МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ШАБАНОВ
ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
АНДРЯН КАРИНУ КАРЕНОВНУ

Оглавление

Лекция 1

Введение

Предмет изучения теории вероятностей: математический анализ случайных явлений.

Предположим, мы проводим некоторый эксперимент. Мы имеем некоторый результат по итогам этого экскремента.

Результат:

1. Детерминированный
   Пример:
   Если выбросить кирпич из окна, он упадет на землю. Ничего другого произойти не может.
   Такими вещами занимаются другие науки (физика например).
2. Непредсказуемый (случайный)
   Пример:
   Если бросаем монетку, не можем сказать заранее, выпадет ли орел или решка.

Возникает вопрос. Если результат случайный, то что тут можно изучать? Какие закономерности? Если мы бросим монетку и выпадет решка, то о чем это будет говорить? Вообще говоря, ни о чем. Можем сказать, что иногда выпадает решка, но больше сказать ничего не можем.

Люди обнаружили, что если эту монетку бросать много раз, то появится некоторая закономерность. То есть индивидуальные эксперименты не позволяют выявить закономерности. Но в больших сериях однородных (когда все происходит одинаково) экспериментов наблюдается феномен «устойчивости частот».

Историческая справка:

В XVIII веке математик, по имени Бюффон, подбросил монетку 4040 раз и у него выпал «герб» 2048 раз. Соответственно частота выпадения этого герба была 0,508….

В XIX веке математик, по имени Пирсон, подбросил монетку 24000 раз. И у него выпал «герб» 12012 раз. Частота получилась 0,5005….

Это позволило сформулировать следующий принцип.

Принцип устойчивости частот

Пусть A – некоторое событие. Тогда с ростом числа экспериментов частота появления события A в результате этих экспериментов стремится к некоторому числу $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \epsilon [0,1]$.

Если $\nu_n(A)$ – это частота появления A за n экспериментов, то $\nu_n(A) \to P(A), n \to \infty$.
P(A) – это вероятность события A.

С математической точки зрения данное определение плохое.

Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова

Вероятностное пространство – это тройка (Ω, F, P).

I. Ω – множество произвольной природы. Называют пространством элементарных исходов (событий). Ω отвечает за пространство всех возможных исходов эксперимента, который мы пытаемся описывать. Элементы $\omega \in \Omega$ называются элементарными событиями. В результате эксперимента происходит один и ровно один элемент $\omega \in \Omega$.

   Примеры:

   3. Бросок монетки
      $\Omega = \{\text{О}, \text{Р}\}$, где О – это орел, а Р – это решка.
   4. Бросок игральной кости
      $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$
   5. Выстрел по мишени
      $\Omega =$ единичный круг в $\mathbb{R}^2$=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
      $\omega = (x, y)$ – результат попадания.

II. $F - \sigma$- алгебра подмножеств Ω ($F \in 2^{\Omega}$ – система подмножеств Ω).

   Определение

   Система F подмножеств Ω называется **алгеброй**, если выполнено три свойства:

   1. $\Omega \in F$
   2. $A \in F \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in F$
   3. $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

Наблюдение: $\emptyset \in F$!

Определение

Элемент F называется **событиями**. Событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ называется **дополнительным событием** к A (дополнением).

Упражнение:

Алгебра замкнута относительно $\cup, \setminus, \Delta$.

Примеры:

1. $F^* = \{\emptyset, \Omega\}$ – тривиальная алгебра
2. $F^* = 2^{\Omega}$ (все подмножество Ω) – дискретная алгебра.
3. $F = \{\emptyset, \Omega, \text{A}, \bar{A}\}$ – алгебра порожденная событием A.

4. $\Omega = \mathbb{R}$ (прямая)
   Конечные объединения подмножеств вида $(-\infty; a), [\, b;\ c), [d, +\infty)$ образуют алгебру ($(-\infty; a],\ (\ b;\ c],\ (\ d; +\infty)$).

Определение

Система F подмножеств Ω называется ***σ*- алгеброй**, если выполнено:

1. F – алгебра
2. Для $\forall$ последовательности $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, $A_n \in\ F\ \forall n$, выполнено $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

Наблюдение: $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

Примеры:

1. $F^* - \sigma$-алгебра
2. Любая конечная алгебра $-$ это σ-алгебра
3. Пример $\Omega = \mathbb{R}$ - это алгебра, НО не σ-алгебра.

III. P - **вероятностная мера** на измеримом пространстве (Ω, F) (**вероятность**).
Если есть множество и на нем есть σ-алгебра, то такая пара называется измеримым пространством.

Определение

$P: F \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим свойствам

1. $P(\Omega) = 1$
2. Для $\forall$ последовательности событий $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in\ F\ \forall n, A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i\ \neq\ j$, выполнено $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ – свойство счетной аддитивности.

называется **вероятностью.**

Утверждение (простейшие свойства вероятности)

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Конечная аддитивность
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$$
3. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A)\ +\ P(\mathrm{B})\ -\ P(A \cap \mathrm{B})$ – формула включения исключения
6. $P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$

Доказательство:

1. Пусть $A_n = \emptyset$ для $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \Rightarrow P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$
2. Положим $A_n = \emptyset$ для $\forall n > m$ для $\forall\ n > m \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
   $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right), \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{m} P(A_n) + \sum_{n=m+1}^{\infty} P(A_n) \Rightarrow\ P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$
3. $A \cup \bar{A} = \Omega$
   Далее, применяем 2
4. $B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$
5. $A \cup B = A \cup (B \setminus A), B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \Rightarrow$ пользуемся 2 и получаем $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A), P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$ $\Rightarrow\ P(B \setminus A) =\ P(B) - P(A \cap B)$ подставим в $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) =\ P(A) + P(B)\ -\ P(A \cap B)$
6. Индукция по m
   - m = 2
     Согласно свойству 5
     $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_1 \setminus A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$
   - Пусть это верно для $\forall m' < m$
   - $P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n \cup A_m\right) \leq P(A_m) + P\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n\right) \leq$ |индукция| $\leq P(A_m) + \sum_{n=1}^{m-1} P(A_n) = \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$

■

Теорема (о непрерывности вероятностной меры)

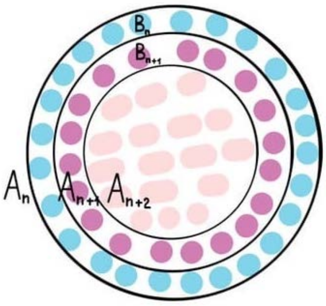
Пусть (Ω, F) – измеримое пространство, $P: F \to [0,1]$- функция, обладающая свойством конечной аддитивности, и $P(\Omega) = 1.$ Тогда следующие условия эквиваленты:

a) P – счетно-аддитивна (т.е. P – вероятность)
b) P непрерывна в нуле т.е. для $\forall$ последовательности A_n, которая сходится сверху к $\emptyset$ событию$\left(A_n \supset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}\text{и} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset\right)$, выполлнено $P(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$.
c) P непрерывна сверху т.е. для $\forall$ последовательности A_n, которая сходится сверху к A $\left(A_n \supset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}\text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \text{A}\right)$, выполнено $P(A_n) \to P(A)$ при $n \to \infty$.
d) P – непрерывна снизу т.е. для $\forall$ последовательности A_n, которая сходится снизу к A $(A_n \subset A_{n+1}\ \forall n\ \epsilon \mathbb{N}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A)$, выполнено $P(A_n) \to P(A)$ при $n \to \infty$.

Доказательство:

Из $a) \Rightarrow b)$

Пусть P - счетно-аддитивно и $A_n \to \emptyset$ сверху. Положим $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$.



Тогда $A_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} B_n$. Покажем от противного, что это так.

Пусть это неверно. Пусть $\exists \omega_0 \in A_m$, то $\omega_0 \notin$ ни одному событию B_n при $n \geq m$.

$\omega_0 \notin B_m \Rightarrow \omega_0 \in A_{m+1}$

$\omega_0 \notin B_{m+1} \Rightarrow \omega_0 \in A_{m+2}$ и т.д $\Rightarrow \omega_0 \in \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$

$A_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} B_n$.

В силу счетной аддитивности $P(A_m) \sum_{n=m}^{\infty} P(B_n) -$ остаток сходящегося ряда,

$$P(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) - \text{ сходящийся ряд} \Rightarrow \ P(A_m) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теперь в обратную сторону. Пусть из $b) \Rightarrow a)$. P – непрерывна в нуле.

Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ - события такие, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда положим

$B_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \Rightarrow B_m \supset B_{m+1}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Проверим, что $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \emptyset$. Предположим, что это неверно$\Rightarrow \exists \omega_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$.

Тогда $\omega_0 \in B_1 \Rightarrow \exists k$ т., ч. $\omega_0 \epsilon A_k$. Но тогда $\omega_0 \notin B_{k+1} \Rightarrow$ противоречие$\Rightarrow$

$\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \emptyset$.

Согласно свойству непрерывности в нуле $P(B_m) \to 0, m \to \infty \Rightarrow$ из конечной аддитивности $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n \cup B_{m+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) + P(B_{m+1}) \to$

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) + 0$ при $m \to \infty \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

$c) \Rightarrow b)$ Подставляем A = $\emptyset$.

$b) \Rightarrow c)$ Если A_n сходится сверху к A, то $A_n \setminus A$ сходятся сверху к $\emptyset \Rightarrow$

$P(A_n \setminus A) \to 0.$ Но $A \subset A_n \Rightarrow \ P(A_n \setminus A) = P(A_n) \ - \ P(A) \to 0$

$c) \Rightarrow d)$ Замена A_n на $\bar{A}_n$

■

Замечание:

Теорема работает даже если F – алгебра, но тогда дополнительно требуем, чтобы все счетные пересечения ∈ F.

Дискретные вероятностные пространства

Здесь Ω - не более чем счетное множество, F – дискретная $\sigma-$алгебра, $F=2^{\Omega}$.
P можно задавать как функцию на Ω. $P\colon \Omega \to [0,1]$ т., ч. $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)=1$.
Тогда $\forall$ A $\in$ Ω вероятность задается простой формулой $P(A)=\sum_{\omega\in A} P(\omega)$.

Классическая модель

Ω – конечно, все исходы равновероятны, т.е. $\forall\omega\in\Omega\ P(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}$

$\forall A\ P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}$

Примеры:

1. Бросок монетки

   $\Omega=\{0,P\},\ P(0)=P(P)=\frac{1}{2}$
2. Бросок двух монеток (Заблуждение Д'Аломбера)

   Есть три исхода 00, 0Р, РР$\Rightarrow$ все вероятности $\frac{1}{3}$

   Проблема: эмпирические частоты – другие.

   Физически есть четыре исхода: 00, РР, 0Р, Р0 $\Rightarrow$ вероятности по $\frac{1}{4}$.

Лекция 2

3. Симметричная схема Бернулли
   $\Omega = \{\vec{\omega}: \vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n), \omega_i \in \{0,1\}\}$
   $|\Omega| = 2^n \Rightarrow P(\vec{\omega}) = \frac{1}{2^n}, \forall \vec{\omega} \in \Omega$
4. Урновые схемы
   В ящике лежит M различимых шаров. Случайно вынимаем n шаров из ящика.
   Варианты:
   - С возвращением (можем повторяться) или без возвращения (не можем повторяться)
   - Упорядоченный (вынимаем по очереди) или неупорядоченный (вынули разом) выбор

$\|\Omega\| =?$	С возвр.	Без возвр.
Упорядоч.	M^n	$(M)_n = M(M-1)\dots(M-n+1)$
Неупорядоч.	$\bar{C}_m^n = C_{M+n-1}^n$	$C_M^n \frac{(M)_n}{n!}$

Геометрические вероятности

Здесь вероятностное пространство (Ω, F, P) задается следующим образом:

1) $\Omega \in \mathbb{R}^d$, d≥ 1, для Ω определен объем $\mu(\Omega)$, положительный и конечный, $0 < \mu < \infty$
2) F состоит из тех подмножеств Ω для которых определен объем $\mu(A)$
3) P задается по правилу $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \forall A \in F$

Пример: “Задача о встречи”

Два студента договорились встретиться между 9 и 10 часами на станции метро «Университет». Каждый приходит в случайное время между 9 и 10 часами и ждет не более 15 минут, а потом - уезжает.

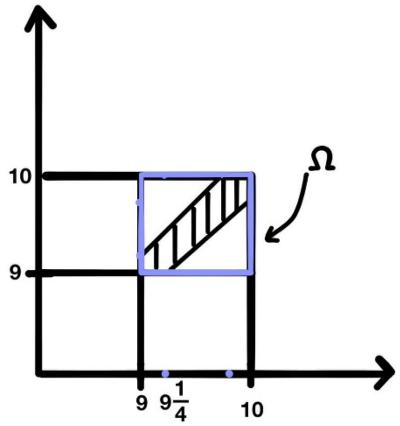
Вопрос: С какой вероятностью они встретятся?

Решение

$\Omega = [9,10] \times [9,10]$

(u,v)∈ Ω, u – время прихода первого студента, v - время прихода второго студента.

$A = \left\{(u, v): |u - v| \leq \frac{1}{4}\right\}$



$\mu(A) = \mu(\Omega) - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{7}{16}$

Условные вероятности

Пусть есть (Ω, F, P) – вероятностное пространство.

Определение

Пусть $B \in F$ – событие, $P(B) > 0 \Rightarrow$ условной вероятностью события A при условии события B называется $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Если $P(B) = 0$, то пока будем считать, что вероятность $P(A|B) = 0 \; \forall A \in F$.

Следствие

$\forall A, B \in F \;\; P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$

Замечание

Если $P(B) > 0$, то на (Ω, F) можно определить новую вероятностную меру

$\tilde{P}(A) = P(A|B) A \in F$. Это тоже вероятностная мера на (Ω, F).

Определение

Набор событий $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ называется разбиением пространства Ω, если

$B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$

Другой термин: полная система несовместных событий.

Лемма (формула полной вероятности)

Если $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$- разбиение Ω, то для $\forall\, A \in F$ выполнено равенство
P(A)=$\sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) P(B_n)$

Доказательство:

P(A)=P(A$\cap\, \Omega$)=P(A$\cap$ ($\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$)=P($\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$)={счетная аддитивность}=

$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n)$=$\sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) P(B_n)$

Пример:

«Задача о сумасшедшей старушке»

В самолет садится n пассажиров. Каждый имеет свое место. Первой заходит старушка и садится случайно. Каждый следующий садится на свое место, если оно свободно, или садится на случайное место из оставшихся.

Вопросы: с какой вероятностью

1) Последний пассажир сядет на свое место?
2) Предпоследний пассажир сядет на свое место?
3) И последний, и предпоследний пассажиры сядут на свои места?

Решение:

Пусть 1 – место старушки.

$B_i = \{\text{старушка села на место } i - \text{го пассажира}\}$

$B_1, \ldots, B_n\, -$ разбиение Ω

P(B_i)=$\frac{1}{n}$ $\forall i = 1 \ldots n$

1) A={последний пассажир сел на свое место}
   Пусть n=2
   P(A)= $\frac{1}{2}$
   Пусть n=3
   P(A)= $\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
   Гипотеза: $\forall n\ P(A)=\frac{1}{2}$
   Доказательство по индукции по n. При n=2 утверждение верно. Пусть оно верно для числа пассажиров $< n$. Докажем для n. По формуле полной вероятности:
   P(A)= $\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i)$
   P(A$|B_1)=1$
   P(A$|B_n)=0$
   P(A$|B_i)=\{$по предположению индукции$\}=\frac{1}{2}\ \forall 1<i<n$
   $\Rightarrow\ P(A)=\frac{1}{n}*1+\frac{1}{n}*0+\frac{n-2}{n}*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
2) C={предпоследний пассажир сел на свое место}
   n=3
   P(C)= $\frac{2}{3}$
   Гипотеза: $\forall n\ P(A)=\frac{2}{3}$
   Индукция по n. При n=3 это верно. Пусть оно верно для числа пассажиров $< n$. Докажем для n. По формуле полной вероятности:
   P(C)= $\sum_{i=1}^{\infty} P(\mathrm{C}|B_i)P(B_i)$
   P(C$|B_1)=1$
   P(C$|B_n)=1$
   P(C$|B_{n-1})=0$
   P(C$|B_i)=1\ \forall 1<i<n-1$
   $$\Rightarrow\ P(C)=\frac{2}{n}*1+\frac{1}{n}*0+\frac{n-3}{n}*\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$
3) D={последний и предпоследний пассажиры сели на свои места}
   n=3
   P(D)= $\frac{1}{3}$
   Гипотеза: $\forall n\ P(D)=\frac{1}{3}$
   Индукция по n. При n=3 это верно. Пусть оно верно для числа пассажиров $< n$. Докажем для n. По формуле полной вероятности:
   P(D)= $\sum_{i=1}^{\infty} P(D|B_i)P(B_i)$
   P(D$|B_1)=1$
   P(D$|B_n)=0$
   P(D$|B_{n-1})=0$

$\mathrm{P}(\mathrm{D}|B_i) = \frac{1}{3} \forall 1 < i < n-1$

$$\Rightarrow \ P(A \cap C) = P(D) = \frac{1}{n} * 1 + \frac{2}{n} * 0 + \frac{n-3}{n} * \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = P(A) * P(C)$$

■

Лемма (формула Байеса)

Пусть $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$- разбиение Ω, A$\in F$ т., ч. P(A)>0. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{P}(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)*P(B_n)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i)}$

Доказательство

$\mathrm{P}(B_n|A) = \frac{P(A\cap B_n)}{P(A)} = \text{формулаполнойвероятности} = \frac{P(A|B_n)*P(B_n)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i)}$

■

Определение

$\mathrm{P}(B_n)$ называется априорной вероятностью B_n.

$\mathrm{P}(B_n|\ A)$ называется апостеАриорной вероятностью при условии выполнения события A.

Системы множеств

Пусть Ω – некоторое множество.

Определение

Система M подмножеств Ω называется π системой, если $\forall\ A, B\ \in\ M$ (замкнутость относительно пересечения).

Определение

Система M подмножеств Ω называется λ системой, если

1. $\Omega \in\ M$
2. $\forall\ A, B\ \in\ M,$ т.ч $A \subset B$ => $A \backslash B \in\ M$
3. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in\ M\ \forall n, A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \Rightarrow\ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\ \in\ M$

Лемма 1(первая теорема о $\pi - \lambda$ системах)

Система F подмножеств Ω является $\sigma -$ алгеброй ⇔ F является $\pi -$системой и λ - системой.

Доказательство

$\Omega \in F$ (свойство 1) λ -системы), тогда $\forall A \in F \quad \bar{A} = \Omega \backslash A \in F$ (свойство 2) λ -системы).

Значит, F-алгебра (т.к. есть еще и пересечение).

(<=)

Пусть $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}, B_n \in F$.

Проверим, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in F$.

Положим $A_n = \bigcup_{n=1}^{m} B_n$. Тогда $A_m \subset A_{m+1} \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. По свойству алгебры $A_m \in F \ \forall m \Rightarrow$ по свойству 3) λ -системы $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in F$.

(=>) очевидно из свойств $\sigma -$ алгебры

■

Пример:

Ω={1, 2, 3, 4}

L ={$\emptyset, \Omega, (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)$} –это λ -система, но не алгебра.

Лемма 2

Пусть M-система подмножеств Ω. Тогда ∃! наименьшая (по включению) алгебра($\sigma -$ алгебра, λ -система, $\pi -$система) подмножеств Ω, содержащую внутри себя M.

Обозначения:

α(M) (σ(M), π(M), λ(M)).

Доказательство

Рассмотрим всевозможные алгебры (σ-алгебры, π-системы, λ-системы), содержащие M. $M \subset 2^{\Omega}$=> это множество непусто. Возьмем α(M) (σ(M), π(M), λ(M))- пересечние всех алгебр ($\sigma -$ алгебр, λ -систем, $\pi -$систем), содержащих M. Тогда α(M) (σ(M), π(M), λ(M)) -это тоже алгебра (σ-алгебра, λ -система, $\pi -$система), содержащая M. Очевидно, что она наименьшая по построению.

■

Примеры:

1) Ω=ℝ.
   Борелевская σ-алгебра на ℝ- это наименьшая σ-алгебра, содержащая все интервалы (a;b).
   $\mathrm{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a;b): a < b)$

Упражнение

B($\mathbb{R}$)-это наименьшая σ-алгебра; содержащая отрезки (лучи, полуинтервалы, открытые множества).

Определение

Элементы B($\mathbb{R}$)- борелевские множества на $\mathbb{R}$.

2) Ω=$\mathbb{R}^n, n > 1$

Борелевской σ-алгеброй в $\mathbb{R}^n$ называется минимальная σ-алгебра, содержащая все прямоугольники вида $B_1 \times \ldots \times B_n$, где $B_i \in$ B($\mathbb{R}$).

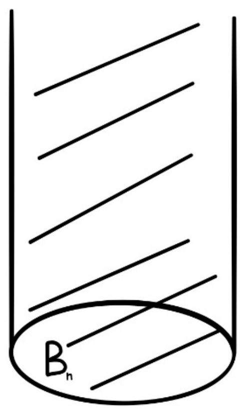
B($\mathbb{R}^n$) $= \sigma(B_1 \times \ldots \times B_n \colon B_i \in$ B($\mathbb{R}$)).

Упражнение

B($\mathbb{R}^n$)= $\sigma((a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \colon a_i < b_i \ i = 1 \ldots n)$

Лекция 3

3) Ω=$\mathbb{R}^\infty$ (правильнее $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), т.к. Ω={$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots)$: $x_i \in \mathbb{R} \forall i \mathbb{N}$} −последовательности чисел из $\mathbb{R}$.
   Для n∈ $\mathbb{N}$ и $B_n \in B(\mathbb{R}^n)$рассмотрим цилиндр с основанием B_n:
   $F_n(B_n) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^\infty: (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_n$



Борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^\infty$ называется минимальная σ-алгебра, содержащая все подобные цилиндры.
$B(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(F_n(B_n): n \in \mathbb{N}, B_n \in B(\mathbb{R}^n))$

<u>Теорема (вторая теорема о π-λ-системах)</u>

Пусть M-π-система подмножеств Ω. Тогда λ(M)=σ(M).

Доказательство

Заметим, что σ(M)-λ-система=> в силу минимальности λ(M)⊂ σ(M).

λ(M)-это λ-система. Если мы сможем доказать, что λ(M)-это еще и π-система, то по первой теореме о π-λ-системах мы получим, что λ(M)-это σ-алгебра=> в силу минимальности σ(M) $\subset \lambda(M) =>$ λ(M)= σ(M).

«Принцип подходящих множеств»

Рассмотрим систему $M_1 = \{A \in \lambda(M): \forall B \in M$ выполнено $A \cap B \in \lambda(M)\}$

Проверим, что M_1-это λ-система.

1) Ω∈ M_1?
   $\Omega \cap B = B \in M \subset \lambda(M) \Rightarrow \Omega \in M_1$
2) Пусть A,B ∈ $M_1, A \subset B$. Верно ли, что B|A∈ M_1?
   A,B∈ $\lambda(M) =>$ (свойство $\lambda -$ системы) $B \backslash A \in \lambda(M)$

Для $\forall C \in M\ (B|A) \cap C = (B \cap C)\backslash(A \cap C)$
$(B \cap C), (A \cap C) \in \lambda(M)$,т.к. A,B∈ M_1=>$(B \cap C)\backslash(A \cap C) \in \lambda(M)$
По свойству 2) λ-системы => B\A∈ M_1

3) Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in M_1, A_n \uparrow A$. Верно ли, что $A \in M_1$?
$A_n \in \lambda(M)$ =>по свойству 3) λ-системы A∈ $\lambda(M)$.
Пусть $\forall B \in M\ \ A \cap B \in \lambda(M)$?
$A_n \cap B \uparrow\ A \cap B$. Т.к $A_n \in M_1$, то $A_n \cap B \in \lambda(M) =>$ по свойству 3) $\lambda -$ системы получаем, что A∩ $B \in \lambda(M). =>\ A \in M_1$
Вывод: M_1-это λ-система.
Т.к. M – это π-система, то M⊂ M_1. В силу минимальности λ(M)⊂ M_1. Но по построению $M_1 \subset \lambda(M) =>$ λ(M)=M_1.
Вывод: $\forall A \in \lambda(M)\ \forall B \in M\ \ A \cap B$ ∈λ(M)

Рассмотрим тогда M_2.

$$M_2 = \{A \in \lambda(M) : \forall B \in \lambda(M) \text{ выполнено } A \cap B \in \lambda(M)\}$$

По доказанному M⊂ M_2 и очно так же проверяется, что M_2-это λ-система.
Вывод: λ(M)=M_2 $=>\ \lambda(M) - \pi -$ система

■

<u>Следствие</u>

Если M- это π-система подмножеств Ω, L- это λ-система на Ω и M⊂ L, то σ(M) ⊂ L.
Доказательство
По теореме σ(M)=λ(M). В силу минимальности λ(M) ⊂ L

■

Независимость событий и систем событий

Пусть (Ω,F,P)-вероятностное пространство.

<u>Определение</u>

События A,B∈ F называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Примеры:

1) Классическая модель-два броска симметричной монеты.
A={в первый раз выпала Р}
B={во второй раз выпал О}
P(A)=P(B)=1/2
P(A∩B)=1/4=> независимая
2) Бросок игральной кости
A={выпало четное число}
B={выпало число, кратное 3}

P(A)=1/2
P(B)=1/3
P(A∩B)=1/6=>A,B независимые

3) Задача о сумасшедшей старушке
A={последний пассажир сел на свое место}
B={предпоследний пассажир сел на свое место}
P(A)=1/2
P(B)=2/3
P(A∩B)=1/3=>независимые

Упражнение:

А независимо с В, то А независимо с $\bar{B}$, $\bar{A}$ независимо с В, $\bar{B}$ независимо с $\bar{A}$.

<u>Определение</u>

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ события из F. Тогда они называются попарно независимыми, если A_i независимо с A_j при $\forall i \neq j$.

<u>Определение</u>

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ события из F. Они называются независимыми в совокупности, если $\forall 1 \leq k \leq n\ \forall 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ выполнено $\mathrm{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{ij})$.

<u>Замечание</u>

Если $A_1, \ldots, A_n$-независимы в совокупности, то таков и любой поднабор

$\{A_1, \ldots, A_k\} \subset \{A_1, \ldots, A_n\}$

Упражнение*(Задача о сумасшедшей старушке)

$A_i = \{i -$ й пассажир сел на свое место$\}, i = 2, \ldots, n$

Вопрос: Верно ли, что $A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности?

Вопрос: Как связаны два понятия независимости?

Наблюдение: Если есть независимость в совокупности, то есть и попранная независимость.

<u>Контрпример (Берштейн)</u>

Тетраэдр с 4 цветными гранями:

-красный

-синий

-зеленый

-красный, синий, зеленый

Бросаем случайно тетраэдр и смотрим на цвет нижней грани.

$A_k = \{$на выпавшей грани есть красный цвет$\}$

$A_c = \{$на выпавшей грани есть синий цвет$\}$

$A_з = \{$на выпавшей грани есть зеленый цвет$\}$

$P(A_k) = P(A_c) = P(A_з) = 1/2$

$P(A_k \cap A_c) = P(A_k \cap A_з) = P(A_c \cap A_з) = 1/4 => A_k, A_c, A_з$ независимы попарно

Но если мы посмотрим на $P(A_k \cap A_з \cap A_c) = 1/4 \neq 1/8 = P(A_k)P(A_c)P(A_з) =>$ не являются независимыми в совокупности.

Наблюдения:

1) $\Omega, \emptyset$ независимы с $\forall A \in F$
2) A независимо с A⇔P(A)=0 или P(A)=1

Определение

Системы событий $M_1, \ldots, M_n$ из F называются независимыми в совокупности, если $\forall A_1 \in M_1, \ldots, A_n \in M_n$ события $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности.

Теорема (критерий независимости σ-алгебр)

Пусть $M_1, \ldots, M_n -$ это $\pi -$ системы событий на F. Тогда $M_1, \ldots, M_n$ независимы в совокупности $<=> \sigma(M_1), \ldots, \sigma(M_1) -$ независимы в совокупности.

Доказательство

Докажем для n=2. При n>2 все аналогично.

(<=) Т.к. $M_i \subset \sigma(M_i)$, то $M_1, \ldots, M_n -$ тоже независимы в совокупности.\

(=>) «Принцип подходящих множеств»

Рассмотрим $L_1 = \{A \in \sigma(M_1)$: A независимо с $M_2\}$. Проверим, что L_1-это λ-система.

1) $\Omega \in \sigma(M_1)$. Ω независима с $\forall B \in M_2 \; => \; \Omega \in L_1$.
2) A,B $\in L_1, A \subset B \; => \; B\backslash A \in L_1$?
   A,B$\in \sigma(M_1) \Rightarrow \; B\backslash A \in \sigma(M_1)$. Для $\forall C \in M_2$ проверим, что C независимо с $B\backslash A$.

   P((B\A)$\cap$ C)=P($(B \cap C)(A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \{$ B,C -независимы и A,C независимы, т.к. $A, B \in L_1\} = P(B)P(C) - P(A)P(C) = P(C)(P(B) - P(A)) = P(B\backslash A)P(C) \Rightarrow \; B\backslash A$ независимо с C.

3) Пусть $\{A_n$, n$\in \mathbb{N}\}$, $A_n \in L_1$ и $A_n \uparrow A$. Верно ли, что A$\in L_1$?
   $A_n \in \sigma(M_1) => A = \bigcup_n A_n \in \sigma(M_1)$.
   Для $\forall$C $\in$ M_2 имеем $A_n \cap C \uparrow A \cap C$. По теореме о непрерывности вероятностной меры P(A$\cap$ C) $= \lim_n PAn \cap C = limnPAnPC = PAPC \Rightarrow A$ и Cнезависимы $\Rightarrow$
   $A \in L1$
   Вывод: $L_1 -$ это $\lambda -$ система.
   По условию $M_1 \subset L_1$. По следствию из второй теоремы о π-λ-системах получаем, что σ$(M_1) \subset L_1$. По построениею $L_1 \; \subset$ σ$(M_1) \; => L_1 =$ σ(M_1) .
   σ(M_1) независима с M_2.
   Теперь рассмотрим $L_2 = A \in \sigma(M_2)$: Aнезависимо с$\sigma(M_1)$.
   Точно так же проверяем, что $L_2 - \lambda -$ систем … Уже доказали, что $M_2 \subset \; L_2 \Rightarrow$ по следствию из второй теоремы о π-λ-системах получаем, что σ$(M_2) \subset L_2$, т. е. σ(M_2) независима с σ(M_1)

■

<u>Определение</u>
Пусть ($M_\alpha, \alpha \in$ Ɑ)- произвольный набор систем событий из F. Тогда эти системы называются независимыми в совокупности, если независим в совокупности любой конечный поднабор $M_{\alpha_1}, \ldots, M_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in$ Ɑ.

Вероятностные меры на ($\mathbb{R}$, B($\mathbb{R}$))

<u>Теорема (Каратеодори, о продолжении меры)</u>

Пусть P_0-вероятностная мера на (Ω, A), где A-алгебра подмножеств Ω

(P_0: A $\rightarrow [0,1] -$ счетная аддитивность, $P_0(\Omega) = 1$). Тогда $\exists!$ вероятностная

мера P на $(\Omega, \sigma(\mathrm{A}))$, которая является продолжением меры P_0: $\forall$A $\in \mathcal{A}$ $P_0(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$

Обозначение:

$P_0|_A = P|_A$

Лемма

Пусть M-π-система подмножеств на Ω, M⊂ F и P,Q -две вероятностные меры на (Ω, F). Тогда если $P|_M = Q|_M$, то $P|_{\sigma(M)} = Q|_{\sigma(M)}$.

Следствие

Единственность продолжения в теореме Каратеодори.

Доказательство

Пусть P, Q -два продолжения P_0. Тогда $P|_A = P_0|_A = Q|_A$=> по лемме $P|_{\sigma(A)} = Q|_{\sigma(A)}$.

Лекция 4

Лемма

Пусть М-π-система подмножеств на Ω, М⊂ F и P,Q -две вероятностные меры на (Ω, F). Тогда если $\mathrm{P}|_M = Q|_M$, то $\mathrm{P}|_{\sigma(M)} = Q|_{\sigma(M)}$.

Доказательство

Рассмотрим систему событий L=$\{A \in F: P(A) = Q(A)\}$.

Проверим, что L-это λ-система:

1) P(Ω)=1=Q(Ω)=>Ω∈ L
2) A,B∈ L и A⊂B. B\A∈ L?
   P(B\A)=P(B)-P(A)=Q(B)-Q(A)=Q(B\A)=>B\A∈ L
3) Пусть $A_n \uparrow A, A_n \in L\ \forall n \in \mathbb{N}$. A∈ L?
   P(A)={непрерывность вероятностной меры}=$\lim\limits_n P(A_n) = \lim\limits_n Q(A_n) = Q(A) =>$ $A \in L$.

По условию M⊂L. По следствию из второй теоремы о π-λ-системах получаем, что σ(M)⊂L=> $\mathrm{P}|_{\sigma(M)} = Q|_{\sigma(M)}$.

■

Функции распределения

Пусть P -вероятностная мера на (ℝ, B(ℝ)).

Определение

Функцией распределения вероятностной меры P называется F(x)=P((-∞, x]), $x \in \mathbb{R}$.

Лемма (свойства функции распределения)

1) F(x) не убывает
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$
3) F(x) непрерывна справа

Доказательство

1) Пусть x>y. Тогда F(x)= P((-∞, x])≥ $P(((-\infty, y) = F(y)$
2) Пусть $x_n \downarrow -\infty$ $(x_n \geq x_{n+1}, x_n \to -\infty)$.
   Тогда (-∞, x_n] $\downarrow \emptyset$. В силу непрерывности вероятностной меры

$\lim\limits_{x_n \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) = P(\emptyset) = 0$

Пусть $x_n \uparrow +\infty$. Тогда (-∞, $x_n] \uparrow \mathbb{R}$ =>

в силу непрерывности вероятностной меры $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) = P(\mathbb{R}) = 1$

3) Пусть $x_n \downarrow x$ $(x_n \geq x_{n+1}, x_n \to x)$.

Тогда $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x] \Rightarrow$ в силу непрерывности вероятностной меры $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) = P((-\infty, x]) = F(x)$

■

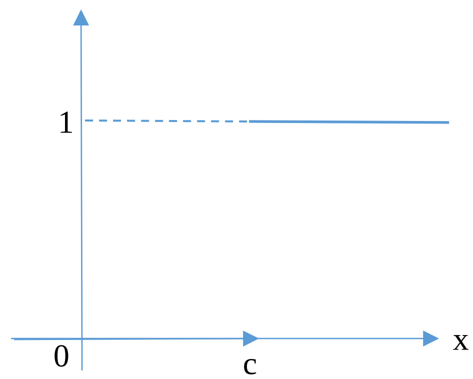
<u>Определение</u>

Если F(x), x∈ ℝ, удовлетворяет свойствам 1), 2), 3) из леммы, то F(x) называется функцией распределения ℝ.

Примеры:

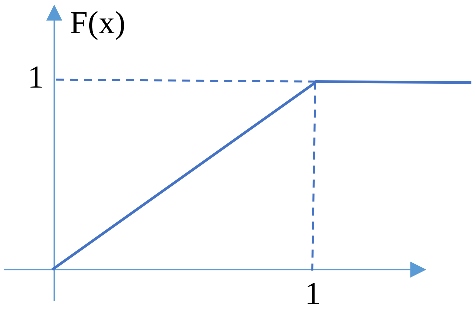
1) Пусть c∈ ℝ, положим

$F(x)=\begin{cases} 1, x \geq c \\ 0, x < c \end{cases}$



Такая F(x) соответствует следующей мере P, где $P(A)=\begin{cases} 1, c \in A \\ 0, c \notin A \end{cases}, A \in B(\mathbb{R})$

2) F(x) = $\begin{cases} 1, x \geq 1 \\ x, x \in [0,1] \\ 0, x < 0 \end{cases}$



P((a, b])=F(b)-F(a)=b-a, a,b∈ [0,1]-это мера Лебега на [0, 1].

Теорема (о взаимной однозначности вероятностных мер и ф.р)

Пусть F(x), x∈ ℝ, -функция распределения на ℝ. Тогда ∃! Вероятностная мера P на (ℝ, B(ℝ)), т.ч. F(x) -ее функция распределения, т.е. $\forall x \in \mathbb{R} F(x) = P\big((-\infty; x]\big)$.

Доказательство

Пусть $\boldsymbol{A}$-алгебра полуинтервалов на ℝ, т.е. ∀A ∈$\boldsymbol{A}$ имеет вид (*) A=$\cup_{k=1}^{n}(a_k, b_k]$, где

$-\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 <\ldots< b_n \leq +\infty$. Мы знаем, что σ($\boldsymbol{A}$)=B(ℝ).

Определим для $\forall A$ ∈$\boldsymbol{A}$ меру P_0 по следующему правилу:

Если A имеет вид (*), то $P_0(A) = \sum_{k=1}^{n}(F(b_k) - F(a_k))$, где формально полагаем

F(+∞) = 1, F(-∞) = 0. Тогда $P_0(\mathbb{R}) = 1$ и обладает свойством конечной аддитивности. Если нам удастся показать, что P_0 обладает свойством счетной аддитивности на $\boldsymbol{A}$, то по теореме Каратеодори существует единственное продолжение P_0 на σ($\boldsymbol{A}$)=B(ℝ). Это продолжение P и будет искомой мерой, F(x)= $\boldsymbol{P_0}((-\infty; \boldsymbol{x}]) = \boldsymbol{P}((-\infty; \boldsymbol{x}]$.

По теореме о непрерывности вероятностной меры конечная аддитивность и непрерывность в нуле на $\boldsymbol{A}$ просто эквивалентны счетной аддитивности.

Пусть $A_n \downarrow \emptyset, A_n$ ∈$\boldsymbol{A}$ $\forall \boldsymbol{n}$. Надо проверить, что $\lim\limits_{n} P_0(A_n) = 0$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$: Для $\forall n \in \mathbb{N}$ подбираем $B_n \in \boldsymbol{A}$, т.ч.

1) $[B_n] \subset A_n$, где $[B_n]$-замыкание события B_n
2) $P_0(A_n) - P_0(B_n) \leq \varepsilon/(2^n)$

Пусть существует N∈ ℕ,т.ч. $A_n \subset [-N, N]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $A_n = \coprod_{k=1}^{m}(a_k, b_k]$ возьмем

$B_n = \coprod_{k=1}^{m}(a'_k, b_k]$, где $a'_k > a_k$ и в силу непрерывности справа F(x) можно так выбрать a'_k, что $P_0(A_n) - P_0(B_n) = \sum_{k=1}^{m}(F(a'_k) - F(a_k)) \leq \varepsilon/(2^n)$.

В силу $A_n \downarrow \emptyset$ выполнено $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ => $\bigcap_{n=1}^{\infty}[B_n] = \emptyset$. При этом $[B_n] \subset [-N, N]$ и они замкнутые множества. В силу принципа компактности существует $n_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\bigcap_{n=1}^{n_0}[B_n] = \emptyset$ (=> $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$).

Тогда $P_0(A_{n_0}) = P_0(A_{n_0} \setminus \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n) \leq P_0(\cup_{n=1}^{n_0}(A_{n_0} \setminus B_n)) \leq \sum_{n=1}^{n_0} P_0(A_{n_0} \setminus B_n) \leq$

$\leq \{A_{n_0} \subset A_n\} \leq \sum_{n=1}^{n_0} P_0(A_n \setminus B_n) = \sum_{n=1}^{n_0}(P_0(A_n) - P_0(B_n)) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \varepsilon/(2^n) \leq \varepsilon$

В силу монотонности убывания A_n, получим, что $\forall n \geq n_0 \ P(A_n) \leq P(A_{n_0}) \leq \varepsilon$ =>

$\lim_n P_0(A_n) = 0$.

Если A_1 не ограничено, тогда возьмем N т., ч. $P_0((-N; N]) \geq 1 - (\varepsilon/2)$.

Тогда рассмотрим $A'_n = A_n \cap (-N; N] \in \mathcal{A}$. Тогда A'_n ограничены, $A'_n \downarrow \emptyset$. В силу доказанного $P_0(A'_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $P_0(A_n) = P_0(A'_n) + P_0(A_n \cap \overline{(-N; N]})) \leq$
$\leq P_0(A'_n) + \varepsilon/2$. Тогда $\exists n_0$ т., ч. $\forall n > n_0 \ P_0(A_n) \leq \varepsilon$

■

Классификация функций распределения и вероятностных мер ($\mathbb{R}$, B($\mathbb{R}$))

1) Дискретные распределения

Терминология: «распределение»=»вероятностная мера»

<u>Определение</u>

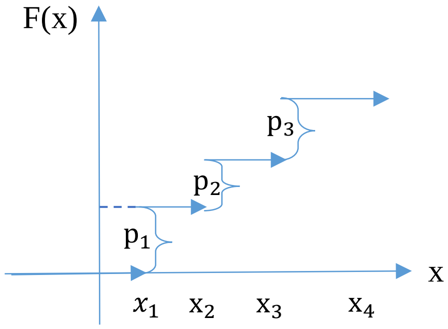
Вероятностная мера P на ($\mathbb{R}$, B($\mathbb{R}$)) называется дискретной, если $\exists X \in \mathbb{R}$ – не более чем счетное множество т., ч. $P(\mathbb{R} \setminus X) = 0$, а $\forall x \in X \ P(\{x\}) > 0$ (P сосредоточено на множестве X).

Пусть X счетное, X=$\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$. Тогда обозначим $p_k = P\{x_k\} > 0, k \in \mathbb{N}$.
$\boldsymbol{\sum_k p_k = P(X) = 1}$.

<u>Определение</u>

Набор ((x_k, p_k), k$\in \mathbb{N}$) называется распределение вероятностей на X.

Функция распределения P равна:
F(x)=$\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x_k \leq x}} P(\{x_k\}) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x_k \leq x}} p_k$.
F(x) имеет ступенчатый вид, значения F(x) изменяются на величины $\Delta F(x_k) = p_k = F(x_k) - F(x_k - 0)$ при «прохождении» точки x_k. Если $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, то



Примеры:

1) Дискретное равномерное
   X={1,…,N}, $p_k = \frac{1}{N}$, k=1…N.
   Модель: классическая модель, бросок N-гранной кости.

2) Распределение Бернулли, Bern(p), $p \in (0,1)$
   X={0,1}
   $p_1 = p, p_0$=1-p.
   Модель: бросок несимметричной монеты
3) Биномиальное распределение, Bin(n,p), n$\in \mathbb{N}, p \in (0,1)$
   X={0, …, n}
   $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0 \dots n$
   Модель: число успехов при n независимых подбрасываний несимметричной монетки.
4) Пуассоновское распределение, Pas(λ) λ>0.
   X={0, 1, 2, 3, …}=$\mathbb{Z}_+$
   $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, k$\in \mathbb{Z}_+$
   Модель: редкие события (пожары, старатель на Клондайке, …), предел биномиальных.

2) Абсолютно-непрерывные распределения

<u>Определение</u>

Пусть p(t)≥ 0 т.ч. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1$. Тогда функция распределения F(x)= $\int_{-\infty}^{x} p(t)dt = 1$, x$\in \mathbb{R}$, называется абсолютно-непрерывной функцией распределения. Функция p(t) называется плотностью функции распределения F(x). Вероятностная мера P, соответствующая F, так же называется абсолютно-непрерывной.

Упражнение

Проверить, что F(x)-действительно функция распределения.

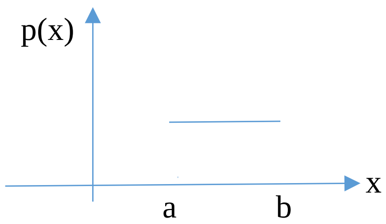
Связь: $F'(x) = p(x)$ (для почти всех x).

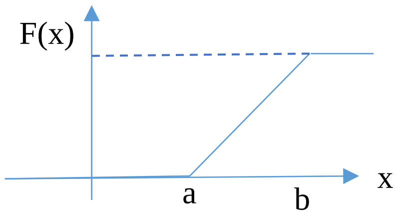
Примеры:

1) Равномерное распределение на [a, b], U(a, b).

   p(x)=$\frac{1}{b-a} I\{x \in [a,b]\}$, где I-индикатор.

   F(x)=$\begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b] \\ 1, x > b \end{cases}$

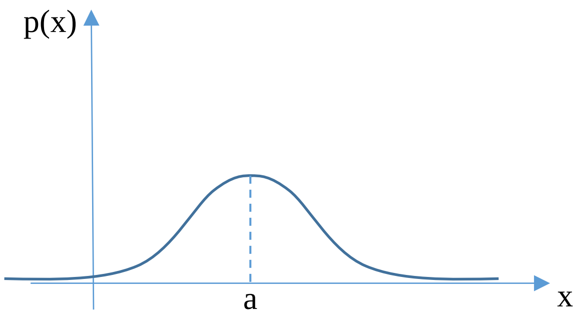


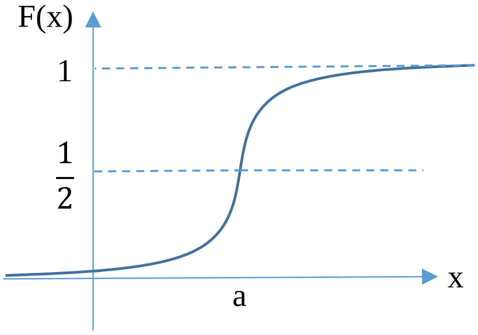


   Модель: геометрическая вероятность.

2) Нормальное распределение (гауссовское), N(a, σ^2), a$\in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

   p(x)=$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, x$\in \mathbb{R}$.



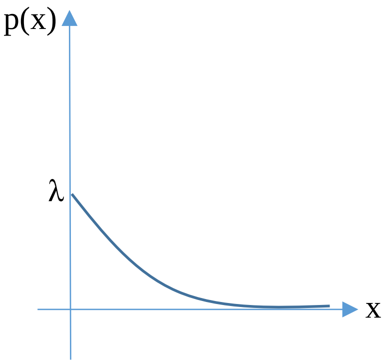


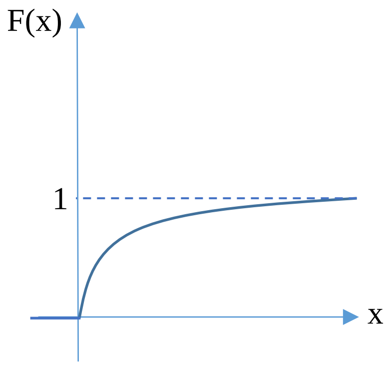
   Модель: измерение с ошибкой.

Лекция 5

Примеры:

3) Экспоненциальное (показательное), Exp(λ), λ>0
   p(x)=$\lambda e^{-\lambda x} I\{x > 0\}$
   F(x)=$\begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$





   Модель: время ожидания.
4) Гамма распределения, Г(α, λ), α>0, λ>0
   p(x)=$\frac{\alpha^\lambda x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{-\alpha x} I\{x > 0\}$
   Exp(α)=Г(α-1)
5) Распределение Коши, К(θ), $\theta > 0$
   p(x)=$\frac{\theta}{\pi(\theta^2+x^2)}$
   F(x)=$\frac{1}{2} + (arctg\frac{x}{\theta}) * \frac{1}{\pi}$

3) Сингулярные распределения

   <u>Определение</u>

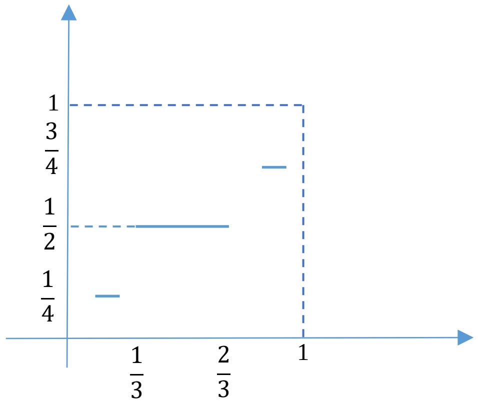
   Точка x∈ ℝ называется точкой роста функции распределения F(x), если $\forall \varepsilon > 0$ $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$.

   <u>Определение</u>

   Функция распределения F(x) называется сингулярной, если она непрерывна и множество ее точек роста имеет Лебегову меру нуль.

   Пример: «канторова лестница»

   Каждый раз делим незаполненный отрезок на три равные части и на среднем отрезке полагаем значение, равным полусумме значений в концах.



Предел-непрерывно неубывающая функция.

Сумма длин отрезков:

$\frac{1}{3} + 2 * \frac{1}{9} + 4 * \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^m = 1$ => Лебегова мера точек роста равна нулю.

Теорема (Лебег)

Пусть F(x)- это функция распределения на прямой, тогда существует представление вида:

F(x)=$\alpha_1 * F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3$(x), где $F_1(x)$-дискретная функция распределения, $F_2(x)$-абсолютно-непрерывная функция распределения, $F_3(x)$-сингулярная функция распределения, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ и $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$

Пусть P-вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathrm{B}(\mathbb{R}^n))$.

Определение

Функцией распределения вероятностной меры P называется

F($\vec{x}$)=P($(-\infty;\ x_1] \times \ldots \times (-\infty;\ x_n]$), где $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Обозначения:

1) Если $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то $(-\infty;\ \vec{x}] = (-\infty;\ x_1] \times \ldots \times (-\infty;\ x_n]$.
2) $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \geq \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, если $\forall i\ x_i \geq y_i$.
3) $\overrightarrow{x^{(k)}} \downarrow \vec{x}$, если $\forall k\ \ \overrightarrow{x^{(k)}} \geq \overrightarrow{x^{(k+1)}}$ и $\vec{x} = \lim_k \overrightarrow{x^{(k)}}$.

Лемма (свойства многомерной функции распределения)

1) Если $\overrightarrow{x^{(k)}} \downarrow \vec{x}$, то $\lim_k F(\overrightarrow{x^{(k)}}) = \lim_k F(\vec{x})$.

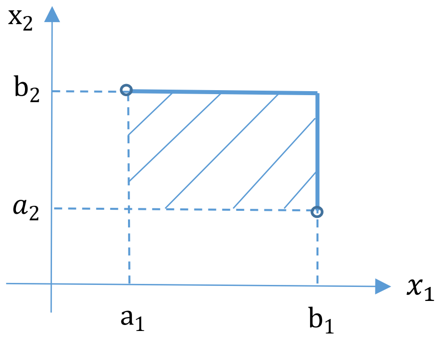
2) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\ \vdots \\ x_n\to+\infty}} F(\vec{x}) = 1$. $\lim\limits_{\substack{x_1\to-\infty\\ \vdots \\ x_n\to-\infty}} F(\vec{x}) = 0$
3) Для $\forall i = 1\ldots n$ и $\forall a < b, a, b \in \mathbb{R}$ введем оператор $\Delta^i_{a,b}F(\vec{x})$=F$(x_1,\ldots,\underbrace{b}_{i},\ldots,x_n)$- $-F(x_1,\ldots,\underbrace{a}_{i},\ldots,x_n)$. Тогда $\forall a_1 < b_1,\ldots,a_n < b_n$ выполнено $\Delta^0_{a_1,b_1} *\ldots* \Delta^n_{a_n,b_n} \geq 0$.

Доказательство

1) Если $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, то $(-\infty;\ \vec{x}^{(k)}] \downarrow (-\infty;\ \vec{x}]$. Отсюда в силу непрерывности вероятностной меры $F(\vec{x}^{(k)}) = P((-\infty;\vec{x}^{(k)}]) \to P((-\infty;\vec{x}]) = F(\vec{x})$.
2) Если $\vec{x}^{(k)} \uparrow (+\infty,\ldots,+\infty)$, то $(-\infty;\ \vec{x}^{(k)}] \uparrow \mathbb{R}^n$. В силу непрерывности вероятностной меры $\lim\limits_{k\to+\infty} F(\vec{x}^{(k)}) = \lim\limits_{k} P((-\infty;\ \vec{x}^{(k)}]) = P(\mathbb{R}^n) = 1$.

   Если $x_i \to -\infty$, то $\vec{x} \downarrow (-\infty,\ldots,-\infty)$, а $(-\infty;\ \vec{x}] \downarrow \emptyset$. В силу непрерывности вероятностной меры $\lim\limits_{x_i\to-\infty} F(\vec{x}) = P(\emptyset) = 0$.
3) Рассмотрим случай n=2

   $\Delta^1_{a_1b_1}\Delta^2_{a_2b_2}F(x_1,x_2) = \Delta^1_{a_1b_1}\big(F(x_1,b_2) - F(x_1,a_2)\big) =$
   $= F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2) = P((a_1,b_1] \times (a_2,b_2]) \geq 0.$



   В общем случае
   $\Delta^1_{a_1b_1} *\ldots* \Delta^n_{a_nb_n}F(x_1,\ldots,x_n) = P((a_1,b_1] \times\ldots\times (a_n,b_n]) \geq 0.$

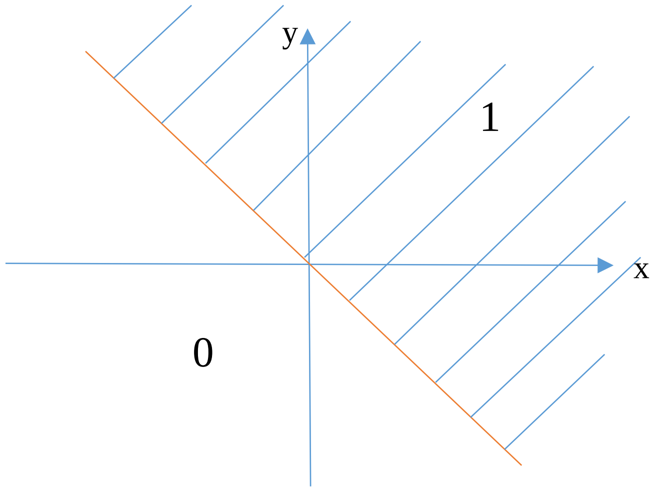
■

<u>Замечание</u>

Свойство 3) не эквивалентно неубыванию по любой координате.

Доказательство

F(x, y)=$\begin{cases} 1, x + y \geq 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$



Тогда F непрерывна сверху (свойство 1)). $\lim\limits_{x,y\to+\infty} F(x,y) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$,

$\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$. F(x, y) не убывает и по x, и по y.

Но $\Delta^1_{-1,1}\Delta^2_{-1,1}F(x,y) = F(1,1) - F(-1,1) - F(1,-1) + F(-1,1) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0$.

Вывод: F(x, y)- не функция распределения в $\mathbb{R}^2$

■

<u>Определение</u>

Функция $F(x_1,\dots,x_n)$ называется функцией распределения в $\mathbb{R}^n$, если она удовлетворяет свойствам 1)-3) из леммы.

<u>Теорема (взаимная однозначность вероятностных мер и функции распределения в $\mathbb{R}^n$)</u>

Пусть $F(x_1,\dots,x_n)$- функция распределения в $\mathbb{R}^n$. Тогда ∃! Вероятностная мера P на

$(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ т., ч. $F(x_1,\dots,x_n)$-ее функция распределения, т.е. $\forall x_1,\dots,x_n$ $F(x_1,\dots,x_n)=$

$=P((-\infty;x_1]\times\dots\times(-\infty;x_n])$.

Примеры:

1) Пусть $F_1(x),\dots, F_n(x)$- функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда $F(x_1,\dots,x_n)=\prod_{k=1}^n F_k(x_k)$ будет многомерной функцией распределения.
   $\Delta^1_{a_1b_1}\dots\Delta^n_{a_nb_n}F(x_1,\dots,x_n)=\prod_{k=1}^n(F_k(b_k) - F_k(a_k)) \geq 0$.
2) Пусть $p(t_1,\dots,t_n)\geq 0$ с условием $\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} p(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots t_n = 1$.

Тогда $F(x_1,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} p(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots t_n$-будет многомерной функцией распределения.

$\Delta^1_{a_1b_1}\dots\Delta^n_{a_nb_n}F(x_1,\dots,x_n) = \int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_n}^{b_n} p(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots t_n \geq 0$. В этом случае функция $p(t_1,\dots,t_n)$ называется плотностью функции $F(x_1,\dots,x_n)$.

Пусть P-вероятностная мера на $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$введем $P_n(B_n) = P(F_n(B_n))$, где $F_n(B_n)$ − цилиндр в $\mathbb{R}^\infty$ с основанием B_n.

$F_n(B_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^\infty: (x_1,\dots,x_n) \in B_n\}$. Легко видеть, что P_n будет вероятностной мерой в $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$.

Заметим, что $P_{n+1}(B_n \times \mathbb{R}) = P_n(B_n)$- свойство согласованности.

Теорема (Колмогорова, о мерах в $\mathbb{R}^\infty$)

Пусть $(P_n, n \in \mathbb{N})$-вероятностная мера, P_n-вероятностная мера в $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, которое удовлетворяет свойству согласованности. Тогда ∃! вероятностная мера P на $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$ т., ч. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$ выполнено $P_n(B_n) = P(F_n(B_n))$.

Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах

(Ω, P)-дискретное вероятностное пространство.

Определение

Отображение ξ: Ω→ $\mathbb{R}$ называется случайной величиной.

Смысл: численная характеристика случайного эксперимента.

Пример (бросок игральной кости)

ξ-выпавшее число очков.

Ω-не более чем счетно=> множество значений ξ не более чем счетно.

Пусть X=$\{x_1,\dots,x_n\}$-это множество значений $A_i = \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$-событие «ξ=$x_i$».

Другая запись $A_i = \{\xi = x_i\}$.

$A_1,\dots,A_n$ −разбиение Ω. $P_i = P(A_i) = P(\xi = x_i) = \sum_{\omega\in A_i} P(\omega)$ −вероятности.

Определение

Распределение случайно величины ξ называется набор значений $(x_1, x_2, \dots)$ и вероятностей $(p_1, p_2, \dots)$, с которыми они принимаются.

Связь: $\forall B \in B(\mathbb{R})$ $\quad P_\xi(B) = P(\xi \in B) = \sum_{\omega:\xi(\omega)\in B} P(\omega) = \sum_{i:\, x_i\in B} p_i$-дискретная вероятностная мера на $\mathbb{R}$, сосредоточена на X.

Примеры:

1) Пусть A⊂Ω-событиеP

   Индикатор A называется случайная величина $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$.

   Другое обозначение I{A}.
2) Биномиальная случайная величина (распределение-биномиальное)
   ξ~Bin(n, p)
   P(ξ=k)=$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $\forall k = 0, \dots, n$
3) Пуассоновская случайная величина
   ξ~Pois(λ)
   P(ξ=k)=$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $k \in \mathbb{Z}_+$

Лекция 6

Пусть (Ω, P)- дискретное вероятностное пространство. $\xi\colon \Omega\to \mathbb{R}$ -случайная величина на нем.

Определение

Математическим ожиданием случайно величины ξ называется величина $E\xi=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P()\omega$, если ряд в правой части сходится абсолютно.

Смысл математического ожидания: среднее значение случайной величины ξ.

Пример: классическая модель

$P(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}, |\Omega| < +\infty => E\xi$ есть среднее арифметическое от значений ξ.

$E\xi=\frac{1}{|\Omega|}\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)$

Лемма (свойства математического ожидания)

1) Линейность
   Если ξ, η- случайные величины, $a,b\in \mathbb{R}$, то $E(a\xi+b\eta)=aE\xi+bE\eta$.
2) Если ξ принимает значение $(a_1, a_2, \ldots)$, то $E\xi=\sum_i a_i P(\xi = a_i)$
3) Если $f(x)$- некоторая функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, то $Ef(\xi)= \sum_i f(a_i)P(\xi = a_i)$.
4) Сохранение отношения порядка
   Если $\xi \le \eta$ $(\forall\omega\in\Omega\ \xi(\omega)\le\eta(\omega))$, то $E\xi \le E\eta$.
5) Если ξ, η-независимые случайные величины, то $E(\xi\eta)=E\xi E\eta$.

Доказательство

1) Очевидно из определения
2) $E\xi = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega) = \sum_i\sum_{\omega:\xi(\omega)=a_i}\xi(\omega)P(\omega) = \sum_i a_i\sum_{\omega:\xi(\omega)=a_i}P(\omega) = \sum_i a_i P(\xi = a_i)$
3) Аналогично с 2)
   $E\xi=\sum_{\omega\in\Omega} f(\xi(\omega))P(\omega) = \sum_i\sum_{\omega:\xi(\omega)=a_i} f(\xi(\omega))P(\omega) = \sum_i f(a_i)\sum_{\omega:\xi(\omega)=a_i}P(\omega) = \sum_i f(a_i)P(\xi = a_i)$
4) Очевидно из определения.
5) $E\xi\eta=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\eta(\omega)P(\omega) = \sum_{i,j}\sum_{\substack{\omega:\xi(\omega)=a_i\\ \eta(\omega)=b_j}}\xi(\omega)\eta(\omega)P(\omega) = \sum_{i,j} a_i b_j P\big(\xi = a_i, \eta = b_j\big)$={случайные величины независимы}$= \sum_{i,j} a_i b_j P(\xi = a_i)P\big(\eta = b_j\big) =$
   $$= \Big(\sum_i a_i P(\xi = a_i)\Big)\Big(\sum_j b_j P(\eta = b_j)\Big) = E\xi E\eta$$

■

Следствие

Если $\xi(\omega)=c\in\mathbb{R}\ \forall\omega\in\Omega$, то $E\xi=c$.

Примеры:

1) Пусть $A\subset\Omega$, тогда найдем $EI_A=1*P(I_A=1)+0*P(I_A=0)=P(A)$.
2) Пусть $\xi\sim Bin(n,p), n\in\mathbb{N}, p\in[0,1]$. Найдем $E\xi$:
   $E\xi=\sum_{k=0}^{n}kP(\xi=k)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}kC_n^kp^k(1-p)^{n-k}=$
   $$=\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=t=k-1=\sum_{t=0}^{n-1}nC_{n-1}^{t}\,p^{t+1}(1-p)^{n-1+t}=$$
   $=np\sum_{t=0}^{n-1}C_{n-1}^{t}\,p^t(1-p)^{n-1+t}=np.$

Определение

Дисперсией случайно величины ξ называется $D\xi=E(\xi-E\xi)^2$ (если выражение в правой части конечно).

Смысл:

Дисперсия-среднеквадратичное уклонение случайной величины от своего среднего значения.

Вероятность $P(\xi\in[-10\sqrt{D\xi}+E\xi, E\xi+10\sqrt{D\xi}])$ всегда велика.

Лемма (свойства дисперсии)

1) $D\xi\geq 0$
2) $D\xi=0 \Leftrightarrow P(\xi=E\xi)=1$
3) $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$
4) $D(c\xi)=c^2D\xi$
   $D(\xi+c)=D\xi$

Доказательство

1) $D\xi=E(\xi-E\xi)^2\geq$ свойство 4) $\geq E*0=0$
2) $D\xi=0\Leftrightarrow D\xi=\sum_{\omega\in\Omega}(\xi(\omega)-E\xi)^2P(\omega)=0 \Leftrightarrow \forall\omega\in\Omega\ P(\omega)=0$ или $\xi(\omega)=E\xi$
   $\Leftrightarrow P(\xi()=E\xi)\geq 1-\sum_{\omega:P(\omega)=0}P(\omega)=1$
3) $D\xi=E(\xi-E\xi)^2=E(\xi^2-2\xi+(E\xi)^2)=E\xi^2-(E\xi)^2-2E\xi E\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$
4) $D(c\xi)=E(c\xi)^2-(Ec\xi)^2=c^2E\xi^2-c^2(E\xi)^2=c^2D\xi$
   $D(c+\xi)=E(c+\xi-(E\xi+c))^2=D\xi$

■

Определение

Если ξ -случайная величина, k∈ ℕ, то $E\xi^k$ называется k-м моментом случайной величины ξ.

$E(\xi - E\xi)^k$ называется центральным моментом порядка k.

E(ξ(ξ-1)…(ξ-k+1))-факториальный момент порядка k случайной величины ξ.

Определение

Ковариацией случайных величин ξ, η называется cov(ξ, η)=E((ξ-Eξ)(η-Eη)). Если

cov(ξ, η)=0, то ξ и η называются некоррелированными.

Упражнение

1) Ковариация билинейна
2) Cov(ξ, η)=Eξη-EξEη
3) Dξ=cov(ξ, ξ)
4) Если случайные величины независимы, то cov(ξ, η)=0 (обратное неверно)
   Контрпример:
   Пусть ξ принимает значения -1, 0, 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$. Рассмотрим η=ξ^2. Тогда ξ и η зависимые. P(ξ=0, η=0)=P(ξ=0)=$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{9} = P(\xi = 0)P(\eta = 0)$=>ξ, η зависимые.
   Cov(ξ, η)=Eξη-EξEη=$E\xi^3 - E\xi E\xi^2 = 0$.

Утверждение

Если $\xi_1, \dots, \xi_2$-попарно некоррелированные случайные величины, то D(ξ_1+…+ξ_n)=

$$= \sum_{i=1}^{n} D\xi_i$$

Доказательство

D(ξ_1+…+ξ_n)=cov(ξ_1+…+ξ_n, ξ_1+…+ξ_n)=$\sum_{i=1}^{n} cov(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i$

■

Следствие

Если $\xi_1, \dots, \xi_2$ −независимые в совокупности случайные величины, то D(ξ_1+…+ξ_n)=

$= \sum_{i=1}^{n} D\xi_i$.

Случайные элементы

Определение

Пусть (Ω, F, P)-вероятностное пространство, (E, ξ)-измеримое пространство. Тогда отображение X:Ω→ E называется случайным элементом, если оно является ξ/F-измеримым, т.е. $\forall B \in \xi$ выполнено $X^{-1}(B) = \{\omega: X(\omega) \in B\} \in F$.

Определение

Если (E, ξ)=(ℝ, B(ℝ)), то X называется случайной величиной.

Если (E, ξ)=$(\mathbb{R}^n, \mathrm{B}(\mathbb{R}^n))$, $\mathrm{n} \geq 2$, то X называется случайным вектором.

Лемма(критерий измеримости отображения)

Пусть (Ω, F, P)-вероятностное пространство, (E, ξ)-измеримое пространство. Пусть M⊂ξ- система множеств т., ч. σ(M)=ξ. Тогда X: Ω→ E является случайным сегментом ⬄ $\forall B \in M$ $X^{-1}(B) = \{X \in B\} \in F$.

Доказательство

(=>) Следует из определения

(<=) Введем множество D={B∈ ξ: $X^{-1}(B) \in F\}$. Тогда по условию M⊂D и по построению D⊂ξ. Прообраз сохраняет все теоретико-множественные операции:

$$X^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{a}} D_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\mathfrak{a}} X^{-1}(D_\alpha),\, X^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{a}} D_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{a}} X^{-1}(D_\alpha), X^{-1}(D\backslash B) = X^{-1}(D)\backslash X^{-1}(B).$$

Проверим, что D-это σ-алгебра на E.

1) $X^{-1}(E) = \Omega \in F => E \in D$
2) Пусть B∈ $D => \bar{B} \in D$?
   $X^{-1}(\bar{B}) = \overline{X^{-1}(B)} \in F$ т.к. F-σ-алгебра
3) Пусть $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$, $B_n \in D \Rightarrow \bigcap_n B_n \in F$?
   $$X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) \in F \Rightarrow \bigcap_n B_n \in F$$

Вывод: D-σ-алгебра на E. В силу минимальности σ(M)⊂D. Но σ(M)=ξ=> D=ξ $\forall B \in \xi$

$X^{-1}(B) \in F$

■

Следствие(эквивалентное определение)

1) X: Ω→ ℝ является случайно величиной ⬄ $\forall x \in \mathbb{R}\, \{X \leq x\} \in F$ ⬄$\forall x \in \mathbb{R}$ $\{X < x\} \in F$
2) X: Ω→ $\mathbb{R}^n$ является случайным вектором ⬄X=$(X_1, \ldots, X_n)$, где $X_i -$ случайная величина $\forall i = 1 \ldots n$

Доказательство

1) (=>) Множества вида $(-\infty; x]$ ($(-\infty; x)$) являются борелевскими $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$\{X \leq x\} = X^{-1}((-\infty; x]) \in F$
$\{X < x\} = X^{-1}((-\infty; x)) \in F$
(<=) Система $M = \{(-\infty; x] : x \in \mathbb{R}\}$ (или $\{(-\infty; x) : x \in \mathbb{R}\}$) удовлетворяет $\sigma(M) = B(\mathbb{R})$. По условию $\forall B \in M\ X^{-1}(B) \in F$.
Согласно критерию измеримости получаем, что $\forall B \in B(\mathbb{R})$ выполнено $X^{-1}(B) \in F$=> X-случайная величина.
2) Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$, для $\forall B \in B(\mathbb{R})$
$X^{-1}(B) = \{X_i \in B\} = \{X = (X_i, \dots, X_i) \in \mathbb{R} \times \dots \times \underbrace{B}_{i} \times \dots \times \mathbb{R}\}$
$= X^{-1}\underbrace{(\mathbb{R} \times \dots \times \underbrace{B}_{i} \times \dots \times \mathbb{R})}_{\in B(\mathbb{R}^n)} \in F \Rightarrow X_i$ −случайная величина
(<=) Пусть X_i случайная величина $\forall i = 1 \dots n$-проверим, что X-случайный вектор. Для $\forall B_1, \dots, B_n \in B(\mathbb{R})$
$$X^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n) = X \in B_1 \times \dots \times B_n = \forall i = 1 \dots n X_i \in B_i = \bigcap_{i=1}^{n} X_i \in B_i =$$
$= \bigcap_{i=1}^{n} X_i(B_i) \in F,$ т. к. $F - \sigma -$ алгебра.
$M = \{B_1 \times \dots \times B_n : B_i \in B(\mathbb{R})\}$. Тогда $\sigma(M) = B(\mathbb{R}^n)$.
Согласно критерию измеримости получаем, что $X^{-1}(B) \in F$ для $\forall B \in B(\mathbb{R}^n)$

■

<u>Замечание</u>: смысл условия измеримости- в желании уметь вычислять вероятности вида $P(x \leq y)$, $P(X \in [a, b])$ и т.п.

Действия над случайными векторами

Вопрос: что можно сделать над случайными величина, чтобы оставаться в этом классе?

<u>Определение</u>

Пусть $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-функция . Она называется борелевской если $\forall B \in B(\mathbb{R}^m)$ выполнено $f^{-1}(B) \in B(\mathbb{R}^n)$.

<u>Утверждение 1(взятие борелевских функций)</u>

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$-случайный вектор на (Ω, F, P), $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-борелевская функция. Тогда f(x) есть тоже случайный вектор в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство

Для $\forall B \in B(\mathbb{R}^m)$ $(f(X))^{-1}(B) = \{f(X) \in B\} = \{X \in \underbrace{f^{-1}(B)}_{B(\mathbb{R}^n)}\} \in F \Rightarrow f(X)$ −

случайный вектор

■

Примеры борелевских функций:

1) Непрерывные функции
2) f(x)=I{x∈ $B\}$, $B \in B(\mathbb{R}^n)$
3) кусочно-непрерывные функции

Упражнение 2 (арифметические операции)

Пусть ξ, η-случайные величины на (Ω, F, P). Тогда ξ+η, aξ, ξη, $\frac{\xi}{\eta}$-тоже случайные величины, где a∈ ℝ и в случае деления η≠ 0 на Ω.

Доказательство

(ξ, η)-случайный вектор.

f(x, y)=x+y, xy, ax, $\frac{x}{y} I\{y \neq 0\}$ является борелевской $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ =>ξ+η, ξη, aξ, $\frac{\xi}{\eta}$ тоже случайные величины

■

Утверждение 3 (взятие пределов)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$-последовательность случайных величин на (Ω, F, P).

Тогда $\overline{\lim_n} \xi_n, \underline{\lim_n} \xi_n, sup_n \xi_n, inf_n \xi_n$ тоже являются случайными величинами (может быть, принимающими значения $\pm\infty$).

Доказательство

$\{\overline{\lim_n} \xi_n < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{\xi_m \leq x - \frac{1}{k}\} \in F$

$\{\underline{\lim_n} \xi_n > x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{\xi_m \geq x + \frac{1}{k}\} \in F$

$\{sup_n \xi_n \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\xi_n \leq x\} \in F$

$\{inf_n \xi_n < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi_n < x\} \in F$

■

Замечание: из доказательства следует, что $\{\overline{\lim_n \xi_n}=\infty\}$, $\{\underline{\lim_n \xi_n} = -\infty\}$ являются элементами F. Разумно говорить про расширенные случайные величины, принимаюзщие значения в $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$.

Лекция 7

Характеристики случайных величин и векторов

Пусть (Ω, F, P)- вероятностное пространство.

ξ-случайная величина, случайный вектор на нем.

I. Распределение случайной величины или вектора

Определение

Распределение случайной величины или (случайного вектора в $\mathbb{R}^n$) ξ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ (соответственно $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$) заданное по правилу:

$P_\xi(B)=P(\xi \in B)\ \forall B \in B(\mathbb{R})(B(\mathbb{R}^n))$

Упражнение

P_ξ –действительно вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$.

II. Функция распределения

Определение

Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины (вектора) ξ называется функция распределения меры P_ξ, то есть $\forall x \in \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$

$F_\xi(x)= P_\xi((-\infty; x])=P(\xi\leq x)$

Если многомерный

$F_\xi(x)= P_\xi((-\infty; \vec{x}])=P(\xi_1 \leq x_1,\ldots,\xi_n \leq x_n))$

Терминология

- Случайная величина ξ называется дискретной, если ее функция распределения дискретная
- Абсолютно непрерывной, если ее функция распределения абсолютно непрерывна, тогда у ξ есть плотность $P_\xi(t)$, $P(\xi\leq x)=\int_{-\infty}^{x} P_\xi(t)dt$
- Сингулярной, если ее функция распределения сингулярная
- Непрерывной, если ее функция распределения непрерывная

III. Сигма-алгебра, рожденная случайной величиной или вектором.

Определение

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ - случайная величина или вектор, тогда σ-алгеброй, порожденной ξ, называется $F_\xi=\{\xi^{-1}(B)=\{\xi \in B\}: B \in B(\mathbb{R})\} \in B(\mathbb{R}^n)$

Упражнение

Проверить, что $F_\xi -$ σ-алгебра, $F_\xi \subset F$

(Ω, F, P) $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$

$$P \xRightarrow{\xi} P_\xi$$

$$F_\xi \xLeftarrow{\xi} B(\mathbb{R})$$

Определение

Пусть ξ и η – случайные величины или векторы, тогда η является F_ξ-измеримой, если $F_\eta \subset F_\xi$

Упражнение

Если η=f(ξ), где f-борелевская функция, то η является F_ξ- измеримой.

1) $\xi(\omega)=c\ \forall\omega \in \Omega,\ c \in \mathbb{R}$

   $\{\xi(\omega)\le x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < c \quad \in F \\ \Omega, & x \ge c \quad \in F \end{cases}$ => случайная величина

   $F_\xi=\{\emptyset, F\}$-тривиальная σ-алгебра

2) $A \in F$

   $I_A(\omega)=\begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in A \end{cases}$ – индикатор событий A.

   $\{I_A \le x\}=\begin{cases} \emptyset, & x < 0 \quad \in F \\ \bar{A}, & x \in [0;1) \quad \in F \\ \Omega, & x \ge 1 \quad \in F \end{cases}$ => случайная величина

   $F_{I_A}=\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$- σ-алгебра, порожденная самим событием A

Определение

Случайная величина ξ называется простой, если она принимает конечное число значений. Тогда ξ представляется в виде:

$\xi=\sum_{k=1}^{n} x_k * I_{A_k}$, где $x_1,\ldots,x_n$ – значения случайных величин(различные), а события $A_1,\ldots,A_n$ образуют различные Ω

$A_k=\{\xi=x_k\}$, k=1…n

Определение

Если ξ – случайная величина, то положим

$\xi^+ = \max(\xi, 0) \geq 0$

$\xi^- = \max(-\xi, 0) \geq 0$

Тогда ($\xi=\xi^+ - \xi^-$), ($|\xi|=\xi^+ + \xi^-$):

Теорема (о приближении простыми)

I) $\xi \geq 0$, то ∃ последовательность простых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ такая что:
   1) $\forall n\ 0 \leq \xi_n \leq \xi_{n+1}$
   2) $\forall \omega \in \Omega\ \xi(\omega)=\lim\limits_n \xi_n(\omega)$

   Из 1) и 2) следует ($\xi_n \uparrow \xi$)
   3) $\forall n\ \xi_n$ является $\mathcal{F}_\xi$ – измеряемой случайной величиной
II) Если ξ- произвольная случайная величина, то ∃ последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ простых случайных величин такая что:
   1) $\forall \omega \in \Omega\ \ \xi(\omega)=\lim\limits_n \xi_n(\omega)$
   2) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |\xi_n| \leq |\xi|$
   3) $\forall n\ \xi_n$ является F_ξ – измеряемой случайной величиной

Доказательство

I) Предъявим ξ_n явным образом:

$\xi_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n*2^n} \frac{k-1}{2^n} * I\{\frac{k-1}{2^n} \leq \xi(\omega)\frac{k}{2^n}\} + n*I\{\xi \geq n\}$-есть борелевская функция от ξ, то есть $\xi_n - F_\xi$-измеряемая функция.

Если $|\xi(\omega)| \leq n$, то $|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \xi_n \uparrow \xi,\ \xi_n \geq 0$

II) ξ^+ и ξ^-—борелевские функции от ξ =>они F_ξ – измеримы и неотрицательны.

Пусть $0 \leq \eta_n \uparrow \xi^+$, $0 \leq \delta_n \uparrow \xi^-$—последовательности из пункта I) для ξ^+ и ξ^- => Все η_n и δ_n являются F_ξ – измеримыми случайными величинами

Положим: $\xi_n=\eta_n - \delta_n$. Тогда $\forall n\ \xi_n$-F_ξ – измеремая случайная величина

$\lim\limits_n \xi_n = \lim\limits_n \eta_n - \lim\limits_n \delta_n = \xi^+ - \xi^- = \xi$

$|\xi_n| = |\eta_n| + |\delta_n| = \eta_n + \delta_n \leq \xi^+ + \xi^- = |\xi|$

■

Лекция 8

Математическое ожидание (общий случай)

Пусть (Ω, F, P)-вероятностное пространство, а ξ-случайная величина на нем. Как можно определить математическое ожидание Eξ? Проведем построение в три этапа.

I. Простые случайные величины
Пусть ξ-простая случайная величина, т.е.

$$\xi(\omega)=\sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}(\omega),$$

где $x_1,\dots,x_n$-все различные значения ξ, а события $A_1,\dots,A_n$ образуют разбиение Ω. Таким образом, $A_k = \{\xi = x_k\}$.

Определение

Математическим ожиданием простой случайной величины ξ называется величина $E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k)$.

Наблюдение: $EI_A = P(A)$.

Свойства:

1. Линейность
Если ξ и η-простые случайные величины, a,b∈ ℝ, то E(aξ+bη)=aEξ+bEη.

Доказательство

$\xi=\sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}$, $\eta=\sum_{k=1}^{n} y_j I_{B_j}$.

Тогда случайная величина aξ+bη принимает значения во множестве

Z={$ax_k + by_j, k = 1\dots n, j = 1,\dots,m$}. Обозначим через $z_1,\dots,z_l$ все различные значения aξ+bη. Обозначив через $C_{kj} = A_k \cap B_j$, получаем:

$$E(a\xi + b\eta) = \sum_{i=1}^{l} z_i \sum_{k,j:ax_k+by_i=z_i} P(C_{kj}) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k,j:ax_k+by_i=z_i} (ax_k + by_i)P(C_{kj}) =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(ax_k + by_j)P(A_k \cap B_j) = a\sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k) + b\sum_{j=1}^{m} y_j P(B_j) =$$

$$= aE\xi + bE\eta$$

■

Следствие

Если ξ=$\sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}$, где $x_1, \ldots, x_n$-любые числа, а $A_1, \ldots, A_n$-любые события, то E ξ=$\sum_{k=1}^{n} x_k P(I_{A_k})$.

2. Если ξ≥ 0, то Eξ≥ 0.
   Доказательство
   Если ξ≥ 0, то все ее значения $x_k \geq 0$. Значит Eξ≥ 0.
3. Если ξ≥ η (т.е. для любого ω∈ Ω выполнено ξ(ω)≥η(ω)), то Eξ≥Eη.
   Доказательство
   Заметим, что ξ-η≥ 0. Применяя свойства 1 и 2, получаем:
   0≤ $\mathrm{E}(\xi - \eta) = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\eta$.

II. Неотрицательные случайные величины

Пусть ξ≥ 0-неотрицательная случайная величина. Рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, которая монотонно к ней сходится: 0≤ $\xi_n \uparrow \xi$.

Определение

Математическое ожидание неотрицательной случайно величины ξ называется величина Eξ= $\lim\limits_{n\to+\infty} E\xi_n$.

Замечание 1

Заметим, что в силу свойства 3 для простых случайных величин последовательность Eξ_n не убывает, а потому имеет предел. Правда, он может быть равен +∞.

Замечание 2

Необходимо проверить, что значение $\lim\limits_{n\to+\infty} E\xi_n$ не зависит от выбора последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, сходящейся к ξ.

Лемма

Если ξ≥ 0-неотрицательная случайная величина. Пусть последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ монотонно к ней сходится: $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$. Пусть η-простая неотрицательная случайная величина с условием η≤ ξ. Тогда $E\eta \leq \lim\limits_{n\to+\infty} E\xi_n$.

Доказательство

Зафиксируем произвольное ξ>0. Обозначим $A_n = \{\xi_n \geq \eta - \xi\}$. Тогда в силу условий 0≤ $\xi_n \uparrow \xi$ будет выполнено $A_n \uparrow \Omega$ при n→ ∞. В силу непрерывности вероятностной меры получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$. Далее,

$$\xi_n = \xi_n I_{A_n} + \xi_n I_{\bar{A}_n} \geq \xi_n I_{A_n} \geq (\eta - \xi) I_{A_n}.$$

Следовательно,

$$E\xi_n \geq E\big((\eta - \xi) I_{A_n}\big) = E\eta - E(\eta I_{\bar{A}_n}) - \xi E I_{A_n} \geq E\eta - CP(\bar{A}_n) - \xi,$$

где C=$\max\limits_{\omega\in\Omega} \eta(\omega)$. Учитывая, что P($\overline{A_n}$)→ 0, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \geq E\eta - \xi$.

В силу произвольности ξ>0, получаем искомое неравенство $\lim\limits_{n\to+\infty} E\xi \geq E\eta$

■

Следствие

Определение математического ожидания неотрицательной случайной величины корректно.

Доказательство

Пусть $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$ и $0 \leq \eta_n \uparrow \xi$-две последовательности простых неотрицательных случайных величин, монотонно сходящихся к ξ. Тогда согласно Лемме для любого m∈ ℕ имеем неравенство $\lim\limits_{n\to+\infty} E\xi_n \geq E\eta_m$.

Замечание 3

Математическое ожидание для неотрицательных случайных величин можно было определить следующим образом Eξ=$sup_{\zeta\in Z}$, где Z-множество простых неотрицательных случайных величин, которые не превосходят ξ.

III. Произвольные случайные величины

Пусть ξ-произвольна случайная величина. Рассмотрим $\xi^+ = max(\xi, 0)$; $\xi^- = max(-\xi, 0)$. Это неотрицательные случайные величины, при этом ξ=$\xi^+ - \xi^-$.

Определение

1) Если Eξ^+<+∞ и Eξ^-<+∞, то математическим ожиданием случайной величины ξ назовем Eξ= E$\xi^+ -$ Eξ^-.
2) Если E$\xi^+ = +\infty$ и E$\xi^- < +\infty$, то будем считать, что Eξ=-∞.
3) Если E$\xi^+ < +\infty$ и E$\xi^- = +\infty$, то будем считать, что Eξ=-∞.
4) Если E$\xi^+ = +\infty$ и E$\xi^- = +\infty$, то математическое ожидание величины ξ не определено.

Замечание 4

Математическое ожидание случайной величины ξ конечно ⇔ математическое ожидание случайной величины |ξ| конечно.

Замечание 5

Математическое ожидание-это интеграл Лебега по вероятностной мере P. В интегральном виде его принято записывать следующим образом:

$$E\xi = \int\limits_{\Omega} \xi dP = |\text{или}| = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega).$$

Замечание 6

Множество случайных величин с конечным математическим ожиданием образуют пространство $L^1(\Omega, F, P)$.

Свойства Математического ожидания:

1) Вынос константы
   Пусть $E\xi$ конечно и $c \in \mathbb{R}$. Тогда $E(c\xi)$ тоже конечно и $E(c\xi)=cE\xi$.
   Доказательство
   Если ξ-простая случайная величина, то все уже доказано.
   Если $\xi \geq 0$-неотрицательная случайная величина, то рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, которая монотонно к ней сходится: $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$. Если $c \geq 0$, то тогда $0 \leq c\xi_n \uparrow c\xi$. Стало быть, по определению
   $$E(c\xi) = \lim_{n\to+\infty} E(c\xi_n) = c \lim_{n\to+\infty} E\xi_n = cE\xi\,.$$
   Если же $c<0$, то $(c\xi)^+ = 0$. Значит:
   $$E(c\xi) = -E(c\xi)^- = -E(-c\xi) = cE\xi$$
   ■

2) Конечность математических ожиданий
   1) Если $0 \leq \xi \leq \eta$ и $E\eta$ конечно, то $E\xi$ тоже конечно и $E\xi \leq E\eta$.
   2) Если $|\xi| \leq \eta$ и $E\eta$ конечно, то $E\xi$ тоже конечно.
   3) Если $E\xi$ конечно, то для любого события $A \in F$ математическое ожидание $E(\xi I_A)$ тоже конечно.

   Доказательство

   1) Заметим, что $E\xi = \sup_{\zeta\in\varrho_\xi} E\zeta \leq \sup_{\zeta\in\varrho_\eta} E\zeta = E\eta$, где $\varrho_\xi(\varrho_\eta)$ – множество простых неотрицательных с.в. которые не превосходят ξ.
   2) Заметим, что $\xi^+, \xi^- \leq |\xi|$, а потому по первому пункту их математические ожидания конечны. Значит, конечно и $E\xi$.
   3) $E\xi$ конечно, следовательно, конечны и $E\xi^+$, $E\xi^-$. далее,
   $$(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leq \xi^+;\ (\xi I_A)^- = \xi^- I_A \leq \xi^-.$$
   Согласно первому пункту $E(\xi I_A)^+$ и $E(\xi I_A)^-$ конечны. Значит, конечно и $E(\xi I_A)$
   ■

3) Сохранение отношения порядка
   Пусть $\xi \leq \eta$.
   1) Если $E\eta < +\infty$, то $E\xi < +\infty$ и $E\xi \leq E\eta$.
   2) Если $E\xi > -\infty$, то $E\eta > -\infty$ и $E\xi \leq E\eta$.

Доказательство

Если ξ и η – простые с.в., то все уже доказано.

Если $0 \leq \xi \leq \eta$ – неотрицательные с.в., то все также следует из доказательства п1) в свойстве (2). В силу условия $\xi \leq \eta$ получаем, что $\xi^+ \leq \eta^+;\ \xi^- \geq \eta^-$.

Согласно доказанному для неотрицательных св. получаем, что

$E\xi^+ \le E\eta^+;\ E\xi^- \ge E\eta^-$.

1) Если $E\eta < +\infty$, то $E\eta^+$ конечно. Значит, конечно и $E\xi^+$. Стало быть, определено $E\xi < +\infty$. Далее, если $E\xi^-$ конечно, то в силу верхних неравенств $E\eta^-$ тоже конечно и $E\xi = E\xi^+ - E\xi^- \le E\eta^+ - E\eta^- = E\eta$.
2) Если же $E\xi^- = +\infty$, то $E\xi = -\infty \le E\eta$. Доказывается аналогично п.1).

■

4) Если $E\xi$ определено, то $|E\xi| \le E|\xi|$

Доказательство

Если $E|\xi| = +\infty$, то все очевидно. Пусть $E|\xi| < +\infty$. тогда заметим, что $-|\xi| \le \xi \le |\xi|$. Значит, согласно свойствам (1) и (3) получим, что

$-E|\xi| \le E\xi \le E|\xi|$

■

5) Аддитивность

Если ξ и η − неотрицательные с.в. или такие, что $E\xi$ и $E\eta$ конечны, то $E(\xi+\eta)$ определено и $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$.

Доказательство

Если ξ и η − простые с.в., то все уже доказано. Если ξ и η − неотрицательные с.в., то рассмотрим последовательности простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}, \{\eta_n, n\in\mathbb{N}\}$, которые монотонно сходятся к ξ и η: $0 \le \xi_n \uparrow \xi$, $0 \le \eta_n \uparrow \eta$. Тогда $0 \le \xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$ и по определению:

$$E(\xi+\eta) = \lim_{n\to+\infty}(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n\to+\infty}(E\xi_n + E\eta_n) = \lim_{n\to+\infty} E\xi_n + \lim_{n\to+\infty} E\eta_n =$$
$$= E\xi + E\eta.$$

Пусть теперь ξ и η − произвольные с.в. с конечными м.о. Тогда представим

$\xi = \xi^+ - \xi^-, \qquad \eta = \eta^+ - \eta^-, \qquad \xi+\eta = (\xi+\eta)^+ - (\xi+\eta)^-$.

Но $(\xi+\eta)^+ \le \xi^+ + \eta^+, (\xi+\eta)^- \le \xi^- + \eta^-$.

Можно сделать вывод, что $E(\xi+\eta)$ тоже конечно. Обозначим

$\delta = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ \ge 0$, это неотрицательная с.в

В силу доказанного для неотрицательных с.в., получаем, что

$E(\xi+\eta)^+ + E\delta = E\xi^+ + E\eta^+$.

С другой стороны $\xi^- + \eta^- - (\xi+\eta)^- = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ = \delta$.

Значит, $E(\xi+\eta)^- + E\delta = E\xi^- + E\eta^-$.

В итоге, получаем искомое соотношение:

$$E(\xi+\eta) = (\xi+\eta)^+ - (\xi+\eta)^- = E\xi^+ + E\eta^+ - E\delta - (E\xi^- + E\eta^- - E\delta) =$$
$$= E\xi^+ - E\xi^- + E\eta^+ - E\eta^- - E\xi + E\eta$$

■

Следующая группа свойств связана с понятием почти наверное.

Определение

Событие $A \in F$ происходит почти наверное, если $P(A) = 1$. Обозначение: A п.н.

6) Если $\xi = 0$ п.н., то $E\xi = 0$.

Доказательство

Если $\xi -$ простая с.в., то $E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k P(\xi = x_k)$. Но если $x_k \neq 0$, то по условию $P(\xi = x_k) = 0$. Стало быть, $E\xi = 0$.

Если $\xi \geq 0$, то для любой простой с.в. η с условием $0 \leq \eta \leq \xi$ выполнено $\eta = 0$ п.н. Значит, $E\eta = 0$. Согласно определению математического ожидания получаем, что $E\xi = 0$.

Наконец, если $\xi -$ произвольная с.в., то получаем, что $\xi^+ = 0$ п.н. и $\xi^- = 0$ п.н. Значит, их математические ожидания равны нулю и, следовательно, $E\xi = 0$

■

7) Если $\xi = \eta$ п.н. и $E\xi$ конечно, то $E\eta$ конечно и $E\xi = E\eta$.

Доказательство

Обозначим $\delta = \eta - \xi$. Согласно свойству (6) $E\delta = 0$. Тогда из свойства (5) получаем, что математическое ожидание $\eta = \xi + \delta$ тоже конечно и $E\eta = E\xi + E\delta = E\xi$

■

8) Если $\xi \geq 0$ и $E\xi = 0$, то $\xi = 0$ п.н.

Доказательство

Обозначим $A_n = \left\{\xi > \frac{1}{n}\right\}$. Тогда $A_n \uparrow A = \{\xi > 0\}$ при $n \to +\infty$. В силу непрерывности вероятностной меры получаем, что $P(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$. Но для любого n, $P(A_n) = EI_{A_n} \leq E(n\xi)I_{A_n} \leq E(n\xi) = 0$

■

9) Пусть $E\eta$ и $E\xi$ конечны. Если для любого события $A \in F$ выполнено неравенство $E(\xi I_A) \leq E(\eta I_A)$, то $\xi \leq \eta$ п.н.

Доказательство

Обозначим $B = \{\xi > \eta\}$. Тогда в силу условия и определения B, применяя свойство (5), получаем, что $E(\eta I_B) \leq E(\xi I_B) \leq E(\eta I_B)$.Отсюда $E(\eta I_B) = E(\xi I_B)$ или $E((\xi - \eta)I_B) = 0$. Но случайная величина $(\xi - \eta)I_B$ неотрицательна. Согласно свойству (8) получаем, что $(\xi - \eta)I_B = 0$ п.н. Но если $I_B > 0$, то $(\xi - \eta) > 0$. Значит, $(\xi - \eta)I_B = 0 \Leftrightarrow I_B = 0$, что дает $I_B = 0$ п.н. Последнее эквивалентно тому, что $P(B) = 0$

■

Лекция 9

Независимые случайные величины

Пусть (Ω, F,P)- вероятностное пространство

Определение

Набор случайных векторов $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на (Ω, F,P) называется независимым в совокупности, если независимыми в совокупности порожденные σ-алгебры

$\{F_{\xi_\alpha}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Напомним, что произвольный набор систем событий независим в совокупности, если таков любой его конечный набор. А конечный набор $\{M_k, k = 1, \dots, n\}$ систем событий называется независимым в совокупности, если для любой набор событий $A_1, \dots, A_n$,

$A_i \in M_i$ i=1,..,n независимы в совокупности

Тем самым, можно дать следующие эквивалентное определение независимости набора случайных величин или векторов.

Определение

Набор случайных векторов $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ (где $\xi_\alpha \in \mathbb{R}^{k_\alpha}$) называется независимым в совокупности, если для любого $n \in \mathbb{N}$, любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{A}$ и любых борелевских множеств $B_1, \dots, B_n$, $B_i \in B(\mathbb{R}^{k_{\alpha_i}})$, выполнено

$P(\xi_{\alpha_1} \in B_1, \dots, \xi_{\alpha_n} \in B_n) = \prod_{j=1}^{n} P(\xi_{\alpha_i} \in B_j)$.

Важный критерий независимости формулируется в терминах факторизации совместных функций распределения.

Теорема (критерий независимости для факторизации распределения)

Набор случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ является независимым в совокупности тогда и только тогда, когда для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ выполняется равенство:

$P(\xi_1 \le x_1, \dots, \xi_n \le x_n) = \prod_{j=1}^{n} P(\xi_j \le x_j)$.

Доказательство

По определению $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности ⇔ независимы в совокупности σ-алгебры $F_{\xi_1}, \dots, F_{\xi_n}$, ими порожденные. Напомним, что $F_{\xi_k} = \{\{\xi_k \in B_k\} : B_k \in B(\mathbb{R})\}$.

Рассмотрим для каждого k= 1,…,n, систему событий $M_{\xi_k}=\{\{\xi_k \le x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$. Легко видеть, что это π-система и $\sigma(M_{\xi_k})=F_{\xi_k}$.

Согласно критерию независимости σ-алгебр (независимы тогда и только тогда, когда независимы порождающие их π-системы) получаем, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности ⇔ независимы в совокупности $M_{\xi_1},\dots, M_{\xi_n}$ ⇔ для событий $x_1,\dots, x_n \in \mathbb{R}$ событий $\{\xi_1 \le x_1\},\dots, \{\xi_n \le x_n\}$ независимы в совокупности.

Последнее автоматически влечет, что для любых $x_1,\dots, x_n \in \mathbb{R}$ выполняется равенство:

$$P(\xi_1 \le x_1,\dots, \xi_n \le x_n)=\prod_{j=1}^{n} P(\xi_j \le x_j).$$

В обратную сторону. Если для любых $x_1,\dots, x_n \in \mathbb{R}$ выполняется равенство:

$$P(\xi_1 \le x_1,\dots, \xi_n \le x_n)=\prod_{j=1}^{n} P(\xi_j \le x_j),$$

то переходя к пределу при некоторых $x_i \to +\infty$, мы получаем, что верхнее равенство верно и для любого поднабора вида:

$$P(\xi_1 \le x_1,\dots, \xi_n \le x_n)=\prod_{j=1}^{k} P(\xi_j \le x_j),$$

что и означает, что для любых $x_1,\dots, x_n \in \mathbb{R}$ события $\{\xi_1 \le x_1\},\dots, \{\xi_n \le x_n\}$ независимы в совокупности. Критерий доказан

■

Замечание

Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности ⇔ функция распределения случайного вектора $\xi=(\xi_1, \dots, \xi_n)$ является произведением функций распределения своих компонентов $\xi_1, \dots, \xi_n$, каждая от своей переменной.

Критерий независимости естественно обобщается и на случай случайных векторов.

Теорема (обобщенный критерий)

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – случайные векторы, $\xi_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, j=1,…,n. Тогда Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$- независимы в совокупности тогда и только тогда, когда для любых $\overrightarrow{x_1},\dots, \overrightarrow{x_n}$, $\overrightarrow{x_j} \in \mathbb{R}^{k_j}$ выполняется равенство:

$P(\xi_1 \le \overrightarrow{x_1},\dots, \xi_n \le \overrightarrow{x_n})=\prod_{j=1}^{n} P(\xi_j \le \overrightarrow{x_j})$.

Лемма (функции от независимых-независимы)

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$- независимые в совокупности случайные векторы, $\xi_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, j=1,…,n , а $f_1, \dots, f_n$- борелевские функции, $f_j : \mathbb{R}^{k_j} \Rightarrow \mathbb{R}^{m_j}$, j=1,…,n. Тогда независимы в совокупности и векторы $f_1(\xi_j),\dots,f_n(\xi_n)$.

Доказательство

Обозначим η_j=$f_j(\xi_j)$, j=1,…,n. Тогда σ-алгебра, порожденная η_j, входит в F_{ξ_j}, то есть $F_{\eta_j} \subset F_{\xi_j}$

Значит $F_{\eta_1}, \dots, F_{\eta_n}$ независимы в совокупности, как подсистемы независимых систем событий событий, что и обосновывает независимость $\eta_1, \dots, \eta_n$

■

Следствие

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_{n1}, \xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k}$- независимые случайные величины, а $f_1, \dots, f_k$- борелевские функции, $f_j : \mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}$, j=1,…,k. Тогда независимы и случайны величины $f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n1}), \dots, f_k(\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k})$.

10) Теорема

Пусть ξ и η –независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Тогда ξ_n также имеет конечное математическое ожидание и Eξη=Eξ · Eη..

Доказательство

- Пусть сначала ξ и η – простые случайные величины. Тогда представим их виде $\xi= \sum_{k=1}^{n} x_k I\{\xi=x_k\}$, $\eta=\sum_{j=1}^{m} y_j I\{\eta=y_j\}$,где $x_1,\dots, x_n$- значение ξ, а $y_{1j}, \dots, y_m$- значение η. Тогда в силу линейности математического ожидания получаем, что:

  $E(\xi\cdot\eta)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_k y_j E(I\{\xi=x_k\} \cdot I\{\eta=y_j\}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_k y_j P(\xi = x_k, \eta=y_j)=$

  $= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_k y_j P(\xi = x_k)P(\eta=y_j) =(\sum_{k=1}^{n} x_k P(\xi=x_k))(\sum_{j=1}^{m} y_j P(\eta=y_j))=$

  $=E\xi \cdot E\eta.$

- Пусть теперь ξ,η≥0- неотрицательные случайные величины. По теореме о приближении простыми случайными величинами существуют такие последовательности простых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\},\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, что:
  1. $0\le \xi_n \uparrow \xi$, $0\le \eta_n \uparrow \eta$;
  2. Для всех $n \in \mathbb{N}$ случайная величина ξ_n является F_ξ-измеримой.
  3. Для всех $n \in \mathbb{N}$ случайная величина η_n является F_η-измеримой.

  Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные ξ_n и η_n независимы. Кроме того, $0 \le \xi_n\eta_n \uparrow \xi\eta$. Отсюда,

$$\mathrm{E}\xi\eta=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\,\xi_n\,\eta_n=\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{E}\xi_n\cdot\mathrm{E}\eta_n)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\xi_n\cdot\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\eta_n=\mathrm{E}\xi\cdot\mathrm{E}\eta.$$

- Наконец, если ξ,η- произвольные случайные величины, то случайные величины $\xi^{\pm}$,$\eta^{\pm}$ также имеют конечные математические ожидания. Далее, заметим, что

$$(\xi\eta)^{+}=\xi^{+}\eta^{+}+\xi^{-}\eta^{-},\ (\xi\eta)^{-}=\xi^{+}\eta^{-}+\xi^{-}\eta^{+}$$

Теперь заметим, что $\xi^{\pm}$ и $\eta^{\pm}$ являются F_{ξ}- и, соответственно, F_{η}-измеримыми. Значит, они попрано независимы, и, следовательно, по доказанному выше случайные величины $(\xi\eta)^{+}$ и $(\xi\eta)^{-}$ имеют конечные математические ожидания. В итоге,

$$\mathrm{E}\xi\eta=\mathrm{E}(\xi\eta)^{+}-\mathrm{E}(\xi\eta)^{-}=\mathrm{E}\xi^{+}\eta^{+}+\mathrm{E}\xi^{-}\eta^{-}-\mathrm{E}\xi^{+}\eta^{-}-\mathrm{E}\xi^{-}\eta^{+}=\mathrm{E}\xi^{+}\mathrm{E}\eta^{+}+\mathrm{E}\xi^{-}\mathrm{E}\eta^{-}-$$

$$-\mathrm{E}\xi^{+}\mathrm{E}\eta^{-}-\mathrm{E}\xi^{-}\mathrm{E}\eta^{+}=(\mathrm{E}\xi^{+}-\mathrm{E}\xi^{-})(\mathrm{E}\eta^{+}-\mathrm{E}\eta^{-})=\mathrm{E}\xi\cdot\mathrm{E}\eta\,.$$ ■

<u>Определение</u>

Дисперсией случайной величины ξ называется величина $\mathrm{D}\xi=\mathrm{E}(\xi-\mathrm{E}\xi)^2$. Если математические ожидание конечно.

<u>Определение</u>

Ковариацией случайных величин ξ и η называется величина cov(ξ,η)=E((E-Eξ)(η-Eη)).

Если cov(ξ,η)=0, то говорят, что случайные величины ξ и η некоррелированы.

<u>Следствие</u>

Если случайные величины ξ и η независимы и имеют конечные математические ожидания, то они некоррелированы.

<u>Определение</u>

Если дисперсии ξ и η конечны и положительны, то определен коэффициент корреляции случайных величин ξ и η $\rho(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\cdot\mathrm{D}\eta}}$

<u>Лемма (свойства дисперсий и ковариации)</u>

1. Ковариация билинейна.
2. Dξ≥0 и равна нулю ⇔ P(ξ=Eξ)=1.
3. D(ξ+c)=Dξ, $\mathrm{D}(c\xi)=c^2\mathrm{D}\xi$, $c\in\mathbb{R}$.
4. Dξ=cov(ξ,ξ), $\mathrm{D}\xi=\mathrm{E}\xi^2-(\mathrm{E}\xi)^2$, cov(ξ,η)=E(ξη)-Eξ·Eη
5. Неравенство Коши-Буняковского: $|\mathrm{E}\xi\eta|^2\le\mathrm{E}\xi^2\cdot\mathrm{E}\eta^2$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда случайные величины ξ и η линейно зависимы

6. $|\rho(\xi,\eta)| \leq 1$, причем=1 тогда и только тогда, когда случайные величины ξ-Eξ и η-Eη линейно зависимы

Доказательство

Свойства 1, 2, 3 и 4 легко следует из свойств математического ожидания и доказываются так же, как и в случае дискретного вероятностного пространства.

5) Рассмотрим $f(a)=E(\xi + a\eta)^2 \geq 0$ как функцию от $a \in \mathbb{R}$. Заметим, что $0\leq f(a) = E\xi^2+2(E\xi\eta)\cdot a + E\eta^2 \cdot a^2$
   Есть неотрицательный квадратный трёхчлен. Значит, его дискриминант неположителен: $\frac{D}{4}=(E\xi\eta)^2-E\xi^2 \cdot E\eta^2\leq 0$.

Неравенство Коши-Буняковского доказано.

Если же в нем случилось равенство, то есть дискриминант равен 0, то f(a) имеет единственный корень a_0. Но $0=f(a_0) =E(\xi + a_0\eta)^2$ означает, что $\xi + a_0\eta = 0$

■

6) Заметим, что если обозначить ξ'=ξ-Eξ, η'=η-Eη, то $\rho(\xi,\eta)=\frac{E\xi'\eta'}{\sqrt{E(\xi')^2E(\eta')^2}}$.
   Тогда неравенство $|\rho(\xi,\eta)| \leq 1$ эквивалентно неравенству Коши-Бунковского для случайных величин ξ' и η'. Согласно пункту 5. Равенство будет достигаться при линейной зависимости между ξ' и η'.

■

Следствие 1

Если $\xi_1,\dots,\xi_n$- попарно некоррелированные случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi_1+\dots+\xi_n)=\sum_{i=1}^n D\xi_i.$$

Доказательство

Распишем через ковариацию и воспользуемся ее свойствами:

$$D(\xi_1+\dots+\xi_n)=cov(\xi_1+\dots+\xi_n,\xi_1+\dots+\xi_n)=\sum_{i,j=1}^n cov(\xi_I,\xi_j)=\sum_{i=1}^n cov(\xi_I,\xi_i)=\sum_{i=1}^n D\,\xi_i.$$

■

Следствие 2

Если $\xi_1,\dots,\xi_n$- независимые случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi_1+\dots+\xi_n)= \sum_{i=1}^n D\,\xi_i.$$

Доказательство

Если $\xi_1,\dots,\xi_n$ −независимы, то они попарно некоррелированы. Далее, применяем предыдущие следствие

■

Определение

Пусть $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$- случайный вектор из $\mathbb{R}^n$. Его математическим ожиданием называется вектор $E\xi$ из $\mathbb{R}^n$, составленный из математических ожиданий компонент, то есть $E\xi=(E\xi_1,\dots,E\xi_n)$.

Определение

Дисперсией (или матрицей ковариаций) случайного вектора $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ из $\mathbb{R}^n$ называется матрица размера $n \times n$ с элементами $D\xi=(\mathrm{cov}(\xi_i,\xi_j)$: $i, j =1,\dots,n)$.

Утверждение

Матрица ковариаций любого случайного вектора является симметрической и неотрицательно определенной.

Доказательство

Симметричность $D\xi$ следует из симметричности ковариации:

$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{cov}(\eta,\xi)$. Пусть $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ −случайный вектор. Тогда для любого $z=(z_1,\dots,z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$\langle D\xi z, z\rangle=\sum_{i,j=1}^n (D\xi)_{ij} z_i z_j=\sum_{i,j=1}^n \mathrm{cov}(\xi_i,\xi_j)\cdot z_i z_j=\sum_{i,j=1}^n \mathrm{cov}(z_i\xi_i, z_j\xi_j)=D(\sum_{i=1}^n z_i\xi_i)\geq 0$.

Вопрос

Предположим, что $\xi_n\to\xi$ (поточечно на Ω), верно ли, что тогда и $E\xi_n\to E\xi$?

Теорема (о монотонной сходимости)

Пусть ξ,η, $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ −случайные величины. Тогда

1. Если $\xi_\eta > -\infty$, $\xi_n \geq \eta$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\xi_n\uparrow\xi$ при $n\to+\infty$, то $E\xi_n\uparrow E\xi$ при $n\to+\infty$.
2. Если $\xi_\eta < +\infty$, $\xi_n \leq \eta$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\xi_n\downarrow\xi$ при $n\to+\infty$, то $E\xi_n\downarrow E\xi$ при $n\to+\infty$.

Доказательство

Заметим, что второй пункт сводится к первому домножением всех участвующих величин на -1. Так что будет доказывать только 1 пункт.

Будем сначала считать, что $\eta=0$. Тогда все случайные величины ξ_η неотрицательны и для каждого $n\in\mathbb{N}$ можно взять такую последовательность простых случайных величин:

$\{\xi_n{}^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$, что $\xi_n{}^{(k)} \uparrow \xi_\eta$ при k→+∞.

Обозначим $\varsigma_k = \max\limits_{1 \le n \le k} \xi_n{}^{(k)}$. Тогда в силу монотонности последовательности $\xi_n{}^{(k)}$ получаем, что

$$\varsigma_k = \max_{1 \le n \le k} \xi_n{}^{(k)} \le \max_{1 \le n \le k} \xi_n{}^{(k+1)} \le \max_{1 \le n \le k+1} \xi_n{}^{(k+1)} = \varsigma_{k+1}.$$

Значит, последовательность $\{\varsigma_k, k \in \mathbb{N}\}$ тоже не убывает. Обозначим $\varsigma = \lim\limits_{k\to+\infty} \varsigma_k$.

Проверим, что ξ=ς.

С одной стороны, для любых 1≤n≤k выполняются неравенства $\xi_n{}^{(k)} \le \varsigma_k$.

Переходя к пределу по k, получаем, что $\xi_n \le \varsigma$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу по n, получаем, что ξ≤ς.

С другой стороны, в силу монотонности последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\varsigma_k = \max_{1 \le n \le k} \xi_n{}^{(k)} \le \max_{1 \le n \le k} \xi_n = \xi_k$$

Переходя к пределу по k, получаем, что ς≤ξ. Значит, ξ=ς

Осталось показать, что $E\xi_n \uparrow E\xi$. По условию $E\xi_n$ и Eξ определены и $\xi_n \uparrow \xi$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} E\xi_n$ существует и $\lim\limits_{n\to+\infty} E\xi_n \le E\xi$.

С другой стороны, $\varsigma_k \le \xi_k$ для всех k. При этом последовательность $\{\varsigma_k, k \in \mathbb{N}\}$ не убывает, состоит из простых случайных величин и $\varsigma_k \uparrow \xi$. Значит

$\lim\limits_{k\to+\infty} E\xi_k \ge \lim\limits_{k\to+\infty} E\varsigma_k = E\xi$. В итоге, показали, что $\lim\limits_{k\to+\infty} E\xi_n = E\xi$

Пусть теперь η- произвольная случайная величина. Если Eη=+∞, тогда $E\xi_n=+\infty$ для всех n и Eξ=+∞, то есть искомое соотношение верно.

Если же Eη конечно, то рассмотрим последовательность $\xi_n - \eta$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$E(\xi_n - \eta) \uparrow \xi - \eta$. И по доказанному $E(\xi_n - \eta) \uparrow E(\xi - \eta)$

Осталось заметить, что в силу конечности Eη выполнены равенства:

$E\eta + E(\xi_n - \eta) = E\xi_n$, $E(\xi - \eta) + E\eta = E\xi$

■

<u>Следствие</u>

Утверждение теоремы о монотонности сходимости сохраняется, если $\xi_n \uparrow \xi$

Доказательство

Обозначим $A=\{\xi_n \uparrow \xi\}$. Тогда $\eta I_A \leq \xi_n I_A \uparrow \xi I_A$ и, значит, $E(\xi_n I_A) \uparrow E(\xi I_A)$. Осталось заметить, что $E(\xi_n I_A)=E\xi_n$, $E\,\xi I_A=E\xi$

■

<u>Следствие</u>

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\xi_n \geq 0$-неотрицательные случайные величины и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n$ сходится почти наверное. Тогда $E\sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} E\xi_n$.

Доказательство

Достаточно заметить, что $0 \leq \sum_{n=1}^{N} \xi_n \uparrow \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n$

■

Лекция 10

Формулы для подсчета математических ожиданий

Теорема (лемма Фату):

Пусть ξ, η $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – случайные величины. Тогда

1) Если E η > - ∞, $\xi_n \geqslant \eta$ для всех n ∈ ℕ, то $E \underline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} E\,\xi_n$
2) Если E η < +∞, $\xi_n \leqslant \eta$ для всех n ∈ ℕ, то $\overline{\lim}_{n\to+\infty} E\,\xi_n \leqslant E\, \overline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n$
3) Если $|\xi_n| \leqslant \eta$ для всех n ∈ ℕ и E η конечно, то
   $E \underline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} E\,\xi_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} E\,\xi_n \leqslant E\,\overline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n$

Доказательство

1) Обозначим $\psi_n = \inf_{k\geqslant n} \xi_k$. Тогда последовательность ψ_n не убывает и при этом
   $$\lim_{n\to+\infty} \psi_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} \xi_k = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n$$
   По условию $\psi_n \geqslant \eta$ для всех n ∈ ℕ, поэтому по теореме о монотонной сходимости мы получаем, что
   $E \underline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n = \lim_{n\to+\infty} E\,\psi_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} E\,\psi_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} E\,\xi_n$ (т.к. $\psi_n \leqslant \xi_n$)
2) Следует из 1) заменой всех с.в. на противоположные (ξ_n на $-\xi_n$).
3) Следует мгновенно из 1) и 2)

■

Теорема Лебега (о мажорируемой сходимости):

Пусть ξ, η $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – случайные величины. Если $|\xi_n| \leqslant \eta$ для всех n ∈ ℕ, E η конечно и $\xi_n \to \xi$ п.н., то E ξ тоже конечно и $\lim_{n\to+\infty} E\,\xi_n = E\xi$, $\lim_{n\to+\infty} E\,|\xi_n - \xi| = 0$.

Доказательство

Конечность E ξ вытекает из того, что $|\xi| \leqslant \eta$ п.н. Далее по условию имеем, что п.н.

$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n = \xi$. Отсюда по лемме Фату

$E\,\xi = E \underline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} E\,\xi_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} E\,\xi_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} \xi_n = E\,\xi.$

Значит, существует предел $\lim_{n\to+\infty} E\,\xi_n = E\,\xi$.

Для доказательства второго утверждения введем с.в. $\tilde{\xi} = \xi\, I\left\{\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = \xi\right\}$.

Тогда $\tilde{\xi} = \xi$ п. н. и, значит, Е $|\xi_n - \xi| = |\xi_n - \tilde{\xi}|$. С другой стороны, $|\tilde{\xi}| \geqslant \eta$.

Рассмотрим теперь последовательность $\boldsymbol{\psi}_\mathbf{n} = |\xi_n - \xi|$. Заметим, что $\boldsymbol{\psi}_\mathbf{n} \to 0$ п.н. и

$|\boldsymbol{\psi}_\mathbf{n}| \leqslant 2\eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Значит, в силу всего уже доказанного:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}\,|\xi_n - \xi| = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}\,\boldsymbol{\psi}_\mathbf{n} = 0$

■

Замена переменных в интеграле Лебега:

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, ξ – случайна величина на нем, причем Е ξ конечно. Тогда Е $\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$ - Интеграл Лебега по вероятностной мере Р.

Также определен $\int_A \xi(\omega) P(d\omega) = \mathrm{E}\,(\xi\, I_A)$, $A \in F$.

Вопрос: можно ли считать математическое ожидание с помощью распределения? Мы умеем это делать по определению для простых случайных величин. А что будет в общем случае?

С другой стороны, $P\xi$, распределение с.в. ξ – это вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Следовательно, для случайных величин на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P\xi,)$ тоже определено математическое ожидание.

Случайные величины на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P\xi,)$ − это борелевские функции .

$\int_\mathbb{R} g(x)\, P\xi(dx)$ - математическое ожидание с.в. g(x).

Аналогично для $A \in B(\mathbb{R})$ $\int_\mathbb{R} g(x)\, P\xi\,(dx) = \int_\mathbb{R} (g(x) IA\,(x)) P\xi(dx)$

Вопрос: пусть ξ – с.в. Можно ли найти Е $g(\xi)$, зная только распределение $P\xi$?

Теорема (формула замены переменных в интеграле Лебега):

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор на нем. Тогда $\forall B \in B(\mathbb{R}^n)$, для $\forall$борелевской функции $g(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполнено:

$$\mathrm{E}\,(g(\xi) I\{\xi \in B\}) = \int_{\xi\in B} g(\xi)\, dP = \int_B g(x)\, P\xi\,(dx)$$

(в том смысле , что все м.о. конечны (бесконечны, не определены) одновременно)

Доказательство

Пусть сначала $g(x) = I_A(x)$, где $A \in B(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$\int_B g(x)\, P\xi\,(dx) = \int_{A\cap B} P\xi\,(dx) = P\xi\,(A \cap B) = P(\xi \in A \cap B) =$

$=\mathrm{E}I\{\xi \in A \cap B\} = \mathrm{E}(I\{\xi \in A\} \cdot I\{\xi \in B\}) = \mathrm{E}(g(\xi)\, I\{\xi \in B\}) = \int_{\{\xi \in B\}} g(\xi)\,dP.$

В силу линейности всех интегралов формула будет верна для простых неотрицательных функций $g(x)$.

Если $g(x)$ - неотрицательная функция, то возьмем последовательность простых неотрицательных функций $g_n(x)$, которые к ней монотонно сходятся: $g_n(x)\uparrow g(x)$. По теореме о монотонной сходимости:

$$\int_B gn(x)\ \ P\xi\,(dx) \to \int_B g(x)\ \ P\xi\,(dx)$$

$$\mathrm{E}(g_n(\xi)\, I\{\xi \in B\} \to \mathrm{E}(g(\xi)\, I\{\xi \in B\}$$

Следовательно, равенство справедливо и для неотрицательных $g(x)$.

Если $g(x)$ – произвольная функция, то разложим $g(x)=g^+(x)-g^-(x)$ и воспользуемся определением математического ожидания.
Заметим, что все математические ожидания конечны (бесконечны, не определены) одновременно. Теорема доказана

■

<u>Следствия формул замены переменных.</u>

1) Для вычисления математического ожидания функции от произвольного вектора достаточно знать его распределение. Пусть ξ – случайный вектор из $\mathbb{R}^n$, $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - борелевская функция. Тогда: $\mathrm{E}(g(\xi) = \int_{\mathbb{R}n} g(x)\ \ P\xi\,(dx)$

   Доказательство
   Надо наложить $B = \mathbb{R}^n$ в теореме о замене переменных

■

<u>Определение:</u>
Случайные величины (векторы) ξ и η называются одинаково распределенными, если они имеют одинаковое распределение $P\xi = P\eta$.

Обозначение $\xi \overset{\text{def}}{=} \eta$.

2) Если $\xi \overset{\text{def}}{=} \eta$, то для $\forall$ борелевской функции $g(x)$ выполнено $\mathrm{E}(g(\xi) = \mathrm{E}(g(\eta)$.

   Доказательство

   $\mathrm{E}(g(\xi) = \int_{\mathbb{R}n} g(x)\, P\xi\,(dx) = \int_{\mathbb{R}n} g(x)\, P\eta(dx) = \mathrm{E}(g(\eta).$

3) Если ξ – случайная величина, то $\mathrm{E}\,\xi = \int_{\mathbb{R}} x\, P\xi(dx)$

Доказательство

Надо положить g(x)=x в следствие 1.

Как вычислять $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, P\xi(dx)$ для разных классов распределений?

4) Пусть ξ – дискретная случайная величина со значениями в $X = \{xn \ \ n \in \mathbb{N}\}$.
Тогда:
$E(g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(xn)P(\xi = xn)$

Доказательство:

Пусть сначала $g(x) \geq 0$. Тогда рассмотрим $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} g(xk) I\{\xi = xk\}$.
Следовательно, $\eta_n \uparrow g(\xi)$ и η_n – это простые с.в.

По теореме о монотонной сходимости:

$$E(g(\xi) = \lim_n E\, \eta_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} g(xk) P\{\xi = xk\} = \sum_{k=1}^{\infty} g(xk) P\{\xi = xk\}$$

■

Для произвольной функции g(x) разложим ее в виде суммы

$g(x)=g^+(x)-g^-(x)$. Тогда $g^+(\xi) = \sum_{k\in K} g(xk) I\{\xi = xk\}$; $g^-(\xi) = \sum_{k \ni K} (-g(xk)) I\{\xi = xk\}$,

где $K = \{k \in \mathbb{N}: g(xk) \geq 0\}$. В силу уже доказанного $E\, g^+(\xi) = \sum_{k\in K} g(xk)\ P\{\xi = xk\}$,

$Eg^-(\xi) =) = \sum_{k \ni K} (-g(xk)P(\xi = xk) = -\sum_{k \ni K}(g(xk)P(\xi = xk))$.

Наконец, если оба ряда сходятся, то по определению математического ожидания

$Eg(\xi) = E\, g^+(\xi) - Eg^-(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}(g(xn)P(\xi = xn)$

5) Если P – дискретная вероятностная мера на $\mathbb{R}$, сосредоточенная на $X = \{xn\ , n \in \mathbb{N}\}$, то $\int_{\mathbb{R}} g(x)P(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} g(xn)P(\{xn\})$.
6)
Пусть $\xi -$ абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью *p(x)*.
Тогда для любой борелевской функции *g(x)* выполнено:

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx.$$

Прежде чем доказывать следствие надо понять, что такое $\int_A f(x)dx$ для производной борелевской функции? Из курса действительного анализа известно, что интеграл Лебега можно определить не только по вероятностной мере, но и по $\sigma -$ конечной мере. В нашем случае – это мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Доказательство

Начнем с того, что покажем, что $\forall B \in B(\mathbb{R})$ выполнено $P\xi(B)=\int_B p(x)dx$.

Для множеств вида $(-\infty; y\}$ это верно по определению, так как

$P\xi((-\infty; y\})= F\xi(y)=\int_{-\infty}^{y} p(x)dx$.

Далее, определим $Q(B)= \int_B p(x)dx$, $B \in B$. Из свойств интеграла Лебега следует, что Q – тоже вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Следовательно, $Q= P\xi$, так как они имеют одинаковые функции распределения.
Тем самым, искомая формула верна для $g(x)=I_B(x)$. Далее повторяем доказательство теоремы о замене переменных

■

7) Если $\xi \in \mathbb{R}^n$ – случайный вектор с плотностью $p(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Тогда для любой борелевской функции $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполнено

$$Eg(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)p(x)dx.$$

Доказательство:
Все аналогично следствию 6.

8) Если P – абсолютно непрерывная вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)P(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx$$

9) Мы помним, что для каждой ф.р. F(x) на $\mathbb{R}$ имеет место представление $F(x)= \alpha 1\ F1(x)+ \alpha 2\ F2(x)+ \alpha 3\ F3(x)$, где F1 – дискретная ф.р., F_2 – абсолютно непрерывная ф.р., F_3 – сингулярная ф.р. Пусть $\alpha_3=0$. Тогда $\int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x) = \alpha_1 \int_{\mathbb{R}} g(x)dF1(x) + \alpha_2 \int_{\mathbb{R}} g(x)dF2(x)$ где $dF(x):=P(dx)$, P – мера соответствующая F(x).
Доказательство
Следует из того, что $P(B)= \alpha_1 P_1(B)+ \alpha_2 P_2(B)$.

<u>Примеры</u>

<u>Задача:</u>
Пусть $\xi \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ – случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами $\alpha, \beta > 0$ т.е. ее плотность равна

$$(x)=\frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} I\{x > 0\}$$

Найдите Eξ

Решение

$$E\xi = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \left\{u = x\beta, dx = \frac{du}{\beta}\right\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

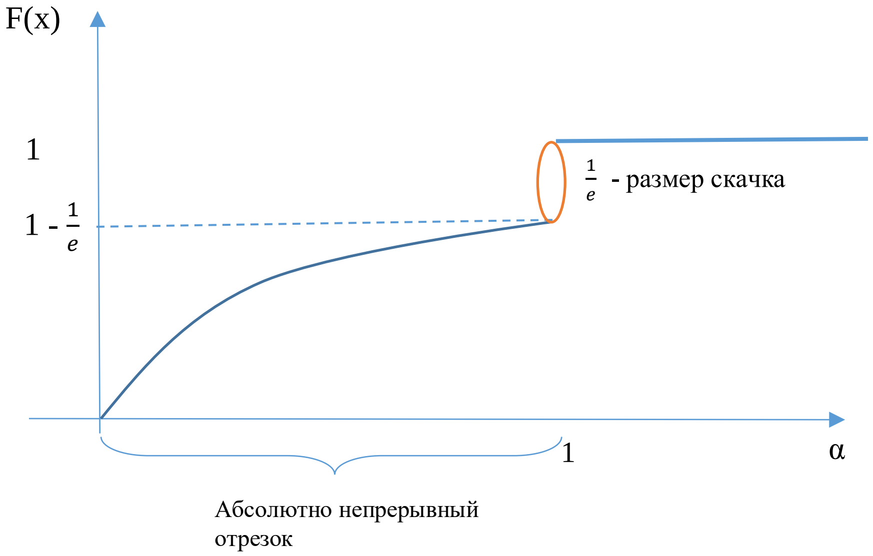
Задача:

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \in [0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найдите Eξ

Решение



У этой ф.р. есть и дискретная, и абсолютно непрерывная части:

$E\xi=\int_{\mathbb{R}} x \cdot dF(x)=\int_0^1 xe^{-x}dx+1\times(F(1)-F(1-0))=-(xe^{-x}+e^{-x})|_0^1+\frac{1}{e}=1-\frac{2}{e}+\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}$

Прямое произведение вероятностных пространств

Определение

Пусть (Ω_1, F_1, P_1) и (Ω_2, F_2, P_2) – 2 вероятностных пространства. Тогда вероятностное пространство (Ω, F, P) называется их прямым произведением, если $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$,

$F = F_1 \times F_2 = \sigma(\{B_1 \times B_2\}: B_i \in F_i)$

- $\sigma -$ алгебра, порожденная прямоугольниками $P = P_1 \times P_2$

- вероятностная мера на (Ω, F), такая что P $(B_1 \times B_2)$=P$_1$(B$_1$)P$_2$(B$_2$).

Лемма:

Указанная мера P существует и единственна.

Доказательство

Конечные объединения непересекающихся прямоугольников образуют алгебру A, причем от $\sigma(A)=F$. Если мы проверим $P_1\times P_2$ является вероятностной мерой на A, то по теореме Каратеодори ее можно единственным образом продолжить на F.
Проверим, что $P_1\times P_2$ – счетно-аддитивна на A. Для этого достаточно проверить, что если прямоугольник $A\times B$ представим в виде $A\times B \coprod_{n=1}^{+\infty}(A_n \times B_n)$, то

$$(P_1 \times P_2)(A \times B) = \sum_{n=1}^{+\infty}(P_1 \times P_2)(A_n \times B_n).$$

Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую функцию $f_n(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_i \in \Omega_i$, $i=1,2$.

$$f_n(\omega_1, \omega_2)= \mathrm{I}\{\omega_1 \in A_n\}\cdot\mathrm{I}\{\omega_2 \in B_n\}$$

Заметим, что для любой точки $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ выполнено

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\omega_1, \omega_2)= \mathrm{I}\{\omega_1 \in A\}\cdot\mathrm{I}\{\omega_2 \in B\}$$

С другой стороны, при фиксированном ω_1, каждая функция $f_n(\omega_1, \omega_2)$ есть с.в. на $(\Omega_2, F_2,\ P_2)$. Возьмем ее математическое ожидание

$$f_n(\omega_1):=E_2 f_n(\omega_1, \omega_2)=P_2(B_n)\ \cdot\mathrm{I}\{\omega_1 \in A\}$$

Но $\mathrm{I}\{\omega_1 \in A\}\cdot\mathrm{I}\{\omega_2 \in B_n\}$ – тоже с.в. на $(\Omega_2, F_2,\ P_2)$ при фиксированном ω_1. Стало быть, по теореме о монотонной сходимости: $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\omega_1)=P_2(B)\ \cdot\mathrm{I}\{\omega_1 \in A\}$.

Но теперь функции $f_n(\omega_1)$ – это случайные величины на $(\Omega_1, F_1,\ P_1)$ их математические ожидания равны $E_2 f_n(\omega_1) = P_2(B_n)\ \cdot P_1(A_n)$.

Далее $P_2(B)\ \cdot\mathrm{I}\{\omega_1 \in A\}$ – это тоже с.в. на $(\Omega_1, F_1,\ P_1)$. Все с.в. неотрицательны, поэтому по теореме о монотонной сходимости

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_2(B_n)\ \cdot P_1(A_n)=E_1(P_2(B)\ \cdot\mathrm{I}\{\omega_1 \in A\})= P_2(B)\ \cdot P_1(A)$$

■

Теорема (Фубини)

Если $\xi(\omega_1, \omega_2)$ – это случайная величина вероятностного пространства (Ω, F, P), которое является прямым произведением $(\Omega_1, F_1,\ P_1)$ и $(\Omega_2, F_2,\ P_2)$ с условием, что

$$\int_\Omega |\xi(\omega_1, \omega_2)|dP < +\infty$$

То величины $\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\,\omega_1)$, $\int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\,\omega_2)$ определены п.н. относительно P_1 и P_2, являются измеримыми относительно *F₂* и *F₁*, соответственно, и, кроме того,

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) dP = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \right) P_2\,(d\omega_2) =$$

$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) \right) P_1\,(d\omega_1)$$

Лекция 11

Произведение вероятностных пространств

Утверждение

Пусть ξ, η – две независимые случайные величины. Тогда $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P_{(\xi,\eta)})$ есть прямое произведение пространства $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\xi)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\eta)$

Доказательство

В силу того, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, достаточно проверить, что $P_{(\xi,\eta)} = P_\xi \times P_\eta$. Пусть $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, тогда

$$P_{(\xi,\eta)}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) = P((\xi,\eta) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) = P(\xi \in \mathcal{B}_1, \eta \in \mathcal{B}_2) = |\text{пользуемся независимостью}| = P(\xi \in \mathcal{B}_1) P(\eta \in \mathcal{B}_2) = P_\xi(\mathcal{B}_1) P_\eta(\mathcal{B}_2)$$

■

Лемма (о свертке распределений)

Пусть ξ, η – две независимые случайные величины. Тогда функция распределения их суммы $F_{\xi+\eta}$ равна $F_{\xi+\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(y - x) d F_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(y - x) d F_\xi(x)$

Доказательство

$$F_{\xi+\eta}(y) = P(\xi + \eta \le y) = |\text{замена переменных}| = \int_{\mathbb{R}} I\{x + z \le y\} P_{(\xi,\eta)}(dx, dz) = \Big|\text{т.к. } P_{(\xi,\eta)} = P_\xi \times P_\eta\Big| = \int_{\mathbb{R}} I\{x + z \le y\} P_\eta(dz) P_\xi(dx) = |\text{теорема Фубини}| = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} I\{x + z \le y\} P_\eta(dz) \right) P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} P\{\eta \le y - x\} P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(y - x) d F_\xi(x)$$

■

Следствие (формула свертки)

Если ξ, η – две независимые случайные величины с плотностями $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$, то сумма $\xi+\eta$ тоже имеет плотность, причем

$$p_{\xi+\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}} p_\xi(y-x)\, p_\eta(x)dx = \int_{\mathbb{R}} p_\eta(y-x)\, p_\xi(x)dx$$

Замечание

Сумма независимых с.в. $\xi+\eta$ будет иметь плотность, если хотя бы одна из с.в. абсолютно непрерывна.

Доказательство формулы свертки

Согласно лемме о свертке

$$F_{\xi+\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(y-x)d\,F_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(y-x)d\,F_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{z-x} p_\xi(y)dy\right) p_\eta(x)dx =$$

$$= |y' = y + x| = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{z} p_\xi(y'-x)dy'\right) p_\eta(x)dx = |\text{теорема Фубини}| =$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{\mathbb{R}} p_\xi(y'-x)\, p_\eta(x)dx\right)dy'$$

Следовательно, внутренний интеграл и есть плотность $\xi+\eta$.

Пример задачи

Условие:
Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, $\xi_i \sim \mathrm{Gamma}(\alpha,\lambda)$. Найдите распределение $\xi_1+\xi_2$.
Решение:
Плотность ξ_i имеет плотность

$$p_{\xi_i}(x) = \frac{\alpha^{\lambda_i} x^{\lambda_i - 1}}{\Gamma(\lambda_i)} e^{-\alpha x} I\{x > 0\}.$$

Отсюда, по формуле свертки

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha^{\lambda_1} x^{\lambda_1-1}}{\Gamma(\lambda_1)} e^{-\alpha y} I\{y>0\} \cdot \frac{\alpha^{\lambda_2} x^{\lambda_2-1}}{\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha(x-y)} I\{x-y>0\}dy =$$

(если x<0, то индикаторы несовместны)

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)(\lambda_2)} e^{-\alpha x} \int_0^x y^{\lambda_1-1}(x-y)^{\lambda_2-1}dy = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)(\lambda_2)} e^{-\alpha x} \cdot x^{\lambda_1+\lambda_2-1} B(\lambda_1,\lambda_2) =$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2} x^{\lambda_1+\lambda_2-1}}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)} e^{-\alpha x} \cdot I\{x<0\}.$$

Значит, $\xi_1+\xi_2 \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda_1+\lambda_2)$

Замечание 1

Если $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ − независимые случайные векторы, то $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_\xi)$ и $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), P_\eta)$

Замечание 2

Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n)$ − многомерная ф.р., образованная как произведение одномерных ф.р. F_i, то соответствующая ей мера P на $\mathbb{R}^n$ есть $P=P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$, ’’произведение’’ мер P_i, соответствующих ф.р. F_i. Стало быть, по теореме Фубини

$$dF(x_1, x_2, \ldots, x_n) = dF_1(x_1) \ldots dF_n(x_n)$$

Теорема (неравенство Маркова)

Если $\xi \geq 0$ – неотрицательная с.в. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

Доказательство

$$P(\xi \geq \varepsilon) = EI\{\xi \geq \varepsilon\} \leq E\left(\frac{\xi}{\varepsilon} I\{\xi \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

Теорема (неравенство Чебышёва)

Если ξ – произвольная с. в., $D\xi < +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Доказательство

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P((|\xi - E\xi| \geq \varepsilon^2) \leq |\text{неравенство Маркова}| \leq \frac{E|\xi - E\xi|^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Теорема (неравенство Йесена)

Пусть $g(x)$ − выпуклая книзу борелевская функция, $E|\xi| < +\infty$. Тогда

$$g(E\xi) \geq Eg(\xi).$$

Доказательство

Если $g(x)$ выпукла книзу, то $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists \lambda(x_0)$, т.ч. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geq g(x_0) + (x - x_0)\lambda(x_0).$$

Положим $x_0 = E\xi$, $x = \xi$. Тогда

$$g(\xi) \geq g(E\xi) + (\xi - E\xi)\lambda(E\xi).$$

Берем математическое ожидание от обеих частей неравенства:

$$\mathrm{E}g(\xi) \geq g(\mathrm{E}\xi) + \lambda(\mathrm{E}\xi)\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi).$$

Заметим, что $\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi) = 0$. Следовательно, $\mathrm{E}g(\xi) \geq g(\mathrm{E}\xi)$. Доказано.

Сходимости случайных величин

1) Сходимость по вероятности

Определение

Последовательность с. в. $\{\xi_n, n \in N\}$ сходится по вероятности к с. в. ξ, если $\forall \varepsilon > 0$

$P(|\xi - \mathrm{E}\,\xi| \geq \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

2) Сходимость с вероятностью 1 (почти наверное)

Определение

Последовательность с. в. $\{\xi_n, n \in N\}$ сходится с вероятностью 1 к с. в. ξ (сходится почти наверное), если $P(\lim\limits_n \xi_n = \xi) = P(\omega : \lim\limits_n \xi_n(\omega)) = 1$.

Обозначения: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, $\xi_n \to \xi$ п. н., $\xi_n \to \xi$ P-п.н.

3) Сходимость в среднем порядка p:

Определение

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in N\}$ сходится в среднем порядка $p > 0$ к с.в. ξ (сходится в L^p), если $\mathrm{E}\,|\xi_n - \xi|^p \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$.

4) Сходимость по распределению

Определение

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in N\}$ сходится по распределению с.в. ξ, если для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено $\mathrm{E}\,f(\xi_n) \to \mathrm{E}\,f(\xi)$ при $n \to \infty$.

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Понять, где возникает сходимость по вероятности, помогает закон больших чисел (ЗБЧ).

Теорема (закон больших чисел в форме Чебышёва)

Пусть $\{\xi_n, n \in N\}$ − последовательность попарно некоррелированных с.в., причем для некоторой $c < 0$ выполнено $\forall k \quad D\xi_k \le c$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство

Оценим DS_n. В силу попарной некоррелированности

$$DS_n = D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i \le cn.$$

Тогда $D\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n^2} DS_n \le \frac{c}{n}$. Из неравенства Чебышёва получаем:

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \ge \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n}\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} \le \frac{c}{\varepsilon^2 n} \to 0$$

■

<u>Следствие ЗБЧ в форме Чебышёва</u>

Пусть $\{\xi_n, n \in N\}$ − независимые с.в., $\forall k \quad D\xi_k \le c, E\xi_k = a$. Тогда

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} a \text{ при } n \to \infty$$

Доказательство

Очевидно, т.к. ES_n=na

■

<u>Смысл ЗБЧ</u>: пусть $\xi_1 \ldots + \xi_n, \ldots$ − независимые наблюдения одного и того же эксперимента. Тогда их среднее арифметическое сходится к среднему значению одного результата $E\xi_i = a$.

Если, например ξ_i − индикаторы появления некоторого события A в эксперименте, т.е. $\xi_i = I\{\text{A произошло в i–ом эксперименте}\}$, то $\nu_n(A) = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$ −частота появления A, $E\xi_n = P(A)$. Тогда ЗБЧ гласит:

$$\nu_n(A) \xrightarrow{P} P(A)$$

Это эффект устойчивости частот, который постулировался в начале курса.

Критерий сходимости с вероятностью 1

<u>Лемма (критерий сходимости с вероятностью 1)</u>

$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ выполнено $P\left(\sup\limits_{k \ge n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right)$ при $n \to +\infty$

Доказательство

Пусть $A_n^\varepsilon = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$, а $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon$. Тогда

$$\{\omega : |\xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}$$

Следовательно,

$$P(\xi_n \nrightarrow \xi) = 0 \Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}\ P\left(A^{\frac{1}{m}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad P(A^\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow |\text{непрерывность вероятностной меры}|$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \ \ P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Событие $\{\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\}$ и есть $\left\{\sup\limits_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\}$

■

Замечание

Заметим, что утверждение $\forall\, \varepsilon > 0\ P\left(\sup\limits_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to +\infty$ эквивалентно тому, что $\forall\, \varepsilon > 0\ P\left(\sup\limits_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ –последовательность с.в., причем для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < +\infty$. Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Доказательство

$$P\left(\sup\limits_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = P\left(\bigcup_{k \geq n} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(|\xi_k - \xi| > \varepsilon) \to 0$$

при $n \to +\infty$ как остаток сходящегося ряда.

Взаимоотношение видов сходимости

Теорема (взаимоотношение видов сходимости)

Имеют место соотношения:

1. $\xi n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi n \xrightarrow{P} \xi$
2. $\xi n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi n \xrightarrow{P} \xi$
3. $\xi n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi n \xrightarrow{d} \xi$

Доказательство

1)Используем лемму:

$\xi n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall_\varepsilon > 0$ выполнено $P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Но $\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \subset \{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$. Значит,

$$P(|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to +\infty$$

2) Применяем неравенство Маркова:

$$P(|\xi_k - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{E|\xi_k - \xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

3) Пусть $f(x)$ − ограниченная функция на $\mathbb{R}$, $|f(x)| \leq c$. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Выберем N так, чтобы

$$P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{4c}$$

Рассмотрим следующее разбиение Ω:

$$A_1 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta\} \cap \{|\xi| \leq N\},$$

$$A_2 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta\} \cap \{|\xi| > N\},$$

$$A_3 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta\}.$$

Тогда

$$|Ef(\xi_n) - E(\xi)| \leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq E\left[|f(\xi_n) - f(\xi)|\left(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}\right)\right] = \odot$$

На множестве A_1 выполнено $|\xi_n - \xi| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, значит $E|f(\xi_n) - f(\xi)|I_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

На множествах A_2, A_3 выполнено $|\xi_n - \xi| \leq 2c$, значит

$$E|f(\xi_n) - f(\xi)|\left(I_{A_2} + I_{A_3}\right) \leq 2c \cdot (P(A_2) + P(A_3)).$$

В итоге,

$$\odot \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2c \cdot \left(P(A_2) + P(A_3)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2c \cdot (P(|\xi| > N) + 2c \cdot P(|\xi_n - \xi| > \delta)$$

$$\leq |\text{выбор } N| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + 2c \cdot P(|\xi_n - \xi| > \delta) = \varepsilon + 2c \cdot P(|\xi_n - \xi| > \delta).$$

Но $P(|\xi_n - \xi| > \delta) \to 0$ при $n \to +\infty$, т.к. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Значит, $\forall_\varepsilon > 0$ выполнено $\lim_n |Ef(\xi_n) - E(\xi)| \leq \varepsilon$. Получаем

$$Ef(\xi_n) \to E(\xi), \text{и } \xi_n \to \xi$$

■

Замечание

Сходимость по распределению – это, на самом деле, сходимость не самих с.в., а их распределений

Схема: **п.н.** ⇘

P ⇒ **d**

$\mathbf{L^p}$ ⇗

Обратных стрелок нигде нет, можно привести контрпримеры.

Лемма

Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то найдется такая последовательность $\{\xi_{n_k}, k > \mathbb{N}\}$, что $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ при $k \to \infty$.

Доказательство

Для любого $k \in \mathbb{N}$ выберем $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы для всех $n \geq n_k$ было выполнено

$$P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{1}{k}\right) \leq 2^{-k}.$$

Выбор возможен в силу того, что $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{1}{k}\right) \to 0$ при $n \to \infty$.

Проверим, что подпоследовательность $\{\xi_{n_k}, k > \mathbb{N}\}$ искомая. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $k > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда

$$\sum_{k \geq k_0} P\left(\left|\xi_{n_k} - \xi\right| > \varepsilon\right) \leq \sum_{k \geq k_0} P\left(\left|\xi_{n_k} - \xi\right| \geq \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k \geq k_0} k^{-2} < +\infty.$$

Согласно достаточному условию сходимости п.н. получаем, что $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$

■

Теорема (усиленный закон больших чисел в форме Кантелли)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ –последовательность независимых с.в., причем для некоторой $c > 0$ выполнено $\forall n \; E(\xi_n - E\xi_n)^4 \leq c$. Обозначим $S_n = \xi_1 \ldots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н}} 0.$$

Доказательство

Без ограничения общности можно считать, что $E\xi_n = 0$ для всех n, иначе просто перейдем к с.в. $\xi_n - E\xi_n$.

Нам необходимо показать, что $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н}} 0$. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < +\infty$$

Используя неравенство Маркова, получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < +\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} P(|S_n| > n\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ES_n^4}{n^4\varepsilon^4} .$$

Покажем, что $ES_n^4 = O(n^2)$. Этого будет достаточно для обоснования сходимости ряда. Имеет место равенство:

$$ES_n^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l.$$

В силу независимости с.в. и условия $E\xi_i = 0$ для всех i слагаемое $E\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l$ не будет нулевым только, если все различные индексы входят в четных степенях. Следовательно,

$$ES_n^4 = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i^4 + 6 \cdot \sum_{i<j} E\xi_i^2 \cdot E\xi_j^2.$$

По условию теоремы $E\xi_i^4 \leq c$, а $E\xi_i^2 \leq \sqrt{E\xi_i^4} \leq \sqrt{c}$

■

<u>Следствие</u>

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые с.в., $\forall n\ E\xi_n^4 \leq c, E\xi_n = a$. Тогда

$$\frac{\xi_1 \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a \text{ при } n \to \infty.$$

Усиленный закон больших чисел теоретически обосновывает феномен устойчивости частот появления события при проведении независимых однородных случайных экспериментов:

$$\xi_i = I\{A \text{ произошло в } i - \text{ом эксперименте}\},$$

то $\nu_n(A) = \frac{\xi_1 \ldots + \xi_n}{n}$ – частота появления A, $E\xi_n = P(A)$. Тогда УЗБЧ гласит, что

$$\nu_n(A) \xrightarrow{\text{п.н.}} P(A).$$

Лекция 12

Усиленный закон больших чисел

Определение

Последовательность чисел $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ называется фундаментальной, если

$|X_n - X_m| \to 0$ при n,m→+∞ (или $\sup_{k\geq n}|X_k - X_n|\to 0$ при n→+∞).

Теорема (критерий Коши)

Последовательность чисел $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится ⇔ она фундаментальна.

Определение

Последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ называется фундаментальной с вероятностью 1, если P($\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна)=1.

Теорема (критерий Коши сходимости почти наверно)

(=>)Последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится почти наверно ⇔она фундаментальна с вероятностью 1.

Доказательство

Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{почти наверно}} \xi$. Обозначим $\Omega'=\{\omega\colon \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}$. Тогда $\forall\omega \in \Omega'$ последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна, причем $P(\Omega') = 1.$ Значит,

P($\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна)$\geq P(\Omega') = 1$.

(<=) Положим A={$\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна}. По условию P(A)=1. Для любого $\omega \in A$ определим $\xi(\omega)$ как предел $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$. Если же $\omega \notin A$, то положим $\xi(\omega)=0$. Тем самым, для любого $\omega \in \Omega$ выполнено $\xi(\omega)= \lim\limits_{n\to\infty}(\xi_n I_A)(\omega)$.

Значит, ξ- случайная величина (как предел случайных величин), $\xi_n \xrightarrow{\text{почти наверно}} \xi$, ведь $P(\xi_n \to\xi)\geq P(A)=1$

■

Лемма (критерий фундаментальности с вероятностью 1)

Последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1 ⇔ для любого ξ>0 $P(\sup_{k\geq n}|\xi_k - \xi_n| > \xi)\to 0$ при n→+∞.

Доказательство

Обозначим $A^{\xi}_{m,k}$=={ω: $|\xi_m(\omega)-\xi_k(\omega)|>\xi\}$, а $A^{\xi}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k,m\geq n}A^{\xi}_{m,k}$. Тогда

{ω:{ $\xi_n(\omega)$, n ∈ ℕ} не фундаментальна}=$\bigcup_{N=1}^{\infty}A^{\frac{1}{N}}$.

Следовательно, P({ξ_n, n ∈ ℕ}не фундаментальна)=0⇔P($\bigcup_{N=1}^{\infty}A^{\frac{1}{N}}$)=0⇔∀ N ∈ ℕ

P($A^{\frac{1}{N}}$)=0⇔ ∀ε>0 P(A^{ε})=0⇔(В силу непрерывности вероятностной меры)∀ε>0

P($\bigcup_{k,m\geq n}A^{\xi}_{m,k}$)→0 при n→+∞. Событие ($\bigcup_{k,m\geq n}A^{\xi}_{m,k}$) есть в точности

$\{\sup\limits_{k,m\geq n}|\xi_k-\xi_m|>\xi\}$. Осталось заметить, что $\{\sup\limits_{k,m\geq n}|\xi_k-\xi_m|>\xi\}\subset\{\sup\limits_{k\geq n}|\xi_k-\xi_n|>\frac{\xi}{2}\}$ и $\{\sup\limits_{k\geq n}|\xi_k-\xi_n|>\xi\subset\{\sup\limits_{k,m\geq n}|\xi_k-\xi_m|>\xi\}$, что дает искомое утверждение:

∀ε > 0 P($\sup\limits_{k,m\geq n}|\xi_k-\xi_m|>\xi$)→0 ⇔ ∀ ε > 0 P($\sup\limits_{k\geq n}|\xi_k-\xi_n|>\xi$) $\to 0$.

<u>Теорема (Неравенства Колмогорова)</u>

Пусть $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ −независимые случайные величины, причем ∀i E $\xi_i=0$ и Eξ_i^2<+∞. Обозначим $S_k=\xi_1+\dots+\xi_k$, k=1,…,n. Тогда для любого ε>0 выполняется неравенство:

$P(\max\limits_{1\leq k\leq n}|S_k|\geq\varepsilon)\leq\frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$.

Доказательство

Обозначим A={$\max\limits_{1\leq k\leq n}|S_k|\geq\varepsilon)\geq\varepsilon\}$. Для каждого k=1,…,n положим $A_k=\{|S_i|<\varepsilon$ для i=1,…,k-1, $|S_k|\geq\varepsilon\}$. Тогда $A_k\cap A_j=\emptyset$ при k≠j и A=$\coprod_{k=1}^{n}A_k$. Следовательно,

$ES_n^2\geq E(S_n^2I_A)=\sum_{k=1}^{n}E(S_n^2I_{A_k})$.

Рассмотри последнее слагаемое:

$E(S_k^2I_{A_k})=E(S_k+\xi_{k+1}+\dots+\xi_n)^2I_{A_k}=E(S_n^2I_{A_k})+2E\left[(S_kI_{A_k})(\xi_{k+1}+\dots+\xi_n)\right]+$
$+E(S_k+\xi_{k+1}+\dots+\xi_n)^2I_{A_k}$.

Заметим, что при k<n событие A_k зависит от $S_1,\dots,S_k$.

Значит, $S_kI_{A_k}$ независимо с $(\xi_{k+1}+\dots+\xi_n)$. Следовательно,$E(S_kI_{A_k})(\xi_{k+1}+\dots+$ $+\xi_n)=ES_kI_{A_k}\cdot E(\xi_{k+1}+\dots+\xi_n)=0$.

Отсюда получаем, что

$E(S_k^2I_{A_k})\geq ES_k^2I_{A_k}+E(\xi_{k+1}+\dots+\xi_n)^2I_{A_k}\geq ES_k^2I_{A_k}\geq|\text{т. к. }|S_k|\geq\varepsilon\text{ на }A_k|\geq\varepsilon^2P(A_k)$.

В итоге, $ES_n^2\geq\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^2P(A_k)=\varepsilon^2P(A)$

■

Теорема (Колмогоров-Хинчин, достаточное условие сходимости ряда почти наверное)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$- независимые случайные величины, причем $\forall i$ $E\xi_i=0$.Если $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2<+\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1.

Доказательство

Обозначим $S_n=\xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$сходится с вероятностью 1

$\Leftrightarrow$(по критерию Коши) последовательность $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1 $\Leftrightarrow$(критерий фундаментальности с вероятностью 1) для любого $\varepsilon>0$

$P(\sup\limits_{k\geq n}|S_k - S_n|>\varepsilon)\to 0$ при $n\to+\infty$.

Далее, $\{\sup\limits_{k\geq n}|S_k - S_n|>\varepsilon\}=\cup_{N=0}^{\infty}\{\max\limits_{n\leq k\leq n+N} |S_k - S_n| > \varepsilon\}$.

Но в силу непрерывности вероятностной меры

$P(\sup\limits_{k\geq n}|S_k - S_n|>\varepsilon)=\lim\limits_{N\to\infty} P(\max\limits_{0\leq k\leq N} |S_{k+n} - S_n| > \varepsilon)\leq |\text{Неравенство Колмогорова}| \leq$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \frac{E(S_{n+N} - S_n)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{D(S_{n+N} - S_n)}{\varepsilon^2} = |\text{независимостью } \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+N}| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{n+N} E\xi_k^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} E\xi_k^2 \to 0.$$

Как остаток сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} E\xi_k^2$. По критерию получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится почти наверное.

■

Лемма Тёплица

Для доказательства УЗБЧ нам еще понадобятся две леммы из анализа.

Пусть $a_n\geq 0$, $b_n=\sum_{j=1}^{n} a_j$, $b_n\uparrow+\infty$. Пусть $x_k \to x$ при $k\to+\infty$. Тогда $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to x$ при $n\to+\infty$.

Доказательство

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $n_0=n_0(\varepsilon)0$: $|x_n - x|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $n>n_0$. Выберем $n_1>n_0$ с условием $\frac{1}{b_{n_1}}\sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $n>n_0$. Тогда $\forall n >n_1$:

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - x\right|\leq\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} a_j |x_j - x|=\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x| + \frac{1}{b_n}\sum_{j=n_0+1}^{n} a_j |x_j - x| \leq$$

$\leq \frac{1}{b_{n_1}} \sum_{j=1}^{n_0} a_j \left|x_j - x\right| + \frac{1}{b_n} \sum_{j=n_0+1}^{n} a_j \left|x_j - x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, Что означает, что $\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to x$ при $n \to +\infty$.

■

Лемма (Кронекер)

Пусть $b_n > 0, b_n \uparrow +\infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится. Тогда $\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \to 0$ при $n \to +\infty$.

Доказательство

Пусть $b_0 = 0$, $S_0 = 0$. Обозначим $S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$. Тогда $\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = \sum_{j=1}^{n} b_j (S_j - S_{j-1}) =$

$= b_n S_n - b_0 S_0 - \sum_{j=1}^{n} S_{j-1} (b_j - b_{j-1})$.

Следовательно, $\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} x_j b_j = S_n - \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} S_{j-1} a_j$, где $a_j = b_j - b_{j-1} \geq 0$. По лемме Тёплица правая часть стремится к нулю при $n \to +\infty$

■

Определение

Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность событий. Событием $\{A_n, \text{б.ч.}\}$ называется событие, состоящее в том, что произошло бесконечное число событий из $\{A_n\}$. Формально, $\{A_n, \text{б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k \geq n} A_k)$.

Лемма (Борель-Кантелли)

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то $P(\{A_n, \text{б.ч.}\}) = 0$
2. Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ и события $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы, то $P(\{A_n, \text{б.ч.}\}) = 1$.

Доказательство

1) $\{A_n, \text{б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k \geq n} A_k)$, поэтому из непрерывности вероятностной меры следует, что $P(\{A_n, \text{б.ч.}\}) = \lim_{n \to \infty} P(\bigcup_{k \geq n} A_k) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$, так как $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$ как остаток сходящегося ряда.

■

2) $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы $\Leftrightarrow$ $\{\overline{A_n}, n \in \mathbb{N}\}$ независимы. Следовательно, $\forall N \geq n$ $P(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{N} P(\overline{A_k})$. Тогда,

$P(\{A_n, \text{б.ч.}\}) = \lim_{n \to \infty} P(\bigcup_{k \geq n} A_k) = \lim_{n \to \infty} P(\Omega \setminus \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}) = 1 - \lim_{n \to \infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}) =$

$= 1 - \lim_{n \to \infty} \lim_{N \to \infty} P(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}) = 1 - \lim_{n \to \infty} \lim_{N \to \infty} \prod_{k=n}^{N} P(\overline{A_k}) =$

$=1-\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}(1-P(A_k)) \geq 1-\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}\left(e^{-P(A_k)}\right) =$

$= 1-\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)}=1,$

так как $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{N} e^{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)}=e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)}=e^{-\infty} = 0.$

■

Утверждение

Если ξ- неотрицательная случайная величина, то

$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) \leq E\xi (\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n)).$

Доказательство

$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(k \leq \xi < k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(k \leq \xi < k+1) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k \leq \xi < k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} E(k \cdot I\{k \leq \xi < k+1\}) \leq$

$\leq \sum_{k=0}^{\infty} E(\xi \cdot I\{k \leq \xi < k+1\}) = |\text{монотонная сходимость}| = E\xi.$

■

Усиленный закон больших чисел II

Определение

Случайные величины $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{N}\}$ называются одинаково распределенными, если все случайные величины ξ_α имеют одинаковую функцию распределения.

Обозначение: $\xi =^{d} \eta$ (ξ и η одинаково распределены)

Теорема (уже доказали)

Если $\xi =^{d} \eta$, то $E_g(\xi) = E_g(\eta)$ для любой борелевской функции g(x).

Теорема (усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.), причем $E|\xi_1|$ при $n\to+\infty$.

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Без ограничения общности, считаем, что $a = E\xi_1 = 0$. Имеем $E|\xi_1|<\infty$. Из одинаковой распределённости получаем, что $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geq n) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq n) < \infty$.

По лемме Бореля-Кантелли $P(\{|\xi_n| \geq n\}$ б. ч.$)=0$.

Следовательно, с вероятностью 1 для всех n, кроме лишь конечного числа, выполнено $\{|\xi_n| < n\}$. Обозначим это событие через Ω'.

Обозначим $\overline{\xi_n} = \xi_n I\{|\xi_n| < n\}$. Заметим, что для любого фиксированного $\omega \in \Omega'$ выполнено $\overline{\xi_n}(\omega) = \xi_n(\omega)$ $\forall n$, кроме лишь конечного числа значений, тогда для любого $\omega \in \Omega'$ $\frac{\xi_1(\omega)+\dots+\xi_n(\omega)}{n} \to 0 \Leftrightarrow \frac{\overline{\xi_1}(\omega)+\dots+\overline{\xi_n}(\omega)}{n} \to 0$.

Что можно сказать про $E\overline{\xi_n}$?

$E\overline{\xi_n} = E(\xi_n I\{|\xi_n| < n\})$=|одинаковое распределение|=$E(\xi_1 I\{|\xi_1| < n\}) \to E\xi_1 = 0$ при $n\to\infty$ (по теореме Лебега). Отсюда по лемме Тёплица $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\,\overline{\xi_k} \to 0$.

Поэтому $\frac{\overline{\xi_1}+\dots+\overline{\xi_n}}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \Leftrightarrow \frac{(\overline{\xi_1}-E\overline{\xi_1})+\dots+(\overline{\xi_n}-E\overline{\xi_n})}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

Введем обозначения $\overline{\overline{\xi_n}} = \overline{\xi_n} - E\overline{\xi_n}$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\overline{\xi_n}}}{n}$ сходится почти наверное, то, применяя лемму Кронекера (b_n=n, $x_n = \frac{\overline{\overline{\xi_n}}}{n}$), мы получим, что $\frac{\overline{\overline{\xi_1}}+\dots+\overline{\overline{\xi_n}}}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{\overline{\xi_n}}/n)$ почти наверное достаточно проверить (по теореме Колмогорова-Хинчина), что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\overline{\overline{\xi_n}}^{\,2}}{n^2}$=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\overline{\xi_n}}{n^2} < \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\overline{\overline{\xi_n}}^{\,2}}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\overline{\xi_n}^2}{n^2}$=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}E(\xi_n^{\,2} I\{|\xi_n| < n\})$=|одинаковое распределение|
=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}E(\xi_1^{\,2} I\{|\xi_1| < n\})$=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(\xi_1^{\,2} I\{k-1 \le |\xi_1| < k\})$=

$= \sum_{k=1}^{\infty} E(\xi_1^{\,2} I\{k-1\le|\xi_1| < k\})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \le$ |т.к. $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2} \le \frac{2}{k}$|$\le 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot E(\xi_1^{\,2} I\{k-1\le|\xi_1| < k\}) \le$

$\le 2\sum_{k=1}^{\infty} E(|\xi_1| I\{k-1\le|\xi_1| < k\}$=|монотонная сходимость|=$2E|\xi_1| < \infty$.

■

$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н}} a,\ \frac{S_n}{n} - a \xrightarrow{\text{п.н}} 0$

$|\frac{S_n}{n} - a| = \underline{\underline{0}}(?)$

Слабая сходимость функций распределения

<u>Определение</u>

Пусть $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$- последовательность ф.р. на $\mathbb{R}$. Она называется слабо сходящейся к функции F(x), если для любой ограниченной непрерывной функции f(x) выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\,F_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)d\,F(x),\ n\to\infty.$$

Обозначение: $F_n \xrightarrow{w} F$.

Наблюдение: если $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность случайных величин, то

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi$.

Доказательство

Следует из формулы замены переменных: $E f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d F_\xi(x)$.

Слабая сходимость вероятностных мер

Определение

Последовательность функций распределения $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ на $\mathbb{R}$ называется сходящейся в основном к ф. р $F(x)$, если $F_n \to F(x)$ для всех $x \in \mathbb{C}(F)$, где $\mathbb{C}(F)$ -множество точек непрерывности ф.р. $F(x)$.

Обозначение: $F_n \Rightarrow F$.

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$- вероятностные меры на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$.

Определение

Последовательность $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ называется слабо сходящейся к вероятностной мере P на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, если для любой $f(x)$, непрерывной ограниченной функции $\mathbb{R}^m$, выполнено $\int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}^m} f(x) P(dx)$, $n \to \infty$.

Обозначение: $P_n \xrightarrow{w} P$.

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, ξ- случайная величина. Тогда $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi \Leftrightarrow P_{\xi_n} \xrightarrow{w} P_\xi$.

Определение

Последовательность вероятностных мер $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ называется сходящейся в основном к мере P, если $P_n(A) \to P(A)$

для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ т.,ч. $P(\partial A)=0$, где через ∂A обозначена граница множества A, т.е. $\partial A=[A] \cap [\bar{A}]$,

$[A]$ – это замыкание множества $[A]$

Обозначение: $P_n \Rightarrow P$.

Теорема (Александрова)

Для вероятностных мер $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$, P на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ следующие свойства эквивалентны:

1. $P_n \xrightarrow{w} P$,
2. $\overline{\lim_n}\ P_n(F) \leq P(F)$ для любого замкнутого F,
3. $\underline{\lim_n}\ P_n(G) \geq P(G)$ для любого открытого G,
4. $P_n \Rightarrow P$.

Теорема (эквивалентность определений сходимостей)

Для вероятностных мер $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$, P на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и для соответствующих им ф.р. $\{F_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, F(x) следующие свойства эквивалентны:

1. $P_n \xrightarrow{w} P$,
2. $P_n \Rightarrow P$,
3. $F_n \xrightarrow{w} F$,
4. $F_n \Rightarrow F$.

Доказательство

По теореме Александрова (1)⇔ (2). По следствию 1 мы знаем, что (1) ⇔ (3), поэтому достаточно установить, что (2) ⇔ (4).

(=>) Пусть выполнено (2). Если $P_n \Rightarrow P$, то $\forall\ x \in \mathbb{R}$ т.,ч. $P(\{x\})=0$, выполнено

$P_n\big((-\infty, x]\big) \to P((-\infty, x])$. Но это в точности означает, что $F_n(x) \to F(x)$ для подобных x. Осталось заметить, что $P(\{x_0\})=0 \Leftrightarrow F(x)$ не имеет скачка в точке x_0 $\Leftrightarrow F(x)$ непрерывна в точке x_0.

(<=) Покажем, что $\underline{\lim_n}\ P_n(A) \geq P(A)$ для любого открытого A. По теореме Александрова этого будет достаточно для доказательства (2). Если $A \subset \mathbb{R}$-открыто, то имеет место представление: $A=\coprod_{k=1}^{\infty} I_k$, где $I_k = (a_k, b_k)$-интервалы. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем в интервале $I_k = (a_k, b_k)$ полуинтервал $I'_k=(a'_k, b'_k]$ так, чтобы a'_k, и b'_k были точками непрерывности F(x) и при этом $P((a_k, b_k)) \leq P(I'_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$.

Такой выбор возможен (даже если $a_k = -\infty$ или $b_k = +\infty$) в силу непрерывности вероятностной меры и такого факта, что F(x) имеет не более чем счетное число точек разрыва $N \in \mathbb{N}$

$\underline{\lim_n}\ P_n(A) = \underline{\lim_n}\ \sum_{k=1}^{\infty} P_n(I_k) \geq \underline{\lim_n}\ \sum_{k=1}^{N} P_n(I_k) \geq \underline{\lim_n}\ \sum_{k=1}^{N} P_n(I'_k) \geq \geq \sum_{k=1}^{N} \underline{\lim_n}\ P_n(I'_k)$.

Устремляем N →+∞, получаем, что $\underline{\lim}_n\ P_n(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_n\ P_n(I'_k)$.

Но $P_n(I'_k)\ = F_n(b'_k) - F_n(a'_k) \to F(b'_k) - F(a'_k)$ при n→∞, т.к. $F_n \Rightarrow F$.

Стало быть, $\underline{\lim}_n\ P_n(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty}(F(b'_k) - F(a'_k))$=$\sum_{k=1}^{\infty} P(\ I'_k) \geq |$выбор $I'_k| \geq$

$\geq \sum_{k=1}^{\infty} P(\ I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}$)= =P(A)-ε.

В силу произвольности ε получаем искомое неравенство: для любого открытого $A \in \mathbb{R}$
$\underline{\lim}_n\ P_n(A) \geq P(A)$

■

<u>Следствие</u>

Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n\ \in \mathbb{N}\}$ сходится по распределению к случайным величинам $\xi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(F_\xi) -$ точки непрерывности ф. р. ξ выполнено

$F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$.

<u>Смысл сходимости по распределению:</u> аппроксимация распределений.

Пусть η-некоторая случайная величина со сложным распределением (то есть сложно вычислить ф.р. F_η).

Предположим, что $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, причем у ξ “хорошее распределение” (легко вычислить ф.р. или откуда она известна) и, кроме того, η=^{d} ξ_m с большим номером m. Тогда можно считать, что $F_\eta \sim F_\xi$ (при некоторых допущениях)

Лекция 13

Схема Бернулли и характеристические функции

Пусть (S, p) – метрическое пространство.

Определение

Борелевской сигма-алгеброй, B(S), на (S, p) называется минимальная -алгебра, содержащая все открытые множества в S.

Определение

Пусть задано метрическое пространство (S, p) и последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ вероятностных мер на (S, B(S)). Будем говорить, что Q_n слабо сходятся к вероятностной мере Q на (S, B(S)), если для любой ограниченной непрерывной функции $f : S \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(x)\; Q_n(dx) = \int_S f(x)\, Q_n(dx)$$

Обозначение: $Q_n \xrightarrow{w} Q$

Утверждение

Если пространство (S, p) сепарабельно, то B(S) является минимальной -алгеброй, содержащей все открытые шары.

Теорема (Александров)

Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $Q -$ вероятностные меры на метрическом пространстве (S, p). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $Q_n \xrightarrow{w} Q$
2. $\overline{\lim_{n\to\infty}} Q_n(F) \leq Q(F)$ для любого замкнутого множества $F \subset S$,
3. $\underline{\lim_{n\to\infty}}\; Q_n(G) \geq Q(G)$для любого открытого множества $G \subset S$,
4. Для любого борелевского множества $B \in B(S)$ такого, что $Q(\partial B)=0$, выполнено $Q_n(B) \to Q(B)$ при $n \to \infty$.

Доказательство

(1) ⇒ (2). Пусть $F \subset S$ – замкнутое множество. Для произвольного $\varepsilon > 0$ введем функцию $f_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{p(x,F)}{\varepsilon}\right)^+$, где $p(x, F) = \inf_{y\in F} p(x, y)$.

Заметим, что она неотрицательна, непрерывна и ограничена, $f_\varepsilon(x) = 1$ для всех $x \in F$ и $f_\varepsilon(x) \le I\{x \in F^\varepsilon\}$, где $F^\varepsilon = \{x \in S : p(x, F) \le \varepsilon\}$. Тогда верна следующая цепочка соотношений:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} Q_n(F) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_S I\{x \in F\}\, Q_n(dx) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_S f_\varepsilon(x)\, Q_n(dx) = \int_S f_\varepsilon(x)\, Q_n(dx)$$

$$\le \int_S I\{x \in F^\varepsilon\}\, Q_n(dx) = Q(F^\varepsilon)$$

Осталось заметить, что F^ε монотонно сжимается к F при $\varepsilon \to 0$ в силу замкнутости F. В силу непрерывности вероятностной меры $Q(F^\varepsilon) \to Q(F)$. Следовательно, при устремлении ε к нулю получаем искомое неравенство.

(2) ⟺ (3) Эквивалентность второго и третьего пунктов очевидна, так как от одного к другому можно переходить, рассматривая дополнения множеств.

(2),(3) ⇒ (4) Возьмем произвольное борелевское множество $B \in \mathcal{B}(S)$ с условием $Q(\partial B)=0$. Введем два множества:

- $F = [B] = B \cup \partial B$ (замыкание B);
- $G = B \setminus \partial B$ (внутренность B).

Заметим, что F замкнуто, а G открыто, причем $Q(F) = Q(B) = Q(G)$ (так как $Q(\partial B)=0$). Тогда несложно показать, что искомый предел существует и равен Q(B):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} Q_n(B) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} Q_n(F) \le Q(F) = Q(B),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} Q_n(B) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}} Q_n(G) \ge Q(G) = Q(B).$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(B) = Q(B)$

(4) ⇒ (1). Возьмем произвольную ограниченную непрерывную функцию $f: S \to \mathbb{R}$. Пусть $|f(x)| < M$ для всех $x \in S$. Рассмотрим множество:

$$D = \{t \in [-M; M]:\ Q(\{x \in S: f(x) = t\}) > 0\}.$$

Данное множество не более, чем счетно. Теперь зафиксируем произвольное натуральное k и возьмем разбиение $-M = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = M$ отрезка $[-M; M]$ такое, что ни одно из t_i не содержится в D.

Далее, построим набор множеств $\{B_i\}_{i=1}^k$ по следующему правилу:

$$B_i = \{x \in S: t_{i-1} \le f(x) < t_i\}.$$

Заметим, что $\partial B_i \subseteq f^{-1}(\{t_{i-1}\}) \cup f^{-1}(\{t_i\})$. Но оба прообраза имеют нулевую меру, поэтому граница B_i тоже имеет нулевую меру. Следовательно, $Q_n(B_i) \to Q(B_i)$ при $n \to \infty$ для всех $i = 1, \dots, k$. Теперь рассмотрим следующий верхний предел:

$$\Delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_S f(x)\ Q_n(dx) - \int_S f(x)\, Q(dx) \right|.$$

Ограничим ее сверху суммой трех верхних пределов:

$$\Delta \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_S f(x)\ Q_n(dx) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1} \int_S Q_n(B_i) \right| + \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\ Q_n(B_i) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\ Q(B_i) \right|$$

$$+ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_S f(x)\, Q(dx) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1} Q(B_i) \right|.$$

Второй предел равен нулю. Теперь докажем, что первый (а так же и третий) предел не превосходит $\max\limits_{i=1,\dots,k} |t_i - t_{i-1}|$. Для этого заметим, что

$$\int_S f(x) Q_n(dx) = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} f(x) Q_n(dx),\ t_{i-1} Q_n(B_i) \le \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} f(x) Q_n(dx) \le t_i Q_n(B_i).$$

Следовательно,

$$\left| \int_S f(x)\ Q_n(dx) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\, Q_n(B_i) \right| \le \left| \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1})\, Q_n(B_i) \right| \le \max_{i=1,\dots,k} |t_i - t_{i-1}|$$

Отсюда получаем, что

$$\Delta \le 2 \max_{i=1,\dots,k} |t_i - t_{i-1}|$$

Но этот максимум стремится к нулю при устремлении диаметра разбиения к нулю. Следовательно, $\Delta = 0$ и имеет место слабая сходимость.

Предельные для схемы Бернулли

Описание схемы

Проходит серия независимых однородных случайных экспериментов. Для каждого эксперимента мы фиксируем «успех» (произошло интересующее нас событие) или «неудачу». Нас интересует распределение числа успехов после проведения большого числа экспериментов.

Математическая модель

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ –н.о.р. с.в., $P(\xi_i = 0) = 1 - p = q$. Такие с.в. имеют распределение Бернулли, $\mathrm{Bin}(1, p)$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ – число «успехов» в схеме Бернулли.

Задача

$S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, т.е. $\forall k = 0, \ldots, n$ $P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

История: Бернулли, 1701, ЗБЧ для схемы Бернулли:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p, \quad n \to \infty.$$

Несмотря на то, что распределение S_n известно, вычисление вероятностей типа $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$ напрямую достаточно затруднительно. При малых p возможна пуассоновская аппроксимация.

Теорема (Пуассон)

Пусть p =p(n) такова, что $pn \to \lambda > 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$$P(S_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Доказательство

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-k}$$

$$=$$

$= \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} (\lambda + o(1))^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ при фиксированном k, $n \to \infty$.

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – с.в., $\xi_n \sim \mathrm{Bin}(n, p(n))$, причем $np(n) \to \lambda > 0$. Тогда $\xi_n \xrightarrow{d} \eta \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.

(другое обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$).

Доказательство

$\xi_n \xrightarrow{d} \eta \Leftrightarrow F_{\xi_n}(x) \to F_n(x)$ для всех $x \in \mathbb{c}\left(F_\eta\right)$. Но все случайные величины принимают значение в $\mathbb{Z}_+$. Следовательно, достаточно проверить, что $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$P(\xi_n \leq k) \to P(\eta \leq k)$ $n \to \infty$, что напрямую вытекает из теоремы Пуассона.

В случае $np \to \infty$ есть нормальная аппроксимация.

Теорема (Муавр-Лаплас)

Пусть $S_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $p \in (0,1)$ —фиксированно. Обозначим $P_n(a,b) = P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right)$

Тогда $\sup\limits_{-\infty \le a < b \le \infty} \left| P_n(a,b) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx \right| \to 0, \ n \to \infty.$

Следствие

В условиях теоремы Муавра-Лапласа

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} \eta \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ \ P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le x\right) \to F_\eta(x) = \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} dy,$$

что и утверждает теорема Муавра-Лапласа.

Пример

Задача

Кость подбрасывается 12000 раз. Какова вероятность того, что шестерок выпадет от 1800 до 2100?

Решение: Искомая вероятность равна $\sum_{1800 \le k \le 2100} C_{12000}^{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k}$.

По теореме Муавра-Лапласа эта вероятность примерно равна

$$\Phi\left(\frac{2100 - 2000}{\sqrt{12000 \frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{1800 - 2000}{\sqrt{12000 \frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) = \Phi(\sqrt{6}) - \Phi(-2\sqrt{6}) \approx 0{,}992.$$

Характеристические функции

Определение

Пусть ξ — случайная величина. Её характеристической функцией называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Замечание: характеристическая функция является в общем случае комплекснозначной. Можно понимать $Ee^{it\xi}$ как сумму $E\cos t\xi + iE\sin t\xi$.

Определение

Если F(x) – функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда ее характеристической функцией называется

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\xi} dF(x), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Если P– вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то ее характеристической функцией называется

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\xi} P(dx), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

<u>Наблюдение</u>: $\varphi_\xi(t) -$ х.в. с.в. $\xi. \Leftrightarrow \varphi_\xi(t) -$ х.в. для $F_\xi(x)$ и P_ξ.

<u>Доказательство</u>

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = |\text{замена переменных}| = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\xi} P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\xi} dF_\xi(x).$$

<u>Определение</u>

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) -$ случайный вектор. Его характеристической функцией называется

$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle t,\xi\rangle}, t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R},$ где $\langle t, \xi\rangle = \sum_{k=1}^n t_k\xi_k$.

<u>Определение</u>

Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}^n -$ функция распределения в $\mathbb{R}^n$. Ее характеристической функцией называется

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\langle t,\xi\rangle} dF(x), \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

Если $P -$ вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, то ее характеристической функцией называется

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\langle t,\xi\rangle} P(dx), \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Наблюдение</u>: $\varphi_\xi(t) - \text{х. ф. } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \Leftrightarrow \varphi_\xi(t) - \text{х. в. для ф. р.}$

$$F_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n \text{ и х. ф. распределения } P_\xi.$$

Примеры

1. $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$ – пуассоновская с.в.

$$\varphi_\xi(t) = E\, e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{e^{it}\lambda} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

2. $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$ – экспоненциальная с.в.

$$\varphi_\xi(t) = E\, e^{it\xi} = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = \lambda \left. \frac{e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda} \right|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

3. $\xi \sim N(0,1)$ – стандартная нормальная с.в. В силу нечетности синуса получаем представление:

$$\varphi_\xi(t) = E\, e^{it\xi} = \int_R e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_R \cos(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Продифференцируем $\varphi_\xi(t)$:

$\varphi'_\xi(t) = \int_R \sin(tx)(-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$|интегрируем по частям|=

$= \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - t \int_R \cos(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t \cdot \varphi_\xi(t)$.

Получили дифференциальное уравнение $\varphi'_\xi(t) = -t \cdot \varphi_\xi(t)$ или $(\ln \varphi_\xi(t))' = -t$. Значит, $\varphi_\xi(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ для некоторой $C > 0$. С учетом начального условия $\varphi_\xi(0) = 1$, ответ равен $\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Основные свойства хар. функций

1) Если $\varphi_\xi(t)$ – х.ф. с.в. ξ, то $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1$.

Доказательство

$|\varphi(t)| = |E\, e^{it\xi}| \le E|e^{it\xi}| = 1$, $\varphi(0) = Ee^{0i\xi} = 1$

■

2) Пусть $\varphi_\xi(t)$ – х.ф. с.в. ξ, а $\eta = \alpha\,\xi + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi_\eta(t) = e^{itb}\, \varphi(at)$.

Доказательство

$\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = E\, e^{it(a\xi+b)} = e^{itb} E\, e^{i(at)\xi} = e^{itb}\, \varphi(at)$

■

3) Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с.в. φ. Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство

Рассмотрим

$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |E\, e^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |E\left[e^{it\varepsilon}(e^{ih\varepsilon} - 1)\right]| \leq E\, |e^{it\varepsilon}(e^{ih\varepsilon} - 1)| = E|e^{ih\varepsilon} - 1|$.

Ясно, что $e^{it\varepsilon} - 1 \to 0$п.н. при $h \to 0$. При этом, $|e^{ih\varepsilon} - 1| \leq 2$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $E|e^{ih\varepsilon} - 1| \to 0$ при $h \to 0$

Значит, $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$

■

4) Пусть $\varphi(t)$ – х.в. с.в. ξ. Тогда $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$ (комплексное сопряжение).
Доказательство

$$\varphi(t) = Ee^{it\varepsilon} = E\overline{e^{-it\varepsilon}} = \overline{\varphi(-t)}$$

■

5) Единственность. Х.ф. случайных величин ξ и η совпадают $\Leftrightarrow \xi \triangleq \eta$.(докажем позже)
6) Пусть $\varphi_\xi(t)$ –х.ф. с.в. ξ. Тогда $\varphi(t)$ – действительнозначная функция $\Leftrightarrow$ распределение ξ симметрично, т.е. $\forall B \in B(\mathbb{R})\ P(\xi \in B) = P(-\xi \in B)$ $(\xi \triangleq -\xi)$.

Доказательство

(⇒) По свойствам 2) и 4) х.ф. $-\xi$ равна $\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(t)$.

По свойству 5) это означает, что распределения ξ и $-\xi$ совпадают.

(⇐) Раз $\xi \triangleq -\xi$, то их х.ф. равны. Отсюда по свойствам 2) и 4) получаем:

$\varphi_\xi(t) = \varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} \in \mathbb{R}$

■

7) Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые с.в., $S_n = \xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$.

<u>Доказательство</u>

$\varphi_{S_n}(t) = Ee^{iS_n t} = Ee^{i(\xi_1,\dots,\xi_n)t} = E(e^{i\xi_1 t} \cdot \ldots \cdot e^{i\xi_n t}) = |\text{независимость}| =$

$$= Ee^{i\xi_1 t} \cdot \ldots \cdot Ee^{i\xi_n t} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

■

Теорема (о производных х.ф.)

Пусть $\varphi(t)$ − х.ф. с.в. ξ. Пусть $E|\xi|^n < \infty$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall r \le n$ существует производная $\varphi^{(r)}(t)$, причем

1. $\varphi^{(r)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^r e^{itx}\, dF_\xi(x) = E(i\xi)^r e^{it\xi}$,
2. $E\xi^r = \frac{\varphi^{(r)}(0)}{i^r}$,
3. $\varphi(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(it)^r}{r!} E\xi^r + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$, где $|\varepsilon_n(t)| \le 3E|\xi|^n$ и $\varepsilon_n(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Доказательство

1) Пусть $E|\xi|^n < \infty$. Тогда $E|\xi|^n$ конечно $\forall r \le n$ $(|\xi|^r \le |\xi|^n + 1)$. Рассмотрим $\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}\right) = E\left[e^{it\xi}\left(\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right)\right]$.
   Заметим, что по теореме Лебега о мажорируемой сходимости данная величина сходится к $Ee^{it\xi}(i\xi)$ при $h \to 0$, т.к. $\frac{e^{ih\xi}-1}{h} \xrightarrow{\text{п.н.}} i\xi$ при $h \to 0$ и $\left|e^{ih\xi} - 1\right| \le |h\xi|$, а $E|\xi| < \infty$. Стало быть, у $\varphi(t)$ есть производная
   $$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \int_{\mathbb{R}} (ix)\, e^{itx}\, dF_\xi(x).$$
   Существование и формулы для следующих производных устанавливаются аналогичным образом по индукции.
2) Формула $E\,\xi^r = i^{-r}\varphi^{(r)}(0)$, очевидно, следует из представления производной
3) Докажем третье утверждение. Рассмотрим
   $e^{iy} = \cos y + i\sin y = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!}\left[\cos(\theta_1 y) + i\sin(\theta_2 y)\right]$,
   где $|\theta_1| \le 1$, $|\theta_2| \le 1$.
   Тогда $e^{it\varepsilon(\omega)} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it\xi(\omega))^k}{k!} + \frac{(it\xi(\omega))^n}{n!}\left[\cos(\theta_1(\omega)\,\xi(\omega)t) + i\sin(\theta_2(\omega)\xi(\omega)t)\right]$.
   Значит, $\varphi(t) = Ee^{it\varepsilon} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it)^k}{k!} E\ \xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\left(E\xi^n + \varepsilon_n(t)\right)$, где $\varepsilon_n(t) = E[\xi^n(\cos(\theta_1\xi t) + i\ \sin(\theta_2\xi t) - 1)]$. Ясно, что $|\varepsilon_n(t)| \le 3E|\xi|^n$. Кроме того, по теореме Лебега $\varepsilon_n(t) \to 0$ при $t \to 0$, ведь $\xi^n(\cos(\theta_1\xi t)) + i\ \sin(\theta_2\xi t) - 1) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $t \to 0$ и не превосходит по модулю $3|\xi|^n$

■

Лекция 14

Метод характеристических функций

Теорема (о разложении в ряд х.ф.)

Пусть $\varphi(t)$ –х.ф. с.в. ξ. Пусть также $E|\xi|^n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если для некоторого $T \in (0;\ +\infty]$ выполнено $\overline{\lim_n}\left(\frac{E|\xi|^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{T}$, то для всех t из (-T; T) выполняется равенство

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n.$$

Доказательство теоремы о разложении в ряд х.ф.

Пусть t ∈ (-T; T). Тогда $\overline{\lim_n}\left(\frac{E|\xi|^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{T} < \frac{1}{|t|} \Rightarrow \overline{\lim_n}\left(\frac{E|\xi|^n \cdot |t|^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < 1$. По признаку Коши ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E|\xi|^n |t|^n}{n!}$ сходится. По теореме о производных х.ф. $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^n + R_n(t)$, где $|R_n(t)| \le 3\frac{|t|^n}{n!} E|\xi|^n \to 0$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу $n \to \infty$, получаем искомое разложение: $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^n$

■

Теорема единственности х.ф.

Пусть F(x) и G(x) – две функции распределения на $\mathbb{R}$. Тогда их характеристические функции равны ⟺ F = G.

Доказательство

(⇐) очевидно, т.к. в этом случае $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x)$.

(⇒) Зафиксируем a, b ∈ $\mathbb{R}$ и возьмем малое ε>0. Рассмотрим функцию $f_\varepsilon(x)$:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \text{ или } x \ge b + \varepsilon; \\ \frac{x-a}{\varepsilon}, & x \in [a, a+\varepsilon]; \\ 1, & x \in [a+\varepsilon, b]; \\ \frac{b+\varepsilon-x}{\varepsilon}, & x \in [b, b+\varepsilon]. \end{cases}$$

Покажем, что $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x)$.

Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $[a, b+\varepsilon] \subset [-n; n]$. По теореме Вейерштрасса функцию $f_\varepsilon(x)$ можно на отрезке приблизить тригонометрическими многочленами, значит, существует функция $f_\varepsilon^n(x) = \sum_{k \in K} a_k\, e^{i\frac{\pi k}{n}x}$, где $K -$ конечное подмножество $\mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{C}$, с условием $\sup_{x\in[-n;n]}|f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| \le \frac{1}{n}$.

Заметим, что функция $f_\varepsilon^n(x) -$ периодическая с периодом $2n$. По построению $|f_\varepsilon^n(x)| \le 2$ на $[-n; n]$, значит, и на всей прямой $|f_\varepsilon^n(x)| \le 2$. По условию

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Значит, для всех n

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x).$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x)\right| = \left|\int_{-n}^{n} f_\varepsilon(x) dF(x) - \int_{-n}^{n} f_\varepsilon(x) dG(x)\right| \le$$

$$\le \left|\int_{-n}^{n} f_\varepsilon^n(x) dF(x) - \int_{-n}^{n} f_\varepsilon^n(x) dG(x)\right| +$$

$$+ \int_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f(x)_\varepsilon| dF(x) + \int_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f(x)_\varepsilon| dG(x) \le$$

$$\le \left| \text{так как } \int_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f(x)_\varepsilon| dF(x) \le \frac{1}{n} \text{ и } \int_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f(x)_\varepsilon| dG(x) \le \frac{1}{n} \right| \le$$

$$\le \frac{2}{n} + \left|\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x)\right| +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}/[-n;n]} |f_\varepsilon^n(x)| dF(x) + \int_{\mathbb{R}/[-n;n]} |f_\varepsilon^n(x)| dG(x) \le |\text{так как } |f_\varepsilon^n(x)| \le 2\ | \le$$

$$\le \frac{2}{n} + 2\left(\int_{-\infty}^{-n} dF(x) + \int_{n+0}^{\infty} dF(x) + \int_{-\infty}^{-n} dG(x) + \int_{n+0}^{\infty} dF(x)\right) =$$

$$\frac{2}{n} + 2\big(F(-n) + 1 - F(n) + G(-n) + 1 - G(n)\big) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Итак, мы доказали, $\forall \varepsilon > 0 \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x)$.

При $\varepsilon \to 0$ выполнено $f_\varepsilon(x) \to I_{(a,b]}(x)$, и функции$f_\varepsilon(x)$ равномерно ограничены. Значит, по теореме Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon dF(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} I_{(a,b]}(x) dF(x) = \int\limits_{a+0}^{b} dF(x) = F(b) - F(a).$$

Следовательно, для всех a < b $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Значит, устремляя $-a \to \infty$, получаем искомое: $F(b) = G(b) \ \forall b \in \mathbb{R}$

■

<u>Замечание</u>

Теорема единственности верна и для характеристических функций случайных векторов.

<u>Пример. Задача</u>

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 $-$ независимые и нормальные, $\xi \sim N(a_i, \sigma_i^2), i = 1{,}2$.
Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$.

<u>Решение:</u> Начнем с вычисления характеристических функций ξ_1 и ξ_2 .

$\frac{\xi_j - a_j}{\sigma_j^2} \sim N(0{,}1)$. Значит, х.ф. ξ_j равна $\varphi_{\xi_j}(t) = e^{i \cdot a_j t - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2}}$.

В силу независимости $\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) = e^{i \cdot (a_1 + a_2) t - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2}{2}}$.

Это х.ф. распределения $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. В силу теоремы единственности получаем, что $\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

<u>Теорема (критерий независимости набора с.в. в терминах х.ф.)</u>

Компоненты случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ независимыми в совокупности $\Leftrightarrow$ х.ф. ξ есть произведение х.ф. компонент.

Доказательство

$(\Rightarrow) \varphi_\xi(t_1, \dots, t_n) = E e^{i \sum_{k=1}^n \xi_k t_k} = E \prod_{k=1}^n e^{i \xi_k t_k} = |\text{независимость}| = k = 1nEe^{i\xi_k t_k}$

$$\prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k).$$

($\Leftarrow$) Обозначим через $F_1(x), \dots, F_n(x)$ − ф.р. случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$. Введем

$G(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$. Это будет многомерная ф.р. Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ − случайный вектор с ф.р. $G(x_1, \dots, x_n)$. Тогда компоненты η независимы, причем $\eta_j \triangleq \xi_j$ для всех $j = 1, \dots, n$.

Отсюда получаем, что $\varphi_\xi(t_1, \dots, t_n) = |\text{условие}| = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k) = |\text{о. р.}| =$

$$= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\eta_k}(t_k) = |\text{независимость } \eta_1, \dots, \eta_n\,| = \varphi_\eta(t_1, \dots, t_n).$$

В итоге, характеристические функции случайных векторов ξ и η. По теореме единственности совпадают и их функции распределения:

$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$.

Согласно критерию независимости для ф.р. получаем, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности

■

Формулы обращения

Можно ли явным образом восстановить ф.р. по характеристической функции?

Теорема (формула обращения)

Пусть $\varphi(t)$ −х.ф. для х.р. F(x) на прямой. Тогда

1) $\forall a, b\ a < b,\ a, b \in \mathbb{C}(F)$ выполнено $F(b) - F(a) = \lim\limits_{c \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt.$
2) Если $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$, то F(x) имеет плотность $f(x)$, причем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt.$$

Как выяснить, является ли функция характеристической?

Определение

Функция (комплекснозначная) $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ называется неотрицательно определенной, если $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}\ \ \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ выполнено $\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_\eta(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0$.

Теорема (Бохнер-Хинчин)

Пусть $(\varphi(t), t \in \mathbb{R})$ − комплекснозначная функция, причем $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t)$ непрерывна в нуле. Тогда $\varphi(t)$ является характеристической функцией некоторой с.в. $\Leftrightarrow \varphi(t)$ неотрицательно определена.

Доказательство

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi(t)$ −х.ф. с.в. ξ. Пусть $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\sum_{k,j=1}^{n} \varphi_\eta(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} = \sum_{k,j=1}^{n} E e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j} = E \sum_{k,j=1}^{n} e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j} =$$

$$= E \sum_{k,j=1}^{n} (z_k e^{it_k\xi}) \overline{(z_j e^{it_j\xi})} = E \left| \sum_{k=1}^{n} (z_k e^{it_k\xi}) \right|^2 \geq 0$$

■

Плотность и относительная компактность

Определение

Семейство вероятностных мер $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на ($\mathbb{R}^m$,B($\mathbb{R}^m$)) называется относительно компактным, если любая последовательность $\{P_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

Определение

Семейство вероятностных мер $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на ($\mathbb{R}^m$,B($\mathbb{R}^m$)) называется плотным, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ компакт $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$ т., ч. для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ $P_\alpha(\mathbb{R}^m \backslash K_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Теорема (Ю.В. Прохоров)

Семейство вероятностных мер $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на ($\mathbb{R}^m$,B($\mathbb{R}^m$)) является относительно компактным $\Leftrightarrow$ оно является плотным.

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ − последовательность вероятностных мер на ($\mathbb{R}$,B($\mathbb{R}$)).

Лемма (1)

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ − плотное семейство и любая слабо сходящаяся подпоследовательность $\{P_{n'}\}$ слабо сходится к одной и той же мере P. Тогда $P_n \xrightarrow{w} P$.

Доказательство

Предположим, что $P_n \not\rightarrow \xrightarrow{w} P$. Тогда существует $f(x)$ − ограниченная непрерывная функция т.,ч. $\int_{\mathbb{R}} f(x) P_n(dx) \not\rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) P(dx)$.

Значит, $\exists \varepsilon_0 > 0$ и последовательность $\{n'\} \subset \mathbb{N}$ т.,ч. Для любого n'

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) P_{n'}(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(x) P_n(dx) \right| \geq \varepsilon_0.$$

По теореме Прохорова существует подпоследовательность $\{P_{n''}\} \subset \{P_{n'}\}$ т.,ч. $P_{n''}$ слабо сходится. По условию леммы $P_{n''} \xrightarrow{w} P$. Значит,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)P_{n''}(dx) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)P(dx)\,.$$

Противоречие с выбором последовательности $\{P_{n'}\}$

■

Лемма (2)

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\} -$ плотное семейство, а $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\} -$ соответствующие им х.ф. Тогда последовательность $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ слабо сходится $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.

Доказательство

($\Longrightarrow$) Пусть $P_n \overset{w}{\to} P$. Тогда $\cos tx, \sin tx$ – непрерывные ограниченные функции. Значит,

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_n(dx) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx)$$

($\Longleftarrow$) Покажем, что любая слабо сходящейся последовательность $\{P_{n'}\} \subset \{P_n\}$ сходится к некоторому единому пределу. Обозначим $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.

Пусть $P_{n'} \overset{w}{\to} P$, где P – некоторая вероятностная мера на ($\mathbb{R}$, B($\mathbb{R}$)). Тогда х.ф. $\varphi_{n'}(t)$ сходится к х.ф. P:

$$\varphi_{n'}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_{n'}(dx) \xrightarrow[n'\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx) = \psi(t)$$

Но по условию $\varphi_{n'}(t) \longrightarrow \varphi(t)$. Значит, $\psi(t) = \varphi(t)$.

По теореме Прохорова слабо сходящаяся последовательность существует, значит у любого предела $\left(P_{n''} \overset{w}{\to} Q\right)$х.ф. должна быть равна $\varphi(t)$.

По теореме единственности Q = P. Значит по лемме 1 имеет место слабая сходимость $P_n \overset{w}{\to} P$

■

Лемма (3)

Пусть P – вероятностная мера на ($\mathbb{R}$, B($\mathbb{R}$)), а $\varphi(t)$ – ее характеристическая функция. Тогда $\forall a > 0$

$$\int\limits_{|x|\ge\frac{1}{a}} P(dx) \le \frac{7}{a}\int\limits_0^a \big(1 - Re\varphi(t)\big)dt$$

Доказательство

Напомним, что $Re\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos txP(dx)$. По теореме Фубини

$$\frac{1}{a}\int_0^a \big(1 - Re\varphi(t)\big)dt = \frac{1}{a}\int_0^a \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos tx)P(dx)\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{a}\int_0^a (1-\cos tx)dt\right]P(dx) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin ax}{ax}\right)P(dx) \geq$$

$$\geq \int_{|x|\geq\frac{1}{a}}\left(1 - \frac{\sin ax}{ax}\right)P(dx) \geq inf_{|y|\geq 1}\left(1 - \frac{\sin y}{y}\right)\int_{|x|\geq\frac{1}{a}} P(dx) \geq$$

$$\geq \left|\text{т. к. } 1 - \sin 1 \geq \frac{1}{7}\right| \geq \frac{1}{7}\int_{|x|\geq\frac{1}{a}} P(dx)$$

<u>Теорема (непрерывности для х.ф.)</u>

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность вероятностных мер на ($\mathbb{R}$,B($\mathbb{R}$)), а $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующие им х.ф.

1) Если $P_n \xrightarrow{w} P$, то $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_n(t) \to \varphi(t), \varphi(t)$ – х. ф. P.
2) Если $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ непрерывна в нуле, то $\varphi(t)$ является х.ф. некоторой вероятностной меры P и $P_n \xrightarrow{w} P$.

Доказательство

1) Сразу следует из того, что $\cos(tx)$ и $\sin(tx)$ – непрерывные ограниченные функции.
2) Покажем, что $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – плотное семейство. Согласно лемме 3

$$P_n\left(\mathbb{R}[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}]\right) \leq \int_{|x|\geq\frac{1}{a}} P_n(dx) \leq \frac{7}{a}\int_0^a (1 - Re\,\varphi_n(t))dt \to \frac{7}{a}\int_0^a (1 - Re\,\varphi(t))dt$$

(по тореме Лебега)

Раз $\varphi(t)$ непрерывна в нуле и $\varphi(0) = 1$ (т.к. $\varphi(0) = 0$ $\forall n$), то существует a т.,ч. $1 - Re\varphi_n(t))dt \leq \frac{\varepsilon}{14}$ для заданного $\varepsilon < 0$ и всех $t \in [0, a]$. Значит,

$$\frac{7}{a}\int_0^a (1 - Re\,\varphi(t))dt \leq \frac{7}{a}a\frac{\varepsilon}{14} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\exists N$ т., ч. $\forall n > N$ $P_n\left(\mathbb{R}\backslash[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}]\right) \leq$ ε, что и означает плотность множества $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$.

В силу леммы 2 мы получаем, что существует вероятностная мера P на

($\mathbb{R}$,B($\mathbb{R}$)) т.,ч. $P_n \xrightarrow{w} P$. Но тогда $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx) = \psi(t).$$

По условию же $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$. Значит, $\varphi(t) = \psi(t)$ является х.ф. меры P

■

<u>Следствие</u>

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ – с.в. Тогда $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \;\; \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$.

<u>Теорема (Центральная предельная теорема)</u>

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность независимых с.в. с одинаковым распределением, причем $0 < D\xi_n < +\infty$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Доказательство

Положим $a = E\xi_i, \sigma^2 = D\xi_i$. Обозначим $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma}$. Тогда $E\eta_i = 0, D\eta_i = 1$ и они одинаково распределены. Кроме того, $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$.

В силу теоремы непрерывности нам достаточно показать, что х.ф. $\zeta_n = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$ сходится к $e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $n \to \infty$, то есть к х.ф. $N(0,1)$.

$$\varphi_{\zeta_n}(t) = Ee^{i\frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}t} = |\text{независимость } \eta_1 + \dots + \eta_n| =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\eta_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = |\text{одинак. распред.}| = \left(\varphi_{\eta_j}\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^n.$$

По теореме о производных х.ф. при $s \to 0$ выполнено $\varphi_{\eta_1}(s) = 1 + isE\eta_1 - \frac{1}{2}s^2E{\eta_1}^2 + +o(s^2)$. Вспомним, что $E\eta_1 = 0$, а $E{\eta_1}^2 = 1$. Значит,

$$\varphi_{\zeta_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

■

Лекция 15

Теорема (Центральная предельная теорема)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность независимых с.в. с одинаковым распределением, причем $0 < D\xi_n < +\infty$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.
Тогда $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

Следствие (1)

В условиях ЦПТ $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le x\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi(x).$$

Доказательство

$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \Leftrightarrow$ ф.р. $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$ сходится к ф.р. $N(0,1)$ во всех точках непрерывности. Но $\Phi(x)$ непрерывна на всей $\mathbb{R}$

■

Следствие (2)

В условиях ЦПТ обозначим $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$. Тогда $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$.

Доказательство

Заметим, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $c\xi_n \xrightarrow{d} c\xi$ для любого $c \in \mathbb{R}$. Значит,

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \sigma \cdot N(0,1) = N(0, \sigma^2).$$

Данное следствие показывает, что с вероятностью $\sim 0{,}99$ выполнено $\sqrt{n}\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \le 3\sigma$.

Из УЗБЧ мы знаем, что $\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

ЦПТ показывает, что типичная скорость убывания к нулю такой последовательности есть $O(n^{-1/2})$.

Какова скорость сходимости в самой ЦПТ? Как быстро мы приближаемся к ф.р. $N(0,1)$

■

Теорема (Берри-Эссеен)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – н.о.р.с.в., $E|\xi_i|^3 < +\infty, E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2 > 0$. Обозначим $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$.

Тогда существует такая абсолютная константа C > 0, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_{T_n}(x)-\Phi(x)\right| \le C\cdot\frac{E|\xi_1-a|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Что известно про константу? В общем случае C нельзя взять меньше, чем $\frac{1}{2\pi}\sim 0{,}3989$. И известно, что C$\le 0{,}478$ ....

Пример

Складываются 10^4 чисел, каждое из которых было вычислено с точностью 10^{-6}. Найти в каких пределах лежит суммарная ошибка с вероятностью 0,99, считая все ошибки независимыми.

Решение $\xi_i \sim U(-10^{-6},10^{-6}), E\xi_i = a = 0,\ \sigma^2 = D\xi_i = \frac{1}{3}10^{-12},\ S_n = \xi 1 + \dots + \xi n -$ суммарная ошибка. Согласно ЦПТ $P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le u\right) \approx \Phi(u)-\Phi(-u)$,

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy -$ф.р. $N(0,1)$. Из таблиц значений при $u = 2{,}58$ верно

$\Phi(u)-\Phi(-u) \ge 0{,}99$. Значит, $P\left(|S_n| \le 2{,}58\sqrt{DS_n}\right) \ge 0{,}99 - \frac{2C}{6\sqrt{n}}$, где

$2{,}58\sqrt{DS_n} = 2{,}58\cdot 10^{-6}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{n} \approx 148{,}95\cdot 10^{-6}$.

Определение

Пусть $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}, \xi$ – случайные векторы размерности m. Тогда последовательность ξ_n сходится к ξ

1) с вероятностью 1 (почти наверное, $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$), если $P\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n = \xi\right) = 1$.
2) по вероятности ($\xi_n \xrightarrow{P} \xi$), если $\forall\varepsilon > 0$ выполнено
   $P(\left|\left|\xi_n - \xi\right|\right|_2 \ge \varepsilon \to 0$ при $n\to\infty$, где $\left|\left|x\right|\right|_2 = \sqrt{x_1^2+\dots+x_m^2}$ для всех $x\in\mathbb{R}^m$.
3) по распределению ($\xi_n \xrightarrow{d} \xi$), если для любой ограниченной непрерывной функции $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ выполнено $Ef(\xi_n)\to Ef(\xi)$ при $n\to\infty$.

Упражнение (1)

Для сходимости почти наверное и по вероятности векторная сходимость эквивалентна соответствующим сходимостям компонент:
если $\xi = (\xi^{(1)},\dots,\xi^{(m)}),\ \xi_n = \left(\xi_n^{(1)},\dots,\xi_n^{(m)}\right)$, то $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall i = 1,\dots,m\ \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi^{(i)}$,
$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow \forall i = 1,\dots,m\ \xi_n^{(i)} \xrightarrow{P} \xi^{(i)}$.

Упражнение (2)

Для сходимости по распределению векторная сходимость влечет сходимость компонент:

если $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})$, $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(m)})$, то $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \;\Rightarrow\; \forall i = 1, \dots, m \;\; \xi_n^{(i)} \xrightarrow{d} \xi^{(i)}$,

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Упражнение (3, взаимоотношение видов сходимостей)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi\,.$$

Замечание

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff P_{\xi_n} \xrightarrow{w} P_\xi \iff F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi \iff (\text{т. Александрова})\; P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$.

Теорема

Пусть случайный вектор $\xi \in \mathbb{R}^m$ таков, что его функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна Тогда

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Ключевым утверждением, позволяющим работать со сходимостями, является теорема о наследовании сходимости.

Теорема (о наследовании сходимости)

Пусть $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$, ξ – случайные векторы размерности m. Пусть $h(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ –функция , непрерывная почти всюду относительно распределения ξ (т. е. $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ т.,ч. H непрерывна на B и $P(\xi \in B) = 1.$)

Тогда
1) $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$,
2) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{P} h(\xi)$,
3) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{d} h(\xi)$.

Доказательство

1) $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} h(\xi_n) = h(\xi)\right) \geq P\left(\lim\limits_{n\to\infty} h(\xi_n) = h(\xi), \xi \in B\right) \geq |\text{т. к. } h \text{ непр. на } B| \geq$
$\geq P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi, \xi \in B\right) = 1$, т.к. оба события имеют полную вероятность.

2) Пусть $h(\xi_n) \underset{\nrightarrow}{P} h(\xi)$. Тогда $\exists \varepsilon_0 \delta_0 > 0$ и подпоследовательность ξ_{n_k} т.,ч.
$P(\left|\left| h(\xi_{n_k}) - h(\xi)\right|\right|_2 \geq \varepsilon_0 \geq \delta_0 \forall k$.

Но $\xi_{n_k} \xrightarrow{P} \xi$, значит, существует подпоследовательность $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$ при

$s \to \infty$. Согласно 1) получаем, что $h\left(\xi_{n_{k_s}}\right) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$. Значит, $h\left(\xi_{n_{k_s}}\right) \xrightarrow{P} h(\xi)$ при $s \to \infty$. Противоречие с выбором подпоследовательности ξ_{n_k}.

3) Обозначим Q_n – распределение $h(\xi_n)$, Q– распределение $h(\xi)$. Хотим показать, что $Q_n \xrightarrow{w} Q$. По теореме Александрова достаточно показать, что для любого замкнутого $F \subset \mathbb{R}^k$ выполнено $\overline{\lim\limits_{n}}\, Q_n(F) \leq Q(F)$.

Имеем
$\overline{\lim_n} Q_n(F) = \overline{\lim_n} P_{\xi_n}\left(h^{-1}(F)\right) \le \overline{\lim_n} P_{\xi_n}([h^{-1}(F)]) \le \left| \text{т. к. } P_{\xi_n} \xrightarrow{w} P_\xi \right| \le$
$\le P_\xi([h^{-1}(F)])$.
Но в силу замкнутости F $([h^{-1}(F)]) \subset \overline{B} \cup h^{-1}(F)$, ведь если $x_n \to x,\ x_n \in h^{-1}(F)$ и $x \in B$, то $h(x) \in F$. Значит, т.к. $P_\xi(\overline{B}) = 0$, выполнено $P_\xi([h^{-1}(F)]) =$
$= P_\xi\left(h^{-1}(F)\right) = Q(F)$

■

<u>Наблюдение:</u> (УЗБЧ для случайных векторов)
Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ —нез.о.р. с. Векторы из $\mathbb{R}^m$, EX_1 конечно. Тогда
$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} EX_1 .$$
<u>Вопрос:</u> каков многомерный аналог ЦПТ?
<u>Определение</u>
Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется гауссовским (или нормальным), если его характеристическая функция имеет вид $\varphi_\xi(t) = e^{i\langle t,a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t.t\rangle}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, а $\sum$ – матрица n×n, симметрическая и неотрицательно определенная.
<u>Обозначение:</u> $\xi \sim N(a, \sum)$.
<u>Теорема (о трех эквивалентных определениях)</u>
1) $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T -$ гауссовский вектор. $\Leftrightarrow$
2) $\xi = A\eta + a$ п.н.,где $a \in \mathbb{R}^n, A \in \mathrm{Mat}(n \times m), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$, η_i – независимые $N(0,1) \Leftrightarrow$
3) $\forall \tau \in \mathbb{R}^n$ случайная величина $\langle \tau, \xi \rangle$ имеет одномерное нормальное распределение.

<u>Замечание:</u> константы считаем вырожденным нормальным распределением.
1)⇒2). Пусть $\xi \sim N(a, \sum)$. Раз $\sum \ge 0$ и симметрическая, то существует ортогональное преобразование C т.,ч. $C \sum C^T = D$,
где $D -$ диагональная матрица вида $\begin{pmatrix} d_1 & & \cdots & & 0 \\ & d_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & d_m & \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$,
где $d_i > 0, j = 1, \dots, m$. Рассмотрим $\xi' = C(\xi - a)$. Тогда
$$\varphi_{\xi'}(\tau) = Ee^{i\langle \tau, \xi' \rangle} = Ee^{i\langle \tau, C\xi\rangle - i\langle \tau, Ca\rangle} = e^{-i\langle C^T\tau, a\rangle}\varphi_\xi(C^T\tau) = e^{-i\langle C^T\tau, a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\ C^T\tau, C^T\tau\rangle + i\langle C^T\tau, a\rangle} =$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\langle C\Sigma\ C^T\tau, \tau\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle D\tau, \tau\rangle} = \prod_{k=1}^{m} e^{-\frac{1}{2}d_k\tau_k^2}.$$

Следовательно, вектор ξ' состоит из независимых компонент, причем $\xi' \sim N(a, d_j), j = 1, \dots, m$ и $\xi' = 0$ п.н. при j>m. Рассмотрим $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$, где $\eta_j = \frac{\xi'_j}{\sqrt{d_j}}$. Тогда компоненты η – это независимые N(0,1) с.в. и с вероятностью 1 $\xi' = B\eta$, где

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{d_j} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_m} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ есть матрица размера $n \times m$. Отсюда

$\xi = C^T\xi' + a = C^TB\eta + a = A\eta + a$ п.н.

2)⇒3) $\langle\tau, \xi\rangle = \langle\tau, A\eta + a\rangle = \langle A^T\tau, \eta\rangle + \langle\tau, a\rangle = \sum_{k=1}^m (A^T\tau)_{k\eta_k} + \langle\tau, a\rangle$ – линейная комбинация независимых нормальных с.в. тоже является нормальной с.в.

3)⇒1) Мы знаем, что $\forall\tau \in \mathbb{R}^n$ с.в. $\langle\tau, \xi\rangle$ является нормальной. Значит, все $\xi_1, \dots, \xi_n$ – это нормальные с.в. и имеют конечные $E\xi_i$ и $D\xi_i$. Пусть $\langle\tau, \xi\rangle \sim N(a_\tau, \sigma_r^2)$. Тогда

$a_\tau = E\langle\tau, \xi\rangle = \langle\tau, E\xi\rangle = \langle\tau, a\rangle$.

$$\sigma_r^2 = D\langle\tau, \xi\rangle = E(\langle\tau, \xi\rangle - E\langle\tau, \xi\rangle)^2 = E(\langle\tau, \xi - E\xi\rangle)^2 = E\sum_{ij}(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\tau_i\tau_j =$$

$= \sum_{i,j=1}^n \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)\tau_i\tau_j = \langle D\xi \cdot \tau, \tau\rangle$, где $D\xi = \sum$ – матрица ковариаций вектора ξ. Отсюда

$\varphi_\xi(\tau) = Ee^{i\langle\xi,\tau\rangle} = \varphi_{\langle\xi,\tau\rangle}(1) = e^{ia_\tau - \frac{1}{2}\sigma_r^2} = e^{i\langle a,\tau\rangle - \frac{1}{2}\langle\sum\tau,\tau\rangle}$, где $a = E\xi, \sum = D\xi$. Значит, $\xi \sim N(a, \sum)$.

<u>Следствие (существование)</u>

$\varphi(t) = e^{i\langle a,\tau\rangle - \frac{1}{2}\langle\sum\tau,\tau\rangle}$ действительно является многомерной х.ф.

Доказательство

Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$ – независимые N(0,1), а матрицы C и B – из доказательства 1)⇒2). Тогда вектор $\xi = C^TB\eta + a$ имеет х.ф. $\varphi(t)$

■

<u>Следствие (смысл параметров)</u>

Если $\xi \sim N(a, \sum)$, то $a = E\xi, \sum = D\xi$ – матрица ковариаций.

Доказательство

Следует из доказательства 3)⇒1).

Следствие гауссовских векторов

Любое линейное преобразование гауссовского вектора является гауссовским вектором.

Доказательство

Пусть ξ – гауссовский вектор, а $\delta = B\xi + b, b \in \mathbb{R}^k, B \in \mathrm{Mat}(k \times m)$. Тогда $\xi = A\eta + a$ п.н., где компоненты η – независимые N(0,1) с.в. Следовательно, $\delta = (BA)\eta + Ba + b$ п.н. Значит, по второму определению δ тоже является гауссовским вектором

■

Следствие (критерий независимости компонент)

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ – гауссовский вектор. Тогда $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимы ы совокупности $\Leftrightarrow$они попарно некоррелированы.

Доказательство

($\Rightarrow$) Верно для любых с.в. с конечным вторым моментом.

($\Leftarrow$) Пусть $\xi \sim N(a, \Sigma)$. Если $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$, то $\Sigma = D\xi$ диагональна. Значит,

$$\varphi_\xi(\tau) = e^{i\langle a,\tau\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\tau,\tau\rangle} = \prod_{k=1}^{n} e^{ia_k t_k - \frac{1}{2}\sigma_k^2 t_k^2} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k).$$

По критерию независимости для х.ф. получаем, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимы в совокупности

■

Обобщение: Если $\xi \sim N(a, \Sigma)$ и Σ имеет блочный вид

$\begin{pmatrix} C_{1_{k_1\times k_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{r_{k_r\times k_r}} \end{pmatrix}$, где $k_1 + \dots + k_r = n$ – размеры блоков. Тогда случайные векторы $(\xi_1, \dots, \xi_{k_1}), (\xi_{k_1+1}, \dots, \xi_{k_1+k_2}), \dots, (\xi_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}, \dots, \xi_n)$ – независимы в совокупности.

Теорема (о плотности)

Пусть $\xi \sim N(a, \Sigma)$, причем $\Sigma > 0$ (положительно определена). Тогда вектор ξ имеет плотность

$$p_\xi(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(x-a), x-a\rangle}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание: Вектор гауссовский, значит, его компоненты нормальные с.в. Обратное неверно.

Доказательство

Контрпример:

Пусть X, Y – независимые с.в., $X \sim N(0,1), P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}$. Рассмотрим $Z = XY$. Тогда $P(Z \le x) = \frac{1}{2}P(X \le x) + \frac{1}{2}P(X \ge -x) = P(X \le x)$, т.к. $X \triangleq -X$. Значит, $Z \triangleq X \sim N(0,1)$. Кроме того, $E(XZ) = E(X^2Y) = EX^2EY = 0$.

Покажем, что (X, Z) не является гауссовским вектором. Если бы это было так, то с.в. $X + Z$ была бы одномерной нормальной. Но $P(X+Z=0) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}$.

Для нормальности с.в. это невозможно. Значит, (X, Z) — не гауссовский вектор

■

Теорема (многомерная центральная предельная теорема)

Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ —независимые одинаково распределенные случайные векторы из $\mathbb{R}^m$, $EX_n = a, DX_n = \Sigma$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Тогда $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma)$.

Доказательство

Обозначим $T_n = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right)$. Достаточно показать, что х.ф. T_n сходится к х.ф. $N(0, \Sigma)$.

$$\varphi_{T_n}(t) = Ee^{i\langle T_n, t\rangle} = Ee^{i\langle S_n - na, \frac{1}{\sqrt{n}}\rangle} = |\text{независимость } X_1 + \dots + X_n| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} Ee^{i\langle X_k - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\rangle} = \left(Ee^{i\langle X_1 - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\rangle}\right)^n = |\text{разложение х. ф. в ряд}| =$$

$$= \left(1 + iE\left\langle X_1 - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\right\rangle - \frac{1}{2}E\left\langle X_1 - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\right\rangle^2 + o\left(\frac{||t||^2}{n}\right)\right)^n.$$

Пусть $X = (X_{1,1}, \dots, X_{1,m}), a = (a_1, \dots, a_m)$. Тогда $\varphi_{T_n}(t) =$

$$= \left(1 + i\left\langle E(X_1) - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\right\rangle - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} E(X_{1,k} - a_k)(X_{1,j} - a_j)\frac{t_k t_j}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$= |\text{т. к. } EX_1 - a = 0\,| = \left(1 - \frac{1}{2}\langle \sum t, t\rangle \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}\langle \sum t,t\rangle}$, где $e^{-\frac{1}{2}\langle \sum t,t\rangle}$ − это х.ф. $N(0,\sum)$

■

Замечание: для х.ф. случайных векторов выполнены все естественные обобщения свойств одномерных х.ф. (теорема единственности, разложение в ряд, теорема непрерывности и т.п.)

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ