$$

По определению:

$$< d(t) > \equiv Sp(d\rho) = \sum_{m,k} d_{km}^{(\alpha)}\rho_{mk} = \sum_{m.k} d_{km}^{(\alpha)}\frac{d_{mk}^{\beta}E_0\Delta_{mk}^{(0)}}{\hbar(\omega_{mk} - i\gamma_{mk} - \omega)}$$

$$P = N < d >$$

$$P = \sum_{mk}\frac{Nd_{km}^{\alpha}d_{mk}^{\beta}\Delta_{mk}^{(0)}}{\hbar(\omega_{mk} - i\gamma_{mk} - \omega)}E_0^{\beta},$$

$$\frac{Nd_{km}^{\alpha}d_{mk}^{\beta}\Delta_{mk}^{(0)}}{\hbar} \to f.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9. Эффект насыщения. Фактор насыщения

Эффект насыщения. Оценка скорости перехода. Резонансные переходы

В прошлой лекции получили выражение для восприимчивости в первом порядке через возмущения, но не учитывали, что сильное поле может вызвать эффект связанный с насыщением.

Представим радиочастотный усилитель. Если увеличить амплитуду входного сигнала, то, несмотря на линейность усилителя, мощность или амплитуда выходного сигнала перестанет расти, т.к. эффект насыщения связан с нелинейными эффектами.

Нелинейными эффектами занимается нелинейная оптика. В данной же лекции будет рассчитан эффект насыщения без учета восприимчивости высших порядков, а используя кинетические уравнения для населенностей.

Мы уже рассматривали систему с энгармонизмом, т.е. когда расстояние между уровнями, представленными на рисунке 9.1, разное. Это необходимо для того, чтобы выделить среди наборов всех уровней двухуровневую систему.

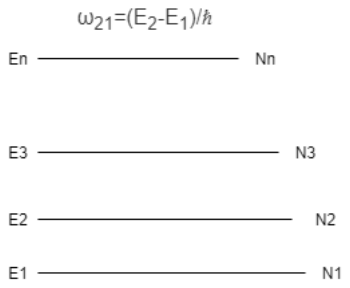

Рис. 9.1. Система с энгармонизмом

Распределение населенностей Больцмана — населенность уровней N_m пропорциональна экспоненте в отрицательной степени отношения энергии этого уровня E_m к kT:

$$N \sim e^{\frac{E_m}{kT}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

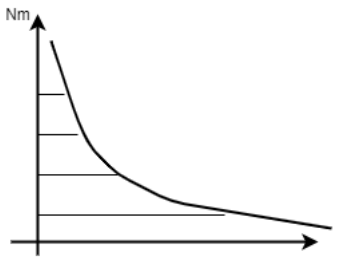

Рис. 9.2. Больцмановское распределение по энергиям

Так, чем выше уровень, тем меньше населенность. Зависимость представлена на рисунке 9.2

Для того, чтобы объяснить, откуда берется двухуровневая система и откуда появляется энгармонизм, можно воспользоваться естественной структурой линии какого-то вещества или получить расщепление за счет эффекта Зеемана.

$$\omega_0 \sim \gamma H$$

где γ — гиромагнитное отношение.

Населенность на паре уровней N_2, N_1 рисунка 9.1 может перераспределяться.

Существует два типа процессов перераспределения:

1) Процессы вынужденного излучения и поглощения.

   Если атом находится на уровне N_2, то он может вынужденно излучить свет, перейдя вниз. Соответственно, если атом находится на уровне N_1, то он может поглотить вынужденное излучение внешнего поля и перейти наверх. Такие процессы регулируют скорость вынужденных переходов:

   $$W_{21} = W_{12}$$

   Скорости вынужденных переходов вверх и вниз совпадают — это следствие эрмитовости оператора возмущения.

2) Релаксационные процессы — процессы, отвечающие за экспоненциальное распределение населенностей Больцмана.

Если сильным полем воздействуем на изначально приготовленную систему в состоянии N_1, то может так сложиться, что все атомы перейдут наверх и возникнет инверсия населенностей, т.е. $N_2 > N_1$

Другой способ достигнуть такой инверсии — резонансно "раскачать"систему на уровень E_3, тогда уровень E_1 обедняется и между парой уровней E_1, E_2 возникает инверсия.

Инверсия, то есть, когда число частиц на более высоко лежащем уровне превосходит число частиц, лежащих внизу, препятствует процессу релаксации. Поэтому эффект насыщения — это конкуренция между процессами вынужденных переходов и релаксации.

Вспомним правила Ферми для монохроматических или узких спектральных распределений поля.

$$W = 2\pi \left| \frac{d_0 E_0}{2\hbar} \right|^2 g(\omega - \omega_0)$$

$$\frac{d_0 E_0}{\hbar} = \Omega$$

где Ω — частота Раби

Тогда

$$W = \frac{2\pi}{4} \Omega^2 g(\omega - \omega_0)$$

$\omega - \omega_0$ возникакет из-за разных механизмов уширения (Допплеровоского, Лоренцовского).

К уширению Лоренца приводят, например, процессы столкновительной релаксации, спотанного излучения — все это описывается Лоренцовской формой линии.

Один из способов математического представления — нормированный по полной ширине имеет следующий вид:

$$g(\omega) = \frac{\frac{2}{\pi \Delta\omega}}{1 + \left(\frac{\tilde{\omega} \cdot 2}{\Delta\omega}\right)^2}$$

где $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$

Если резонанс точный, то знаменатель обращается в единицу и выражение принимает вид:

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi\Delta\omega}$$

Так, лоренцовский фактор $g(\omega)$ примает максимальное значение. При максимальном значении выражение для скорости вынужденных переходов тоже максимальное, находится в резонансе и равно следующему значению:

$$W = \frac{\Omega^2}{\Delta\omega}$$

Вспомним введенные в прошлой лекции феноменологические константы затухания и запишем выражение феноменологического времени поперечной релаксации, связанного с уширением линии:

$$T_2 \simeq \frac{2}{\Delta\omega}$$

$\Delta\omega$—ширина линии в спектральном представлении.

Так, выражение для скорости переходов в точном резонансе можно записать:

$$W = \frac{\Omega^2 T_2}{2}$$

Время поперечной релаксации связано с уширением линии, а эффект насыщения (нелинейный) связан с временем продольной релаксации T_1.

Разность населенностей при действии поля (уравнение Неймана, двухуровневая система). Эффективная температура. Фактор насыщения

Рассмотрим вывод эффекта насыщения. Первая половина расчетов будет произведена каноническим способом (через уравнение Неймана), а вторая — через кинетические уравнения.

Запишем уравнение Неймана для двухуровневой системы:

$$i\hbar\dot{\rho}_{21} = \left[\hat{H}, \rho\right]_{21}$$

Если гамильтониан состоит из трех слагаемых, как это было сказано в прошлой лекции $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_T + \hat{V}_E$, то уравнение Неймана с учетом термостата и внешнего поля примет вид:

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega_0\right)\rho_{21} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{V}, \rho\right]_{21}$$

где $\hat{V} = \hat{V}_T + \hat{V}_E$

Теперь запишем данное выражение с учетом термостата. Тогда для недиагональных элементов матрицы плотности уравнение имеет вид:

$$\dot{\rho}_{21} = -i\omega_0\rho_{21} - \gamma_{21}\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}\left[V_E, \rho\right]_{21}$$

$\gamma_{21} = \frac{1}{T_2}$—феноменологическое время поперечной релаксации.

А для диагональных:

$$\dot{\rho}_{22} = \sum_n (\omega_{2n}\rho_{n1} - \omega_{1n}\rho_{n2}) - \frac{i}{\hbar}\left[V_E, \rho\right]_{22}, \; n = 1, 2$$

Распишем коммутаторы:

$$[V, \rho]_{21} = V_{21}\rho_{11} + \rho_{21}V_{11} - V_{22}\rho_{21} - \rho_{22}V_{21}$$

$\rho_{21}V_{11} = V_{22}\rho_{21} = 0$,тогда

$$[V, \rho]_{21} = V_{21}(\rho_{11} - \rho_{22})$$

$\rho_{11} - \rho_{22} = \Delta$—разность населенностей, которая может учитывать действие поля, т.е. с учетом эффекта насыщения.

Для решения используются следующие обозначения:

$\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ — число частиц в объеме постоянно;

$\rho_{11} - \rho_{22} = \Delta$;

$\dot{\rho}_{11} = -\dot{\rho}_{22}$.

Так как работаем в рамках дипольного приближения:

$$\hat{V}_{21} = -d_{21}E$$
$$E = \frac{1}{2}\left(E_0 exp\left\{-i\omega t\right\} + k.c.\right)$$

Из полученных обозначений получим выражения, которые связывают населенности до и после действия поля.

Запишем кинетическое уравнение изменения населенностей первого уровня для населенностей двухуровневой системы с учетом релаксации:

$$\dot{N}_1 = W\left(N_2 - N_1\right) + w_{12}N_2 - w_{21}N_1$$

$W = W_{21} = W12$—скорость вынужденных переходов;

w_{12}, w_{21}—скорость вынужденных переходов под действием термостата.

$$w_{12}N_2 = w_{21}N1$$
$$\frac{w_{12}}{w_{21}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{e^{-\frac{E_1}{kT}}}{e^{-\frac{E_2}{kT}}} = e^{\frac{E_2-E_1}{kT}} \equiv e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}}$$

Переходы под действием равновесного планковского поля можно вычислить по формуле:

$$\rho = \frac{\hbar k^3}{\pi^2}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{\hbar k^3}{\pi^2}N$$

Здесь ρ — спектральная плотность энергии поля, а N—фактор вырождения.

Под действием такого планковского поля скорости переходов сверху вниз и снизу вверх:

$$w_{qw} \downarrow = B\rho + A = AN + A$$
$$w_{21} \uparrow = B\rho = AN$$

Скорость перехода сверху вниз связана с действием равновесного планковского поля, которое играет роль термостата.

Посчитаем отношение этих скоростей, не зависящих от населенностей внешнего поля:

$$\frac{w_{12}}{w_{21}} = \frac{AN+A}{AN} = 1 + \frac{1}{N} = 1 + e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \tag{9.1}$$

Запишем кинетическое уравнение изменения населенностей второго уровня для населенностей двухуровневой системы с учетом релаксации:

$$\dot{N}_2 = W\left(N_1 - N_2\right) + w_{21}N_1 - w_{12}N_2$$

Получим уранвение для безразмерных населенностей. Для этого вычтем из $\dot{N}_1$ $\dot{N}_2$ и поделим эту разницу на сумму населенностей $N_1 + N_2$:

$$\frac{\dot{N}_! - \dot{N}_2}{N_1 + N_2} = -2W\Delta\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} + 2\frac{w_{12}N_2 - w_{21}N_1}{N_1 + N_2}$$

Для получения выражения:

$$\dot{\Delta} = -2W\Delta + T_1^{-1}\left[\Delta^{(0)} - \Delta\right] \tag{9.2}$$

докажем, что:

$$\frac{w_{12}N_2 - w_{21}N_1}{N_1 + N_2} = \frac{w_{12+w_{21}}}{2}\left[\frac{N_1^{(0-N_2^{(0)}}}{N_1^{(0+N_2^{(0)}} - \frac{N_1-N_2}{N_1+N_2}}\right] = \frac{w_{12+w_{21}}}{2}\left[\Delta^{(0)} - \Delta\right] \tag{9.3}$$

Пусть есть два уровня E_1 и E_2. Введем промежуточный уровень, лежащий между ними E_0, тогда:

$$E_2 \equiv E_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2}$$
$$\hbar\omega_0 = E_2 - E_1$$

Соответственно:

$$E_1 = E_0 - \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

Равновесная населенность первого уровня по Больцману:

$$N_1^{(0)} \equiv e^{-\frac{E_1}{kT}} = e^{-\frac{E_0}{kT} + \frac{\hbar\omega}{2kT}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$N_2^{(0)} \equiv e^{-\frac{E_2}{kT}} = e^{-\frac{E_0}{kT}-\frac{\hbar\omega}{2kT}}$$

Преобразовав выражения получим:

$$\frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{N_1^{(0)} + N_2^{(0)}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = th\left(\frac{x}{2}\right)$$

где $x = \frac{\hbar\omega_0}{kT}$

Таким образом, разность равновесных населенностей логарифмически зависит от термодинамической температуры:

$$\Delta^{(0)} = th\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$$

Из отношений скоростей вынужденных переходов под действием термостата (9.1) получим:

$$\frac{w_{12} - w_{21}}{w_21} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1.$$

Соответственно:

$$\frac{w_{12} + w_{21}}{w_{21}} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} + 1$$

Значит:

$$\frac{w_{12} - w_{21}}{w_{12} + w_{21}} = \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} + 1} = th\left(\frac{x}{2}\right)$$

Вернемся к выражению (9.3) и получим:

$$(w_{12} + w_{21})\left[\frac{w_{12} - w_{21}}{w_{12} + w_{21}} - \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}\right] =$$

$$= \frac{w_{12}N_1 + w_{12}N_2 - w_{21}N_1 - w_{21}N_2 - w_{12}N1 + w12N_2 - w_{21}N_1 + w_{21}N_2}{N_1 + N_2}$$

Подставим полученное выражение в равенство (9.3):

$$\frac{w_{12}N_2 - w_{21}N_1}{N_1 + N_2} = \frac{w_{12}N_2 - w_{21}N_1}{N_1 + N_2}$$

Что и требовалось доказать. Таким образом, получили выражение (9.2):

$$\dot{\Delta} = -2W\Delta + T_1^{-1}\left[\Delta^{(0)} - \Delta\right]$$

Нас интересует стационарный случай, когда $\dot{\Delta} = 0$:

$$\frac{\Delta^{(0)}}{T_1} - \frac{\Delta}{T_1} = 2W\Delta$$

Конечная формула:

$$\Delta = \frac{\Delta^{(0)}}{1 + 2WT_1}$$

$2WT_1$—факор насыщения.

Если $S = 1$, то разность населенности уменьшается в 2 раза.

Левая часть конечной формулы—разность населенностей, а правая—комбинация некоторых факторов (в числителе—равновесные факторы, а в знаменателе—учет действия поля и феноменологической константы, т.е. времени продольной релаксации под действием термостата T_1.

Мы выписали кинетические уравнения для населенности при учете конкуренции двух процессов: внешнее поле стремится их выровнять, а термостат привести к виду распределения Больцмана.

Если W растет, то разность населенности Δ стремится к нулю, что называется эффектом насыщения.

Примечания

1) Инверсия

   Выяснили, что равновесная разность населенности по определению:

$$\Delta^{(0)} \equiv th\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right)$$

   Применим примерно такой же вид функциональной зависимости населенности от температуры при учете действия сильного внешнего поля (система неравновесна):

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\Delta \equiv th\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT_{eff}}\right)$$

где T_{eff}—эффективная температура.

При инверсии населенности $\Delta = N_1 - N_2 < 0$ гиперболический тангенс становится отрицательным и $x = \frac{\hbar\omega_0}{2kT_{eff}} < 0$.

Так как все значения x, кроме эффективной температуры, принимают только положительные значения, то можем сделать вывод, что инверсия населенности означает отрицательную эффективную температуру.

2) Насыщение

При насыщении $\Delta = 0$. Гиперболический тангенс обращается в ноль, когда

$$x = \frac{\hbar\omega_0}{2kT_{eff}} = 0 \Rightarrow T_{eff} \to \infty$$

Произведем оценку. Пусть $I = 1W/cm^2 = 10^7 erg/cm^2$

$$I \equiv \frac{c}{8\pi}E_0^2$$

$$E = \sqrt{\frac{8\pi I}{c}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{10}}} = 0,1$$

$$\Omega = \frac{dE_0}{\hbar} = \frac{10^{-18} \cdot 10^{-1}}{10^{-27}} = 10^8 Hz$$

$$S = 1 = 2WT_1 = \Omega^2 T_2 T_1$$

$$T_2 \sim T_1 \sim 10^8 s$$

В заключение вспомним, что под T_2 понимаем обратное значение феноменологической констаны, поперечную релаксацию фазы:

$$T_2 = \gamma_{21}^{-1}$$

А под продольной релаксацией фазы T_1:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$T_1 = (w_{21} + w_{12})^{-1}$$

где w_{12}, w_{21}-скорости переходов под действием термостата вверх и вниз, а их отношение—больцмоновский фактор.

Комбинация этих двух времен T_1 и T_2 входят в фактор насыщения и приводят к насыщению.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ