



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

НИКИТИН  
НИКОЛАЙ ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**БУЛГАКОВА АЛЕКСАНДРА ДМИТРИЕВИЧА**



## Содержание

<b>1. Лекция 1. Общие принципы построения квантовой теории поля (КТП). Часть 1.</b>	<b>8</b>
Основные определения в пространстве Минковского . . . . .	8
Полностью антисимметричный тензор 4-ого ранга (псевдотензор 4-ого ранга)	10
<b>2. Лекция 2. Общие принципы построения квантовой теории поля (КТП). Часть 2.</b>	<b>12</b>
Системы единиц . . . . .	12
Что имеет смысл требовать от КТП? . . . . .	14
Типичная постановка эксперимента в КТП . . . . .	15
<b>3. Лекция 3. Примеры решения задач.</b>	<b>16</b>
Задача про LEP . . . . .	16
Задача про распад $B^0 \rightarrow J/\Psi\pi^0$ . . . . .	17
Задача на доказательство неравенства $(P_1 P_2) \geq m_1 m_2$ . . . . .	18
Задача Артема Исааковича Алиханьяна . . . . .	18
Задача про КЕК В . . . . .	19
<b>4. Лекция 4. Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа</b>	<b>20</b>
Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа в классической механике . . . . .	20
Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа в теории поля. . .	22
<b>5. Лекция 5. Классическое электромагнитное поле.</b>	<b>25</b>
Уравнения Максвелла и тензор напряженности . . . . .	27
<b>6. Лекция 6. Свободное электромагнитное поле.</b>	<b>29</b>
Уравнения Максвелла как уравнения Лагранжа . . . . .	29
Тензор энергии-импульса . . . . .	30
Уравнение свободного электромагнитного поля в калибровке Лоренца. . .	31
Положительно- и отрицательно-частотные части общего решения уравнения Даламбера . . . . .	31
Линейная поляризация . . . . .	34
Круговая поляризация . . . . .	37
Энергия и импульс классического электромагнитного поля. . . . .	37
<b>7. Лекция 7. Квантование ЭМ поля. Часть 1.</b>	<b>41</b>
Основная идея . . . . .	41
Квантование осциллятора. Операторы рождения и уничтожения. . . . .	41
Квантование электромагнитного поля . . . . .	47
<b>8. Лекция 8. Квантование ЭМ поля. Часть 2.</b>	<b>49</b>
Калибровочные преобразования . . . . .	49
Суммирование по поляризациям. Матрица плотности. . . . .	49
Коммутационные соотношения для операторов поля . . . . .	51

Вакуумные средние . . . . .	52
<b>9. Лекция 9. Квантование ЭМ поля. Часть 3.</b>	<b>54</b>
Нормальное и хронологическое произведения операторов электромагнитного поля . . . . .	54
Свертка операторов электромагнитного поля . . . . .	54
Квантование электромагнитного поля (важнейшие формулы) . . . . .	59
<b>10. Лекция 10. Алгебра матриц Паули. Часть 1.</b>	<b>60</b>
Частицы и античастицы . . . . .	60
Уравнение Паули и матрицы Паули . . . . .	61
<b>11. Лекция 11. Алгебра матриц Паули. Часть 2.</b>	<b>65</b>
<b>12. Лекция 12. Уравнение Клейна-Гордона-Фока. Уравнение Дирака.</b>	<b>67</b>
Уравнение Клейна-Гордона-Фока . . . . .	67
Вывод уравнения Дирака. Матрицы Дирака. . . . .	69
Симметричная форма уравнения Дирака. . . . .	72
Явные представления Гамма-матриц. . . . .	72
<b>13. Лекция 13. Алгебра матриц Дирака. Часть 1.</b>	<b>74</b>
Свёртки по индексам и другие полезные формулы . . . . .	74
Свойства матрицы $\gamma^5$ . . . . .	75
<b>14. Лекция 14. Алгебра матриц Дирака. Часть 2</b>	<b>77</b>
Вычисление следов матриц Дирака . . . . .	77
<b>15. Лекция 15. Разложение по базису. Преобразование Фирца.</b>	<b>80</b>
Полезная формула . . . . .	80
Базис и разложения по базису . . . . .	80
Ортогональное разложение единицы . . . . .	82
Преобразование Фирца . . . . .	83
<b>16. Лекция 16. Решение уравнения Дирака</b>	<b>85</b>
Решение уравнения Дирака для свободной частицы в стандартном представлении. . . . .	85
Дираковское сопряжение спиноров . . . . .	86
Внешнее поле в уравнении Дирака . . . . .	87
Уравнение Дирака для античастицы и оператор зарядового сопряжения . . . . .	88
Оператор зарядового сопряжения . . . . .	89
Свойства оператора зарядового сопряжения в стандартном представлении . . . . .	90
<b>17. Лекция 17. Матрицы плотности для неполяризованных фермионов и антифермионов</b>	<b>91</b>
Решение для позитронов в стандартном представлении . . . . .	91
Суммирование по спиновым состояниям . . . . .	92
Вычисление матрицы $\Lambda$ . . . . .	92

Вычисление матрицы $\tilde{\Lambda}$ . . . . .	93
<b>18. Лекция 18. Решение уравнения Дирака для свободных частиц в стандартном представлении</b>	<b>95</b>
Релятивистское обобщение оператора спина $\frac{1}{2}$ . . . . .	95
Преобразование Фолди-Вутхайзена . . . . .	95
Явный вид оператора спина . . . . .	98
Спиральные амплитуды . . . . .	99
<b>19. Лекция 19. Решение уравнения Дирака для свободных частиц</b>	<b>102</b>
Соотношение $u(-\varepsilon, -\vec{p}, -\lambda) = v(\varepsilon, \vec{p}, \lambda)$ . . . . .	102
Физическая интерпретация . . . . .	104
Лагранжиан свободного дираковского поля . . . . .	105
Решения для свободного дираковского поля . . . . .	107
<b>20. Лекция 20. Операторы рождения и уничтожения электронов и позитронов</b>	<b>109</b>
Энергия, импульс и заряд свободного дираковского поля . . . . .	109
Квантование дираковского поля и принцип Паули . . . . .	110
Вакуумные средние . . . . .	111
Нормальное и хронологическое произведения операторов дираковского поля	112
Свертка операторов дираковского поля . . . . .	113
<b>21. Лекция 21. Полный Лагранжиан КЭД.</b>	<b>115</b>
Глобальные калибровочные преобразования . . . . .	115
Локальные калибровочные преобразования . . . . .	117
Зарядовая чётность фотона и теорема Фарри . . . . .	119
<b>22. Лекция 22. Гамильтониан КЭД.</b>	<b>121</b>
Представления в квантовой теории . . . . .	121
Матрица рассеяния (S-матрица) . . . . .	125
Теорема Вика (без доказательства) . . . . .	128
<b>23. Лекция 23. Правила Фейнмана. Часть I.</b>	<b>130</b>
Сводка основных формул для получения правил Фейнмана . . . . .	130
Первый порядок теории возмущений . . . . .	130
Правила Фейнмана. Эпизод I . . . . .	134
<b>24. Лекция 24. Правила Фейнмана. Часть II.</b>	<b>135</b>
Второй порядок теории возмущений . . . . .	135
Правила Фейнмана. Эпизод II . . . . .	140
Правила Фейнмана для вычисления петель (без вывода) . . . . .	141
<b>25. Лекция 25. Ширины распадов и сечения реакций.</b>	<b>143</b>
Вычисление плотности конечных состояний . . . . .	144
Ширины распадов . . . . .	146
Сечение реакции . . . . .	147

Сечение реакции $1_i + 2_i \rightarrow 1_f + 2_f$ . . . . .	149
Реакции $2 \rightarrow 2$ и мандельштамовские переменные . . . . .	151
Кросс-каналы реакций в примерах . . . . .	152
<b>26. Лекция 26. Примеры вычислений процессов. Часть 1.</b>	<b>154</b>
Рассеяние электрона на мюоне . . . . .	154
Диаграмма Фейнмана для процесса . . . . .	154
Кинемантика . . . . .	155
Матричный элемент по правилам Фейнмана . . . . .	155
Дифференциальное сечение процесса . . . . .	157
<b>27. Лекция 27. Примеры вычислений процессов. Часть 2. Эффект Комптона</b>	<b>160</b>
Диаграммы Фейнмана для эффекта Комптона . . . . .	160
Кинемантика и мандельштамовские переменные . . . . .	160
Матричный элемент по правилам Фейнмана . . . . .	161
<b>28. Лекция 28. Эффект Комптона (продолжение)</b>	<b>166</b>
Вычисление сечения эффекта Комптона . . . . .	166
Нерелятивистский случай . . . . .	168
Ультрарелятивистский случай . . . . .	169
<b>29. Лекция 29. Примеры вычислений процессов. Часть 3.</b>	<b>170</b>
Аннигиляция $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	170
Матричный элемент по правилам Фейнмана . . . . .	171
Дифференциальное сечение . . . . .	171
Полное сечение . . . . .	172
Электрон-позитронная аннигиляция в адроны . . . . .	173
Матричный элемент по правилам Фейнмана . . . . .	174
Полное сечение . . . . .	174
Заряды кварков . . . . .	175
$e^+e^-$ - аннигиляция вблизи резонансов. . . . .	177
<b>30. Лекция 30. Процессы во внешнем поле. Часть 1.</b>	<b>178</b>
Рассеяние электрона в поле ядра . . . . .	178
Упругое рассеяние ультрарелятивистского электрона на протоне . . . . .	182
Диаграмма Фейнмана для процесса . . . . .	182
Матричный элемент по правилам Фейнмана . . . . .	183
Структура протонной вершины . . . . .	183
Электромагнитные формфакторы . . . . .	185
<b>31. Лекция 31. Процессы во внешнем поле. Часть 2.</b>	<b>187</b>
Дифференциальное сечение ультрарелятивистского электрона на протоне . . . . .	187
Электрический и магнитный формфакторы . . . . .	190
Расчет сечения для конкретного эксперимента . . . . .	190

<b>32. Лекция 32. Скалярная электродинамика</b>	<b>192</b>
Рассеяние электрона на $\pi^-$ -мезоне . . . . .	192
Правила Фейнмана для скалярной КЭД . . . . .	194
Дифференциальное сечение реакции $e^- \pi^- \rightarrow e^- \pi^-$ в скалярной КЭД . . .	196
Электромагнитный формфактор пиона $F_\pi(q^2)$ . . . . .	198
Распад $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ и число цветов кварков . . . . .	201
Излучение мягких фотонов . . . . .	203

# 1. Лекция 1. Общие принципы построения квантовой теории поля (КТП). Часть 1.

## Основные определения в пространстве Минковского

### 4-х вектора в пространстве Минковского

Опр: 4-х вектором  $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A^0, \vec{A})$  называется величина, которая при преобразованиях Лоренца изменяется по закону:

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

или  $A^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} A'^\nu$  суммирование по дважды повторяющимся индексам

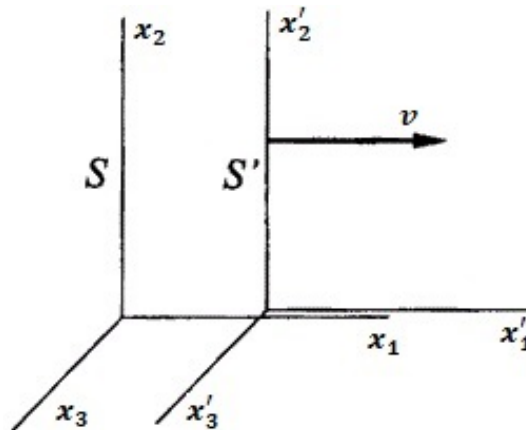


Рис. 1.1. Движущаяся ( $S'$ ) и неподвижная ( $S$ ) системы координат. Для простоты,  $S'$  движется относительно  $S$  со скоростью  $v$  вдоль оси  $x_1$ .

Опр:

$$\beta = \frac{v}{c}; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Опр:  $A^\mu$  - контравариантный 4-х вектор (индекс сверху).

Примеры 4-х векторов:  $x^\mu = (ct, \vec{x})$  и  $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ .

### Метрический тензор и скалярное произведение

Опр: Скалярным произведением 4-х векторов  $A^\mu$  и  $B^\nu$  называется величина:

$$(AB) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu, \quad (1.2)$$

где  $g_{\mu\nu}$  - метрический тензор. Он является характеристикой пространства, в котором рассматривается скалярное произведение.



В пространстве Минковского:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$(AB) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = (g_{\mu\nu} A^\mu) B^\nu = A_\nu B^\nu \quad (1.4)$$

$$(AB) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = (g_{\mu\nu} B^\nu) A^\mu = A^\mu B_\mu \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4) и (1.5) полностью эквивалентны

Как выглядит скалярное произведение двух 4-х векторов через компоненты?

$$\begin{aligned} \text{Подробно: } (AB) &= g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g_{0\nu} A^0 B^\nu + g_{1\nu} A^1 B^\nu + g_{2\nu} A^2 B^\nu + g_{3\nu} A^3 B^\nu = (\nu = \\ 0, \dots, 3) &= \underbrace{g_{00}}_{=1} A^0 B^0 + \underbrace{0 + 0 + 0}_{\text{т.к. недиагональные элементы} = 0} + \underbrace{g_{11}}_{=-1} A^1 B^1 + \underbrace{g_{22}}_{=-1} A^2 B^2 + \underbrace{g_{33}}_{=-1} A^3 B^3 = \\ &= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A^0 B^0 - (\vec{A}\vec{B}) \end{aligned}$$

Опр: Ковариантным 4-х вектором (индекс снизу) называется:

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \equiv g_{\mu\nu} A^\nu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A^0, -\vec{A}). \quad (1.6)$$

Тогда:  $(AB) = A^0 B^0 - (\vec{A}\vec{B})$ .

Важный случай:

$$A^2 = (AA) = A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \vec{A}^2$$

Пример: наиболее часто встречающийся в релятивистской теории частиц инвариант - квадрат массы покоя частицы:

$$m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) = p^\mu p_\mu = p^2,$$

т.е.  $p^2 = m^2 c^2$

Важные свойства:

1) Квадрат 4-х вектора инвариантен относительно преобразований Лоренца (является релятивистским инвариантом). Доказывается прямой подстановкой в (1.1)

2) Скалярное произведение двух 4-х векторов является релятивистским инвариантом.

Доказательство:

Возьмём два произвольных 4-х вектора и сложим их:  $A^\mu + B^\mu = C^\mu$ .

Возведём в квадрат правую и левую части:

$$\underbrace{A^2}_{\text{инвариант}} + \underbrace{B^2}_{\text{инвариант}} + \underbrace{2AB}_{\text{тогда это тоже инвариант}} = \underbrace{C^2}_{\text{инвариант}} \quad (1.7)$$

4-х градиент:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}; -\frac{\partial}{\partial x^1}; -\frac{\partial}{\partial x^2}; -\frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}; -\vec{\nabla} \right) \quad (1.8)$$

Почему в определении  $(\partial^\mu)$  вместо " $(+\vec{\nabla})$ " стоит " $(-\vec{\nabla})$ "? - Чтобы ввести соответствие с квантовой механикой:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) = \hat{H} \Psi(x) \Rightarrow \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t};$$

По определению  $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ .

Тогда если ввести 4-оператор  $\hat{p}^\mu = (\hat{H}, \hat{p})$ , то:

$$\hat{p}^\mu = i\hbar \partial^\mu \quad (1.9)$$

В литературе  $\partial^\mu$  часто обозначают как  $\nabla^\mu$ .

**Символ Кронекера**

Опр: Символом Кронекера называется величина:

$$\delta^{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} \equiv \delta_\nu^\mu \equiv \delta_\mu^\nu \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Явные вычисления дают, что для пространства Минковского:

$$\delta_\nu^\mu = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \equiv g_\nu^\mu.$$

## Полностью антисимметричный тензор 4-ого ранга (псевдотензор 4-ого ранга)

Опр: Псевдотензором 4-ого ранга  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  называют величину, удовлетворяющую условию:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \quad (1.11)$$

и при любой другой нечетной перестановке индексов, но  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta}$  и при любой другой четной перестановке индексов.

Соглашение:  $\varepsilon^{0123} = -1$

Примеры:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0131} &= -\varepsilon^{0131} \Rightarrow \varepsilon^{0131} = 0 \\ \varepsilon^{3210} &= -\varepsilon^{0321} = -\varepsilon^{0132} = \varepsilon^{0123} = -1 \\ \varepsilon^{1302} &= \varepsilon^{0132} = -\varepsilon^{0123} = +1 \end{aligned}$$

Замечание: Если в какой-либо компоненте  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  совпадают хотя бы 2 индекса, то эта компонента = 0.

Следствие:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Rightarrow \varepsilon_{0123} = +1 \quad (1.12)$$

(компонента с верхними индексами = минус компонента с нижними индексами).  
Действительно, чтобы получить тензор с нижними индексами, надо их опустить при помощи метрического тензора:  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} \varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'}$ . Но поскольку метрический тензор диагональный, а  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  устроен так, что  $\varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} \neq 0$  тогда и только тогда когда  $\mu' \neq \nu' \neq \alpha' \neq \beta'$ , получаем:  $g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} = -1 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$

## 2. Лекция 2. Общие принципы построения квантовой теории поля (КТП). Часть 2.

Продолжаем изучать свойства полностью антисимметричного тензора. Свёртки:

- $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -4! = -24$

Это также и число ненулевых компонент в  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ .

- $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\xi\eta\alpha\beta} = T_{\zeta\eta}^{\mu\nu} =$  (по определению полностью антисимметричного тензора)  $= -T_{\zeta\eta}^{\nu\mu} = -T_{\eta\zeta}^{\mu\nu} =$  (этот тензор  $T$  должен быть комбинацией метрических тензоров)  $= C \cdot (g_{\zeta}^{\mu}g_{\eta}^{\nu} - g_{\eta}^{\mu}g_{\zeta}^{\nu}) =$  (константу  $C$  находим из условия  $\mu = \zeta, \nu = \eta$ )  $= -2 \cdot (g_{\zeta}^{\mu}g_{\eta}^{\nu} - g_{\eta}^{\mu}g_{\zeta}^{\nu})$

Это можно записать по-другому:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\xi\eta\alpha\beta} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} g_{\zeta}^{\mu} & g_{\eta}^{\mu} \\ g_{\zeta}^{\nu} & g_{\eta}^{\nu} \end{pmatrix}$$

- Свёртка с 8 свободными индексами. Аналогично предыдущему пункту, из соображений симметрии при перестановке индексов получаем:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\eta\varepsilon\delta} = \text{const} \cdot \det \begin{pmatrix} g_{\zeta}^{\mu} & g_{\eta}^{\mu} & g_{\varepsilon}^{\mu} & g_{\delta}^{\mu} \\ g_{\zeta}^{\nu} & g_{\eta}^{\nu} & g_{\varepsilon}^{\nu} & g_{\delta}^{\nu} \\ g_{\zeta}^{\alpha} & g_{\eta}^{\alpha} & g_{\varepsilon}^{\alpha} & g_{\delta}^{\alpha} \\ g_{\zeta}^{\beta} & g_{\eta}^{\beta} & g_{\varepsilon}^{\beta} & g_{\delta}^{\beta} \end{pmatrix} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} g_{\zeta}^{\mu} & g_{\eta}^{\mu} & g_{\varepsilon}^{\mu} & g_{\delta}^{\mu} \\ g_{\zeta}^{\nu} & g_{\eta}^{\nu} & g_{\varepsilon}^{\nu} & g_{\delta}^{\nu} \\ g_{\zeta}^{\alpha} & g_{\eta}^{\alpha} & g_{\varepsilon}^{\alpha} & g_{\delta}^{\alpha} \\ g_{\zeta}^{\beta} & g_{\eta}^{\beta} & g_{\varepsilon}^{\beta} & g_{\delta}^{\beta} \end{pmatrix}$$

- Свёртка с 6 свободными индексами.

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\nu\alpha\beta} = -3! \cdot g_{\zeta}^{\mu}$$

### Системы единиц

#### Система единиц Хевисайда

В квантовой теории поля и в экспериментах по физике элементарных частиц  $v_{\text{хар}} \sim c$ .

Признаком квантовости явления можно считать наличие в формуле постоянной Планка  $\hbar \Rightarrow \hbar$  определяет масштаб всех величин в квантовой физике. Поэтому естественно положить:

$$\hbar = c = 1$$

Изменяются размерности физических величин.

$$x = vt; p = mv; E = mc^2; E = \hbar\omega \sim \frac{\hbar}{t} \Rightarrow [E] = [p] = [m] = [x^{-1}] = [t^{-1}].$$

Орбитальный момент  $\vec{J} \sim \vec{x} \times \vec{p}$ , действие  $S = \int L dt \Rightarrow [v] = [S] = [J] = 1$

Сила:  $F \sim \frac{p}{t} \Rightarrow [F] = [m^2] = [x^{-2}]$

Вопрос: каковы размерности заряда  $e$ , электрического  $E$  и магнитного  $H$  полей?

### Система единиц СГС

Введем заряды  $Q_1 = q_1 e$  и  $Q_2 = q_2 e$ , где  $e$  - элементарный заряд, равный заряду электрона, т.е.  $e = -|e|$ , а  $q_1$  и  $q_2$  - безразмерные числа.

Закон Кулона:  $|\vec{F}| = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = e^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}$ .

Поскольку  $[F] = [r^{-2}] \Rightarrow [e]_{\text{СГС}} = 1$

Электрическая сила:  $\vec{F} = Q \vec{E} = e q \vec{E}$

Сила Лоренца:  $\vec{F} = \frac{Q}{c} \vec{v} \times \vec{H}$ ,

то  $[E]_{\text{СГС}} = [D]_{\text{СГС}} = [H]_{\text{СГС}} = [B]_{\text{СГС}} = [m^2] = [x^{-2}]$ .

### Уравнения Максвелла в СГС:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{D} = 4\pi \rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

### Рационализация системы Хевисайда

Предложение: уравнения Максвелла - фундаментальные уравнения и в них нет места "4π"

По Хевисайду:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{D} = \rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Новая запись закона Кулона:  $|\vec{F}| = \frac{e^2}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ .

### Мы будем использовать систему единиц, принятую в КТП

В этой системе:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{D} = \rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Закон Кулона:  $|\vec{F}| = \frac{e^2}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \alpha_{em} \frac{q_1 q_2}{r^2}$

$\alpha_{em}$  - постоянная тонкой структуры. На самом деле ее величина **зависит** от масштаба энергий, при которых происходит процесс.

Однако в области, где справедлив закон Кулона:

$$\alpha_{em} \approx \frac{1}{137} \approx \text{const.}$$

Вопрос: Какова естественная единица измерения в принятой нами системе?

Ответ: электронвольт (эВ) или  $1\text{ГэВ}=10^9\text{эВ}$ . Реже будем использовать  $1\text{МэВ}=10^6\text{эВ}$  и  $1\text{КэВ}=10^3\text{эВ}$ .

Опр: 1 эВ - это энергия, которую приобрела частица с зарядом, равным модулю заряда электрона, пройдя разность потенциалов в 1 В.

Естественность: ускорители разгоняют заряженные частицы в электрических полях, а детекторы меряют их характеристики в электрических и магнитных полях.

Пересчеты:

$$\begin{aligned} 1\text{ГэВ} &\approx 1,78 \cdot 10^{-24}\text{г} \approx 1,6 \cdot 10^{-10}\text{Дж}; \\ 1\text{ГэВ}^{-1} &\approx 6,58 \cdot 10^{-25}\text{сек} \approx 1,97 \cdot 10^{-14}\text{см}; \\ |e| \cdot 1\text{Тл} &\approx 57\text{эВ}^2; m_p \approx 1\text{ГэВ}; m_e \approx 0,51\text{МэВ}. \end{aligned}$$

Внесистемная единица  $1\text{Ф}=10^{-13}\text{см}$  (1 Ферми) - определяет размер протона.

Для грубых оценок удобно:  $1\text{ГэВ}^{-1} \approx \frac{1}{5}\text{Ф} \approx 5 \cdot 10^{-25}\text{сек}$ .

## Что имеет смысл требовать от КТП?

В нерелятивистской квантовой механике (НКМ)  $E_{xap} \sim mv_{xap}^2 \ll m \Rightarrow$  частицы не могут исчезнуть и не могут родиться из-за запрета по величине энергии  $\Rightarrow$  стабильные частицы. Описываются волновыми функциями:  $\Psi(t, \vec{x})$  или  $\Psi(t, \vec{p})$ :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi + \text{начальные условия} + \int d\vec{j} |\Psi(t, \vec{j})|^2 = 1$$

где  $\hat{H}$  - эрмитовский оператор

Пример: свободная частица  $\Psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-iEt + i\vec{p}\vec{x}}$

В КТП возможны распады  $\Rightarrow$  система становится открытой  $\Rightarrow \omega(t) \sim |\Psi(t, \vec{x})|^2 \sim e^{-\Gamma t} \Rightarrow E_{КТП} = E - \frac{i}{2}\Gamma \Rightarrow \hat{H}$  - не является эрмитовым  $\Rightarrow$  операторный подход НКМ для КТП плохо подходит.

В НКМ  $v_{xap} \ll 1 \Leftrightarrow c = \infty \Rightarrow$  возможность сколь угодно точного измерения  $\vec{p}$  или  $\vec{x}$  за сколь угодно малые промежутки времени  $\Delta t \Rightarrow$  пригодность описания системы в терминах  $\Psi(t, \vec{x})$  или  $\Psi(t, \vec{p})$ . Соотношение неопределенности накладывает ограничение на совместное измерение  $\vec{p}$  и  $\vec{x}$  ( $\Delta p \Delta x \geq 1$ ), но не на каждое по отдельности!

В КТП  $c=1$ :

$$\begin{cases} \Delta x \sim \Delta t \\ \Delta p \Delta x \geq 1 \end{cases} \Downarrow \Delta p \Delta t \geq 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta p \Rightarrow 0$  тогда и только тогда когда  $\Delta t \Rightarrow \infty \Rightarrow \Psi(t, \vec{p})$  не имеет смысла

$$\begin{cases} \Delta x \sim \Delta t \\ \Delta E \Delta t \geq 1 \end{cases} \Downarrow \Delta x \Delta E \geq 1$$

Для  $e^-$  в системе покоя  $\Delta E \sim m_e \Rightarrow x_{\text{мин измеримый}} \sim \frac{1}{m_e} \geq 2 \cdot 10^{-3}\text{ГэВ}^{-1}$

Для ультрарелятивистского  $e^-$   $\Delta E \sim p \Rightarrow x_{\text{мин}} \sim \frac{1}{p} = \lambda_{\text{де Бройль}}$



Описание системы в терминах  $\Psi(\vec{x}, t)$  в КТП смысла не имеет.

### Типичая постановка эксперимента в КТП

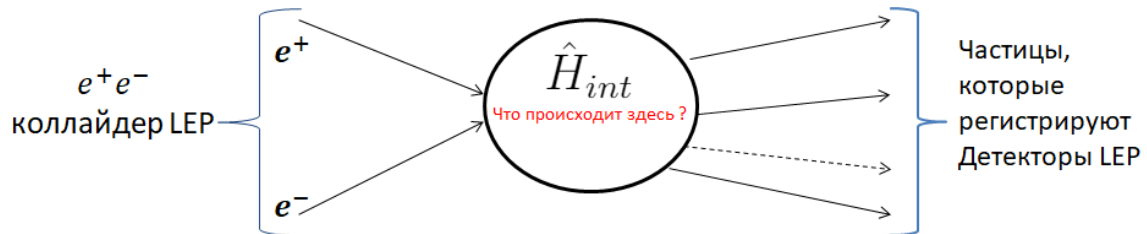


Рис. 2.1. Схема эксперимента электрон-позитронного коллайдера LEP

### Основная задача КТП

Мы знаем характеристики начальных частиц, которые мы разгоняем, также мы знаем характеристики конечных частиц, которые попадают в детектор. Однако мы не знаем что происходит в момент столкновения и нам нужно построить теорию взаимодействия частиц, которая будет предсказывать вероятность того или иного конечного состояния, получаемого в процессе этого взаимодействия.

### 3. Лекция 3. Примеры решения задач.

#### Задача про LEP

Условие:

Электрон-позитронный коллайдер LEP работал в ЦЕРНе с 1989 по 2000 года и являлся предшественником Большого Адронного Коллайдера. Одной из задач LEP был поиск бозона Хиггса в реакции  $e^+e^- \rightarrow Z^0 H$ . Суммарная энергия  $e^+e^-$  пучка была доведена до  $E = 209$  ГэВ. При такой энергии пучка обнаружить бозон Хиггса не удалось, и руководство приняло решение о его закрытии и начале строительства на его месте вышеупомянутого БАК, который спустя 12 лет всё-таки открыл бозон Хиггса. В 2000 году инженеры LEP имели возможность увеличить его энергию на  $\alpha = 10\%$  и продолжить эксперимент с более высокой энергией. Получилось ли бы открыть бозон Хиггса на LEP, если его масса  $m_H \approx 125$  ГэВ, а масса  $Z^0$   $m_{Z^0} \approx 91$  ГэВ ?

Решение:

В любом процессе выполняется закон сохранения энергии и импульса. Следовательно выполняется закон сохранения 4-х вектора энергии-импульса (4-х импульса)  $P^\mu = (E, \vec{p})$ . Квадрат 4-х импульса частицы является инвариантом:  $P^2 = inv = m^2$ , где  $m$  - масса покоя этой частицы.

Рассмотрим лабораторную систему отсчёта (ЛСО).

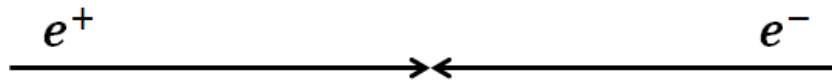


Рис. 3.1. Столкновение электронного и позитронного пучков в ЛСО

Начальный 4-х импульс  $e^+e^-$  пары:

$$P = (E_{min}, \vec{0}) \quad (3.1)$$

где  $E_{min}$  - минимальная энергия  $e^+e^-$  пары чтобы родить пару  $Z^0 H$ .

С другой стороны, по закону сохранения:

$$P^\mu = P_H^\mu + P_{Z^0}^\mu \quad (3.2)$$

где  $P_H^\mu, P_{Z^0}^\mu$  - 4-х импульсы  $H$  и  $Z^0$  соответственно.

Возведём правую и левую части (3.2) в квадрат:

$$P^2 = E_{min}^2 = (P_H + P_{Z^0})^2 \quad (3.3)$$

Так как квадрат 4-х импульса является инвариантом, вычислим  $(P_H + P_{Z^0})^2$  не в ЛСО, а в системе центра масс  $H$  и  $Z^0$ . В этой СО импульсы  $H$  и  $Z^0$  равны и направлены противоположно друг другу. Пороговая энергия  $E_{min}$  соответствует



случаю когда  $H$  и  $Z^0$  покоятся, т.е. вся энергия  $e^+e^-$  пары ушла на рождение  $H$  и  $Z^0$  в состоянии покоя. Тогда в этой СО:

$$(P_H + P_{Z^0}) = P_{HZ^0} = (m_H + m_{Z^0}, \vec{0}) \quad (3.4)$$

Итого, из (3.3)

$$E_{min}^2 = (m_H + m_{Z^0})^2 \quad (3.5)$$

$$E_{min} = m_H + m_{Z^0} = 216 \text{ ГэВ} \quad (3.6)$$

Если бы повысили энергию LEP на  $\alpha\%$  стало бы  $\approx 230$  ГэВ.  $230 \text{ ГэВ} > 216 \text{ ГэВ}$   
Ответ: После повышения энергии LEP мог бы открыть бозон Хиггса.

### Задача про распад $B^0 \rightarrow J/\Psi \pi^0$

Условие: Покоящийся  $B^0$ -мезон распадается следующим образом:  $B^0 \rightarrow J/\Psi \pi^0$ . Масса  $B^0$  равна  $M$ , масса  $J/\Psi$  равна  $m_1$ , масса  $\pi^0$  равна  $m_2$ . Требуется найти энергию  $E_1$  и модуль импульса  $|\vec{p}_1|$   $J/\Psi$ -мезона в системе отсчёта где  $B^0$ -мезон покоится.

Решение:

Запишем 4-х импульсы  $B^0$ ,  $J/\Psi$  и  $\pi^0$  в СО покоя  $B^0$ :

$$P^\mu = (M, \vec{0}) \quad (3.7)$$

$$P_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1) \quad (3.8)$$

$$P_2^\mu = (E_2, \vec{p}_2) \quad (3.9)$$

Запишем закон сохранения 4-х импульса:

$$P^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu \quad (3.10)$$

Перенесём  $P_2^\mu$  слева направо и возведём обе части в квадрат:

$$(P^\mu - P_2^\mu)^2 = (P_1^\mu)^2 \quad (3.11)$$

Получим:

$$M^2 + m_2^2 - 2(M \cdot E_2 - \vec{0} \cdot \vec{p}_2) = m_1^2 \quad (3.12)$$

Отсюда:

$$E_2 = \frac{1}{2M}(M^2 + m_2^2 - m_1^2) \quad (3.13)$$

Теперь найдём  $|\vec{p}_1|$ :

$$|\vec{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = \frac{1}{2M} \sqrt{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4M^2 m_1^2} = \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{2M} \sqrt{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2} \quad (3.15)$$

Для громоздкого выражения под корнем в (3.15) вводят специальное обозначение.

Опр: Треугольная функция от аргументов  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned}\lambda(a, b, c) &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = \\ &= (a + b - c)^2 - 4ab \\ &= (a - b + c)^2 - 4ac \\ &= (a - b - c)^2 - 4bc\end{aligned}$$

Тогда (3.15) запишется как:

$$|\vec{p}_1| = \frac{1}{2M} \lambda^{\frac{1}{2}}(M^2, m_1^2, m_2^2) \quad (3.16)$$

Теперь подставим числа:  $M = 5.28$  ГэВ,  $m_1 = 3.1$  ГэВ,  $m_2 = 0.14$  ГэВ.

Так как  $M$  и  $m_1$  гораздо больше  $m_2$  положим  $m_2 \approx 0$ .

Тогда  $E_1 \approx \frac{M^2 + m_1^2}{2M} = \frac{1}{2}(M + \frac{m_1}{M}m_1) \approx 3.55$  ГэВ,  $|\vec{p}_1| \approx 1.73$  ГэВ.

Скорость  $J/\Psi$  найдём из соотношения:  $\beta = \frac{v}{c} = \frac{p_1}{E_1}$ . Тогда (учтя что  $c = 1$ )  $v \approx 0.5$

### Задача на доказательство неравенства $(P_1 P_2) \geq m_1 m_2$

Условие: Пусть в некоторой СО имеются 4-х импульсы  $P_1^\mu$  и  $P_2^\mu$ :  $P_1^2 = m_1^2$ ,  $P_2^2 = m_2^2$ . Доказать, что  $(P_1 P_2) \geq m_1 m_2$ .

Доказательство: Мы уже знаем, что скалярное произведение двух 4-х векторов является инвариантом (1.7). Значит оно одинаково во всех инерциальных СО. Произведение масс покоя в правой части также является релятивистским инвариантом. Поэтому докажем неравенство в инерциальной СО, в которой частица, соответствующая 4-х импульсу  $P_1^\mu$ , покоится.

Тогда в этой СО:  $P_1^\mu = (m_1, \vec{0})$ ,  $P_2^\mu = (E_2, \vec{p}_2)$ , их скалярное произведение  $(P_1 P_2) = m_1 E_2 = m_1 \cdot \frac{m_2}{\sqrt{1-v^2}}$ . Так как  $v \geq 0 \Rightarrow m_1 \cdot \frac{m_2}{\sqrt{1-v^2}} \geq m_1 m_2 \Rightarrow (P_1 P_2) \geq m_1 m_2$ , а равенство достигается тогда и только тогда когда в данной СО покоятся обе частицы.

### Задача Артема Исааковича Алиханьяна

Первый директор Ереванского физического института Артем Исаакович Алиханьян в середине прошлого века задавал данную задачу каждому, кто хотел поработать у него в институте. Если человек эту задачу не решал, его сразу же выгоняли и впредь близко не подпускали к физическому институту.

Условие:

Найти скорость электрона  $V_e$  если: **а)** Энергия электрона  $E = 0.1$  КэВ. **б)** Энергия электрона  $E = 1$  ГэВ.

Решение:

Масса покоя электрона  $m_e = 0.51$  МэВ (это нужно знать наизусть).

В случае **а)**  $m_e \gg E$ , это означает, что электрон **нерелятивистский**, и для расчёта его скорости можно использовать классическую формулу  $E = \frac{m_e v_e^2}{2} \Rightarrow v =$

$$\sqrt{\frac{2E}{m_e}} = 2 \cdot 10^{-2}$$

В случае **б)**  $m_e \ll E$ , это означает, что электрон ультрарелятивистский, и для расчёта его скорости нужно использовать релятивистскую формулу:  $E = \frac{m_e}{\sqrt{1-v_e^2}} \Rightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{E}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_e}{E}\right)^2 \approx 1$

## Задача про КЕК В

Условие:

С 1999 по 2010 года в Японии работал  $e^+e^-$  коллайдер КЕК В. Энергии пучков электронов и позитронов на КЕК В были различные (асимметричные  $e^+e^-$  пучки):  $E_- = 8$  ГэВ,  $E_+ = 3.5$  ГэВ. Можно ли на этом коллайдере родить пару **а)**  $B^0\bar{B}^0$  **б)**  $B_s^0\bar{B}_s^0$ ? Как изменится ответ, если поднять энергию пучка позитронов до 3.7 ГэВ? Масса  $B^0$ -мезона  $M_B = 5.28$  ГэВ, масса  $B_s^0$ -мезона  $M_{B_s} = 5.37$  ГэВ.

Решение:

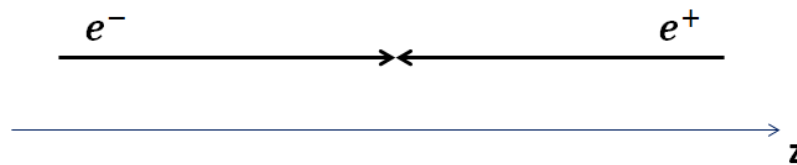


Рис. 3.2. Столкновение электронного и позитронного пучков в ЛСО. Ось  $z$  направлена по движению  $e^-$ .

Так как электрон и позитрон ультрарелятивистские (см. предыдущую задачу), их импульс равен энергии  $|\vec{p}| = E$ . 4-х импульс электрона и позитрона в ЛСО, с осью  $z$  по движению электрона:  $P_-^\mu = (E_-, 0, 0, E_-)$ ,  $P_+^\mu = (E_+, 0, 0, -E_+)$ .

Закон сохранения 4-х импульса:

$$P_-^\mu + P_+^\mu = P^\mu \quad (3.17)$$

где  $P^\mu$  - суммарный импульс  $B\bar{B}$ -пары.

Возводим в квадрат:

$$P_-^2 + P_+^2 + 2(P_-P_+) = P^2 \quad (3.18)$$

$P_-^2 = P_+^2 = m_e^2 \approx 0$ , т.к электрон и позитрон ультрарелятивистские, мы пренебрегаем их массой покоя.

$$P^2 = 2(P_-P_+) = 2(E_-E_+ + E_-E_+) = 4E_-E_+$$

Пара  $B^0\bar{B}^0$  ( $B_s^0\bar{B}_s^0$ ) может родиться, если  $P^2 \geq (2M_B)^2$  (или  $(2M_{B_s})^2$ ) т.е. если  $E_+E_- \geq M_B^2$  (или  $M_{B_s}^2$ )

В случае **а)**  $E_+E_- > M_B^2$ , в случае **б)**  $E_+E_- < M_{B_s}^2$

На КЕК В могли рождаться  $B^0\bar{B}^0$ -пары, но не могли  $B_s^0\bar{B}_s^0$ -пары.

Однако если поднять энергию пучка позитронов до 3.7 ГэВ, то смогут рождаться обе пары частиц.

## 4. Лекция 4. Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа

Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа в классической механике.



Рис. 4.1. Одномерное движение частицы из точки А в точку В.

Одним из способов нахождения классической траектории является рассмотрение функционала:

$$S = S(t_A, t_B, x_A, x_B) = \int_{t_A}^{t_B} dt L(t, x, \dot{x}) \quad (4.1)$$

где  $S$  - действие,  $L$  - функция Лагранжа классической системы:

$L(t, x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$  - разность кинетической и потенциальной энергий классической системы.

Далее применим **принцип наименьшего действия Гамильтона**:

Траектория движения частицы из А в В определяется условиями:

- $\delta S = 0$  (условие минимума функционала действия)
- $\delta x_A = \delta x_B = 0$  (условие того, что точки А и В - фиксированы).

Опр: Вариацией называется разность двух различных положений материальной точки, которые **не противоречат** возможности её движения.

Обозначение:  $\delta\alpha$  называют вариацией величины  $\alpha$ .

Пример: вариация координаты:  $x_{B_1} = x(t_B)$ ,  $x_{B_2} = x(t_B)$ , тогда  $\delta x_B \equiv x_{B_1} - x_{B_2}$

Замечание: В общем случае  $\delta x \neq dx$ !

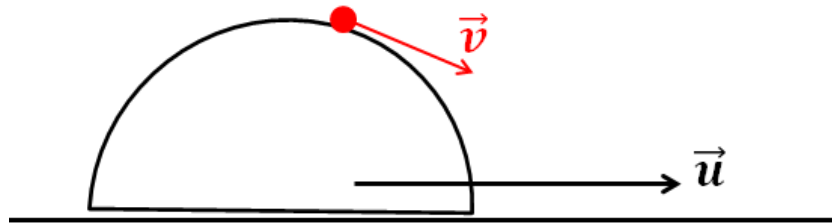


Рис. 4.2. Шарик на поверхности полуцилиндра. Вид сбоку.

Пример: Шарик А скатывается по поверхности полуцилиндра, движущегося со скоростью  $\vec{u}$  (рис. 4.2), дифференциал координаты:  $d\vec{r} = (\vec{u} + \vec{v})dt$ , вариация координаты:  $\delta\vec{r} = d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = (v_1 - v_2)dt \Rightarrow$  всегда лежит в плоскости, касательной к поверхности цилиндра в данной точке (рис. 4.3).

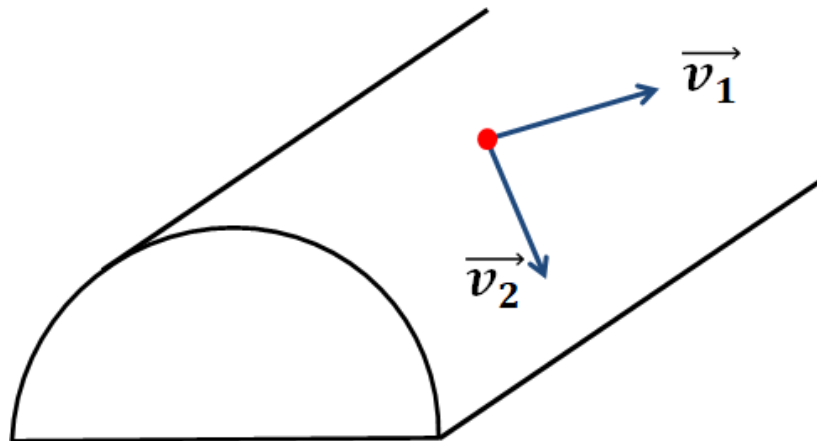


Рис. 4.3. Шарик на поверхности полуцилиндра. Вид сверху.

$v_1$  и  $v_2$  - всегда лежат в плоскости, касательной к поверхности цилиндра, но  $v_1 + \vec{u}$  и  $v_2 + \vec{u}$  - нет, если  $\vec{u} \neq 0$ .

Таким образом

$$\begin{cases} d\vec{r} \neq \delta\vec{r}, & \text{если } \vec{u} \neq 0 \\ d\vec{r} = \delta\vec{r}, & \text{если } \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Этот весьма красивый пример красноречиво демонстрирует, что понятия полного дифференциала и вариации не являются тождественными.

Пример:  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . Покажем, что  $\delta$  и  $\frac{d}{dt}$  - коммутируют, т.е. что

$$\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}\delta x.$$

Действительно:

$$\delta\dot{x} \equiv \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = \frac{d}{dt}x_1 - \frac{d}{dt}x_2 = \frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = \frac{d}{dt}\delta x$$

Доказательство проведено только исходя из определения вариации величины  $\alpha$  как  $\delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ .

Из условия  $\delta S = 0$  следуют уравнения Лагранжа, которые полностью определяют движение классической системы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

При выводе считается, что  $x$  и  $\dot{x}$  - независимые переменные  
Вывод уравнений Лагранжа:

$$\Delta t = t_B - t_A \text{ и } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) = \delta x \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta x, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &\equiv S(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, \Delta t) - S(x, \dot{x}, \Delta t) = \int_{t_A}^{t_B} dt (L(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) - \\ &- L(t, x, \dot{x})) = \int_{t_A}^{t_B} dt \left[ L(x, \dot{x}, t) + \delta x \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} + \delta \dot{x} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} - L(x, \dot{x}, t) \right] = \\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)}_{=0 \text{ т.к. } \delta x \text{ произвольна}} \delta x + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_A^B}_{=0 \text{ т.к. } A \text{ и } B \text{ фиксированы}} \end{aligned}$$

Отсюда следует (4.2).

Пример: вычисления классического действия  $S_{cl}$  для свободной частицы (одномерный случай).

Лагранжиан:  $L(t, x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2$

Уравнения Лагранжа:  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = const = v \Rightarrow x(t) = x_0 + vt$ .

Условия:  $x(t_A) = x_A, x(t_B) = x_B \Rightarrow v = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \Rightarrow S_{cl} = \int_{t_A}^{t_B} L(t, x, \dot{x}) dt = \frac{mv^2}{2} (t_B - t_A) = \frac{m}{2} \frac{(x_B - x_A)^2}{t_B - t_A}$ .

В этом простейшем примере видно, что

$$S = S(t_A, t_B, x_A, x_B) = S(\Delta t, \Delta x).$$

## Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа в теории поля.

- Требования релятивистской инвариантности:

$$dt \Rightarrow dt dx^1 dx^2 dx^3 = dt d\vec{x} = d^4x$$

Покажем что  $d^4x$  - релятивистски инвариантен:

$$\begin{aligned} d^4x &= dt dx^1 dx^2 dx^3 = dt dx^1 dx^{2'} dx^{3'} = dt' dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial t'} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial t}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \end{pmatrix} \right| = \\ &= dt' dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \right| = d^4x' \\ &= 1 \text{ т.к. } \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \end{aligned}$$

- Поля описываются функциями поля  $\varphi_i(x)$ , где  $i$  - набор квантовых чисел, характеризующих поле.

Пример: электромагнитное поле описывается 4-х потенциалом

$$A^\mu(x) = (\varphi(x), \vec{A}(x)),$$

где:

$\varphi(x)$  - скалярный потенциал;

$\vec{A}(x)$  - векторный потенциал.

Функции поля  $\varphi_i(x)$  играют роль "координат" поля:

$$x \Rightarrow \varphi_i(x); \dot{x} \Rightarrow \partial^\nu \varphi(x)$$

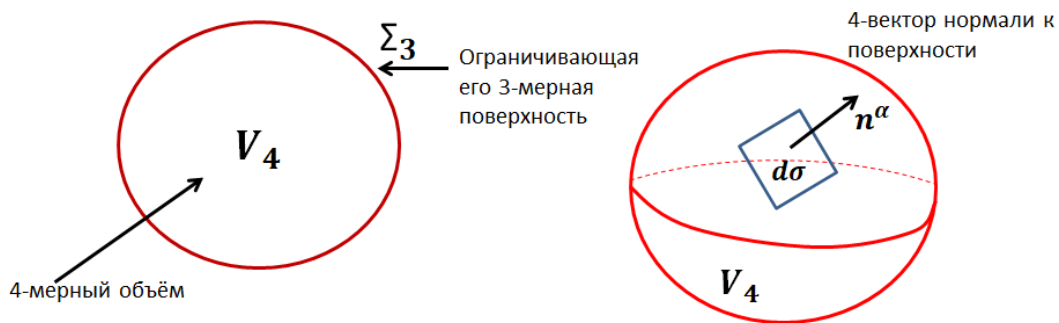


Рис. 4.4. 4-мерный объём  $V_4$

Действие запишется как:

$$S = \int_{V_4} d^4x \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x)) \quad (4.3)$$

где  $\mathcal{L}$  - плотность функции Лагранжа или Лагранжиан.

Принцип наименьшего действия:  $\delta S = 0$  при условии, что  $\delta\varphi_i(x) \Big|_{\Sigma_3=0}$

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \varphi_i)} = 0 \quad (4.4)$$

Вывод уравнений Лагранжа для поля идейно абсолютно аналогичен выводу уравнений Лагранжа в классической механике:

$$\delta(\partial^\nu \varphi_i(x)) = \partial^\nu \tilde{\varphi}_i(x) - \partial^\nu \varphi_i(x) = \partial^\nu (\tilde{\varphi}_i(x) - \varphi_i(x)) = \partial^\nu \delta\varphi_i(x),$$

где было для удобства введено обозначение

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) + \delta\varphi_i(x)$$

Тогда:

$$\delta S = \int_{V_4} d^4x \left( \mathfrak{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\nu \tilde{\varphi}_i(x)) - \mathfrak{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x)) \right) = \int_{V_4} d^4x \left( \mathfrak{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x)) + \delta\varphi_i(x) \frac{\partial \mathfrak{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x))}{\partial \varphi_i(x)} + \delta(\partial^\nu \varphi_i(x)) \frac{\partial \mathfrak{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x))}{\partial(\partial^\nu \varphi_i(x))} - \mathfrak{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x)) \right)$$

Аналогично классической механике можем написать:

$$\partial^\nu \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \delta\varphi_i \right) = \delta\varphi_i \partial^\nu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \underbrace{(\partial^\nu \delta\varphi_i)}_{=\delta(\partial^\nu \varphi_i)}$$

Таким образом:

$$0 = \delta S = \int_{V_4} d^4x \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_i} - \partial^\nu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \right) + I, \text{ где}$$

$$I = \int_{V_4} d^4x \partial^\nu \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \delta\varphi_i \right) = \int_{\Sigma_3} d^3x \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \underbrace{\delta\varphi_i \Big|_{\Sigma_3}}_{=0 \text{ по условию}} = 0$$

Отсюда следует (4.4)

Замечание: Для простоты мы рассматривали Лагранжиан, зависящий от одной функции поля  $\varphi$ . Но функций поля может быть несколько:  $\mathfrak{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x), \Psi_j(x), \partial^\nu \Psi_j(x))$ . Например, в КЭД Лагранжиан зависит от полей фотонов, электронов, мюонов и т.д.

Замечание: В классической механике функция Лагранжа это разность кинетической и потенциальной энергии. В КТП мы пока что не знаем явного вида Лагранжиана.

Пример: уравнение Лагранжа для электромагнитного поля:  $\varphi_i(x) \Rightarrow A^\mu(x)$ :

$$\frac{\partial \mathfrak{L}(A^\mu(x), \partial^\nu A^\mu(x))}{\partial A^\mu(x)} - \partial^\nu \frac{\partial \mathfrak{L}(A^\mu(x), \partial^\nu A^\mu(x))}{\partial(\partial^\nu A^\mu(x))} = 0$$



## 5. Лекция 5. Классическое электромагнитное поле.

В качестве наблюдаемых для классического электромагнитного поля выступают напряженности электрического и магнитного полей:

$$\vec{E} = (E^1, E^2, E^3) \text{ и } \vec{H} = (H^1, H^2, H^3)$$

их можно выразить, используя компоненты 4-потенциала:

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}) \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

следующим образом:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A^0$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}; \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}; \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right).$$

Величины  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не изменятся, если сделать замену:

$$A^\mu(x) \Rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x), \quad (5.1)$$

где  $f(x)$  - произвольная функция, которая определяет конкретный выбор (калибровку) 4-потенциала.

Пример: Покажем что калибровка не меняет напряжённость электромагнитного поля.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A^0 \rightarrow -\frac{\partial(\vec{A} - \vec{\nabla} f)}{\partial t} - \vec{\nabla}(A^0 + \frac{\partial f}{\partial t}) = \underbrace{+\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} f - \vec{\nabla} \frac{\partial f}{\partial t}}_{=0 \text{ т.к. } \vec{\nabla} \text{ и } \frac{\partial}{\partial t} \text{ коммутируют}} + \vec{E} = \vec{E}$$

Для релятивистски-инвариантного описания электромагнитного поля удобно ввести тензор напряженности электромагнитного поля  $F^{\mu\nu}(x)$ .

Опр:

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \Rightarrow F^{\mu\nu}(x) = -F^{\nu\mu}(x) \text{ (антисимметричный тензор).}$$

Покомпонентно:

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}$$

С нижними индексами:

$$F_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Разберемся с компонентами тензора напряженности электромагнитного поля:

- Т.к. данный тензор по определению антисимметричный, то  $F^{00} = -F^{00} \Rightarrow F^{00} = 0$ , аналогично  $F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0$
- Далее:

$$F^{01} = \partial^0 A^1(x) - \partial^1 A^0(x) = \frac{\partial}{\partial t} A^1(x) + \frac{\partial}{\partial x^1} A^0(x) = -E^1 = -F^{10}.$$

- Аналогично:

$$\begin{aligned} F^{02} &= -F^{20} = -E^2, F^{03} = -F^{30} = -E^3; \\ F^{12} &= \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = -H^3 = -F^{21}; \\ F^{13} &= \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\frac{\partial A^3}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^3} = +H^2 = -F^{31}; \\ F^{23} &= \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -\frac{\partial A^3}{\partial x^2} + \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = -H^1 = -F^{32}. \end{aligned}$$

Опр: Дуальный тензор

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (5.2)$$

Релятивистские инварианты:

- $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ik} F_{ik} = 2\vec{E}^2 - 2\vec{H}^2 = 2(\vec{E}^2 - \vec{H}^2)$ ,  
где  $i, k=1,2,3$ .
- $\tilde{F}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = 8(\vec{E}\vec{H})$ . Откуда 8?

Вот откуда:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0123} F^{01} F^{23} &= +1(-E^1)(-H^1) = E^1 H^1; \\ \varepsilon_{1023} F^{10} F^{23} &= +1(-E^1)(-H^1) = E^1 H^1; \\ \varepsilon_{0132} F^{01} F^{32} &= E^1 H^1; \\ \varepsilon_{1032} F^{10} F^{32} &= E^1 H^1; \\ \varepsilon_{2301} F^{23} F^{01} &= E^1 H^1; \\ \varepsilon_{2310} F^{23} F^{10} &= E^1 H^1; \\ \varepsilon_{3201} F^{32} F^{01} &= E^1 H^1; \\ \varepsilon_{3210} F^{32} F^{10} &= E^1 H^1; \end{aligned}$$

## Уравнения Максвелла и тензор напряженности

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \rho \end{cases}$$

1-ая пара:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ (\vec{\nabla} \vec{H}) = 0 \end{cases}$$

2-ая пара:

$$\begin{cases} \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (\vec{\nabla} \vec{E}) = \rho \end{cases}$$

Эти уравнения Лоренц-инварианты и допускают простую запись в 4-х мерной форме.

1-ая пара уравнений Максвелла является следствием антисимметрии  $F^{\mu\nu}(x)$ :

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \partial^\lambda F^{\mu\nu}(x) + \partial^\nu F^{\lambda\mu}(x) + \partial^\mu F^{\nu\lambda}(x) = 0$$

2-ая пара уравнений Максвелла является следствием уравнения движения:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x), \quad (5.3)$$

где  $j^\nu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$  является 4-вектором электромагнитного тока.

Запишем уравнение (5.3) через  $A^\nu(x)$ . По определению  $F^{\mu\nu}(x)$ :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = j^\nu \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$$

Воспользовавшись калибровочным произволом  $A^\mu(x)$ , вводим калибровку Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (5.4)$$

Тогда:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu \quad (5.5)$$

- четырехмерная запись 2-ой пары уравнений Максвелла.

Проверим, что из уравнения

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x)$$

следует вторая пара уравнений Максвелла. Действительно:

а)  $\nu = 0$ , тогда

$$\rho = j^0 = \partial_\mu F^{\mu 0} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{E} \end{pmatrix} = (\vec{\nabla} \vec{E}) = \operatorname{div} \vec{E}$$

б)  $\nu \equiv i = 1, 2, 3$ , тогда:

$$\begin{aligned} \vec{j} = \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix} &= \partial_\mu F^{\mu i} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \begin{pmatrix} -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ 0 & -H^3 & H^2 \\ H^3 & 0 & -H^1 \\ -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{\partial H^3}{\partial x^2} - \frac{\partial H^2}{\partial x^3} \\ -\frac{\partial E^2}{\partial t} - \frac{\partial H^3}{\partial x^1} + \frac{\partial H^1}{\partial x^3} \\ -\frac{\partial E^3}{\partial t} + \frac{\partial H^2}{\partial x^1} - \frac{\partial H^1}{\partial x^2} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{H}. \end{aligned}$$

Пусть у нас есть 4-х вектор  $A$ :

$$\begin{aligned} A^\mu &= (A^0, A^1, A^2, A^3) \\ A_\mu &= (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A_0, A_1, A_2, A_3) \end{aligned}$$

Рассмотрим производные:

- $\alpha = \nu = 0$ , тогда  $\frac{\partial A^0}{\partial A_0} = 1$
- $\alpha = \nu = 2$ , тогда  $\frac{\partial A^2}{\partial A_2} = \frac{\partial A^2}{\partial (-A^2)} = -1$
- Аналогично если  $\alpha = \nu = 1, 3$ :  $\frac{\partial A^1}{\partial A_1} = \frac{\partial A^3}{\partial A_3} = -1$
- $\alpha = 1, \nu = 2$ , тогда  $\frac{\partial A^1}{\partial A_2} = -\frac{\partial A^1}{\partial A^2} = 0$  т.к. компоненты 4-х вектора являются независимыми величинами.
- Аналогично для любых  $\alpha \neq \nu$

Итого:

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial A_\nu} = T^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\alpha\nu}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\alpha}{\partial A^\nu} &= g_{\alpha\nu} \\ \frac{\partial A^\alpha}{\partial A^\nu} &= g_\nu^\alpha \\ \frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\nu} &= g_\alpha^\nu \end{aligned}$$

Пример:

- $\frac{\partial A^\alpha A_\alpha}{\partial A_\nu} = \frac{\partial A^2}{\partial A_\nu} = \left( \frac{\partial A^\alpha}{\partial A^\nu} \right) \cdot A_\alpha + A^\alpha \cdot \left( \frac{\partial A_\alpha}{\partial A^\nu} \right) = g^{\alpha\nu} A_\alpha + A^\alpha g_\alpha^\nu = A^\nu + A^\nu = 2A^\nu$
- $\frac{\partial (A^\alpha B^\beta)}{\partial A_\mu B_\nu} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$
- Пусть  $p^\alpha = (E, \vec{p})$ ,  $x^\alpha = (t, \vec{x})$ ,  $e^{-i(px)} = e^{-i(p^0 x^0 - p^1 x^1 - p^2 x^2 - p^3 x^3)} = e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})}$   
Найдём  $\partial_\nu e^{-i(px)} = -ie^{-i(px)} \partial_\nu (px) = -ie^{-i(px)} \frac{\partial (p^\alpha x_\alpha)}{\partial x^\nu} = -ie^{-i(px)} p^\alpha \left( \frac{\partial x_\alpha}{\partial x^\nu} \right) = -ie^{-i(px)} p^\alpha g_{\alpha\nu} = -ip_\nu e^{-i(px)}$

## 6. Лекция 6. Свободное электромагнитное поле.

### Уравнения Максвелла как уравнения Лагранжа

Мы хотим записать Лагранжиан классического электромагнитного поля. Электромагнитное поле описывается функцией поля - 4-х потенциалом  $A^\mu$ , и относительно  $A^\mu$  запишем уравнение Лагранжа. Уравнения Лагранжа - это уравнения эволюции электромагнитного поля.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0 \quad (6.1)$$

С другой стороны, уравнения Максвелла в 4-х мерной форме также описывают эволюцию электромагнитного поля:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x) \quad (6.2)$$

Итого, нужно подобрать такой Лагранжиан, чтобы уравнения (6.1) и (6.2) совпадали:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x) \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0.$$

Цель: Найти Лагранжиан  $\mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)$ , удовлетворяющий условиям:

- $\mathcal{L}(\dots)$  - релятивистский инвариант;
- $\mathcal{L}(\dots)$  - скаляр.

Вопрос: Какие структуры могут входить в  $\mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)$ ?

Ответ:

- $j^\alpha j_\alpha \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0 \Rightarrow$  можно не учитывать;
- $A^\alpha A_\alpha : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = g^{\alpha\nu} A_\alpha + A^\alpha g_\alpha^\nu = 2A^\nu \Rightarrow$  не подходит;
- $\varepsilon_{\alpha\beta\alpha'\beta'} F^{\alpha\beta} F^{\alpha'\beta'}$  - псевдоскаляр  $\Rightarrow$  не подходит;
- $A^\alpha j^\beta F_{\alpha\beta}$  и  $A^\alpha j^\beta (\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha)$  не подходят, т.к.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$  содержит структуру вида  $j^\beta \partial^\nu A_\beta$ , которых нет в уравнениях Максвелла;
- $A^\alpha A^\beta (\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha)$  не подходит из-за  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \sim A^\beta \partial^\nu A_\beta$ ;
- $F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu) = 0$  т.к. это свёртка антисимметричного и симметричного тензоров  $\Rightarrow$  не подходит;
- $A^\alpha j_\alpha \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = g^{\alpha\nu} j_\alpha = j^\nu \Rightarrow$  **правая часть уравнений Максвелла!**
- $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(\partial^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta - \partial^\alpha A^\beta \partial_\beta A_\alpha)$  тогда находим  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 2(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\alpha A_\beta + \partial^\alpha A^\beta g_\alpha^\mu g_\beta^\nu - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\beta A_\alpha - g_\beta^\mu g_\alpha^\nu \partial^\alpha A^\beta) = 4(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 4F^{\mu\nu} \Rightarrow$  **левая часть уравнений Максвелла!**

Таким образом искомый Лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu) = \underbrace{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\text{свободное ЭМ поле}} - \underbrace{j^\mu A_\mu}_{\text{вз-е с ЭМ током}} \quad (6.3)$$

Легко видеть, что:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu \text{ и } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu},$$

т.е. уравнения Лагранжа воспроизводят уравнения Максвелла.

## Тензор энергии-импульса

Если функции поля  $\varphi_i(x)$  инварианты относительно преобразований трансляции в 4-х мерии, т.е. : если  $x^\mu \Rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu$  и  $\varphi_i(x) = \tilde{\varphi}_i(\tilde{x})$ , то есть:  $\mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu \varphi_i(x)) = \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(\tilde{x}), \tilde{\partial}_\mu \tilde{\varphi}_i(\tilde{x}))$ , то сохраняется тензор энергии-импульса:

$$T_\nu^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\nu \varphi_i - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (6.4)$$

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (6.5)$$

Покажем это.

$$\begin{aligned} \delta \varphi_i(x) &= \tilde{\varphi}_i(x) - \varphi_i(x) = \varphi_i(x - a) - \varphi_i(x) \approx \varphi_i(x) - a^\mu \partial_\mu \varphi_i(x) - \varphi_i(x) = \\ &= -a^\mu \partial_\mu \varphi_i(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x)) - \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\mu \varphi_i(x)) = \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x)) - \\ &- \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(\tilde{x}), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(\tilde{x})) = \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x)) - \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x + a), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x + a)) \approx \\ &\approx \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x)) - \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x)) - a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\mu \varphi_i(x)) = \\ &= a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = -a^\nu \delta_\nu^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \end{aligned}$$

С другой стороны, по определению вариации функции двух переменных:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_i)} \delta(\partial_\nu \varphi_i) = \text{уравнения Лагранжа для 1-ого слагаемого} = \\ &= \left( \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_i)} \right) \delta \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_i)} \delta(\partial_\nu \varphi_i) = \text{полная производная} = \\ &= \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_i)} \delta \varphi_i \right) = -a^\mu \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_i)} \partial_\mu \varphi_i \right) = -a^\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\nu \varphi_i \right) \end{aligned}$$

Приравнивая обе вариации  $\delta \mathcal{L}$  друг к другу в силу произвольности  $a^\nu$  получаем  $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$ .

## Уравнение свободного электромагнитного поля в калибровке Лоренца

Уравнения Максвелла в 4-мерном виде:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu(x)$$

где  $F$  - тензор напряженности ЭМ поля, а  $j$  - 4-х вектор ЭМ тока.

Опр. Свободное ЭМ поле  $\Leftrightarrow j^\nu(x) = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ .

В терминах 4-х потенциала  $A^\nu(x)$  можно записать:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu(x)) = 0$$

Данное уравнение сильно упрощается, если выбрать **специальную калибровку** 4-х потенциала  $A^\mu(x)$  - **калибровку Лоренца**:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

В калибровке Лоренца уравнение для свободного ЭМ поля - это **уравнение Даламбера**:

$$0 = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) A^\nu(x) = \square A^\nu(x) \quad (6.6)$$

где  $\square$  - Даламбертиан.

Свободное ЭМ поле состоит из набора (бесконечного числа) монохроматических волн.

Опр: 4-импульс монохроматической волны  $k^\mu = (\omega_k, \vec{k})$ .

Поскольку ЭМ волна распространяется со скоростью света  $\Rightarrow k_\mu k^\mu = k^2 = \omega_\mu^2 - \vec{k}^2 = 0$ .

Уравнению Даламбера удовлетворяют решения вида:  $e^{-i(kx)} = e^{-ik_\mu x^\mu} = e^{-i\omega_k t + i(\vec{k}\vec{x})}$  - положительно-частотное решение и  $e^{+i(kx)}$  - отрицательно-частотное решение.

Тогда решение ищем в виде:

$$A^\nu(x) = A^{(+)\nu}(x) + A^{(-)\nu}(x)$$

## Положительно- и отрицательно-частотные части общего решения уравнения Даламбера

Положительно-частотная часть в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned} A^{(+)\nu}(x) &= \sum_{\lambda} \underbrace{\int \frac{V d^4 k}{(2\pi)^4}}_{2)} e^{-i(kx)} a^\nu(k, \lambda) \underbrace{2\pi \delta(k^2)}_{3)} = \sum_{\lambda} \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{a^\nu(k, \lambda)}{2\omega_k} e^{-i(kx)} \equiv \\ &\equiv \sum_{\lambda} \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{c^\nu(k, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-i(kx)} \end{aligned}$$

где:

- 1) - Суммирование по всем поляризациям каждой из монохроматических волн;
- 2) - Учет всех возможных вкладов монохроматических волн: интегрирование по  $d\omega_k d\vec{k} \equiv d^4k$ ;
- 3) - Условие, что каждая волна распространяется со скоростью света.  
 $V = L_x L_y L_z$  - нормировочный объем, в котором рассматривается поле;  
 $c^\nu(k, \lambda)$  - вес каждой монохроматической волны;  
 $\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}$  - удобное для дальнейших приложений соглашение о нормировке;

О том, как мы перешли от интегрирования по  $d^4k$  к интегрированию по  $d\vec{k}$  - разберемся с  $\delta(k^2)$ . Для этого воспользуемся формулой:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{x=x_i} \right|} \quad (6.7)$$

где  $x_i$  корни уравнения

$$f(x) = 0$$

В рассматриваемом случае:

$$0 = k^2 = (k^0)^2 - \omega_k^2 = (k^0 - \omega_k)(k^0 + \omega_k)$$

$$\partial k^2 / \partial k^0 = \partial((k^0)^2 - \omega_k^2) / \partial k^0 = 2k^0.$$

Тогда,

$$\delta(k^2) = \frac{\delta(k^0 - \omega_k)}{2k^0|_{k^0=\omega_k}} + \frac{\delta(k^0 + \omega_k)}{2k^0|_{k^0=-\omega_k}} = \frac{1}{2\omega_k} (\delta(k^0 - \omega_k) + \delta(k^0 + \omega_k))$$

Положительно-частотная часть отвечает условию  $k^0 > 0$ ,  $\omega_k \geq 0$  поэтому всегда  $\delta(k^0 + \omega_k) = 0$ .

Тогда:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \dots 2\pi \delta(k^2) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{dk^0}{2\omega_k} \dots \delta(k^0 - \omega_k) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \dots \Big|_{\omega_k=|\vec{k}|=k^0}$$

Отрицательно-частотная часть отвечает условию  $k^0 < 0$ ,  $\omega_k \geq 0$  поэтому всегда  $\delta(k^0 - \omega_k) = 0$ .

Тогда:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \dots 2\pi \delta(k^2) = \int \frac{1}{2\omega_k} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \dots \Big|_{k^0=-\omega_k=-|\vec{k}|}$$



Для  $A^{(+)\nu}(x)$  уравнение Даламбера выполняется автоматически:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^{(+)\nu}(x) = \sum_\lambda \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{c^\nu(k, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} \partial_\mu \partial^\mu e^{-i(kx)} = 0$$

Условие Лоренца накладывает ограничение на  $c^\nu(k, \lambda)$ :

$$0 = \partial_\mu A^{(+)\mu}(x) = -i \sum_\lambda \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(kx)}}{\sqrt{2\omega_k V}} k_\mu c^\mu(\vec{k}, \lambda)$$

Обозначение: Фурье-образ  $A^{(+)\nu}(x)$  есть:  $A^\nu(k) = \sum_\lambda V \frac{c^\nu(\vec{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}}$ , т.е.

$$A^{(+)\nu}(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} A^\nu(k) e^{-i(kx)}.$$

**Отрицательно-частотная часть.** Сразу заменим ее через Фурье-образ:

$$A^{(-)\nu}(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} A^\nu(-k) e^{i(kx)}.$$

Поскольку электромагнитное поле **незаряженное** - оно описывается **вещественными** функциями.

Поле  $A^\nu(x)$  вещественное, т.е.

$$\begin{aligned} A^\nu(x) = A^{\nu\dagger}(x) &\Rightarrow \left( \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} A^\nu(k) e^{-i(kx)} + \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} A^\nu(-k) e^{i(kx)} \right)^\dagger = \\ &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} A^\nu(k) e^{-i(kx)} + \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} A^\nu(-k) e^{i(kx)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^\nu(-k) = A^{\nu\dagger}(k) \Rightarrow A^\nu(-k) = \sum_\lambda V \frac{c^{\nu\dagger}(k, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^{(-)\nu}(x) = \sum_\lambda \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{c^{\nu\dagger}(k, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{i(kx)}. \end{aligned}$$

$A^{(-)\nu}$  автоматически удовлетворяет уравнению Даламбера.

$$\partial_\mu \partial^\mu A^{(-)\nu}(x) = 0$$

а условие Лоренца дает:

$$\sum_\lambda k_\mu c^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) = 0$$

## Линейная поляризация

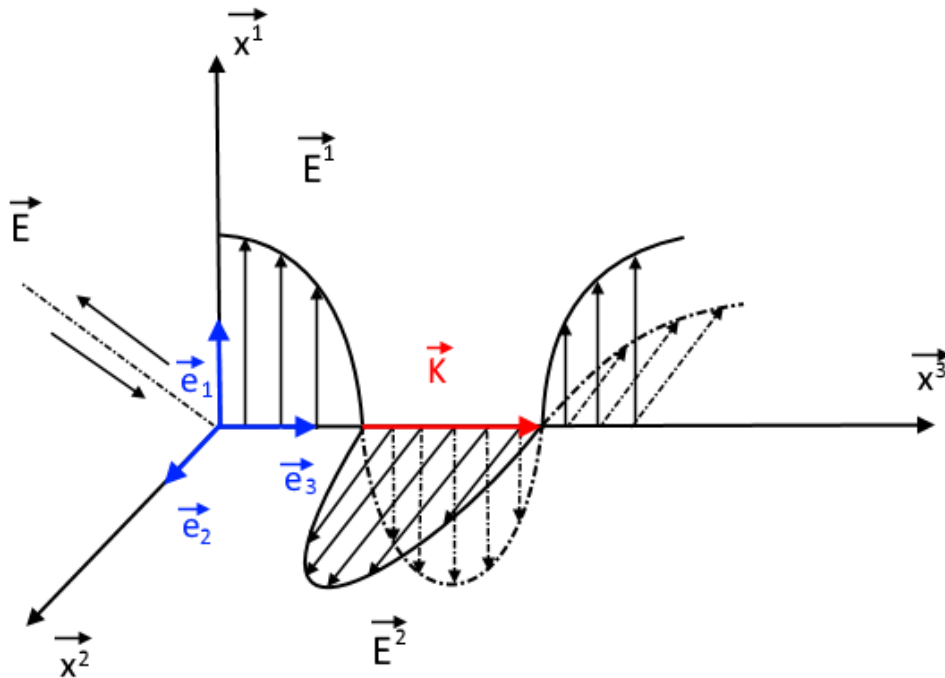


Рис. 6.1. Линейно-поляризованная волна

Из экспериментов известно, что световая волна имеет **две поляризации**, ортогональные направлению вектора  $\vec{k}$ .

Когда конец электрического вектора  $\vec{E}$  движется в плоскости  $(x^1, x^2)$  вдоль одной прямой, то электромагнитная волна называется **линейно-поляризованной** (см. рис. 6.1).

В этом случае можно разложить 4-вектора  $c^\nu(k, \lambda)$  и  $c^{+\nu}(k, \lambda)$  по вещественному базису в пространстве Минковского. Пусть  $Ox^3 \parallel \vec{k}$ , тогда в 3-х мерном пространстве  $(x^1, x^2, x^3)$  орты:  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  дают очевидный выбор:

$$\left. \begin{aligned} e^\nu(\vec{k}, \lambda = 1) &= (0, \vec{e}_1) = (0, 1, 0, 0) \\ e^\nu(\vec{k}, \lambda = 2) &= (0, \vec{e}_2) = (0, 0, 1, 0) \end{aligned} \right\} \text{ поперечная поляризация}$$

Действительно, в выбранной системе

$$\begin{aligned} k^\mu &= (\omega_k, 0, 0, \omega_k) \\ k^\mu e_\mu(\vec{k}, \lambda = 1) &= k^\mu e_\mu(\vec{k}, \lambda = 2) = 0 \end{aligned}$$

Далее:  $e^\nu(\vec{k}, \lambda = 3) = (0, \vec{e}_3) = (0, 0, 0, 1)$  - продольная поляризация:

$$k^\mu e_\mu(\vec{k}, \lambda = 3) = -\omega_k.$$

Эта поляризация является нефизической. Ее вклад надо скомпенсировать введением еще одной нефизической поляризации - временной. 4-х вектор временной поляризации должен быть ортогональным 4-х векторам поперечных и продольной поляризаций (т.к. будет входить в базис). Нормированный на единицу:

$$\begin{aligned} e^\nu(\vec{k}, \lambda = 0) &= (1, 0, 0, 0) \\ k^\mu e_\mu(\vec{k}, \lambda = 0) &= \omega_k \end{aligned}$$

Таким образом, в 4-мерии настроен базис, удовлетворяющий интуитивно-очевидному условию:

$$e^\nu(\vec{k}, \lambda) e_\nu(\vec{k}, \lambda') = g^{\lambda\lambda'}$$

являющемуся обобщением соответствующего условию из 3-мерия. Базис можно записать короче:

$$e^\nu(\vec{k}, \lambda) = \delta^{\nu\lambda} \quad (6.8)$$

Эта удобная формула пригодится в дальнейших вычислениях. Разложим  $c^\nu(\vec{k}, \lambda)$  и  $c^{*\nu}(\vec{k}, \lambda)$  по базису:

$$\begin{aligned} c^\nu(\vec{k}, \lambda) &= c_{\vec{k}\lambda} e^\nu(\vec{k}, \lambda) \\ c^{*\nu}(\vec{k}, \lambda) &= c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^\nu(\vec{k}, \lambda) \end{aligned}$$

Тогда:

$$A^\nu(x) = \sum_\lambda \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{c^\nu(\vec{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} \left( c_{\vec{k}\lambda} e^{-i(kx)} + c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i(kx)} \right)$$

В выражение для  $A^\nu(x)$  входит вклад как физических  $c_{\vec{k}1}$  и  $c_{\vec{k}2}$ , так и не физических поляризаций. Условие Лоренца уничтожает вклад не физических поляризаций.

Действительно:

$$\sum_\lambda k_\mu c^\mu(\vec{k}, \lambda) = \sum_\lambda k_\mu e^\mu(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda} = \omega_k (c_{\vec{k}0} - c_{\vec{k}3}) = 0.$$

Аналогично:

$$\sum_\lambda k_\mu c^{\dagger\mu}(\vec{k}, \lambda) = \omega_k (c_{\vec{k}0}^\dagger - c_{\vec{k}3}^\dagger) = 0$$

Как будет показано далее, во все наблюдаемые характеристики электромагнитного поля (энергия, импульс и т.д.) коэффициенты  $c_{\vec{k}0}$  и  $c_{\vec{k}3}$  входят только в виде разности  $\Rightarrow$  не дают вклада.

Если вектор  $\vec{k}$  не направлен по оси  $x^3$   
Как в таком случае изменится формулы для  $e^\nu(\vec{k}, \lambda)$ ?

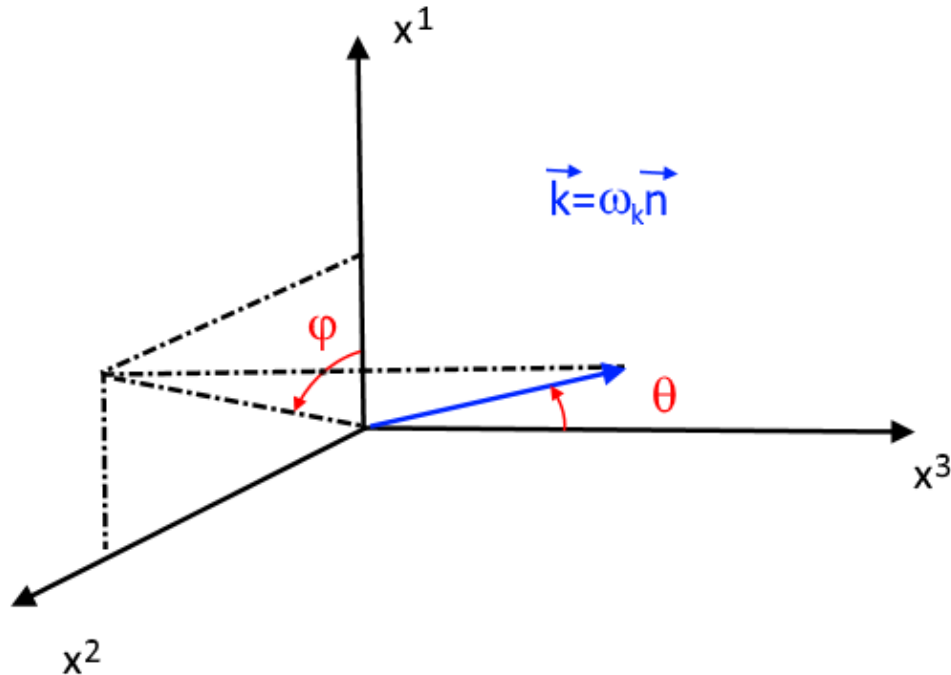


Рис. 6.2. Произвольное направление вектора  $\vec{k}$

Пусть  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  - единичный вектор, задающий направление. Он получается из вектора  $(0, 0, 1)$ :

- Поворот в плоскости  $(x^1, x^3)$  на угол  $\theta(S_\theta)$ ;
- Поворот в плоскости  $(x^1, x^2)$  на угол  $\varphi(S_\varphi)$ ;

Матрицы обоих поворотов:

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Применяя преобразование  $S_\theta S_\varphi$  к пространственной части каждого из 4-векторов  $e^\nu(\vec{k}, \lambda)$ , получаем:

$$e^\nu(\vec{k}, \lambda = 1) = (0, \cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta); \quad e^\nu(\vec{k}, \lambda = 2) = (0, -\sin \varphi, \cos \varphi, 0);$$

$$e^\nu(\vec{k}, \lambda = 3) = \frac{1}{\omega_k}(0, \vec{k}); \quad e^\nu(\vec{k}, \lambda = 0) = (1, 0, 0, 0).$$

Условие Лоренца:

$$\sum_\lambda k_\mu e^\mu(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda} = \omega_k c_{\vec{k}0} - \frac{1}{\omega_k} |\vec{k}|^2 c_{\vec{k}3} = \omega_k (c_{\vec{k}0} - c_{\vec{k}3}) = 0$$

т.е вклад не физических поляризаций компенсируется.

## Круговая поляризация

Она возникает, когда конец вектора  $\vec{E}$  описывает круг в плоскости, перпендикулярной направлению  $\vec{k}$ . В этом случае вместо 4-векторов  $e^\nu(\vec{k}, \lambda = 1, 2)$  выбирают правое (R) и левое (L) спиральные состояния:

$$\begin{aligned} e^\nu(\vec{k}, \lambda = R) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-ie^\nu(\vec{k}, \lambda = 2) - e^\nu(\vec{k}, \lambda = 1)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\cos\theta \cos\varphi + i \sin\varphi, -\cos\theta \sin\varphi - i \cos\varphi, \sin\theta); \\ e^\nu(\vec{k}, \lambda = L) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-ie^\nu(\vec{k}, \lambda = 2) + e^\nu(\vec{k}, \lambda = 1)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \cos\theta \cos\varphi + i \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi - i \cos\varphi, -\sin\theta) \end{aligned}$$

Поскольку  $e^{+\nu}(\vec{k}, \lambda = L, R) \neq e^\nu(\vec{k}, \lambda = L, R)$ , то общее решение уравнения Даламбера будет иметь вид:

$$A^\nu(x) = \sum_\lambda \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left( e^\nu(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda} e^{-i(kx)} + e^{*\nu}(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i(kx)} \right) \quad (6.9)$$

## Энергия и импульс классического электромагнитного поля

Далее в лекциях положим  $V = 1$ , т.к. с точки зрения физики от нормировочного объема величины наблюдаемых зависят не должны.

### Энергия электромагнитного поля

$$E = \int d\vec{x} T_0^0 \quad (6.10)$$

где  $T_0^0$  - нулевая компонента тензора энергии-импульса. Воспользуемся формулой (6.4):

$$T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \partial_0 A_\mu - \delta_0^0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \partial_0 A_\mu - \mathcal{L},$$

где Лагранжиан свободного электромагнитного поля есть:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2} A_\nu \underbrace{\partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu)}_{\text{нет вклада}} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$$

где

$(\partial_\mu A^\mu) = 0$  по условию Лоренца

$\partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu)$  - полная 4-дивергенция не даёт вклада в уравнения Лагранжа.

Тогда, используя (6.9), получаем:

$$E = \int d\vec{x} (-\partial^0 A^\nu \partial_0 A_\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu) = - \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=0}^3 g^{\lambda\lambda} \frac{c_\lambda^\dagger c_\lambda + c_\lambda c_\lambda^\dagger}{2} \omega_k$$

Учитывая условие Лоренца на  $c_\lambda$  и  $c_\lambda^\dagger$ , получаем:

$$E = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} (c_{k\lambda}^\dagger c_{\vec{k}\lambda} + c_{\vec{k}\lambda} c_{k\lambda}^\dagger) \quad (6.11)$$

### Вывод:

Покажем, как из Лагранжиана свободного ЭМ поля в форме

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$$

Получается выражение для энергии ЭМ поля в виде

$$E = \int d\vec{x} \left( -\partial^0 A^\nu \partial_0 A_\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \right)$$

Сначала заметим, что нулевая компонента тензора энергии-импульса  $T_0^0$  представляет собой плотность энергии, поскольку она записывается через Лагранжиан  $\mathcal{L}$ , т.е. через плотность функции Лагранжа

$$L = \int \mathcal{L} d\vec{x}$$

Это легко заметить, сравнив определения для действия  $S$  (4.1) и (4.3)

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4x = \int (\mathcal{L} d\vec{x}) dt$$

Таким образом:  $E = \int T_0^0 d\vec{x}$ , где

$$T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \partial_0 A_\mu - \delta_0^0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}$$

Вычислим первое слагаемое. При этом нужно вспомнить, что  $\forall$  4-вектора  $v^\mu = (v^0, \vec{v})$  верно:  $\frac{\partial v^\mu}{\partial v^\nu} = g_\nu^\mu$ , или  $\frac{\partial v^\mu}{\partial v^\nu} = g^{\mu\nu}$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \partial_0 A_\mu &= -\frac{1}{2} \frac{\partial((\partial_\xi A_\eta)(\partial^\xi A^\eta))}{\partial(\partial_0 A_\nu)} \partial_0 A_\nu = \\ &= -\frac{1}{2} (g_\xi^0 g_\eta^\nu (\partial^\xi A^\eta)(\partial_0 A_\nu) + (\partial_\xi A_\eta) g^{0\xi} g^{\nu\eta} (\partial_0 A_\nu)) = \\ &= -\frac{1}{2} ((\partial^0 A^\nu)(\partial_0 A_\nu) + (\partial^0 A^\nu)(\partial_0 A_\nu)) = -(\partial^0 A^\nu)(\partial_0 A_\nu) \end{aligned}$$

Остальные вычисления тривиальны.

Покажем вывод формулы для энергии свободного ЭМ поля через  $c_{\vec{k}\lambda}$  и  $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ .  
Стартуем с выражения:  $E = \int d\vec{x} (-\partial^0 A^\nu \partial_0 A_\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu)$

Воспользовавшись формулами дифференцирования 4-мерной экспоненты:  $\partial^\mu e^{\pm i(kx)} = \pm i k^\mu e^{\pm i(kx)}$ , получаем:

$$\partial^\mu A^\nu(x) = -i \sum_\lambda \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^\nu(\vec{k}, \lambda) k^\mu \left( c_{\vec{k}\lambda} e^{-i(kx)} - c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i(kx)} \right)$$

Тогда первое слагаемое в формуле для E может быть представлено в виде:

$$- \int d\vec{x} (\partial^0 A^\nu)(\partial_0 A_\nu) = \underbrace{E_{00}^{++}}_{(\sim c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}'\lambda'})} + \underbrace{E_{00}^{+-}}_{(\sim c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}'\lambda'})} + \underbrace{E_{00}^{-+}}_{(\sim c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}'\lambda'})} + \underbrace{E_{00}^{--}}_{(\sim c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}'\lambda'})}$$

Вычислим каждое из четырех слагаемых

$$E_{00}^{-+} = -(-i)^2 \int \frac{d\vec{x} d\vec{k} d\vec{k}'}{(2\pi)^6 2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \omega_k \omega_{k'} \sum_\lambda \sum_{\lambda'} e^\nu(\vec{k}, \lambda) e_\nu(\vec{k}', \lambda') (-1) c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{-ix(k-k')}$$

Это громоздкое выражение упрощается, если заметить, что:

$$\begin{aligned} \int d\vec{k}' \frac{d\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-ix(k-k')} &= \int d\vec{k}' e^{-it(\omega_k - \omega_{k'})} \int \frac{d\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-ix(k-k')} = \\ &= \int d\vec{k}' \delta(k - k') e^{-it(\omega_k - \omega_{k'})} = e^{-it(\omega_k - \omega_{k'})} \Big|_{\vec{k}=\vec{k}'} = 1 \Big|_{\vec{k}=\vec{k}'} \end{aligned}$$

т.к.

$$\vec{k} = \vec{k}' \Rightarrow \omega_k = |\vec{k}| = |\vec{k}'| = \omega_{k'}$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_{00}^{-+} &= - \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k^2}{2\omega_k} \sum_\lambda \sum_{\lambda'} e^\nu(\vec{k}, \lambda) e_\nu(\vec{k}, \lambda') (-1) c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda'}^\dagger = \\ &= [\text{т.к. } e^\nu(\vec{k}, \lambda) e_\nu(\vec{k}, \lambda') = g^{\lambda\lambda'}] = - \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} g^{\lambda\lambda'} c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda'}^\dagger = \\ &= - \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} (c_{\vec{k}0}^- c_{\vec{k}0}^+ - c_{\vec{k}1}^- c_{\vec{k}1}^+ - c_{\vec{k}2}^- c_{\vec{k}2}^+ - c_{\vec{k}3}^- c_{\vec{k}3}^+) = \\ &= \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} c_{\vec{k}\lambda}^- c_{\vec{k}\lambda}^+ \end{aligned}$$

т.к в калибровке Лоренца :  $c_{\vec{k}0}^- c_{\vec{k}0}^+ - c_{\vec{k}3}^- c_{\vec{k}3}^+ = 0$

Таким образом:

$$E_{00}^{-+} = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} c_{\vec{k}\lambda}^- c_{\vec{k}\lambda}^+$$

Полностью аналогично:

$$E_{00}^{+-} = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} c_{\vec{k}\lambda}^+ c_{\vec{k}\lambda}^-$$

Легко заметить, что энергия  $E$ :

$$E = E_{00}^{+-} + E_{00}^{-+}$$

Таким образом осталось показать, что  $E_{00}^{++} = E_{00}^{--} = 0$  и  $\int d\vec{x}(\partial^\mu A^\nu)(\partial_\mu A_\nu) = 0$ .  
Начнем с  $E_{00}^{--}$ :

$$E_{00}^{--} = -(-i)^2 \int \frac{d\vec{x}d\vec{k}d\vec{k}'}{(2\pi)^6 2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}} \omega_k\omega_{k'} \sum_\lambda \sum_{\lambda'} e^\nu(\vec{k}, \lambda) e_\nu(\vec{k}', \lambda') (-1) c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{-ix(k+k')}$$

Вспомним, что  $d\vec{k} = |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| d\Omega = \omega_k^2 d\omega_k d\Omega$ . Тогда интегрирование по  $d\omega_k$  от быстроосциллирующей функции  $\omega_k^3 e^{-2it\omega_k}$  дает нуль  $\Rightarrow E_{00}^{++} = E_{00}^{--} = 0$ .

Второе слагаемое в формуле:  $\int d\vec{x}(\partial^\mu A^\nu)(\partial_\mu A_\nu) k_\mu k^\mu = k^2 = 0$ . Поэтому оно не дает вклад в  $E$ . Таким образом получаем выражение (6.11):

$$\sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} (c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}\lambda} + c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}^\dagger)$$

### Импульс электромагнитного поля

Полностью аналогично получаем:

$$\vec{P} = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}}{2} (c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}\lambda} + c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}^\dagger) \quad (6.12)$$

Замечание: В классической теории  $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}\lambda} = c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ . В квантовой - все иначе.



## 7. Лекция 7. Квантование ЭМ поля. Часть 1.

### Основная идея

Квантовать электромагнитное поле мы будем пользуясь аналогией:

Классическое поле

⇓

Набор независимых колебаний (осцилляторов) с частотами  $\omega_k$

⇓

Набор квантовых осцилляторов

⇓

Квантовое поле

Каждому классическому колебанию или классическому гармоническому осциллятору мы сопоставим квантовый осциллятор, из этих квантовых осцилляторов мы построим различные операторы функции поля, сравним эти выражения с классическими которые мы уже вычислили и увидим между ними взаимно однозначное соответствие.

Вопрос: в чем будет отличие квантового поля от классического?

Ответ:  $c_{\vec{k}\lambda}$  и  $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$  станут операторами уничтожения и рождения:  $[c_{\lambda\vec{k}} c_{\lambda'\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

### Квантование осциллятора. Операторы рождения и уничтожения.

В дополнение к  $\hbar = c = 1$  положим массу частицы  $m = 1$ .

Потенциальная энергия:

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{\omega^2 x^2}{2} \quad (7.1)$$

Замечание: Энергетический спектр в таком потенциале будет ограничен снизу.

Гамильтониан:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} \quad (7.2)$$

От  $\hat{p}$  и  $\hat{x} \equiv x$  перейдем к безразмерным  $\hat{P}$   $\hat{Q}$ . Пусть:  $\hat{x} = x_0 \cdot \hat{Q}$ , где  $x_0$  - константа размерности  $x$ .

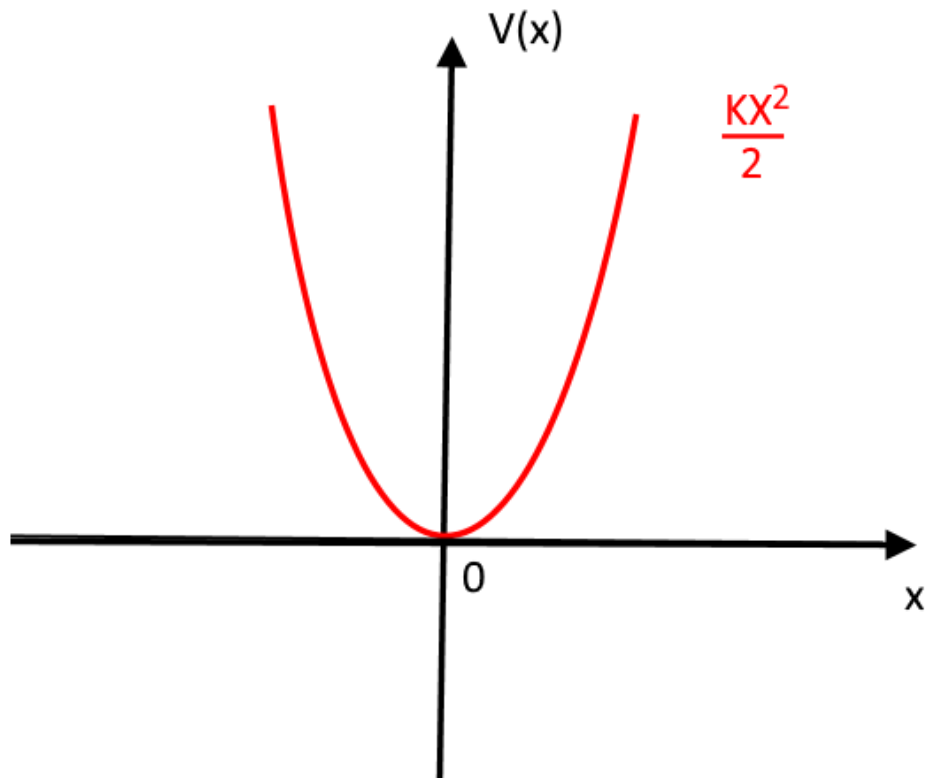


Рис. 7.1. Потенциальная энергия гармонического осциллятора

Введем

$$\hat{Q} = Q, \quad \hat{P} = -i \frac{d}{dQ}, \quad \text{так что} \quad \hat{p} = p_0, \quad \hat{P} = \frac{1}{x_0} \hat{P}$$

тогда

$$\hat{H} = \frac{1}{2x_0^2} \frac{d^2}{dQ^2} + \frac{\omega^2 x_0^2}{2} Q^2$$

Если положить  $x_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \Rightarrow p_0 = \sqrt{\omega}$ , то гамильтониана осциллятора запишется в очень простом виде:

$$\hat{H} = \omega \left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dQ^2} + \frac{Q^2}{2} \right]$$

или в терминах операторов  $\hat{Q}$  и  $\hat{P}$ :

$$\hat{H} = \omega \left[ \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\hat{Q}^2}{2} \right] \quad (7.3)$$

Соотношение коммутации:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \Rightarrow [\hat{Q}, \hat{P}] = i$$

Необходимо решить стационарное уравнение Шредингера с гамильтонианом (7.3).

Диагонализуем  $\hat{H}$ . Для этого введем новые операторы:

$$\hat{c} = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{c}^\dagger = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}}$$

Соотношение коммутации:

$$\begin{aligned} [\hat{c}, \hat{c}^\dagger] &= \hat{c}\hat{c}^\dagger - \hat{c}^\dagger\hat{c} = \frac{1}{2} [(\hat{Q} + i\hat{P})(\hat{Q} - i\hat{P}) - (\hat{Q} - i\hat{P})(\hat{Q} + i\hat{P})] = \\ &= \frac{1}{2} [\hat{Q}^2 - i\hat{Q}\hat{P} + i\hat{P}\hat{Q} + \hat{P}^2 - \hat{Q}^2 - i\hat{Q}\hat{P} + i\hat{P}\hat{Q} - \hat{P}^2] = \\ &= -i[\hat{P}, \hat{Q}] = -i \cdot i = 1 \end{aligned}$$

↓

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1 \quad (7.4)$$

Введем оператор  $\hat{N}$ :

$$\hat{N} = \hat{c}^\dagger\hat{c}$$

который в терминах  $\hat{Q}, \hat{P}$  можно записать:

$$\hat{N} = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{Q}^2 - \hat{P}^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Покажем, что  $\hat{N}$  - эрмитов. Для этого используем свойство эрмитового сопряжения для произведения операторов:

$$(\hat{A}\hat{B} \dots \hat{C})^\dagger = \hat{C}^\dagger \dots \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$$

Тогда:

$$\hat{N}^\dagger = (\hat{c}^\dagger\hat{c})^\dagger = \hat{c}^\dagger(\hat{c}^\dagger)^\dagger = \hat{N}$$

что и требовалось доказать.

Итого,  $\hat{N}$  - эрмитов оператор и надо понять, соответствует ли он какой-либо физической наблюдаемой.

Свойство: оператор  $\hat{N}$  не отрицательный, т.е. :

$$\langle \hat{N} \rangle_\psi \geq 0$$

**Доказательство:**

Для этого воспользуемся единичным оператором:  $\hat{1} = \sum_a |a\rangle\langle a|$ , где  $|a\rangle$  - базис в абстрактном гильбертовом пространстве. Тогда:

$$\begin{aligned} \langle \hat{N} \rangle &= \langle \psi | \hat{c}^\dagger \hat{c} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{c}^\dagger \hat{1} \hat{c} | \psi \rangle = \sum_a \langle \psi | \hat{c}^\dagger | a \rangle \langle a | \hat{c} | \psi \rangle = \sum_a c_{\psi a}^\dagger c_{\psi a} = \\ &= [c_{\psi a}^\dagger = (c_{\psi a}^*)^T = c_{a\psi}^*] = \sum_a c_{a\psi}^* c_{a\psi} = \sum_a |c_{a\psi}|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Гамильтониан  $\hat{H}$  выражается через  $\hat{N}$  линейно:

$$\hat{H} = \omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

Таким образом, поиск собственных значений векторов и собственных значений  $\hat{H} \Leftrightarrow$  поиску собственных векторов и собственных значений  $\hat{N}$ .

Поиск собственных векторов и собственных значений  $\hat{N}$  позволит выяснить, какой физической наблюдаемой он соответствует и прояснит смысл операторов  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}^\dagger$ , которые окажутся и ключом к квантованию ЭМ поля.

Рассмотрим осциллятор в абстрактном гильбертовом пространстве. Пусть  $|n\rangle$  и  $n$  - собственные вектора и собственные значения оператора  $\hat{N}$ , то есть:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

Тогда легко показать, что:

$$\hat{N}(\hat{c}|n\rangle) = (n-1)(\hat{c}|n\rangle)$$

Покажем, как получается равенство:  $\hat{N}(\hat{c}|n\rangle) = (n-1)(\hat{c}|n\rangle)$ .

При вычислениях нужно воспользоваться коммутатором

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = \hat{c}\hat{c}^\dagger - \hat{c}^\dagger\hat{c}$$

и определением

$$\hat{N} = \hat{c}^\dagger\hat{c}$$

Тогда:

$$\hat{N}(\hat{c}|n\rangle) = \hat{N}\hat{c}|n\rangle = (\hat{c}\hat{c}^\dagger - 1)\hat{c}|n\rangle = \hat{c}(\hat{c}^\dagger\hat{c} - 1)|n\rangle = \hat{c}(\hat{N} - 1)|n\rangle = \hat{c}(n-1)|n\rangle = (n-1)(\hat{c}|n\rangle)$$

Равенство  $\hat{N}(\hat{c}^\dagger|n\rangle) = (n+1)(\hat{c}^\dagger|n\rangle)$  получается полностью аналогично.

Таким образом  $\hat{c}|n\rangle$  - собственный вектор оператора  $\hat{N}$ , отвечающий собственному значению  $(n-1)$ :

$$\hat{c}|n\rangle \sim |n-1\rangle$$

Это значит, что мы можем построить последовательность собственных значений и соответствующих им собственных векторов с шагом 1 (см. рис. 7.2).

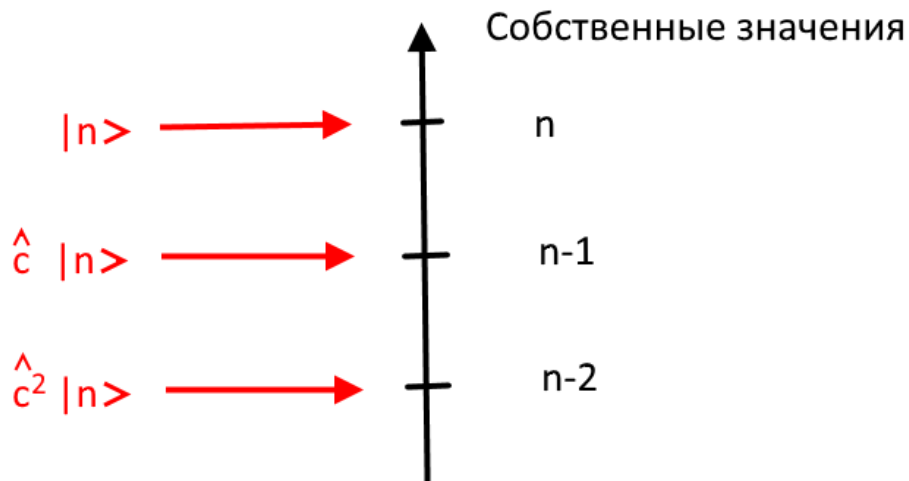


Рис. 7.2. Собственные значения и собственные вектора

Абсолютно аналогично:

$$\hat{N}(\hat{c}^\dagger |n\rangle) = (n + 1)(\hat{c}^\dagger |n\rangle)$$

то есть  $(\hat{c}^\dagger |n\rangle)$  является собственным вектором оператора  $\hat{N}$ , отвечающим собственному значению  $(n + 1)$ :

$$\hat{c}^\dagger |n\rangle |n + 1\rangle$$

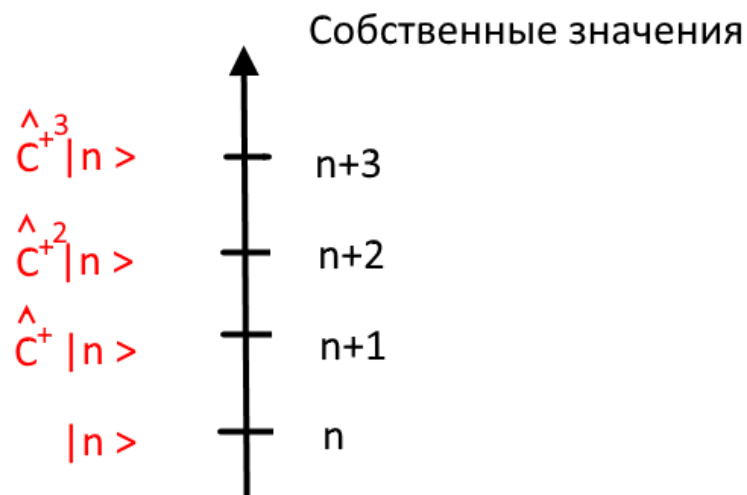


Рис. 7.3. Собственные значения и собственные вектора

Пусть существует **минимальное** собственное значение оператора  $\hat{N}$ , обозначим его как  $n_{min}$ , и пусть этому собственному значению соответствует собственный вектор  $|n_{min}\rangle$ . Тогда:

$$\hat{c}|n_{min}\rangle = 0.$$

Поскольку

$$0 = \hat{c}^\dagger \cdot 0 = \hat{c}^\dagger \hat{c}|n_{min}\rangle = \hat{N}|n_{min}\rangle = n_{min}|n_{min}\rangle \Rightarrow n_{min} = 0$$

Набор собственных значений оператора  $\hat{N}$ :

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

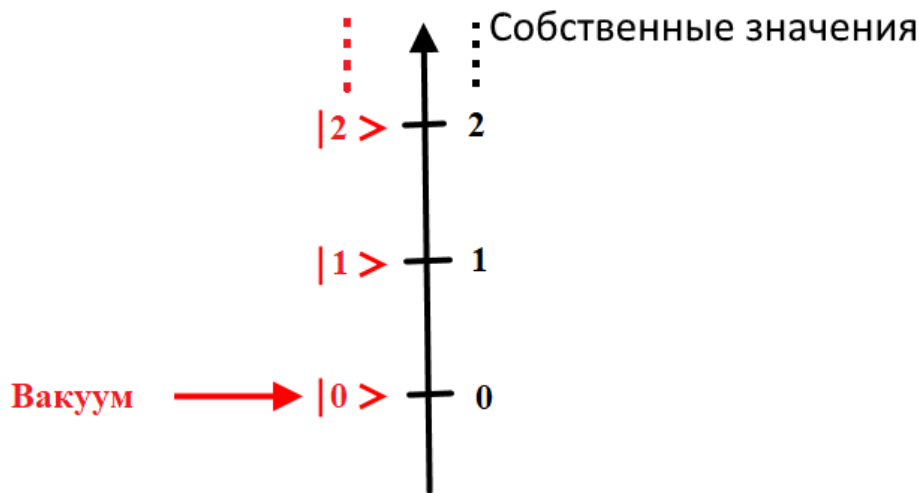


Рис. 7.4. Собственные значения и собственные вектора

Уровни энергии гамильтониана  $\hat{H}$ :

$$E_n = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

- $\hat{N}$  - имеет смысл оператора числа квантов (фотонов) с энергией  $\omega$  - **оператора числа частиц**;
- $\hat{c}^\dagger$  - увеличивает число квантов энергии  $\omega$  на 1 - **оператор рождения частицы** (фотона) с энергией  $\omega$ ;
- $\hat{c}$  - уменьшает число квантов энергии  $\omega$  на 1 - **оператор уничтожения частицы** (фотона) с энергией  $\omega$ .

Вычислим коэффициенты при  $\hat{c}^\dagger|n\rangle$   $|n+1\rangle$  и  $\hat{c}|n\rangle$   $|n-1\rangle$

Имеем:  $\hat{c}^\dagger|n\rangle = A|n+1\rangle$ , где  $A = const$ . Ее можно определить с точностью до фазового множителя. Поскольку  $\langle n|n\rangle = \langle n+1|n+1\rangle$ , то:

$$\begin{aligned} n+1 &= (n+1)\langle n|n\rangle = \langle n|\hat{N}+1\rangle = \langle n|\hat{c}^\dagger\hat{c}+1\rangle = \langle n|\hat{c}^\dagger\hat{c}|n\rangle = \\ &= \langle n|(\hat{c}^\dagger)^\dagger\hat{c}^\dagger|n\rangle = \langle n+1|A^*A|n+1\rangle = |A|^2 \\ \Rightarrow A &= \sqrt{n+1} \cdot e^{i\gamma_A} \end{aligned}$$

Положим фазовый множитель  $\gamma_A = 0$ , тогда:

$$\hat{c}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

Обобщим:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{c}^\dagger)^n |0\rangle$$

$(\hat{c}^\dagger)^n$  - описывает процесс рождения  $n$  квантов (фотонов) частоты  $\omega$  из вакуума.

Аналогично:

$$\hat{c} |n\rangle = \sqrt{n-1} |n-1\rangle$$

Если есть  $n_1$  квантов частоты  $\omega_1$  и  $n_2$  квантов частоты  $\omega_2$ , то в этом случае:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\alpha^2}{2} + \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \frac{\hat{p}_2^2}{2} + \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2}$$

и вектор состояния определяется как:

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \frac{1}{\sqrt{n_2!}} (\hat{c}_{\omega_1}^\dagger)^{n_1} (\hat{c}_{\omega_2}^\dagger)^{n_2} |0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}\rangle$$

## Квантование электромагнитного поля

Итак, в квантовой механике энергия одного колебания

$$\hat{H} = \omega \left( \hat{c}^\dagger \hat{c} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\omega}{2} (\hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{c} \hat{c}^\dagger)$$

и коммутатор операторов рождения и уничтожения:

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1$$

В квантовой теории:

- Каждая мода характеризуется  $\lambda$  и  $\vec{k} \Rightarrow \omega_k$ , так что:

$$\hat{c} \Rightarrow c_{\vec{k}\lambda}, \quad \hat{c}^\dagger \Rightarrow c_{\vec{k}\lambda}^\dagger,$$

где  $c_{\vec{k}\lambda}$  - уничтожает фотон с импульсом  $\vec{k}$  и поляризацией  $\lambda$ , а  $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$  - рождает фотон с импульсом  $\vec{k}$  и поляризацией  $\lambda$ .

Замечание: Здесь и далее мы не будем писать "шляпки" над операторами. Так принято в КТП, ведь почти все величины там являются операторами.

$$\hat{H} \Rightarrow \hat{H}_{\vec{k},\lambda} \Rightarrow E = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k},\lambda} = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2} \left( c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}\lambda} + c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right)$$

где  $E$  — оператор, действующий на векторах

$$|\gamma\rangle \equiv |n_1 \gamma(\vec{k}_1, \lambda_1), n_2 \gamma(\vec{k}_2, \lambda_2), \dots\rangle$$

Аналогично 4-потенциал тоже станет оператором:

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ e^{\mu}(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda} e^{-i(kx)} + e^{*\mu}(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i(kx)} \right] \quad (7.5)$$

- Различные методы колебаний (фотоны разной частоты) независимы, т.е.:

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1 \Rightarrow [c_{\vec{k}\lambda}, c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad [c_{\vec{k}\lambda}, c_{\vec{k}'\lambda'}] = [c_{\vec{k}\lambda}^\dagger, c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] = 0$$

- В следствии независимости операторов рождения и уничтожения для различных поляризаций не работает условие Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = ? \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{\vec{k}0} - c_{\vec{k}3} = ? \\ c_{\vec{k}0}^\dagger - c_{\vec{k}3}^\dagger = ? \end{cases}$$

Если нельзя наложить условия на операторы, то надо наложить условия на состояния  $|\gamma\rangle$ . То есть:

$$\begin{cases} (c_{\vec{k}0} - c_{\vec{k}3})|\gamma\rangle = 0 \\ \langle\gamma|(c_{\vec{k}0}^\dagger - c_{\vec{k}3}^\dagger) = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle\gamma|\partial_\mu A^\mu|\gamma\rangle = 0,$$

т.е. если нельзя наложить условие на саму 4-дивергенцию, то надо наложить условие на её среднее и рассматривать только такие состояния квантовой системы, которые этим условиям удовлетворяют.



## 8. Лекция 8. Квантование ЭМ поля. Часть 2.

### Калибровочные преобразования

В предыдущей лекции было проквантовано электромагнитное поле:

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left( e^\mu(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda} e^{-i(kx)} + e^{*\mu}(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i(kx)} \right), \quad (8.1)$$

где

$c_{\vec{k}\lambda}$  - оператор уничтожения фотона с  $\vec{k}$  и  $\lambda$ ;

$c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$  - оператор рождения фотона с  $\vec{k}$  и  $\lambda$ ;

$e^\mu(\vec{k}, \lambda) = e^{*\mu}(\vec{k}, \lambda)$  - вектора поляризации фотона.

Наблюдаемые характеристики электромагнитного поля не меняются, если выполнить калибровочное преобразование поля:

$$A^\mu(x) \Rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$$

Разложим  $f(x)$  в ряд Фурье, используя положительно- и отрицательно-частотные части:

$$f(x) = \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \left( f^{(+)}(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda} e^{-i(kx)} + f^{(-)}(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i(kx)} \right) \quad (8.2)$$

тогда:

$$\begin{aligned} \partial^\mu f(x) &= \sum_{\lambda \vec{k}} k^\mu \left( -i f^{(+)}(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda} e^{-i(kx)} + i f^{(-)}(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i(kx)} \right) = \\ &= \sum_{\lambda \vec{k}} \left( \frac{\chi(\vec{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k}} k^\mu c_{\vec{k}\lambda} e^{-i(kx)} + \frac{\chi^*(\vec{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k}} k^\mu c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i(kx)} \right) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Таким образом, в импульсном представлении калибровочное преобразование сводится к замене:

$$e^\mu(\vec{k}, \lambda) \Rightarrow e^\mu(\vec{k}, \lambda) + \chi(\vec{k}, \lambda) k^\mu$$

Поскольку  $k_\mu k^\mu = k^2 = 0$ , то скалярное произведение  $k_\mu e^\mu(\vec{k}, \lambda)$  НЕ меняется при калибровочном преобразовании. Из  $k(\vec{k}, \lambda)$  можно построить 4-х вектор:

$$\chi_\mu(\vec{k}) = \delta^{\mu\nu} \chi_\nu(\vec{k})$$

### Суммирование по поляризациям. Матрица плотности.

В квантовой физике матрица плотности микросистемы имеет вид:

$$\hat{\rho} = \sum_l W_l |\Psi_l\rangle \langle \Psi_l|$$

где  $W_l$  - вероятность возникновения чистого состояния  $|\Psi_l\rangle$  в смеси, которой соответствует  $\hat{\rho}$ . Если все состояния квантовой системы равновероятны, то:

$$W_1 = W_2 = \dots = W_n = \frac{1}{n}$$

Теперь рассмотрим матрицу плотности полностью неполяризованного фотона. В этом случае физические (поперечные) поляризации равновероятны и:

$$\rho^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^2 e^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{*\nu}(\vec{k}, \lambda) \quad (8.4)$$

Множитель  $\frac{1}{2}$  перед суммой опущен. Он будет явно учитываться при вычислении матричных элементов.

Воспользовавшись соотношением (6.8)  $e^\mu(\vec{k}, \lambda) = \delta^{\mu\nu}$ , получаем:

$$\rho^{\mu\nu} = \delta^{\mu 1} \delta^{\nu 1} + \delta^{\mu 2} \delta^{\nu 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

В таком виде матрица плотности неудобна для использования. Запишем её в виде инвариантного вида.

Для этого вспомним, что у нас имеется калибровочное преобразование  $A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$ . Условие Лоренца  $\partial_\mu A^\mu = 0$  ведёт к тому, что функция  $f(x)$  должна подчиняться уравнению

$$\partial_\mu \partial^\mu f(x) = 0$$

Но из (8.3) видно, что в силу условия  $k_\mu k^\mu = k^2 = 0$ , это уравнение **выполняется автоматически**.

Поэтому в калибровке Лоренца нет никаких дополнительных ограничений на вид функций  $\chi(\vec{k}, \lambda)$ .

Калибровочное преобразование для  $\rho^{\mu\nu}$  имеет вид:

$$\rho^{\mu\nu} \Rightarrow \rho^{\mu\nu} + \left( \sum_{\lambda=0}^3 \chi(\vec{k}, \lambda) e^\mu(\vec{k}, \lambda) \right) k^\nu + k^\mu \left( \sum_{\lambda=0}^3 \chi^*(\vec{k}, \lambda) e^\nu(\vec{k}, \lambda) \right) = \rho^{\mu\nu} + \chi^\mu k^\nu + \chi^{*\nu} k^\mu$$

При  $k^\mu = (\omega_k, 0, 0, \omega_k)$  в силу произвольности функций  $\chi(\vec{k}, \lambda)$  положим  $\chi(\vec{k}, \lambda = 0) = -\frac{1}{2\omega_k}$  и  $\chi(\vec{k}, \lambda = 3) = \frac{1}{2\omega_k}$ , тогда 4-х вектор:

$$\chi^\mu = \frac{1}{2\omega_k} (-1, 0, 0, 1)$$

Поэтому:

$$\chi^\mu k^\nu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } k^\mu \chi^\nu = (\chi^\mu k^\nu)^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При таком выборе функций  $\chi(\vec{k}, \lambda)$  имеем:

$$\rho^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -g^{\mu\nu}.$$

Это выражение Лоренц-инвариантно и справедливо в **любой системе отсчёта**. Таким образом:

$$\rho^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^2 e^{\mu}(\vec{k}, \lambda) e^{*\nu}(\vec{k}, \lambda) = -g^{\mu\nu} \quad (8.6)$$

## Коммутационные соотношения для операторов поля

Модернизуем формулу (8.4) для  $\rho^{\mu\nu}$ :

$$\rho^{\mu\nu} = \sum_{\lambda, \lambda'=1,2} e^{\mu}(\vec{k}, \lambda) e^{*\nu}(\vec{k}, \lambda') \delta^{\lambda\lambda'} = -g^{\mu\nu}$$

Для коммутаторов операторов рождения и уничтожения введём эквивалентную запись:

$$[c_{\vec{k}\lambda}, c_{\vec{k}'\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'}$$

Простые, но громоздкие вычисления для коммутатора операторов электромагнитного поля дают:

$$[A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] \stackrel{def}{=} -iD_0^{\mu\nu}(x - x'), \quad (8.7)$$

где  $D_0^{\mu\nu}(x - x')$  - перестановочная функция электромагнитного поля:

$$D_0^{\mu\nu}(x - x') = -g^{\mu\nu} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \sin(\omega_k(t-t'))}{\omega_k} \quad (8.8)$$

### Вычисления:

Используем выражение (8.1)

$$\begin{aligned} & \left[ A^{\mu}(x), A^{\nu}(x') \right] = \\ & = \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} \left( \underbrace{[c_{\vec{k}\lambda}, c_{\vec{k}'\lambda'}^{\dagger}]}_{=(2\pi)^3 \delta(\vec{k}-\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'}} e^{-i(kx)+i(k'x')} e^{\mu}(\vec{k}, \lambda) \cdot e^{\nu}(\vec{k}', \lambda') + \right. \\ & + \underbrace{[c_{\vec{k}\lambda}^{\dagger}, c_{\vec{k}'\lambda'}]}_{=-(2\pi)^3 \delta(\vec{k}-\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'}} e^{i(kx)-i(k'x')} e^{\mu}(\vec{k}, \lambda) e^{\nu}(\vec{k}', \lambda') \left. \right) = \text{интегрируем } \delta\text{-функцию} = \\ & = \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{\mu}(\vec{k}, \lambda) e^{\nu}(\vec{k}, \lambda') \delta_{\lambda\lambda'} \left( e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \right) = g^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \cdot \\ & \cdot \left( \underbrace{e^{ik(x-x')}}_{e^{i\omega_k(t-t')}.e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}} - \underbrace{e^{-ik(x-x')}}_{e^{-i\omega_k(t-t')}.e^{+i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}} \right) = ig^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{1}{\omega_k} \sin(\omega_k(t-t')) \end{aligned}$$

Заменяя интеграл дискретной суммой получаем выражения (8.7) и (8.8).  
Оказывается:

$$D_0^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} D_0(x - x') = -g^{\mu\nu} \frac{1}{2\pi} \delta((x - x')^2) \text{sign}((t - t'))$$

Можно показать, что формула (8.8) является **релятивистским инвариантным**.  
Введём оператор канонического импульса электромагнитного поля:

$$\Pi^\nu(x') = -\frac{\partial A^\nu(x')}{\partial t'}$$

Непосредственные вычисления дают:

$$[A^\mu(x), \Pi^\nu(x')] \Big|_{t=t'} = ig^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (8.9)$$

Соотношение (8.9) в квантовой теории поля является аналогом коммутатора  $[\hat{x}, \hat{p}] = i$  в нерелятивистской квантовой механике.

## Вакуумные средние

Опр: **Вакуумным средним** от совокупности операторов  $\hat{A}\hat{B}\dots\hat{Z}$  называют  $\langle 0 | \hat{A}\hat{B}\dots\hat{Z} | 0 \rangle$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} &= \langle 0 | \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} | 0 \rangle = \langle 0 | [c_{\vec{k}\lambda}, c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] | 0 \rangle = \langle 0 | c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle - \langle 0 | \underbrace{c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger c_{\vec{k}\lambda}}_{=0} | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \langle 0 | c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}; \\ \langle 0 | c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger c_{\vec{k}\lambda} | 0 \rangle &= 0; \\ \langle 0 | \underbrace{c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger c_{\vec{k}\lambda}}_{=0} | 0 \rangle &= 0 \Rightarrow \langle 0 | c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Итого, из 4 возможных вакуумных средних, ненулевое только одно.

Теперь можно вычислить вакуумные средние от произведения операторов поля:

$$\begin{aligned} \langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(x') | 0 \rangle &= \sum_{\lambda, \lambda'=1,2} \int \frac{d\vec{k} d\vec{k}'}{(2\pi)^6} \frac{e^{\mu(\vec{k}, \lambda)} e^{*\nu(\vec{k}', \lambda')}}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} = \\ &= \langle 0 | c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle e^{-i(kx) + i(k'x')} = -g^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik(x-x')}}{2\omega_k} = -iD_+^{\mu\nu}(x - x') \\ &\Rightarrow D_+^{\mu\nu}(x) = -ig^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-ikx} \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\langle 0 | A^\nu(x') A^\mu(x) | 0 \rangle = -i D_-^{\mu\nu}(x - x'), \quad (8.10)$$

где

$$D_-^{\mu\nu}(x) = -i g^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{ikx} \quad (8.11)$$

Из явного вида  $D_+^{\mu\nu}(x)$  и  $D_-^{\mu\nu}(x)$  следует, что:

$$D_-^{\mu\nu}(x) = D_+^{\mu\nu}(-x) = -D_+^{\mu\nu*}(x)$$

Из определения  $[A^\mu(x), A^\nu(x')]$  следует, что:

$$D_0^{\mu\nu}(x) = D_+^{\mu\nu}(x) - D_-^{\mu\nu}(x)$$

Явно (без вывода):

$$D_\pm^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu} \left( \frac{i}{(2\pi)^2 x^2} \mp \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) \text{sign}(t) \right)$$

## 9. Лекция 9. Квантование ЭМ поля. Часть 3.

### Нормальное и хронологическое произведения операторов электромагнитного поля

Опр: Нормальным произведением (**N-произведением**) операторов бозонного поля называется:

$$N\left(\text{Произв-е бозе-операторов}\right) = \left(\text{Опер-ры рождения}\right) \times \left(\text{Опер-ры уничтожения}\right)$$

Т.е. нормальное произведение сортирует операторы рождения и операторы уничтожения.

**Примеры:**

$$N\left(\underbrace{A^{(+)\mu}(x)}_{\sim c_{\vec{k}\lambda}} \underbrace{A^{(+)\nu}(x')}_{\sim c_{\vec{k}'\lambda'}}\right) = A^{(+)\mu}(x)A^{(+)\nu}(x') = N\left(A^{(+)\nu}(x')A^{(+)\mu}(x)\right);$$

$$N\left(\underbrace{A^{(+)\mu}(x)}_{\sim c_{\vec{k}\lambda}} \underbrace{A^{(-)\nu}(x')}_{\sim c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger}\right) = \underbrace{A^{(-)\nu}(x')}_{\sim c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger} \underbrace{A^{(+)\mu}(x)}_{\sim c_{\vec{k}\lambda}} = N\left(\underbrace{A^{(-)\nu}(x')}_{\sim c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger} \underbrace{A^{(+)\mu}(x)}_{\sim c_{\vec{k}\lambda}}\right)$$

Опр: Хронологическим произведением (**T-произведением**) операторов бозонного поля называется:

$$T(A^\mu(x)A^\nu(x')) = \begin{cases} A^\mu(x)A^\nu(x') & , \text{ если } t > t' \\ A^\nu(x')A^\mu(x) & , \text{ если } t' > t \end{cases}$$

Обобщение на любое количество операторов очевидно.

### Свёртка операторов электромагнитного поля

Опр: Свёрткой операторов  $A^\mu(x)$  и  $A^\nu(x')$  называется разность хронологического и нормального произведений:

$$\underbrace{A^\mu(x)A^\nu(x')} \stackrel{def}{=} T(A^\mu(x)A^\nu(x')) - N(A^{(+)\mu}(x)A^{(+)\nu}(x'))$$

Замечание: В разной литературе может по-разному обозначаться свёртка: как нижняя или верхняя квадратная скобка или нижняя или верхняя круглая скобка.

В КТП интерес представляет вакуумное среднее свёртки:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \underbrace{A^\mu(x)A^\nu(x')} | 0 \rangle &= \langle 0 | T(A^\mu(x)A^\nu(x')) | 0 \rangle = \\ &= \begin{cases} \langle 0 | A^\mu(x)A^\nu(x') | 0 \rangle = -iD_+^{\mu\nu}(x-x'), & \text{ если } t > t' \\ \langle 0 | A^\nu(x')A^\mu(x) | 0 \rangle = -iD_-^{\mu\nu}(x-x'), & \text{ если } t' > t \end{cases} \end{aligned}$$

т.к нормальное произведение гарантирует что операторы уничтожения будут стоять справа:  $N(\dots) = c^\dagger \dots c_\alpha$ , и  $c_\alpha|0\rangle = 0$  получаем что в вакуумном среднем свёртки остаётся только Т-произведение.

Такой вид вакуумного среднего свертки подсказывает ввести удобную функцию:

$$D_c^{\mu\nu}(\tilde{x}) = \Theta(\tilde{x})D_+^{\mu\nu}(\tilde{x}) + \Theta(-\tilde{x})D_-^{\mu\nu}(\tilde{x}),$$

где  $\tilde{x} = x - x'$ , а  $\Theta(x)$ – 4-мерная функция Хевисайда:

$$\Theta(x) = \Theta(t)\Theta(x^1)\Theta(x^2)\Theta(x^3),$$

тогда:

$$\langle 0 | \underline{A^\mu(x)A^\nu(x')} | 0 \rangle = -iD_c^{\mu\nu}(x - x') \quad (9.1)$$

Опр: Функцию  $D_c(x)$  называют **пропагатором** фотонного поля, или функцией распространения, или причинной функцией Грина. Учитывая явный вид  $D_\pm^{\mu\nu}(x)$ , получаем:

$$D_c^{\mu\nu}(x) = -ig^{\mu\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega_k|t|+i\vec{k}\vec{x}}}{2\omega_k} \Big|_{\vec{x}>\vec{0}} \quad (9.2)$$

Используя известное из ТФКП выражение:

$$\frac{e^{-i\omega_k|t|}}{2\omega_k} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ik^0t}}{k^{02} - \omega_k^2 + i\varepsilon}, \quad \text{где } \varepsilon > 0 \text{ и } \varepsilon \ll 1 \quad (9.3)$$

легко получаем окончательное выражение для пропагатора:

$$D_c^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(kx)} D_c^{\mu\nu}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(kx)} \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon},$$

которое является с-числом  $\Rightarrow$  свёртка тоже является с-числом  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{A^\mu(x)A^\nu(0)} = \langle 0 | \underline{A^\mu(x)A^\nu(0)} | 0 \rangle = \langle 0 | T(A^\mu(x)A^\nu(0)) | 0 \rangle = -iD_c^{\mu\nu}(x)$$

Из приведённой выше строчки следует тривиальная, но очень полезная (особенно в КХД) формула:

$$D_c^{\mu\nu}(k) = i \int d^4x e^{-i(kx)} \langle 0 | T(A^\mu(x)A^\nu(0)) | 0 \rangle.$$

Докажем формулу (9.2):

$$\Theta(t)D_+^{\mu\nu}(x) = -ig^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\vec{x}}}{2\omega_k} \Theta(t)$$

Понятно, что данное выражение работает, если  $t \geq 0$ , поэтому:

$$\Theta(t)D_+^{\mu\nu}(x) = -ig^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega_k|t+i\vec{k}\vec{x}}}{2\omega_k} \Big|_{t \geq 0} \quad (9.4)$$

Далее:

$$\Theta(-t)D_-^{\mu\nu}(x) = -ig^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\omega_k t - i\vec{k}\vec{x}}}{2\omega_k} \Theta(-t)$$

т.к.  $t = -|t|$ ,

$$\Theta(-t)D_-^{\mu\nu}(x) = -ig^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega_k|t| - i\vec{k}\vec{x}}}{2\omega_k} \Big|_{t < 0}$$

Замена переменной:  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ ,  $d\vec{k} \rightarrow \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right| d\vec{k} = d\vec{k}$ . Тогда:

$$\Theta(-t)D_-^{\mu\nu}(x) = -ig^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega_k|t| + i\vec{k}\vec{x}}}{2\omega_k} \Big|_{t < 0} \quad (9.5)$$

Сравнивая (9.4) и (9.5) получаем, что пропагатор при любом значении  $t$  имеет один и тот же вид. Таким образом мы приходим к выражению (9.2).

Докажем формулу (9.3):

$$\frac{e^{-i\omega_k|t|}}{2\omega_k} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ik^0 t}}{k^0{}^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon}$$

т.к.  $(k^0)^2 - \omega_k^2 = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = k^2$

$$\frac{e^{-i\omega_k|t|}}{2\omega_k} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ik^0 t}}{k^2 + i\varepsilon}$$

В плоскости комплексного  $k^0$  в данном интеграле имеются два полюса:

$$(k^0)^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon = (k^0 - \omega_k + i\varepsilon)(k^0 + \omega_k - i\varepsilon) = \begin{cases} k_{(1)}^0 = \omega_k - i\varepsilon \\ k_{(2)}^0 = -\omega_k + i\varepsilon \end{cases}, \quad \omega_k > 0,$$

что графически выглядит как на рис. 9.1:



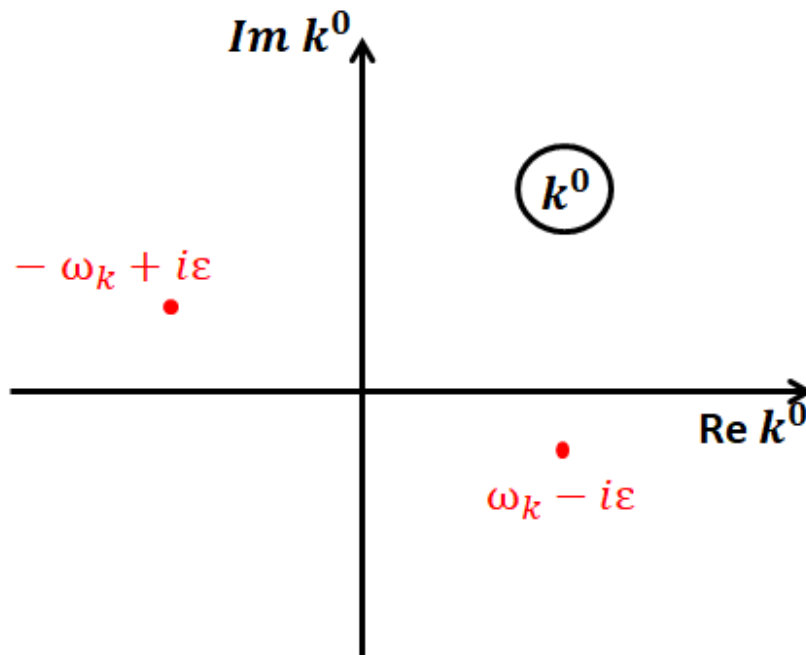


Рис. 9.1. Полюса

Если  $t = |t| > 0$ , то  $e^{-ik^0 t} = e^{-ik^0 |t|} \sim e^{-i(-i)|Im k^0||t|}$ , т.е. контур интегрирования необходимо замкнуть в нижнюю полуплоскость:

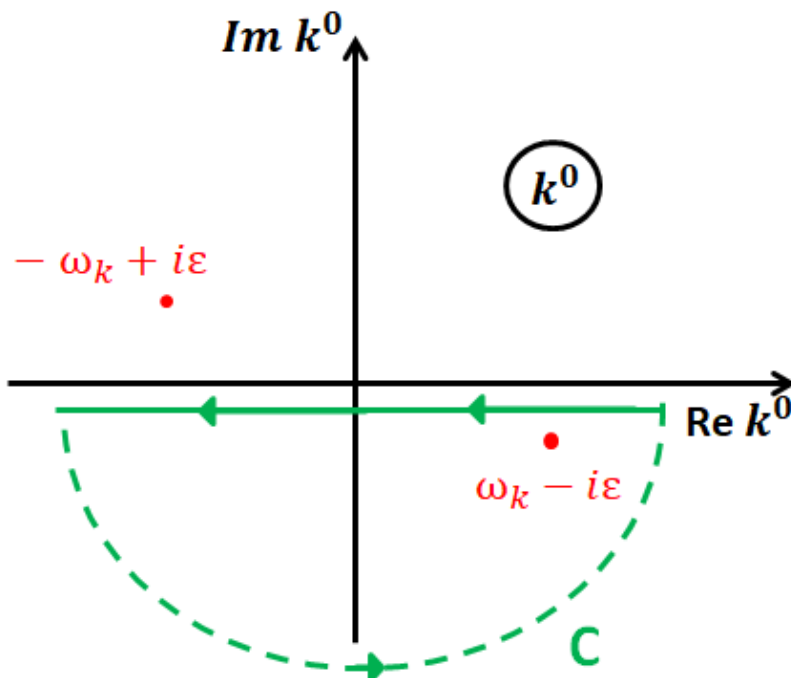


Рис. 9.2. Контур интегрирования

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ik^0|t|}}{k^2 + i\varepsilon} = - \oint_C \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-ik^0|t|}}{\underbrace{(k^0 - \omega_k + i\varepsilon)}_{\text{ПОЛЮС}}(k^0 + \omega_k - i\varepsilon)} = -2\pi \cdot i \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\omega_k|t|}}{2\omega_k} = -i \frac{e^{-i\omega_k|t|}}{2\omega_k}$$

Пусть теперь  $t = -|t| < 0$ , тогда контур интегрирования нужно замкнуть в верхней полуплоскости:

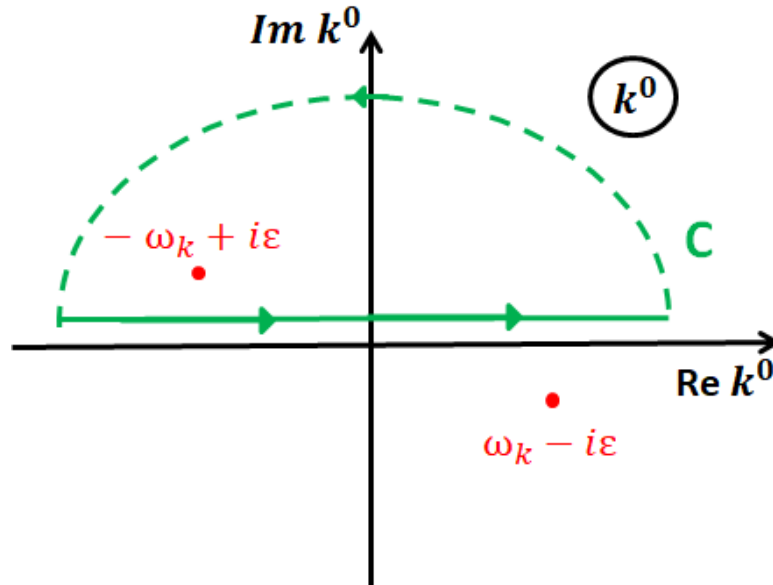


Рис. 9.3. Контур интегрирования

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \cdot \frac{e^{ik^0|t|}}{k^2 + i\varepsilon} = - \oint_C \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-ik^0|t|}}{\underbrace{(k^0 + \omega_k - i\varepsilon)}_{\text{ПОЛЮС}}(k^0 - \omega_k + i\varepsilon)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(-\omega_k)|t|}}{2(-\omega_k)} = -i \frac{e^{-i\omega_k|t|}}{2\omega_k}$$

Таким образом, формула (9.3) доказана. С её помощью преобразуем  $D_c^{\mu\nu}(x)$ :

$$D_c^{\mu\nu}(x) = -ig^{\mu\nu} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} i \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-ik^0t} e^{i\vec{k}\vec{x}}}{k^2 + i\varepsilon} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(kx)} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{-i(kx)} D_c^{\mu\nu}(k)$$

Итого:

$$D_c^{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}$$

## Квантование электромагнитного поля (важнейшие формулы)

Оператор 4-потенциала электромагнитного поля имеет вид

$$A^\mu(x) = A^{(+)\mu}(x) + A^{(-)\mu}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left( e^\mu(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}, \lambda}^- e^{-i(kx)} + e^{*\mu}(\vec{k}, \lambda) c_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} e^{i(kx)} \right), \quad (9.6)$$

где  $A^{(+)\mu}(x)$  и  $A^{(-)\mu}(x)$  - положительно и отрицательно-частотные части;

$c_{\vec{k}, \lambda}^-$  - оператор уничтожения фотона с импульсом  $\vec{k}$  и поляризацией  $\lambda$ ;

$c_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger}$  - оператор рождения фотона с импульсом  $\vec{k}$  и поляризацией  $\lambda$ ;

$e^\mu(\vec{k}, \lambda)$  - вектор поляризации, отвечающий поляризации  $\lambda$ .

Операторы рождения и уничтожения подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$\left[ c_{\vec{k}, \lambda}^-, c_{\vec{k}', \lambda'}^{\dagger} \right] = \delta_{\vec{k} \vec{k}'} \delta_{\lambda \lambda'} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda \lambda'}; \quad \left[ c_{\vec{k}, \lambda}^-, c_{\vec{k}', \lambda'}^- \right] = \left[ c_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger}, c_{\vec{k}', \lambda'}^{\dagger} \right] = 0 \quad (9.7)$$

и действуют на состояния  $|\gamma\rangle$ , выраженные в числах заполнения фотонов, по правилам

$$c_{\vec{k}, \lambda}^- |1\gamma_{\vec{k}, \lambda}\rangle = |0\rangle, \quad c_{\vec{k}, \lambda}^- |0\rangle = 0, \quad c_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle = |1\gamma_{\vec{k}, \lambda}\rangle. \quad (9.8)$$

В калибровке Лоренца выбор состояний  $|\gamma\rangle$  подчиняется условию

$$\langle \gamma | \partial_\mu A^\mu(x) | \gamma \rangle = 0,$$

которое автоматически уничтожает во всех наблюдаемых вклад нефизических поляризаций фотона.

Выполняется следующее правило суммирования по векторам поляризации:

$$\rho^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^2 e^\mu(\vec{k}, \lambda) e^\nu(\vec{k}, \lambda) = -g^{\mu\nu}, \quad (9.9)$$

где  $\rho^{\mu\nu}$  - матрица плотности.

Свертка операторов электромагнитного поля  $A^\mu(x)$  и  $A^\nu(0)$  выражается через причинную функцию Грина  $D_c^{\mu\nu}(x)$  или иначе - пропагатор:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) A^\nu(0) &= \langle 0 | \underbrace{A^\mu(x) A^\nu(0)} | 0 \rangle = \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(0)) - N(A^\mu(x) A^\nu(0)) | 0 \rangle = \\ &= -i D_c^{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

Пропагатор  $D_c^{\mu\nu}(x)$  является релятивистским инвариантом и может быть записан в виде

$$\begin{aligned} D_c^{\mu\nu}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(kx)} D_c^{\mu\nu}(k), \\ D_c^{\mu\nu}(k) &= \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}, \end{aligned}$$

где  $D_c^{\mu\nu}(k)$  - импульсное представление пропагатора.

## 10. Лекция 10. Алгебра матриц Паули. Часть 1.

Мы переходим от электромагнитного поля к дираковскому. У нас впервые появятся поля частиц и античастиц.

### Частицы и античастицы

Микрочастицы: (элементарные и составные)  
 $e^-, \mu^-, \nu_t, u, t, K^+ = u\bar{s}, \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), p = uud, u = ddu, \gamma, Z^0, \dots$

Опр: **Античастицы** имеют те же массу, спин и время жизни, что и частицы, но обладают противоположными по знаку зарядами (электрическими, лептонными, барионными, ароматом).

Античастицы:  $e^+$  (позитрон),  $\mu^+$ ,  $K^-$  (относ.  $K^+$ ),  $\bar{p}$ ,  $\bar{n}$  и т.д.

#### • Заряженные частицы

Частицы и античастицы различаются по знаку электрического заряда:  $e^-$  и  $e^+$  или  $p$  и  $\bar{p}$ . Выбор микрочастицей какого знака заряда называть частицами произволен и диктуется только историческими причинами (первыми открыли  $e^-$  и  $p$ , а не  $e^+$  и  $\bar{p}$ ).

#### • Нейтральные частицы

Для нейтральных частиц электрический заряд = 0, но могут не равняться нулю другие заряды. Примеры:

а) барионный  $n = udd$  ( $B_n = +1$ ),  $\bar{n} = \bar{u}\bar{d}\bar{d}$  ( $B_{\bar{n}} = -1$ );

б) аромат  $K^0 = d\bar{s}$  ( $B_{K^0} = 0, S_{K^0} = -I_{3K^0} = 1$ ),  $\bar{K}^0 = s\bar{d}$  ( $B_{\bar{K}^0} = 0, S_{\bar{K}^0} = -I_{3\bar{K}^0} = -1$ )

Существуют истинно нейтральные частицы, для которых частицы совпадает со своей античастицей.

Примеры:  $\gamma \equiv \bar{\gamma}$ ,  $Z^0 \equiv \bar{Z}^0$ ,  $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \equiv \bar{\pi}^0$

Первая античастица:  $e^+$ , 1932г., Карл Андерсон, космические лучи.

#### • Нейтрино

Две возможности : 
$$\begin{cases} \nu \neq \bar{\nu} - \text{дираковское нейтрино;} \\ \nu = \bar{\nu} - \text{майорановское нейтрино} \end{cases}$$

Осцилляции возможны как для дираковских, так и для майорановских нейтрино с  $m_\nu \neq 0$ .

Двойной безнейтринный  $\beta$ -распад:  ${}^A_Z A \rightarrow {}^A_{Z+2} A + 2e^-$  возможен только для майорановских нейтрино с  $m_\nu \neq 0$ .

## Уравнение Паули и матрицы Паули

Уравнение Паули - это уравнение Шредингера для движения нерелятивистской частицы с  $s = 1/2$  ( $e = -|e|$ ):

$$i\frac{\partial\chi}{\partial t} = \hat{H}\chi, \text{ где: } \hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p} - e\vec{A})^2\hat{1} + e\varphi\hat{1} - \hat{\mu}_s\vec{\mathcal{H}} \quad (10.1)$$

где:

$\hat{p} - e\vec{A}$  - обобщённый импульс;

$\hat{\mu}_s$  - спиновый магнитный момент;

$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  - единичная матрица в пространстве  $2 \times 2$ ;

$\vec{\mathcal{H}}$  - вектор напряжённости магнитного поля.

$$\hat{\mu}_s = \frac{|e|\hbar}{2m}\vec{\sigma} = \frac{|e|\hbar}{m}\hat{s}$$

где  $\mu_B$  - магнетон Бора,  $\vec{\sigma}$  - оператор спина  $\frac{1}{2}$ .

Замечание: связь  $\hat{\mu}_s$  и  $\hat{s}$  является обобщением Паули экспериментальных данных по спину, т.е. это постулат, а не следствие теории.

$$\hat{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3),$$

где  $\sigma^i$  - матрицы Паули,  $i=1,2,3$ . Их явный вид:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Они действуют на  $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$  - двухкомпонентный спинор:

$$\chi = \chi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \chi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $\chi_1$  - амплитуда вероятности  $s_z = +\frac{1}{2}$ ,  $\chi_2$  - амплитуда вероятности  $s_z = -\frac{1}{2}$ .  
Возможно разложение по любому базису.

Замечание: Матрицы  $\hat{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$  образуют базис в пространстве  $2 \times 2$ . Кроме того:

$$(\sigma^i)^2 = \hat{1}; Sp \sigma^i = 0; [\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k; \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\hat{1}\delta^{ij}$$

где  $Sp$  - операция взятия следа матрицы (от нем. die Spur - след). Английское обозначение следа  $Tr$  (Trace) мы прибережём на будущее.

Пусть матрица  $M = m_{ij}$  размера  $n \times n$ , тогда  $Sp M = \sum_{i=1}^n m_{ii}$

### Рассмотрим некоторые свойства матриц Паули.

Для работы в пространстве матриц Паули понадобится ввести полностью антисимметричный тензор третьего ранга  $\varepsilon^{ijk}$ ,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , (у которого всего  $3^3 = 27$  компонент, из которых ненулевые только  $3! = 6$ ) и символ Кронекера  $\delta^{ij}$ .

Для символа Кронекера стандартное определение:

$$\delta_{ij} = \delta_j^i = \delta^{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}, \text{ где } \{i, j\} = \{1, 2, 3\}.$$

Сравните это определение с определением (1.10)

Полностью ассиметричный тензор  $\varepsilon^{ijk}$  удовлетворяет условиям:  $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{ikj}$  и  $\varepsilon^{123} = +1$ . Можно показать, что  $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$  (ранее было доказано, что  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  см. формулу (1.12)). Для свертки двух полностью ассиметричных тензоров третьего ранга имеет место формула:

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmn} = 0! \det \begin{pmatrix} \delta_l^i & \delta_m^i & \delta_n^i \\ \delta_l^j & \delta_m^j & \delta_n^j \\ \delta_l^k & \delta_m^k & \delta_n^k \end{pmatrix}, \text{ где } 0! = 1 \quad (10.2)$$

А) Свойства  $(\sigma^i)^2 = \hat{1}$  и  $Sp \sigma^i = 0$  устанавливаются непосредственной проверкой.

Б) Покажем, что  $Sp(\sigma^i \sigma^j) = 2\delta^{ij}$ .

Для каждой пары матриц  $\sigma^i$  и  $\sigma^j$   $Sp(\sigma^i \sigma^j)$  - число. Совокупность всех таких чисел образует матрицу  $3 \times 3$ . Поскольку  $Sp(AB) = Sp(BA)$ , то матрица симметрична по индексам  $i$  и  $j$ . Рассмотрим разные случаи:

Пусть  $i = j$ , тогда

$$Sp(\sigma^i \sigma^j) = Sp((\sigma^i)^2) = Sp \hat{1} = Sp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Пусть  $i \neq j$ . В этом случае достаточно узнать, чему равны  $Sp(\sigma^1 \sigma^2)$ ,  $Sp(\sigma^2 \sigma^3)$ ,  $Sp(\sigma^1 \sigma^3)$ . Поскольку матрица  $\sigma^3$  - диагональная, а матрицы  $\sigma^1$ ,  $\sigma^2$  - антидиагональные, то  $Sp(\sigma^1 \sigma^3) = Sp(\sigma^2 \sigma^3) = 0$ . Далее:  $Sp(\sigma^1 \sigma^2) = iSp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = iSp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = iSp \sigma^3 = 0$ . Таким образом при  $i \neq j$   $Sp(\sigma^i \sigma^j) = 0$ . Случаи  $i = j$  и  $i \neq j$  теперь легко объединить с помощью символа Кронекера.

В) "Самая главная" формула алгебры матриц Паули:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \hat{1} + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k \quad (10.3)$$

Прежде всего заметим, что матрицы Паули  $\sigma^i$  и единичная матрица  $\hat{1}$  образуют базис в пространстве матриц  $2 \times 2$ , т.к.

$$Sp(\hat{1} \sigma^i) = 0 \text{ и } Sp(\sigma^i \sigma^j) \Big|_{i \neq j} = 0$$

Поэтому любая  $2 \times 2$  матрица  $A$  может быть представлена в виде:

$$A = a_0 \hat{1} + a^i \sigma^i,$$

где по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

След от обеих частей:  $SpA = a_0 Sp\hat{1} + a^i Sp\sigma^i = 2a_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2} SpA. \quad (10.4)$$

Далее домножаем на матрицу  $\sigma^j$  и берем след от обеих частей:  $Sp(A\sigma^j) = a_0 Sp\sigma^j + a^i Sp(\sigma^i\sigma^j) = 2a^i\delta^{ij} = 2a^j \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^i = \frac{1}{2} Sp(A\sigma^i) \quad (10.5)$$

Тогда:  $\sigma^i\sigma^j = a_0^{ij}\hat{1} + a^{ijk}\sigma^k$ , и по формулам:  $a_0^{ij} = \frac{1}{2} Sp(\sigma^i\sigma^j) = \delta^{ij}$ ,  $a^{ijk} = \frac{1}{2} Sp(\sigma^i\sigma^j\sigma^k)$ .

Разберемся, чему равен  $Sp(\sigma^i\sigma^j\sigma^k)$ . Если любые два индекса равны, то этот след равен нулю. Действительно, пусть  $i=k$ . Тогда  $Sp(\sigma^i\sigma^j\sigma^i) = Sp(\sigma^j\sigma^i\sigma^i) = Sp(\sigma^j\hat{1}) = Sp\sigma^j = 0$ . Поэтому по индексам  $i, j$  и  $k$  след должен быть полностью антисимметричным тензором, т.е.  $Sp(\sigma^i\sigma^j\sigma^k) \sim \varepsilon^{ijk}$ . Пусть теперь  $i=1, j=2, k=3$ . Тогда:

$$\sigma^1\sigma^2\sigma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i(\sigma^3)^2 = i\hat{1}$$

и  $Sp(\sigma^1\sigma^2\sigma^3) = iSp\hat{1} = 2i = 2i\varepsilon^{123}$ . Таким образом:

$$Sp(\sigma^i\sigma^j\sigma^k) = 2i\varepsilon^{ijk}$$

$$a^{ijk} = \frac{1}{2} Sp(\sigma^i\sigma^j\sigma^k) = i\varepsilon^{ijk}$$

"Главная" формула алгебры матриц доказана.

Г) Следствия из "самой главной" формулы.

1)

$$\sigma^1\sigma^2\sigma^3 = i\hat{1}$$

Формула доказана выше непосредственной проверкой.

2)

$$(\vec{\sigma}\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2\hat{1}, \quad (10.6)$$

где  $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$  - произвольный вектор.

В самом деле:  $(\vec{\sigma}\vec{a})^2 = \sigma^i a^i \sigma^j a^j = \sigma^i \sigma^j a^i a^j = (\delta^{ij}\hat{1} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k) a^i a^j = \hat{1} a^i a^i = |\vec{a}|^2\hat{1}$ .

3)

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k.$$

По определению коммутатора:  $[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i = \delta^{ij}\hat{1} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k - \delta^{ji}\hat{1} - i\varepsilon^{jik}\sigma^k = \delta^{ij} - \delta^{ji} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k - i\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ .

$$4) \quad \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}\hat{1} \quad (10.7)$$

По определению антикоммутатора:

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = \delta^{ij}\hat{1} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k + \delta^{ji}\hat{1} + i\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\delta^{ij}\hat{1}$$

т.к  $\delta^{ij} = \delta^{ji}$ ,  $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$

Д) Используя выражение для  $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmn}$  (10.2) и формулу для разложения по базису  $\sigma^i\sigma^j$  можно вычислять следы от произведения произвольного числа матриц Паули и производить разложение по базису произвольного числа матриц Паули.

В качестве примера получим разложение по базису произведения  $\sigma^i\sigma^j\sigma^k$ .

Имеем:

$$\sigma^i\sigma^j\sigma^k = (\delta^{ij}\hat{1} + i\varepsilon^{ijm}\sigma^m)\sigma^k = \delta^{ij}\sigma^k + i\varepsilon^{ijm}\sigma^m\sigma^k = \delta^{ij}\sigma^k + i\varepsilon^{ijm}(\delta^{mk}\hat{1} + i\varepsilon^{mkl}\sigma^l) = \delta^{ij}\sigma^k - \varepsilon^{ijm}\varepsilon^{klm}\sigma^l + i\varepsilon^{ijk}\hat{1} = (\delta^{ij}\delta^{kl} - \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})\sigma^l + i\varepsilon^{ijk}\hat{1}.$$

$$\text{Т.к } \varepsilon^{ijm}\varepsilon^{klm} = \delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jk}$$

Таким образом доказано, что:

$$\sigma^i\sigma^j\sigma^k = (\delta^{ij}\delta^{kl} - \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})\sigma^l + i\varepsilon^{ijk}\hat{1}.$$

Пользуясь выражениями для коэффициентов разложения по базису  $\hat{1}, \sigma^i$  (10.4), (10.5), находим:

$$Sp(\sigma^i\sigma^j\sigma^k) = 2i\varepsilon^{ijk} \quad (10.8)$$

$$Sp(\sigma^i\sigma^j\sigma^k\sigma^l) = 2(\delta^{ij}\delta^{kl} - \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) \quad (10.9)$$

Доказательство (10.9) в следующей лекции.

Е) Наконец, получим формулы для матричных экспонент.

$$\begin{aligned} e^{i(\vec{a}\vec{\sigma})} &= \hat{1} + \frac{i}{1!}(\vec{a}\vec{\sigma}) - \frac{i^2}{2!}(\vec{a}\vec{\sigma})^2 - \frac{i^3}{3!}(\vec{a}\vec{\sigma})^3 + \dots = \hat{1} + \frac{i}{1!}(\vec{a}\vec{\sigma}) - \frac{|\vec{a}|^2}{2!}\hat{1} - \\ &- \frac{i}{3!}(\vec{a}\vec{\sigma})|\vec{a}|^2 + \frac{|\vec{a}|^4}{4!}\hat{1} + \dots = \hat{1} \left( 1 - \frac{|\vec{a}|^2}{2!} + \frac{|\vec{a}|^4}{4!} - \dots \right) + \\ &+ \frac{i(\vec{a}\vec{\sigma})}{|\vec{a}|} \left( |\vec{a}| - \frac{|\vec{a}|^3}{3!} + \frac{|\vec{a}|^5}{5!} - \dots \right) = \hat{1}\cos(|\vec{a}|) + \frac{i(\vec{a}\vec{\sigma})}{|\vec{a}|}\sin(|\vec{a}|) \end{aligned}$$

Таким образом:

$$e^{i(\vec{a}\vec{\sigma})} = \hat{1}\cos(|\vec{a}|) + \frac{i(\vec{a}\vec{\sigma})}{|\vec{a}|}\sin(|\vec{a}|)$$

Аналогично

$$e^{(\vec{a}\vec{\sigma})} = \hat{1}ch(|\vec{a}|) + \frac{i(\vec{a}\vec{\sigma})}{|\vec{a}|}sh(|\vec{a}|)$$

Из этих формул следуют еще две нетривиальные формулы:

$$Sp(e^{i(\vec{a}\vec{\sigma})}) = 2\cos(|\vec{a}|) \text{ и } Sp(e^{(\vec{a}\vec{\sigma})}) = 2ch(|\vec{a}|).$$



## 11. Лекция 11. Алгебра матриц Паули. Часть 2.

### Пример из квантовой механики

Пусть в конечномерном гильбертовом пространстве  $\mathbb{H}$  есть вектор состояния  $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$ . Рассмотрим эрмитов оператор наблюдаемой величины  $\hat{A}$ :  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ , который действует на вектор состояния  $|\psi\rangle$ . У оператора  $\hat{A}$  есть собственные векторы  $|a_i\rangle$  и собственные значения  $a_i$ :  $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ . Тогда вектор  $|\psi\rangle$  можно разложить по собственным векторам этого эрмитова оператора:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \quad (11.1)$$

Базис  $|a_i\rangle$  - ортонормированный:  $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$ . Коэффициенты  $c_i$  можно найти если домножить выражение (11.1) на  $\langle a_j |$ :

$$\langle a_j | \psi \rangle = \sum_i c_i \underbrace{\langle a_j | a_i \rangle}_{\delta_{ij}} = c_j \quad (11.2)$$

Базис можно также ввести, например, в пространстве матриц  $2 \times 2$ :

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = m_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma_1} + m_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma_2} + m_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma_3} + m_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Sigma_4} \quad (11.3)$$

Как ввести понятие ортогональности для матриц? Понятие ортогональности связано со **скалярным произведением**.

Опр: Скалярное произведение двух объектов  $\varphi$  и  $\psi$  это комплексное число  $(\varphi|\psi)$  удовлетворяющее:

- 1)  $(\varphi|\psi)^* = (\psi|\varphi)$
- 2)  $(\varphi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\varphi)$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$
- 3)  $(\varphi|\psi_1 + \psi_2) = (\varphi|\psi_1) + (\varphi|\psi_2)$
- 4)  $(\varphi|\varphi) \geq 0$  и  $(\varphi|\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi \equiv 0$

Для произвольных матриц  $M_1$  и  $M_2$  в роли скалярного произведения выступает  $Sp(M_1^\dagger M_2)$  - оно удовлетворяет свойствам 1) - 3).

Теперь мы можем ввести понятие ортонормированного базиса в пространстве матриц  $2 \times 2$ . Легко увидеть, что  $Sp(\Sigma_i \Sigma_j) = \delta_{ij}$ .

В гильбертовом пространстве есть базисы, которые связаны между собой унитарным преобразованием, также и здесь мы можем из базиса  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$  построить любой другой удобный нам базис.

Другой базис:  $\hat{1}, \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}}$ , где  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$  - матрицы Паули. Мы делим на  $\sqrt{2}$  для ортонормированности, ведь  $Sp(\sigma_i) = Sp \hat{1} = 2$ , тогда  $Sp(\frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_j}{\sqrt{2}}) = \delta_{ij}$ .

Как по такому базису разложить произвольную матрицу? Пусть имеется произвольная  $2 \times 2$  матрица, с индексами  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ :  $\hat{A}_{\alpha\beta\dots\gamma}$ .

**Пример:**  $\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\gamma = (2 \times 2)_{\alpha\beta\gamma}$  - произведение 3-х матриц  $2 \times 2$  также матрица  $2 \times 2$ , но разное, при разных  $\alpha, \beta, \gamma$ . Можно сказать, что  $(2 \times 2)_{\alpha\beta\gamma}$  является компонентом тензора 3-го ранга.

Итак,  $\hat{A}_{\alpha\beta\dots\gamma} = a_{\alpha\beta\dots\gamma}^0 \hat{1} + \sum_k a^{(k)} \sigma_k$

Коэффициенты получаем по аналогии с (11.2):

$$a_{\alpha\beta\dots\gamma}^0 = \frac{1}{2} Sp(\hat{1} \hat{A}_{\alpha\beta\dots\gamma}) = \frac{1}{2} Sp(\hat{A}_{\alpha\beta\dots\gamma})$$

$$a_{\alpha\beta\dots\gamma}^{(k)} = \frac{1}{2} Sp(\sigma_k \hat{A}_{\alpha\beta\dots\gamma})$$

Здесь использовалось то, что  $\sigma_k^\dagger = \sigma_k$

Рассмотрим:  $Sp(\sigma_j \hat{A}_{\alpha\beta\dots\gamma}) = a_{\alpha\beta\dots\gamma}^0 \underbrace{Sp(\sigma_j)}_{=0} + \sum_k a_{\alpha\beta\dots\gamma}^{(k)} \underbrace{Sp(\sigma_j \sigma_k)}_{=2\delta_{jk}} = 2a_{\alpha\beta\dots\gamma}^{(j)}$

**Пример:**

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_k = a_{ijk}^{(0)} \hat{1} + \sum_l a_{ijk}^{(l)} \sigma_l;$$

$$a_{ijk}^{(0)} = \frac{1}{2} Sp(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = \text{см. (10.8)} = i\varepsilon_{ijk};$$

$$a_{ijk}^{(l)} = \frac{1}{2} Sp(\sigma_l \sigma_i \sigma_j \sigma_k) = \frac{1}{2} Sp(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l)$$

Т.к.  $Sp(\hat{A}\hat{B}) = Sp(\hat{B}\hat{A})$  и  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \hat{1}$  свойство (10.7)  $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} Sp(\underbrace{\sigma_i}_{\hat{B}} \underbrace{\sigma_j \sigma_k \sigma_l}_{\hat{A}}) = 2\delta_{ij} Sp(\sigma_k \sigma_l) - Sp(\sigma_j \sigma_i \sigma_k \sigma_l) = 4\delta_{ij} \delta_{kl} - Sp(\sigma_j \sigma_i \sigma_k \sigma_l) =$$

$$= \text{меняем местами } \sigma_i \text{ и } \sigma_k = 4\delta_{ij} \delta_{kl} - 2\delta_{ik} Sp(\sigma_j \sigma_l) + Sp(\sigma_j \sigma_k \sigma_i \sigma_l) = \text{аналогично} =$$

$$= 4\delta_{ik} \delta_{jl} - 2\delta_{ik} Sp(\sigma_j \sigma_l) + Sp(\sigma_j \sigma_k \sigma_i \sigma_l) = 4\delta_{ij} \delta_{kl} - 4\delta_{ik} \delta_{jl} + 2\delta_{il} Sp(\sigma_j \sigma_k) -$$

$$- Sp(\sigma_j \sigma_k \sigma_l \sigma_i) = 4\delta_{ij} \delta_{kl} - 4\delta_{ik} \delta_{jl} + 4\delta_{il} \delta_{jk} - Sp(\sigma_j \sigma_k \sigma_l \sigma_i) = 4\delta_{ij} \delta_{kl} - 4\delta_{ik} \delta_{jl} +$$

$$+ 4\delta_{il} \delta_{jk} - Sp(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l)$$

Отсюда:

$$Sp(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l) = 2(\delta^{ij} \delta^{kl} - \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk})$$

Тем самым мы доказали формулу (10.9) из прошлой лекции.

## 12. Лекция 12. Уравнение Клейна-Гордона-Фока. Уравнение Дирака.

Вопрос: Почему уравнение Паули (10.1) не пригодно для описания спина релятивистской частицы?

Ответ: По нижестоящим причинам:

- а) Оно релятивистски **неинвариантно**, поскольку  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial x_i \sim p^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  входят в разных степенях;
- б) При релятивистских энергиях частицы и античастицы взаимодействуют друг с другом, т.е. эволюция спиновых свойств частиц и античастиц в идеале должна описываться при помощи одного общего матричного уравнения для **биспинора**:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \text{частицы} \\ \Rightarrow \text{античастицы} \end{array} \right\}$$

- в) В кулоновской калибровке ( $div \vec{A} = 0$ ) можно показать, что паулевский гамильтониан приобретает вид:

$$\hat{H} \approx \frac{\hat{p}^2}{2m} \hat{1} + e\phi \hat{1} - \hat{\mu}_{tot} \vec{\mathcal{H}},$$

где полный магнитный момент:  $\hat{\mu}_{tot} = \hat{\mu}_l + \hat{\mu}_s = \mu_B (\hat{L} + 2\hat{S})$ , хотя с точки зрения релятивистской теории должно было бы  $\hat{\mu}_{tot} \sim \hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ .

Замечание: В этой и следующих лекциях мы увидим, что релятивистское уравнение для фермиона с  $s = 1/2$  успешно справляется с а) - в).

### Уравнение Клейна-Гордона-Фока

Рассмотрим свободный  $e^-$  (и  $e^+$ ), т.е.  $\vec{A} = \vec{0}$ .  
 Наиболее очевидный путь получения релятивистски-инвариантного операторного уравнения из формулы:

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

Заменим эти классические физические величины на операторы и пусть эти операторы действуют на некоторый вектор состояния. В Лекции №1 (1.9) был введен оператор:

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = (\hat{H}, \vec{\hat{p}}),$$

такой, что:

$$\hat{H}\psi_\alpha(x) = E\psi_\alpha(x) \text{ и}$$

$$\hat{p}\psi_\alpha(x) = \vec{p}\psi_\alpha(x),$$

где  $\psi_\alpha(x)$  - компонента неизвестной пока волновой функции фермиона:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_\alpha(x) \\ \dots \end{pmatrix},$$

тогда:  $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = (\hat{H}^2 - \hat{p}^2) \Rightarrow \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \psi_\alpha(x) = (E^2 - \vec{p}^2) \psi_\alpha(x) = m^2 \psi_\alpha(x)$ , т.е.

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \psi_\alpha(x) = m^2 \psi_\alpha(x)$$

⇓

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) \psi_\alpha(x) = m^2 \psi_\alpha(x) \quad (12.1)$$

Это уравнение **Клейна-Гордона-Фока**. Его впервые получил Э.Шредингер в 1925г, независимо вывел и впервые опубликовал Владимир Александрович Фок (1926г), обобщил О.Клейн (1926-1927 гг.), а Гордон тут совершенно ни при чем.

Пусть теперь введено внешнее поле, тогда

$$\hat{p}^\mu \Rightarrow \hat{P}^\mu = \hat{p}^\mu - eA^\mu(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{P}^\mu \hat{P}_\mu \psi_\alpha(x) = m^2 \psi_\alpha(x).$$

В КГФ-уравнении для свободной частицы не важно, есть у  $e^-(e^+)$  спин или нет, т.к. ему все равно не с чем взаимодействовать. При наличии поля спин с ним взаимодействует:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta - 2ieA_\mu \partial^\mu + e^2 A_\mu A^\mu - m^2\right) \psi_\alpha(x) = 0$$

Следствия: КГФ с внешним полем

- 1) пункт а) выполнен (+);
- 2) пункты б) и в) **не выполнены**, более того

1 по КГФ **каждая** компонента  $\psi_\alpha(x)$  преобразуется самостоятельно  $\Rightarrow$  это противоречит уравнению Паули.

2 по КГФ тонкая структура атома водорода есть:

$$\Delta E_{nl}^{(КГФ)} = -\frac{me^8}{2n^4} \left( \frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right),$$

в то время как правильная формула, совпадающая с экспериментом для  $e^-$  в атоме водорода, есть:

$$\Delta E_{nj}^{(правильная)} = -\frac{me^8}{2n^4} \left( \frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right).$$

Неутешительный вывод: уравнение КГФ описывает свободный  $e^- (e^+)$ , но не описывает поведение  $e^- (e^+)$  во внешнем поле. Нужно искать другое уравнение.

Оправдание КГФ: можно предположить, что для бесспиновых частиц КГФ всегда дает правильное релятивистское описание. Это предположение подтверждается экспериментально, например, при исследовании тонкой структуры мезона или  $\pi^+ \pi^-$  - связанных состояний. Уравнение КГФ также описывает свободный бозон Хиггса и даже взаимодействие хиггсовских бозонов друг с другом.

## Вывод уравнения Дирака. Матрицы Дирака.

Предположение: в уравнение Шредингера входит  $\frac{\partial}{\partial t}$ , а не  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ . Тогда попытаемся написать уравнение в котором  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  тоже **в первой степени**, т.е.:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha(x) = \hat{H} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \psi_\alpha(x).$$

Вопрос: а были ли прецеденты?

Ответ: были для фотона. В самом деле, если ввести  $\vec{\Psi}^{(\gamma)}(x) = \vec{E} + i\vec{H}$ , где  $\vec{E}$  - электрическое поле,  $\vec{H}$  - магнитное поле, то в случае свободного электромагнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Psi}^{(\gamma)}(x) = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}^{(\gamma)}(x).$$

Рассмотрим уравнение для свободного  $e^- (e^+)$ , тогда его можно представить в виде:

$$I i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \left( \vec{\alpha} \hat{p} + \beta m \right) \psi(x), \quad (12.2)$$

где  $\alpha^i, i = 1, 2, 3$  и  $\beta$  - числа или матрицы пока неизвестной размерности,  $I$  - единичный элемент, т.е.

$$I^2 = I, \quad I \vec{\alpha} = \vec{\alpha} I \quad \text{и} \quad I \beta = \beta I,$$

$\hat{p} = -i\vec{\nabla}$  - оператор 3-х импульса.

Поскольку частица является свободной, то в силу корпускулярно-волнового дуализма решение ищем в виде плоской волны:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{pmatrix} e^{-i(px)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{pmatrix} e^{-iEt + i\vec{p}\vec{x}}.$$

Это ведет к следующим условиям антикоммутиации:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2I \delta^{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0; \quad \beta^2 = I, \quad i = 1, 2, 3.$$

Покажем, что  $\alpha^i$  и  $\beta$  удовлетворяют условиям:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2I \delta^{ij};$$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0; \beta^2 = I, \quad i = 1, 2, 3.$$

Решение уравнения

$$Ii \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = (\vec{\alpha} \hat{p} + \beta m) \psi(x)$$

ищем в виде плоской волны:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{pmatrix} e^{-i(px)},$$

тогда:

$$i(-i)EI\psi(x) = (\vec{\alpha}(-i)i\vec{p} + \beta m)\psi(x) \Rightarrow (IE - \vec{\alpha}\vec{p} - \beta m)\psi(x) = 0$$

Поддействуем на это выражение комбинацией  $(IE + \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)$ , тогда получим:

$$(IE^2 - (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)^2)\psi(x) = 0.$$

а) Пусть  $\vec{p} = \vec{0}$ , т.е.  $e^-(e^+)$  покоится  $\Rightarrow E = m$  и

$$(Im^2 - \beta^2 m^2)\psi(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta^2 = I.$$

б) Пусть частица движется вдоль оси ОХ:  $p^1 \neq 0, p^2 = p^3 = 0 \Rightarrow E^2 = (p^1)^2 + m^2$

$$\left( I((p^1)^2 + m^2) - (\alpha^1)^2 (p^1)^2 - (\alpha^1 \beta + \beta \alpha^1) p^1 m - \beta^2 m^2 \right) \psi(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( (I - (\alpha^1)^2) (p^1)^2 - (\alpha^1 \beta + \beta \alpha^1) p^1 m \right) \psi(x) = 0$$

Собирая коэффициенты при разных степенях  $p^1$ , получаем:

$$\alpha^1 \beta + \beta \alpha^1 = 0, \quad (\alpha^1)^2 = I.$$

Аналогично, выбирая только  $p^2 \neq 0$  или  $p^3 \neq 0$  можем найти:

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i \neq 0, \\ (\alpha^i)^2 = I; \quad i = 1, 2, 3.$$

в) Пусть теперь  $p^1 \neq 0$  и  $p^2 \neq 0$ , тогда:

$$E^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 + m^2, \\ (IE^2 - (\alpha^1 p^1 + \alpha^2 p^2 + \beta m)^2) \psi(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-\alpha^1 \alpha^2 + \alpha^2 \alpha^1) p^1 p^2 \psi(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha^1 \alpha^2 + \alpha^2 \alpha^1 = 0.$$

Перебирая все пары  $p^i$  и  $p^j$ ,  $i \neq j$ , получаем:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 0, \quad \text{если } i \neq j.$$

Объединяя это с формулой  $(\alpha^i)^2 = I$  окончательно можно записать:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2I\delta^{ij}, \quad \{i, j\} = \{1, 2, 3\}.$$

Итого:

$$\{\alpha^i, \beta\} = 0 \quad (12.3)$$

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}I \quad (12.4)$$

$$\{\beta, \beta\} = 2I \quad (12.5)$$

$$(\alpha^i)^\dagger = (\alpha^i) \quad (12.6)$$

$$(\beta)^\dagger = (\beta^i) \quad (12.7)$$

Поскольку  $\hat{H}$  и  $\hat{p}$  - эрмитовы операторы, то величины  $\alpha^i$  и  $\beta$  тоже должны быть эрмитовыми:

$$(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \text{ и } \beta^\dagger = \beta.$$

Вопрос: если  $\alpha^i$  и  $\beta$  - матрицы, то какой они размерности?

а)  $1 \times 1 \equiv$  числа? Нет, т.к. для чисел одновременно не выполняется  $\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0$  и  $(\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1$ .

б)  $2 \times 2$  - матрицы? Нет. Если бы это было так, то  $\alpha^i \equiv \sigma^i$ ,  $\beta \equiv \hat{1}$ , но

$$\sigma^i \hat{1} + \hat{1} \sigma^i = 2\sigma^i \neq 0$$

$$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0$$

в)  $3 \times 3$  - матрицы? Опять нет.

В линейной алгебре доказана формула, что если А и В - две матрицы одного порядка, то

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Легко видеть, что

$$\det(-I) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^n$$

С другой стороны

$$(-1)^n \det(\beta) \det(\alpha^i) = \det(-I\beta\alpha^i) = \det(-\beta\alpha^i) = \det(\alpha^i\beta) = \det(\alpha^i) \det(\beta)$$

Т.к  $\det(\alpha^i) \neq 0$  (из (12.4)  $\Rightarrow (\alpha^i)^2 = I \Rightarrow \det((\alpha^i)^2) = 1^n = 1$ ) и  $\det(\beta) \neq 0$  (из (12.5)  $\Rightarrow \beta^2 = I \Rightarrow \det(\beta^2) = 1^n = 1$ ), то

$$(-1)^n = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - \text{четное} \Rightarrow n \neq 3.$$

г)  $4 \times 4$  - матрицы? **Да!**

Замечание: Это автоматически означает, что  $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$  - биспинор, т.е.

**естественным образом** выполнено условие б) из начала лекции. Мы на правильном пути.

## Симметричная форма уравнения Дирака.

Согласно (12.2) уравнение Дирака имеет вид:

$$\left( I \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right) - \vec{\alpha} (-i \vec{\nabla}) - \beta m \right) \psi(x) = 0,$$

где, как было установлено выше,  $\vec{\alpha}$  и  $\beta$  - матрицы размерности  $4 \times 4$  и  $\psi(x)$  - биспинор. Домножим на  $\beta$ :

$$\left( \beta \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right) + \beta \vec{\alpha} (i \vec{\nabla}) - I m \right) \psi(x) = 0,$$

где учтено, что  $\beta^2 = I$ .

Пусть  $\beta \equiv \gamma^0$ ,  $\beta \alpha^i \equiv \gamma^i$ ,  $i = 1, 2, 3 \Rightarrow$  можно ввести 4-вектор:

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\gamma^0, \vec{\gamma})$$

и

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma^0, -\vec{\gamma}).$$

Вспоминая, выражение (1.8):  $\partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$ , легко видим:

$$\beta \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right) + \beta \vec{\alpha} (i \vec{\nabla}) = i \left( \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma} \vec{\nabla} \right) = i \gamma^\mu \partial_\mu \Rightarrow$$

симметричная форма уравнения Дирака:

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - I m) \psi(x) = 0 \quad (12.8)$$

Матрицы  $\gamma^\mu$  удовлетворяют условию антикоммутации:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I \quad (12.9)$$

Не все матрицы  $\gamma^\mu$  являются эрмитовыми. Действительно:

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 - \text{эрмитова}, \quad (12.10)$$

$$\text{но } (\gamma^i)^\dagger = (\beta \alpha^i)^\dagger = (\alpha^i)^\dagger \beta^\dagger = -\beta \alpha^i = -\gamma^i - \text{антиэрмитова! } i = 1, 2, 3. \quad (12.11)$$

## Явные представления Гамма-матриц.

А) Стандартное представление или представление Паули-Дирака. В этом представлении:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

где  $i = 1, 2, 3$  и  $\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  - единичная матрица размерности  $2 \times 2$ .

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \sigma^1 \sigma^2 \sigma^3 \\ -i \sigma^1 \sigma^2 \sigma^3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix}.$$



Б) Другие представления  $\gamma$ -матриц.

Пусть имеется унитарная матрица  $U$ , т.е. матрица:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I,$$

тогда уравнение Дирака и Лагранжиан спинорного поля не меняются, если:

$$\psi(x) \Rightarrow U\psi(x) \quad \text{и} \quad \gamma^\mu \Rightarrow U\gamma^\mu U^\dagger.$$

С помощью подбора унитарной матрицы  $U$  из стандартного представления можно конструировать любые другие.

Введем:

$$\sigma_+^\mu = (\hat{1}, \vec{\sigma}) \quad \text{и} \quad \sigma_-^\mu = (\hat{1}, -\vec{\sigma}) = \sigma_{+\mu},$$

тогда:

а) Вейлевское (спиральное) представление:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad U_{D \Rightarrow V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{1} & -\hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

б) Спинорное представление:  $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_-^\mu \\ \sigma_+^\mu & 0 \end{pmatrix}$ .

## 13. Лекция 13. Алгебра матриц Дирака. Часть 1.

В дополнение к матрицам Дирака определим:

$$\gamma^5 \stackrel{\text{def}}{=} i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_5 \quad (13.1)$$

и

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (13.2)$$

Из определения  $\sigma^{\mu\nu}$  следует, что:

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$$

### Свёртки по индексам и другие полезные формулы

1.  $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4I$ .

Действительно:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = \gamma^0\gamma^0 - \gamma^1\gamma^1 - \gamma^2\gamma^2 - \gamma^3\gamma^3 = I + I + I + I = 4I.$$

2.  $\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu = -2\gamma^\alpha$ .

Действительно:

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu = -\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\mu + 2g^{\alpha\mu}\gamma_\mu = -4\gamma^\alpha + 2\gamma^\alpha = -2\gamma^\alpha.$$

Можно показать, что:  $\gamma^\mu\gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_{2n+1}}\gamma_\mu = -2\gamma^{\alpha_{2n+1}} \dots \gamma^{\alpha_1}$

Доказать это можно по индукции, начало которой положено в начале этого пункта.

Также:

$$\gamma^\mu\gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_{2n+1}}\gamma^\lambda\gamma_\mu = 2\gamma^{\alpha_{2n+1}} \dots \gamma^{\alpha_1}\gamma^\lambda + 2\gamma^\lambda\gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_{2n+1}}$$

3.  $\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta}I$ .

Действительно:

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu = -\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma_\mu + 2g^{\mu\alpha}\gamma^\beta\gamma_\mu = 2\gamma^\alpha\gamma^\beta + 2\gamma^\beta\gamma^\alpha = 4g^{\alpha\beta}I.$$

4. Полезная формула при вычислении матричных элементов:

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma_0 = \gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu \quad (13.3)$$

Действительно:

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \begin{cases} \gamma^0\gamma^0\gamma^0 \\ -\gamma^0\gamma^i\gamma^0, i = 1, 2, 3 \end{cases} = \begin{cases} \gamma^0 \\ -\gamma^0\gamma^0\gamma^i, i = 1, 2, 3 \end{cases} = \gamma^\mu$$

При вычислении было использовано, что  $\gamma^0\gamma^0 = I$ , и свойства  $\gamma$ -матриц относительно эрмитового сопряжения (12.10), (12.11).

## Свойства матрицы $\gamma^5$

Докажем три важных свойства матрицы  $\gamma^5$ , следующие из её определения и (12.9), (12.10), (12.11):

$$\begin{aligned}(\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5 \text{ (эрмитовость)}, \\ (\gamma^5)^2 &= I, \\ \gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu &= 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3\end{aligned}$$

Действительно:

$$\begin{aligned}(\gamma^5)^\dagger &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = (-1)^{1+3}i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = (-1)^{1+3+3}i\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1 = \\ &= (-1)^{1+3+3+2}i\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2 = (-1)^{1+3+3+2+1}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (-1)^{10}\gamma^5 = \gamma^5\end{aligned}$$

Первое свойство доказано. Перейдём ко второму:

$$\begin{aligned}(\gamma^5)^2 &= i^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (-1)^{1+3}(\gamma^0)^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \\ &= (-1)^{1+3+2}(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = (-1)^{1+3+2+1}(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 = \\ &= (-1)^7g^{00}g^{11}g^{22}g^{33}I^4 = (-1)^{10}I = I\end{aligned}$$

Последнее свойство - свойство антикоммутиации - очевидно, поскольку в матрице  $\gamma^5$  по разу встречается каждая из матриц  $\gamma^\mu$ . Поясним данное утверждение на примере.

Пусть  $\mu = 2$ , тогда:

$$\gamma^2\gamma^5 = \gamma^2i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (-1)^1i\gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (-1)^2i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^2\gamma^3 = (-1)^3i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2 = -\gamma^5\gamma^2$$

то есть  $\gamma^2\gamma^5 + \gamma^5\gamma^2 = 0$ .

Аналогично для  $\mu = 0, 1, 3$ .

Введём:

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + \gamma^5) \quad (13.4)$$

$$P_- = \frac{1}{2}(I - \gamma^5) \quad (13.5)$$

Свойства:

- 1)  $P_+ + P_- = I$
- 2)  $P_+ \cdot P_- = P_- \cdot P_+ = 0$
- 3)  $(P_\pm)^2 = P_\pm$

$P_\pm$  являются **проекторами** на состояния с определённой спиральностью.

$$P_+\gamma^\mu = \frac{1}{2}\gamma^\mu + \frac{1}{2}\gamma^5\gamma^\mu = \frac{1}{2}\gamma^\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^5 = \gamma^\mu P_-$$

Тогда:

- 4)  $P_\pm\gamma^\mu = \gamma^\mu P_\mp$

В лекции 1 был введён полностью антисимметричный тензор 4-го ранга  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  с условием:

$$\varepsilon^{0123} = -1 \quad (13.6)$$

С использованием этого тензора матрицу  $\gamma^5$  можно записать в виде:

$$\gamma^5 = \frac{i}{24} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \quad (13.7)$$

Справедливость данного выражения легко понять. Если  $\mu = 0, \nu = 1, \alpha = 2, \beta = 3$ , то  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = 1$ . Тогда получаем определение матрицы  $\gamma^5$  (13.1). С другой стороны, чётность перестановки двух индексов в  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  совпадает с числом антикоммутаций в выражении  $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$ . Таким образом они друг друга компенсируют. Например, пусть  $\mu = 1, \nu = 3, \alpha = 0, \beta = 2$ . Тогда  $\varepsilon_{1302} = (-1)^3 \varepsilon_{0123}$ . С другой стороны,  $i\gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^2 = (-1)^3 i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ . Вспоминая теперь, что число ненулевых компонент в  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  равно  $4! = 24$ , приходим к записанному выше выражению для  $\gamma^5$ .

## 14. Лекция 14. Алгебра матриц Дирака. Часть 2

### Вычисление следов матриц Дирака

Все вычисления следов  $\gamma$ -матриц основываются на соотношениях (12.9) и (13.7) и свойстве следа от произведения матриц A и B:

$$Sp(AB) = Sp(BA) \quad (14.1)$$

1.  $Sp(I) = 4$ .

Ответ очевиден, т.к. след - это сумма диагональных матричных элементов.

2.  $Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ .

Возьмём  $Sp$  от обеих частей (12.9). Тогда получим:

$$2g^{\mu\nu} Sp(I) = Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu) + Sp(\gamma^\nu \gamma^\mu) = 2Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu).$$

Т.к.  $Sp(I) = 4$ , то  $Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu) = g^{\mu\nu} Sp(I) = 4g^{\mu\nu}$ , ч.т.д.

3.  $Sp(\sigma^{\mu\nu}) = 0$ .

Действительно:  $Sp(\sigma^{\mu\nu}) = \frac{i}{2} Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{i}{2} (Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu) - Sp(\gamma^\nu \gamma^\mu)) = 2i(g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) = 0$ .

4.  $Sp(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$ ,

т.е. след нечётного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю.

Действительно, используя  $I = \gamma^5 \gamma^5$ :

$$\begin{aligned} Sp(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) &= Sp(I \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = Sp(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = \\ &= -Sp(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^5 \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = (-1)^{2n+1} Sp(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma^5) = \\ &= (-1)^{2n+1} Sp(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = (-1) Sp(I \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = \\ &= (-1) Sp(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) \Rightarrow Sp(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0 \end{aligned}$$

**Очевидные следствия:**

$$\begin{aligned} Sp(\gamma^\mu) &= 0, \\ Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda) &= 0, \\ Sp(\sigma^{\mu\nu} \gamma^\alpha) &= 0 \\ Sp(\gamma^\mu \gamma^5) &= 0, \end{aligned}$$

Поясним последнее равенство:

$$Sp(\gamma^\mu \gamma^5) = \frac{i}{24} Sp(\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta}_5 \gamma\text{-матриц}) \varepsilon_{\nu\lambda\alpha\beta} = 0.$$

5.  $Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha})$ . Действительно:

$$\begin{aligned} Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) &= Sp((2g^{\mu\nu} I - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 2g^{\mu\nu} Sp(\gamma^\alpha \gamma^\beta) - Sp(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = \\ &= 8g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - Sp(\gamma^\nu (2I g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\mu) \gamma^\beta) = 8g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - 2g^{\mu\alpha} Sp(\gamma^\nu \gamma^\beta) + \\ &+ Sp(\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta) = 8g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - 8g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + Sp(\gamma^\nu \gamma^\alpha (2I g^{\mu\beta} - \gamma^\beta \gamma^\mu)) = 8g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - \\ &- 8g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + 2g^{\mu\beta} Sp(\gamma^\nu \gamma^\alpha) - Sp(\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu) = 8(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) - \\ &- Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) \end{aligned}$$

Таким образом, формула доказана.

**Следствие 1:**  $Sp(\gamma^5) = 0$ .

Можно доказать двумя способами.

Из определения матрицы  $\gamma^5$  (13.1) получаем:

$$Sp(\gamma^5) = iSp(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = 4i(g^{01} g^{23} - g^{02} g^{13} + g^{03} g^{12}) = 0.$$

Иначе, по определению (13.7) можем записать:

$$Sp(\gamma^5) = \frac{i}{24} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = \frac{i}{6} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) = \frac{i}{6} (\varepsilon_{\mu\mu\alpha\alpha} - \varepsilon_{\mu\nu\nu\mu} + \varepsilon_{\mu\nu\nu\mu}) = 0$$

по свойству полностью антисимметричного тензора.

**Следствие 2:** Редукционная формула для вычисления следа любого чётного числа  $\gamma$ -матриц:

$$Sp(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}) = g^{\mu_1 \mu_2} Sp(\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}) - g^{\mu_1 \mu_3} Sp(\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2n}}) + \dots + (-1)^i g^{\mu_1 \mu_i} Sp(\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{i-1}} \gamma^{\mu_{i+1}} \dots \gamma^{\mu_{2n}}) + \dots + g^{\mu_1 \mu_{2n}} Sp(\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}).$$

Эта формула получается аналогично формуле для следа четырёх  $\gamma$ -матриц «протаскиванием» матрицы  $\gamma^{\mu_1}$  по следу слева направо и применением для её возвращения в начало следа свойства (14.1), где  $B \equiv \gamma^{\mu_1}$ ,  $A \equiv \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}}$ .

6.  $Sp(\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta}) = T^{\mu\nu\alpha\beta}$ , где  $T^{\mu\nu\alpha\beta}$  - какой-то тензор 4-го ранга, который меняет знак при перестановке индексов  $\mu, \nu$  и  $\alpha, \beta$ .  $T^{\mu\nu\alpha\beta} \neq \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  т.к.  $T^{\mu\nu\alpha\beta}$  меняет знак при перестановки не любых индексов. Попробуем составить из метрических тензоров  $g^{\mu\nu}$  конструкцию, имеющую такую же симметрию как  $T^{\mu\nu\alpha\beta}$ .

$$Sp(\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta}) = A(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) = Sp(\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}) = A(g_{\alpha}^{\mu} g_{\beta}^{\nu} - g_{\beta}^{\mu} g_{\alpha}^{\nu}).$$

Положим  $\mu = \alpha$ ,  $\nu = \beta$

$$\text{Тогда правая часть: } A(g_{\mu}^{\mu} g_{\nu}^{\nu} - g_{\nu}^{\mu} g_{\mu}^{\nu}) = A(\underbrace{g_{\mu}^{\mu} g_{\nu}^{\nu}}_{=4 \cdot 4} - \underbrace{g_{\mu}^{\nu}}_{=4}) = 12A$$

Левая часть:

$$\begin{aligned} Sp(\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}) &= \left(\frac{i}{2}\right)^2 Sp((\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \gamma^{\mu})(\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu})) = \\ &= -\frac{1}{4} Sp(\gamma^{\mu} \underbrace{\gamma^{\nu} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu}}_{=-2\gamma_{\mu}} - \gamma^{\mu} \underbrace{\gamma^{\nu} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}}_{=4I} - \gamma^{\nu} \underbrace{\gamma^{\mu} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu}}_{=4I} + \underbrace{\gamma^{\nu} \gamma^{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}}_{=-2\gamma^{\mu}}) = \\ &= -\frac{1}{4} Sp(-2\gamma^{\mu} \gamma_{\mu} - 4\gamma^{\mu} \gamma_{\mu} - \gamma^{\nu} \gamma_{\nu} - 2\gamma^{\mu} \gamma_{\mu}) = -\frac{1}{4} Sp(-8I - 16I - 16I - 8I) = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (-48) Sp(I) = 48 \end{aligned}$$

Отсюда  $A = 4$

Итого:

$$Sp(\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta}) = 4(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \quad (14.2)$$

7.  $Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$ .

Для доказательства этого соотношения докажем сначала, что:

$$Sp(\gamma^5 \sigma^{\mu\nu}) = 0.$$

Действительно, данный след может быть представлен в виде:

$$Sp(\gamma^5 \sigma^{\mu\nu}) = Ag^{\mu\nu} + B_{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$$

По определению (13.2)  $\sigma^{\mu\nu}$  - антисимметричный по индексам  $\mu$  и  $\nu$  тензор. Поэтому:

$$0 = Sp(\gamma^5 \sigma^{\mu\mu}) = Ag^{\mu\mu} + B_{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\mu\alpha\beta} = 4A \Rightarrow A = 0.$$

Далее, тензор  $B_{\alpha\beta}$  должен зависеть только от свойств пространства, т.е.

$$B_{\alpha\beta} = \{g_{\alpha\beta}, \delta_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta}\} \Rightarrow B_{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = 0.$$

Теперь вычислим  $Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu)$ :

$$0 = Sp(\gamma^5 \sigma^{\mu\nu}) = \frac{i}{2}(Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) - Sp(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu)) = \frac{i}{2}(Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) - Sp(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu)) = \\ = iSp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu), \text{ ч.т.д.}$$

8.  $Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ .

Прежде всего заметим, что при нечётной перестановке индексов  $Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta)$  меняет знак, а при чётной - не меняет (в точности как  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ ). Действительно, например,  $Sp(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = Sp(\gamma^5 (2I g^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma^\alpha \gamma^\beta) = -Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta)$ .

Таким образом:  $Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = A\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ . Коэффициент пропорциональности можно найти, положив  $\mu = 0, \nu = 1, \alpha = 2$  и  $\beta = 3$ . Тогда:

$$-A = A\varepsilon^{0123} = Sp(\gamma^5 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = Sp(\gamma^5 \frac{1}{i} \gamma^5) = -iSp((\gamma^5)^2) = -iSp(I) = \\ = -4i \Rightarrow A = 4i.$$

## 15. Лекция 15. Разложение по базису. Преобразование Фирца.

### Полезная формула

$$e^{\vec{\gamma} \cdot \vec{n} \alpha} = I + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{n}}{1!} \alpha + \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})^2}{2!} \alpha^2 + \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})^3}{3!} \alpha^3 + \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})^4}{4!} \alpha^4 + \dots$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор,  $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ ,  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\vec{\gamma} \cdot \vec{n})^2 &= (\vec{\gamma} \cdot \vec{n}) \cdot (\vec{\gamma} \cdot \vec{n}) = \gamma^i n_i \gamma^j n_j = \gamma^i \gamma^j n_i n_j = \\ &= \left( \underbrace{\frac{\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i}{2}}_{\text{симметр. часть}} + \underbrace{\frac{\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i}{2}}_{\text{антисимм. часть}} \right) \underbrace{n_i n_j}_{\text{симметр. часть}} = \left( \frac{\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i}{2} \right) n_i n_j = \frac{1}{2} 2g^{ij} n_i n_j I \end{aligned}$$

Т.к.  $i, j = 1, 2, 3 \Rightarrow g^{ij} = -\delta^{ij}$ :

$$(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})^2 = -\delta^{ij} n_i n_j I = -|\vec{n}|^2 I = -I \quad (15.1)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} e^{(\vec{\gamma} \cdot \vec{n}) \alpha} &= I + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{n}}{1!} \alpha + \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})^2}{2!} \alpha^2 + \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})^3}{3!} \alpha^3 + \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})^4}{4!} \alpha^4 + \dots = \\ &= I \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots \right) + (\vec{\gamma} \cdot \vec{n}) \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} \right) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\cos(\alpha)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=\sin(\alpha)} \end{aligned}$$

Итого:

$$e^{\pm(\vec{\gamma} \cdot \vec{n}) \alpha} = I \cos(\alpha) \pm (\vec{\gamma} \cdot \vec{n}) \sin(\alpha) \quad (15.2)$$

### Базис и разложения по базису

Любую матрицу  $4 \times 4$  можно разложить по базису:

$$\underbrace{\gamma^5}_{1 \text{ шт.}}, \quad \underbrace{\gamma^\mu}_{4 \text{ шт.}}, \quad \underbrace{\gamma^\mu \gamma^5}_{4 \text{ шт.}}, \quad \underbrace{\sigma^{\mu\nu}}_{6 \text{ шт.}}, \quad \underbrace{I}_{1 \text{ шт.}} \quad (15.3)$$

Используя результаты вычисления следов матриц Дирака из прошлой лекции, можно легко проверить, что следы от произведения любых двух элементов базиса равны нулю.

Рассмотрим матрицу  $M^{(\dots)}$  размера  $4 \times 4$  и разложим её по базису:

$$M^{(\dots)} = A^{(\dots)} \gamma^5 + B^{(\dots)\mu} \gamma_\mu + C^{(\dots)\mu} \gamma_\mu \gamma^5 + D^{(\dots)\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + E^{(\dots)} I \quad (15.4)$$

Найдём коэффициенты разложения в общем виде.



Домножим на  $I$  обе части (15.4) и возьмем  $Sp$  (индексы (...) опустим), получим что  $\neq 0$  только след от  $I$ :

$$Sp(M) = E \cdot Sp(I) = 4E \Rightarrow E = \frac{1}{4}Sp(M)$$

Домножим на  $\gamma^5$  обе части (15.4) и возьмем  $Sp$ :

$$Sp(\gamma^5 M) = A \cdot Sp(\gamma^5 \gamma^5) = \text{по свойству } \gamma^5 = A Sp(I) = A \cdot 4 \Rightarrow A = \frac{1}{4}Sp(\gamma^5 M)$$

Домножим на  $\gamma^\nu$  обе части (15.4) и возьмем  $Sp$ :

$$Sp(\gamma^\nu M) = B^\mu \cdot Sp(\gamma^\nu \gamma_\mu) = 4g_\mu^\nu B^\mu = 4B^\nu \Rightarrow B^\mu = \frac{1}{4}Sp(\gamma^\mu M)$$

Домножим на  $\gamma^\nu \gamma^5$  обе части (15.4) и возьмем  $Sp$ :

$$\begin{aligned} Sp(\gamma^\nu \gamma^5 M) &= C^\mu Sp(\gamma^\nu \gamma^5 \gamma_\mu \gamma^5) = \text{свойство антикоммутиации } \gamma^5 = \\ &= -C^\mu Sp(\gamma^\nu \gamma_\mu \underbrace{\gamma^5 \gamma^5}_{=I}) = -C^\mu Sp(\gamma^\nu \gamma^\mu) = -4C^\mu g_\mu^\nu = -4C^\nu \Rightarrow C^\mu = -\frac{1}{4}Sp(\gamma^\mu \gamma^5 M) \end{aligned}$$

Рассмотрим  $D^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = (D_S^{\mu\nu} + D_A^{\mu\nu}) \sigma_{\mu\nu}$

где  $D_S^{\mu\nu} = +D_S^{\nu\mu}$  - симметричная часть,  $D_A^{\mu\nu} = -D_A^{\nu\mu}$  - антисимметричная часть.

Но свёртка антисимметричного и симметричного тензоров = 0. Тогда:

$D^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = D_A^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}$ , ведь  $\sigma_{\mu\nu}$  - антисимметричный тензор.

Сделаем замену:  $D_A^{\mu\nu} \equiv D^{\mu\nu}$

Домножим на  $\sigma_{\alpha\beta}$  обе части (15.4) и возьмем  $Sp$ :

$$\begin{aligned} Sp(\sigma^{\alpha\beta} M) &= D^{\mu\nu} Sp(\sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu}) = \text{используем (14.2)} = 4(g_\mu^\alpha g_\nu^\beta - g_\nu^\alpha g_\mu^\beta) D^{\mu\nu} = \\ &= 4(D^{\alpha\beta} - D^{\beta\alpha}) = \text{антисимметрия} = 8D^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Тогда:  $D^{\mu\nu} = \frac{1}{8}Sp(\sigma^{\mu\nu} M)$

Приведём примеры двух разложений.

$$1. \gamma^\alpha \gamma^\beta = g^{\alpha\beta} I - i\sigma^{\alpha\beta}.$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta = \frac{1}{2}(\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha) + \frac{1}{2}(\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha) = g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - i\sigma^{\alpha\beta}.$$

$$2. \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5 = g^{\alpha\beta} \gamma^5 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu.$$

Честно раскладываем по базису:

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5 = A^{\alpha\beta} \gamma^5 + B^{\alpha\beta\mu} \gamma_\mu + C^{\alpha\beta\mu} \gamma_\mu \gamma^5 + D^{\alpha\beta\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + E^{\alpha\beta} I.$$

Домножаем на  $\gamma^5$ . Тогда после взятия следа от обеих частей находим:

$$Sp(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5) = A^{\alpha\beta} Sp(\gamma^5 \gamma^5) \Rightarrow A^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}.$$

Домножаем на  $\gamma^{\mu'}$  вычисляем след:

$$Sp(\gamma^{\mu'} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5) = B^{\alpha\beta\mu} Sp(\gamma^{\mu'} \gamma_\mu) = 4B^{\alpha\beta\mu'} \Rightarrow B^{\alpha\beta\mu'} = 0.$$

Аналогично  $C^{\alpha\beta\mu} = 0$  и  $E^{\alpha\beta} = 0$

Остается:  $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5 = g^{\alpha\beta} \gamma^5 + D^{\alpha\beta\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}$ .

Коэффициент  $D^{\alpha\beta\mu\nu}$  должен быть антисимметричен по индексам  $\mu$  и  $\nu$ , т.е.:

$$\begin{aligned} D^{\alpha\beta\mu\nu} &= -D^{\alpha\beta\nu\mu} \Rightarrow D^{\alpha\beta\mu\mu} = 0 \Rightarrow D^{\alpha\beta\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = iD^{\alpha\beta\mu\nu} (\gamma_\mu \gamma_\nu - I g_{\mu\nu}) = \\ &= iD^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu. \end{aligned}$$

То есть:

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5 = g^{\alpha\beta} \gamma^5 + i D^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu.$$

Домножаем на  $\gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'}$  и вычисляем след:

$$\begin{aligned} Sp(\gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5) &= i D^{\alpha\beta\mu\nu} Sp(\gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma_\mu \gamma_\nu) \Leftrightarrow 4i \varepsilon^{\mu'\nu'\alpha\beta} = 4i D^{\alpha\beta\mu\nu} (g^{\mu'\nu'} g_{\mu\nu} - g_\mu^{\mu'} g_\nu^{\nu'} + \\ &+ g_\nu^{\mu'} g_\mu^{\nu'}) \Rightarrow 4i \varepsilon^{\alpha\beta\mu'\nu'} = 4i (-D^{\alpha\beta\mu\nu} + D^{\alpha\beta\nu'\mu'}) \Rightarrow D^{\alpha\beta\mu'\nu'} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu'\nu'}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5 = g^{\alpha\beta} \gamma^5 - \frac{i}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu.$$

Следствие 1: полностью аналогично можно найти разложение  $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma$ .

Следствие 2: разложение большего числа произведения  $\gamma$ -матриц можно получить, перемножая между собой разложения  $\gamma^\alpha \gamma^\beta$ ,  $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5$  и  $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma$ .

## Ортогональное разложение единицы

**Напомним:**

Пусть в конечномерном гильбертовом пространстве  $\mathbb{H}$  имеется вектор состояния  $|\psi\rangle$ :  $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$ . Введём ортонормированный базис  $\{|a_i\rangle\} \in \mathbb{H}$ ,  $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$ . Тогда по принципу суперпозиции  $\forall |\psi\rangle \in \mathbb{H}$ :  $|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$ ,  $c_i = \langle a_i | \psi \rangle$ .

Чтобы получить ортогональное разложение единицы, нужно подействовать единичным оператором  $\hat{1}$  на вектор  $|\psi\rangle$ :  $\hat{1}|\psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle c_i = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | \psi \rangle = \left( \sum_i \underbrace{|a_i\rangle \langle a_i|}_{\hat{P}_{a_i}} \right) |\psi\rangle$ ,

где  $\hat{P}_{a_i}$  - проектор на состояние  $a_i$ . Отсюда:  $\sum_i \hat{P}_{a_i} = \hat{1}$  - сумма всех проекторов на базисные состояния равна единичному оператору.

Теперь сделаем то же самое, только для разложения матрицы  $4 \times 4$ . В формулу (15.4) подставим ранее вычисленные коэффициенты в явном виде:

$$M = \frac{1}{4} Sp(M \gamma^5) \gamma^5 + \frac{1}{4} Sp(M \gamma^\mu) \gamma_\mu - \frac{1}{4} Sp(M \gamma^\mu \gamma^5) \gamma_\mu \gamma^5 + \frac{1}{8} Sp(M \sigma^{\mu\nu}) \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{4} Sp(M I) I$$

Запишем эту формулу в матричных индексах, помня что  $(AB)_{mn} = A_{ml} B_{ln}$ ,  $Sp(A) = A_{ll}$

$$\begin{aligned} \delta_{kl} \delta_{li} M_{li} = M_{kj} &= \frac{1}{4} \underbrace{M_{li} \gamma_{il}^5}_{\text{число}} \gamma_{kj}^5 + \frac{1}{4} M_{li} (\gamma^\mu)_{il} (\gamma_\mu)_{kj} - \frac{1}{4} M_{li} (\gamma^\mu \gamma^5)_{il} (\gamma_\mu \gamma^5)_{kj} + \\ &+ \frac{1}{8} M_{li} (\sigma^{\mu\nu})_{il} (\sigma_{\mu\nu})_{kj} + \frac{1}{4} M_{li} \delta_{il} \delta_{kj} \end{aligned}$$

Сокращаем на  $M_{li}$  и получаем разложение единицы:

$$\delta_{ij}\delta_{kl} = \frac{1}{4} \left[ \delta_{il}\delta_{kj} + \gamma_{il}^5 \gamma_{kj}^5 + (\gamma^\mu)_{il} (\gamma_\mu)_{kj} - (\gamma^\mu \gamma^5)_{il} (\gamma_\mu \gamma^5)_{kj} + \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu})_{il} (\sigma_{\mu\nu})_{kj} \right] \quad (15.5)$$

**Следствия:**

1) Пусть  $A$  и  $B$  -  $4 \times 4$  матрицы. Домножим (15.5) на  $A_{li} B_{jk}$  слева и справа:

$$A_{li} B_{jk} = \frac{1}{4} \left[ A_{ii} B_{jj} + (\gamma_{il}^5 A_{li}) (\gamma_{kj}^5 B_{jk}) + ((\gamma^\mu)_{il} A_{li}) ((\gamma_\mu)_{kj} B_{jk}) - \right. \\ \left. - ((\gamma^\mu \gamma^5)_{il} A_{li}) ((\gamma_\mu \gamma^5)_{kj} B_{jk}) + \frac{1}{2} ((\sigma^{\mu\nu})_{il} A_{li}) ((\sigma_{\mu\nu})_{kj} B_{jk}) \right]$$

Тогда:

$$Sp(AB) = \frac{1}{4} \left[ Sp(A)Sp(B) + Sp(\gamma^5 A)Sp(\gamma^5 B) + Sp(\gamma^\mu A)Sp(\gamma^\mu B) - \right. \\ \left. - Sp(\gamma^\mu \gamma^5 A)Sp(\gamma_\mu \gamma^5 B) + \frac{1}{2} Sp(\sigma^{\mu\nu} A)Sp(\sigma_{\mu\nu} B) \right]$$

Таким образом, мы разложили след от произведения матриц  $AB$  по базису.

2) Пусть  $A$  и  $B$  -  $4 \times 4$  матрицы.

$$Sp(A \underbrace{\gamma^\mu \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{2n+1}}}_{\text{чётное число матриц}} B) = 2 \left[ Sp(A \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{2n+1}} B) + Sp(A \gamma^{\alpha_{2n+1}} \dots \gamma^{\alpha_1} B) \right]$$

## Преобразование Фирца

Для того чтобы получить преобразование Фирца нужно формулу (15.5) домножить на  $A_{mi} B_{ln}$ , где матрицы  $A$  и  $B$  размера  $4 \times 4$ :

$$A_{mj} B_{kn} = \frac{1}{4} \left[ \underbrace{A_{ml} B_{ln}}_{(A_{mn})} \delta_{kj} + (A \gamma^5 B)_{mn} \gamma_{kj}^5 + (A \gamma^\mu B)_{mn} (\gamma_\mu)_{kj} - \right. \\ \left. - (A \gamma^\mu \gamma^5 B)_{mn} (\gamma_\mu \gamma^5)_{kj} + \frac{1}{2} (A \sigma^{\mu\nu} B)_{mn} ((\sigma_{\mu\nu})_{kj}) \right]$$

Преобразование Фирца чаще всего используется для вычисления матричных элементов в Стандартной Модели, где вместо матрицы  $A$  берётся матрица

$$\left( \gamma^\alpha (I \pm \gamma^5) \right)_{mj}, \text{ вместо матрицы } B \text{ берётся матрица } \left( \gamma_\alpha (I \pm \gamma^5) \right)_{kn}$$

Тогда:

$$\left( \gamma^\alpha (I \pm \gamma^5) \right)_{mj} \left( \gamma_\alpha (I \pm \gamma^5) \right)_{kn} = - \left( \gamma^\alpha (I \pm \gamma^5) \right)_{mn} \left( \gamma_\alpha (I \pm \gamma^5) \right)_{kj}$$

Замечание: Вместо базиса (15.3) можно также выбрать другой базис:

$$\underbrace{I - \gamma^5}_{1 \text{ шт.}}, \quad \underbrace{I + \gamma^5}_{1 \text{ шт.}}, \quad \underbrace{\gamma^\mu(1 - \gamma^5)}_{4 \text{ шт.}}, \quad \underbrace{\gamma^\mu(1 + \gamma^5)}_{4 \text{ шт.}}, \quad \underbrace{\sigma^{\mu\nu}}_{6 \text{ шт.}} \quad (15.6)$$

Для такого выбора базиса также можно выполнить разложение по базису произвольной  $4 \times 4$  матрицы и вычислить коэффициенты.

Замечание:

В КТП операторы обозначаются буквами без "шляпки". А для чего тогда нужна эта "шляпка"?

Опр. Пусть  $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a})$ ,  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\gamma^0, \vec{\gamma})$

Тогда по определению:

$$\hat{a} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\mu a_\mu = \gamma_\mu a^\mu \quad (15.7)$$

$\hat{a}$  является матрицей  $4 \times 4$ .

$$Sp(\hat{a}\hat{b}) = Sp(\gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu) = a_\mu b_\nu Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu) = a_\mu b_\nu \cdot 4g^{\mu\nu} = 4a^\nu b_\nu = 4(ab) \quad (15.8)$$

## 16. Лекция 16. Решение уравнения Дирака

### Решение уравнения Дирака для свободной частицы в стандартном представлении.

Частное положительно-частотное решение уравнения Дирака (12.8) для свободной частицы с определенным импульсом  $\vec{p}$  имеет вид плоской волны:

$$\psi_{\vec{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} U(\vec{p}, \lambda) e^{-i(px)}, \quad (16.1)$$

где  $\lambda$  - удвоенная проекция спина на некоторую ось:

$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ ,  $\theta \in [0, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  в пространстве,  $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \pm 1$ .

Пусть

$$\begin{aligned} p^\mu &= (\varepsilon, \vec{p}) \\ p_\mu &= (\varepsilon, -\vec{p}) \end{aligned}$$

Подставляем  $\psi_{\vec{p}}(x)$  в уравнение Дирака (12.8) и получаем:

$$(\gamma^\mu p_\mu - Im)U(\vec{p}, \lambda) = 0 \Leftrightarrow (\hat{p} - Im)U(\vec{p}, \lambda) = 0 \quad (16.2)$$

$U(\vec{p}, \lambda)$  ищем в виде:

$$U(\vec{p}, \lambda) = N_{\vec{p}} \begin{pmatrix} \chi_\lambda(\vec{p}) \\ \eta_\lambda(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{спинор} \\ \leftarrow \text{спинор} \end{array}$$

где  $N_{\vec{p}}$  - нормировочный коэффициент.

Условие нормировки  $U(\vec{p}, \lambda)$ :

$$U^\dagger(\vec{p}, \lambda)U(\vec{p}, \lambda') = 2\varepsilon\delta_{\lambda\lambda'} \quad (16.3)$$

соответствует нормировке  $\psi_{\vec{p}}(x)$  на одну частицу в нормировочном объеме  $V = 1$ :

$$\int_V d\vec{x} \psi_{\vec{p}}^\dagger(x) \psi_{\vec{p}}(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_V d\vec{x} U^\dagger(\vec{p}, \lambda) U(\vec{p}, \lambda) e^{i(px)} e^{-i(px)} = \frac{U^\dagger(\vec{p}, \lambda) U(\vec{p}, \lambda)}{2\varepsilon} \int d\vec{x} = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon} V = 1$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - Im)U(\vec{p}, \lambda) &= N_{\vec{p}} \begin{pmatrix} (\varepsilon - m)\hat{1} & -(\vec{\sigma}\vec{p}) \\ (\vec{\sigma}\vec{p}) & -(\varepsilon + m)\hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\lambda(\vec{p}) \\ \eta_\lambda(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\varepsilon - m)\hat{1}\chi_\lambda(\vec{p}) = (\vec{\sigma}\vec{p})\eta_\lambda(\vec{p}) \\ (\vec{\sigma}\vec{p})\chi_\lambda(\vec{p}) = (\varepsilon + m)\hat{1}\eta_\lambda(\vec{p}) \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow U(\vec{p}, \lambda) = N_{\vec{p}} \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{\varepsilon + m} \end{pmatrix} \chi_\lambda(\vec{p}). \end{aligned}$$

Нормировочный множитель  $N_{\vec{p}}$  не фиксирован до тех пор, пока не фиксирована нормировка двухкомпонентных спиноров  $\chi_\lambda(\vec{p})$ . Выберем эту нормировку как в релятивистской квантовой механике:

$$\chi_\lambda^\dagger(\vec{p})\chi_{\lambda'}(\vec{p}) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (16.4)$$

Тогда для множителя  $N_{\vec{p}}$  получим:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon\delta_{\lambda\lambda'} &= U^\dagger(\vec{p}, \lambda)U(\vec{p}, \lambda') = |N_{\vec{p}}|^2\chi_\lambda^\dagger(\vec{p}) \begin{pmatrix} \hat{1} & (\vec{\sigma}\vec{p})^\dagger \\ (\vec{\sigma}\vec{p}) & \varepsilon+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{1} \\ (\vec{\sigma}\vec{p}) \end{pmatrix} \chi_{\lambda'}(\vec{p}) = \\ &= \left| \text{т.к. } \sigma_i^\dagger = \sigma_i, \text{ то } (\vec{\sigma}\vec{p})^\dagger = (\vec{p}\vec{\sigma}) \right| |N_{\vec{p}}|^2\chi_\lambda^\dagger(\vec{p}) \begin{pmatrix} \hat{1} & (\vec{p}\vec{\sigma}) \\ (\vec{\sigma}\vec{p}) & \varepsilon+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{1} \\ (\vec{\sigma}\vec{p}) \end{pmatrix} \chi_{\lambda'}(\vec{p}) = \\ &= |N_{\vec{p}}|^2\chi_\lambda^\dagger(\vec{p}) \left( \hat{1} + \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})^2}{(\varepsilon+m)^2} \right) \chi_{\lambda'}(\vec{p}) = \left| (\vec{a}\vec{\sigma})^2 = \hat{1}\vec{a}^2 \right| = \\ &= |N_{\vec{p}}|^2 \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{(\varepsilon+m)^2} \right) \chi_\lambda^\dagger(\vec{p})\chi_{\lambda'}(\vec{p}) = \left| \vec{p}^2 = \varepsilon^2 - m^2 = (\varepsilon+m)(\varepsilon-m) \right| = \\ &= |N_{\vec{p}}|^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon-m}{\varepsilon+m} \right) \delta_{\lambda\lambda'} = 2\varepsilon\delta_{\lambda\lambda'} \frac{|N_{\vec{p}}|^2}{\varepsilon+m} \end{aligned}$$

Отсюда:  $N_{\vec{p}} = \sqrt{\varepsilon+m} e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  - произвольная ненаблюдаемая фаза. Положим  $\alpha = 0$ .

Тогда:

$$U(\vec{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m} \chi_\lambda(\vec{p}) \\ \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{\varepsilon+m} \chi_\lambda(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m} \chi_\lambda(\vec{p}) \\ \sqrt{\varepsilon-m} \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{|\vec{p}|} \chi_\lambda(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (16.5)$$

Итого мы получили решение уравнения Дирака с точностью до неизвестного 2-х компонентного спинора.

## Дираковское сопряжение спиноров

Условие нормировки  $U(\vec{p}, \lambda)$  (16.3) плохо тем, что оно не является релятивистски инвариантным.

Но его можно записать в релятивистски-инвариантном виде, если ввести операцию **дираковского сопряжения**:

$$\bar{U}(\vec{p}, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} U^\dagger(\vec{p}, \lambda)\gamma^0 \quad (16.6)$$

Тогда условие нормировки  $U(\vec{p}, \lambda)$ :

$$\bar{U}(\vec{p}, \lambda)U(\vec{p}, \lambda') = 2m\delta_{\lambda\lambda'} \quad (16.7)$$

Покажем что (16.7) действительно релятивистски инвариантно.

Используем (16.5),(16.4) и определение матрицы  $\gamma^0$  в стандартном представлении:

$$\begin{aligned} \bar{U}(\vec{p}, \lambda)U(\vec{p}, \lambda') &= \left( \sqrt{\varepsilon + m}\chi_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p}), \frac{\chi_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{p})^{\dagger}}{\sqrt{\varepsilon + m}} \right) \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\chi_{\lambda'}(\vec{p}) \\ \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{\sqrt{\varepsilon + m}}\chi_{\lambda'}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \\ &= \left( \sqrt{\varepsilon + m}\chi_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p}), -\frac{\chi_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{p})}{\sqrt{\varepsilon + m}} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\chi_{\lambda'}(\vec{p}) \\ \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{\sqrt{\varepsilon + m}}\chi_{\lambda'}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \\ &= (\varepsilon + m)\chi_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p})\chi_{\lambda'}(\vec{p}) - \chi_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p})\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})^2}{\varepsilon + m}\chi_{\lambda'}(\vec{p}) = \delta_{\lambda\lambda'} \left[ (\varepsilon + m) - \frac{\varepsilon^2 - m^2}{\varepsilon + m} \right] = \\ &= \delta_{\lambda\lambda'} \frac{(\varepsilon + m)^2 - (\varepsilon + m)(\varepsilon - m)}{(\varepsilon + m)} = \delta_{\lambda\lambda'}(\varepsilon + m - \varepsilon - m) = 2m\delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

## Внешнее поле в уравнении Дирака

Мы нашли частное положительно-частотное решение уравнения Дирака для свободной частицы, однако оно ничего не говорит нам об античастицах. Добавим внешнее электромагнитное поле в уравнение Дирака, чтобы получить возможность отличать частицы и античастицы друг от друга.

Уравнение Дирака для свободного фермиона с  $s = \frac{1}{2}$

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - Im)\Psi(x) = 0$$

Вместо  $i\partial_{\mu}$  введем  $p_{\mu} = i\partial_{\mu}$ . Тогда:

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} - Im)\Psi(x) = 0$$

Введем внешнее поле  $A^{\mu}(x)$ , тогда как в уравнении Паули и уравнении Клейна-Гордона-Фока делаем замену:

$$p_{\mu} \Rightarrow P_{\mu} = p_{\mu} - eA_{\mu}, \quad e = -|e|,$$

где  $P_{\mu}$  - обобщённый импульс.

и уравнение Дирака во внешнем поле приобретает вид:

$$\begin{aligned} (\gamma^{\mu}P_{\mu} - Im)\Psi(x) = 0 &\Leftrightarrow (\gamma^{\mu}(p_{\mu} - eA_{\mu}) - Im)\Psi(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - eA_{\mu}) - Im)\Psi(x) = 0 \end{aligned}$$

Итого:

$$(\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - eA_{\mu}) - Im)\Psi(x) = 0 \quad (16.8)$$

Точных решений уравнения Дирака во внешнем поле ещё меньше, чем точных решений уравнения Шредингера с произвольным потенциалом.

Известны:

- а) решение для свободной частицы;
- б) решение в кулоновском поле;

- в) решение для постоянного во времени и однородного в пространстве магнитного поля;
- г) решение для поля плоской электромагнитной волны (решение Волкова);
- д) решение для поля плоской электромагнитной волны и однородного магнитного поля, действующего в направлении распространения волны.

Если мы считаем, что уравнение (16.8) описывает частицу во внешнем поле, то поменяв знак электрического заряда в этом уравнении, получим уравнение для античастиц.

Попробуем найти такой оператор, который решение для частиц переводит в решение для античастиц. Зная его, мы даже в отсутствие внешнего поля сможем перевести решение для частиц в решение для античастиц.

## Уравнение Дирака для античастицы и оператор зарядового сопряжения

Частица  $\rightarrow$  заряд  $e$ , античастица  $\rightarrow$  заряд  $-e \Rightarrow$  уравнение Дирака для античастицы записывается в виде:

$$(\gamma^\mu(p_\mu + eA_\mu) - Im)\Psi^c(x) = 0 \Leftrightarrow (\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - Im)\Psi^c(x) = 0, \quad (16.9)$$

где  $\Psi^c(x)$  - биспинор, зарядово сопряженный к биспинору  $\Psi(x)$ .

Как записать связь  $\Psi^c(x)$  и  $\Psi(x)$ ? Сначала эрмитово сопряжём уравнение.

$$\begin{aligned} \left[ (\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) - Im) \Psi^c(x) \right]^\dagger = 0 &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} m^\dagger = m \\ A_\mu^\dagger = A_\mu \end{array} \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow - (i\partial_\mu + eA_\mu) \Psi^\dagger \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{=I} (\gamma^\mu)^\dagger - Im \Psi^\dagger = 0 \end{aligned}$$

Домножаем последнее уравнение на  $\gamma^0$ , используем (13.3) и определение дираковского сопряжения (16.6) и транспонируем.

$$\left[ - (i\partial_\mu + eA_\mu) \bar{\Psi} \gamma^\mu - Im \bar{\Psi} = 0 \right]^T \Rightarrow \left( -\gamma^{\mu T} (i\partial_\mu + eA_\mu) - Im \right) \bar{\Psi}^T(x) = 0$$

Предположение:

$$\Psi^c(x) = C \bar{\Psi}^T(x) \Rightarrow \bar{\Psi}^T(x) = C^\dagger \Psi^c(x)$$

$$\text{где } \bar{\Psi}^T = (\Psi^\dagger \gamma^0)^T = \gamma^{0T} \Psi^* = \left| \begin{array}{l} (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \\ \Rightarrow \gamma^{0T} = \gamma^{0*} \end{array} \right| = \gamma^{0*} \Psi^*,$$

$C$  - оператор зарядового сопряжения .

Из сохранения нормировки  $\Psi^\dagger(x)\Psi(x) \Rightarrow C$  - унитарная матрица, т.е.  $CC^\dagger = C^\dagger C = I$



Далее домножаем на  $C$ :

$$C(-\gamma^{\mu T}(i\partial_\mu + eA_\mu) - Im)\underbrace{C^\dagger C}_{=I}\underbrace{\bar{\Psi}^T(x)}_{=C^\dagger\Psi^c(x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(-\gamma^{\mu T}(i\partial_\mu + eA_\mu) - Im)C^\dagger\Psi^c(x) = 0.$$

Для того чтобы это уравнение совпадало с уравнением Дирака для античастицы, нужно:

$$C\gamma^{\mu T}C^\dagger = -\gamma^\mu \quad (16.10)$$

$$CC^\dagger = I \quad (16.11)$$

Явный вид матрицы зарядового сопряжения  $C$  зависит от выбора конкретного представления.

## Оператор зарядового сопряжения

Поскольку  $\hat{1}^* = \hat{1}^T = \hat{1}$ ,  $(\sigma^1)^T = \sigma^1$ ,  $(\sigma^2)^T = -\sigma^2$  и  $(\sigma^3)^T = \sigma^3$ , то в стандартном представлении:

$$(\gamma^\mu)^T = \begin{cases} \gamma^\mu, \mu = 0, 2 \\ -\gamma^\mu, \mu = 1, 3 \end{cases}$$

Тогда:

$$C\gamma^{\mu T}C^\dagger = -\gamma^\mu \Rightarrow \begin{cases} C\gamma^\mu C^\dagger = -\gamma^\mu, & \mu = 0, 2 \\ C\gamma^\mu C^\dagger = \gamma^\mu, & \mu = 1, 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{c, \gamma^\mu\} = 0, & \mu = 0, 2 \\ [c, \gamma^\mu] = 0, & \mu = 1, 3 \end{cases}$$

Т.к.  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}I$  и  $CC^\dagger = I \Rightarrow C = e^{i\alpha_c}\gamma^2\gamma^0$ . В большинстве книг принимают  $\alpha_c = \frac{\pi}{2}$ .

Тогда стандартное представление матрицы  $C$ :

$$C = i\gamma^2\gamma^0 \quad (16.12)$$

Матрица зарядового сопряжения удовлетворяет соотношению:

$$C^\dagger = C^T = C^{-1} = -C \text{ и } C^* = C.$$

Решение уравнения Дирака для свободного позитрона можно записать в виде:

$$\frac{v(\vec{p}, \lambda)}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i(px)} \equiv \Psi_{\vec{p}}^c(x) = C\bar{\Psi}_{\vec{p}}^T = \frac{C\gamma^{0*}u^*(\vec{p}, \lambda)}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i(px)}. \quad (16.13)$$

Таким образом:

$$v(\vec{p}, \lambda) = C\gamma^{0*}u^*(\vec{p}, \lambda) = i\gamma^2u^*(\vec{p}, \lambda) \quad (16.14)$$

Явные вычисления дают:

$$v(\vec{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon - m} \frac{(\vec{\sigma}, \vec{p})}{|\vec{p}|} \xi_{-\lambda}(\vec{p}) \\ -\sqrt{\varepsilon + m} \xi_{-\lambda}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \text{ где } \xi_{-\lambda}(\vec{p}) = i\sigma^2\chi_\lambda^*(\vec{p}) \quad (16.15)$$

Условие нормировки:  $v^\dagger(\vec{p}, \lambda)v(\vec{p}, \lambda') = 2\varepsilon\delta_{\lambda\lambda'}$ ,

или, в релятивистски-инвариантной форме:  $\bar{v}(\vec{p}, \lambda)v(\vec{p}, \lambda') = -2m\delta_{\lambda\lambda'}$

## Свойства оператора зарядового сопряжения в стандартном представлении

- 1)  $C^2 = i\gamma^2\gamma^0 i\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^2\gamma^0\gamma^2\gamma^0 = -(\gamma^2)^2(\gamma^0)^2 = -I$ ;
- 2)  $CC^{-1} \stackrel{def}{=} I$  т.к.  $-C^2 = I \Rightarrow (-C)C = I \Rightarrow C^{-1} = -C$ ;
- 3)  $C^T = (i\gamma^2\gamma^0)^T = i(\gamma^2)^T(\gamma^0)^T = i\gamma^0\gamma^2 = -i\gamma^2\gamma^0 = -C$ ;
- 4)  $C^* = (i\gamma^2\gamma^0)^* = -i(\gamma^2)^*(\gamma^0)^* = i\gamma^2\gamma^0 = C$
- 5)  $C^\dagger = (C^T)^* = -C^* = -C = C^{-1} \Rightarrow CC^\dagger = C^\dagger C = I$ ;

Можно напрямую:

$$C^\dagger = (i\gamma^2\gamma^0)^\dagger = -i(\gamma^0)^\dagger(\gamma^2)^\dagger = i\gamma^0\gamma^2 = -i\gamma^2\gamma^0 = -C$$

Можно, например, для  $C^*$  записать:

$$C^* = (C^\dagger)^T = -C^T = C$$

Таким образом:

$$C^* = C^T = C^{-1} = -C \text{ и } C^* = C.$$

При этом:

$$C^2 = -I$$

Мы хотим написать частное решение свободного уравнения Дирака для зарядово-сопряжённого спинора. Используем (16.1) и определение дираковского сопряжения (16.6).

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{p}}^c(x, \lambda) &= C \left( \bar{\Psi}_{\vec{p}}(x, \lambda) \right)^T = C \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} U(\vec{p}, \lambda) e^{-i(px)} \right)^\dagger \gamma^0 \right]^T = \\ &= C \left[ \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} U^\dagger(\vec{p}, \lambda) \gamma^0 e^{+i(px)} \right]^T = \frac{e^{+i(px)}}{\sqrt{2\varepsilon}} C \left[ U^\dagger(\vec{p}, \lambda) \gamma^0 \right]^T = \frac{e^{+i(px)}}{\sqrt{2\varepsilon}} C \gamma^{0T} \left[ U^\dagger(\vec{p}, \lambda) \right]^T = \\ &= \frac{e^{+i(px)}}{\sqrt{2\varepsilon}} C \gamma^0 U^*(\vec{p}, \lambda) = \frac{v(\vec{p}, \lambda)}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{+i(px)} \end{aligned}$$

Итого мы получили частное решение для античастиц, которое оказалось частным отрицательно-частотным решением.

## 17. Лекция 17. Матрицы плотности для неполяризованных фермионов и антифермионов

### Решение для позитронов в стандартном представлении

#### Полезная формула

Вспомним, что  $(\sigma^1)^* = \sigma^1$ ,  $(\sigma^2)^* = -\sigma^2$  и  $(\sigma^3)^* = \sigma^3$ .

Тогда:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\vec{\sigma}\vec{p})^* &= \sigma^2((\sigma^1)^*p^1 + (\sigma^2)^*p^2 + (\sigma^3)^*p^3) = \sigma^2(\sigma^1p^1 - \sigma^2p^2 + \sigma^3p^3) = \\ &= \left| \text{т.к. } \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij}\hat{1} \right| = -(\sigma^1p^1 + \sigma^2p^2 + \sigma^3p^3)\sigma^2 = -(\vec{\sigma}\vec{p})\sigma^2 \end{aligned}$$

Итого:

$$\sigma^2(\vec{\sigma}\vec{p})^* = -(\vec{\sigma}\vec{p})\sigma^2 \quad (17.1)$$

Вычислим  $v(\vec{p}, \lambda)$  в стандартном представлении и получим формулу (16.15).

Используя (16.14) и (17.1), запишем:

$$\begin{aligned} v(\vec{p}, \lambda) &= C\gamma^{0*}u^*(\vec{p}, \lambda) = \left| \text{т.к. } C = i\gamma^2\gamma^0, \gamma^{0*} = \gamma^0, (\gamma^0)^2 = I \right| = i\gamma^2u^*(\vec{p}, \lambda) = \\ &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m} \chi_\lambda^*(\vec{p}) \\ \sqrt{\varepsilon - m} \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})^*}{|\vec{p}|} \chi_\lambda^*(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m} i\sigma^2 \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})^*}{|\vec{p}|} \chi_\lambda^*(\vec{p}) \\ -\sqrt{\varepsilon + m} i\sigma^2 \chi_\lambda^*(\vec{p}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m} \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{|\vec{p}|} (i\sigma^2 \chi_\lambda^*(\vec{p})) \\ -\sqrt{\varepsilon + m} (i\sigma^2 \chi_\lambda^*(\vec{p})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon - m} \frac{(\vec{\sigma}, \vec{p})}{|\vec{p}|} \xi_{-\lambda}(\vec{p}) \\ -\sqrt{\varepsilon + m} \xi_{-\lambda}(\vec{p}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где  $\xi_{-\lambda}(\vec{p}) = i\sigma^2 \chi_\lambda^*(\vec{p})$ .

Разберемся с нормировочными условиями.

$$C^\dagger \gamma^0 C = \gamma^{0\dagger} \gamma^{2\dagger} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 = \left| \begin{array}{l} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, (\gamma^2)^2 = -I \\ \gamma^0 \gamma^{2\dagger} \gamma^0 = \gamma^2 \end{array} \right| = (\gamma^2)^2 \gamma^0 = -\gamma^0$$

Тогда:

$$\begin{aligned} v^\dagger(\vec{p}, \lambda)v(\vec{p}, \lambda') &= u^*(\vec{p}, \lambda)\gamma^{0T}C^\dagger C\gamma^{0*}u^*(\vec{p}, \lambda') = \\ &= \left| \begin{array}{l} \gamma^{0T} = \gamma^{0*} = \gamma^0 \\ CC^\dagger = I, (\gamma^0)^2 = I \end{array} \right| = (u^\dagger(\vec{p}, \lambda)u(\vec{p}, \lambda'))^* = (2\varepsilon\delta_{\lambda\lambda'})^* = 2\varepsilon\delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

Релятивистски-инвариантная нормировка:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\vec{p}, \lambda)v(\vec{p}, \lambda') &= u^{*\dagger}(\vec{p}, \lambda)\gamma^{0T}C^\dagger\gamma^{0*}u^*(\vec{p}, \lambda') = -(u^\dagger(\vec{p}, \lambda)\gamma^0u(\vec{p}, \lambda'))^* = \\ &= -(u^\dagger(\vec{p}, \lambda)u(\vec{p}, \lambda'))^* = -(2m\delta_{\lambda\lambda'})^* = -2m\delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

Итого:

$$\bar{v}(\vec{p}, \lambda)v(\vec{p}, \lambda') = -2m\delta_{\lambda\lambda'} \quad (17.2)$$

## Суммирование по спиновым состояниям

Ранее была получена формула (8.6) для матрицы плотности неполяризованных фотонов:

$$\sum_{\lambda=1}^2 e^{\mu}(\vec{k}, \lambda) e^{*\nu}(\vec{k}, \lambda) = -g^{\mu\nu}.$$

При вычислении вероятностей процессов в КТП мы будем сталкиваться с суммами вида:

$$\Lambda = \sum_{\lambda=\pm 1} u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}, \lambda)$$

и

$$\tilde{\Lambda} = \sum_{\lambda=\pm 1} v(\vec{p}, \lambda) \bar{v}(\vec{p}, \lambda)$$

которые играют роль матриц плотности для неполяризованных фермионов.

## Вычисление матрицы $\Lambda$

Матричные элементы  $\Lambda^{\alpha\beta}$  задаются как:

$$\Lambda^{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=\pm 1} u^{\alpha}(\vec{p}, \lambda) \bar{u}^{\beta}(\vec{p}, \lambda) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  матрица  $4 \times 4$ , которая может быть разложена по базису:

$$\Lambda = \alpha_0 I + \alpha_5 \gamma^5 + \alpha_{\xi} \gamma^{\xi} + \alpha_{5\xi} \gamma^{\xi} \gamma^5 + \alpha_{\xi\eta} \sigma^{\xi\eta}.$$

$$\begin{aligned} \text{Т.к. } (\gamma^{\mu} p_{\mu} - Im) u(\vec{p}, \lambda) = 0 &\Rightarrow (\gamma^{\mu} p_{\mu} - Im) \Lambda = 0 \\ \bar{u}(\vec{p}, \lambda) (\gamma^{\mu} p_{\mu} - Im) = 0 &\Rightarrow \Lambda (\gamma^{\mu} p_{\mu} - Im) = 0. \end{aligned}$$

Этих условий достаточно, чтобы получить явный вид  $\Lambda^{\alpha\beta}$ . Имеем:

$$Sp((\gamma^{\mu} - Im)\Lambda) = 0 \Rightarrow p_{\mu} \alpha_{\xi} Sp(\gamma^{\mu} \gamma^{\xi}) - m \alpha_0 Sp I = 0 \Rightarrow p_{\mu} \alpha^{\mu} = m \alpha_0$$

Далее:

$$\begin{aligned} Sp \Lambda &= \sum_{\lambda=\pm 1} u_{\alpha}(\vec{p}, \lambda) \bar{u}^{\alpha}(\vec{p}, \lambda) = \sum_{\lambda=\pm 1} (\bar{u}_{\alpha}(\vec{p}, \lambda) u^{\alpha}(\vec{p}, \lambda))^{\dagger} = \\ &= \left| \text{нормировка биспиноров: (17.2)} \right| = \sum_{\lambda=\pm 1} (2m \delta_{\lambda\lambda'})^{\dagger} = 4m \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$Sp \Lambda = \alpha_0 Sp I = 4\alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = m \Rightarrow p_{\mu} \alpha^{\mu} = m^2 \Rightarrow \alpha^{\mu} = p^{\mu}.$$

Таким образом, мы получили следующий промежуточный результат:

$$\Lambda = (\gamma^{\mu} p_{\mu} + Im) + \alpha_5 \gamma^5 + \alpha_{5\xi} \gamma^{\xi} \gamma^5 + \alpha_{\xi\eta} \sigma^{\xi\eta}.$$

Если фермион неполяризован, то коэффициенты  $\alpha_5$ ,  $\alpha_{5\xi}$  и  $\alpha_{\xi\eta}$  могут быть составлены только из величин  $p_\xi$ ,  $g_{\xi\eta}$  и  $\varepsilon_{\xi\eta\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0$  (т.к.  $T^{\alpha\beta}$  необходимо конструировать из  $p^\alpha$  и  $g^{\alpha\beta} \rightarrow T^{\alpha\beta} = Ap^\alpha p^\beta + Bg^{\alpha\beta}$ ).

Следовательно:  $\alpha_{\xi\eta} = Ap_\xi p_\eta + Bg_{\xi\eta}$  - симметричный тензор  $\Rightarrow \alpha_{\xi\eta}\sigma^{\xi\eta} = 0$   
т.к.  $\sigma^{\xi\eta}$  - антисимметричный тензор.

**Замечание:** Ещё раз подчеркиваем, что последнее утверждение верно только для неполяризованных фермионов!

Далее:

$$\begin{aligned}\gamma^5(\gamma^\mu p_\mu + Im) = 0 &\Rightarrow Sp(\gamma^5(\gamma^\mu p_\mu - Im)\Lambda) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow p_\mu \alpha_{5\xi} Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\xi \gamma^5) - m \alpha_5 Sp(\gamma^5 \gamma^5) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_5 = \frac{1}{m} p^\xi \alpha_{5\xi}.\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\Lambda = (\gamma^\mu p_\mu + Im) + \frac{\alpha_{5\xi}}{m} (Ip^\xi - m\gamma^\xi)\gamma^5.$$

Финальный аккорд:

$$\Lambda(\gamma^\mu p_\mu - Im) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha_{5\xi}}{m} \gamma^5 (Ip^\xi - m\gamma^\xi)(\gamma^\mu p_\mu - Im) = 0 \Rightarrow \alpha_{5\xi} = 0$$

Окончательно имеем:

$$\Lambda^{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=\pm 1} u^\alpha(\vec{p}, \lambda) \bar{u}^\beta(\vec{p}, \lambda) = (\gamma^\mu p_\mu + Im)^{\alpha\beta}. \quad (17.3)$$

## Вычисление матрицы $\tilde{\Lambda}$

Вспомним, что  $v(\vec{p}, \lambda) = C\bar{u}^T(\vec{p}, \lambda)$ . Тогда:

$$\begin{aligned}\bar{v}(\vec{p}, \lambda) &= v^\dagger(\vec{p}, \lambda)\gamma^0 = u^T(\vec{p}, \lambda) \underbrace{C^\dagger C}_{=I} \gamma^{0T} C^\dagger \gamma^0 = u^T(\vec{p}, \lambda) C^\dagger C \gamma^{0T} C^\dagger \gamma^0 = \\ &= \left| \text{формула (16.10): } C\gamma^{\mu T} C^\dagger = -\gamma^\mu \right| = -u^T(\vec{p}, \lambda) C^\dagger (\gamma^0)^2 = |(\gamma^0)^2 = \beta^2 = I| = \\ &= -u^T(\vec{p}, \lambda) C^\dagger\end{aligned}$$

Теперь можно начать вычисление:

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda} &= \sum_{\lambda=\pm 1} v(\vec{p}, \lambda) \bar{v}(\vec{p}, \lambda) = \sum_{\lambda=\pm 1} C\bar{u}^T(\vec{p}, \lambda) (-1) u^T(\vec{p}, \lambda) C^\dagger = \\ &= -C \left( \underbrace{\sum_{\lambda=\pm 1} u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}, \lambda)}_{=\Lambda} \right)^T C^\dagger = -C\Lambda^T C^\dagger = \\ &= -C(\gamma^\mu p_\mu + Im)^T C^\dagger = -C\gamma^{\mu T} C^\dagger p_\mu - CC^\dagger m = \\ &= \left| \text{формула (16.10): } C\gamma^{\mu T} C^\dagger = -\gamma^\mu; \text{ формула (16.11): } CC^\dagger = C^\dagger C = I \right| = \\ &= \gamma^\mu p_\mu - Im\end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\tilde{\Lambda}^{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=\pm 1} v^\alpha(\vec{p}, \lambda) \bar{v}^\beta(\vec{p}, \lambda) = (\gamma^\mu p_\mu - Im)^{\alpha\beta}. \quad (17.4)$$

Замечание: Матрица  $\tilde{\Lambda}$  не получается из матрицы  $\Lambda$  простой заменой  $p^\mu \rightarrow -p^\mu$ . Необходимо выполнить еще замену  $\lambda \rightarrow -\lambda$ , что приводит к правильному результату, который получен выше.

Замечание: поляризованные фермионы и матрицы плотности для них в данных лекциях рассматриваться НЕ будут.

## 18. Лекция 18. Решение уравнения Дирака для свободных частиц в стандартном представлении

### Релятивистское обобщение оператора спина $\frac{1}{2}$

Замечание: Из явного вида решений  $u(\vec{p}, \lambda)$  и  $v(\vec{p}, \lambda')$  видно, что для описания спина  $e^-$  или  $e^+$  достаточно двухкомпонентного спинора  $\chi_\lambda(\vec{p})$ , но у нас четырехкомпонентные  $\Psi(x)$  и  $\Psi^c(x)$ .

В квантовой механике  $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$  действует на  $\chi_\lambda(\vec{p})$ . В КТП в системе покоя частицы для стандартного представления существует два равнозначных обобщения:

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \rightarrow \begin{cases} \vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \text{ или} \\ \vec{S} = \frac{1}{2}\gamma^0\vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma^5\vec{\gamma} \end{cases} \quad (18.1)$$

Но в любой системе, где импульс частицы  $\vec{p} \neq 0$  имеется перепутывание верхних и нижних компонент:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}I = (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)\Psi \quad (18.2)$$

В уравнении Дирака (18.2) появляется конструкция  $\vec{\alpha}\vec{p}$ , которая перепутывает компоненты так как  $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$  - антидиагональные матрицы.

Таким образом, когда частица начинает двигаться, простое выражение (18.1) для оператора спина не подходит. Нужно учитывать перепутывание верхних и нижних компонент.

### Преобразование Фолди-Вутхайзена

Вопрос-идея: Существует ли унитарное преобразование  $U_{\text{ФВ}}$ , переводящее стандартное представление, где верхние и нижние компоненты биспинора преобразовывались бы **независимо**? В этом представлении релятивистское обобщение оператора спина - это  $\vec{s}$ .

Тогда в стандартном представлении оператор спина будет:

$$\frac{1}{2}\vec{0} = U_{\text{ФВ}}^{-1}\vec{s}(u_{\text{ФВ}}^{-1})^\dagger = u_{\text{ФВ}}^\dagger S u_{\text{ФВ}},$$

т.к.  $u_{\text{ФВ}}$  - унитарный:  $u_{\text{ФВ}}u_{\text{ФВ}}^\dagger = u_{\text{ФВ}}^\dagger u_{\text{ФВ}} = I$

Ответ: для свободной частицы такое представление существует (**представление Фолди-Вутхайзена**) и при этом:

$$U_{\text{ФВ}} = \frac{(\varepsilon + m)I + (\vec{\gamma}\vec{p})}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m)}}.$$

Если теперь выбрать  $\vec{s}_{\text{ФВ}} = -\frac{1}{2}\gamma^5\vec{\gamma}$ , то релятивистское обобщение оператора спина в стандартном представлении имеет вид:

$$\frac{1}{2}\vec{0} = \frac{1}{2} \left( -\gamma^5\vec{\gamma} + \frac{\vec{p}}{\varepsilon}\gamma^5 + \frac{\vec{p}\gamma^5(\vec{\gamma}\vec{p})}{\varepsilon(\varepsilon + m)} \right)$$

В нерелятивистском случае проекционный оператор на направление  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [0, \pi)$  имеет вид  $(\vec{n}\vec{\sigma})$  и  $(\vec{n}\vec{\sigma})\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda$ ,  $\lambda = \pm 1$

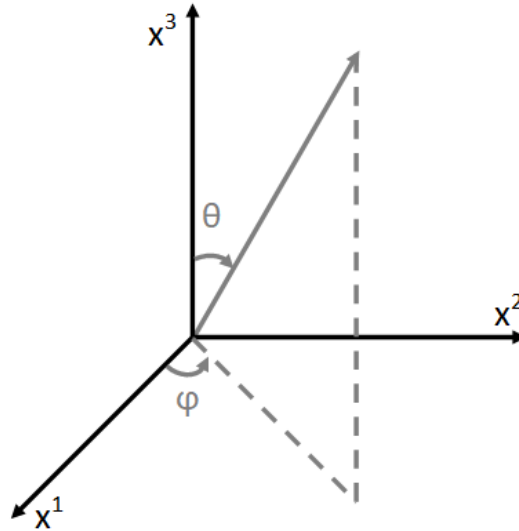


Рис. 18.1. Сферическая система координат

Очевидное обобщение на 4-х компонентные спиноры:

$$(\vec{n} \vec{0})u(\vec{p}, \lambda) = \lambda u(\vec{p}, \lambda), \quad \lambda = \pm 1$$

Опр: если  $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ , то  $\lambda$  называется спиральностью. Для спиральности:

$$\chi_{\lambda=+1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad \chi_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad (18.3)$$

Вспоминая, что  $\xi_{-\lambda} = i\sigma^2\chi_\lambda$ , получаем:

$$\xi_{-\lambda=-1} = -\chi_{\lambda=-1}, \quad \xi_{-\lambda=+1} = +\chi_{\lambda=+1} \quad (18.4)$$

Этим закончено описание свободных решений уравнений Дирака.

### Вспомним:

Основное коммутационное соотношение для  $\gamma$ -матриц (12.9):

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I$$

где  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

Пусть теперь  $i, j = 1, 2, 3$ , тогда:

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 2g^{ij} I$$

Вспоминая определение  $g^{\mu\nu}$  (1.3), можем записать:



$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = -2\delta^{ij} I \quad (18.5)$$

где  $\delta^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Найдем явное выражение для унитарной матрицы  $\mathcal{U}_{\text{ФВ}}$ , которая задает переход из стандартного представления в представлении Фолди-Вутхаузена.

В стандартном представлении матрицы Дирака имеют вид:

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix} = \beta; \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому в гамильтониане свободной частицы

$$H = (\vec{\alpha} \vec{p}) + \beta m = \left| \text{т.к. } \beta^2 = I \right| = \beta(\beta \vec{\alpha} \vec{p} + Im) = \gamma^0 ((\vec{\gamma} \vec{p} + Im))$$

матрицы  $\vec{\gamma}$  перемешивают верхние и нижние спиноры.

Их надо убрать при помощи преобразования  $\mathcal{U}_{\text{ФВ}}$ . Поэтому:

$$\mathcal{U}_{\text{ФВ}} H \mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger = H^{(0)} \gamma^0 + H^{(I)} I \quad \text{и} \quad \mathcal{U}_{\text{ФВ}} \mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger = \mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger \mathcal{U}_{\text{ФВ}} = I$$

Докажем, что  $H^{(I)} = 0$ . Имеем следующую цепочку равенств:

$$Sp(H) = Sp(\mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger \mathcal{U}_{\text{ФВ}} H) = Sp(\mathcal{U}_{\text{ФВ}} H \mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger) = H^{(0)} Sp \gamma^0 + H^{(I)} Sp I = 4H^{(I)}.$$

С другой стороны, для свободной частицы:

$$Sp H = p_i Sp(\gamma^0 \gamma^i) + m Sp \gamma^0 = 4p_i g^{0i} = 0, \text{ т.к. } i = 1, 2, 3.$$

Таким образом:  $H^{(I)} = 0$  и

$$\mathcal{U}_{\text{ФВ}} H \mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger = H^{(0)} \gamma^0, \text{ где } H^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Если  $\mathcal{U}_{\text{ФВ}}$  - унитарный оператор, то он может быть записан в виде:

$$\mathcal{U}_{\text{ФВ}} = e^A,$$

где  $A$  - безразмерный антиэрмитов оператор (т.е.  $A^\dagger = -A$ ), который, очевидно, должен быть построен из матриц  $\gamma^\mu$ ,  $\vec{p}$  и  $m$ .

Поскольку матрицы  $\gamma^i$  - антиэрмитовы ( $i = 1, 2, 3$ ), то:

$$A = (\vec{\gamma} \vec{n}) \varphi,$$

где  $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$  и  $\varphi = \varphi(E, m)$  - некоторая действительная функция.

Поэтому

$$\mathcal{U}_{\text{ФВ}} = e^{(\vec{\gamma} \vec{n}) \varphi} = I \cos \varphi + (\vec{\gamma} \vec{n}) \sin \varphi$$

и

$$\mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger = I \cos \varphi - (\vec{\gamma} \vec{n}) \sin \varphi$$

Для получения этих соотношений воспользуемся тем, что:

$$(\vec{\gamma} \vec{n})^2 = \frac{\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i}{2} n_i n_j + \frac{\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i}{2} n_i n_j = -\frac{2\delta^{ij} I}{2} n_i n_j = -\vec{n}^2 I = -I.$$

Тогда:

$$e^{(\vec{\gamma}\vec{n})\varphi} = I + \frac{(\vec{\gamma}\vec{n})}{1!}\varphi - I\frac{1}{2!}\varphi^2 - \frac{(\vec{\gamma}\vec{n})}{3!}\varphi^3 + \dots =$$

$$= I \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots\right)}_{=\cos\varphi} + (\vec{\gamma}\vec{n}) \underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots\right)}_{=\sin\varphi}.$$

Теперь у нас есть все, чтоб начать вычислять.

$$\begin{aligned} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\gamma^0 &= \mathcal{U}_{\text{ФВ}} H \mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger = \\ &= (I \cos \varphi + (\vec{\gamma}\vec{n}) \sin \varphi) \gamma^0 (|\vec{p}| (\vec{\gamma}\vec{n}) + Im) (I \cos \varphi - (\vec{\gamma}\vec{n}) \sin \varphi) = \left| \text{т.к. } \gamma^i \gamma^0 = \right. \\ &= -\gamma^0 \gamma^i \left. \right| = \gamma^0 (I \cos \varphi - (\vec{\gamma}\vec{n}) \sin \varphi) (|\vec{p}| (\vec{\gamma}\vec{n}) + Im) (I \cos \varphi - (\vec{\gamma}\vec{n}) \sin \varphi) = \\ &= \gamma^0 (I (|\vec{p}| \sin \varphi + m \cos \varphi) + (\vec{\gamma}\vec{n}) (|\vec{p}| \cos \varphi - m \sin \varphi)) (I \cos \varphi - (\vec{\gamma}\vec{n}) \sin \varphi) = \\ &= \gamma^0 (|\vec{p}| \sin \varphi \cos \varphi + m \cos^2 \varphi + |\vec{p}| \sin \varphi \cos \varphi - m \sin^2 \varphi) + \\ &+ \gamma^0 (\vec{\gamma}\vec{n}) (|\vec{p}| \cos^2 \varphi - m \sin \varphi \cos \varphi - |\vec{p}| \sin^2 \varphi - m \sin \varphi \cos \varphi) \end{aligned}$$

Откуда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} |\vec{p}| \sin 2\varphi + m \cos 2\varphi = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, & \text{при } \gamma^0 \\ |\vec{p}| \cos 2\varphi = m \sin 2\varphi, & \text{при } \gamma^0 (\vec{\gamma}\vec{n}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\varphi = \frac{m}{\varepsilon} \\ \sin 2\varphi = \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon} \end{cases}, \text{ где } \varepsilon = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2\varepsilon}} \\ \sin \varphi = \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon+m)}} \end{cases}$$

Тогда:

$$\mathcal{U}_{\text{ФВ}} = \frac{(\varepsilon + m)I + (\vec{\gamma}\vec{p})}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m)}}, \quad \mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger = \frac{(\varepsilon + m)I - (\vec{\gamma}\vec{p})}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m)}} \quad (18.6)$$

## Явный вид оператора спина

Найдем явный вид оператора  $\vec{0}$ . Выберем  $\vec{S} = -\frac{1}{2}\gamma^5\vec{\gamma}$ .

Делаем обратное преобразование от удвоенного оператора спина в представлении Фолди-Вудхайзена. Используем (18.5)

$$\begin{aligned} 0^i &= \mathcal{U}_{\text{ФВ}}^{-1} 2S^i (\mathcal{U}_{\text{ФВ}}^{-1})^\dagger = \left| \text{унитарность} \right| = \mathcal{U}_{\text{ФВ}}^\dagger 2S^i \mathcal{U}_{\text{ФВ}} = \\ &= \frac{-1}{2\varepsilon(\varepsilon + m)} ((\varepsilon + m) - (\vec{\gamma}\vec{n})) \gamma^5 \gamma^i ((\varepsilon + m)I + (\vec{\gamma}\vec{n})) = \\ &= \frac{-\gamma^5}{2\varepsilon(\varepsilon + m)} ((\varepsilon + m) + (\vec{\gamma}\vec{n})) \gamma^i ((\varepsilon + m)I + (\vec{\gamma}\vec{n})) = \\ &= \frac{-\gamma^5}{2\varepsilon(\varepsilon + m)} ((\varepsilon + m)^2 \gamma^i + (\varepsilon + m) (\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i) p^j + \gamma^j \gamma^i \gamma^k p^j p^k) \end{aligned}$$

Учтя, что

$$\begin{aligned} \gamma^j \gamma^i \gamma^k p^j p^k &= (g^{ji} \gamma^k - g^{jk} \gamma^i + g^{ik} \gamma^j) p^j p^k - i \varepsilon^{jik\mu} \gamma_\mu \gamma^5 p^j p^k = \\ &= \left| \varepsilon^{jik\mu} p^j p^k = 0; g^{ji} = -\delta^{ji} \right| = -2p^i (\vec{\gamma} \vec{n}) + |\vec{p}|^2 \gamma^i \end{aligned}$$

получаем:

$$0^i = \frac{-\gamma^5}{2\varepsilon(\varepsilon + m)} \left( ((\varepsilon + m) + |\vec{p}|^2) \gamma^i - 2(\varepsilon + m) p^i - 2p^i (\vec{\gamma} \vec{n}) \right)$$

Т.к.

$$\frac{(\varepsilon + m)^2 + |\vec{p}|^2}{2\varepsilon(\varepsilon + m)} = \frac{\varepsilon + m}{2\varepsilon(\varepsilon + m)} (\varepsilon + m + \varepsilon - m) = 1,$$

то:

$$0^i = -\gamma^5 \gamma^i + \frac{p^i}{\varepsilon} \gamma^5 + \frac{p^i \gamma^5 (\vec{\gamma} \vec{n})}{\varepsilon(\varepsilon + m)} \quad (18.7)$$

## Спиральные амплитуды

Частные решения свободного уравнения Дирака (4-х компонентные спиноры) должны являться собственными векторами для оператора проекции релятивистского спина  $\frac{1}{2}$  на некоторую ось. В качестве оси выберем направление  $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$  - для свободной частицы это направление не меняется.

Вычислим оператор проекции спина на эту ось:

$$\begin{aligned} (\vec{0} \vec{n}) &= \frac{1}{|\vec{p}|} (\vec{0} \vec{p}) = -\gamma^5 \frac{(\vec{p} \vec{\gamma})}{|\vec{p}|} + \frac{|\vec{p}|^2}{\varepsilon |\vec{p}|} \gamma^5 + \frac{|\vec{p}|^2 \gamma^5 (\vec{\gamma} \vec{p})}{|\vec{p}| \varepsilon (\varepsilon + m)} = \\ &= -\gamma^5 (\vec{n} \vec{\gamma}) + \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon} \gamma^5 (\vec{n} \vec{\gamma}) + \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon} \gamma^5 = -\frac{m}{\varepsilon} \gamma^5 (\vec{n} \vec{\gamma}) + \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon} \gamma^5 = \\ &= \left| \gamma\text{-матрицы в стандартном представлении} \right| = \begin{pmatrix} \frac{m}{\varepsilon} (\vec{n} \vec{\sigma}) & \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon} \hat{1} \\ \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon} \hat{1} & -\frac{m}{\varepsilon} (\vec{n} \vec{\sigma}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Далее решаем уравнение на собственные векторы и собственные значения:

$$(\vec{0} \vec{n}) u(\vec{p}, \lambda) = \lambda u(\vec{p}, \lambda), \quad \lambda = \pm 1$$

Т.е

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{m}{\varepsilon} (\vec{n} \vec{\sigma}) & \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon} \hat{1} \\ \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon} \hat{1} & -\frac{m}{\varepsilon} (\vec{n} \vec{\sigma}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m} \chi_\lambda \\ \sqrt{\varepsilon - m} (\vec{n} \vec{\sigma}) \chi_\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \left[ \frac{m}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon + m} + \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon - m} \right] (\vec{n} \vec{\sigma}) \chi_\lambda \\ \left[ \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon + m} - \frac{m}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon - m} (\vec{n} \vec{\sigma}) \right] \chi_\lambda \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m} (\vec{n} \vec{\sigma}) \chi_\lambda \\ \sqrt{\varepsilon - m} \chi_\lambda \end{pmatrix} = \lambda u(\vec{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \sqrt{\varepsilon + m} \chi_\lambda \\ \lambda \sqrt{\varepsilon - m} (\vec{n} \vec{\sigma}) \chi_\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Поскольку  $\lambda = \pm 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1$  и оба уравнения на  $\chi_\lambda$  сводятся к одному:

$$(\vec{n} \vec{\sigma}) \chi_\lambda = \lambda \chi_\lambda. \quad (18.8)$$

Учтя, что  $(\vec{n}\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$  - результат из квантовой механики, легко находим решения  $\chi_\lambda$ , с нормировкой  $\chi_\lambda^\dagger \chi_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$ .

Действительно, пусть  $\lambda = +1$ . Если  $\chi_{\lambda=+1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , где  $a$  и  $b$  - неизвестные комплексные числа, то:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ и } |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Матричное равенство дает:

$$\begin{cases} a \cos \theta + b \sin \theta e^{-i\varphi} = a \\ a \sin \theta e^{-i\varphi} - b \cos \theta = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \sin \theta e^{-i\varphi} = a(1 - \cos \theta) \\ a \sin \theta e^{-i\varphi} = b(1 + \cos \theta) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Переход к} \\ \text{половинному углу} \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} b \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} a \\ a \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} b \end{cases}$$

Вспомним, что  $\theta \in [0, \pi)$  и рассмотрим случай  $\theta \neq 0$ . Тогда оба уравнения сводятся к одному:

$$b \cos \frac{\theta}{2} = a \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}.$$

Это соотношение совместимо с условием нормировки, если  $|a| = \cos \frac{\theta}{2}$ ,  $|b| = \sin \frac{\theta}{2}$  и  $\arg a = \arg b + i\varphi$ .

Выбирая  $\arg a = -\frac{i\varphi}{2}$  для  $\theta \neq 0$  получаем:

$$\chi_{\lambda=+1}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

При  $\theta = 0$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$  и этот случай корректно отражается

в решении  $\chi_{\lambda=+1}(\vec{u})$  для  $\theta = 0$ .

Таким образом  $\forall \theta \in [0, \pi)$  можно пользоваться решением  $\chi_{\lambda=+1}(\vec{n})$ . Аналогично можно найти  $\chi_{\lambda=-1}(\vec{n})$ . Оба решения выписаны в (18.3).

Найдем явный вид спиноров  $\xi_{-\lambda}(\vec{n})$ . В стандартном представлении:

$$i\sigma^2 = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \xi_{-\lambda=-1}(\vec{n}) &= i\sigma^2 \chi_{\lambda=+1}^*(\vec{n}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} = -\chi_{\lambda=-1}(\vec{n}) = (-1)\chi_{\lambda=-1}(\vec{n}) \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned}\xi_{-\lambda=+1}(\vec{n}) &= i\sigma^2 \chi_{\lambda=-1}^*(\vec{n}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \chi_{\lambda=+1}(\vec{n}) = (+1)\chi_{\lambda=+1}(\vec{n}).\end{aligned}$$

Итого, общая формула:

$$\xi_{-\lambda}(\vec{n}) = (-\lambda)\chi_{-\lambda}(\vec{n})$$

На этом описание свободных решений уравнения Дирака в **стандартном представлении** может быть завершено.

## 19. Лекция 19. Решение уравнения Дирака для свободных частиц

**Соотношение**  $u(-\varepsilon, -\vec{p}, -\lambda) = v(\varepsilon, \vec{p}, \lambda)$

Между решением уравнения Дирака для античастиц с положительной энергией (т.е.  $\varepsilon > 0$ ) и решением уравнения Дирака для частиц с отрицательной энергией существует фундаментальная связь:

$$v(\varepsilon, \vec{p}, \lambda) = u(-\varepsilon, -\vec{p}, -\lambda) \quad (19.1)$$

Доказательство:

Рассмотрим аналитическую функцию  $u(z, \vec{p}, \lambda)$  в плоскости комплексной переменной  $z$ . Эта функция содержит две **многозначные функции**  $f_1(z) = \sqrt{z - m}$  и  $f_2(z) = \sqrt{z + m}$ . Для однозначности  $f_1(z)$  в плоскости комплексного переменного  $z$  надо сделать разрез  $[+m, +\infty)$ , а для однозначности  $f_2(z)$  - разрез  $(-\infty, -m]$ . В плоскости с разрезами  $u(z, \vec{p}, \lambda)$  - однозначная функция, которая определена на верхнем берегу правого разреза:

$$u(z = \varepsilon + i\delta, \vec{p}, \lambda) \equiv u(\vec{p}, \lambda)$$

Чтобы получить  $v(\vec{p}, \lambda)$  надо  $u(z, \vec{p}, \lambda)$  аналитически продолжить на нижний берег левого разреза ( $\varepsilon + i\delta \rightarrow -(\varepsilon + i\delta) = -\varepsilon - i\delta$ ).

**Функция  $f_1(z)$ :**

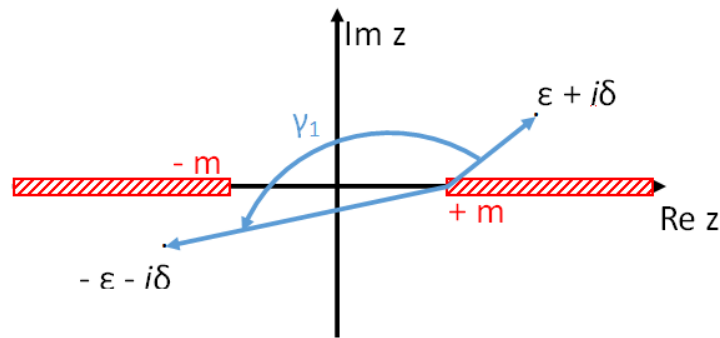


Рис. 19.1. Комплексная плоскость для  $f_1(z)$

$$f_1(z) = \sqrt{|z - m|} \cdot e^{\frac{\Delta_{\gamma_1} \arg(z - m)}{2}}$$

Изменение аргумента - поворот на  $180^\circ$ :

$$\Delta_{\gamma_1} \arg(z - m) = \pi \Rightarrow f_1(z) = \sqrt{|z - m|} e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow f_1(z) \Big|_{z=-\varepsilon} = i\sqrt{\varepsilon + m}$$

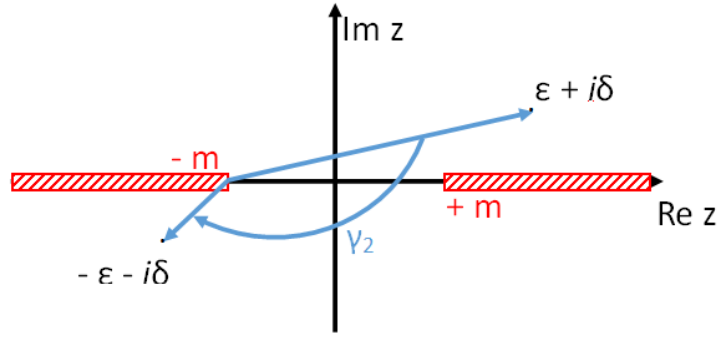


Рис. 19.2. Комплексная плоскость для  $f_2(z)$

$$f_2(z) = \sqrt{|z+m|} \cdot e^{\frac{\Delta\gamma_2 \arg(z+m)}{2}}$$

$$\Delta\gamma_2 \arg(z+m) = -\pi \Rightarrow f_2(z) = \sqrt{|z+m|} e^{-i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow f_2(z) \Big|_{z=-\varepsilon} = -i\sqrt{\varepsilon+m}$$

Для аналитического продолжения получаем:

$$u(-\varepsilon, -\vec{p}, -\lambda) = \begin{pmatrix} f_2(z) \Big|_{z=-\varepsilon} \chi_{-\lambda}(-\vec{n}) \\ f_1(z) \Big|_{z=-\varepsilon} (-1) (\vec{\sigma}\vec{n}) \chi_{-\lambda}(-\vec{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\varepsilon+m} \chi_{-\lambda}(-\vec{n}) \\ -i\sqrt{\varepsilon+m} (\vec{\sigma}\vec{n}) \chi_{-\lambda}(-\vec{n}) \end{pmatrix}$$

Переход  $\vec{n} \rightarrow -\vec{n} \Leftrightarrow \theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \pi + \phi$ . Путем явных вычислений можно показать, что:

$$\chi_{-\lambda}(-\vec{n}) = i\chi_{\lambda}(\vec{n}) \quad (19.2)$$

Доказательство формулы (19.2):

$$\chi_{-\lambda}(-\vec{n}) \equiv \chi_{-\lambda}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = i\chi_{\lambda}(\vec{n}) = i\chi_{\lambda}(\theta, \varphi)$$

Случай  $\lambda = +1$ :

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda=+1}(-\vec{n}) &= \chi_{\lambda=+1}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi-\theta}{2}) \cdot e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\pi)} \\ \sin(\frac{\pi-\theta}{2}) \cdot e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\pi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \cdot e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \cdot e^{+\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \\ &= i \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2}) \cdot e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \cdot e^{+\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} = i\chi_{\lambda=-1}(\theta, \varphi) = i\chi_{\lambda=-1}(\vec{n}) \end{aligned}$$

Случай  $\lambda = -1$ , аналогично:

$$\chi_{\lambda=-1}(-\vec{n}) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\pi-\theta}{2}) \cdot e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\pi)} \\ \cos(\frac{\pi-\theta}{2}) \cdot e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\pi)} \end{pmatrix} = i\chi_{\lambda=+1}(\vec{n})$$

Кроме того:

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda}(\vec{n}) &= \lambda(\vec{n}\vec{\sigma})\chi_{\lambda}(\vec{n}) = -(\vec{n}\vec{\sigma})\xi_{-\lambda}(\vec{n}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \chi_{-\lambda}(\vec{n}) = -i(\vec{n}\vec{\sigma})\xi_{-\lambda}(\vec{n}). \end{aligned}$$

Действительно, мы помним, что 2-х компонентный спинор  $\chi_\lambda$  есть собственный вектор проекционного оператора на ось  $\vec{n}$ :

$$(\vec{n}\vec{\sigma})\chi_\lambda(\vec{n}) = \lambda\chi_\lambda(\vec{n}), \quad \lambda = \pm 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

Домножаем обе части на  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(\vec{n}) &= \lambda(\vec{n}\vec{\sigma})\chi_\lambda(\vec{n}) = \begin{cases} \lambda = 1 : & (\vec{n}\vec{\sigma})\chi_{\lambda=+1}(\vec{n}) \\ \lambda = -1 : & -(\vec{n}\vec{\sigma})\chi_{\lambda=-1}(\vec{n}) \end{cases} = \left| \text{формула (18.4)} \right| = \\ &= (\vec{n}\vec{\sigma})\xi_{-\lambda}(\vec{n}) \end{aligned}$$

Учитывая это соотношение и тождество:

$$(\vec{n}\vec{\sigma}) = \left| \text{формула (10.6)} \right| = \vec{n}^2 \hat{1} = \hat{1},$$

используя (16.15), находим :

$$u(-\varepsilon, -\vec{p}, -\lambda) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon - m(\vec{n}\vec{\sigma})}\xi_{-\lambda}(\vec{n}) \\ -\sqrt{\varepsilon + m}\xi_{-\lambda}(\vec{n}) \end{pmatrix} \equiv v(\vec{p}, \lambda) \quad (19.3)$$

Что и требовалось доказать.

## Физическая интерпретация

Пусть у нас летит свободная частица с 4-х импульсом  $p^\alpha$ . Тогда она описывается плоской волной  $e^{-i(px)} = e^{-i\varepsilon t + i\vec{p}\vec{x}}$ . Ей соответствует 4-х компонентный спинор  $u(\varepsilon, \vec{p}, \lambda)$ .


$$p^\alpha = (\varepsilon, \vec{p})$$


Рис. 19.3. Частица

С другой стороны,  $e^{-i\varepsilon t + i\vec{p}\vec{x}} = e^{i(-\varepsilon)(-t) + i(-\vec{p})(-\vec{x})}$ . Это эквивалентно тому, что объект с 4-х импульсом  $-p^\alpha$  летит вспять во времени. Этому объекту соответствует 4-х компонентный спинор  $u(-\varepsilon, -\vec{p}, -\lambda) = v(\varepsilon, \vec{p}, \lambda)$ . Это значит, что вспять по времени летит **античастица** с энергией  $-\varepsilon$ , импульсом  $-\vec{p}$  и поляризацией  $-\lambda$ .




$$-\mathbf{p}^\alpha = (-\varepsilon, -\vec{p})$$


Рис. 19.4. Античастица

Получив впервые такой результат Ричард Фейнман сказал, что все окружающие нас электроны - это один и тот же электрон. Только он сначала эволюционирует из прошлого в будущее, потом разворачивается и становится позитроном и летит в прошлое, потом разворачивается и становится электроном и так далее много много раз.

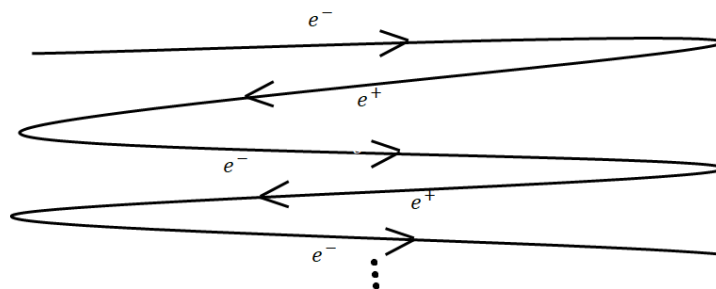


Рис. 19.5. Путешествие электрона во времени

Однако из этого должно следовать, что в мире должно быть поровну электронов и позитронов, а это не так - в природе преобладают электроны. Тем не менее интерпретация Фейнмана очень интересна и имеет право на существование.

## Лагранжиан свободного дираковского поля

Имеются уравнения Дирака для биспинора  $\Psi(x)$  (для частиц) и зарядово-сопряженного биспинора  $\Psi^c(x)$  (для античастиц):

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - Im)\Psi(x) &= 0; \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - Im)\Psi^c(x) &= 0; \end{aligned}$$

Их нужно рассматривать как уравнение Лагранжа свободного дираковского поля.

Вопрос: Какое поле должно входить в Лагранжиан, помимо поля  $\Psi(x)$ :  $\Psi^c$ ,  $\Psi^*$  или  $\bar{\Psi}$ ? Ведь все они связаны друг с другом унитарными преобразованиями

$$\Psi^c(x) = c\bar{\Psi}^T(x) = c\gamma^{0*}\Psi^*(x).$$

Ответ: все 3 биспинора физически эквивалентны, но явные Лоренц-инвариантные выражения получаются, когда используется  $\bar{\Psi}(x)$ .

Примеры:

$$1) \bar{u}(\vec{p}, \lambda)u(\vec{p}, \lambda') = 2m\delta_{\lambda\lambda'}, \text{ но } \bar{u}(\vec{p}, \lambda)u(\vec{p}, \lambda') = 2\varepsilon\delta_{\lambda\lambda'},$$

а  $\varepsilon$  – зависит от выбора системы отсчёта!

$$2) \sum_{\lambda=\pm 1} u^\alpha(\vec{p}, \lambda) \bar{u}^\beta(\vec{p}, \lambda) = (\gamma^\mu p_\mu + Im)^{\alpha\beta}.$$

Уравнение Дирака для  $\bar{\Psi}(x)$  получается из уравнения Дирака для  $\Psi^c(x)$  и имеет вид:

$$\partial_\mu \bar{\Psi}(x) i\gamma^\mu + \bar{\Psi}(x) Im = 0 \quad (19.4)$$

Уравнения для  $\Psi(x)$  и  $\bar{\Psi}(x)$  можно получить из Лагранжиана:

$$\mathcal{L}^0(\Psi(x), \bar{\Psi}(x), \partial_\mu \Psi(x), \partial_\mu \bar{\Psi}(x)) = \frac{1}{2} (\bar{\Psi}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) - (i\partial_\mu \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)) - m \bar{\Psi}(x) \Psi(x))$$

Получим формулу (19.4):

Рассмотрим уравнение

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - Im) \Psi^c(x) = 0$$

транспонируем его:

$$i\partial_\mu \Psi^{cT}(x) \gamma^{\mu T} - \Psi^{cT}(x) Im = 0$$

Т.к. по определению  $\Psi^c(x) = C \bar{\Psi}^T(x)$ , то  $\Psi^{cT}(x) = \bar{\Psi}(x) C^T$

В формулах (16.10), (16.11) было показано, что для любого представления матрица зарядового сопряжения удовлетворяет условиям:

$$C \gamma^{\mu T} = -\gamma^\mu, C C^\dagger = C^\dagger C = I.$$

Транспонируем оба уравнения, тогда:

$$\gamma^\mu C^T = -C^T \gamma^{\mu T}, C^{\dagger T} C^T = C^T C^{\dagger T} = I$$

Тогда легко получаем, что:

$$\begin{aligned} iz\partial_\mu \bar{\Psi}(x) C^T \gamma^{\mu T} - \bar{\Psi}(x) Im C^T = 0 &\Rightarrow -i\partial_\mu \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu C^T - \bar{\Psi}(x) Im C^T = 0 | C^{\dagger T} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -i\partial_\mu \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu - \bar{\Psi}(x) Im = 0 \end{aligned}$$

Это как раз уравнение (19.4) на  $\bar{\Psi}(x)$ . Его можно записать в более разумной форме, если ввести определение:

$$\partial_\mu \bar{\Psi}(x) \stackrel{def}{=} \bar{\Psi}(x) \overleftarrow{\partial}_\mu$$

где стрелка  $\overleftarrow{\partial}_\mu$  означает направление дифференцирования

Тогда:

$$\bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + Im) = 0$$

Уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = 0 & \text{для } \bar{\Psi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial (\partial_\mu \Psi)} = 0 & \text{для } \Psi \end{cases}$$

Легко видеть, что:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial \Psi} = -\frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu - m \bar{\Psi}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial (\partial_\mu \Psi)} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial \bar{\Psi}} = -\frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \Psi; \quad \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \Psi,$$

что приводит к двум уравнениям Дирака для биспиноров  $\bar{\Psi}(x)$  и  $\Psi(x)$  соответственно.

Ранее было показано, что Лагранжиан не меняется при добавлении к нему 4-х производной произвольного вектора:

$$\mathcal{L}(\dots) \Leftrightarrow \mathcal{L}(\dots) + \partial_\mu V^\mu, \text{ где } V - 4\text{-вектор.}$$

Выберем:  $V^\mu = \frac{i}{2} \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)$ , тогда:

$$\mathcal{L}(\dots) \rightarrow \mathcal{L}(\dots) + \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x).$$

Введение взаимодействия с электромагнитным полем:

$$i\partial_\mu = p_\mu \rightarrow P_\mu = p_\mu - eA_\mu(x) = i\partial_\mu - eA_\mu(x), \quad e = -|e|.$$

Тогда:

$$\mathcal{L}(\dots) = \mathcal{L}^0(\dots) + \mathcal{L}^{int}(\dots), \quad (19.5)$$

где:

$$\mathcal{L}^{int}(\dots) = -e \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x),$$

т.е. получаем электромагнитный ток в виде:

$$j^\mu(x) = (Q(x), \vec{j}(x)) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) \quad (19.6)$$

Это самая важная формула в КЭД.

## Решения для свободного дираковского поля

В лекции 6 были выписано решение для свободного электромагнитного поля:

- $c_{\vec{k}\lambda}$  при  $e^{-i(kx)}$  - положительно-частотная часть;
- $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$  при  $e^{i(kx)}$  - отрицательно-частотная часть.

Учитывая, что  $e^+$  и  $e^-$  - две разные частицы, а  $\gamma \equiv \bar{\gamma}$ , можем написать:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \underbrace{\Psi^{(+)}(x)}_{\text{Положительно-частотная часть} \sim e^{-i(px)} \sim \Psi_{\vec{p}(x)}} + \underbrace{\Psi^{(-)}(x)}_{\text{Отрицательно-частотная часть} \sim e^{i(px)} \sim \Psi_{\vec{p}(x)}^c} = \\ &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left( a_{\vec{p}\lambda} \Psi_{\vec{p}}(x) + b_{\vec{p}\lambda}^\dagger \Psi_{\vec{p}}^c(x) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Psi(x) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left( a_{\vec{p}\lambda} u(\vec{p}, \lambda) e^{-i(px)} + b_{\vec{p}\lambda}^\dagger v(\vec{p}, \lambda) e^{i(px)} \right) \end{aligned}$$

Аналогично вводим  $\bar{\Psi}(x)$ :

$$\bar{\Psi}(x) = \underbrace{\bar{\Psi}^{(-)}(x)}_{\sim e^{i(px)}} + \underbrace{\bar{\Psi}^{(+)}(x)}_{\sim e^{-i(px)}} \Rightarrow$$
$$\bar{\Psi}(x) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left( a_{\vec{p}\lambda}^\dagger \bar{u}(\vec{p}, \lambda) e^{i(px)} + b_{\vec{p}\lambda} \bar{v}(\vec{p}, \lambda) e^{-i(px)} \right)$$

В данном случае  $a_{\vec{p}\lambda}, a_{\vec{p}\lambda}^\dagger, b_{\vec{p}\lambda}$  и  $b_{\vec{p}\lambda}^\dagger$  - числовые, вообще говоря, комплексные коэффициенты. При вторичном квантовании они должны стать операторами уничтожения и рождения, как это было с электромагнитным полем (коэффициенты  $c_{\vec{k}\lambda}$  и  $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ ).

## 20. Лекция 20. Операторы рождения и уничтожения электронов и позитронов

### Энергия, импульс и заряд свободного дираковского поля

#### А) Тензор энергии-импульса.

Из общего выражения для  $T_\nu^\mu$  (6.4) для свободного дираковского поля получаем:

$$T_\nu^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \partial_\nu \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} \partial_\nu \bar{\Psi} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}^0 = \bar{\Psi}(x) i \gamma^\mu \partial_\nu \Psi(x) \quad (20.1)$$

#### Б) Энергия свободного дираковского поля.

Аналогично (6.10):

$$E = \int d\vec{x} T_0^0(x) \Rightarrow E = \int d\vec{x} \bar{\Psi}(x) i \gamma^0 \partial_0 \Psi(x) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \varepsilon_p \left( a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda} - b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}\lambda}^\dagger \right)$$

#### В) Импульс свободного дираковского поля.

Полностью аналогично получаем:

$$P^i = \int d\vec{x} T_0^i(x) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} p^i \left( a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda} - b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}\lambda}^\dagger \right), \quad i = 1, 2, 3$$

#### Г) Заряд свободного дираковского поля.

Используя определение  $Q(x)$  аналогично получаем:

$$Q = \int d\vec{x} Q(x) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left( a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda} + b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}\lambda}^\dagger \right).$$

Из пунктов Б)-Г) следует, что на пары  $a^\dagger$ ,  $a$  и  $b^\dagger$ ,  $b$  должны быть наложены **условия антикоммутации**. Грассмановы числа!

Вычислим энергию свободного дираковского поля. Данное вычисление в основных пунктах один в один совпадает с вычислением энергии электромагнитного поля в лекции 6.

$$E = \int d\vec{x} T_0^0(x) = \int d\vec{x} \bar{\Psi}(x) i \gamma^0 \partial_0 \Psi(x) = E^{a^\dagger a} + E^{a^\dagger b^\dagger} + E^{ba} + E^{bb^\dagger}$$

$$\partial^\mu \Psi(x) = -i \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{p^\mu}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left( a_{\vec{p}\lambda} u(\vec{p}, \lambda) e^{-i(px)} - b_{\vec{p}\lambda}^\dagger v(\vec{p}, \lambda) e^{i(px)} \right),$$

где  $p^\mu = (\varepsilon_p, \vec{p})$ .

Вычислим первое слагаемое:

$$E^{a^\dagger a} = \int \frac{d\vec{x} d\vec{p} d\vec{p}'}{(2\pi)^6 2\sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_{p'}}} (-i\varepsilon_p) \sum_{\lambda, \lambda'} a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}'\lambda'} \bar{u}(\vec{p}\lambda) i \gamma^0 u(\vec{p}'\lambda') e^{-ix(p-p')}$$

Аналогично вычислениям для электромагнитного поля:

$$\int d\vec{p}' \frac{d\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-ix(p-p')} = \int d\vec{p}' e^{-it(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})} \int \frac{d\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x}(\vec{p} - \vec{p}')} = \int d\vec{p}' e^{-it(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})} \delta(\vec{p} - \vec{p}') = 1 \Big|_{p=p'}$$

Таким образом:

$$E^{a^\dagger a} = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon_p}{2\varepsilon_p} \sum_{\lambda, \lambda'} a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda'} \bar{u}(\vec{p}, \lambda) \gamma^0 u(\vec{p}, \lambda').$$

Далее:

$$\bar{u}(\vec{p}, \lambda) \gamma^0 u(\vec{p}, \lambda') = u^\dagger(\vec{p}, \lambda) (\gamma^0)^2 u(\vec{p}, \lambda') = u^\dagger(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda') = \left| \text{нормировка (16.3)} \right| = 2\varepsilon_p \delta_{\lambda\lambda'}$$

Таким образом:  $E^{a^\dagger a} = \sum_{\lambda} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \varepsilon_p a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda}$ .

Для  $E^{bb^\dagger}$  вычисления аналогичны, только

$$v^\dagger(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda') = -2\varepsilon_p \delta_{\lambda\lambda'} \Rightarrow E^{bb^\dagger} = - \sum_{\lambda} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \varepsilon_p b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}\lambda}^\dagger.$$

Слагаемые  $E^{a^\dagger b^\dagger} = E^{ab} = 0$  по той же причине, по которой в лекции 6:  
 $E_{00}^{--} = E_{00}^{++} = 0$ .

## Квантование дираковского поля и принцип Паули

Введем определения из аналогии с электромагнитным полем:

$a_{\vec{p}\lambda}$  — оператор уничтожения  $e^-$  с  $\vec{p}$  и  $\lambda$ ;

$a_{\vec{p}\lambda}^\dagger$  — оператор рождения  $e^-$  с  $\vec{p}$  и  $\lambda$ ;

$b_{\vec{p}\lambda}$  — оператор уничтожения  $e^+$  с  $\vec{p}$  и  $\lambda$ ;

$b_{\vec{p}\lambda}^\dagger$  — оператор рождения  $e^+$  с  $\vec{p}$  и  $\lambda$ ;

$N_{\vec{p}\lambda}^{(e^-)} = a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda}$  — оператор числа  $e^-$  с  $\vec{p}$  и  $\lambda$ ;

$N_{\vec{p}\lambda}^{(e^+)} = b_{\vec{p}\lambda}^\dagger b_{\vec{p}\lambda}$  — оператор числа  $e^+$  с  $\vec{p}$  и  $\lambda$ .

$$\left. \begin{aligned} a_{\vec{p}\lambda} |0\rangle = 0; \quad a_{\vec{p}\lambda}^\dagger |0\rangle = 0; \quad \left| 1_{\vec{p}\lambda}^{e^-} \right\rangle; \\ b_{\vec{p}\lambda} |0\rangle = 0; \quad b_{\vec{p}\lambda}^\dagger |0\rangle = 0; \quad \left| 1_{\vec{p}\lambda}^{e^+} \right\rangle. \end{aligned} \right\} \text{ Действие на вектора состояния}$$

В отличие от электромагнитного поля, для фермионов существует принцип Паули:

$$\begin{aligned} (a_{\vec{p}\lambda}^\dagger)^2 |0\rangle = 0; \quad (b_{\vec{p}\lambda}^\dagger)^2 |0\rangle = 0; \\ \langle 0 | (a_{\vec{p}\lambda}^\dagger)^2 = 0; \quad \langle 0 | (b_{\vec{p}\lambda}^\dagger)^2 = 0. \end{aligned}$$

Это позволяет определить антикоммутирующие соотношения для  $a, a^\dagger, b$  и  $b^\dagger$  в виде:

$$\begin{aligned} \left\{ a_{\vec{p}\lambda}^\dagger, a_{\vec{p}'\lambda'} \right\} &= a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}'\lambda'} + a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} \\ \left\{ b_{\vec{p}\lambda}^\dagger, b_{\vec{p}'\lambda'} \right\} &= b_{\vec{p}\lambda}^\dagger b_{\vec{p}'\lambda'} + b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

Для самосогласованности теории:

$$\{a_{\vec{p}\lambda}, a_{\vec{p}'\lambda'}\} = \{a_{\vec{p}\lambda}^\dagger, a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger\} = \{b_{\vec{p}\lambda}, b_{\vec{p}'\lambda'}\} = \{b_{\vec{p}\lambda}^\dagger, b_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger\} = 0.$$

Найдем антикоммутаторы.

Из выражений для  $E$ ,  $\vec{P}$  и  $Q$  можно понять, что

$$N_{\vec{p}\lambda}^{(e^+)} = -b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}\lambda}^\dagger + const \Rightarrow b_{\vec{p}\lambda}^\dagger b_{\vec{p}\lambda} + b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}\lambda}^\dagger = const$$

Т.к. между  $e^+$  и  $e^-$  разница только в названии, но не в физике:

$$a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}\lambda}^\dagger + a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda} = const$$

Поскольку операторы для  $(\vec{p}\lambda)$  и  $(\vec{p}'\lambda')$  должны быть независимыми, то

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}\lambda}^\dagger + a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda} &= const \cdot \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} \\ b_{\vec{p}\lambda}^\dagger b_{\vec{p}\lambda} + b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}\lambda}^\dagger &= const \cdot \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

Определим  $const$ . Имеем:

$$\begin{aligned} const \cdot \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} \left| 1_{\vec{p}'\lambda'}^{e^-} \right\rangle &= const \cdot \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger |0\rangle = a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger \cdot const \cdot \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} |0\rangle = \\ &= a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger \left( a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}\lambda}^\dagger + a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda} \right) |0\rangle = a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}\lambda}^\dagger |0\rangle = a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}\lambda} \left| 1_{\vec{p}'\lambda'}^{e^-} \right\rangle = \\ &= \begin{cases} \text{если } \vec{p}' \neq \vec{p} \text{ или } \lambda' \neq \lambda = 0 \\ \text{если } \vec{p}' = \vec{p} \text{ или } \lambda' = \lambda a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger |0\rangle \end{cases} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger |0\rangle = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} \left| 1_{\vec{p}'\lambda'}^{e^-} \right\rangle \Rightarrow const = 1 \end{aligned}$$

## Вакуумные средние

Как и в случае электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \left\langle 0 \left| \begin{array}{c} a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger \\ b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger \end{array} \right| 0 \right\rangle &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'}; & \left\langle 0 \left| \begin{array}{c} a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}'\lambda'} \\ b_{\vec{p}\lambda}^\dagger b_{\vec{p}'\lambda'} \end{array} \right| 0 \right\rangle &= 0; \\ \left\langle 0 \left| \begin{array}{c} a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}'\lambda'} \\ b_{\vec{p}\lambda} b_{\vec{p}'\lambda'} \end{array} \right| 0 \right\rangle &= 0 \quad \text{Эрмитовское сопряжение} \Rightarrow \left\langle 0 \left| \begin{array}{c} a_{\vec{p}\lambda}^\dagger a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger \\ b_{\vec{p}\lambda}^\dagger b_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger \end{array} \right| 0 \right\rangle &= 0; \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить вакуумные средние произведения операторов поля:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi^{(+)}(x) \bar{\Psi}^{(-)}(x') | 0 \rangle &= \sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d\vec{p} d\vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}', \lambda')}{2\sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_{p'}}} \langle 0 | a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle e^{-i(px) + i(p'x')} = \\ &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + Im) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(x-x')}}{2\varepsilon_p} = iS_+(x-x') \Rightarrow S_+(x) = \\ &= -i(i\gamma^\mu \partial_\mu + Im) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipx}}{2\varepsilon_p} \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} -\langle 0 | \bar{\Psi}^{(+)}(x') \Psi^{(-)}(x) | 0 \rangle &= iS_-(x-x'), \\ \Rightarrow S_-(x) &= -i(i\gamma^\mu \partial_\mu + Im) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ipx}}{2\varepsilon_p} \end{aligned}$$

## Нормальное и хронологическое произведения операторов дираковского поля

Определение:

Нормальным произведением ( $N$ -произведением) операторов фермионного поля называется:

$$N \left( \begin{array}{c} \text{Произведение} \\ \text{ферми-операторов} \end{array} \right) = (-1)^P \left( \begin{array}{c} \text{Операторы} \\ \text{рождения} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{Операторы} \\ \text{уничтожения} \end{array} \right),$$

где  $P$  - число перестановок ферми-операторов от исходной конфигурации к нормальной.

Проведем более подробное вычисление функций  $S_+$  и  $S_-$ . По определению:

$$\begin{aligned} iS_+(x) &= \langle 0 | \Psi^{(+)}(x) \bar{\Psi}^{(-)}(0) | 0 \rangle = \sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d\vec{p} d\vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}', \lambda')}{2\sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_{p'}}} \langle 0 | a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle e^{-i(px)} = \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'} \delta_{\lambda\lambda'} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p} - \vec{p}') d\vec{p}' \frac{u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}', \lambda')}{2\sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_{p'}}} e^{-i(px)} = \\ &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(px)}}{2\varepsilon_p} \sum_{\lambda} u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}, \lambda) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(px)}}{2\varepsilon_p} (\gamma^\mu p_\mu + Im) = \\ &= \left| i\partial_\mu e^{-i(px)} = P_\mu \right| = (i\gamma^\mu \partial_\mu + Im) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(px)}}{2\varepsilon_p} \end{aligned}$$

В процессе вычислений было использовано очевидное соотношение

$$\langle 0 | a_{\vec{p}\lambda} a_{\vec{p}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \equiv \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'}$$

и суммирование по поляризациям фермиона. Далее по определению нормального произведения:

$$\begin{aligned} iS_-(x) &= -\langle 0 | \bar{\Psi}^{(+)}(x') \Psi^{(-)}(x) | 0 \rangle = -\sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d\vec{p} d\vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{\bar{v}(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}', \lambda')}{2\sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_{p'}}} \langle 0 | b_{\vec{p}\lambda}^\dagger b_{\vec{p}'\lambda'} | 0 \rangle e^{i(px)} = \\ &= -\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(px)}}{2\varepsilon_p} \sum_{\lambda} \bar{v}(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda) = -\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(px)}}{2\varepsilon_p} (\gamma^\mu p_\mu - Im) = \\ &= \left| \text{т.к. } -i\partial_\mu e^{i(px)} = P_\mu \right| = (i\gamma^\mu \partial_\mu + Im) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(px)}}{2\varepsilon_p} \end{aligned}$$

Примеры:

$$\begin{aligned} N \left( \underbrace{\Psi^{(+)}(x)}_{\sim a_{\vec{p}\lambda}} \underbrace{\bar{\Psi}^{(+)}(x')}_{\sim b_{\vec{p}\lambda}} \right) &= \underbrace{\Psi^{(+)}(x)}_{\sim a_{\vec{p}\lambda}} \underbrace{\bar{\Psi}^{(+)}(x')}_{\sim b_{\vec{p}\lambda}} = -N \left( \underbrace{\Psi^{(+)}(x)}_{\sim b_{\vec{p}\lambda}} \underbrace{\bar{\Psi}^{(+)}(x')}_{\sim a_{\vec{p}\lambda}} \right) \\ N \left( \underbrace{\bar{\Psi}^{(+)}(x)}_{\sim v_{\vec{p}\lambda}} \underbrace{\Psi^{(-)}(x')}_{\sim b_{\vec{p}\lambda}} \right) &= \left| \text{т.к. } P = 1 \right| = -\underbrace{\Psi^{(-)}(x')}_{\sim b_{\vec{p}\lambda}} \underbrace{\bar{\Psi}^{(+)}(x)}_{\sim b_{\vec{p}\lambda}} \end{aligned}$$



Определение:

Хронологическим произведением ( $T$ -произведением) двух ферми-операторов называют:

$$T(\Psi(x)\Psi(x')) = \begin{cases} \Psi(x)\Psi(x'), & \text{если } t > t' \\ -\Psi(x')\Psi(x), & \text{если } t' > t \end{cases}$$

Обобщение на любое количество операторов очевидно.

## Свертка операторов дираковского поля

Определение:

Сверткой операторов  $\Psi(x)$  и  $\bar{\Psi}(x')$  называют:

$$\underline{\Psi(x)\bar{\Psi}(x')} = T(\Psi(x)\bar{\Psi}(x')) - N(\Psi(x)\bar{\Psi}(x')).$$

Вакуумное среднее свертывание есть:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \underline{\Psi(x)\bar{\Psi}(x')} | 0 \rangle &= \langle 0 | T(\Psi(x)\bar{\Psi}(x')) | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \Psi(x)\bar{\Psi}(x') | 0 \rangle, & t > t' \\ -\langle 0 | \bar{\Psi}(x')\Psi(x) | 0 \rangle, & t' > t \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \langle 0 | (\Psi^{(+)}(x) + \cancel{\Psi^{(-)}(x)}) (\bar{\Psi}^{(-)}(x) + \cancel{\bar{\Psi}^{(+)}(x)}) | 0 \rangle \\ \langle 0 | (\cancel{\Psi^{(-)}(x)} + \Psi^{(+)}(x)) (\cancel{\bar{\Psi}^{(+)}(x)} + \bar{\Psi}^{(-)}(x)) | 0 \rangle (-1) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \langle 0 | \Psi^{(+)}(x)\bar{\Psi}^{(-)}(x) | 0 \rangle & \begin{cases} iS_+(x-x'), & t > t' \\ iS_-(x-x'), & t' > t \end{cases} \\ \langle 0 | \Psi^{(+)}(x)\bar{\Psi}^{(-)}(x) | 0 \rangle (-1) & \end{cases} \end{aligned}$$

Введем функцию:

$$S_c(\tilde{x}) = \Theta(\tilde{x})S_+(\tilde{x}) + \Theta(-\tilde{x})S_-(\tilde{x}),$$

тогда:

$$\underline{\Psi(x)\bar{\Psi}(x')} = iS_c(x-x')$$

Учитывая явный вид  $S_{\pm}(x)$ , получаем:

$$S_c(x) = -i(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + Im) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^0}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\varepsilon_p|t|+i\vec{p}\vec{x}}}{2\varepsilon_p}$$

Учитывая известное из ГФКП выражение (аналогично выражению (9.3)):

$$\frac{e^{-i\varepsilon_p|t|}}{2\varepsilon_p} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{-ip^0t}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon},$$

$$p^2 - m^2 + i\varepsilon \rightarrow p^{02} - (\vec{p})^2 - m^2 + i\varepsilon,$$

легко получаем окончательное выражение для пропагатора свободного фермионного поля:

$$S_c(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(px)} S_c(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(px)} \frac{\gamma^{\mu}p_{\mu} + Im}{p^2 - m^2 + i\varepsilon},$$

которое является  $c$ -числом  $\Rightarrow$  свертка тоже является  $c$ -числом  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\Psi(x)\bar{\Psi}(x')} = \left\langle 0 \left| \underbrace{\Psi(x)\bar{\Psi}(x')} \right| 0 \right\rangle = iS_c(x - x').$$

**Пропагатор фермиона в импульсном представлении:**

$$S_c(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + Im}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (20.2)$$

Для античастицы  $v(p, \lambda) = u(-p, -\lambda) \Rightarrow$  **Пропагатор для антифермиона:**

$$S_c(-p) = \frac{-\gamma^\mu p_\mu + Im}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (20.3)$$

## 21. Лекция 21. Полный Лагранжиан КЭД.

В лекции 6 (6.3) получен лагранжиан свободного классического электромагнитного поля:

$$\mathfrak{L}^A = \mathfrak{L}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu},$$

где  $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$  – тензор напряженности электромагнитного поля. После того, как электромагнитное поле было проквантовано, лагранжиан  $\mathfrak{L}$  нужно рассматривать как **оператор**, действующий в пространстве векторов состояния

$$|\gamma\rangle = |n_1\gamma_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_2\gamma_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots, \rangle$$

В лекции 19 (19.5) получен лагранжиан классического дираковского поля, взаимодействующего с электромагнитным полем:

$$\mathfrak{L}^{Dirac} = \mathfrak{L}^0 + \mathfrak{L}^{int},$$

где:

$$\mathfrak{L}^0(\Psi, \bar{\Psi}, \partial^\mu \Psi, \partial^\mu \bar{\Psi}) = \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - Im) \Psi(x), \quad (21.1)$$

$$\mathfrak{L}^{int}(\Psi, \bar{\Psi}, A^\mu) = -ej^\mu(x)A_\mu(x) = -e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x). \quad (21.2)$$

После квантования  $\mathfrak{L}^{Dirac}$  надо считать **оператором**, действующим в пространстве векторов состояния:

$$|\gamma e^+ e^-\rangle = |n_1\gamma_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_2\gamma_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots, m_1 e_{\vec{p}_1, s_1}^-, m_2 e_{\vec{p}_2, s_2}^-, \dots, \ell_1 e_{\vec{p}'_1, s'_1}^+, \ell_2 e_{\vec{p}'_2, s'_2}^+, \dots, \rangle,$$

где  $n_i = 0, 1, \dots, \infty; m_i = 0, 1; \ell_i = 0, 1$ .

Полный лагранжиан КЭД - **оператор**, действующий на пространстве состояний  $|\gamma e^+ e^-\rangle$ :

$$\mathfrak{L}^{QED}(x) = \underbrace{\mathfrak{L}^{free}(x)}_{\text{Лагр-н своб. полей}} + \underbrace{\mathfrak{L}^{int}(x)}_{\text{взаимод-е}} \quad (21.3)$$

где  $\mathfrak{L}^{free}(x) = \mathfrak{L}^0(x) + \mathfrak{L}^A(x)$ .

### Глобальные калибровочные преобразования

В нерелятивистской квантовой механике состояние описывается волновой функцией  $\Psi(x)$  с точностью до ненаблюдаемой фазы:

$$\Psi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)e^{i\alpha}, \quad \text{где } \alpha = const.$$

В КЭД лагранжиан  $\mathfrak{L}^{QED}$  остается инвариантным относительно преобразований:

$$\begin{cases} \Psi(x) \Rightarrow \Psi(x)e^{i\alpha} \\ \bar{\Psi}(x) \Rightarrow \bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha} \end{cases}, \quad \alpha = const$$

Так как:

$$\bar{\Psi}(x)O(x^\mu, \partial^\mu x^\nu)\Psi(x) \Rightarrow \bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha}O\Psi(x)e^{i\alpha} = e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\bar{\Psi}(x)O\Psi(x) = \bar{\Psi}(x)O\Psi(x)$$

Такое преобразование  $\Psi(x)$  и  $\bar{\Psi}(x)$  называется **глобальным калибровочным преобразованием**.

Следствие: из инвариантности КЭД относительно глобальных калибровочных преобразований следует сохранение 4-тока:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \partial_\mu(\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)) = 0 \quad (21.4)$$

Это частный случай более общей теоремы Э.Неттер

Следствие следствия: закон сохранения электрического заряда:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t) = 0, \quad (21.5)$$

где:

$$Q(t) = \int_{V_3} d\vec{x}j^0(x) \equiv \int_{V_3} d\vec{x}j^0(t, \vec{x}).$$

$V_3$  - трехмерный объем в пространстве.

Докажем формулу (21.4): Вариации полей:

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= \tilde{\Psi} - \Psi = \Psi e^{i\alpha} - \Psi \approx (1 + i\alpha)\Psi - \Psi = i\alpha\Psi(x) \\ \delta\bar{\Psi} &= \tilde{\bar{\Psi}} - \bar{\Psi} = \bar{\Psi} e^{-i\alpha} - \bar{\Psi} \approx (1 - i\alpha)\bar{\Psi} - \bar{\Psi} = -i\alpha\bar{\Psi} \end{aligned}$$

Инвариантность Лагранжиана означает что:

$$\mathcal{L}^{QED}(\Psi, \bar{\Psi}, \partial^\mu\Psi, \partial^\mu\bar{\Psi}, A^\mu, \partial^\nu A^\mu) = \mathcal{L}^{QED}(\tilde{\Psi}, \tilde{\bar{\Psi}}, \partial^\mu\tilde{\Psi}, \partial^\mu\tilde{\bar{\Psi}}, A^\mu, \partial^\nu A^\mu)$$

т.к. при глобальных калибровочных преобразованиях различаются только фермионные поля  $\Psi, \bar{\Psi}$ .

Тогда:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}^{QED}(\tilde{\Psi}, \tilde{\bar{\Psi}}, \dots) - \mathcal{L}^{QED}(\Psi, \bar{\Psi}, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} \delta\mathcal{L}^{QED} = \frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial\Psi}\delta\Psi + \\ &\delta\bar{\Psi}\frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial\bar{\Psi}} + \frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial\partial_\mu\Psi}\delta(\partial_\mu\Psi) + \delta(\partial_\mu\bar{\Psi})\frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} + \underbrace{0}_{\text{т.к. } \delta A^\mu = \delta(\partial^\nu A^\mu) = 0} = \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\delta\Psi + \delta\bar{\Psi}\frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} \right), \quad \text{т.к. } \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}}_{\text{Уравнения Лагранжа}} = 0, \quad \text{где } \varphi = \{\Psi, \bar{\Psi}\} \end{aligned}$$

В  $\mathcal{L}^{QED}(x)$  от  $\partial_\mu\Psi, \partial\bar{\Psi}$  явно зависит только  $\mathcal{L}^0(x)$ . Используя его явный вид (21.1) получаем:

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} = \frac{\partial\mathcal{L}^0}{\partial(\partial_\mu\Psi)} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu; \quad \frac{\partial\mathcal{L}^{QED}}{\partial\bar{\Psi}} = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}^0}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} = 0$$

тогда  $\forall\alpha: 0 = \delta\mathcal{L}^{QED} = i^2\alpha\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) \Rightarrow \partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$ , ч.т.д.

Теперь докажем сохранение заряда (21.5):

Пусть  $i = 1, 2, 3$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3 = 0, i$

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu(x) = 0 &\Rightarrow 0 = \int_{V_3} d\vec{x} \partial_\mu j^\mu(x) = \left| \text{покомпонентно} \right| = \int_{V_3} dx \partial_0 j^0(x) + \\ &+ \int_{V_3} d\vec{x} \partial_i j^i(x) = \left| \partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} \right| = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{V_3} d\vec{x} j^0(x)}_{=Q(t)} + \int_{\Sigma_2} d\sigma_i j^i(x) = \frac{\partial}{\partial t} Q(t) \end{aligned}$$

так как  $\Psi(x) \Big|_{x \in \Sigma_2} = \bar{\Psi}(x) \Big|_{x \in \Sigma_2} = 0$ .

Здесь использована теорема Остроградского-Гаусса, с помощью которой мы сводим интеграл от дивергенции по 3-х мерному объёму  $V_3$  к интегралу по двумерной поверхности  $\Sigma_2$ , ограничивающей объём  $V_3$ .

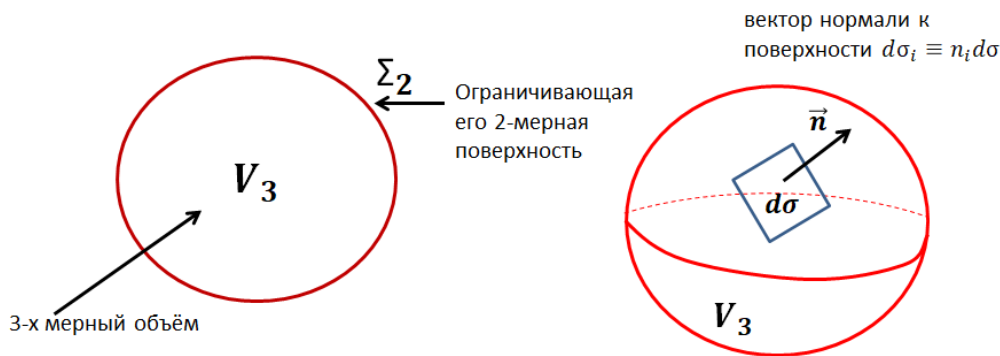


Рис. 21.1. 3-х мерный объём  $V_3$  и ограничивающая его поверхность  $\Sigma_2$

## Локальные калибровочные преобразования

В лекции 5 (5.1) было показано, что наблюдаемые характеристики электромагнитного поля не меняются, если для 4-х потенциала поля  $A^\mu$  сделать **локальное калибровочное преобразование**;

$$\tilde{A}^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x),$$

где  $f(x)$  - произвольная гладкая функция.

- $\mathcal{L}^A(x)$  - **инвариантен** относительно такого преобразования;
- $\mathcal{L}^0(x)$  - **не зависит** от  $A^\mu$ ;
- $\mathcal{L}^{int}(x)$  - **без "калибровки"** полей  $\Psi, \bar{\Psi}$  **НЕ инвариантен**, т.к.:

$$\mathcal{L}^{int}(\Psi, \bar{\Psi}, \tilde{A}^\mu) = \mathcal{L}^{int}(\Psi, \bar{\Psi}, A^\mu) - \underbrace{e \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) \partial_\mu f(x)}_{\neq \partial_\mu V^\mu}$$

где  $V^\mu$  - произвольный 4-х вектор.

Вопрос: Как локально "подстроить"  $\Psi$ , и  $\bar{\Psi}$  под  $\tilde{A}^\mu$ , чтобы  $\mathcal{L}^{int}(x)$  стал инвариантным?

Ответ: Обобщить опыт глобальных калибровочных преобразований:

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}(x) = \Psi(x)e^{i\alpha(x)} \\ \tilde{\bar{\Psi}}(x) = e^{-i\alpha(x)}\bar{\Psi}(x) \end{cases}$$

Функции  $f(x)$  и  $\alpha(x)$  связаны между собой:

$$f(x) = -\frac{1}{e}\alpha(x) + const \quad (21.6)$$

Таким образом, локальные калибровочные преобразования

$$\begin{cases} \tilde{A}^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha(x) \\ \tilde{\Psi}(x) = \Psi(x)e^{i\alpha(x)} \\ \tilde{\bar{\Psi}}(x) = e^{-i\alpha(x)}\bar{\Psi}(x) \end{cases}$$

оставляют  $\mathcal{L}^{QED}(x)$  инвариантным.

Найдём связь между  $f(x)$  и  $\alpha(x)$  - докажем (21.6).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0(\Psi, \bar{\Psi}, \partial^\mu\Psi, \partial^\mu\bar{\Psi}) &= \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) \rightarrow \mathcal{L}^0(\tilde{\Psi}, \tilde{\bar{\Psi}}, \partial^\mu\tilde{\Psi}, \partial^\mu\tilde{\bar{\Psi}}) = \\ &= \tilde{\bar{\Psi}}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\tilde{\Psi}(x) = \bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x)e^{i\alpha(x)} = \\ &= \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) - (\partial_\mu\alpha(x))\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в  $\mathcal{L}^0(x)$  должно компенсировать добавку от калибровки электромагнитного поля в  $\mathcal{L}^{int}(x)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{int}(\Psi, \bar{\Psi}, A^\mu) &= -e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu \rightarrow \mathcal{L}^{int}(\tilde{\Psi}, \tilde{\bar{\Psi}}, \tilde{A}^\mu) = -e\tilde{\bar{\Psi}}(x)\gamma^\mu\tilde{\Psi}(x)\tilde{A}_\mu = \\ &= -e\bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha(x)}\gamma^\mu e^{i\alpha(x)}\Psi(x)(A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)) = -e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x) - \\ &- e(\partial_\mu f(x))\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) \end{aligned}$$

$$\partial_\mu(\alpha(x) + ef(x)) \text{ должно} = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{e}\alpha(x) + const$$

ч.т.д.

Вопрос: Зачем нужны локальные калибровочные преобразования в КТП и в КЭД в частности?

Ответ: Они фиксируют **минимальные требования** к виду  $\mathcal{L}^{int}(x)$

В случае КЭД это взаимодействие вида  $j^\mu(x)A_\mu(x)$ . Однако локальными калибровочными преобразованиями, например, допускается паулевский член:

$$\mathcal{L}_{Pauli}^{int} = -\mu\bar{\Psi}(x)i\sigma^{\mu\nu}\Psi(x)F_{\mu\nu}(x)$$

В КЭД он есть, но не как фундаментальное взаимодействие, а как радиационная поправка к вершине (см. рис. 21.2).

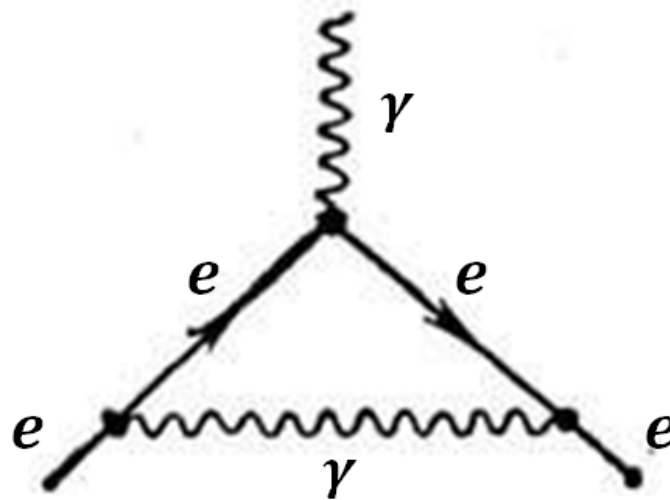


Рис. 21.2. Радиационная поправка

Вопрос: А чем плох обобщённый импульс

$$P^\mu = p^\mu - eA^\mu?$$

Ответ: Для построения лагранжиана КЭД введение  $P^\mu$  идеально (так и построен наш курс), но существуют более сложные теории, такие как КХД или минимальная электрослабая модель в которой непросто ввести  $P^\mu$ , но многое известно про преобразования симметрии, оставляющие лагранжиан теории инвариантным.

В этом случае для **фиксации минимального взаимодействия** естественно использовать локальные калибровочные преобразования.

## Зарядовая чётность фотона и теорема Фарри

Поскольку выбор между частицей и античастицей **произволен** с физической точки зрения и обусловлен только исторической последовательностью в открытии частиц, то полный Лагранжиан КЭД не должен меняться при операции зарядового сопряжения, т.е:

$$\mathcal{L}^{Dirac}(\Psi, \bar{\Psi}, \partial^\mu \Psi, \partial^\mu \bar{\Psi}, A^\mu, \partial^\nu A^\mu) = \mathcal{L}^{Dirac}(\Psi^c, \bar{\Psi}^c, \partial^\mu \Psi^c, \partial^\mu \bar{\Psi}^c, A^{c\mu}, \partial^\nu A^{c\mu})$$

т.е. уравнения для частицы во внешнем поле  $A^\mu$  и для античастицы во внешнем поле  $A^{c\mu}$  должны иметь **одинаковый вид**:

$$\begin{aligned} \left( \gamma^\mu (p_\mu + eA_\mu) - Im \right) \Psi(x) &= 0 \\ \left( \gamma^\mu (p_\mu + eA_\mu^c) - Im \right) \Psi^c(x) &= 0 \end{aligned}$$

С другой стороны в (16.9) показано, что уравнение для античастицы имеет вид:

$$(\gamma^\mu (p_\mu + eA_\mu) - Im) \Psi^c(x) = 0$$

Таким образом:

$$A_\mu^c(x) = CA_\mu(x) = -A_\mu(x),$$

Следствие (теорема Фарри):

В любом процессе, который идёт за счёт электромагнитного взаимодействия в пространстве без внешнего классического поля, суммарное число начальных и конечных фотонов должно быть **чётным**.

Примеры:

- Процесс  $2\gamma \rightarrow 2\gamma$  **запрещён**, так как в нём не сохраняется C-чётность;
- Процесс  $2\gamma \rightarrow 4\gamma$  **разрешён**, но маловероятен
- Процесс  $3\gamma \rightarrow 2\gamma e^+ e^-$  **разрешён** в КЭД, поскольку:  $3\gamma \rightarrow 2\gamma(\gamma^* \rightarrow e^+ e^-)$  и C-чётность сохраняется.



## 22. Лекция 22. Гамильтониан КЭД.

В классической механике функция Лагранжа  $L(x, \dot{x})$  связана с функцией Гамильтона  $H(x, p)$  соотношением:

$$H(x, p) = p\dot{x} - L(x, \dot{x})$$

В Лекции 21 (21.3) полный лагранжиан КЭД записан в виде:

$$\mathcal{L}^{QED}(\psi, \bar{\psi}, A^\mu, \partial^\mu \psi, \partial^\mu \bar{\psi}, \partial^\mu A^\nu) = \mathcal{L}^{free}(\dots) + \mathcal{L}^{int}(\psi, \bar{\psi}, A^\mu)$$

Гамильтониан (энергия) - это "00" -компонента тензора энергии-импульса, вычисленного в Лекции 6 (6.4), (после вторичного квантования тензор энергии-импульса является оператором):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{QED}(x) &= T^{QED0}_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}^{QED}(x)}{\partial(\partial\psi/\partial t)} \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}^{QED}(x)}{\partial(\partial\bar{\psi}/\partial t)} \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}^{QED}(x)}{\partial(\partial A^\mu/\partial t)} \frac{\partial A^\mu}{\partial t} - \\ &-\delta_0^0 \mathcal{L}^{QED}(x) = \left| \mathcal{L}^{int}(\dots) \text{ не зависит от } \frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial A^\mu}{\partial t} \right| = \frac{\partial \mathcal{L}^{free}(x)}{\partial(\partial\psi/\partial t)} \frac{\partial\psi}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}^{free}(x)}{\partial(\partial\bar{\psi}/\partial t)} \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}^{free}(x)}{\partial(\partial A^\mu/\partial t)} \frac{\partial A^\mu}{\partial t} - \mathcal{L}^{free}(x) - \mathcal{L}^{int}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}^{free}(x) + \mathcal{H}^{int}(x) \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\mathcal{H}^{int}(x) = -\mathcal{L}^{int}(x) = e \left( \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \right)_N A_\mu(x) \quad (22.1)$$

где  $N$  - значок нормального произведения.

Вопрос: Зачем из  $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$  делать "нормальный" ток:

$$(\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x))_N \equiv N(\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x))$$

Ответ: Чтобы положить энергию вакуума равной нулю, т.е. забыть о тех константах, которые возникают при антикоммутировании фермиевских операторов (Лекция 20).

## Представления в квантовой теории

### А) Двойное употребление термина "представление".

- Запись операторов и векторов состояния в базисе какого-либо эрмитового оператора. Например, "координатное представление" - запись в базисе  $\{|\vec{r}\rangle\}$  оператора координаты  $\hat{r}$ ; "импульсное представление" - в базисе  $\{|\vec{p}\rangle\}$  оператора импульса  $\hat{p}$ .
- Способ описания эволюции квантовой системы во времени. Наиболее распространены представления Шредингера (S), Гейзенберга (H) и взаимодействия (I).

Основная идея: эволюция во времени эволюция во времени среднего значения наблюдаемой "A" (которой соответствует эрмитов оператор " $\hat{A}$ ")

$$\langle A(t) \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

не должна зависеть от выбора способа описания временной эволюции квантовой системы.

Пусть  $t_0$  - начальный фиксированный момент времени и  $t$  - произвольный момент времени.

Тогда:

- 1) представление Шредингера:  $\langle A(t) \rangle_\psi = \langle \psi(t) | \hat{A}(t_0) | \psi(t) \rangle$
- 2) представление Гейзенберга:  $\langle A(t) \rangle_\psi = \langle \psi(t_0) | \hat{A}(t) | \psi(t_0) \rangle$
- 3) представление взаимодействий:  $\langle A(t) \rangle_\psi = \langle \psi(t) | \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle$

### Б) Операторная экспонента.

Определение:  $e^{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{I} + \frac{\hat{A}}{1!} + \frac{\hat{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\hat{A}^k}{k!} + \dots$

Следствие 1:  $e^{-\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{I} - \frac{\hat{A}}{1!} + \frac{\hat{A}^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{\hat{A}^k}{k!} + \dots$

Следствие 2: Если  $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle \Rightarrow e^{\pm\hat{A}}|a\rangle = e^{\pm a}|a\rangle$

Следствие 3:  $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$

### В) Представление Шредингера.

Пусть гамильтониан квантовой системы имеет вид:

$$\hat{H}^{(s)}(t) = \hat{H}_0^{(s)}(t) + \hat{V}^{(s)}(t)$$

↙
↑
↖

полный гамильтониан                      гамильтониан невозмущенной системы                      "малое" возмущение

В КТП, обычно,  $[\hat{V}^{(s)}(t_1), \hat{V}^{(s)}(t_2)] \neq 0$  если  $t_1 \neq t_2$ . Аналогичные утверждения верны для коммутаторов операторов  $\hat{H}^{(s)}(t)$  и  $\hat{H}_0^{(s)}(t)$ . Это усложняет решение уравнения Шредингера:

$$i \frac{\partial |\psi^{(s)}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}^{(s)}(t) |\psi^{(s)}(t)\rangle$$

Искомое решение запишем в виде:

$$|\psi^{(s)}(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi^{(s)}(t_0)\rangle$$

В силу сохранения нормы векторов состояния:

$$\hat{U}(t, t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \hat{I}$$

т.е.  $\hat{U}(t, t_0)$  - унитарный оператор. Подставим  $|\psi^{(s)}(t)\rangle$  в уравнение Шредингера. Учтём, что  $|\psi^{(s)}(t_0)\rangle$  не зависит от  $t$ .

Тогда:

$$i \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}^{(s)}(t) \hat{U}(t, t_0)$$

Если  $\hat{H}^{(s)}(t) = \hat{H}^{(s)\dagger}(t)$ , то:

$$-i \frac{\partial \hat{U}^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{H}^{(s)}(t)$$

Обычно в представлении Шредингера операторы  $\hat{A}^{(s)}$  физических величин явно не зависят от времени.

Тогда уравнение Шредингера может быть дополнено уравнением эволюции для операторов:

$$i \frac{\partial \hat{A}^{(s)}}{\partial t} = 0$$

### Г) Представление взаимодействия.

Помимо оператора  $\hat{U}(t, t_0)$  введем оператор  $\hat{U}_0(t, t_0)$ , который удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \hat{U}_0(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}_0^{(s)} \hat{U}_0(t, t_0) \\ -i \frac{\partial \hat{U}_0^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}_0^{(s)} \end{cases}$$

Очевидно, что это частный случай уравнений для  $\hat{U}(t, t_0)$  при  $\hat{V}^{(s)}(t) \rightarrow 0$ . Очевидно, что  $\hat{U}(t, t_0)$  - унитарный оператор.

С помощью этого оператора сделаем переход от представления Шредингера ( $S$ ) к представлению взаимодействия ( $I$ ):

$$\begin{cases} |\psi^{(I)}(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) |\psi^{(s)}(t)\rangle \\ \hat{A}^{(I)}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}^{(s)}(t_0) \hat{U}_0(t, t_0) \end{cases}$$

Следствие 1: Собственные значения оператора  $\hat{A}^{(I)}$  совпадают с собственными значениями  $\hat{A}^{(s)}$ .

Действительно:

$$\hat{A}^{(s)} |a_i^{(s)}\rangle = a_i |a_i^{(s)}\rangle$$

Домножим слева на  $\hat{U}_0^\dagger$ :

$$\hat{U}_0^\dagger \hat{A}^{(s)} \underbrace{\hat{U}_0 \hat{U}_0^\dagger}_{=I} |a_i^{(s)}\rangle = a_i \hat{U}_0^\dagger |a_i^{(s)}\rangle = \underbrace{\hat{U}_0^\dagger \hat{A}^{(s)} \hat{U}_0}_{=\hat{A}^{(I)}} \underbrace{\hat{U}_0^\dagger |a_i^{(s)}\rangle}_{=|a_i^{(I)}\rangle} = a_i \underbrace{\hat{U}_0^\dagger |a_i^{(s)}\rangle}_{=|a_i^{(I)}\rangle}$$

Итого:

$$\hat{A}^{(I)} |a_i^{(I)}\rangle = a_i |a_i^{(I)}\rangle$$

Следствие 2: Сохраняется вид (анти)коммутационных соотношений для операторов. Т.е. если в представлении Шредингера  $[\hat{A}^{(s)}, \hat{B}^{(s)}] = \hat{C}^{(s)} \Rightarrow$  в представлении взаимодействия  $[\hat{A}^{(I)}, \hat{B}^{(I)}] = \hat{C}^{(I)}$ .

Далее:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial|\psi^{(I)}\rangle}{\partial t} &= i\frac{\partial\hat{U}_0^\dagger}{\partial t}|\psi^{(s)}(t)\rangle + \hat{U}_0^\dagger i\frac{\partial|\psi^{(s)}(t)\rangle}{\partial t} = -\hat{U}_0^\dagger\hat{H}_0^{(s)}|\psi^{(s)}(t)\rangle + \hat{U}_0^\dagger\hat{H}^{(s)}|\psi^{(s)}(t)\rangle = \\ &= \hat{U}_0^\dagger\hat{V}^{(s)}(t)|\psi^{(s)}(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0)\hat{V}^{(s)}(t)\underbrace{\hat{U}_0(t, t_0)\hat{U}_0^\dagger(t, t_0)}_{=I}|\psi^{(s)}(t)\rangle = \hat{V}^{(I)}(t)|\psi^{(I)}\rangle \end{aligned}$$

Для операторов:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\hat{A}^{(I)}}{\partial t} &= \left(i\frac{\partial\hat{U}_0^\dagger}{\partial t}\right)\hat{A}^{(s)}\hat{U}_0 + \hat{U}_0^\dagger\left(i\frac{\partial\hat{A}^{(s)}}{\partial t}\right)\hat{U}_0 + \hat{U}_0^\dagger\hat{A}^{(s)}\left(i\frac{\partial\hat{U}_0}{\partial t}\right) = \\ &= -\hat{U}_0^\dagger\hat{H}_0^{(s)}\hat{A}^{(s)}\hat{U}_0 + 0 + \hat{U}_0^\dagger\hat{A}^{(s)}\hat{H}_0^{(s)}\hat{U}_0 = \hat{U}_0^\dagger[\hat{A}^{(s)}, \hat{H}_0^{(s)}]\hat{U}_0 = [\hat{A}^{(I)}, \hat{H}_0^{(I)}] \end{aligned}$$

Уравнение эволюции для волновой функции:

$$i\frac{\partial|\psi^{(I)}(t)\rangle}{\partial t} = V^{(I)}(t)|\psi^{(I)}(t)\rangle \quad (22.2)$$

где  $V^{(I)}(t) = e^{i\hat{H}_0^{(s)}t}\hat{V}^{(s)}e^{-i\hat{H}_0^{(s)}t}$ .

Для операторов получаем:

$$i\frac{\partial\hat{A}^{(I)}(t)}{\partial t} = [\hat{A}^{(I)}(t), \hat{H}_0]$$

Таким образом, в представлении взаимодействия операторы подчиняются уравнениям для свободных полей. Это золотой ключик к построению вычислений в КТП.

#### Д) Представление взаимодействий в КЭД.

В КЭД операторы полей в представлении взаимодействия  $\psi^{(I)}(x)$ ,  $\bar{\psi}^{(I)}(x)$  и  $A_\mu^{(I)}(x)$  подчиняются уравнениям для свободных полей:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - Im)\psi^{(I)}(x) &= 0, \\ -\partial_\mu\bar{\psi}^{(I)}(x)i\gamma^\mu + \bar{\psi}^{(I)}(x)t &= 0, \\ \partial^\mu\partial_\mu A_\nu^{(I)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, вся теория, которая была построена в предыдущих лекциях для свободных свободных электромагнитного и дираковского полей без изменений переносится для этих же полей в представлении взаимодействия. В частности, без изменений остаются (анти)коммутационные соотношения и

пропагаторы. Не изменяется и гамильтониан взаимодействия. Волновые функции зависят от чисел заполнения и эволюционируют во времени:  $|e^+, e^-, \gamma(t)\rangle$ .

Оператор взаимодействия:

$$V^{(I)}(t) = \int d\vec{x} \mathcal{H}^{int(I)}(x) = e \int d\vec{x} \left( \bar{\psi}^{(I)}(x) \gamma \psi^{(I)}(x) \right) A_{\mu}^{(I)}(x)$$

где  $\mathcal{H}^{int(I)}(x)$  - гамильтониан взаимодействия (22.1) в представлении взаимодействия

Замечание: До завершения данного курса мы всегда будем работать ТОЛЬКО в представлении взаимодействия. Поэтому далее во всех формулах индекс "(I)" будем опускать для сокращения записи.

## Матрица рассеяния (S-матрица)

В представлении взаимодействия эволюция вектора состояния  $|\psi(t)\rangle$  описывается уравнением (22.2):

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = V(t) |\psi(t)\rangle$$

Решение этого уравнения запишем в виде:

$$|\psi(t)\rangle = S(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

Условия нормировки:

$$\begin{cases} 1 &= \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | S^\dagger(t, t_0) S(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle \\ 1 &= \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle \end{cases}$$

приводят к требованию **унитарности** для  $S(t, t_0)$ , то есть:

$$S^\dagger(t, t_0) S(t, t_0) = I$$

Подставим  $|\psi(t)\rangle$  в уравнение эволюции. Поскольку  $|\psi(t_0)\rangle$  не зависит от  $t$ , то:

$$i \frac{\partial (S(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle)}{\partial t} = V(t) S(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle.$$

Или в операторной форме:

$$i \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = V(t) S(t, t_0)$$

Это дифференциальное уравнение имеет очевидное начальное условие:

$$S(t, t_0) \Big|_{t=t_0} \equiv S(t_0, t_0) = I$$

Разложим  $S(t, t_0)$  по степеням  $V(t)$ . Имеем:

$$S(t, t_0) = \underbrace{S^{(0)}(t, t_0)}_{\sim I} + \underbrace{S^{(1)}(t, t_0)}_{\sim V(t)} + \underbrace{S^{(2)}(t, t_0)}_{\sim V(t_1) \cdot V(t_2)} + \dots$$

Будем считать возмущение  $V(t)$  **малыми**. Тогда, подставляя разложение для  $S(t, t_0)$  в дифференциальное уравнение, получаем **рекурсивное соотношение** для элементов  $S^{(k)}(t, t_0)$ :

$$i \underbrace{\frac{\partial S^{(k+1)}(t, t_0)}{\partial t}}_{\sim V^{k+1}} = \underbrace{V(t) S^{(k)}(t, t_0)}_{\sim V \cdot V^k = V^{k+1}}$$

Как мы видим, обе части этого уравнения одного порядка по  $V(t)$ . Решаем это уравнение методом итераций.

- При  $n = 0$  имеем:

$$i \frac{\partial S^{(0)}(t, t_0)}{\partial t} = 0 \Rightarrow S^{(0)}(t, t_0) = \text{const} = S(t_0, t_0) = I$$

$$S^{(0)}(t, t_0) = I$$

- При  $n = 1$  находим:

$$i \frac{\partial S^{(1)}(t, t_0)}{\partial t} = V(t) S^{(0)}(t, t_0) = V(t) I = V(t) \Rightarrow S^{(1)}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t d\tau_1 V(\tau_1)$$

- При  $n = 2$  получаем:

$$i \frac{\partial S^{(2)}(t, t_0)}{\partial t} = V(t) S^{(1)}(t, t_0) \Rightarrow S^{(2)}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t d\tau_2 V(\tau_2) S^{(1)}(\tau_2, t_0)$$

Тогда:

$$S^{(2)}(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 V(\tau_2) V(\tau_1) \quad (22.3)$$

Заметим, что в КЭД и других КТП  $[V(\tau_1), V(\tau_2)] \neq 0$  при  $\tau_1 \neq \tau_2$ . Интегрирование по  $d\tau_1$  можно переписать в пределах  $\int_{t_0}^t$  как и интегрирование по  $d\tau_2$ . Для этого нужно воспользоваться T-произведением. Тогда:

$$S^{(2)}(t, t_0) = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 T \left( V(\tau_2) V(\tau_1) \right)$$

Действительно, в этом случае имеются две области интегрирования (см. рис. 22.1), **симметричные** относительно перестановки  $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$ .

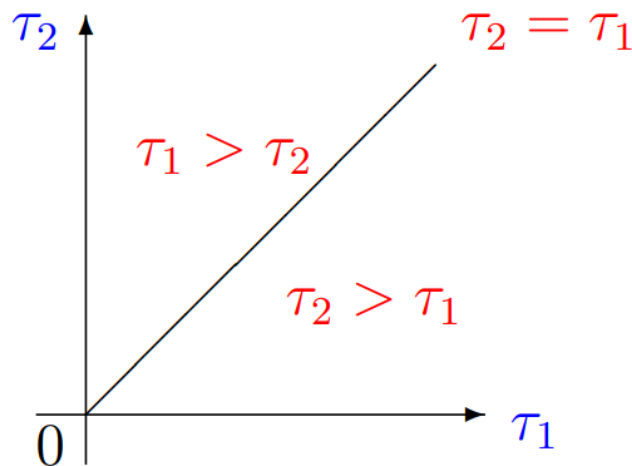


Рис. 22.1. Области интегрирования

Тогда по определению T-произведения:

$$S^{(2)}(t, t_0) = \frac{(-i)^2}{2} \left( \underbrace{\int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 V(\tau_2)V(\tau_1)}_{\text{область } \tau_2 > \tau_1} + \underbrace{\int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 V(\tau_1)V(\tau_2)}_{\text{область } \tau_1 > \tau_2} \right)$$

Так как  $\tau_1$  и  $\tau_2$  - это просто переменные интегрирования  $\Rightarrow$  во 2-м слагаемом замена  $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$ .

Получаем:

$$S^{(2)}(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 V(\tau_2)V(\tau_1)$$

Мы воспроизвели выражение (22.3). Все доказано.

Теперь понятно, как через T-произведение написать  $S^{(k)}(t, t_0)$ . Имеем:

$$S^{(k)}(t, t_0) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t d\tau_k \int_{t_0}^{\tau_k} d\tau_{k-1} \dots \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_1 T(V(\tau_k)V(\tau_{k-1}) \dots V(\tau_1))$$

Таким образом для  $S(t, t_0)$  получаем ряд по степеням взаимодействия  $V(t)$  в виде:

$$S(t, t_0) = T \left( I + \frac{(-i)}{1!} \int_{t_0}^t d\tau_1 V(\tau_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 V(\tau_2)V(\tau_1) + \dots + \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t d\tau_k \dots \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_1 V(\tau_k) \dots V(\tau_1) + \dots \right) = T \left( e^{-i \int_{t_0}^t d\tau V(\tau)} \right)$$

Следовательно, решение для  $S(t, t_0)$  можно записать в виде T-упорядоченной операторной (или матричной) экспоненты:

$$S(t, t_0) = T \left( e^{-i \int_{t_0}^t d\tau V(\tau)} \right)$$

В большинстве реальных экспериментов время до взаимодействия и время после взаимодействия микрочастиц значительно превосходят само время взаимодействия, т.е. время, в течении которого потенциал  $V(t)$  существует отличен от нуля. Таким образом, мы хорошо опишем типичный эксперимент, если устремим  $t_0 \rightarrow -\infty$ , а  $t \rightarrow +\infty$ . Это приближение существенно упростит дальнейшие вычисления.

**Определение:** S-матрицей называется:

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} S(t, t_0) = T \left( e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V(\tau)} \right)$$

Раскладываем матричную экспоненту в ряд:

$$\begin{aligned} S &= T \left( I - i \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau) d\tau + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 V(\tau_1) V(\tau_2) + \right. \\ &+ \dots + \left. \frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_k V(\tau_1) \dots V(\tau_k) + \dots \right) = \\ &= I - i \int d^4x \mathcal{H}^{int}(x) + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T(\mathcal{H}^{int}(x_1) \mathcal{H}^{int}(x_2)) + \\ &+ \dots + \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4x_1 \dots d^4x_k T(\mathcal{H}^{int}(x_1) \dots \mathcal{H}^{int}(x_k)) + \dots \end{aligned}$$

Замечание: В каждом  $\mathcal{H}^{int}(x_i)$  множитель  $(\bar{\psi}(x_i) \gamma^{\mu_i} \psi(x_i))_N$ .

Как вычислять T-произведения от произведения N-произведений (смешанное произведение)?

## Теорема Вика (без доказательства)

Теорема: Хронологическое произведение равно N-произведению всех операторов плюс сумма всех N-произведений со всевозможными свёртками между операторами:

$$\begin{aligned} T(O_1 O_2 \dots O_n) &= N(O_1 O_2 \dots O_n) + N(\underbrace{O_1 O_2}_{\dots} \dots O_n) + \dots + N(\underbrace{O_1 O_2 \dots O_n}_{\dots}) + \\ &+ N(O_1 \underbrace{O_2 O_3}_{\dots} \dots O_n) + \dots + N(\underbrace{O_1 O_2}_{\dots} \underbrace{O_3 O_4}_{\dots} \dots O_n) + \dots + N(\underbrace{O_1 O_2}_{\dots} \underbrace{O_3 O_4}_{\dots} \dots \underbrace{O_n}_{\dots}) + \dots \end{aligned}$$



Доказательство: см. в книге: С.М.Биленький, "Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия" М. "Энергоатомиздат" 1990г., стр. 118-124 или в любом другом серьёзном руководстве по КТП.

Вопрос: Какие свёртки есть в КЭД?

Ответ:

$$\begin{aligned} \underline{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} &= -iD_c^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \\ \underline{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)} &= iS_c(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Кроме того, из определения свёртки ясно, что:

$$\underline{\psi(x_1)\psi(x_2)} = \underline{\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)} = 0$$

Вопрос: Как модифицируется теорема Вика для смешанных произведений?

Ответ: Из суммы надо исключить свёртки в пределах одного N-произведения.

Пример: Во втором порядке теории возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^2} T(\mathcal{H}^{int}(x_1)\mathcal{H}^{int}(x_2)) &= T((\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1))_N A_\mu(x_1) (\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2))_N A_\nu(x_2)) = \\ &= \left| \text{поскольку } \psi \text{ и } \bar{\psi} \text{ коммутируют с } A^\mu, \text{ то можно разбить} \right| = \\ &= T((\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1))_N (\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2))_N) T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) = \\ &= \left[ N(\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)) + N(\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)) + \right. \\ &+ N(\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)) + N(\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)) \left. \right] \cdot \\ &\cdot \left[ N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) + N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) \right] \end{aligned}$$

## 23. Лекция 23. Правила Фейнмана. Часть I.

### Сводка основных формул для получения правил Фейнмана

Гамильтониан взаимодействия (в представлении взаимодействия):

$$\mathcal{H}^{int}(x) = e \left( \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \right)_N A_\mu(x)$$

Оператор 4-потенциала электромагнитного поля в представлении взаимодействия:

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (c_{\vec{k}\lambda} e^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-i(kx)} + c_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{*\mu}(\vec{k}, \lambda) e^{i(kx)}),$$

где  $c_{\vec{k}\lambda} |1\gamma_{\vec{k}\lambda}\rangle = |0\rangle \Rightarrow \langle 1\gamma_{\vec{k}\lambda} | c_{\vec{k}\lambda}^\dagger = \langle 0|$ ,  $\langle 0|0\rangle = 1$  и  $[c_{\vec{k}\lambda}, c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}$

Операторы фермионного (дираковского поля) в представлении взаимодействия имеют вид:

$$\psi(x) = \sum_{2S=\pm 1} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} (a_{\vec{p}s} u(\vec{p}, s) e^{-i(px)} + b_{\vec{p}s}^\dagger v(\vec{p}, s) e^{i(px)}),$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{2S=\pm 1} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} (a_{\vec{p}s}^\dagger \bar{u}(\vec{p}, s) e^{i(px)} + b_{\vec{p}s} \bar{v}(\vec{p}, s) e^{-i(px)}),$$

где  $a_{\vec{p}s} |1e_{\vec{p}s}^-\rangle = |0\rangle \Rightarrow \langle 1e_{\vec{p}s}^- | a_{\vec{p}s}^\dagger = \langle 0|$ ;  $b_{\vec{p}s} |1e_{\vec{p}s}^+\rangle = |0\rangle \Rightarrow \langle 1e_{\vec{p}s}^+ | b_{\vec{p}s}^\dagger = \langle 0|$  и  $\langle 0|0\rangle = 1$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют условиям:

$$\{a_{\vec{p}s}, a_{\vec{p}'s'}^\dagger\} = \{b_{\vec{p}s}, b_{\vec{p}'s'}^\dagger\} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{ss'}$$

Свёртки:

$$\underline{A^\mu(x) A^\nu(0)} = -i D_c^{\mu\nu}(x) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(kx)} D_c^{\mu\nu}(k) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(kx)} \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon};$$

$$\underline{\psi(x) \bar{\psi}(0)} = i S_c(x) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(px)} S_c(p) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(px)} \frac{\hat{p} + Im}{p^2 - m^2 + i\varepsilon},$$

где  $\hat{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ . Наконец:

$$\underline{\psi(x) \psi(0)} = \underline{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(0)} = 0$$

### Первый порядок теории возмущений

Первый порядок теории возмущений описывает **нефизические** процессы типа  $e^- \rightarrow e^- \gamma$  или  $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ ,  $e^+ e^- \rightarrow \gamma$ ,  $e^+ \rightarrow e^+ \gamma$ ,  $\gamma e^- \rightarrow e^-$ ,  $\gamma e^+ \rightarrow e^+$ .

Вопрос: Почему первый порядок стоит изучить?

Ответ:

а) Элементарно выводится большая часть правил Фейнмана.

б) В других теориях (например, в электрослабой модели) первый порядок работает:

$$H \rightarrow b\bar{b} \text{ или } Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$$

$$S = I + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots,$$

где:  $S^{(1)} = -i \int d^4x \mathcal{H}^{int}(x)$  и

$$\mathcal{H}^{int}(x) = e \left( \underbrace{\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}_{a^\dagger a + a^\dagger b^\dagger + ba - b^\dagger b} \right)_N A_\mu(x)$$

где:

$\bar{\psi}(x)$  - рождает  $e^-$  ( $a^\dagger$ ), уничтожает  $e^+$  ( $b$ );

$\psi(x)$  - уничтожает  $e^-$  ( $a$ ), рождает  $e^+$ ; ( $b^\dagger$ );

$A_\mu(x)$  - рождает и уничтожает  $\gamma$ .

Рассмотрим запрещенный законами сохранения энергии и импульса процесс:

$$e^-(p_1) \rightarrow e^-(p_2)\gamma(k),$$

т.е.

$e^-$  с  $p_1$  и  $s_1$  уничтожается в точке "x";

$e^-$  с  $p_2$  и  $s_2$  рождается в точке "x";

$\gamma$  с  $k$  и  $\lambda$  рождается в точке "x".

Это можно изобразить графически:

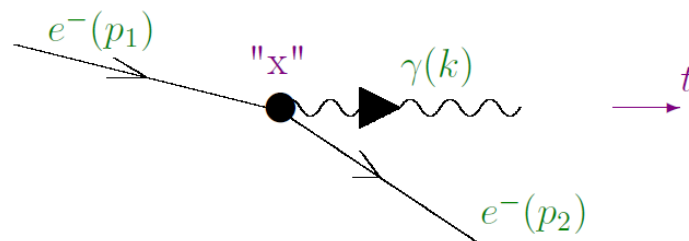


Рис. 23.1. Диаграмма Фейнмана, описывающая испускание электроном фотона

Это первая осознанная с точки зрения квантовой теории поля диаграмма Фейнмана!

Теперь вычислим эту диаграмму:

Начальное состояние:  $|i\rangle = |1e_{p_1 s_1}^-\rangle |0\gamma\rangle$ ;

Конечное состояние:  $|f\rangle = |1e_{p_2 s_2}^-\rangle |1\gamma_{k\lambda}\rangle$ .

Для начала вычислим вспомогательный матричный элемент, вычисление которого впоследствии будем опускать.

$$\begin{aligned}
 \langle 1\gamma_{k\lambda} | A_\mu(x) | 0\gamma \rangle &= \\
 &= \langle 1\gamma_{k\lambda} | \sum_{\tilde{\lambda}=\pm 1} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left( e_\mu(\vec{k}, \tilde{\lambda}) e^{-i(\vec{k}x)} c_{\vec{k}, \tilde{\lambda}} + e_\mu^*(\vec{k}, \tilde{\lambda}) e^{+i(\vec{k}x)} c_{\vec{k}, \tilde{\lambda}}^\dagger \right) | 0\gamma \rangle = \\
 &= \langle 1\gamma_{k\lambda} | \sum_{\tilde{\lambda}=\pm 1} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left( e_\mu^*(\vec{k}, \tilde{\lambda}) e^{+i(\vec{k}x)} c_{\vec{k}, \tilde{\lambda}}^\dagger \right) | 0\gamma \rangle = \\
 &= \langle 1\gamma_{k\lambda} | \sum_{\tilde{\lambda}=\pm 1} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left( e_\mu^*(\vec{k}, \tilde{\lambda}) e^{+i(\vec{k}x)} \right) | 1\gamma_{\vec{k}\tilde{\lambda}} \rangle = \\
 &= \sum_{\tilde{\lambda}=\pm 1} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left( e_\mu^*(\vec{k}, \tilde{\lambda}) e^{+i(\vec{k}x)} \right) \langle 1\gamma_{k\lambda} | 1\gamma_{\vec{k}\tilde{\lambda}} \rangle = \\
 &= \sum_{\tilde{\lambda}=\pm 1} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left( e_\mu^*(\vec{k}, \tilde{\lambda}) e^{+i(\vec{k}x)} \right) \delta_{\lambda\tilde{\lambda}} \delta_{k\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left( e_\mu^*(\vec{k}, \lambda) e^{+i(kx)} \right)
 \end{aligned}$$

Теперь вычисляем следующий вспомогательный матричный аргумент. Используем выражения для  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  и определения операторов рождения и уничтожения из сводки основных формул для получения правил Фейнмана. Также учтём нормировку  $\langle 0|0 \rangle = 1$

$$\begin{aligned}
 \langle 1e_{p_2 s_2}^- | (\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x))_N | 1e_{p_1 s_1}^- \rangle &= \langle 0 | \frac{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} e^{+i(p_2 x)} \gamma^\mu \frac{u(\vec{p}_1, s_1)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} e^{-i(p_1 x)} | 0 \rangle = \\
 &= \frac{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} e^{+i(p_2 x)} \gamma^\mu \frac{u(\vec{p}_1, s_1)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} e^{-i(p_1 x)} \langle 0|0 \rangle = \frac{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} e^{+i(p_2 x)} \gamma^\mu \frac{u(\vec{p}_1, s_1)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} e^{-i(p_1 x)}
 \end{aligned}$$

Теперь вычисляем матричный элемент процесса, изображенного на рис. 23.1:

$$\begin{aligned}
 \langle f | S^{(1)} | i \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{iM_{fi}}{\sqrt{2\omega_k 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - k) = \langle f | -i \int d^4x \mathcal{H}^{int}(x) | i \rangle = \\
 &= -ie \int d^4x \langle 1e_{p_2 s_2}^- | (\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x))_N | 1e_{p_1 s_1}^- \rangle \langle 1\gamma_{k\lambda} | A_\mu(x) | 0\gamma \rangle = \\
 &= -ie \int d^4x \frac{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} e^{i(p_2 x)} \gamma^\mu \frac{u(\vec{p}_1, s_1)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} e^{-i(p_1 x)} \frac{e_\mu^*(\vec{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(kx)} = \\
 &= \frac{\left( \int d^4x e^{-ix(p_2+k-p_1)} \right) \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) u(\vec{p}_1, s_1) e_\mu^*(\vec{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} = \\
 &= \frac{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) u(\vec{p}_1, s_1) e_\mu^*(\vec{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - k)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим второй нефизический процесс:

$$\gamma(k) \rightarrow e^+(p_1)e^-(p_2)$$

Начальное состояние:  $|i\rangle = |0e^-0e^+\rangle|1\gamma_{k\lambda}\rangle$ ;

Конечное состояние:  $|f\rangle = |1e_{p_2s_2}^-\rangle|1e_{p_1s_1}^+\rangle|0\gamma\rangle$ .

Матричный элемент:

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(1)}|i\rangle &= \frac{iM_{fi}}{\sqrt{2\omega_k 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} (2\pi)^4 \delta^4(k - p_1 - p_2) = \\ &= -ie \int d^4x \langle 1e_{p_1}^+ 1e_{p_2s_2}^- | (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))_N | 0e^-0e^+ \rangle \langle 0\gamma | A_\mu(x) | 1\gamma_{k\lambda} \rangle = \\ &= -ie \int d^4x \frac{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} e^{i(p_2x)} \gamma^\mu \frac{v(\vec{p}_1, s_1)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} e^{i(p_1x)} \frac{e_\mu(\vec{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(kx)} \end{aligned}$$

Так как  $v(\vec{p}_1, s_1) = u(-\vec{p}_1, -s_1)$  см. формулу (19.3): античастица - это частица, но движущаяся вспять во времени с 4-х импульсом " $-p_1$ ".

Итого:

$$\begin{cases} \langle f|S^{(1)}|i\rangle = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k-p_1-p_2)}{\sqrt{2\omega_k 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} \cdot \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) v(\vec{p}_1, s_1) e_\mu(\vec{k}, \lambda) \\ \langle f|S^{(1)}|i\rangle = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k-p_1-p_2)}{\sqrt{2\omega_k 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} \cdot \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) u(-\vec{p}_1, -s_1) e_\mu(\vec{k}, \lambda) \end{cases}$$

Соответственно и диаграмму Фейнмана можно нарисовать по-разному:

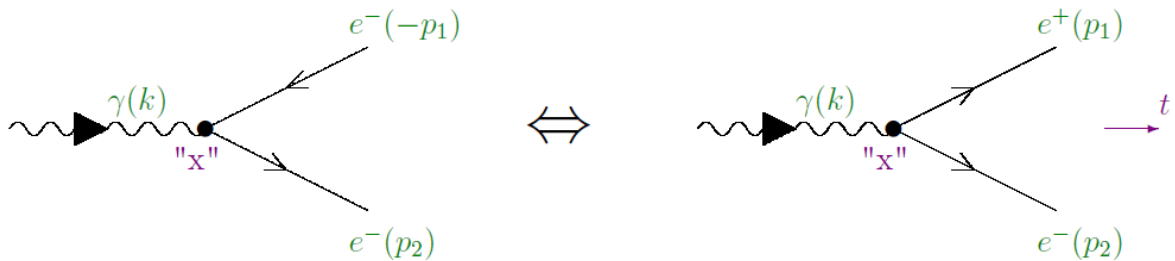


Рис. 23.2. Диаграммы Фейнмана, описывающие рождение  $e^+e^-$  пары

## Правила Фейнмана. Эпизод I

а) Фотон изображается волнистой линией:



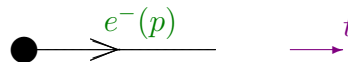
б) Электрон и позитрон - сплошной линией:



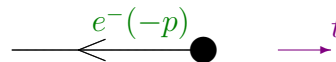
в) Входящему в вершину  $e^-(p, s)$  соответствует  $u(\vec{p}, s)$ :



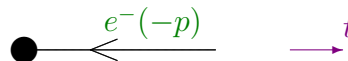
г) Выходящему из вершины  $e^-(p, s)$  соответствует  $\bar{u}(\vec{p}, s)$ :



д) Входящему в вершину  $e^+(p, s)$  соответствует  $\bar{v}(\vec{p}, s)$ :

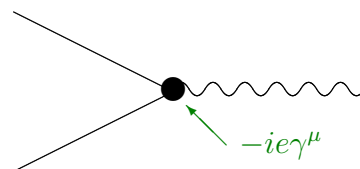


е) Выходящему из вершины  $e^+(p, s)$  соответствует  $v(\vec{p}, s)$ :



ж) Запись матричного элемента происходит вдоль сплошных линий против направления стрелок.

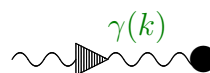
з) Каждой  $ee\gamma$  – вершине соответствует  $-ie\gamma^\mu$



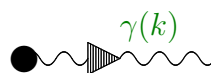
и) В каждой вершине сохраняется 4-х импульс:  $(2\pi)^4\delta(\sum p^{in} - \sum p^{out})$

к) Вершин со структурой, отличной от  $ee\gamma$ , в КЭД НЕ существует. Но они есть в других теориях. Например, в электрослабой теории есть вершина вида  $WW\gamma\gamma$ .

л) Входящему в вершину  $\gamma(k, \lambda)$  соответствует  $e^\mu(\vec{k}, \lambda)$ :



м) Выходящему из вершины  $\gamma(k, \lambda)$  соответствует  $e^{*\mu}(\vec{k}, \lambda)$ :



## 24. Лекция 24. Правила Фейнмана. Часть II.

### Второй порядок теории возмущений

Второй порядок теории возмущений описывает **физические** процессы, наблюдаемые экспериментально:  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ ,  $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ ,  $e^+ e^- \rightarrow 2\gamma$ ,  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  и др.

$$S = I + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots,$$

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T(\mathcal{H}^{int}(x_1)\mathcal{H}^{int}(x_2)),$$

где  $\mathcal{H}^{int}(x) = e (\bar{\psi}(x), \gamma^\mu, \psi(x))_N A_\mu(x)$

Используем результат применения теоремы Вика к  $S^{(2)}$  (см. конец лекции 22). Рассмотрим эффект Комптона, т.е.

$$\gamma(k_1) e^-(p_1) \rightarrow \gamma(k_2) e^-(p_2)$$

Процесс может проходить четырьмя разными способами:

- а)  $e^-$  с  $p_1$  и  $s_1$  уничтожается в точке " $x_2$ ";  
 $\gamma$  с  $k_1$  и  $\lambda_1$  уничтожается в точке " $x_2$ ";  
 $e^-$  с  $p_2$  и  $s_2$  рождается в точке " $x_1$ ";  
 $\gamma$  с  $k_2$  и  $\lambda_2$  рождается в точке " $x_1$ ".

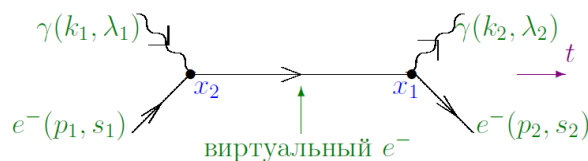


Рис. 24.1. Диаграмма Фейнмана, описывающая эффект Комптона.

- б)  $e^-$  с  $p_1$  и  $s_1$  уничтожается в точке " $x_2$ ";  
 $\gamma$  с  $k_2$  и  $\lambda_2$  рождается в точке " $x_2$ ";  
 $e^-$  с  $p_2$  и  $s_2$  рождается в точке " $x_1$ ";  
 $\gamma$  с  $k_1$  и  $\lambda_1$  уничтожается в точке " $x_1$ ".

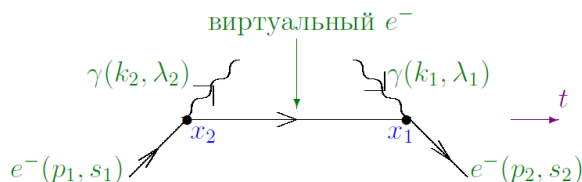


Рис. 24.2. Диаграмма Фейнмана, описывающая эффект Комптона.

Еще две возможности:  $x_1 \leftrightarrow x_2$ .

в)

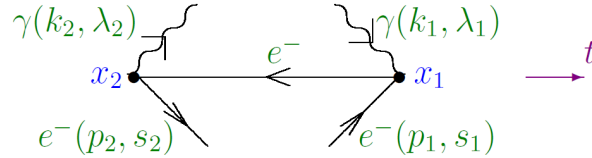


Рис. 24.3. Диаграмма Фейнмана, описывающая эффект Комптона.

г)

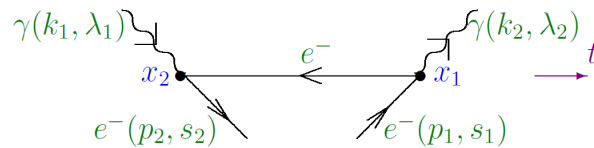


Рис. 24.4. Диаграмма Фейнмана, описывающая эффект Комптона.

Вклад от процесса **в**) = вкладу от процесса **а**), вклад от процесса **г**) = вкладу от процесса **б**), поскольку в Т-произведение точки " $x_1$ " и " $x_2$ " входят равноправно.

Замечание: Основное отличие реальных и виртуальных частиц состоит в том, что реальные частицы могут быть зарегистрированы макроскопическими приборами, а виртуальные нет. Также для всех реальных частиц выполняется  $p^2 = m^2$ , а для виртуальных  $p^2 \neq m^2$  т.е. виртуальные частицы не лежат на массовой поверхности.

В  $S^{(2)}$  эффекту Комптона соответствуют:

$$\left[ N(\underbrace{\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)}_{\text{electron}}\underbrace{\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)}_{\text{electron}}) + N(\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}_{\text{photon}}\gamma^\nu\psi(x_2)) \right] N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2))$$

Начальное состояние:  $|f\rangle = |1e_{p_1 s_1}^-\rangle |1\gamma_{k_1 \lambda_1}\rangle$ ;

Конечное состояние:  $|f\rangle = |1e_{p_2 s_2}^-\rangle |1\gamma_{k_2 \lambda_2}\rangle$ .

Матричный элемент:

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{iM_{fi}}{\sqrt{2\omega_{k_1}2\omega_{k_2}2\varepsilon_{p_1}2\varepsilon_{p_2}}}(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2) = \\ &= \frac{(-i)^2 e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 1\gamma_{k_2 \lambda_2} | N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) | 1\gamma_{k_1 \lambda_1} \rangle \times \\ &\times \langle 1e_{p_2 s_2}^- | \left[ N(\underbrace{\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)}_{\text{electron}}\underbrace{\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)}_{\text{electron}}) + N(\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}_{\text{photon}}\gamma^\nu\psi(x_2)) \right] | 1e_{p_1 s_1}^- \rangle \end{aligned}$$



Вычислим первый множитель - фотонная часть:

$$\begin{aligned} \langle 1\gamma_{k_2\lambda_2} | N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) | 1\gamma_{k_1\lambda_1} \rangle &= \frac{e_\mu(\vec{k}_1, \lambda_1)}{\sqrt{2\omega_{k_1}}} e^{-i(k_1x_1)} \cdot \frac{e_\nu^*(\vec{k}_2, \lambda_2)}{\sqrt{2\omega_{k_2}}} e^{-i(k_2x_2)} + \\ &+ \frac{e_\nu(\vec{k}_1, \lambda_1)}{\sqrt{2\omega_{k_1}}} e^{-i(k_1x_2)} \cdot \frac{e_\mu^*(\vec{k}_2, \lambda_2)}{\sqrt{2\omega_{k_2}}} e^{-i(k_2x_1)} \end{aligned}$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \langle 1\gamma_{k_2\lambda_2} | N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) | 1\gamma_{k_1\lambda_1} \rangle &= \\ &= \langle 1\gamma_{k_2\lambda_2} | N \left( \left[ \sum_{\xi=\pm 1} \sum_{\vec{z}} c_{\vec{z}\xi} \frac{e_\mu(\vec{z}, \xi)}{\sqrt{2\omega_\xi}} e^{-i(\vec{z}x_1)} + c_{\vec{z}\xi}^\dagger \frac{e_\mu^*(\vec{z}, \xi)}{\sqrt{2\omega_\xi}} e^{+i(\vec{z}x_1)} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[ \sum_{\tilde{\xi}=\pm 1} \sum_{\vec{z}} c_{\vec{z}\tilde{\xi}} \frac{e_\nu(\vec{z}, \tilde{\xi})}{\sqrt{2\omega_{\tilde{\xi}}}} e^{-i(\vec{z}x_2)} + c_{\vec{z}\tilde{\xi}}^\dagger \frac{e_\nu^*(\vec{z}, \tilde{\xi})}{\sqrt{2\omega_{\tilde{\xi}}}} e^{+i(\vec{z}x_2)} \right] \right) | 1\gamma_{k_1\lambda_1} \rangle = \\ &= \langle 1\gamma_{k_2\lambda_2} | c_{\vec{z}=\vec{k}_2, \xi=\lambda_2}^\dagger \cdot [\dots] c_{\vec{z}=\vec{k}_1, \xi=\lambda_1} \cdot [\dots] | 1\gamma_{k_1\lambda_1} \rangle + \\ &+ \langle 1\gamma_{k_2\lambda_2} | c_{\vec{z}=\vec{k}_2, \xi=\lambda_2}^\dagger \cdot [\dots] c_{\vec{z}=\vec{k}_1, \xi=\lambda_1} \cdot [\dots] | 1\gamma_{k_1\lambda_1} \rangle = \\ &= \frac{e_\mu(\vec{k}_1, \lambda_1)}{\sqrt{2\omega_{k_1}}} e^{-i(k_1x_1)} \cdot \frac{e_\nu^*(\vec{k}_2, \lambda_2)}{\sqrt{2\omega_{k_2}}} e^{-i(k_2x_2)} + \frac{e_\nu(\vec{k}_1, \lambda_1)}{\sqrt{2\omega_{k_1}}} e^{-i(k_1x_2)} \cdot \frac{e_\mu^*(\vec{k}_2, \lambda_2)}{\sqrt{2\omega_{k_2}}} e^{-i(k_2x_1)} \end{aligned}$$

т.к.  $\langle 1\gamma_{k_2\lambda_2} | c^\dagger = \langle 0|$ ,  $c | 1\gamma_{k_1\lambda_1} \rangle = |0\rangle$ ,  $\langle 0|0\rangle = 1$

Теперь рассмотрим фермионную часть. Оба слагаемых во втором множителе отличаются заменой  $x_1 \leftrightarrow x_2$ , поэтому в силу эквивалентности вкладов от  $x_1$  и  $x_2$  под знаком Т-произведения и в силу того, что первое слагаемое получается из второго **чётной перестановкой фермионных операторов**:

$$\begin{aligned} \langle 1e_{p_2s_2}^- | N(\underbrace{\bar{\psi}(x_1) \dots \psi(x_2)} + N(\dots \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \dots}) | 1e_{p_1s_1}^- \rangle &= \\ &= 2 \cdot \langle 1e_{p_2s_2}^- | N(\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} \gamma^\nu \psi(x_2)) | 1e_{p_1s_1}^- \rangle = \\ &= 2 \cdot \frac{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} e^{i(p_2x_1)} \gamma^\mu iS_c(x_1 - x_2) \gamma^\nu \frac{u(\vec{p}_1, s_1)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} e^{-i(p_1x_2)} = \\ &= \left| \text{"усложнение" : импульсное представление пропагатора} \right| = \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x_1-x_2)} \cdot 2 \cdot e^{i(p_2x_1)} e^{-i(p_1x_2)} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\mu iS_c(q) \gamma^\nu u(\vec{p}_1, s_1), \end{aligned}$$

где  $S_c(q)$  было явно вычислено в (20.2):

$$iS_c(q) = i \frac{\gamma^\alpha q_\alpha + Im}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Смысл пропагатора: Амплитуда вероятности перехода электрона (позитрона) из точки  $x_2(x_1)$  в точку  $x_1(x_2)$ . Далее элементарная математика с использованием формулы:

$$\int d^4x e^{i(xp)} = (2\pi)^4 \delta^4(p)$$

Действительно:

$$\begin{aligned}
 \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_1} 2\omega_{k_2} 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 x_1 d^4 x_2 \cdot \\
 &\cdot \left[ \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) iS_c(q) (-ie\gamma^\nu) u(\vec{p}_1, s_1) e_\mu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\nu(\vec{k}_1, \lambda_1) \cdot e^{ix_1(p_2+k_2-q)} e^{ix_1(q-p_1-k_1)} + \right. \\
 &\left. + \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) iS_c(q) (-ie\gamma^\nu) u(\vec{p}_1, s_1) e_\nu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\mu(\vec{k}_1, \lambda_1) e^{ix_1(p_2-k_1-q)} e^{ix_1(q+k_2-p_1)} \right] = \\
 &= \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{2\omega_{k_1} 2\omega_{k_2} 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} \int d^4 q \cdot \left[ \delta^4(p_2 + k_2 - q) \delta^4(q - p_1 - k_1) \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) iS_c(q) \cdot \right. \\
 &\cdot (-ie\gamma^\nu) u(\vec{p}_1, s_1) e_\mu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\nu(\vec{k}_1, \lambda_1) + \delta^4(p_2 - k_1 - q) \delta^4(q + k_2 - p_1) \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) \cdot \\
 &\cdot iS_c(q) (-ie\gamma^\nu) u(\vec{p}_1, s_1) e_\nu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\mu(\vec{k}_1, \lambda_1) \left. \right] = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_1} 2\omega_{k_2} 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - \\
 &- p_2 - k_2) \cdot \left[ \underbrace{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) iS_c(p_1 + k_1) (-ie\gamma^\nu) u(\vec{p}_1, s_1) e_\mu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\nu(\vec{k}_1, \lambda_1)}_{\text{Диаграмма (24.1) пункт а)} + \right. \\
 &\left. + \underbrace{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) iS_c(p_1 - k_2) (-ie\gamma^\nu) u(\vec{p}_1, s_1) e_\nu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\mu(\vec{k}_1, \lambda_1)}_{\text{Диаграмма (24.2) пункт б)} \right]
 \end{aligned}$$

Замечание: Чтобы вычислить матричный элемент какого-нибудь процесса, не нужно рисовать все возможные диаграммы Фейнмана, а необходимо нарисовать только топологически различные диаграммы.

Рассмотрим процесс рассеяния электрона на электроне:

$$e^-(p_1) e^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) e^-(p_4)$$

Как и в случае эффекта Комптона, имеются четыре способа описания такого процесса:

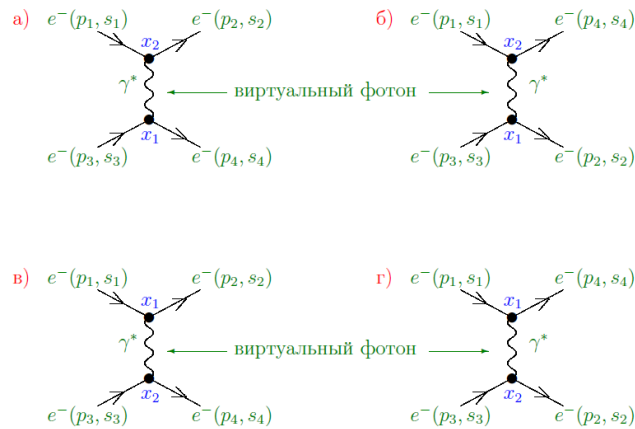


Рис. 24.5. Диаграмма Фейнмана, описывающая рассеяние электрона на электроне

Вклад от процесса **в**) = вкладу от процесса **а**), вклад от процесса **г**) = вкладу от процесса **б**), поскольку в Т-произведение точки " $x_1$ " и " $x_2$ " входят равноправно. В  $S^{(2)}$  рассеянию электрона на электроне соответствует:

$$N (\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)) \underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}$$

Начальное состояние:

$$|i\rangle = |i_e\rangle|0\gamma\rangle = |1e_{p_1s_1}^-\rangle|1e_{p_3s_3}^-\rangle|0\gamma\rangle$$

Конечное состояние:

$$|f\rangle = |f_e\rangle|0\gamma\rangle = |1e_{p_2s_2}^-\rangle|1e_{p_4s_4}^-\rangle|0\gamma\rangle$$

Матричный элемент:

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{iM_{fi}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}2\varepsilon_{p_2}2\varepsilon_{p_3}2\varepsilon_{p_4}}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_1 - p_3 - p_4) = \\ &= \frac{(-i)^2 e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle f_e|N(\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2))|i_e\rangle \cdot \langle 0\gamma|\underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}|0\gamma\rangle \end{aligned}$$

Согласно (9.1):

$$\begin{aligned} \langle 0\gamma|\underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}|0\gamma\rangle &\equiv \langle 0|\underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}|0\rangle = -iD_{c\mu\nu}(x_1 - x_2) = \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x_1-x_2)} (-iD_{c\mu\nu}(q)) \end{aligned}$$

Таким образом, виртуальному фотону соответствует пропагатор  $-iD_c^{\mu\nu}(q)$ .

Рассмотрим  $\langle f_e|N(\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2))|i_e\rangle$ . Этот матричный элемент не равен нулю только тогда, когда в  $\bar{\psi}(x)$  работает  $a_{\vec{p}s}^\dagger$  и в  $\psi(x)$  работает  $a_{\vec{p}s}$ . Поэтому можно записать:

$$\begin{aligned} \langle f_e|N(\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2))|i_e\rangle &= \\ &= \langle f_e|\sum_{s_i p_i} \sum_{s'_i p'_i} \sum_{s_j p_j} \sum_{s'_j p'_j} N\left(a_{\vec{p}_j s_j}^\dagger \frac{\bar{u}^\alpha(\vec{p}_j, s_j)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_j}}} e^{(ip_j x_1)} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} a_{\vec{p}_i s_i} \frac{u^\beta(\vec{p}_i, s_i)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_i}}} e^{(ip_i x_1)} \cdot \right. \\ &\cdot a_{\vec{p}'_j s'_j} \frac{\bar{u}^\xi(\vec{p}'_j, s'_j)}{\sqrt{2\varepsilon_{p'_j}}} e^{(ip'_j x_1)} (\gamma^\nu)_{\xi\eta} a_{\vec{p}'_i s'_i} \frac{u^\eta(\vec{p}'_i, s'_i)}{\sqrt{2\varepsilon_{p'_i}}} e^{(ip'_i x_1)} \left.)\right)|i_e\rangle = \\ &= \left| \text{Меняется знак, т.к. при } \vec{p}_i \neq \vec{p}'_j \text{ имеем: } a_{\vec{p}_i s_i} a_{\vec{p}'_j s'_j}^\dagger = -a_{\vec{p}'_j s'_j}^\dagger a_{\vec{p}_i s_i} \right| = \\ &= -\langle f_e|\sum_{s_i p_i} \sum_{s'_i p'_i} \sum_{s_j p_j} \sum_{s'_j p'_j} \frac{e^{i(p_j - p_i, x_1)} e^{i(p'_j - p'_i, x_2)}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_i} 2\varepsilon_{p'_i} 2\varepsilon_{p_j} 2\varepsilon_{p'_j}}} \cdot a_{\vec{p}_j s_j}^\dagger \bar{u}^\alpha(\vec{p}_j, s_j) a_{\vec{p}'_j s'_j}^\dagger \bar{u}^\xi(\vec{p}'_j, s'_j) a_{\vec{p}_i s_i} \cdot \\ &\cdot u^\beta(\vec{p}_i, s_i) a_{\vec{p}'_i s'_i} u^\eta(\vec{p}'_i, s'_i) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\xi\eta} |i_e\rangle \end{aligned}$$

Чтобы "распутать" написанный выше громоздкий матричный элемент, рассмотрим, как действует операторы уничтожения на состояние  $|i_e\rangle$ . Имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{s_i p_i} \sum_{s'_i p'_i} \frac{e^{-i(p_i, x_1) - i(p'_i, x_2)}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_i} 2\varepsilon_{p'_i}}} a_{\vec{p}_i, s_i} u^\beta(\vec{p}_i, s_i) a_{\vec{p}'_i, s'_i} u^\eta(\vec{p}'_i, s'_i) |1e_{p_1 s_1}^- \rangle |1e_{p_3 s_3}^- \rangle = \\ & = \left| \text{Ненулевые значения будут при } a_{\vec{p}_i, s_i} = a_{\vec{p}_1 s_1}, a_{\vec{p}'_i, s'_i} = a_{\vec{p}_3 s_3}, \right. \\ & \quad \left. \text{или } a_{\vec{p}_i, s_i} = a_{\vec{p}_3 s_3}, a_{\vec{p}'_i, s'_i} = a_{\vec{p}_1 s_1} \right| = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_3}}} \cdot \left| u^\beta(\vec{p}_1, s_1) u^\eta(\vec{p}_3, s_3) e^{-i(p_1, x_1) - i(p_3, x_2)} a_{\vec{p}_1 s_1} a_{\vec{p}_3 s_3} + \right. \\ & \quad \left. + u^\beta(\vec{p}_3, s_3) u^\eta(\vec{p}_1, s_1) e^{-i(p_3, x_1) - i(p_1, x_2)} a_{\vec{p}_3 s_3} a_{\vec{p}_1 s_1} \right| |1e_{p_1, s_1}^- \rangle |1e_{p_3, s_3}^- \rangle = \\ & = \left| \text{Учтем антикоммутацию: } a_{\vec{p}_1 s_1} a_{\vec{p}_3 s_3} = -a_{\vec{p}_3 s_3} a_{\vec{p}_1 s_1} \right| = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_3}}} \left( -u^\beta(\vec{p}_1, s_1) u^\eta(\vec{p}_3, s_3) e^{-i(p_1, x_1) - i(p_3, x_2)} + \right. \\ & \quad \left. + u^\beta(\vec{p}_3, s_3) u^\eta(\vec{p}_1, s_1) e^{-i(p_3, x_1) - i(p_1, x_2)} \right) |0e^-\rangle, \end{aligned}$$

где было использовано свойство операторов уничтожения:

$$a_{\vec{p}_3 s_3} a_{\vec{p}_1 s_1} |1e_{p_1, s_1}^- \rangle |1e_{p_3, s_3}^- \rangle = a_{\vec{p}_3 s_3} |1e_{p_3, s_3}^- \rangle = |0e^-\rangle$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} & \sum_{s_j p_j} \sum_{s'_j p'_j} \langle 1e_{p_4 s_4}^- | \langle 1e_{p_2 s_2}^- | \frac{e^{i(p_j, x_1) + i(p'_j, x_2)}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_j} 2\varepsilon_{p'_j}}} a_{\vec{p}_j, s_j}^\dagger u^\alpha(\vec{p}_j, s_j) a_{\vec{p}'_j, s'_j}^\dagger u^\xi(\vec{p}'_j, s'_j) = \\ & = \frac{\langle 0e^- |}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2} 2\varepsilon_{p_4}}} (\bar{u}^\alpha(\vec{p}_2, s_2) \bar{u}^\xi(\vec{p}_4, s_4) e^{i(p_2, x_1) + i(p_4, x_2)} - \bar{u}^\alpha(\vec{p}_2, s_2) \bar{u}^\xi(\vec{p}_4, s_4) e^{i(p_4, x_1) + i(p_2, x_2)}) \end{aligned}$$

Учтя симметрию относительно  $x_1 \leftrightarrow x_2$  пишем:

$$\begin{aligned} & \langle f_e | N(\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2)) | i_e \rangle = \\ & = \frac{2}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2} 2\varepsilon_{p_3} 2\varepsilon_{p_4}}} \cdot (\bar{u}(\vec{p}_4, s_4) \gamma^\mu u(\vec{p}_3, s_3) \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\nu u(\vec{p}_1, s_1) e^{ix_1(p_4 - p_3)} e^{ix_1(p_2 - p_1)} - \\ & \quad - \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\mu u(\vec{p}_3, s_3) \bar{u}(\vec{p}_4, s_4) \gamma^\nu u(\vec{p}_1, s_1) e^{ix_1(p_2 - p_3)} e^{ix_1(p_4 - p_1)}) \end{aligned}$$

Отсюда сразу видно, что диаграммы **а)** и **б)** должны **вычитаться** одна из другой.

## Правила Фейнмана. Эпизод II

н) Необходимо учитывать только **топологически различные** фейнмановские диаграммы.

Например, для эффекта Комптона надо учитывать только диаграммы а) и б).

Диаграммы в) и г) компенсируются отсутствием множителя  $(\frac{1}{2})$ .

о) Виртуальному электрону соответствует  $iS_c(p)$ :

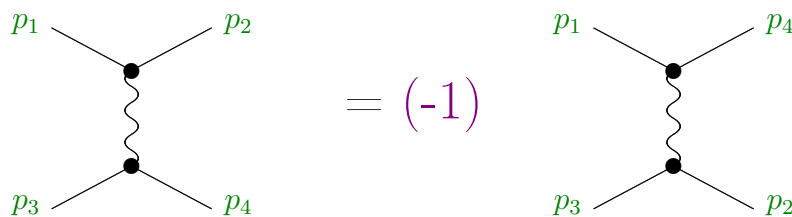
$$\bullet \xrightarrow{e^-(p)} \bullet \quad S_c(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + Im}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

п) Виртуальному фотону соответствует  $-iD_c^{\mu\nu}(k)$ :

$$\mu \bullet \text{---} \gamma(k) \text{---} \bullet \nu \quad D_c^{\mu\nu}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}$$

р) Относительная фаза диаграмм с фермионными концами равна  $(-1)^P$ , где P - число перестановок фермионных концов, которые переводят одну диаграмму в другую:

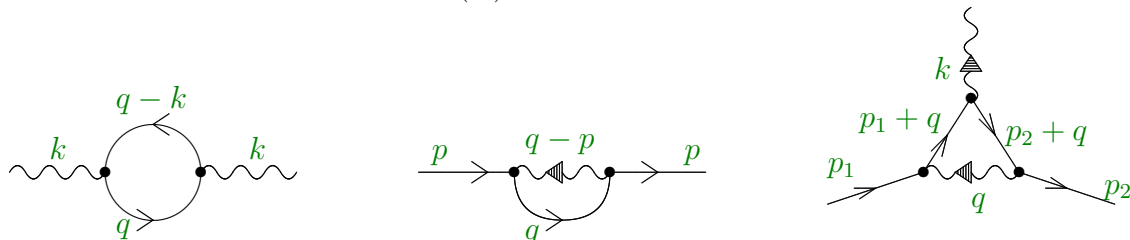
Например:



Поскольку для превращения первой диаграммы во вторую надо поменять местами  $p_1$  и  $p_4 \Leftrightarrow P=1$ .

### Правила Фейнмана для вычисления петель (без вывода)

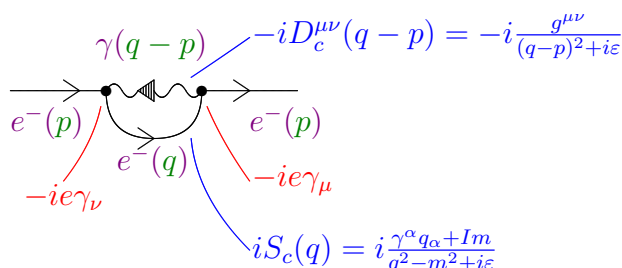
с) Каждой петле соответствует  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ , где q - внутренний импульс в петле:



т) Каждой замкнутой фермионной петле в  $iM_{fi}$  отвечает дополнительная  $(-1)$ .

у) Замкнутая фермионная петля записывается начиная с любой вершины против направления стрелок на фейнмановской диаграмме.

Простейший пример: поправка к массе  $e^-$



$$\text{Тогда: } iM_{fi} = \bar{u}(\vec{p}, s) \left[ \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ie\gamma_\mu) iS_c(q) (-ie\gamma_\nu) (-iD_c^{\mu\nu}(q-p)) \right] u(\vec{p}, s)$$

Выражение легко упростить, но корректно сделать интегрирование по  $d^4q$  сложно. Требуется процедура перенормировок.

## 25. Лекция 25. Ширины распадов и сечения реакций.

В предшествующих лекциях были сформулированы простые правила (правила Фейнмана) для вычисления амплитуды вероятности перехода  $i \rightarrow f$ :

$$\langle f | S^{(n)} | i \rangle = \frac{iM_{fi}}{\sqrt{2\mathcal{E}_{1i} \dots 2\mathcal{E}_{ni} 2\mathcal{E}_{1f} \dots 2\mathcal{E}_{mf}}} (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum_{i=1}^{n_i} p_i - \sum_{f=1}^{m_f} p_f \right)$$

Вероятность перехода  $i \rightarrow f$  задается формулой:

$$dW_{fi} = \langle |S^{(n)}|i \rangle^2 d\Gamma_f,$$

где  $d\Gamma_f$  -плотность конечных состояний в непрерывном спектре.

Вопрос: Как вычислить  $\left[ (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum_i p_i - \sum_f p_f \right) \right]^2$  ?

Ответ: Поместим систему в ящик размера  $V_0 = L_x \cdot L_y \cdot L_z = 1$

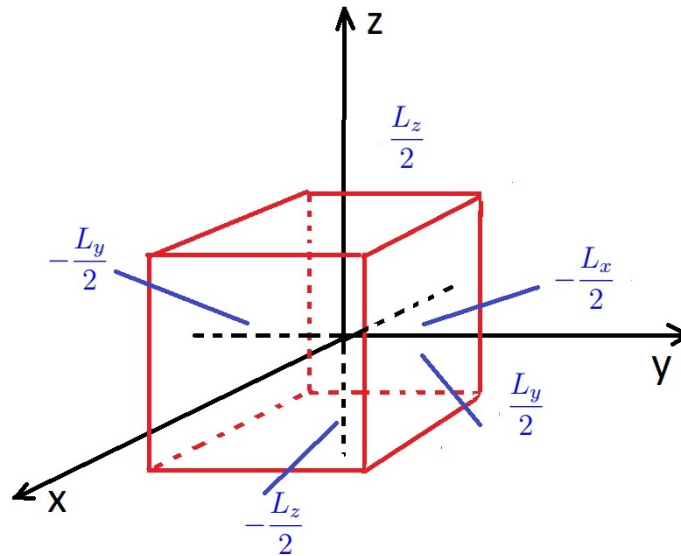


Рис. 25.1. Ящик размера  $V_0 = L_x \cdot L_y \cdot L_z = 1$

Тогда:

$$\begin{aligned} (2\pi)\delta \left( \sum_{i=1} p_{x_i} - \sum_{f=1} p_{x_f} \right) &\equiv 2\pi\delta(\Delta p_x) = \int_{-L_x/2}^{L_x/2} e^{i\Delta p_x x} dx = \\ &= \frac{1}{i\Delta p_x} \left( e^{\frac{i\Delta p_x L_x}{2}} - e^{-\frac{i\Delta p_x L_x}{2}} \right) = \frac{\sin \left( \frac{\Delta p_x L_x}{2} \right)}{\frac{\Delta p_x L_x}{2}} L_x. \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned} \left[ (2\pi)\delta\left(\sum_{i=1} p_{x_i} - \sum_{f=1} p_{x_f}\right) \right]^2 &= \left[ (2\pi)\delta(\Delta p_x) \right]^2 = (2\pi)\delta(\Delta p_x) L_x \frac{\sin\left(\frac{(\Delta p_x L_x)}{2}\right)}{\frac{\Delta p_x L_x}{2}} = \\ &= (2\pi)\delta(\Delta p_x) L_x \lim_{\Delta p_x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{(\Delta p_x L_x)}{2}\right)}{\frac{\Delta p_x L_x}{2}} = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right| = 2\pi\delta(\Delta p_x) L_x \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются интегралы по "y" и по "z". Для вычисления интеграла по "t" введем **длительность измерения**  $T_0$ , иначе - нормированное время. Тогда:

$$dW_{fi} = \frac{|iM_{fi}|^2 d\Gamma_f}{2\mathcal{E}_{1i} \dots 2\mathcal{E}_{ni} 2\mathcal{E}_{1f} \dots 2\mathcal{E}_{mf}} (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right) T_0 V_0$$

С точки зрения эксперимента имеет смысл рассматривать **вероятность перехода**  $i \rightarrow f$  **в единицу времени в единице объема** (все эксперименты имеют разную длительность и различный детектирующий объем), т.е:

$$d\omega_{fi} = \frac{dW_{fi}}{T_0 V_0} = \frac{|iM_{fi}|^2 d\Gamma_f}{2\mathcal{E}_{1i} \dots 2\mathcal{E}_{ni} 2\mathcal{E}_{1f} \dots 2\mathcal{E}_{mf}} (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right) d\Gamma_f$$

## Вычисление плотности конечных состояний

- $iM_{ji}$  вычисляется в импульсном пространстве;
- При  $t \rightarrow +\infty$  взаимодействия между частицами в конечном состоянии (**как правило**) можно пренебречь. Тогда:

Задача: Найти плотность конечных состояний  $m_f$  свободных невзаимодействующих частиц в ящике размером  $V_0 = L_x \cdot L_y \cdot L_z$ .

Если частицы не взаимодействуют, то плотность конечных состояний **факторизуется**:

$$d\Gamma_f = d\Gamma_{1f} d\Gamma_{2f} \dots d\Gamma_{rf} \dots d\Gamma_{mf}, r = \{1, 2, \dots, m\},$$

где  $d\Gamma_{rf}$ -плотность конечных состояний **одной** свободной частицы в ящике объемом  $V_0 = L_x \cdot L_y \cdot L_z$ .

Состояния свободной частицы **различаются энергией**  $\Rightarrow$  надо найти **число различных энергетических уровней** свободной частицы в ящике размером  $L_x \cdot L_y \cdot L_z$ .

Свободная частица в ящике описывается **стоячей волной**, амплитуда которой на стенках ящика должна обращаться в ноль. Тогда:

$$\begin{cases} p_{rfx} L_x = \pi n_{rfx}, n_{rfx} = \pm 1, \pm 2, \dots \\ p_{rfy} L_y = \pi n_{rfy}, n_{rfy} = \pm 1, \pm 2, \dots \\ p_{rfz} L_z = \pi n_{rfz}, n_{rfz} = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$



Тогда плотность конечных состояний  $r_j$  -й частицы:

$$d\Gamma_{rf} = \frac{1}{2}dn_{rfx}\frac{1}{2}dn_{rfy}\frac{1}{2}dn_{rfz} = L_x L_y L_z \frac{dp_{rfx}}{2\pi} \frac{dp_{rfy}}{2\pi} \frac{dp_{rfz}}{2\pi} = V_0 \frac{d\vec{p}_{rf}}{(2\pi)^3} = \left| V_0 = 1 \right| = \frac{d\vec{p}_{rf}}{(2\pi)^3}$$

(это **безразмерная** величина, т.к  $V_0 = 1$  - не пишется).

Замечание: Множители  $1/2$  присутствуют, так как энергия зависит от  $|\vec{p}|^2$  по формуле  $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$  следовательно состояния с  $\pm\vec{p}$  дают одно и то же состояние с энергией  $E$ .

Тогда:

$$d\Gamma_f = \frac{d\vec{p}_{1f}}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d\vec{p}_{mf}}{(2\pi)^3}$$

и вероятность перехода в единицу времени можно написать:

$$d\omega_{fi} = \frac{|iM_{fi}|^2}{2\mathcal{E}_{i1} \cdots 2\mathcal{E}_{ni}} d\Phi_{mf},$$

где:

$$d\Phi_{mf} = (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum_{i=1}^{n_i} p_i - \sum_{f=1}^{m_f} p_f \right) \frac{d\vec{p}_{1f}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_{1f}} \cdots \frac{d\vec{p}_{mf}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_{mf}}$$

называется  $m_j$  - частичным **фазовым объёмом** конечного состояния.

Замечание:  $m_j$  - частичный фазовый объём конечного состояния является релятивистским инвариантом.

Доказательство:

$\delta^4 \left( \sum_i p_i - \sum_f p_f \right)$  - является релятивистским инвариантом. Покажем, что  $\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_p}$

также релятивистский инвариант. Рассмотрим заведомо релятивистски инвариантную конструкцию:

$$\begin{aligned} (2\pi)\delta(p^2 - m^2) \frac{d^4p}{(2\pi)^4} &= \left| \mathcal{E}^2 = \vec{p}^2 + m^2 \right| = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta((p^0)^2 - \underbrace{(\vec{p})^2 - m^2}_{=-\mathcal{E}^2}) dp^0 d\vec{p} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta((p^0)^2 - \mathcal{E}^2) dp^0 d\vec{p} = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\underbrace{(p^0 - \mathcal{E})(p^0 + \mathcal{E})}_{f(p^0)=(p^0-\mathcal{E})(p^0+\mathcal{E})}) dp^0 d\vec{p} = \end{aligned}$$

Так как  $\mathcal{E} \geq m^2$  решение уравнения  $f(p^0) = 0$  только одно:  $p^0 = \mathcal{E} > 0$ . Воспользуемся формулой (6.7) и продолжим вычисления:

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\delta(p^0 - \mathcal{E}) dp^0}{\left| \frac{\partial f(p^0)}{\partial p^0} \right|_{p^0=\mathcal{E}}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\delta(p^0 - \mathcal{E}) dp^0}{2\mathcal{E}} = \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}}, \text{ при этом } p^\mu = (\mathcal{E}, \vec{p})$$

Таким образом,  $\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_p}$  также релятивистский инвариант.

В экспериментах измеряют **сечения** взаимодействия микрочастиц или **ширины распадов** нестабильных частиц.

Задача: связать  $d\omega_{fi}$  с сечениями и ширинами распадов.

## Ширины распадов

Чтобы показать связь  $d\omega_{fi}$  с шириной распада рассмотрим  $\rho^0$ -мезон в его **системе покоя**.

Определение: Если наблюдаемая частица в своей системе покоя живет время  $\tau$ , то вероятность распада в единицу времени есть:  $\Gamma = \frac{1}{\tau}$  - **полная ширина распада**. Ее значение измеряется на эксперименте.

Канал распада $\rho^0(770)$	Вероятность появления
$\pi^+\pi^-$	$\sim 1$
$\pi^0\pi^0$	0 (запр.)
$\pi^+\pi^-\gamma$	$\sim 0.01$
$\pi^0\gamma$	$\sim 0.001$
...	

Распределение по инвариантной массе:

$$m_{inv} = \sqrt{\left(\sum_{f=1}^{m_f} E_f\right)^2 - \left(\sum_{f=1}^{m_f} \vec{p}_f\right)^2}$$

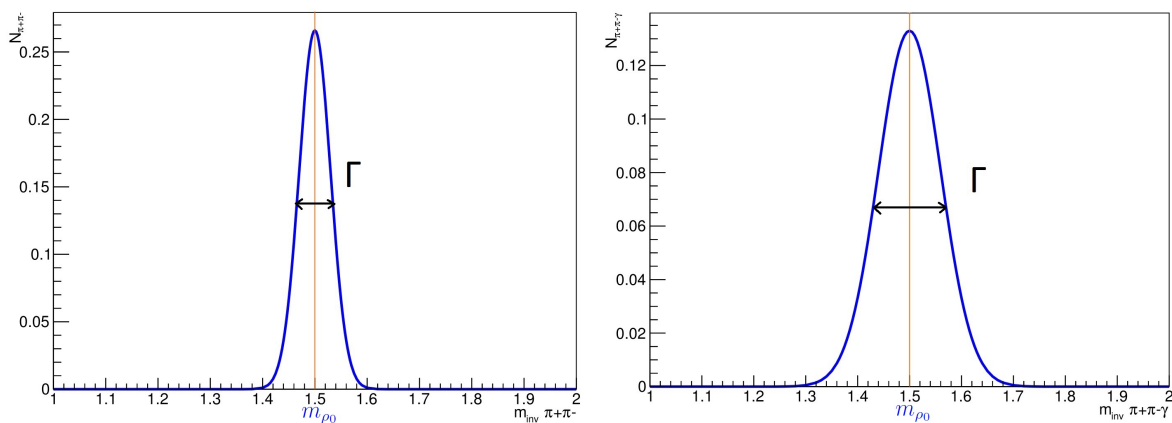


Рис. 25.2. Ширины распада  $\rho^0$ -мезона на  $\pi^+\pi^-$  (слева) на  $\pi^+\pi^-\gamma$  (справа).

Замечание: Во всех каналах ширина распределения одна и та же, поскольку **заранее не известно**., по какому конкретно каналу распадется  $\rho^0$ . После проведения большой серии измерений, можем найти **вероятность распада по каналу**.

Например, вероятность распада по каналу  $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^+$  есть:

$$W^{\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma} = \frac{N^{\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma}}{N_{tot}^{\rho^0}},$$

где  $N^{\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma}$  - число распадов  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$  за время эксперимента,  $N_{tot}^{\rho^0}$  - полное число распадов  $\rho^0$  за время эксперимента. Это так называемое **частотное определение вероятности**.

Определение:

**Парциальной шириной** называется:

$$\Gamma^{\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma} = W^{\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma} \cdot \Gamma = \frac{N^{\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma}}{\tau}$$

Это, очевидно, вероятность перехода из  $|i\rangle = |\rho^0\rangle$  в  $|f\rangle = |\pi^+ \pi^- \gamma\rangle$  в единицу времени. Таким образом:

$$\begin{aligned} d\Gamma^{\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma} &\equiv d\omega_{\pi^+ \pi^- \gamma, \rho^0} = \\ &= \frac{|iM_{\pi^+ \pi^- \gamma, \rho^0}|^2}{2m_{\rho^0}} (2\pi)^4 \delta^4(p_{\rho^0} - p_{\pi^+} - p_{\pi^-} - k_{\gamma}) \frac{d\vec{p}_{\pi^+}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_{p_{\pi^+}}} \frac{d\vec{p}_{\pi^-}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_{p_{\pi^-}}} \frac{d\vec{k}_{\gamma}}{(2\pi)^3 2\omega_{\gamma}} \end{aligned}$$

## Сечение реакции

Рассмотрим самый распространенный случай:

$$1_i + 2_i \rightarrow 1_f + \dots + m_f$$

Перейдем в систему центра масс (СЦМ) сталкивающихся частиц  $\Leftrightarrow$  "коллайдерный эксперимент".

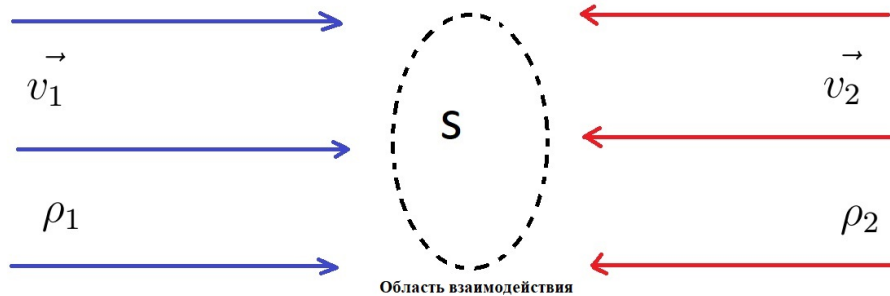


Рис. 25.3. Коллайдерный эксперимент.  $\rho_1, \rho_2$  - плотность числа частиц.

Вероятность взаимодействия:

$$dW_{fi} = (\rho_1 |\vec{v}_1| + \rho_2 |\vec{v}_2|) T_0 d\sigma_{fi}$$

где  $[dW_{fi}] = [|\vec{v}_1|] = 1$ ,  $[\rho_i] = \frac{1}{x^2}$ ,  $[T_0] = x$  в системе  $\hbar = c = 1$ .

Поэтому:

$$[\sigma_{fi}] = x^2 - \text{размерность площади}$$

Определение: Дифференциальным сечением реакции называется величина  $d\sigma_{ji}$ .

(Замечание:  $d\sigma_{ji} \neq S$ ).

Определение: Поток называется величина:

$$j_{\text{сцм}} = \rho_1 |v_1| + \rho_2 |v_2|$$

Поток должен быть определен в любой системе, а не только в СЦМ. Как это сделать?

Замечание: В лекциях используется нормировка на одну частицу в нормировочном объеме  $V_0 = 1$ . Поэтому:  $\rho_i \equiv \frac{n_i}{V_0} = \frac{1}{1} = 1$  в данной нормировке.

$$j_{\text{сцм}} = |v_1| + |v_2| = \frac{|\vec{p}_1|}{\mathcal{E}_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{\mathcal{E}_2} = \left| \text{т.к. } \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \right| = p_i \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}$$

В СЦМ:

$$\begin{aligned} p_{1i}^\mu &= (\mathcal{E}_1, \vec{p}_i) \\ p_{2i}^\mu &= (\mathcal{E}_2, -\vec{p}_i) \end{aligned}$$

тогда:

$$\begin{aligned} p_{1i}^\mu + p_{2i}^\mu &= (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2, \vec{0}) \\ \mathcal{E}_1^2 - m_{1i}^2 &= \mathcal{E}_2^2 - m_{2i}^2 \end{aligned}$$

Отсюда можно получить, что:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{(p_1 p_2) + m_{1i}^2}{\sqrt{2(p_1 p_2) + m_{1i}^2 + m_{2i}^2}} \\ \mathcal{E}_2 &= \frac{(p_1 p_2) + m_{2i}^2}{\sqrt{2(p_1 p_2) + m_{1i}^2 + m_{2i}^2}} \\ |\vec{p}_i| &= \sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m_{1i}^2} = \sqrt{\frac{(p_1 p_2)^2 - m_{1i}^2 m_{2i}^2}{2(p_1 p_2)^2 + m_{1i}^2 + m_{2i}^2}} \end{aligned}$$

тогда:

$$j_{\text{сцм}} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_{1i}^2 m_{2i}^2} - \text{релятивистский инвариант.}$$

Далее:

$$d\sigma_{ij} = \frac{1}{j} \frac{dW_{fi}}{T_0} = \frac{dw_{fi}}{j} \quad (25.1)$$

Учтя, что:

$$dw_{fi} = \frac{|iM_{fi}|^2}{2\mathcal{E}_1 2\mathcal{E}_2} d\Phi_{mf}$$

получаем для сечения  $1_i + 2_i \rightarrow 1_f + \dots + m_f$  в любой системе отсчета следующее выражение:

$$d\sigma_{fi} = \frac{|iM_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_{1i}p_{2i})^2 - m_{1i}^2 m_{2i}^2}} d\Phi_{mf} \quad (25.2)$$

где:

$$d\Phi_{mf} = (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum_i p_i - \sum_f p_f \right) \frac{d\vec{p}_{1f}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_{1f}} \cdots \frac{d\vec{p}_{mf}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_{mf}} \quad (25.3)$$

### Сечение реакции $1_i + 2_i \rightarrow 1_f + 2_f$

Это самый распространенный случай. Выражение для сечения может быть сильно упрощено. Фазовый объем:

$$\begin{aligned} d\Phi_2 &= (2\pi)^4 \delta^4(p_{1i} + p_{2i} - p_{1f} - p_{2f}) \frac{d\vec{p}_{1f}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_{1f}} \frac{d\vec{p}_{2f}}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_{2f}} = \\ &= \frac{\delta(\mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{2i} - \mathcal{E}_{1f} - \mathcal{E}_{2f})}{(2\pi)^2} \delta^3(\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} - \vec{p}_{1f} - \vec{p}_{2f}) \frac{d\vec{p}_{1f}}{2\mathcal{E}_{1f}} \frac{d\vec{p}_{2f}}{2\mathcal{E}_{2f}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\mathcal{E}_{1f}\mathcal{E}_{2f}} \delta(\mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{2i} - \mathcal{E}_{1f} - \mathcal{E}_{2f}) d\vec{p}_{1f} \end{aligned}$$

Поскольку  $d\Phi_2$  - релятивистский инвариант, то дальнейшее интегрирование можно проводить в любой системе отсчета. Выберем СЦИ. В ней:

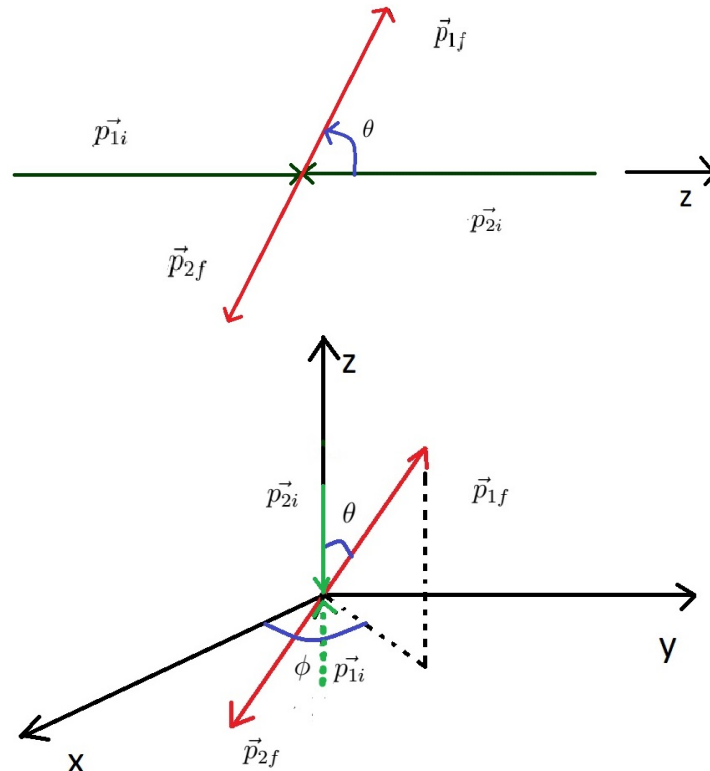


Рис. 25.4. Импульсы частиц в СЦИ

Определим:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{2i}; & \mathcal{E}_f &= \mathcal{E}_{1f} + \mathcal{E}_{2f}; \\ \vec{p}_i &= p_{1i} = -p_{2i}; & \vec{p}_f &= p_{1f} = -p_{2f}; \\ \theta &\in [0, \pi) \text{ и } \varphi \in [0, 2\pi)\end{aligned}$$

Элемент телесного угла  $d\Omega = d \cos \theta d\varphi$ , тогда:

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi.$$

Тогда :

$$d\vec{p}_{1f} = d\vec{p}_f = |\vec{p}_f|^2 d \cos \theta d\varphi = |\vec{p}_f|^2 d|\vec{p}_f| d\Omega$$

Перейдем от интегрирования по  $d|\vec{p}_f|$  к интегрированию по  $d\mathcal{E}_f$ :

$$d|\vec{p}_f| = \frac{d|\vec{p}_f|}{d\mathcal{E}_f} d\mathcal{E}_f$$

тогда:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_f}{d|\vec{p}_f|} &= \frac{d\mathcal{E}_{1f}}{d|\vec{p}_f|} + \frac{d\mathcal{E}_{2f}}{d|\vec{p}_f|} = \left|_{\text{т.к.}} \mathcal{E}_{1f} = \sqrt{p_f^2 + m_{1i}^2}; \mathcal{E}_{2f} = \sqrt{p_f^2 + m_{2i}^2} \right| = \frac{|\vec{p}_f|}{\mathcal{E}_{1f}} + \frac{|\vec{p}_f|}{\mathcal{E}_{2f}} = \\ &= \frac{|\vec{p}_f|(\mathcal{E}_{1f} + \mathcal{E}_{2f})}{\mathcal{E}_{1f}\mathcal{E}_{2f}} = \frac{|\vec{p}_f|\mathcal{E}_f}{\mathcal{E}_{1f}\mathcal{E}_{2f}}\end{aligned}$$

Таким образом:

$$d|\vec{p}_f| = \frac{|\vec{p}_f|\mathcal{E}_f}{\mathcal{E}_{1f}\mathcal{E}_{2f}} d\mathcal{E}_f.$$

Поэтому:

$$d\Phi_2 = \frac{1}{16\pi^2} |\vec{p}_f| d\Omega \frac{d\mathcal{E}_f}{\mathcal{E}_f} \delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_f|}{\mathcal{E}_i} d\Omega \quad (25.4)$$

Из общей формулы (25.2):

$$d\sigma_{1_i+2_i \rightarrow 1_f+2_f} = \frac{|iM_{fi}|^2}{4\mathcal{E}_i |\vec{p}_i|} \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_f|}{\mathcal{E}_i} d\Omega,$$

поскольку на ранее было получено, что:  $\sqrt{(p_{1i}p_{2i})^2 - m_{1i}^2 m_{2i}^2} = (\mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{2i}) |\vec{p}_i| = \mathcal{E}_i |\vec{p}_i|$ .  
Окончательно, для реакции  $1_i + 2_i \rightarrow 1_f + 2_f$  в СЦМ сталкивающихся частиц формула для дифференциального сечения приобретает очень простой вид:

$$d\sigma_{1_i+2_i \rightarrow 1_f+2_f}^{(\text{СЦМ})} = \frac{|iM_{fi}|^2}{64\pi^2 \mathcal{E}_i^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} d\Omega \quad (25.5)$$

Эта формула задает угловую зависимость сечений в СЦМ.

## Реакции $2 \rightarrow 2$ и мандельстамовские переменные

Вопрос: Можно ли записать сечение реакции  $1_i + 2_i \rightarrow 1_f + 2_f$  явно через релятивистские инварианты?

Ответ: Да, используя мандельстамовские переменные.

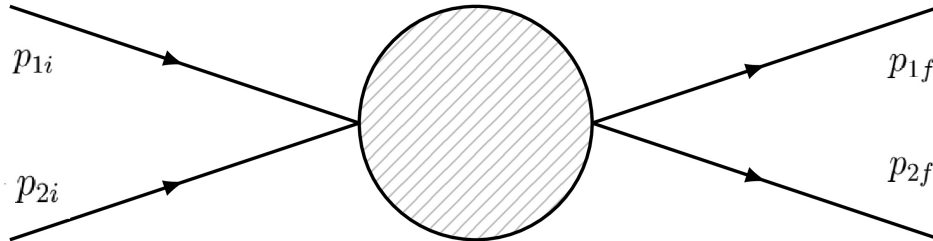


Рис. 25.5. Реакция  $2 \rightarrow 2$ :  $p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$ ,  $p_{1i}^2 = m_{1i}^2, p_{2f}^2 = m_{2f}^2$

Мандельстамовские переменные:

$$\begin{aligned} s &= (p_{1i} + p_{2i})^2 = (p_{1f} + p_{2f})^2 \\ t &= (p_{1f} - p_{1i})^2 = (p_{2i} - p_{2f})^2 \\ u &= (p_{2f} - p_{1i})^2 = (p_{2i} - p_{1f})^2 \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой проверяется, что:

$$s + t + u = m_{1i}^2 + m_{2i}^2 + m_{1f}^2 + m_{2f}^2$$

Три **независимых** переменных, описывающих процесс  $2 \rightarrow 2$  это, например,  $\{s, t, \varphi\}$ . Вспомним важную в кинематике **треугольную функцию**, которую мы использовали при решении задач в лекции 3:

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \quad (25.6)$$

В СЦМ:  $s = (\mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{2i})^2 = \mathcal{E}_i^2 = (\mathcal{E}_{1f} + \mathcal{E}_{2f})^2 = \mathcal{E}_f^2$  - квадрат полной энергии системы  $t \equiv q^2$ -квадрат переданного 4-импульса. Легко проверить, что:

$$|\vec{p}_i| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, m_{1i}^2, m_{2i}^2), \quad |\vec{p}_f| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, m_{1f}^2, m_{2f}^2)$$

По определению:

$$t = (p_{1f} - p_{1i})^2 = m_{1f}^2 + m_{1i}^2 - 2(\mathcal{E}_{1f}\mathcal{E}_{1i} - |\vec{p}_i||\vec{p}_f| \cos \theta)$$

Как показано выше, величины  $\mathcal{E}_{1i}, \mathcal{E}_{1f}, |\vec{p}_i|, |\vec{p}_f|$  зависят только от  $s$ , тогда:

$$dt = 2|\vec{p}_i||\vec{p}_f|d \cos \theta \quad (25.7)$$

Используя (25.2), можем написать:

$$\begin{aligned} d\sigma_{1_i+2_i \rightarrow 1_f+2_f}^{(\text{СЦМ})} &= \frac{|iM_{fi}(s, t, \varphi)|^2}{64\pi^2 \mathcal{E}_i^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} d \cos \theta d\varphi = d\sigma_{1_i+2_i \rightarrow 1_f+2_f}^{(\text{СЦМ})} = \\ &= \frac{|iM_{fi}(S, t, \phi)|^2}{64\pi^2 \mathcal{E}_i^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \frac{dtd\varphi}{2|\vec{p}_i||\vec{p}_f|} = \left| \text{в СЦМ: } \mathcal{E}_i |\vec{p}_i| = \sqrt{(p_{1_i} p_{2_i})^2 - m_{1_i}^2 m_{2_i}^2} \right| = \\ &= \frac{|iM_{fi}(s, t, \varphi)|^2}{128\pi^2 ((p_{1_i} p_{2_i})^2 - m_{1_i}^2 m_{2_i}^2)} dt d\varphi \end{aligned}$$

Как правило, в экспериментах с элементарными частицами присутствует цилиндрическая симметрия  $\Rightarrow M_{ij}$  не зависит от  $\varphi \Rightarrow d\sigma_{1_i+2_i \rightarrow 1_f+2_f}$  можно записать **ТОЛЬКО** через релятивистские инварианты, т.е для любой системы отсчета в виде:

$$d\sigma_{1_i+2_i \rightarrow 1_f+2_f} = \frac{|iM_{fi}(s, t)|^2}{64\pi [(p_{1_i} p_{2_i})^2 - m_{1_i}^2 m_{2_i}^2]} dt \quad (25.8)$$

В следующих лекциях эту формулу мы будем использовать.

## Кросс-каналы реакций в примерах

s-канал:  $a + b \rightarrow c + d$

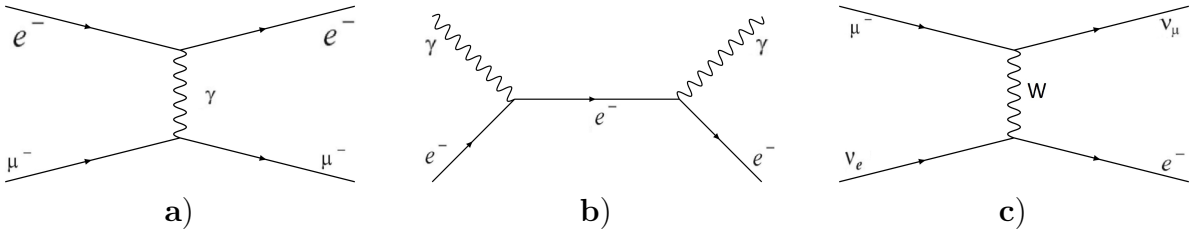


Рис. 25.6. а)  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  б)  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  в)  $\mu^- \nu_e \rightarrow e^- \nu_\mu$

t-канал:  $a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d$

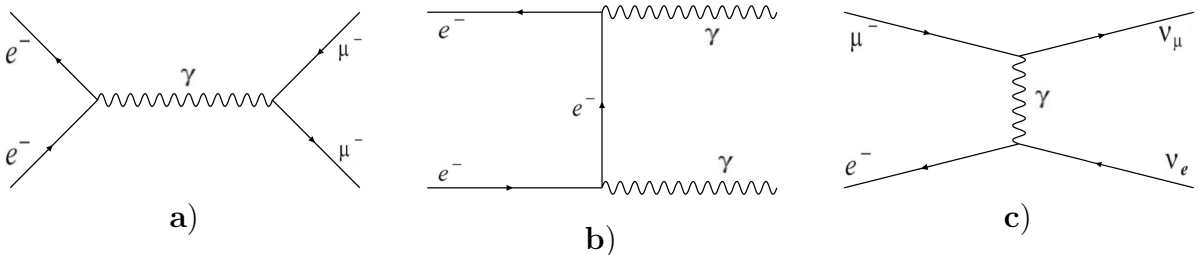


Рис. 25.7. а)  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$  б)  $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$  в)  $\mu^- e^+ \rightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_e$



u-канал:  $a + \bar{d} \rightarrow \bar{b} + c$

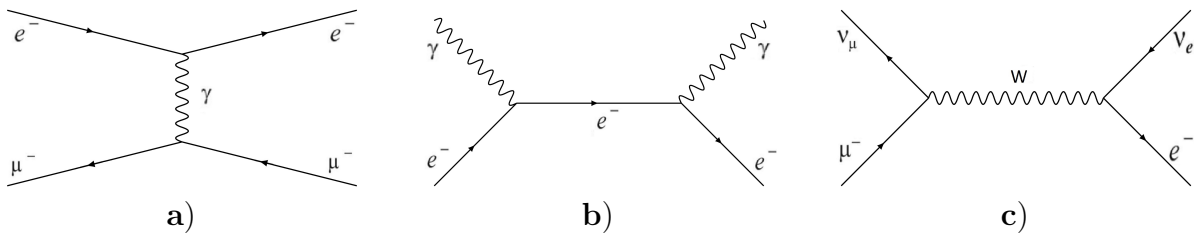


Рис. 25.8. а)  $e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$     б)  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$     в)  $\mu^- \tilde{\nu}_\mu \rightarrow e^- \tilde{\nu}_e$

Распад:  $a \rightarrow \bar{b} + c + d$  Только если  $m_a \geq m_{\bar{b}} + m_c + m_d$

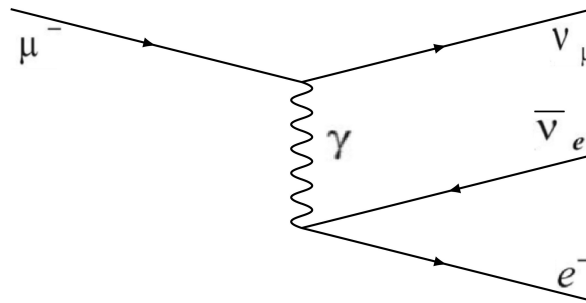


Рис. 25.9.  $\mu^- \rightarrow e^- \tilde{\nu}_e \nu_\mu$

Достаточно вычислить  $|iM_{fi}(S, t)|^2$  для одного из кросс-каналов и выразить его в терминах мандельстамовских переменных. Для остальных каналов достаточно сделать лишь преобразования мандельстамовских переменных в  $|iM_{fi}(S, t)|^2$ . После такой замены можно легко писать сечения и ширины распадов в каждом из кросс-каналов.

## 26. Лекция 26. Примеры вычислений процессов. Часть 1.

### Рассеяние электрона на мюоне $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

Замечание: Рассмотрим ультрарелятивистский случай:  $m_{e^-} = 0$ ,  $m_{\mu^-} = 0$

Наша цель - вычислить дифференциальное сечение такого процесса.

Ранее у нас фигурировали только фотоны и электроны. Что делать с мюонами?

Раньше:

$$\mathcal{H}^{int}(x) = e (\bar{\psi}(x) \gamma^\alpha \psi(x))_N A_\alpha(x)$$

где  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$  - поля электронов и позитронов.

$$\bar{\psi}^{(e)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\psi}(x) \text{ и } \psi^{(e)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x)$$

Каждый из сортов фермионов независимо взаимодействует с электромагнитным полем, поэтому:

$$\mathcal{H}^{int}(x) = e \sum_{e, \mu, \tau} (\bar{\psi}^{(f)}(x) \gamma^\alpha \psi^{(f)}(x))_N A_\alpha(x)$$

Основное отличие между  $e, \mu, \tau$  - их масса, поэтому считаем, что правила Фейнмана для мюонов и таонов известны.

$$u(\vec{k}, s), \bar{u}(\vec{k}, s) - \text{для } e^-;$$

$$U(\vec{p}, s), \bar{U}(\vec{p}, s) - \text{для } \mu^-;$$

### Диаграмма Фейнмана для процесса

Работаем в низшем порядке теории возмущений. Тогда у нас всего одна диаграмма Фейнмана:

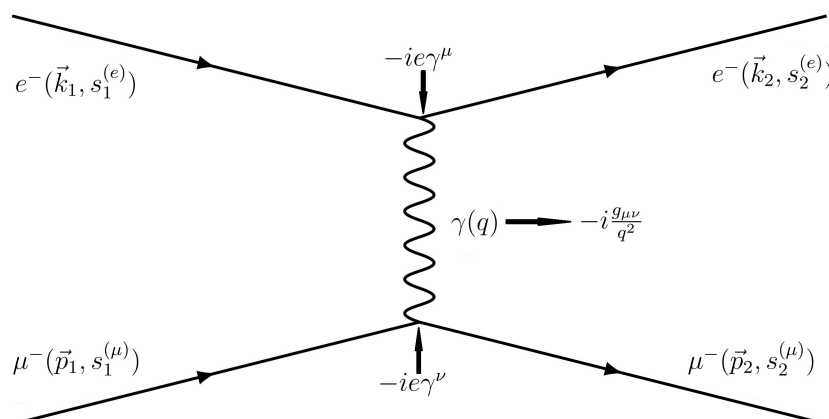


Рис. 26.1. Диаграмма Фейнмана реакции  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

## Кинемантика

Закон сохранения 4-х импульса:

$$k_1 + p_1 = k_2 + p_2$$

Так как в ультрарелятивистском приближении наши частицы безмассовые:

$$k_1^2 = k_2^2 = m_e^2 = 0, \quad p_1^2 = p_2^2 = m_\mu^2 = 0$$

Введём мандельстамовские переменные:

$$s = (k_1 + p_1)^2 = (k_2 + p_2)^2 \quad (26.1)$$

$$t = (k_1 - k_2)^2 = (p_2 - p_1)^2 \quad (26.2)$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2 \quad (26.3)$$

$$s + t + u = 2m_e^2 + 2m_\mu^2 = 0 \quad (26.4)$$

Выберем две независимые мандельстамовские переменные, в которых мы хотим описать наш процесс. Легко видеть, что  $q^2 = t$ , также суммарная энергия сталкивающихся частиц в СЦИ это  $\sqrt{s}$ . Поэтому логично в качестве двух независимых переменных выбрать  $s, t$ .

Выразим всевозможные скалярные произведения 4-х векторов через мандельстамовские переменные  $s, t$ . Из (26.1):

$$s = \underbrace{k_1^2}_{=0} + \underbrace{p_1^2}_{=0} + 2(k_1 p_1) \Rightarrow (k_1 p_1) = \frac{s}{2} \quad (26.5)$$

Аналогично:

$$(k_2 p_2) = (k_1 p_1) = \frac{s}{2} \quad (26.6)$$

$$(k_1 k_2) = (p_1 p_2) = -\frac{t}{2} \quad (26.7)$$

$$(k_1 p_2) = (k_2 p_1) = -\frac{u}{2} = \left| \text{из (26.4)} \right| = \frac{s+t}{2} \quad (26.8)$$

## Матричный элемент по правилам Фейнмана

$$\begin{aligned} iM_{fi} &= \bar{u}(\vec{k}_2, s_2^{(e)}) \cdot (-ie\gamma^\mu) \cdot u(\vec{k}_1, s_1^{(e)}) \cdot \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(\mu)}) \cdot (-ie\gamma^\nu) \cdot U(\vec{p}_1, s_1^{(\mu)}) = \\ &= \left| \text{обозначение: } (\vec{k}_1, s_1^{(e)}) \equiv 1_k, (\vec{k}_2, s_2^{(e)}) \equiv 2_k \right| i\frac{e^2}{q^2} (\bar{u}(2_k)\gamma^\mu u(1_k)) \cdot (\bar{U}(2_p)\gamma_\mu U(1_p)) \end{aligned}$$

Комплексно-сопряжённый к нему:

$$\begin{aligned} (iM_{fi})^* &= (iM_{fi})^\dagger = \left( i\frac{e^2}{q^2} \cdot (\bar{u}(2_k)\gamma^\mu u(1_k)) \cdot (\bar{U}(2_p)\gamma_\mu U(1_p)) \right)^\dagger = \\ &= -i\frac{e^2}{q^2} \cdot \left( \bar{U}(2_p)\gamma_\mu U(1_p) \right)^\dagger \left( \bar{u}(2_k)\gamma^\mu u(1_k) \right)^\dagger = \\ &= -i\frac{e^2}{q^2} \cdot \left( \bar{U}(1_p)\gamma_{\mu'} U(2_p) \right) \left( \bar{u}(1_k)\gamma^{\mu'} u(2_k) \right) \end{aligned}$$

Вычислим квадрат модуля матричного элемента для **неполяризованных** частиц.  
Для этого мы должны:

- а) Усреднить по спинам начального  $e^-$  и  $\mu^- \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{s_1^{(e)}} \sum_{s_1^{(\mu)}}$   
б) Просуммировать по спинам конечных  $e^-$  и  $\mu^- \Rightarrow \sum_{s_2^{(e)}} \sum_{s_2^{(\mu)}}$

$$\sum_{2s=\pm 1} u^\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}^\beta(\vec{p}, s) = \left| \text{используем (17.3)} \right| = (\hat{p} + Im)^{\alpha\beta} = \left| \text{т.к. } m = 0 \right| = (\hat{p})^{\alpha\beta}$$

где  $\hat{p} = \gamma^\nu p_\nu$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \sum_{s_1^{(e)}, s_1^{(\mu)}, s_2^{(e)}, s_2^{(\mu)}} |iM_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{ie^2}{q^2} (-i) \frac{(e^2)}{q^2} \cdot \\ & \cdot \sum_{s_1^{(e)}, s_1^{(\mu)}, s_2^{(e)}, s_2^{(\mu)}} \left( \bar{u}^{\alpha_1}(2_k) \cdot (\gamma^\mu)^{\alpha_1\alpha_2} \cdot u^{\alpha_2}(1_k) \right) \cdot \left( \bar{U}^{\alpha_3}(2_p) \cdot (\gamma_\mu)^{\alpha_3\alpha_4} \cdot U^{\alpha_4}(1_p) \right) \cdot \\ & \cdot \left( \bar{U}^{\alpha_5}(1_p) \cdot (\gamma_{\mu'})^{\alpha_5\alpha_6} \cdot U^{\alpha_6}(2_p) \right) \cdot \left( \bar{u}^{\alpha_7}(1_k) \cdot (\gamma^{\mu'})^{\alpha_7\alpha_8} \cdot u^{\alpha_8}(2_k) \right) = \\ & = \frac{e^4}{4t^2} \left[ \sum_{s_1^{(e)}, s_2^{(e)}} \bar{u}^{\alpha_1}(2_k) \cdot (\gamma^\mu)^{\alpha_1\alpha_2} \cdot u^{\alpha_2}(1_k) \cdot \bar{u}^{\alpha_7}(1_k) \cdot (\gamma^{\mu'})^{\alpha_7\alpha_8} \cdot u^{\alpha_8}(2_k) \right] \cdot \\ & \cdot \left[ \sum_{s_1^{(\mu)}, s_2^{(\mu)}} \bar{U}^{\alpha_3}(2_p) \cdot (\gamma_\mu)^{\alpha_3\alpha_4} \cdot U^{\alpha_4}(1_p) \bar{U}^{\alpha_5}(1_p) \cdot (\gamma_{\mu'})^{\alpha_5\alpha_6} \cdot U^{\alpha_6}(2_p) \right] \end{aligned}$$

Преобразуем первые квадратные скобки:

$$\begin{aligned} \left[ \dots \right] & = \left( \sum_{s_2^{(e)}} u^{\alpha_8}(\vec{k}_2, s_2^{(e)}) \cdot \bar{u}^{\alpha_1}(\vec{k}_2, s_2^{(e)}) \right) \cdot (\gamma^\mu)^{\alpha_1\alpha_2} \cdot \\ & \cdot \left( \sum_{s_1^{(e)}} u^{\alpha_2}(\vec{k}_1, s_1^{(e)}) \cdot \bar{u}^{\alpha_7}(\vec{k}_1, s_1^{(e)}) \right) \cdot (\gamma^{\mu'})^{\alpha_7\alpha_8} = (\hat{k}_2)^{\alpha_8\alpha_1} \cdot (\gamma^\mu)^{\alpha_1\alpha_2} \cdot (\hat{k}_1)^{\alpha_2\alpha_7} \cdot (\gamma^{\mu'})^{\alpha_7\alpha_8} = \\ & = Sp \left( \hat{k}_2 \gamma^\mu k_1 \gamma^{\mu'} \right) \end{aligned}$$

Аналогично со вторыми квадратными скобками.

Итого:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \sum_{s_1^{(e)}, s_1^{(\mu)}, s_2^{(e)}, s_2^{(\mu)}} |iM_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{4t^2} Sp\left(\hat{k}_2 \gamma^\mu \hat{k}_1 \gamma^{\mu'}\right) Sp\left(\hat{p}_2 \gamma_\mu \hat{p}_1 \gamma_{\mu'}\right) = \\
 &= \frac{e^4}{4t^2} \cdot 4t^2 \left(k_2^\mu k_1^{\mu'} - g^{\mu\mu'} (k_1 k_2) + k_2^{\mu'} k_1^\mu\right) \cdot \left((p_2)_\mu (p_1)_{\mu'} - g_{\mu\mu'} (p_1 p_2) + (p_2)_{\mu'} (p_1)_\mu\right) = \\
 &= 4 \frac{e^4}{4t^2} \left( (k_2 p_2)(k_1 p_1) - (k_1 k_2)(p_1 p_2) + (k_2 p_1)(k_1 p_2) - (k_1 k_2)(p_1 p_2) + \underbrace{g_\mu^\mu}_{=4} (k_1 k_2)(p_1 p_2) - \right. \\
 &\quad \left. - (k_1 k_2)(p_1 p_2) + (k_2 p_1)(k_1 p_2) - (k_1 k_2)(p_1 p_2) + (k_2 p_2)(k_1 p_1) \right) = \\
 &= \left| \text{приводим подобные слагаемые} \right| = 8 \frac{e^4}{t^2} \left( (k_1 p_1)(k_2 p_2) + (k_1 p_2)(k_2 p_1) \right)
 \end{aligned}$$

Запишем это через мандельштамовские переменные по формулам (26.5) - (26.8):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \sum_{s_1^{(e)}, s_1^{(\mu)}, s_2^{(e)}, s_2^{(\mu)}} |iM_{fi}|^2 &= 8 \frac{e^4}{t^2} \left( \frac{s}{2} \frac{s}{2} + \frac{s+t}{2} \frac{s+t}{2} \right) = 2 \frac{e^4}{t^2} (2s^2 + 2st + t^2) = \\
 &= \left| \text{Т.К. } \alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \right| = \frac{32\pi^2 \alpha_{em}^2}{t^2} (2s^2 + 2st + t^2)
 \end{aligned}$$

Итого:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \sum_{s_1^{(e)}, s_1^{(\mu)}, s_2^{(e)}, s_2^{(\mu)}} |iM_{fi}|^2 = \frac{32\pi^2 \alpha_{em}^2}{t^2} (2s^2 + 2st + t^2) \quad (26.9)$$

## Дифференциальное сечение процесса

Вспоминая формулы (25.2) и (25.3) можем записать:

$$d\sigma(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum |iM_{fi}|^2}{4\sqrt{(k_1 p_1)^2 - m_e^2 m_\mu^2}} d\Phi_2$$

где:

$$d\Phi_2 = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + p_1 - k_2 - p_2) \frac{d\vec{k}_2}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_2} \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

$\mathcal{E}_2$  - энергия конечного электрона;  $E_2$  - энергия конечного мюона;

Так как  $m_e = m_\mu = 0 \Rightarrow 4\sqrt{(k_1 p_1)^2 - m_e^2 m_\mu^2} = 4(k_1 p_1) = 2s$

Тогда:

$$d\sigma(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \frac{16\pi^2 \alpha_{em}^2}{st^2} (2s^2 + 2st + t^2) d\Phi_2 \quad (26.10)$$

Вычислим  $d\Phi_2$ . Перейдём в СЦМ:

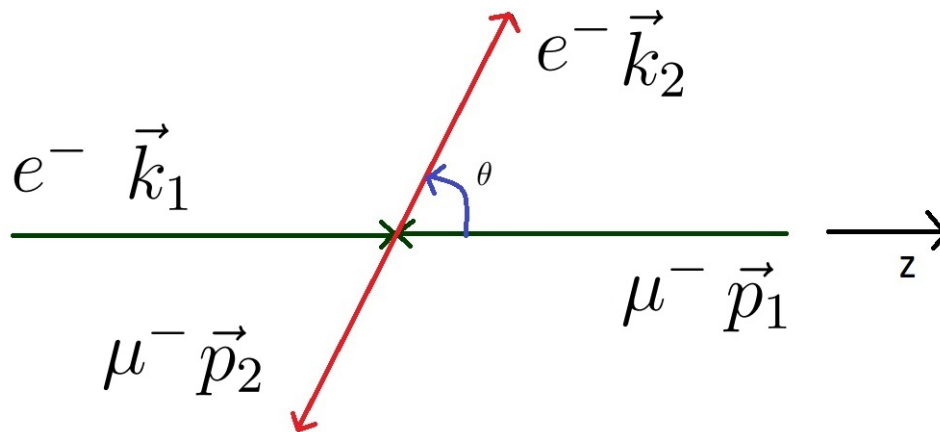


Рис. 26.2. Система центра масс  $e^- \mu^-$

Вспомним формулу (25.4):

$$d\Phi_2 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_f|}{\mathcal{E}_i} d \cos \theta d\varphi$$

где  $|\vec{p}_f| = |\vec{k}_2| = |\vec{p}_2|$ ,  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_1 + E_1$  - суммарная энергия сталкивающихся электрона и мюона в СЦМ.

Наш процесс цилиндрически-симметричный  $\Rightarrow$  проинтегрируем по  $d\varphi$ , получим:

$$d\Phi_2 = \frac{1}{8\pi} \frac{|\vec{p}_f|}{\mathcal{E}_i} d \cos \theta$$

По формуле (25.7):

$$d\Phi_2 = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{\mathcal{E}_i |\vec{p}_i|} dt$$

где  $|\vec{p}_i| = |\vec{k}_1| = |\vec{p}_1|$ .

Мы помним, что  $\mathcal{E}_i = \sqrt{s}$ . У безмассовых частиц модуль импульса равен энергии  $\Rightarrow |\vec{p}_i| = \frac{\sqrt{s}}{2}$ .

Окончательно:

$$d\Phi_2 = \frac{1}{8\pi} \frac{dt}{s}$$

Подставляем в формулу для сечения (26.10):

$$d\sigma(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{s^2 t^2} (2s^2 + 2st + t^2) dt$$

Чтобы найти полное сечение, нужно проинтегрировать по  $dt$ . В каких пределах?

По определению:  $t \stackrel{\text{def}}{=}} (k_1 - k_2)^2 = \underbrace{k_1^2}_{=0} + \underbrace{k_2^2}_{=0} - 2(k_1 k_2) = -2(k_1 k_2)$

Используя неравенство  $(P_1 P_2) \geq m_1 m_2$  из лекции 3:

$$(k_1 k_2) \leq 0$$

Поэтому переменная  $t$  изменяется в диапазоне  $(-\infty; 0]$  при условии что переменные  $s$  и  $u$  тоже меняются во всём своём диапазоне измерений.

Пределы изменения переменной  $s$ :  $s = (k_1 + p_1)^2 = 2(k_1 p_1) \geq 0 \Rightarrow s \in [0; +\infty)$ .

Пределы изменения переменной  $u$ :  $u = (k_1 - p_2)^2 = -2(k_1 p_2) \leq 0 \Rightarrow u \in [-\infty; 0)$ .

Так как  $s + t + u = 0 \Rightarrow t = -s - u$ . Фиксируем  $s$  - квадрат полной энергии.

Тогда:

$$\begin{cases} t_{min} = -s - u_{max} = -s; \\ t_{max} = 0 \end{cases} .$$

Тогда пределы интегрирования:  $\int_{-s}^0 dt$

Полное сечение:

$$\sigma(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{s^2 t^2} \int_{-s}^0 (2s^2 + 2st + t^2) dt = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{s^2 t^2} \int_{-s}^0 \left( \frac{2}{t^2} + \frac{2}{st} + \frac{1}{s^2} \right) dt$$

На верхнем пределе интеграл расходится. Если бы мы учли массы  $e^-$  и  $\mu^-$  такого бы не было.

## 27. Лекция 27. Примеры вычислений процессов. Часть 2. Эффект Комптона

### Диаграммы Фейнмана для эффекта Комптона

Существуют только две топологически различные диаграммы:

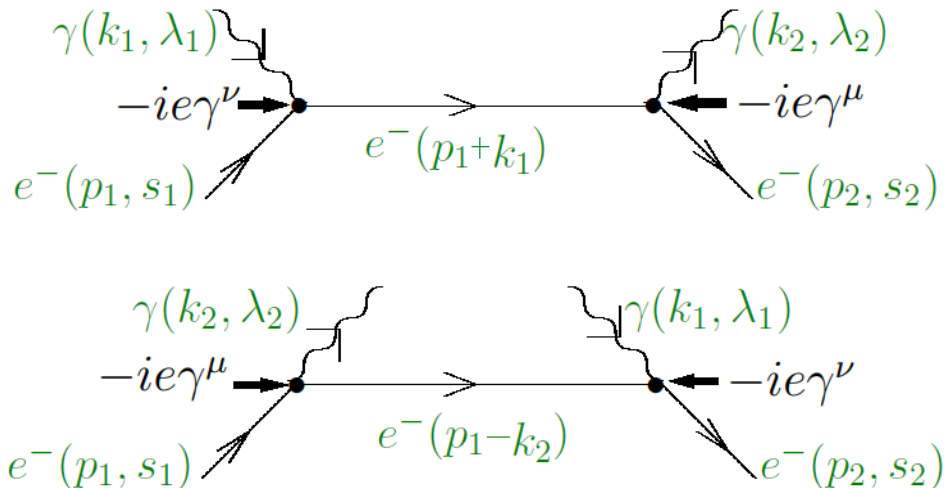


Рис. 27.1. Диаграммы Фейнмана, описывающие эффект Комптона

### Кинематика и мандельстамовские переменные

4-х импульсы начальных и конечных частиц удовлетворяют условиям:

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2, \quad \underbrace{p_1^2 = p_2^2 = m^2}_{\text{электроны}}, \quad \underbrace{k_1^2 = k_2^2 = 0}_{\text{фотоны}}.$$

Мандельстамовские переменные определены как:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + k_1)^2 = (p_2 + k_2)^2, \\ t &= (p_1 - p_2)^2 = (k_1 - k_2)^2, \\ u &= (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2 \end{aligned}$$

Они удовлетворяют условию:

$$s + t + u = 2m^2.$$

Выпишем все возможные скалярные произведения 4-х векторов через  $s$  и  $u$ .

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + k_1)^2 = p_1^2 + k_1^2 + 2(p_1 k_1) = m^2 + 2(p_1 k_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (p_1 k_1) &= (p_2 k_2) = \frac{s - m^2}{2}. \end{aligned}$$



Аналогично:

$$u = (p_1 - k_2)^2 = p_1^2 + k_2^2 - 2(p_1 k_2) = m^2 - 2(p_1 k_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (p_1 k_2) = (p_2 k_1) = \frac{m^2 - u}{2}$$

Далее:

$$(p_1 p_2) = \frac{2m^2 - t}{2} = \frac{s + u}{2}; \quad (k_1 k_2) = -\frac{t}{2} = \frac{s + u - 2m^2}{2}$$

Напомним, что В КТП принято следующее обозначение.

$$\hat{p} = \gamma^\alpha p_\alpha$$

Которое не имеет ничего общего с обозначением оператора в нерелятивистской квантовой механике.

## Матричный элемент по правилам Фейнмана

По диаграммам (рис. 27.1) при помощи правил Фейнмана напишем выражение для  $iM_{fi}$ :

$$iM_{fi} = \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) i \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} (-ie\gamma^\nu) u(\vec{p}_1, s_1) \cdot e_\mu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\nu(\vec{k}_1, \lambda_1) + \\ + \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\nu) i \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu) u(\vec{p}_1, s_1) \cdot e_\mu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\nu(\vec{k}_1, \lambda_1) = \\ = \underbrace{(-1)^2 i^3 e^2}_{=-ie^2} e_\mu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\nu(\vec{k}_1, \lambda_1) \cdot \left[ \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\mu \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im}{s - m^2} \gamma^\nu u(\vec{p}_1, s_1) + \right. \\ \left. + \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\nu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im}{u - m^2} \gamma^\mu u(\vec{p}_1, s_1) \right]$$

Выполним комплексное сопряжение  $iM_{fi}$ .

$$(iM_{fi})^* \equiv (iM_{fi})^\dagger = ie^2 e_{\mu'}(\vec{k}_2, \lambda_2) e_{\nu'}^*(\vec{k}_1, \lambda_1) \cdot \\ \cdot \left[ \left( \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^{\mu'} \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im}{s - m^2} \gamma^{\nu'} u(\vec{p}_1, s_1) \right)^\dagger + \right. \\ \left. + \left( \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^{\nu'} \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im}{u - m^2} \gamma^{\mu'} u(\vec{p}_1, s_1) \right)^\dagger \right] = ie^2 e_{\mu'}(\vec{k}_2, \lambda_2) e_{\nu'}^*(\vec{k}_1, \lambda_1) \cdot \\ \cdot \left[ u^\dagger(\vec{p}_1, s_1) \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{=I} \frac{(\gamma^{\mu'} (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im) \gamma^{\nu'})^\dagger}{s - m^2} \gamma^{0\dagger} u(\vec{p}_2, s_2) + \right. \\ \left. + u^\dagger(\vec{p}_1, s_1) \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{=I} \frac{(\gamma^{\nu'} (\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im) \gamma^{\mu'})^\dagger}{u - m^2} \gamma^0 u(\vec{p}_2, s_2) \right]$$

Воспользуемся тем, что  $\gamma^0$  - эрмитова матрица, т.е.  $\gamma^0 = \gamma^{0\dagger}$  и формулой

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$$

Получаем:

$$\gamma^0 \left( \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^{\nu'} + \gamma^{\mu'\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^{\nu'\dagger} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu'\dagger} \gamma^0 = \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'}.$$

Аналогично:  $\gamma^0 (\gamma^{\mu'} \hat{p} \gamma^{\nu'})^\dagger \gamma^0 = \gamma^{\nu'} \hat{p} \gamma^{\mu'}.$

Тогда:

$$(iM_{fi})^* = ie^2 e_{\mu'} \left( \vec{k}_2, \lambda_2 \right) e_{\nu'}^* \left( \vec{k}_1, \lambda_1 \right) \cdot \left[ \bar{u} \left( \vec{p}_1, s_1 \right) \gamma^{\nu'} \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im}{s - m^2} \gamma^{\mu'} u \left( \vec{p}_2, s_2 \right) + \right. \\ \left. + \bar{u} \left( \vec{p}_1, s_1 \right) \gamma^{\mu'} \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im}{u - m^2} \gamma^{\nu'} u \left( \vec{p}_2, s_2 \right) \right]$$

Теперь все готово к вычислению  $|iM_{fi}|^2$ .

Пусть начальные и конечные пучки электронов и фотонов не поляризованы, тогда  $|iM_{fi}|^2$  необходимо просуммировать по спинам и поляризациям конечных частиц и усреднить по спинам и поляризациям начальных частиц.

Учитывая, что у  $e^-$  две проекции спина, а у  $\gamma$  две поляризации, получаем:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ \lambda_1, \lambda_2}} |iM_{fi}|^2 = \frac{e^4}{4} \underbrace{\left( \sum_{\lambda_1} e_{\nu'} \left( \vec{k}_1, \lambda_1 \right) e_{\nu'}^* \left( \vec{k}_1, \lambda_1 \right) \right)}_{=-g_{\nu\nu'}} \cdot \underbrace{\left( \sum_{\lambda_2} e_{\mu'} \left( \vec{k}_2, \lambda_2 \right) e_{\mu'}^* \left( \vec{k}_2, \lambda_2 \right) \right)}_{=-g_{\mu\mu'}} \cdot \\ \cdot \sum_{s_1 s_2} \left[ \bar{u} \left( \vec{p}, s_1 \right) \gamma^{\nu'} \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im}{s - m^2} \gamma^{\mu'} u \left( \vec{p}_2, s_2 \right) \bar{u} \left( \vec{p}_2, s_2 \right) \gamma^{\mu} \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im}{s - m^2} \gamma^{\nu} u \left( \vec{p}_1, s_1 \right) + \right. \\ + \bar{u} \left( \vec{p}_1, s_1 \right) \gamma^{\mu'} \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im}{u - m^2} \gamma^{\nu'} u \left( \vec{p}_2, s_2 \right) \bar{u} \left( \vec{p}_2, s_2 \right) \gamma^{\nu} \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im}{u - m^2} \gamma^{\mu} u \left( \vec{p}_1, s_1 \right) + \\ + \bar{u} \left( \vec{p}_1, s_1 \right) \gamma^{\nu'} \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im}{s - m^2} \gamma^{\mu'} u \left( \vec{p}_2, s_2 \right) \bar{u} \left( \vec{p}_2, s_2 \right) \gamma^{\nu} \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im}{u - m^2} \gamma^{\mu} u \left( \vec{p}_1, s_1 \right) + \\ \left. + \bar{u} \left( \vec{p}_1, s_1 \right) \gamma^{\mu'} \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im}{u - m^2} \gamma^{\nu'} u \left( \vec{p}_2, s_2 \right) \bar{u} \left( \vec{p}_2, s_2 \right) \gamma^{\mu} \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im}{s - m^2} \gamma^{\nu} u \left( \vec{p}_1, s_1 \right) \right]$$

Это выражение, хотя и громоздкое, но простое по сути. Второе слагаемое получается из первого заменой  $u \leftrightarrow s$ . Четвертое слагаемое получается из третьего заменой  $u \leftrightarrow s$ .

Для проведения суммирования по  $s_1$  и  $s_2$  воспользуемся выражением:

$$\sum_{2s=\pm 1} u^{\alpha_1} (\vec{p}, s) \bar{u}^{\alpha_2} (\vec{p}, s) = (\hat{p} + Im)^{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Тогда первое слагаемое в  $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum |iM_{fi}|^2$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
 f(s, u, m^2) &= \frac{e^4}{4(s-m^2)^2} \sum_{s_1 s_2} \bar{u}^{\alpha_1}(\vec{p}_1, s_1) (\gamma_\nu)^{\alpha_1 \alpha_2} (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im)^{\alpha_2 \alpha_3} \cdot \\
 &\cdot (\gamma_\mu)^{\alpha_3 \alpha_4} u^{\alpha_4}(\vec{p}_2, s_2) \bar{u}^{\alpha_5}(\vec{p}_2, s_2) (\gamma^\mu)^{\alpha_5 \alpha_6} (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im)^{\alpha_6 \alpha_7} (\gamma^\nu)^{\alpha_7 \alpha_8} u^{\alpha_8}(\vec{p}_1, s_1) = \\
 &= \frac{e^4}{4(s-m^2)^2} (\gamma_\nu)^{\alpha_1 \alpha_2} \cdot (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im)^{\alpha_2 \alpha_3} (\gamma_\mu)^{\alpha_3 \alpha_4} (\hat{p}_2 + Im)^{\alpha_4 \alpha_5} \cdot \\
 &\cdot (\gamma^\mu)^{\alpha_5 \alpha_6} (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im)^{\alpha_6 \alpha_7} (\gamma^\nu)^{\alpha_7 \alpha_8} (\hat{p}_1 + Im)^{\alpha_8 \alpha_1} = \\
 &= \frac{e^4}{4(s-m^2)^2} Sp \left( \gamma^\nu (\hat{p}_1 + Im) \gamma_\nu (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im) \gamma_\mu (\hat{p}_2 + Im) \gamma^\mu \underbrace{(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im)}_{=\hat{p}_2 + \hat{k}_2} \right) = \\
 &= \frac{e^4}{(s-m^2)^2} Sp \left( (2mI - \hat{p}_1) (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im) (2mI - \hat{p}_2) (\hat{p}_2 + \hat{k}_2 + Im) \right) = \\
 &= \frac{e^4}{(s-m^2)^2} Sp \left( (2m\hat{k}_1 + m\hat{p}_1 + m^2I - \hat{p}_1\hat{k}_1) \cdot (2m\hat{k}_2 + m\hat{p}_2 + m^2I - \hat{p}_2\hat{k}_2) \right) = \\
 &= \left| \text{перемножаем обе скобки, но оставляем Sp с чётным числом } \gamma \text{ - матриц} \right| = \\
 &= \frac{e^4}{(s-m^2)^2} \left[ 4m^2 Sp(\hat{k}_1\hat{k}_2) + 2m^2 Sp(\hat{k}_1\hat{p}_2) + 2m^2 Sp(\hat{p}_1\hat{k}_2) + \right. \\
 &\left. + m^2 Sp(\hat{p}_1\hat{p}_2) + m^4 SpI - m^2 Sp(\hat{p}_2\hat{k}_2) - m^2 Sp(\hat{p}_1\hat{k}_1) + Sp(\hat{p}_1\hat{k}_1\hat{p}_2\hat{k}_2) \right] = \\
 &= \frac{4e^4}{(s-m^2)^2} \left[ m^2 (4(k_1k_2) + 2(k_1p_2) + 2(p_1k_2) + (p_1p_2) + m^2 - \right. \\
 &\left. - (p_2k_2) - (p_1k_1)) + (p_1k_1)(p_2k_2) - (p_1p_2)(k_1k_2) + (p_1k_2)(k_1p_2) \right] = \\
 &= \frac{4e^4}{(s-m^2)^2} \left[ \frac{m^2}{2} (3s+u) + \frac{m^4-su}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Учтём, что  $e^2 = 4\pi\alpha_{em}$  и тогда окончательно получим:

**Первое слагаемое:**

$$f(s, u, m^2) = \frac{32\pi^2\alpha_{em}^2}{(s-m^2)^2} [4m^4 - (s-m^2)(u-m^2) + 2m^2(s-m^2)]$$

**Второе слагаемое:** вычислять не нужно, т. к. оно получается из первого заменой  $s \leftrightarrow u$ , т. е.

$$f(u, s, m^2) = \frac{32\pi^2\alpha_{em}^2}{(u-m^2)^2} [4m^4 - (s-m^2)(u-m^2) + 2m^2(u-m^2)]$$

Идейно абсолютно аналогично, но технически чуть более громоздко вычисляются третье и четвертое слагаемые, являющиеся интерференционными между первой и второй фейнмановскими диаграммами.

Третье слагаемое:

$$g(s, u, m^2) = \frac{e^4}{4} \sum_{s_1, s_2} \bar{u}(\vec{p}_1, s_1) \gamma_\nu \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im}{s - m^2} \gamma_\mu u(\vec{p}_2, s_2) \cdot \\ \cdot \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\nu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im}{u - m^2} \gamma^\mu u(\vec{p}_1, s_1)$$

Прежде, чем суммировать по спинам электронов, упростим матричный элемент. Поскольку  $\hat{p}_1 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \hat{p}_1 + 2Ip_1^\mu$ , то можно заметить:

$$\left( \hat{p}_1 - \hat{k}_2 + Im \right) \gamma^\mu u(\vec{p}_1, s_1) = \gamma^\mu (-\hat{p}_1 + Im) u(\vec{p}_1, s_1) + \left( -\hat{k}_2 \gamma^\mu + 2Ip_1^\mu \right) u(\vec{p}_1, s_1) = \\ = \left| \text{воспользуемся формулой (16.2)} \right| = \left( -\hat{k}_2 \gamma^\mu + 2Ip_1^\mu \right) u(\vec{p}_1, s_1)$$

Аналогично, если воспользоваться уравнением движения  $\bar{u}(\vec{p}, s) (\hat{p} - Im) = 0$ , то:

$$\bar{u}(\vec{p}_1, s_1) \gamma_\nu \left( \hat{p}_1 + \hat{k}_1 + Im \right) = \bar{u}(p_1, s_1) \left( \gamma_\nu \hat{k}_1 + 2Ip_{1\nu} \right).$$

Тогда:

$$g(s, u, m^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}^2}{(s - m^2)(u - m^2)} Sp \left( (\hat{p}_1 + Im) \left( \gamma_\nu \hat{k}_1 \gamma_\mu + 2p_{1\nu} \gamma_\mu \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot (\hat{p}_2 + Im) \left( -\gamma^\nu \hat{k}_2 \gamma^\mu + 2p_2^\mu \gamma^\nu \right) \right) = \left| \text{оставляем следы только с} \right. \\ \left. \text{четными числами } \gamma\text{- матриц} \right| = \\ = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}^2}{(s - m^2)(u - m^2)} \left( -Sp \left( \hat{p}_1 \gamma_\nu \hat{k}_1 \gamma_\mu \hat{p}_2 \gamma^\nu \hat{k}_2 \gamma^\mu \right) + 2Sp \left( \hat{p}_1 \gamma_\nu \hat{k}_1 \hat{p}_1 \hat{p}_2 \gamma^\nu \right) - \right. \\ \left. - 2Sp \left( \hat{p}_1 \gamma_\mu \hat{p}_2 \hat{p}_1 \hat{k}_2 \gamma^\mu \right) + 4Sp \left( \hat{p}_1 \hat{p}_1 \hat{p}_2 \hat{p}_1 \right) - m^2 Sp \left( \gamma_\nu \hat{k}_1 \gamma_\mu \gamma^\nu \hat{k}_2 \gamma^\mu \right) + \right. \\ \left. + 2m^2 Sp \left( \gamma_\nu \hat{k}_1 \hat{p}_1 \gamma^\nu \right) - 2m^2 Sp \left( \gamma_\mu \hat{p}_1 \hat{k}_2 \gamma^\mu \right) + 4m^2 Sp \left( \hat{p}_1 \hat{p}_1 \right) \right) = \\ = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}^2}{(s - m^2)(u - m^2)} \left( -8(s + u) \cdot t + 8(s + u + m^2)t + 8m^2(s + u) - \right. \\ \left. - 8m^2(s + u - 2m^2) + 16m^2(s + u - 2m^2) + 16m^4 \right) \\ = \left| t = 2m^2 - s - 4 \right| = \frac{32\pi^2 \alpha_{em}^2 m^2}{(3 - m^2)(4 - m^2)} (s + 4 + 2m^2)$$

Для примера покажем вычисление некоторых из следов.

$$-Sp \left( \hat{p}_1 \gamma_\nu \hat{k}_1 \gamma_\mu \hat{p}_2 \gamma^\nu \hat{k}_2 \gamma^\mu \right) = 2Sp \left( \hat{p}_1 \hat{p}_2 \gamma_\mu \hat{k}_1 \hat{k}_2 \gamma^\mu \right) = \\ = 8(k_1 k_2) Sp(\hat{p}_1 \hat{p}_2) = 32(k_1 k_2)(p_1 p_2) = -8(s + u)t;$$

$$-m^2 Sp \left( \gamma_\nu \hat{k}_1 \gamma_\mu \gamma^\nu \hat{k}_2 \gamma^\mu \right) = -4m^2 k_{1\mu} Sp \left( \hat{k}_2 \gamma^\mu \right) = -4m^2 Sp \left( \hat{k}_2 \hat{k}_1 \right) = \\ = -16m^2(k_1 k_2) = -8m^2(s + u - 2m^2)$$

Остальные следы вычисляются аналогично.

Таким образом:

$$g(s, u, m^2) = \frac{32\pi^2 \alpha_{em}^2 m^2}{(s - m^2)(u - m^2)} [4m^2 + (s - m^2) + (u - m^2)].$$

**Четвертое слагаемое:** вычислять не нужно, т. к. оно получается из третьего заменой  $s \leftrightarrow u$ , т. е.:

$$g(u, s, m^2) = g(s, u, m^2).$$

## 28. Лекция 28. Эффект Комптона (продолжение)

### Вычисление сечения эффекта Комптона

Воспользуемся формулой (25.8) для  $\frac{d\sigma}{dt}$ . В этом случае:

$$1_i \equiv e^- (\vec{p}_1, s_1), \quad 2_i \equiv \gamma (\vec{k}_1, \lambda_1), \\ 1_f \equiv e^- (\vec{p}_2, s_2) \text{ и } 2_f \equiv \gamma (\vec{k}_2, \lambda_2).$$

Поскольку

$$m_{1_i}^2 = m^2 \text{ и } m_{2_i}^2 = 0 \Rightarrow (p_{1_i} p_{2_i})^2 - m_{1_i}^2 m_{2_i}^2 = (p_1 k_1)^2 = \frac{1}{4}(s - m^2)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\sigma_{e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma}}{dt} = \frac{|iM_{fi}|^2}{16\pi(s - m^2)^2}, \text{ где}$$

$$|iM_{fi}|^2 = \int (s, u, m^2) + \int (u, s, m^2) + 2g(s, u, m^2).$$

Тогда:

$$\frac{d\sigma_{e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma}}{dt} = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{(s - m^2)^2} \left[ \frac{4m^4}{(s - m^2)^2} - \frac{u - m^2}{s - m^2} + \frac{2m^2}{s - m^2} + \right. \\ \left. + \frac{4m^4}{(u - m^2)^2} - \frac{s - m^2}{u - m^2} + \frac{2m^2}{u - m^2} + \frac{8m^4}{(s - m^2)(u - m^2)} + \frac{2m^2}{s - m^2} + \frac{2m^2}{u - m^2} \right] = \\ = \frac{8\pi\alpha_{em}^2}{(s - m^2)^2} \left[ \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{s - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{s - m^2} \right) \right]$$

Обычно данное сечение выражают через **электромагнитный радиус** электрона  $r_e$ :

$$r_e = \frac{\alpha_{em}}{m}$$

Здесь:

$m$  - энергия покоя  $e^-$  в системе  $t_1 = c = 1$ ,

$\frac{\alpha_{em}}{r_e}$  - закон Кулона в хевисайдовской системе единиц. То есть:

$$\alpha_{em} = m r_e$$

Тогда:

$$\frac{d\sigma_{e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma}}{dt} = \frac{8\pi r_e^2 m^2}{(s - m^2)^2} \left[ \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{s - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{s - m^2} \right) \right]$$

Эту формулу можно проинтегрировать.

Из неравенства  $p_i^\mu p_{i\mu} \geq m_i m_j \Rightarrow (k_i p_j) \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2$ . Тогда для мандельштамовских переменных получаем следующие ограничения:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + k_1)^2 = m^2 + 2(p_1 k_1) \geq m^2 \\ t &= (k_1 - k_2)^2 = -2(k_1 k_2) \leq 0 \\ u &= (p_1 - k_2)^2 = m^2 - 2(p_1 k_2) \leq m^2 \end{aligned}$$

При фиксированном  $s$  находим, что:

$$u = 2m^2 - s - t \Rightarrow du = -dt$$

Нужно найти **границы интегрирования по  $u$**  при фиксированном  $s$ .

При вычислении сечения рассеяния  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  было найдено, что  $u \in (-\infty, m^2]$ . Однако при фиксированном  $s$  этот интервал меньше:

$$u \in [u_{\min}(s), u_{\max}(s)].$$

Границы интервала находятся из рассмотрения кинематики, например, в СЦМ:

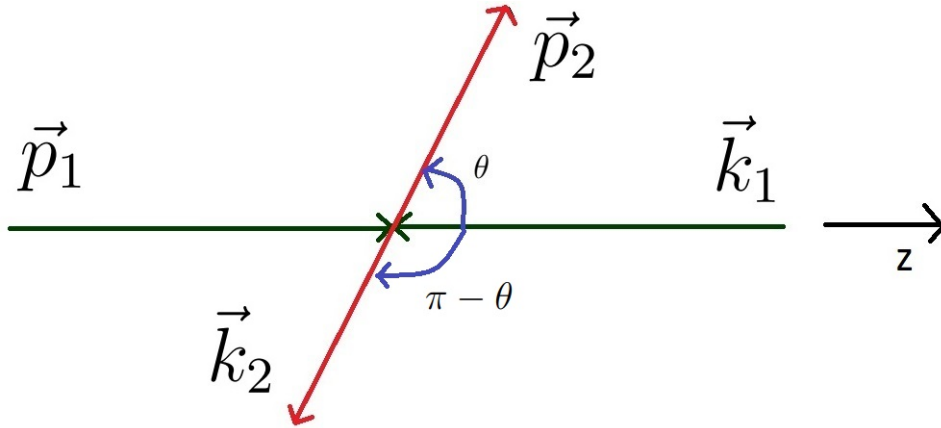


Рис. 28.1. Система центра масс  $e^- \gamma$

$$\begin{aligned} u &= (p_1 - k_2)^2 = m^2 - 2(p_1 k_2) = m^2 - 2\mathcal{E}_1 \omega_2 + 2|\vec{p}_1| |\vec{k}_2| \cos(\pi - \theta) = \\ &= m^2 - 2\omega_2 (\mathcal{E}_1 + |\vec{p}_1| \cos \theta), \end{aligned}$$

где  $p_1^\mu = (\mathcal{E}_1, \vec{p}_1)$ ,  $k_2^\mu = (\omega_2, \vec{k}_2)$  - 4-х импульсы начального электрона и конечного фотона.

Поскольку  $k_2^2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = |\vec{k}_2|$ , что было учтено выше:

$$|\vec{p}_1| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{\frac{1}{2}}(s, m^2, 0) = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}.$$

$$\text{Т. к. } p_1^2 = m^2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m^2} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{(s - m^2)^2 + 4sm^2} = \frac{2+m^2}{2\sqrt{s}}.$$

Аналогично:

$$\omega_2 = |\vec{k}_2| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, m^2, 0) \equiv |\vec{p}_1| = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}.$$

Тогда:

$$u = m^2 - \frac{s - m^2}{2s} (s + m^2 + (s - m^2) \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow us = sm^2 - \frac{1}{2} (s - m^2) (s(1 + \cos \theta) + m^2(1 - \cos \theta)), \quad s \geq m^2$$

Отсюда легко видеть, что:

$u_{\min}(s)$  достигается при  $\cos \theta = 1$ :

$$u_{\min}(s) \cdot s = sm^2 - \frac{1}{2} (s - m^2) \cdot 2s = (2m^2 - s) \cdot s$$

$U_{\max}(s)$  достигается при  $\cos \theta = -1$ :

$$u_{\max}(s) \cdot s = sm^2 - \frac{1}{2} (s - m^2) \cdot m^2 = m^4$$

Таким образом:

$$2m^2 - s \leq u(s) \leq \frac{m^4}{s}$$

Введем удобные для интегрирования переменные:

$$a = \frac{s - m^2}{m^2} \geq 0 \quad \text{и} \quad b = \frac{m^2 - u}{m^2}$$

Тогда:  $du = -m^2 db$  и пределы интегрирования равны:

$$b_{\min} = b(u_{\max}) = 1 - \frac{m^2}{s} = \frac{a}{a+1}; \quad b_{\max} = b(u_{\min}) = \frac{s - m^2}{m^2} = a$$

Тогда:

$$\sigma_{e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma} = \frac{8\pi r_e^2}{a^2} \int_{\frac{a}{a+1}}^a db \left[ \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{4} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right]$$

После простых, но громоздких вычислений, получаем окончательную формулу сечения рассеяния для эффекта Комптона:

$$\sigma_{e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma} = \frac{2\pi r_e^2}{a} \left[ \left( 1 - \frac{4}{a} - \frac{8}{a^2} \right) \ln(1+a) + \frac{1}{2} + \frac{8}{a} - \frac{1}{2(1+a)^2} \right]$$

## Нерелятивистский случай

$$\omega_{k_1} \sim \omega_{k_2} \ll m \Rightarrow s \sim m^2 \Rightarrow a \ll 1.$$

Тогда разлагая  $\ln(1+a)$  и  $\frac{1}{(1+a)^2}$  с точностью до  $a^3$ , получаем:

$$\sigma_{e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma}^{(н.р.)} \approx \frac{8\pi r_e^2}{3} (1-a)$$

Это классическая формула Томсона.



## Ультрарелятивистский случай

$m \rightarrow 0$ , но  $s$  не мало  $\Rightarrow a \gg 1$  :

$$\sigma_{e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma}^{(y.p.)} \approx \frac{2\pi r_e^2}{a} \left( \ln a + \frac{1}{2} \right)$$

Сечение падает с ростом  $\sqrt{s}$ .

## 29. Лекция 29. Примеры вычислений процессов. Часть 3.

### Аннигиляция $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

На древесном уровне в КЭД только **одна** диаграмма Фейнмана описывает рассматриваемый процесс:

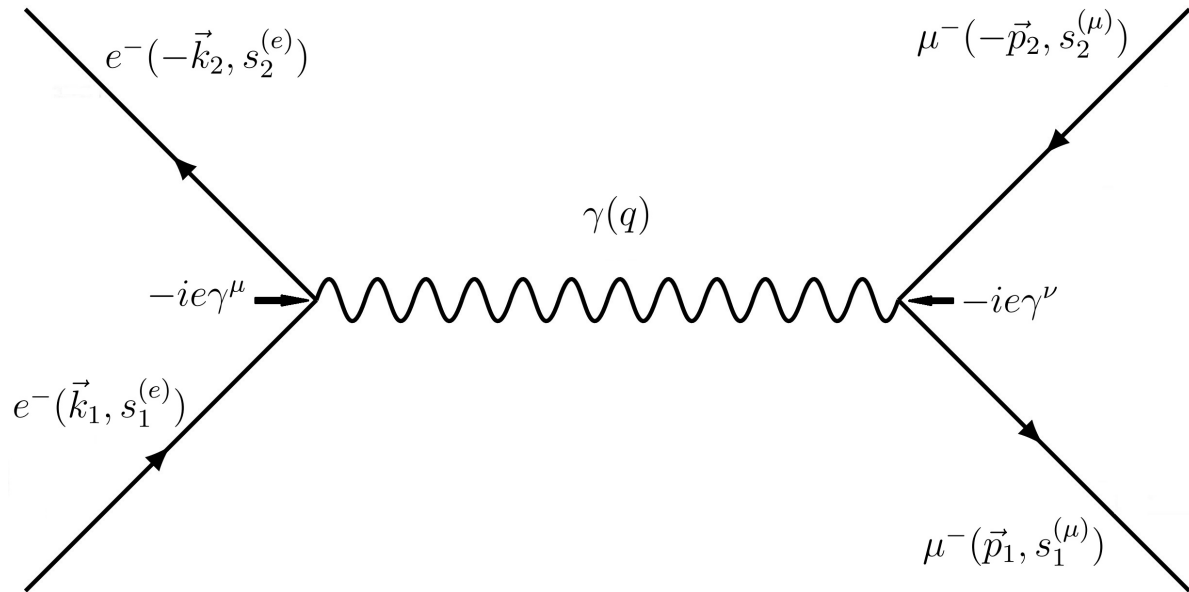


Рис. 29.1. Аннигиляция электрона и позитрона в мюон и антимюон

Кинематика:

$$k_1 + k_2 = q = p_1 + p_2, \quad k_i^\mu = (\mathcal{E}_i, \vec{k}_i), \quad p_i^\mu = (E_i, \vec{p}_i), \quad i = 1, 2$$

Введём мандельстамовские переменные:

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 = q^2 = (p_1 + p_2)^2; \\ t &= (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2; \\ u &= (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2 \end{aligned}$$

Нас будет интересовать только **ультрарелятивистский** случай, то есть:

$$k_1^2 = k_2^2 \approx p_1^2 = p_2^2 \approx 0 \Rightarrow s + t + u \approx 0$$

Выпишем всевозможные скалярные произведения 4-х векторов через мандельстамовские переменные  $s$  и  $t$ .

$$\begin{aligned} (k_1 k_2) &= (p_1 p_2) = \frac{s}{2}; \\ (k_1 p_1) &= (k_2 p_2) = -\frac{t}{2}; \\ (k_1 p_2) &= (k_2 p_1) = -\frac{u}{2} = \frac{s + t}{2} \end{aligned}$$

Обозначение:

биспиноры  $u, v$  - для  $e^-$   
биспиноры  $U, V$  - для  $\mu^-$

## Матричный элемент по правилам Фейнмана

$$\begin{aligned} iM_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} &= \bar{v}(\vec{k}_2, s_2^{(e)})(-ie\gamma^\mu)u(\vec{k}_1, s_1^{(e)}) \cdot (-i)\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\bar{U}(\vec{p}_1, s_1^{(\mu)})(-ie\gamma^\nu)V(\vec{p}_2, s_2^{(\mu)}) = \\ &= \frac{ie^2}{s}\bar{v}(\vec{k}_2, s_2^{(e)})\gamma^\mu u(k_1, s_1^{(e)})\bar{U}(\vec{p}_1, s_1^{(\mu)})\gamma_\mu V(\vec{p}_2, s_2^{(\mu)}) \end{aligned}$$

Комплексно-сопряжённый матричный элемент:

$$(iM_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-})^* = -\frac{ie^2}{s}\bar{V}(\vec{p}_2, s_2^{(\mu)})\gamma_{\mu'} U(\vec{p}_1, s_1^{(\mu)})\bar{u}(k_1, s_1^{(e)})\gamma^{\mu'} v(k_2, s_2^{(e)})$$

Пусть начальные и конечные пучки фермионов **не поляризованы**.

Тогда в  $|iM_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2$  нужно просуммировать по спинам конечных  $\mu^+, \mu^-$  и усреднить по спинам начальных  $e^+$  и  $e^-$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\substack{s_1^{(e)} s_2^{(e)} \\ s_1^{(\mu)} s_2^{(\mu)}}} |iM_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2 &= \frac{e^4}{4s^2} \underbrace{Sp(\hat{k}_2 \gamma^\mu \hat{k}_1 \gamma^{\mu'})}_{\text{от } e^+e^-} \underbrace{Sp(\hat{p}_2 \gamma_{\mu'} \hat{p}_1 \gamma_\mu)}_{\text{от } \mu^+\mu^-} = \left| \text{т.к. } e^2 = 4\pi\alpha_{em} \right| = \\ &= \frac{4\pi^2\alpha_{em}^2}{s^2} \cdot 4 \cdot (k_2^\mu k_1^{\mu'} - g^{\mu\mu'}(k_1 k_2) + k_2^{\mu'} k_1^\mu) \cdot 4 \cdot (p_{2\mu'} p_{1\mu} - g_{\mu\mu'}(p_1 p_2) + p_{2\mu} p_{1\mu'}) = \\ &= \frac{128\pi^2\alpha_{em}^2}{s^2} \left( (k_1 p_2)(k_2 p_1) + (k_1 p_1)(k_2 p_2) \right) = \frac{32\pi^2\alpha_{em}^2}{s^2} (s^2 + 2st + 2t^2) \end{aligned}$$

Такой же результат можно было получить, воспользовавшись кросс-симметрией и выражением матричного элемента для реакции  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  (26.9), сделав замену  $s \leftrightarrow t$ .

## Дифференциальное сечение

Дифференциальное сечение в СЦМ запишем используя формулу (25.5):

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{(\text{СЦМ})} = \frac{|iM_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2}{64\pi^2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} d\Omega$$

В СЦМ:

$$\begin{cases} \vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{p}_i \\ \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E} \\ E_1 = E_2 = E \end{cases}$$

Так как  $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_f = E_1 + E_2 \Rightarrow \mathcal{E}_i = 2\mathcal{E} = 2E \Rightarrow |\vec{p}_i| = \mathcal{E} = E = |\vec{p}_f|$

Фермионы в данной задаче мы считаем безмассовыми.

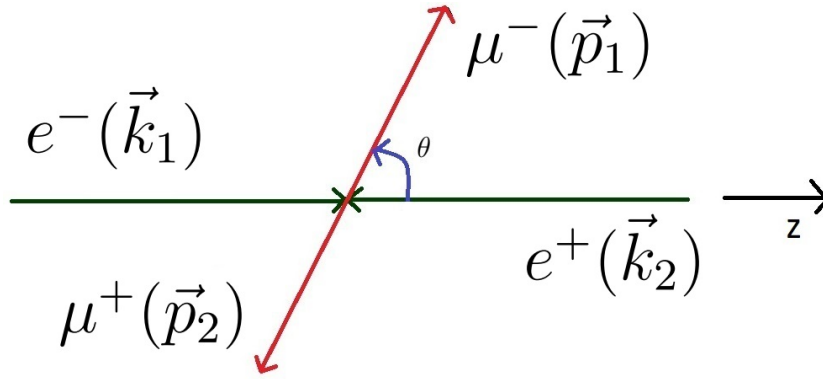


Рис. 29.2. Система центра масс  $e^+e^-$

Поскольку в СЦМ:  $k_1^\mu = (\mathcal{E}, 0, 0, \mathcal{E})$  и  $k_2^\mu = (\mathcal{E}, 0, 0, -\mathcal{E})$  (см рис. 29.2), то:

$$s = (k_1 + k_2)^2 = 2(k_1 k_2) = 2(\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}(-\mathcal{E})) = 4\mathcal{E}^2 \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = E = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = \frac{\sqrt{s}}{2} \Rightarrow \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E} = \sqrt{s}$$

Заметим, что  $|iM_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2$  не зависит от угла  $\varphi$ . Тогда можно по нему проинтегрировать от 0 до  $2\pi$ :  $d\Omega = d\cos\theta d\varphi = 2\pi d\cos\theta$  Тогда:

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{(\text{СЦМ})} = \frac{|iM_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}|^2}{32\pi s} d\cos\theta$$

Запишем дифференциальное сечение в мандельштамовских переменных. Для этого в СЦМ выразим  $\cos\theta$  через  $t$ .

$$t = (k_1 - p_1)^2 = k_1^2 + p_1^2 - 2(k_1 p_1) = -2(k_1 p_1) =$$

$$= -2(\mathcal{E}_1 E_1 - |\vec{k}_1| |\vec{p}_1| \cos\theta) = 2\mathcal{E}^2(\cos\theta - 1) = \frac{s}{2}(\cos\theta - 1)$$

При фиксированной  $s$  (то есть фиксированной энергии сталкивающихся фермионов в СЦМ):

$$d\cos\theta = \frac{2}{s} dt$$

Таким образом, в явном релятивистски-инвариантном виде:

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{(\text{СЦМ})} = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{s^4} (s^2 + 2st + 2t^2) dt \quad (29.1)$$

## Полное сечение

Проинтегрируем (29.1) по  $dt$ . Для этого сначала найдём границы интегрирования по  $dt$  при фиксированном  $s$ .

$$s = (k_1 + k_2)^2 = 2(k_1 k_2) \geq 0;$$

$$u = (p_1 - k_2)^2 = -2(p_1 k_2) \leq 0;$$

$$t = (p_1 - k_1)^2 = -2(p_1 k_1) \leq 0 \Rightarrow t_{max} = 0$$

При фиксированном  $s$ :  $t = -s - u \geq -s \Rightarrow t_{min} = -s$  Тогда:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{(СЦМ)}(s) = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{s^4} \int_{-s}^0 (s^2 + 2st + 2t^2) dt = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{s^4} \left( s^2t + st^2 + \frac{2}{3}t^3 \right) \Big|_{-s}^0 = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s}$$

Таким образом:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{(СЦМ)}(s) = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s}$$

Это одна из самых популярных формул в физике элементарных частиц.

### Электрон-позитронная аннигиляция в адроны

Данный расчёт имеет много общего с вычислением сечения  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  с точки зрения КЭД в низшем порядке теории возмущений по электромагнитному взаимодействию. Кинематика:

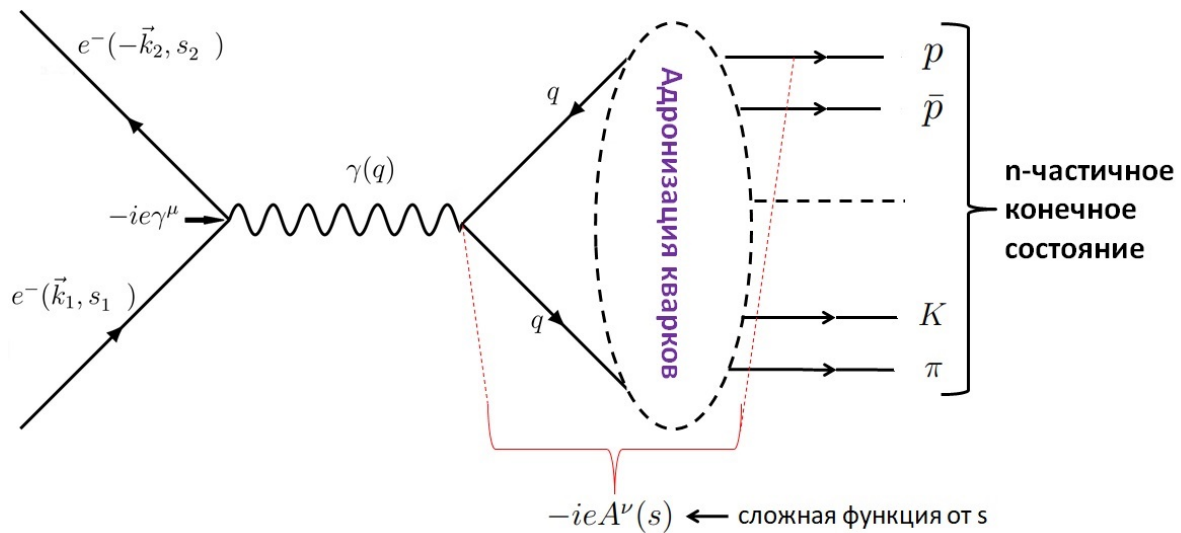


Рис. 29.3. Диаграмма Фейнмана, описывающая аннигиляцию электрон-позитронной пары в адроны

$$k_1 + k_2 = q = \sum_{f=1}^n P_f;$$

$$k_1^2 + k_2^2 \approx 0 \text{ - ультрарелятивистский случай;}$$

$$s = q^2 = (k_1 + k_2)^2 \Rightarrow (k_1 k_2) = \frac{s}{2}$$

## Матричный элемент по правилам Фейнмана

$$iM_{e^+e^- \rightarrow hadrons} = \bar{v}(\vec{k}_2, s_2)(-ie\gamma^\mu)u(\vec{k}_1, s_1) \frac{(-i)g_{\mu\nu}}{q^2}(-ieA^\nu(s))$$

где по определению:

$$A^\nu(s) = \langle hadrons | J_{em}^\nu | 0 \rangle$$

Пусть начальные пучки электронов и позитронов не поляризованы, тогда  $|iM_{e^+e^- \rightarrow hadrons}|^2$  нужно усреднить по спинам  $e^-$  и  $e^+$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} |iM_{e^+e^- \rightarrow hadrons}|^2 &= \frac{e^4}{4s} Sp \left( \hat{k}_2 \gamma^\mu \hat{k}_1 \gamma^{\mu'} \right) A_\mu(s) A_{\mu'}^*(s) = \\ &= \frac{4\pi^2 \alpha_{em}^2}{s^2} \cdot 4 \left( k_2^\mu k_1^{\mu'} - g^{\mu\mu'} (k_1 k_2) + k_2^{\mu'} k_1^\mu \right) A_\mu(s) A_{\mu'}^*(s) \end{aligned}$$

В силу калибровочной инвариантности функция

$$\Pi_{\mu\mu'}(s) = \int d\Phi_n A_\mu(s) A_{\mu'}^*(s)$$

должна быть поперечной по  $q^\mu$  то есть:

$$\Pi_{\mu\mu'}(s)q^\mu = \Pi_{\mu\mu'}(s)q^{\mu'} = 0 \Rightarrow \Pi_{\mu\mu'}(s) = \rho(s) \cdot (q_\mu q_{\mu'} - s g_{\mu\mu'})$$

## Полное сечение

Согласно общей формуле (25.2):

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow hadrons} &= \int d\Phi_n \frac{|iM_{e^+e^- \rightarrow hadrons}|^2}{4(k_1 k_2)} = \\ &= \frac{8\pi^2 \alpha_{em}^2}{s^3} (k_2^\mu k_1^{\mu'} - g^{\mu\mu'} (k_1 k_2) + k_2^{\mu'} k_1^\mu) \int d\Phi_n A_\mu(s) A_{\mu'}(s) = \\ &= \frac{8\pi^2 \alpha_{em}^2}{s^3} \cdot \rho(s) \cdot (k_2^\mu k_1^{\mu'} - g^{\mu\mu'} (k_1 k_2) + k_2^{\mu'} k_1^\mu) \cdot (q_\mu q_{\mu'} - s g_{\mu\mu'}) = \\ &= \frac{8\pi^2 \alpha_{em}^2}{s^3} \cdot \rho(s) \cdot (2(k_1 q)(k_2 q) + 2s(k_1 k_2) - q^2(k_1 k_2)) = \frac{8\pi^2 \alpha_{em}^2}{s} \rho(s) \end{aligned}$$

Введём величину (измеряется экспериментально):

$$R(s) = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow hadrons}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} = 6\pi \rho(s)$$

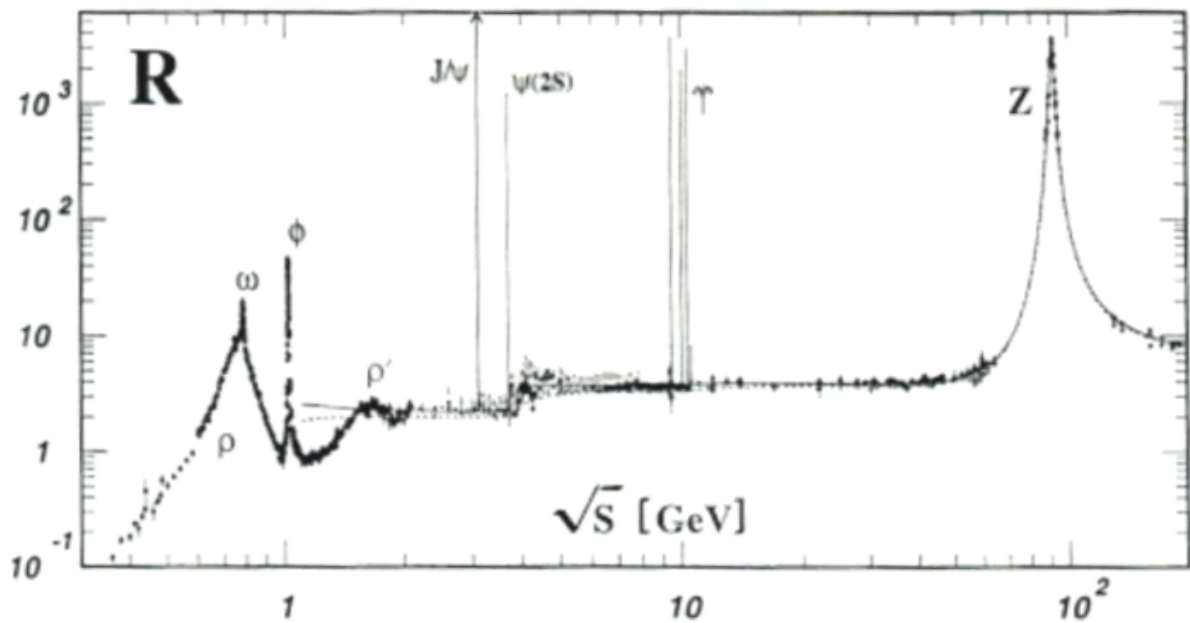


Рис. 29.4. Функция  $R(s)$

## Заряды кварков

В силу кварк-адронной дуальности, функция  $\rho(s)$  вдали от резонансов должна полностью определяться реакцией

$$e^+e^- \rightarrow \sum_f q_f \bar{q}_f \Big|_{\sqrt{s} \geq 2m_{q_f}}$$

Для  $e^-$ ,  $\mu^-$ ,  $\tau^-$  гамильтониан взаимодействия в КЭД имеет вид:

$$\mathcal{H}_l^{int}(x) = e (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi)_N A_\mu(x) = Q_{l^-} |e| (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi)_N A_\mu(x)$$

где  $Q_{l^-} = -1$  - заряд лептона в единицах  $|e|$ .

Обобщаем для электромагнитного взаимодействия кварков:

$$\mathcal{H}_l^{int}(x) = Q_q |e| (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi)_N A_\mu(x)$$

$$u, c, t : Q_q = +\frac{2}{3};$$

$$d, s, b : Q_q = -\frac{1}{3}$$

Тогда:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s} Q_q^2 N_c$$

где  $N_c = 3$  - количество цветов кварков. Отсюда следует, что вдали от резонансов:

$$R(s) \approx \frac{\sum_f \sigma_{e^+e^- \rightarrow hadrons} \Big|_{\sqrt{s} \geq 2m_{qf}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} = N_c \sum_f Q_{qf}^2 \Big|_{\sqrt{s} \geq 2m_{qf}}$$

Пример: Как был определён заряд  $b$ -кварка? 1977 г.: Коллаборация CFS, возглавляемая Л.Ледерманом на 400 ГэВ-ном протонном ускорителе во FNAL открыла узкие  $\Upsilon(1S)$  и  $\Upsilon(2S)$  мезоны.

$$p(400\text{ГэВ}) + \{\text{неподвижная мишень Be, Cu, Pt}\} \rightarrow X \mu^+ \mu^- \rightarrow X \Upsilon(1S) \Upsilon(2S)$$

Эти мезоны интерпретировались как связанные состояния нового  $b$ -кварка:

$$\{\Upsilon(1S) \Upsilon(2S)\} = b\bar{b} \Rightarrow 0 = Q_\Upsilon = Q_b + Q_{\bar{b}}$$

Но какова величина  $Q_b$  из опытов Л.Ледермана определить было нельзя. 1979 г.:  $e^+e^-$ -коллайдер PETRA (DESY, Германия)

$$\sqrt{s_{max}} = 36\text{ГэВ} > 2m_b \approx 10\text{ГэВ}$$

Стало возможным определить заряд  $b$ -кварка из измерения  $R(s)$ :

а) если  $b$ -верхний кварк (как  $u$  и  $c$ ), то  $Q_b = +\frac{2}{3}$

$$R(s)^{Q_b=+\frac{2}{3}} = N_c (Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2 + Q_c^2 + Q_b^2) = 4\frac{2}{3}$$

б) если  $b$ -нижний кварк (как  $d$  и  $s$ ), то  $Q_b = -\frac{1}{3}$

$$R(s)^{Q_b=-\frac{1}{3}} = N_c (Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2 + Q_c^2 + Q_b^2) = 3\frac{2}{3}$$

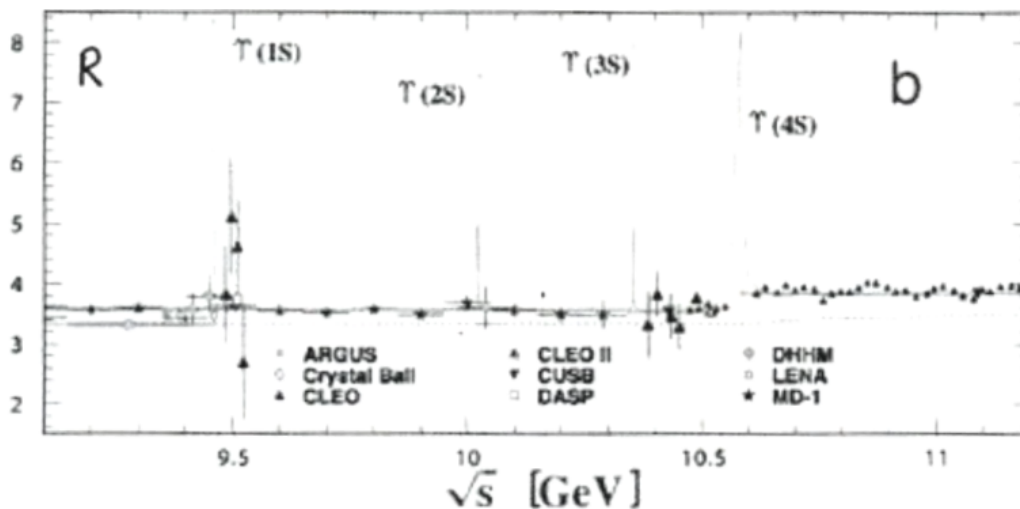


Рис. 29.5. Результаты эксперимента DESY



Данные эксперимента (см. 29.5) однозначно свидетельствуют, что

$$R(s) \Big|_{\sqrt{s} > 2m_b < 4} \Rightarrow Q_b = -\frac{1}{3}$$

### $e^+e^-$ - аннигиляция вблизи резонансов

Вопрос: На рис. (29.4) величина  $R(S)$  имеет острые пики в области резонансов в  $b\bar{b}$ -системе. Как их описать?

Ответ: Только феноменологически, например, опираясь на гипотезу доминантности векторным мезонам и формулу Брейта-Вигнера.

Фотон имеет следующие квантовые числа:  $J_\gamma^{PC} = 1^{--}$ .

Существует большой класс адронов (векторные мезоны), которые обладают теми же квантовыми числами, что и фотон:

$$\rho^0 = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}; \omega^0 = \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}}; \varphi = s\bar{s}; J/\psi = c\bar{c}; \Upsilon(1S) = b\bar{b}, \dots, \Upsilon(4S) = b\bar{b}.$$

Гипотеза доминантности векторных мезонов: При  $\sqrt{s} \approx M_V$  аннигиляция  $e^+e^-$ -пары в адроны преимущественно идет за счет образования векторного мезона  $V$ .

Пример: в области  $\sqrt{s} \in [9.4; 11.0]$  ГэВ:

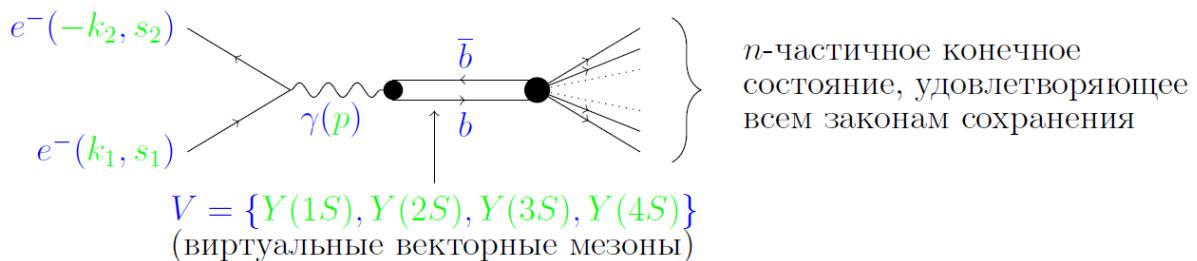


Рис. 29.6. Аннигиляция  $e^+e^-$ -пары в адроны путём образования векторного мезона

Тогда при  $\sqrt{s} \approx M_V$  можно воспользоваться формулой Брейта-Вигнера (так как векторный мезон - нерелятивистский):

$$R_{res}(s) = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow V \rightarrow hadrons}(s)}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s)} \approx \frac{\Gamma_{ee}}{\alpha_{em}^2} \frac{\Gamma_V M_V^2}{(s - M_V^2)^2 + M_V^2 \Gamma_V^2}$$

где:  $\Gamma_V$  - полная ширина распада векторного мезона;  
 $\Gamma_{ee}$  - ширина распада  $V \rightarrow e^+e^-$ .

## 30. Лекция 30. Процессы во внешнем поле. Часть 1.

### Рассеяние электрона в поле ядра

Если рассматривать не только квантовое ( $A_\mu(x)$ ), но и внешнее классическое электромагнитное поле ( $A_\mu^{ext}(x)$ ), то гамильтониан взаимодействия модифицируется следующим образом:

$$\mathcal{H}^{int}(x) = e \left( \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \right)_N \left( A_\mu(x) + A_\mu^{ext}(x) \right),$$

где  $A_\mu^{ext}(x)$  - 4-х потенциал внешнего классического электромагнитного поля.

Вопрос: Какую структуру в правилах Фейнмана необходимо сопоставить вкладу  $A_\mu^{ext}(x)$ ?

Ответ: Фурье-образ потенциала, то есть:

$$A_\mu^{ext}(q) = \int d^4x e^{i(qx)} A_\mu^{ext}(x)$$

Действительно, рассмотрим рассеяние электрона на внешнем потенциале в 1-м порядке теории возмущений. Для этого процесса можем нарисовать следующую диаграмму:

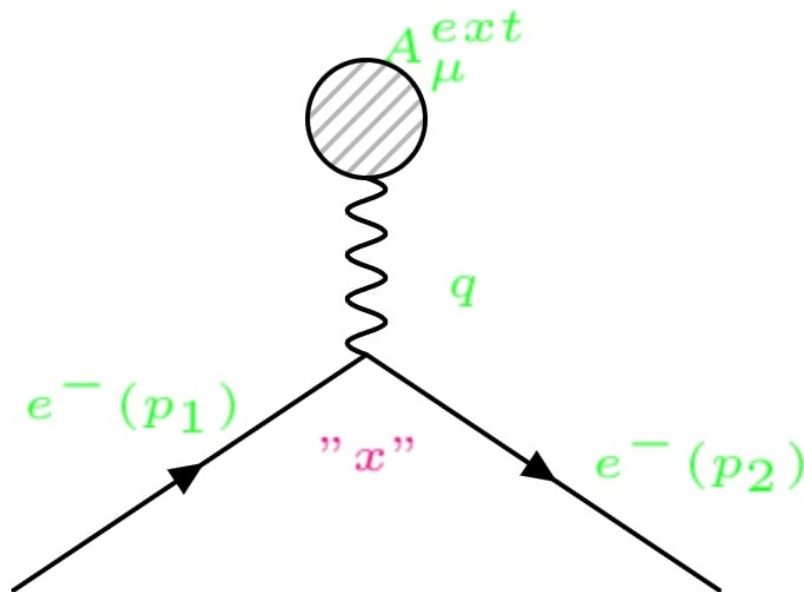


Рис. 30.1. Рассеяние  $e^-$  на внешнем потенциале

В 1-м порядке теории возмущений:

$$S^{(1)} = -i \int d^4x \mathcal{H}^{int}(x)$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 \langle f|S^{(1)}|i\rangle &= -ie \int d^4x \langle 1e_{p_2 s_2}^- | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) | 1e_{p_1 s_1}^- \rangle \langle 0\gamma | A_\mu^{ext}(x) | 0\gamma \rangle = \\
 &= -ie \int d^4x \frac{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} e^{i(p_2 x)} \gamma^\mu \frac{u(\vec{p}_1, s_1)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} e^{-i(p_1 x)} A_\mu^{ext}(x) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) u(\vec{p}_1, s_1) \int d^4x e^{ix(p_2 - p_1)} A_\mu^{ext}(x) \\
 &= \frac{\bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) u(\vec{p}_1, s_1)}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1} \varepsilon_{p_2}}} A_\mu^{ext}(q), \quad \text{где } q = p_2 - p_1
 \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Теперь рассмотрим простейший пример: рассеяние электрона на кулоновском поле неподвижного ядра с зарядом  $Ze$ . В этом случае 4-х потенциал:

$$A_\mu^{ext}(x) = (\varphi(\vec{x}), \vec{0}),$$

где кулоновский потенциал  $\varphi(\vec{x})$  не зависит от времени (поэтому пишем  $\varphi(\vec{x})$ , а не  $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \vec{x})$ ) и для точечного ядра подчиняется следующему уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}) = -Ze\delta(\vec{x})$$

Это уравнение легко решается. Пусть

$$\varphi(\vec{x}) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \varphi(\vec{q}).$$

Тогда левая часть уравнения равна:

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = - \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} (\vec{q})^2 \varphi(\vec{q}).$$

Вспоминая интегральное представление  $\delta$ -функции, для правой части можно записать:

$$-Ze\delta(\vec{x}) = -Ze \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}}.$$

Тогда для фурье-компонент имеем:

$$(\vec{q})^2 \varphi(\vec{q}) = Ze \Rightarrow \varphi(\vec{q}) = \frac{Ze}{(\vec{q})^2}$$

С учетом этого результата:

$$A_\mu^{ext}(q) = \int e^{i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t} dt \left( \varphi(\vec{x}), \vec{0} \right) e^{-i\vec{q}\vec{x}} d\vec{x} = 2\pi\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( \varphi(\vec{q}), \vec{0} \right) = 2\pi\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( \frac{Ze}{(\vec{q})^2}, \vec{0} \right)$$

Окончательно амплитуду рассеяния электрона в кулоновском поле неподвижного ядра можно представить как:

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = \frac{iM_{fi}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}2\varepsilon_{p_2}}}2\pi\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1),$$

$$iM_{fi} = \frac{Ze^2}{(\vec{q})^2}(\vec{p}_2, s_2)\gamma^0 u(\vec{p}_1, s_1)$$

Очевидно, что данный процесс отличается от всех предыдущих. Поскольку ядро покоится, то **сохраняется только энергия, но не импульс**. Это учтено при помощи множителя  $2\pi\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ .

Поэтому все формулы для сечений и вероятностей необходимо выводить заново.

Вероятность перехода в единицу времени:

$$d\omega_{fi} = \frac{1}{T_0}|\langle f|S^{(1)}|i\rangle|^2 \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3} = \left| \text{т.к. } 2\pi\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right|^2 = T_0 2\pi\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left| = \right.$$

$$= \frac{|iM_{fi}|^2}{2\varepsilon_1} 2\pi\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_2} = \left| \text{т.к. } d\vec{p}_2 = |\vec{p}_2| \varepsilon_2 d\varepsilon_2 d\Omega \right| =$$

$$= \frac{|iM_{fi}|^2}{2\varepsilon_1} 2\pi\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{|\vec{p}_2| d\varepsilon_2 d\Omega_2}{2(2\pi)^3} = \frac{|iM_{fi}|^2}{4(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}_2|}{\varepsilon_2} d\Omega_2 = |iM_{fi}|^2 |\vec{v}_2| d\Omega_2 \frac{1}{16\pi^2}$$

Сечение процесса определяется по формуле (25.1):

$$d\sigma_{fi} = \frac{d\omega_{fi}}{j}$$

Для рассматриваемого процесса  $j = |\vec{v}_2|$ . Тогда:

$$d\sigma_{fi} = \frac{1}{16\pi^2} |iM_{fi}|^2 d\Omega_2 \Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2 \Rightarrow |\vec{p}_1|=|\vec{p}_2|}$$

Вычислим  $|iM_{fi}|^2$ . Усредняя по поляризации начального электрона и суммируя по спинам конечного, получаем:

$$\frac{(\vec{q})^4}{Z^2 e^4} |iM_{fi}|^2 = \frac{1}{2} Sp(\gamma^0(\hat{p}_1 + Im)\gamma_0(\hat{p}_2 + Im)) = \frac{1}{2} [Sp(\gamma^0 \hat{p}_1 \gamma_0 \hat{p}_2) + m^2 Sp(\gamma^0 \gamma_0)] =$$

$$= 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - (p_1 p_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + m^2) = 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 + |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \theta_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + m^2) =$$

$$= \left| \text{т.к. } \varepsilon_1 = \varepsilon_2, |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \right| = 2(\varepsilon_2^2 + m^2 + |\vec{p}_2|^2 \cos \theta_2) = \left| \text{т.к. } m^2 = \varepsilon_2^2 - |\vec{p}_2|^2 \right| =$$

$$= 2(2\varepsilon_2^2 - |\vec{p}_2|^2 (1 - \cos \theta_2)) = 4(\varepsilon_2^2 - |\vec{p}_2|^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}) = \left| \text{т.к. } |\vec{v}_2| = \frac{|\vec{p}_2|}{\varepsilon_2} \right| =$$

$$= 4\varepsilon_2^2 (1 - |\vec{v}_2|^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2})$$

Таким образом:

$$|iM_{fi}|^2 = \frac{4Z^2 e^4}{(\vec{q})^4} \varepsilon_2^2 \left(1 - |\vec{v}_2|^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}\right)$$

Далее:

$$(\vec{q})^2 = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2 = \left| \text{т.к. } |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| \right| = 2|\vec{p}_2|^2 (1 - \cos \theta_2) = 4|\vec{p}_2|^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}$$

Подставляем эти результаты в формулу для дифференциального сечения и имеем:

$$d\sigma_{fi} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{2Z^2 e^4}{16|\vec{p}_2|^4 \sin^4 \frac{\theta_2}{2}} \varepsilon_2^2 \left(1 - |\vec{v}_2|^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}\right).$$

Учтя, что:  $e^2 = 4\pi\alpha_{em}$ , окончательно имеем:

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_2} = \frac{Z^2 \alpha_{em}^2}{4} \frac{\varepsilon_2^2}{|\vec{p}_2|^4} \frac{1 - |\vec{v}_2|^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}}{\sin^4 \frac{\theta_2}{2}}.$$

**Ультррелятивистский случай:**

$$\begin{aligned} |\vec{p}_2| &= \varepsilon_2, \\ |\vec{v}_2| &= 1 \end{aligned}$$

Тогда получаем **формулу Мотта**:

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_2} = \frac{Z^2 \alpha_{em}^2 \cos^2 \frac{\theta_2}{2}}{4\varepsilon_2^2 \sin^4 \frac{\theta_2}{2}} \quad (30.1)$$

с полюсом при  $\theta_2 \rightarrow 0$ .

**Нерелятивистский случай:**

$\varepsilon_2 \approx m$  и  $|\vec{p}_2| \approx m|\vec{v}_2|$ . Кроме того:  $1 - |\vec{v}_2|^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \approx 1$ , поскольку  $|\vec{v}_2| \ll 1$ . Определим кинетическую энергию электрона по формуле:

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_2|^2$$

Тогда:

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha_{em}^2}{4m^2 |\vec{v}_2|^4 \sin^4 \frac{\theta_2}{2}} = \left( \frac{Z \alpha_{em}}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta_2}{2}}$$

Это классическая **формула Резерфорда**.

## Упругое рассеяние ультрарелятивистского электрона на протоне

### Диаграмма Фейнмана для процесса

Наша реакция:  $e^-(\vec{k}_1, s_1^{(e)})P(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) \rightarrow e^-(\vec{k}_2, s_2^{(e)})P(\vec{p}_2, s_2^{(P)})$

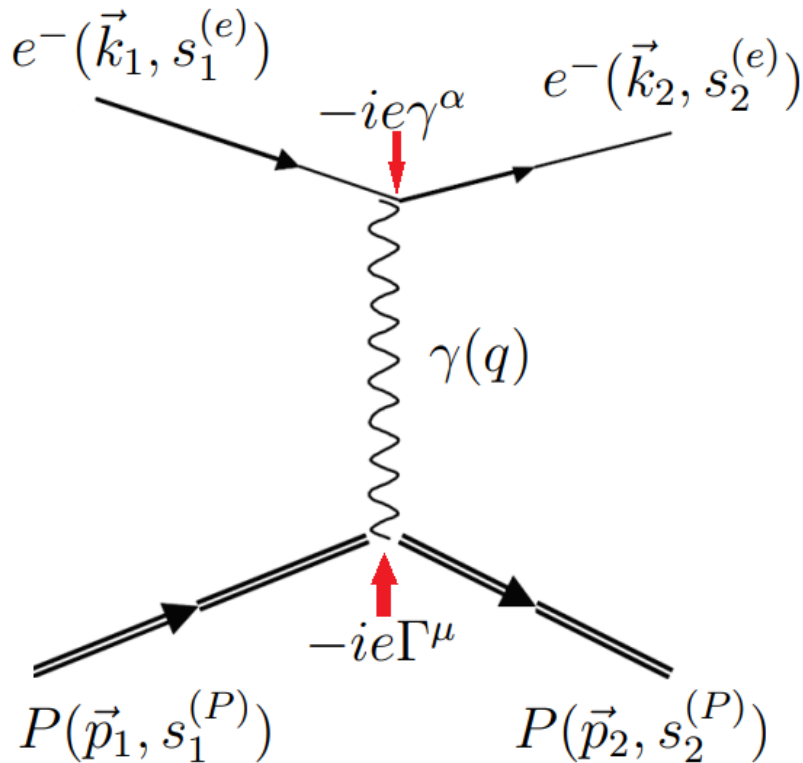


Рис. 30.2. Диаграмма Фейнмана, описывающая рассеяние электрона на протоне

Кинематика:

$$\begin{aligned} k_1 + p_1 &= k_2 + p_2; \\ k_1^2 &= k_2^2 = m^2, \quad \text{где } m \text{ - масса электрона} \\ p_1^2 &= p_2^2 = M^2, \quad \text{где } M \text{ - масса протона} \end{aligned}$$

Введём:

$$\begin{aligned} q^\mu &= p_2^\mu - p_1^\mu = k_1^\mu - k_2^\mu; \\ p^\mu &= p_2^\mu + p_1^\mu; \\ k^\mu &= k_1^\mu + k_2^\mu \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} (pq) = 0, \quad (kq) = 0, \quad \begin{cases} k_1^\mu = \frac{1}{2}(k^\mu + q^\mu) \\ k_2^\mu = \frac{1}{2}(k^\mu - q^\mu) \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1^\mu = \frac{1}{2}(p^\mu - q^\mu) \\ p_2^\mu = \frac{1}{2}(p^\mu + q^\mu) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow p_1^\mu p_2^{\mu'} + p_1^{\mu'} p_2^\mu = \frac{p^\mu p^{\mu'} - q^\mu q^{\mu'}}{2} \end{aligned}$$

Действительно:

$$(pq) = (p_1 + p_2)^\mu (p_2 - p_1)^\mu = p_2^2 - p_1^2 = M^2 - M^2 = 0$$

Аналогично для  $(kq)$ .

Мандельстамовские переменные:

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + p_1)^2 = (k_2 + p_2)^2; \\ t &= (k_1 - k_2)^2 = (p_2 - p_1)^2 = q^2 = 2m^2 - 2(k_1 k_2) = 2M^2 - 2(p_1 p_2); \\ u &= (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2; \\ s + t + u &= 2M^2 + 2m^2 \end{aligned}$$

Скалярные произведения:

$$\begin{aligned} (k_1 p_1) &= (k_2 p_2) = \frac{1}{2}(s - M^2 - m^2); \\ (k_1 p_2) &= (k_2 p_1) = \frac{1}{2}(m^2 + M^2 - u); \\ (k_1 k_2) &= m^2 - \frac{t}{2} = m^2 - \frac{q^2}{2}; \\ (p_1 p_2) &= M^2 - \frac{t}{2} = M^2 - \frac{q^2}{2} \end{aligned}$$

## Матричный элемент по правилам Фейнмана

Пусть:

$$\begin{aligned} u(\dots) \quad \text{и} \quad \bar{u}(\dots) &- \text{ для } e^- \\ U(\dots) \quad \text{и} \quad \bar{U}(\dots) &- \text{ для } P \end{aligned}$$

Напишем матричный элемент:

$$\begin{aligned} iM_{fi} &= \bar{u}(\vec{k}_2, s_2^{(e)}) (-ie\gamma^\alpha) u(\vec{k}_1, s_1^{(e)}) \cdot (-i) \frac{g_{\alpha\mu}}{q^2} \cdot \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) (-ie\Gamma^\mu) U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \\ &= \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(\vec{k}_2, s_2^{(e)}) \gamma_\mu u(\vec{k}_1, s_1^{(e)}) \underbrace{\bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \cdot \Gamma^\mu \cdot U(\vec{p}_1, s_1^{(P)})}_{=J_{em P}^\mu - \text{ протонный ЭМ ток}} \end{aligned}$$

## Структура протонной вершины

Так как фурье компонента тока поперечна:  $q_\mu J_{em P}^\mu = 0$ .

$$\begin{aligned} J_{em P}^\mu &= \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \cdot \Gamma^\mu \cdot U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) \\ q_\mu J_{em P}^\mu &= 0 \end{aligned}$$

Сконструируем  $\Gamma^\mu$  из 4-х векторов, относящихся к протону.

Используем:  $p_1^\mu, p_2^\mu, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} p_{1(2)\nu}$ .

Тогда:

$$\Gamma^\mu = A\gamma^\mu + B_1 p_1^\mu I + B_2 p_2^\mu I + iD_1 p_{1\nu} \sigma^{\mu\nu} + iD_2 p_{2\nu} \sigma^{\mu\nu}$$

Условие поперечности:

$$\begin{aligned} 0 &= q_\mu J_{em P}^\mu = \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})(q\Gamma)U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \\ &= \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \left( A\hat{q} + B_1(p_1 q)I + B_2(p_2 q)I + iD_1 q_\mu p_{1\nu} \sigma^{\mu\nu} + iD_2 q_\mu p_{2\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) \end{aligned}$$

где

$$(p_1 q) = (p_1 p_2) - M^2 = M^2 - \frac{q^2}{2} - M^2 = -\frac{q^2}{2};$$

$$(p_2 q) = +\frac{q^2}{2};$$

$$q_\mu p_{1\nu} \sigma^{\mu\nu} = (p_{2\mu} - p_{1\mu})p_{1\nu} \sigma^{\mu\nu} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к } p_{1\mu} p_{1\nu} - \text{симм. тензор, а} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma^{\mu\nu} - \text{антисимм. тензор} \end{array} \right| = p_{2\mu} p_{1\nu} \sigma^{\mu\nu} = \left| \begin{array}{l} \text{переопределение: } \mu \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \mu \end{array} \right| =$$

$$= p_{2\nu} p_{1\mu} \sigma^{\nu\mu} = -p_{1\mu} p_{2\nu} \sigma^{\mu\nu};$$

$$q_\mu p_{2\nu} \sigma^{\mu\nu} = -p_{1\mu} p_{2\nu} \sigma^{\mu\nu};$$

Тогда:

$$\begin{aligned} 0 &= q_\mu J_{em P}^\mu = \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})(q\Gamma)U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \\ &= \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \left( A\hat{q} + I(B_2 - B_1)\frac{q^2}{2} - i(D_1 + D_2)p_{1\mu} p_{2\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) \end{aligned}$$

Уравнения движения:

$$\hat{p}_1 U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = M \cdot U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}); \quad (30.2)$$

$$\bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \hat{p}_2 = \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \cdot M \quad (30.3)$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \hat{q} U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) &= \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) (\hat{p}_1 - \hat{p}_1) U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \\ &= \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \cdot M \cdot U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) - \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \cdot M \cdot U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = 0 \end{aligned}$$

Это следствие поперечности электромагнитного тока.

Таким образом мы занулили слагаемое  $A\hat{q}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= q_\mu J_{em P}^\mu = \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})(q\Gamma)U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \\ &= \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \left( I(B_2 - B_1)\frac{q^2}{2} - i(D_1 + D_2)p_{1\mu} p_{2\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) \end{aligned}$$



Это может равняться нулю только тогда, когда:

$$\begin{cases} B_1 = B_2 = B \\ D_2 = -D_1 = D \end{cases}$$

Итого:

$$\Gamma^\mu = A\gamma^\mu + B(p_1^\mu + p_2^\mu)I + iD(p_{2\nu} - p_{1\nu})\sigma^{\mu\nu} = A\gamma^\mu + Bp^\mu I + iDq_\nu\sigma^{\mu\nu}$$

Теперь рассмотрим:

$$\begin{aligned} \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})(i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) &= -\frac{1}{2}\bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})\left[(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(p_{2\nu} - p_{1\nu})\right]U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \\ &= -\frac{1}{2}\bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})\left[\gamma^\mu\hat{p}_2 - \hat{p}_2\gamma^\mu - \gamma^\mu\hat{p}_1 + \hat{p}_1\gamma^\mu\right]U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \\ &= -\frac{1}{2}\bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})\left[-2\hat{p}_2\gamma^\mu + 2p_2^\mu I - 2\gamma^\mu\hat{p}_1 + 2p_1^\mu I\right]U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \\ &= \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})\left[\hat{p}_2\gamma^\mu - p_2^\mu I + \gamma^\mu\hat{p}_1 - p_1^\mu I\right]U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \left| \text{используем (30.2),(30.3)} \right| = \\ &= -\bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})(p_1^\mu + p_2^\mu)U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) + 2M\bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})\gamma^\mu U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) = \\ &= -\bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})p^\mu U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) + 2M\bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)})\gamma^\mu U(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) \end{aligned}$$

Значит мы можем сделать замену в обкладках 4-х компонентных спиноров:

$$Ip^\mu \rightarrow 2M\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (30.4)$$

Тогда, используя (30.4):

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= A\gamma^\mu + 2MB\gamma^\mu - iB\sigma^{\mu\nu}q_\nu + iD\sigma^{\mu\nu}q_\nu = A + 2MB\gamma^\mu + i(D - B)\sigma^{\mu\nu}q_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} F_1(q^2)\gamma^\mu + i\frac{F_2(q^2)}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu \end{aligned}$$

## Электромагнитные формфакторы

Итого:

$$\Gamma^\mu = F_1(q^2)\gamma^\mu + i\frac{F_2(q^2)}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (30.5)$$

$F_1(q^2)$ ,  $F_2(q^2)$  - электромагнитные формфакторы,

$F_1(q^2)$  - фурье образ плотности распределения электрического заряда внутри протона в единицах  $e$ :

$$|e|F_1(\vec{q}) = |e| \int d\vec{r} e^{-i\vec{q}\vec{r}} F_1(\vec{r})$$

условие нормировки:

$$F_1(0) = \int F_1(\vec{r}) d\vec{r} = 1$$

$F_2(q^2)$  - фурье образ функции распределения аномального магнитного момента протона в единицах магнетона Бора.

$$\frac{|e|}{2M} F_2(\vec{q}) = \frac{|e|}{2M} \int d\vec{r} e^{-i(\vec{q}\vec{r})} F_2(\vec{r})$$

условие нормировки:

$$F_2(0) = \int F_2(\vec{r}) d\vec{r} = 2.79 - 1 = 1.79$$

где число 1.79 - аномальный магнитный момент протона

Если бы вместо протона мы рассматривали нейтрон, то

$$F_1^{(n)}(0) = 0 \quad \text{и} \quad F_2^{(n)}(0) = -1.91$$

## 31. Лекция 31. Процессы во внешнем поле. Часть 2.

### Дифференциальное сечение ультрарелятивистского электрона на протоне

Из (30.4) следует, что возможна также и следующая замена:

$$i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \rightarrow 2M\gamma^\mu - Ip^\mu \quad (31.1)$$

Используя (31.1) запишем:

$$\Gamma^\mu = (F_1 + 2M\frac{F_2}{2M})\gamma^\mu - \frac{F_2}{2M}p^\mu = (F_1 + F_2)\gamma^\mu - \frac{F_2}{2M}p^\mu$$

Введём:

$$A(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2) \quad (31.2)$$

$$B(q^2) = -\frac{F_2}{2M} \quad (31.3)$$

Тогда:

$$\Gamma^\mu = A(q^2)\gamma^\mu + B(q^2)p^\mu I \quad (31.4)$$

Матричный элемент из прошлой лекции:

$$iM_{fi} = \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(\vec{k}_2, s_2^{(e)}) \gamma_\mu u(\vec{k}_1, s_1^{(e)}) \bar{U}(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \cdot \Gamma^\mu \cdot U(\vec{p}_1, s_1^{(P)})$$

Комплексно-сопряжённый к нему:

$$(iM_{fi})^* = (iM_{fi})^\dagger = -\frac{ie^2}{q^2} \bar{U}(\vec{p}_1, s_1^{(P)}) \cdot \gamma^0 (\Gamma^{\mu'})^\dagger \gamma^0 \cdot U(\vec{p}_2, s_2^{(P)}) \bar{u}(\vec{k}_1, s_1^{(e)}) \gamma_{\mu'} u(\vec{k}_2, s_2^{(e)})$$

Вычислим:

$$\gamma^0 (\Gamma^{\mu'})^\dagger \gamma^0 = A^* \underbrace{\gamma^0 (\gamma^{\mu'})^\dagger \gamma^0}_{=\gamma^{\mu'}} + B^* p^{\mu'} \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{=I} = A^* \gamma^{\mu'} + B^* p^{\mu'} I = \bar{\Gamma}^{\mu'}$$

Получаем:

$$\bar{\Gamma}^{\mu'} = A^* \gamma^{\mu'} + B^* p^{\mu'} I \quad (31.5)$$

Вычислим квадрат модуля матричного элемента. Для этого усредним по спину начального электрона и протона.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\substack{s_1^{(e)}, s_1^{(P)} \\ s_2^{(e)}, s_2^{(P)}}} |iM_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} Sp \left( (\hat{k}_2 + Im) \gamma^\mu (\hat{k}_1 + Im) \gamma_{\mu'} \right) \cdot Sp \left( (\hat{p}_2 + Im) \Gamma^\mu (\hat{p}_1 + Im) \bar{\Gamma}^{\mu'} \right) = \\ &= \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\mu'} W^{\mu\mu'} \end{aligned}$$

где  $L_{\mu\mu'}$  и  $W^{\mu\mu'}$  - лептонный и адронный тензора соответственно.

Вычислим лептонный тензор:

$$\begin{aligned} L_{\mu\mu'} &= \frac{1}{2} Sp \left( (\hat{k}_2 + Im) \gamma_\mu (\hat{k}_1 + Im) \gamma_{\mu'} \right) = \frac{1}{2} \left( Sp(k_2 \gamma_\mu k_1 \gamma_{\mu'}) + m^2 Sp(\gamma_\mu \gamma_{\mu'}) \right) = \\ &= 2(k_{2\mu} k_{1\mu'} + k_{2\mu'} k_{1\mu}) \underbrace{- 2[(k_1 k_2) - m^2]}_{=q^2} g_{\mu\mu'} = 2(k_{2\mu} k_{1\mu'} + k_{2\mu'} k_{1\mu}) + q^2 g_{\mu\mu'} = \\ &= k_\mu k_{\mu'} + q^2 \left( g_{\mu\mu'} - \frac{q_\mu q_{\mu'}}{q^2} \right) \end{aligned}$$

Причём должно выполняться:

$$L_{\mu\mu'} q^\mu = L_{\mu\mu'} q^{\mu'} = 0 \quad (\text{лептонный тензор поперечен})$$

Итого:

$$L_{\mu\mu'} = k_\mu k_{\mu'} + q^2 \left( g_{\mu\mu'} - \frac{q_\mu q_{\mu'}}{q^2} \right) \quad (31.6)$$

Вычислим адронный тензор. Он также поперечен:

$$q_\mu W^{\mu\mu'} = q_{\mu'} W^{\mu\mu'} = 0$$

$$W^{\mu\mu'} = (-g_{\mu\mu'} + \frac{q^\mu q^{\mu'}}{q^2}) W_1(q^2) + p^\mu p^{\mu'} \frac{W_2(q^2)}{M^2} \quad (31.7)$$

$W_1(q^2)$  и  $W_2(q^2)$  - некие формфакторы. В явном виде:

$$\begin{aligned} W^{\mu\mu'} &= \frac{1}{2} Sp \left( (\hat{p}_2 + IM)(A\gamma^\mu + Bp^\mu I)(\hat{p}_1 + IM)(A^*\gamma^{\mu'} + B^*p^{\mu'} I) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ |A|^2 Sp(\hat{p}_2 \gamma^\mu \hat{p}_1 \gamma^{\mu'}) + MAB^* p^{\mu'} Sp(\hat{p}_2 \gamma^\mu) + |B|^2 p^\mu p^{\mu'} Sp(\hat{p}_1 \hat{p}_2) + \right. \\ &+ MA^* Bp^\mu Sp(\hat{p}_2 \gamma^{\mu'}) + MAB^* p^{\mu'} Sp(\gamma^\mu \hat{p}_1) + M^2 |A|^2 Sp(\gamma^\mu \gamma^{\mu'}) + \\ &\left. + MA^* Bp^\mu Sp(\hat{p}_1 \gamma^{\mu'}) + M^2 |B|^2 p^\mu p^{\mu'} Sp(I) \right] = \\ &= 2 \left[ |A|^2 (p_1^\mu p_2^{\mu'} + p_1^{\mu'} p_2^\mu - g^{\mu\mu'} (p_1 p_2)) + MAB^* p^{\mu'} p_2^\mu + |B|^2 (p_1 p_1) p^\mu p^{\mu'} + \right. \\ &\left. + MA^* Bp^\mu p_2^{\mu'} + MAB^* p^{\mu'} p_1^\mu + |A|^2 M^2 g^{\mu\mu'} + MA^* Bp^\mu p_1^{\mu'} + M^2 |B|^2 p^\mu p^{\mu'} \right] = \\ &= |A|^2 (g^{\mu\mu'} - q^\mu q^{\mu'}) + p^\mu p^{\mu'} \left[ 2MAB^* + 2MA^* B + |B|^2 (2M^2 + 2M^2 - q^2) + |A|^2 \right] = \\ &= -q^2 |A|^2 \left( -g^{\mu\mu'} + \frac{q^\mu q^{\mu'}}{q^2} \right) + \left[ |A + 2MB|^2 - q^2 |B|^2 \right] p^\mu p^{\mu'} \end{aligned}$$

Тогда сравнивая ответ с (31.7) и вспоминая (31.2) и (31.3):

$$W_1 = -|A|^2 q^2 = -q^2 |F_1 + F_2|^2;$$

$$W_2 = M^2 |A + 2MB|^2 - q^2 |MB|^2 = M^2 \left( |F_1|^2 - \frac{q^2}{4M^2} |F_2|^2 \right)$$

Итого адронный тензор имеет следующий вид:

$$W^{\mu\mu'} = -|F_1 + F_2|^2 q^2 \left( -g^{\mu\mu'} + \frac{q^\mu q^{\mu'}}{q^2} \right) + \left( |F_1|^2 - \frac{q^2}{4M^2} |F_1|^2 \right) p^\mu p^{\mu'} \quad (31.8)$$

Вычислим свёртку лептонного и адронного тензоров, стоящую в квадрате модуля матричного элемента. Её составные части:

$$\begin{aligned} \left( -g^{\mu\mu'} + \frac{q^\mu q^{\mu'}}{q^2} \right) \left( -g_{\mu\mu'} + \frac{q_\mu q_{\mu'}}{q^2} \right) &= g_\mu^\mu - \frac{q^2}{q^2} - \frac{q^2}{q^2} + \frac{q^4}{q^4} = 3; \\ k_\mu k_{\mu'} \left( -g^{\mu\mu'} + \frac{q^\mu q^{\mu'}}{q^2} \right) &= -k^2; \\ (-g_{\mu\mu'} + \frac{q_\mu q_{\mu'}}{q^2}) p^\mu p^{\mu'} &= -p^2 \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum |iM_{fi}|^2 &= |\text{т.к. } e^2 = 4\pi\alpha_{em}| = \frac{16\pi^2\alpha_{em}^2}{q^4} \cdot \left[ -k^2 M_2 + \frac{(kp)^2}{M^2} W_2 - 3q^2 W_1 - \right. \\ &\left. -q^2 \frac{-p^2}{m^2} W_2 \right] = \frac{16\pi^2\alpha_{em}^2}{t^2} \left[ (-k^2 - 3q^2) W_1 + \left( (kp)^2 + p^2 q^2 \right) \frac{W_2}{M^2} \right] \end{aligned}$$

На данном этапе положим массу электрона  $m = 0 \Rightarrow$  ультрарелятивистский случай.

$$\begin{aligned} k^2 &= (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2(k_1 k_2) = 2(k_1 k_2) = -q^2 = -t; \\ p^2 &= (p_1 + p_2)^2 = 2M^2 + 2(p_1 p_2) = 4M^2 - t; \\ (kp) &= (k_1 p_1) + (k_1 p_2) + (k_2 p_1) + (k_2 p_2) = 2((k_1 p_1) + (k_1 p_2)) = s - u \end{aligned}$$

Итого:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum |iM_{fi}|^2 = \frac{16\pi^2\alpha_{em}^2}{t^2} \left[ -2tW_1 + \left( (s - u)^2 + t(4M^2 - t) \right) \frac{W_2}{M^2} \right] \quad (31.9)$$

Теперь мы можем вычислить дифференциальное сечение данного процесса. Учтя, что  $m = 0$ :

$$d\sigma_{ep \rightarrow ep} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum |iM_{fi}|^2}{64\pi(k_1 p_1)^2} dt = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum |iM_{fi}|^2}{16\pi(s - M^2)^2} dt$$

Подставив (31.9):

$$d\sigma_{ep \rightarrow ep} = \frac{\pi\alpha_{em}^2}{(s - M^2)^2 t^2} \left( 2t^2 |F_1 + F_2|^2 + \left( (s - u)^2 + t(4M^2 - t) \right) \cdot \left( |F_1|^2 - \frac{t}{2M^2} |F_2|^2 \right) \right)$$

## Электрический и магнитный формфакторы

Часто вместо  $F_1$  и  $F_2$  используют электрический и магнитный формфакторы:

$$F_e = F_1 + \frac{t}{4M^2} F_2 \quad \text{электрический формфактор;}$$

$$F_m = F_1 + F_2 \quad \text{магнитный формфактор}$$

Их используют потому что они не интерферируют друг с другом.

Обратные формулы:

$$F_1 = \frac{1}{1 - \frac{t}{4M^2}} \cdot \left( F_e - \frac{t}{4M^2} F_m \right)$$

$$F_2 = \frac{1}{1 - \frac{t}{4M^2}} \cdot \left( F_m - F_e \right)$$

Сечение с новыми формфакторами:

$$d\sigma_{ep \rightarrow ep} = \frac{\pi\alpha_{em}^2}{(s - M^2)^2 t^2 \left(1 - \frac{t}{4M^2}\right)} \left( |F_e|^2 \left( (s - u)^2 + t(4M^2 - t) \right) - \right.$$

$$\left. - |F_m|^2 \frac{t}{4M^2} \left( (s - u)^2 - t(4M^2 - t) \right) \right) dt$$

## Расчет сечения для конкретного эксперимента

Рассеяние электронов на протонах начали изучать ещё в 50-е годы прошлого века. Типичный эксперимент выглядел так: на покоящийся протон (водородная мишень) налетал пучок ультрарелятивистских электронов. Далее электрон рассеивался на какой-то угол  $\theta$ , протон на угол  $\theta'$ . Изучалась угловая зависимость рассеяния электронов:  $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$ .

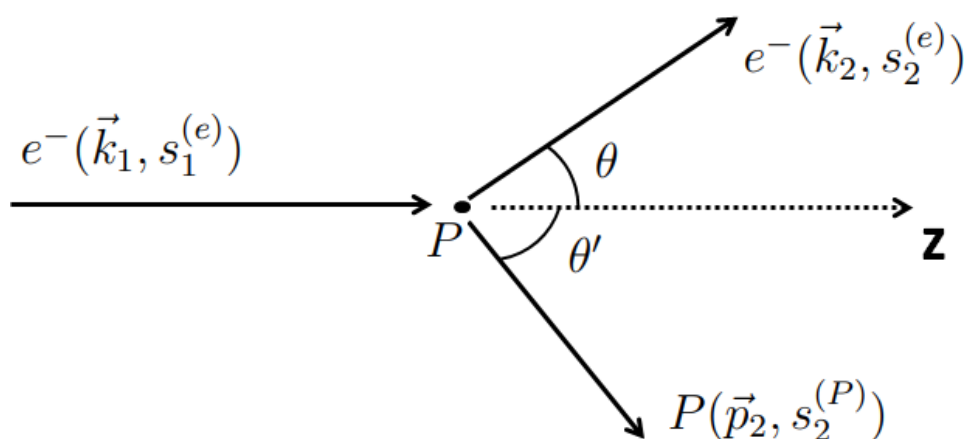


Рис. 31.1. Схема постановки эксперимента по рассеянию электрона на протоне

Система покоя протона  $\equiv$  лабораторная система (ЛСО). В этой системе отсчёта:

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= (M, \vec{0}); \\ p_2^\mu &= (E_2, \vec{p}_2); \\ q^\mu &= (q^0, \vec{q}); \\ k_1^\mu &= (\mathcal{E}_1, \vec{k}_1) = const; \\ k_2^\mu &= (\mathcal{E}_2, \vec{k}_2); \\ k_1^2 + k_2^2 &= m^2 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда

$$|\vec{q}| \gg m \Rightarrow m = 0 \quad (\text{ультрарелятивистский случай})$$

Выразим все наши мандельстамовские переменные через  $\mathcal{E}$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned} t &= (k_1 - k_2)^2 = -2(k_1 k_2) = -2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 + 2 \underbrace{|\vec{k}_1|}_{=\mathcal{E}_1} \underbrace{|\vec{k}_2|}_{=\mathcal{E}_2} \cos \theta = -2\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2 (1 - \cos \theta) = \\ &= -4\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \left| \mathcal{E}_2 \text{ находим из закона сохранения 4-х импульса:} \right. \\ \mathcal{E}_2 &= \left. \frac{\mathcal{E}_1}{1 + \frac{2\mathcal{E}_1}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right| = \frac{-4\mathcal{E}_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2\mathcal{E}_1}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Дифференциал:

$$d\Omega = d\varphi \cos \theta d\theta = 2\pi \cos \theta d\theta \Rightarrow dt = \left| \frac{\partial t}{\partial \theta} \right| d\theta = \frac{1}{\pi} \frac{\mathcal{E}_1^2 d\Omega}{1 + \frac{2\mathcal{E}_1}{M} \sin^2 \theta}$$

Далее:

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + p_1)^2 = M^2 + 2(k_1 p_1) = M^2 + 2M\mathcal{E}_1; \\ u &= \left| \text{т.к. } s + t + u = 2M^2 \right| = 2M^2 - s - t; \end{aligned}$$

Итого, дифференциальное сечение (**формула Розенблюта**):

$$\frac{d\sigma_{ep \rightarrow ep}}{d\Omega} = \underbrace{\frac{\alpha_{em}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\mathcal{E}_1^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}}_{\text{формула Мотта (30.1)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\mathcal{E}_1}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[ \frac{|F_e|^2 - \frac{t}{4M^2} |F_m|^2}{1 - \frac{t}{4M^2}} - \frac{t}{2M^2} |F_m|^2 t g^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (31.10)$$

## 32. Лекция 32. Скалярная электродинамика

Скалярная электродинамика тесно связана с процессом рассеяния электрона на  $\pi$ -мезоне. Их бывает 3 типа:

$$\begin{aligned}\pi^+ &= u\bar{d} \\ \pi^- &= \bar{u}d \\ \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})\end{aligned}$$

### Рассеяние электрона на $\pi^-$ -мезоне

Рассмотрим процесс:

$$e^- \pi^- \rightarrow e^- \pi^-$$

На древесном уровне для такого процесса можно нарисовать следующую фейнмановскую диаграмму:

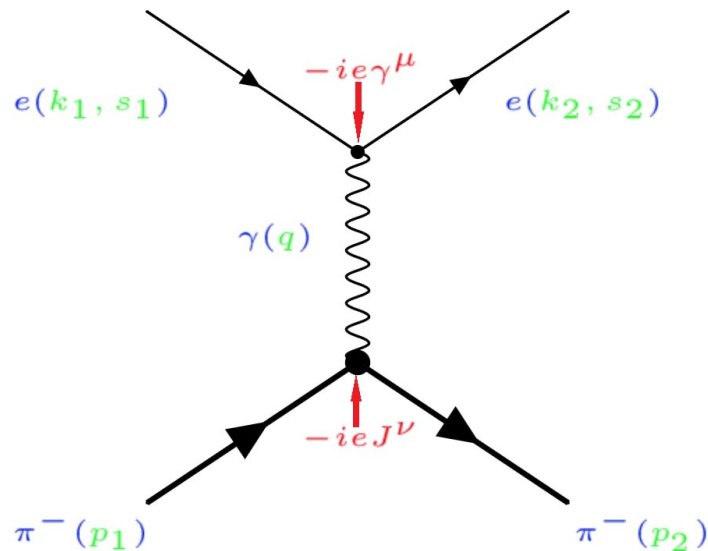


Рис. 32.1. Диаграмма Фейнмана, описывающая рассеяние электрона на  $\pi^-$ -мезоне

где 4-импульсы начальных и конечных частиц удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned}k_1 + p_1 &= k_2 + p_2; \\ k_1^2 &= k_2^2 = m^2; \\ p_1^2 &= p_2^2 = M^2; \\ s &= (p_1 + k_1)^2 = (p_2 + k_2)^2; \\ t &= (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 = q^2; \\ u &= (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2; \\ s + t + u &= 2m^2 + 2M^2\end{aligned}$$



Структура вершины  $J^\nu$  не может быть вычислена методами КТП. Однако если  $q^\mu = (k_2 - k_1)^\mu \rightarrow 0$ , то длина волны виртуального фотона  $\lambda_\gamma \sim \frac{1}{\sqrt{q^2}}$  **много больше** характеристического размера пиона  $r_\pi \sim \frac{1}{M} \Rightarrow \pi^\pm$  - мезоны можно рассматривать как **точечные бесструктурные** частицы  $\Rightarrow$  описание на языке (псевдо)скалярных полей:

$$\varphi(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} (a_{\vec{p}} e^{-i(px)} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{i(px)}),$$

$$\varphi^\dagger(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} (a_{\vec{p}}^\dagger e^{i(px)} + b_{\vec{p}} e^{-i(px)}),$$

где:  $a_{\vec{p}}^\dagger$  ( $a_{\vec{p}}$ ) - оператор рождения (уничтожения)  $\pi^-$  с  $\vec{p}$   
 $b_{\vec{p}}^\dagger$  ( $b_{\vec{p}}$ ) - оператор рождения (уничтожения)  $\pi^+$  с  $\vec{p}$ .

Ненулевые коммутаторы:

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = [b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}'}^\dagger] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}$$

Лагранжиан свободного (псевдо)скалярного поля:

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi^\dagger, \partial^\mu \varphi, \partial^\mu \varphi^\dagger) = (\partial^\mu \varphi^\dagger(x))(\partial_\mu \varphi(x)) - m^2 \varphi^\dagger(x)\varphi(x)$$

получается, если рассматривать уравнение Клейна-Гордона-Фока (12.1) как уравнение Лагранжа для частицы **со спином 0**. Действительно:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dots)}{\partial \varphi^\dagger} = -m^2 \varphi \text{ и } \frac{\partial \mathcal{L}(\dots)}{\partial (\partial^\mu \varphi^\dagger)} = \partial_\mu \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\dagger} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi^\dagger)} = -m^2 \varphi - \partial^\mu \partial_\mu \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \varphi(x) = 0 - \text{уравнение КГФ}$$

Взаимодействие с электромагнитным полем:

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - eA^\mu \Rightarrow \partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + ieA^\mu,$$

где  $e = -|e|$ . Тогда:

$$(\partial^\mu \varphi)^\dagger (\partial_\mu \varphi) \rightarrow ((\partial^\mu - ieA^\mu) \varphi^\dagger) (\partial_\mu + ieA_\mu) \varphi =$$

$$= (\partial^\mu \varphi^\dagger) \partial_\mu \varphi + ieA^\mu ((\partial_\mu \varphi^\dagger) \varphi - \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi) + e^2 A^\mu A_\mu \varphi^\dagger \varphi.$$

Лагранжиан взаимодействия (псевдо)скалярных полей с электромагнитным полем имеет вид:

$$\mathcal{L}^{int}(x) = -ieA^\mu ((\partial_\mu \varphi^\dagger) \varphi - \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi) - e^2 A^\mu A_\mu \varphi^\dagger \varphi.$$

Тогда гамильтониан взаимодействия (уже в представлении взаимодействия) можно записать как:

$$H^{int}(x) = -ieA^\mu ((\partial_\mu \varphi^\dagger) \varphi - \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi) + e^2 A^\mu A_\mu \varphi^\dagger \varphi$$

В отличие от спинорной КЭД, где есть только одна вершина ( $ee\gamma$ ), в скалярной КЭД имеется две фундаментальные вершины ( $\pi\pi\gamma$ ) и ( $\pi\pi\gamma\gamma$ )

## Правила Фейнмана для скалярной КЭД

Рассмотрим **нефизический** (запрещенный законом сохранения 4-импульса) процесс:  $\pi^-(p_1) \rightarrow \pi^-(p_2)\gamma(q)$ .

$$S^{(1)} = -i \int d^4x \mathcal{H}^{int}(x)$$

Начальное состояние:  $|i\rangle = |1\pi_{p_1}^-\rangle|0\gamma\rangle$ ;

Конечное состояние:  $|j\rangle = |1\pi_{p_2}^-\rangle|1\gamma_{q\lambda}\rangle$ .

Матричный элемент:

$$\begin{aligned} \langle j|S^{(1)}|i\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{iM_{ji}}{\sqrt{2\omega_q 2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2}}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - q) = \\ &= (-i)^2 e \int d^4x \langle 1\pi_{p_2}^- | (\partial_\mu \varphi^\dagger) \varphi - \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi | 1\pi_{p_1}^- \rangle \langle 1\gamma_{q\lambda} | A^\mu | 0\gamma \rangle = \\ &= -e \int d^4x \left( \frac{ip_{2\mu} e^{i(p_2x)}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} \frac{e^{-i(p_1x)}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} - \frac{-ip_{1\mu} e^{-i(p_1x)}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} \frac{e^{i(p_2x)}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} \right) \cdot e^{* \mu}(\vec{q}, \lambda) \frac{e^{i(qx)}}{\sqrt{2\omega_q}} = \\ &= \frac{(\int d^4x e^{-ix(p_1 - p_2 - q)})}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2} 2\omega_q}} (-ie(p_1 + p_2)_\mu) e^{* \mu}(\vec{q}, \lambda) = \\ &= \frac{(-ie(p_1 + p_2)^\mu e_\mu^*(\vec{q}, \lambda))}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1} 2\varepsilon_{p_2} 2\omega_q}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - q) \end{aligned}$$

Таким образом, вершине  $\pi^-\pi^-\gamma$  соответствует  $-ie(p_1 + p_2)^\mu$

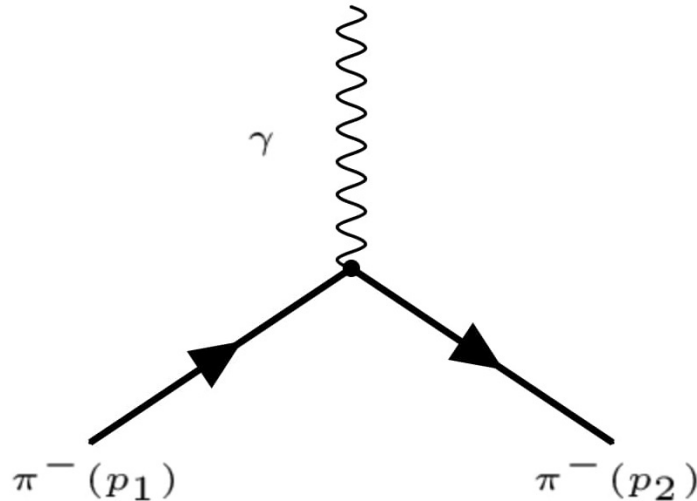


Рис. 32.2. Вершина  $\pi^-\pi^-\gamma$

Вершине  $\pi^+\pi^+\gamma$  соответствует  $ie(p_1 + p_2)^\mu$ .

Вершине  $\pi\pi\gamma$  соответствует  $2ie^2 g^{\mu\nu}$ .

Входящим и выходящим из вершины пионным линиям соответствует 1.

Таким образом, в скалярной КЭД

$$J^\nu = (p_1 + p_2)^\nu$$

и выполняется условие поперечности:

$$q_\nu J^\nu = p_1^2 - p_2^2 = M^2 - M^2 = 0.$$

Покажем как получить вершину  $\pi\pi\gamma\gamma$  - взаимодействия. Выше было показано, что гамильтониан взаимодействия скалярной КЭД содержит слагаемое:

$$\mathcal{H}_{\pi\pi\gamma\gamma}^{int}(x) = -e^2 A^\mu(x) A_\mu(x) \phi^\dagger(x) \phi(x),$$

которое отвечает за возникновение  $\pi\pi\gamma\gamma$  - вершины. Для нахождения этой вершины в первом порядке теории возмущений рассмотрим процесс:

$$\pi^-(p_1)\gamma(k_1) \rightarrow \pi^-(p_2)\gamma(k_2).$$

Для него:

$$S_{\pi\pi\gamma\gamma}^{(1)} = -i \int d^4x \mathcal{H}_{\pi\pi\gamma\gamma}^{int}(x),$$

Начальное состояние:  $|i\rangle = |1\pi_{p_1}^-\rangle |1\gamma_{k_1\lambda_1}\rangle$ ;  
Конечное состояние:  $|f\rangle = |1\pi_{p_2}^-\rangle |1\gamma_{k_2\lambda_2}\rangle$ . Матричный элемент:

$$\begin{aligned} \langle f | S_{\pi\pi\gamma\gamma}^{(1)} | i \rangle &\equiv \frac{iM_{\pi\pi\gamma\gamma}}{\sqrt{1\omega_{k_1}2\omega_{k_2}2\varepsilon_{p_1}2\varepsilon_{p_2}}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) = \\ &= (-i)(-e^2) \int d^4x \langle 1\pi_{p_2}^- | \phi^\dagger(x) \phi(x) | 1\pi_{p_1}^- \rangle \langle 1\gamma_{k_2\lambda_2} | A^\mu(x) A_\mu(x) | 1\gamma_{k_1\lambda_1} \rangle = \\ &= ie^2 \int d^4x \frac{e^{i(p_2x)}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_2}}} \frac{e^{-i(p_1x)}}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} \left( \frac{e^{i(k_2x)}}{\sqrt{2\omega_{k_2}}} \frac{e^{-i(k_1x)}}{\sqrt{2\omega_{k_1}}} e^{*\mu}(\vec{k}_2, \lambda_2) e_\mu(\vec{k}_1, \lambda_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{i(k_1x)}}{\sqrt{2\omega_{k_1}}} \frac{e^{-i(k_2x)}}{\sqrt{2\omega_{k_2}}} e^\mu(\vec{k}_1, \lambda_1) e_\mu^*(\vec{k}_2, \lambda_2) \right) = \\ &= \frac{2ie^2 g^{\mu\nu} e_\mu(\vec{k}_1, \lambda_1) e_\nu^*(\vec{k}_2, \lambda_2)}{\sqrt{2\omega_{k_1}2\omega_{k_2}2\varepsilon_{p_1}2\varepsilon_{p_2}}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \end{aligned}$$

Таким образом, вершине  $\pi\pi\gamma\gamma$  соответствует  $2ie^2g^{\mu\nu}$ :

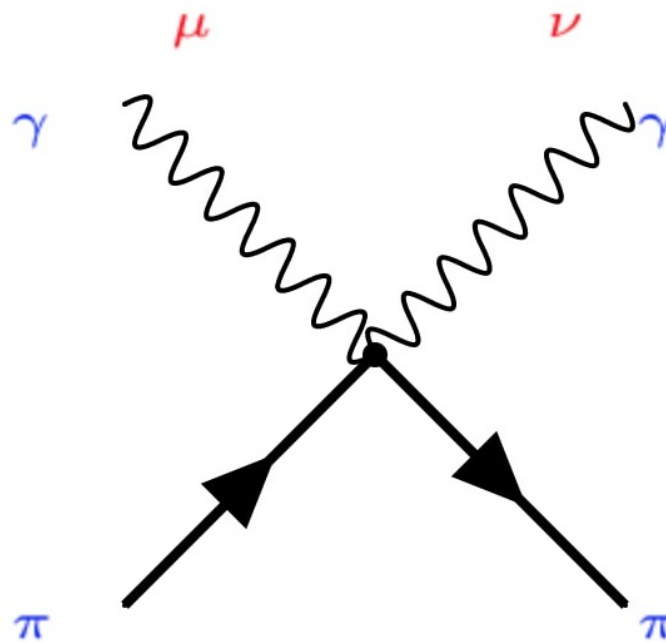


Рис. 32.3. Вершина  $\pi\pi\gamma\gamma$

## Дифференциальное сечение реакции $e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-$ в скалярной КЭД

Матричный элемент:

$$\begin{aligned} iM_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-} &= \bar{u}(\vec{k}_2, s_2)(-ie\gamma^\mu)u(\vec{k}_1, s_1)(-i)\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}(-i)e(p_1 + p_2)^\nu = \\ &= \frac{ie^2}{t}\bar{u}(\vec{k}_2, s_2)(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)u(\vec{k}_1, s_1) = \left| \text{т.к. } \hat{p}_2 = \hat{p}_1 + \hat{k}_1 - \hat{k}_1 \right| = \\ &= \frac{ie^2}{t}\bar{u}(\vec{k}_2, s_2)(2\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + \hat{k}_1)u(\vec{k}_1, s_1) \end{aligned}$$

Для упрощения воспользуемся уравнением Дирака. Биспинор  $u(\vec{k}_1, s_1)$  удовлетворяет уравнению:

$$\hat{k}_1 u(\vec{k}_1, s_1) = m u(\vec{k}_1, s_1)$$

Выясним, какому уравнению удовлетворяет биспинор  $\bar{u}(\vec{k}_2, s_2)$ . Рассмотрим частное решение уравнения Дирака:

$$\psi_{\vec{k}_2}(x) = \frac{e^{-i(k_2x)}}{\sqrt{a\varepsilon_{k_2}}} u(\vec{k}_2, s_2) \Rightarrow \bar{\psi}_{\vec{k}_2}(x) = \psi_{\vec{k}_2}^\dagger \gamma^0 = \frac{e^{i(k_2x)}}{\sqrt{2\varepsilon_{k_2}}} \bar{u}(\vec{k}_2, s_2)$$

В (19.4) было показано, что  $\bar{\psi}_{\vec{k}_2}(x)$  удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \bar{\psi}_{\vec{k}_2}(x) i\gamma^\mu + \bar{\psi}_{\vec{k}_2}(x) Im = 0 &\Rightarrow \bar{u}(\vec{k}_2, s_2) \hat{k}_2 = \bar{u}(\vec{k}_2, s_2) m \\ iM_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-} &= \frac{2ie^2}{t} \bar{u}(\vec{k}_2, s_2) \hat{p}_1 u(\vec{k}_1, s_1); \\ (iM_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-})^* &= -\frac{2ie^2}{t} \bar{u}(\vec{k}_1, s_1) \hat{p}_1 u(\vec{k}_2, s_2).\end{aligned}$$

Если начальные и конечные пучки  $e^-$  **не поляризованы**, то  $|iM_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-}|^2$  необходимо просуммировать по спину конечного электрона ( $s_2$ ) и усреднить по спину начального электрона ( $s_1$ )  $\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2}$ .

Учтем, что:

$$\begin{aligned}m^2 - (k_1 k_2) &= \frac{t}{2}; \\ (p_1 k_1) &= \frac{s - m^2 - M^2}{2}; \\ (p_1 k_2) &= \frac{M^2 + m^2 - u}{2} = \frac{s + t - m^2 - M^2}{2};\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2} |iM_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-}|^2 &= \frac{2e^4}{t^2} Sp\left(\hat{p}_1(\hat{k}_1 + Im)\hat{p}_1(\hat{k}_2 + Im)\right) = \\ &= \frac{2e^4}{t^2} \left( Sp(\hat{p}_1 \hat{k}_1 \hat{p}_1 \hat{k}_2) + m^2 Sp(\hat{p}_1 \hat{p}_1) \right) = \frac{8e^4}{t^2} \left( 2(p_1 k_1)(p_1 k_2) + p_1^2 (m^2 - (k_1 k_2)) \right) = \\ &= \frac{4e^4}{t^2} \left( (s - m^2 - M^2)^2 + t(s - m^2) \right) = \frac{64\pi^2 \alpha_{em}^2}{t^2} \left( (s - m^2 - M^2)^2 + t(s - m^2) \right)\end{aligned}$$

Замечание: во многих учебниках выражение для квадрата модуля матричного элемента представляется в иной форме при помощи очевидной замены:

$$\begin{aligned}4\left((s - m^2 - M^2)^2 + t(s - m^2)\right) &= \left|_{\text{т.к. } m^2 + M^2 = \frac{s + t + u}{2}} (s - u - t)^2 + \right. \\ &+ 4t(s - m^2) = (s - u)^2 - 2t(s - u) + t^2 + 4t(s - m^2) = (s - u)^2 + \\ &+ t(2s + 2u + 2t - 4m^2 - t) = (s + u) + t(4M^2 - t)\end{aligned}$$

Для получения дифференциального сечения воспользуемся готовой формулой (25.8):

$$d\sigma_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} |iM_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-}|^2}{64\pi \left( (p_1 k_1)^2 - m^2 M^2 \right)} dt$$

Учитывая, что

$$(p_1 k_1)^2 - m^2 M^2 = \frac{1}{4}(s - m^2 - M^2)^2 - m^2 M^2 = \frac{1}{4}(s - (M - m)^2)(s - (M + m)^2)$$

Окончательно находим:

$$\frac{d\sigma_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-}}{dt} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2((s - m^2 - M^2)^2 + t(s - m^2))}{t^2(s - (M - m)^2)(s - (M + m)^2)}$$

При интегрировании по  $dt$  сечение расходится на верхнем пределе. Действительно, учтя, что:

$$(p_i p_j) \geq M^2, \quad (k_i k_j) \geq m^2, \quad (p_i k_j) \geq mM, \quad i, j = 1, 2,$$

для мандельштамовских переменных находим:

$$s \geq (M + m)^2, \quad t \leq 0, \quad u \leq (M + m)^2$$

При фиксированном  $s$ :

$$t_{min} = 2m^2 + 2M^2 - s - u_{max} = 2mM - s < 0, \quad t_{max} = 0$$

При этом:

$$\frac{d\sigma_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-}}{dt} \sim \frac{1}{t^2},$$

т. е. сечение расходится на верхнем пределе.

## Электромагнитный формфактор пиона $F_\pi(q^2)$

При  $q^2 \geq M^2$  пион уже нельзя считать точечной частицей без внутренней структуры. В инвариантной модели  $|\pi\rangle = |\bar{u}d\rangle$ , однако взаимодействием между кварками в мезоне пренебрегать нельзя.

Действительно, без учета взаимодействия между кварками  $\pi^-\pi^-\gamma^-$  вершину можно легко выразить через  $qq\gamma^-$  - вершины:

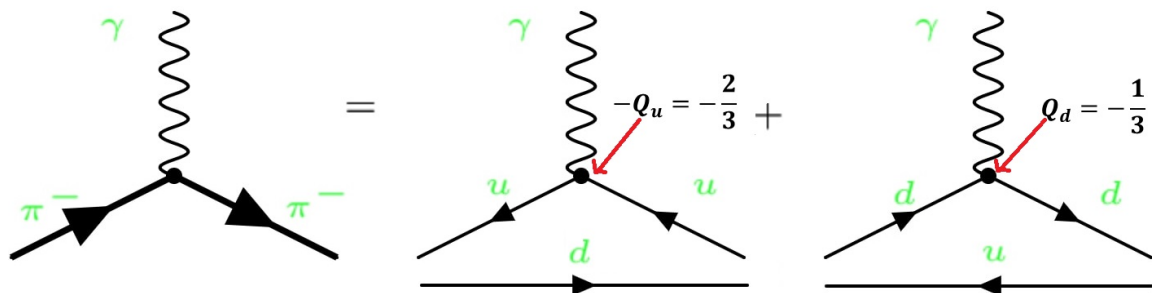


Рис. 32.4. Вершина  $\pi^-\pi^-\gamma$  без учёта взаимодействия между кварками

То есть:

$$-ieJ^\nu = iQ_4|e|\gamma^\nu - iQ_\alpha|e|\gamma^\nu = -i(-Q_4 + Q_\alpha)|e|\gamma^\nu = -ie\gamma^\nu, \quad e = -|e|.$$

Эта вершина **не** зависит от  $q^\mu$  и в пределе  $q^\mu \rightarrow 0$  **не** переходит в вершину скалярной КЭД  $-ie(p_1 + p_2)^\nu$ . То есть нельзя пренебрегать взаимодействием между кварками в мезоне!

На самом деле вклад в  $J^\nu$  вносит бесконечное число диаграмм вида: Вычислить их

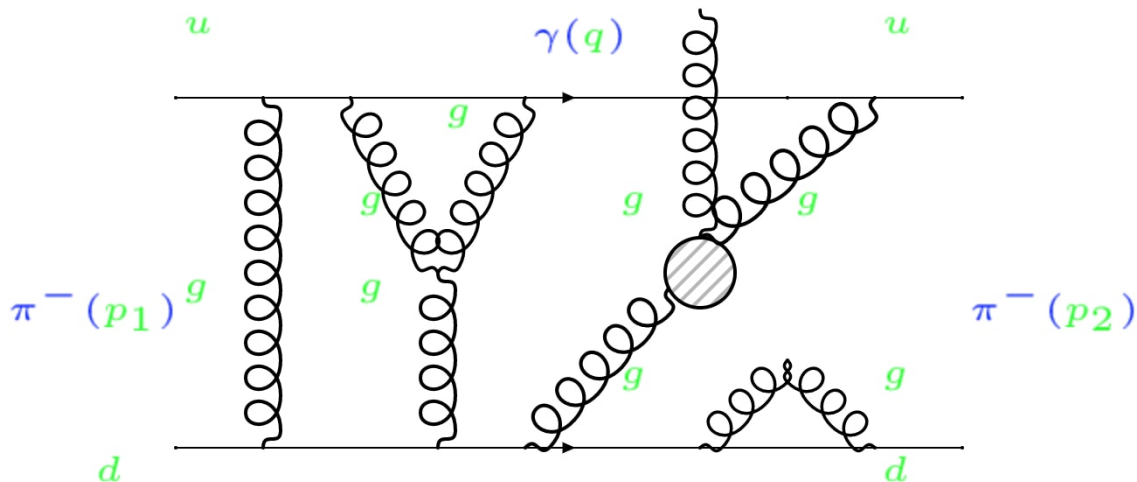


Рис. 32.5. Взаимодействие кварков в мезоне

все в рамках современной КТП невозможно. Можно только написать, что:

$$J^\nu = \langle \pi^-(p_2) | Q_4 \bar{u} \gamma^\nu u + Q_\alpha \bar{d} | \pi^-(p_1) \rangle = (p_1 + p_2)^\nu F_\pi(q^2) + q^\nu G_\pi(q^2)$$

На функции  $F_\pi(q^2)$  и  $G_\pi(q^2)$  наложены следующие условия:

1)

$$\lim_{q^\mu \rightarrow 0} J^\nu = (p_1 + p_2)^\nu \Rightarrow F_\pi(0) = 1 \text{ и } G_\pi(0) = 0;$$

2) В силу калибровочной инвариантности:

$$q_\nu J^\nu = 0 \Rightarrow q^2 G_\pi(q^2) = 0$$

Вместе с первым условием на  $G_\pi(0)$  это дает, что  $\forall q^2 G_\pi(q^2) \equiv 0$ .  
Таким образом:

$$J^\nu = (p_1 + p_2)^\nu F_\pi(q^2)$$

Определение:  $F_\pi(q^2)$  - электромагнитный формфактор пиона. То, что  $F_\pi(q^2) \neq 1$  показывает, что пион имеет сложную внутреннюю структуру.

Вопрос: Почему  $F_\pi$  зависит только от  $q^2$ ?

Ответ:  $F_\pi$  должен зависеть от скалярных релятивистских инвариантов задачи:

$$p_1^2 = p_2^2 = M^2, (p_1 - p_2)^2 = q^2 \text{ и } (p_1 + p_2)^2 = 4M^2 + q^2,$$

т.е. единственной переменной среди этих инвариантов является  $q^2$ .

При малых  $q^2$  формфактор  $F_\pi(q^2)$  можно выразить через средний квадрат радиуса пиона  $\langle r_\pi^2 \rangle$ . Именно:

$$F_\pi(q^2) = \int F_\pi(x^2) e^{-i(\vec{q}\vec{x})} d\vec{x}$$

Перейдем в полярные координаты. Там:

$$d\vec{x} = r^2 dr d\Omega, \int d\Omega = 4\pi$$

Пусть  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$  и  $\vec{q} = (q^1, q^2, q^3)$ . Легко видеть, что:

$$\int x^i d\Omega = 0, \int x^i x^j d\Omega = 4\pi r^2 \frac{\delta^{ij}}{3}$$

Из условия  $F_\pi(q^2 = 0) = 1 \Rightarrow$  условие нормировки для функции  $F_\pi(x^2) \equiv F_\pi(r^2)$ :

$$1 = \int F_\pi(r^2) d\vec{x} = 4\pi \int r^2 F_\pi(r^2) dr$$

Определим:

$$\langle r_\pi^2 \rangle = \int r^2 r^2 F_\pi(r^2) dr,$$

тогда:

$$F_\pi(q^2) \approx \int F_\pi(r^2) \left( 1 - i(\vec{q}\vec{x}) - \frac{(\vec{q}\vec{x})^2}{2} - \dots \right) r^2 dr d\Omega = 1 - \frac{1}{6} \langle r_\pi^2 \rangle q^2 - \dots$$

То есть, при малых  $q^2$  справедлива формула:

$$F_\pi(q^2) \approx 1 - \frac{1}{6} \langle r_\pi^2 \rangle q^2$$

Эксперимент дает:

$$\langle r_\pi^2 \rangle = (0,44 \pm 0,02) \text{ фм}^2$$

С учетом электромагнитного формфактора пиона:

$$\frac{d\sigma_{e^-\pi^-\rightarrow e^-\pi^-}}{dt} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2 \left( (s-m^2-M^2)^2 + t(s-m^2) \right)}{t^2 \left( s-(M-m)^2 \right) \left( s-(M+m)^2 \right)} F_\pi^2(t)$$



## Распад $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ и число цветов кварков

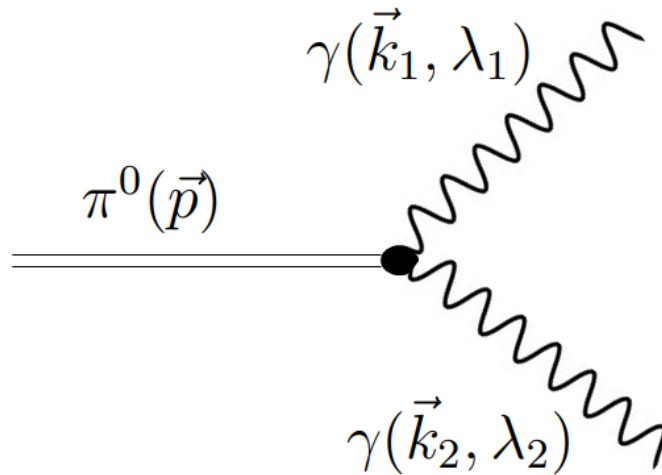


Рис. 32.6. Распад  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

Кинематика:

$$\begin{aligned} p^\mu &= k_1^\mu + k_2^\mu; \\ p^2 &= M^2; \\ k_1^2 &= k_2^2 = 0; \\ (pk_1) &= (pk_2) = (k_1k_2) = \frac{M^2}{2}; \end{aligned}$$

Матричный элемент:

$$\begin{aligned} iM_{fi} &= e_1^{*\mu} e_2^{*\nu} \cdot 1 \cdot T_{\mu\nu}(k_1, k_2) A_{\gamma\gamma}(p^2, k_1^2, k_2^2, (pk_1), (pk_2), (k_1k_2)) = \\ &= e_1^{*\mu} e_2^{*\nu} \cdot 1 \cdot T_{\mu\nu}(k_1, k_2) A_{\gamma\gamma} \end{aligned}$$

где  $A_{\gamma\gamma} = const$  - формфактор,  $T_{\mu\nu}$ -псевдотензор 2-го ранга со свойствами:

- 1)  $k_1^\mu T_{\mu\nu} = k_2^\nu T_{\mu\nu} = 0$  - поперечность;
- 2)  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$  - бозевость фотонов.

Тогда  $T_{\mu\nu} = i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta$

Тогда:

$$iM_{fi} = iA_{\gamma\gamma} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} e_1^{*\mu} e_2^{*\nu} k_1^\alpha k_2^\beta$$

Комплексно-сопряженный матричный элемент:

$$(iM_{fi})^* = -iA_{\gamma\gamma} \varepsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'} e_1^{\mu'} e_2^{\nu'} k_1^{\alpha'} k_2^{\beta'}$$

Квадрат модуля матричного элемента:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |iM_{fi}|^2 &= A_{\gamma\gamma}^2 (-g^{\mu\mu'}) (-g^{\nu\nu'}) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'} k_1^\alpha k_1^{\alpha'} k_2^\beta k_2^{\beta'} = \\ &= A_{\gamma\gamma}^2 \varepsilon^{\mu\nu\alpha'\beta'} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_1^{\alpha'} k_2^\beta k_2^{\beta'} = \left| \text{см. лекцию 2 вычисление свёрток} \right| = \\ &= A_{\gamma\gamma}^2 \cdot 2 \left( (k_1 k_2)^2 - \underbrace{k_1^2}_{=0} \underbrace{k_2^2}_{=0} \right) = A_{\gamma\gamma}^2 \cdot 2(k_1 k_2)^2 = A_{\gamma\gamma}^2 \frac{M^4}{2} = \text{const} \end{aligned}$$

Перейдём в систему покоя  $\pi^0$ -мезона. В ней:  $p^\mu = (M, \vec{0})$ ,  $k_1^\mu = (\omega_1, \vec{k}_1)$ ,  $k_2^\mu = (\omega_2, \vec{k}_2)$ .  
Найдём ширину распада:

$$d\Gamma = \frac{1}{2!} \frac{\sum_{\lambda_1, \lambda_2} |iM_{fi}|^2}{2M} d\Phi_2 \Rightarrow \Gamma = \frac{\sum_{\lambda_1, \lambda_2} |iM_{fi}|^2}{4M} \Phi_2 = A_{\gamma\gamma}^2 \frac{M^3}{8} \Phi_2$$

где множитель  $\frac{1}{2!}$  появился от симметризации 2-х тождественных бозонов (фотонов).

Фазовый 2-х частичный объём по формуле (25.3):

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int d\Phi_2 = \int (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2) \frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d\vec{k}_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int \delta(\vec{p} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \frac{d\vec{k}_2}{\omega_2} \delta(M - \omega_1 - \omega_2) \frac{d\vec{k}_1}{\omega_1} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int \delta(M - \omega_1 - \omega_2(\omega_1)) \frac{d\vec{k}_1}{\omega_1 \omega_2} \Big|_{|\vec{k}_1|=|\vec{k}_2|, \omega_1=\omega_2} = \\ &= \left| \text{в сферической СК: } d\vec{k} = |k_1|^2 |dk_1| d\omega_1 = 4\pi \omega_1^2 d\omega_1 \right| = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \delta(M - 2\omega_1) d\omega_1 = \frac{1}{8\pi} \end{aligned}$$

Итого:

$$\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{64\pi} A_{\gamma\gamma}^2 M^3$$

Из эксперимента:  $M = 134.98$  МэВ,  $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} = (7.7 \pm 0.6) \cdot 10^{-6}$  МэВ.

Отсюда:

$$A_{\gamma\gamma} = \frac{8}{M} \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{M}} \approx 0.025 \frac{1}{\text{ГеВ}}$$

Определение: Лептонная константа распада  $F_\pi = 92.4 \pm 0.2$  МэВ.

Она входит в адронный ток:

$$\langle 0 | \bar{d} \gamma^\mu \gamma^5 u | \pi^+(p) \rangle = i\sqrt{2} F_\pi p^\mu$$

Этот ток, в свою очередь, входит в амплитуду распада например  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ .

Связь  $A_{\gamma\gamma}$  и  $F_\pi$ :

$$A_{\gamma\gamma} = \frac{\alpha_{em} N_c}{3\pi F_\pi} \approx 0.025 \frac{N_c}{3} \frac{1}{\text{GeV}}$$

где  $N_c$  - число цветов кварков.

## Излучение мягких фотонов

Пусть  $A(p_1, p_2, q = p_1 - p_2)$  - амплитуда некоторого процесса (рис. 32.7):

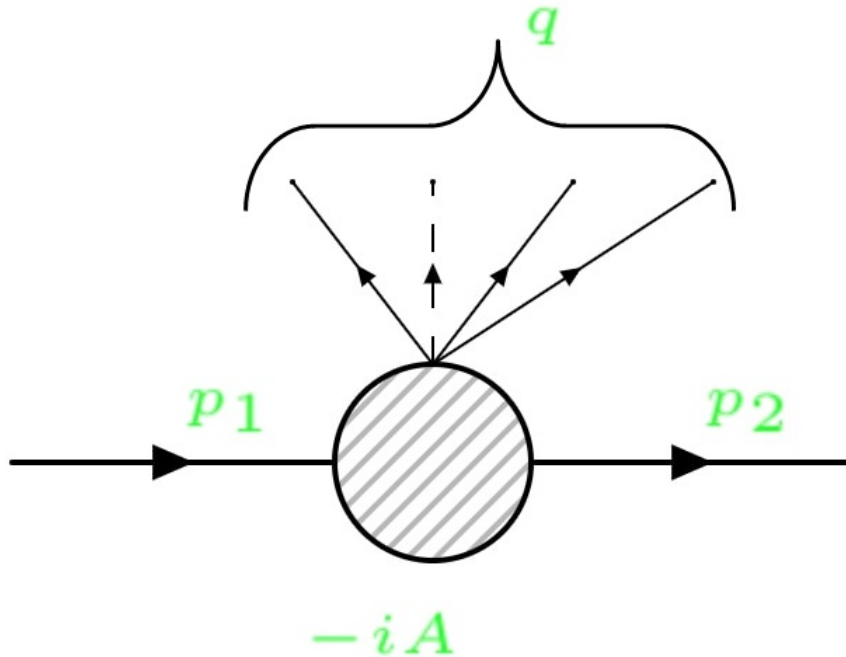


Рис. 32.7. Некоторый процесс

Его матричный элемент:

$$iM_{fi}^{(0)} = \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \left( -iA(\dots) \right) u(\vec{p}_1, s_1),$$

где  $p_1^2 = p_2^2 = m^2$  и согласно уравнениям движения:

$$(\hat{p}_1 - m)u(\vec{p}_1, s_1) = 0, \quad \bar{u}(\vec{p}_2, s_2)(\hat{p}_2 - m) = 0$$

Любая детектирующая аппаратура имеет **порог регистрации** по энергии фотонов  $\varepsilon_0$ . Если для фотона  $\omega_k \leq \varepsilon_0$ , то процессы без излучения фотона и с излучением фотона **экспериментально неотличимы**  $\Rightarrow$  оба процесса нужно рассматривать вместе:

$$d\sigma^{(0)} + d\sigma^{(1)}$$

Вычислим сечение процесса с излучением одного мягкого фотона (т.е. когда  $\omega_k \leq \varepsilon_0$  и  $k \ll [p_1, p_2]$ ). Матричный элемент процесса:

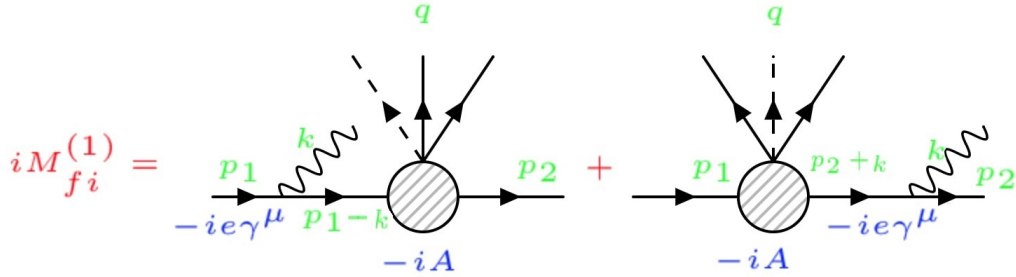


Рис. 32.8. Матричный элемент

$$iM_{fi}^{(1)} = \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \left[ (-iA) \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k} + Im)}{(p_1 - k)^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu) + \right. \\ \left. + (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\hat{p}_2 + \hat{k} + Im)}{(p_2 + k)^2 - m^2} (-iA) \right] u(p_1, s_1) e_\mu^*(\vec{k}, \lambda)$$

Учтем, что:

$$(p_1 - k)^2 - m^2 = p_1^2 - m^2 - 2(p_1 k) + k^2 = -2(p_1 k)$$

А также

$$(\hat{p}_1 - \hat{k} + Im)\gamma^\mu u(\vec{p}_1, s_1) \approx (\hat{p}_1 + Im)\gamma^\mu u(\vec{p}_1, s_1) = \left| \text{т.к. } \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2I g^{\nu\mu} \right| = \\ = 2Ip_1^\mu u(\vec{p}_1, s_1) - \gamma^\mu (\hat{p}_1 - Im) u(\vec{p}_1, s_1) = 2p_1^\mu u(\vec{p}_1, s_1)$$

Полностью аналогично:

$$(p_2 + k)^2 - m^2 = 2(p_2 k), \\ \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\mu (\hat{p}_2 + \hat{k} + Im) \approx 2\bar{u}(\vec{p}_2, s_2) p_2^\mu$$

Тогда:

$$iM_{fi}^{(1)} \approx e \left( \frac{(p_2 e^*)}{(p_2 k)} - \frac{(p_1 e^*)}{(p_1 k)} \right) \bar{u}(\vec{p}_2, s_2) (-iA) u(\vec{p}_1, s_1) = e \left( \frac{(p_2 e^*)}{(p_2 k)} - \frac{(p_1 e^*)}{(p_1 k)} \right) iM_{fi}^{(0)}$$

Таким образом произошла **факторизация** амплитуды  $\Rightarrow$  дифференциальное сечение тоже можно записать в факторизованном виде:

$$d\sigma^{(1)} = \omega^{(1)} d\sigma^{(0)}$$

где  $\omega^{(1)}$  - вероятность излучения одного **мягкого** фотона,  $d\sigma^{(0)}$  - сечение процесса без фотонов

Дифференциальное сечение:

$$d\sigma^{(1)} = 4\pi\alpha_{em} \left( \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left| \frac{(p_2 e^*)}{(p_2 k)} - \frac{(p_1 e^*)}{p_1 k} \right|^2 \right) d\sigma^{(0)}(p_1, p_2, q);$$

где

$$\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left| \frac{(p_2 e^*)}{(p_2 k)} - \frac{(p_1 e^*)}{p_1 k} \right|^2 = \int_{m_\gamma}^{\varepsilon_0} \frac{\omega_k^2 d\omega_k}{\omega_k^3} = \int_{m_\gamma}^{\varepsilon_0} \frac{d\omega_k}{\omega_k} = \ln \frac{\varepsilon_0}{m_\gamma}$$

При  $m_\gamma \rightarrow 0$  интеграл расходится. Это называется "инфракрасной катастрофой".  
Замечание: На самом деле катастрофы нет. Просто теория возмущений не работает, так как параметр разложения при излучении мягких фотонов не  $\alpha_{em} = \frac{1}{137}$ , а

$$\alpha_{em} \ln \left( \frac{\varepsilon_0}{m_\gamma} \right) \gg 1.$$

Надо учитывать излучение **сколь угодно большого числа мягких фотонов** с  $\sum_n \omega_{kn} \leq \varepsilon_0$ . В этом случае:

$$d\sigma^{tot} = d\sigma^{(0)} + d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + \dots = d\sigma^{(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{(n)} = d\sigma^{(0)}$$

где  $\omega^{(n)}$  - вероятность излучить  $n$  мягких фотонов.

При условии, что фотоны излучаются независимо и амплитуды факторизируются.  
Замечание: таким образом, излучение мягких фотонов **никак не сказывается** на сечениях любых процессов, поскольку фотоны излучаются независимо, и для **мягких фотонов** амплитуда (сечение) факторизуется!



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ