



ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА ДЛЯ ГЕОЛОГОВ

СОКОЛОВ  
ДМИТРИЙ ДМИТРИЕВИЧ

---

ГЕОЛФАК МГУ

---

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**ЮСУБАЛИЕВА ТИМУРА ВАЛЕРХАТОВИЧА**



## Содержание

<b>Лекция 1. Введение</b> .....	5
Литература.....	5
Как строится теория вероятности научно .....	5
Теория вероятности и ее применение для наук о Земле .....	6
Пространство элементарных событий.....	6
Понятие площади и его применение в теории вероятности.....	6
<b>Лекция 2. Классическая модель теории вероятности</b> .....	8
Определение понятия площади множества на плоскости .....	9
Разница между интегралами Римана и Лебега .....	11
Определение вероятности .....	12
Классическая модель теории вероятности .....	13
Понятие независимости в теории вероятности.....	15
Понятие о независимости событий .....	15
<b>Лекция 3. Независимость в теории вероятности. Часть I</b> .....	18
Формула полной вероятности.....	17
Понятие независимых событий.....	18
Пример важности понятия независимых событий .....	19
Схема Бернулли. Последовательность независимых испытаний .....	20
<b>Лекция 4. Независимость в теории вероятностей. Часть II</b> .....	21
Теорема Пуассона .....	22
Теорема Муавра-Лапласа .....	24
Интеграл ошибок .....	26
<b>Лекция 5. Случайные величины</b> .....	27
Применение интегральной теоремы Муавра - Лапласа .....	27
Случайная величина .....	28
Функция распределения.....	28
Примеры функции распределения .....	29
Свойства случайных величин .....	32
Плотность вероятности .....	33
Независимые случайные величины .....	36
<b>Лекция 6. Приложения теории вероятности к наукам о Земле</b> .....	38
Определение возраста по радиоуглеродному методу .....	38
Объяснение большого разброса значений. Вероятностная модель .....	39

<b>Лекция 7. Математическая обработка результатов измерений. Часть I</b> .....	41
Числовые характеристики случайных величин .....	41
Математическое ожидание .....	41
Функция Коши .....	43
Дисперсия .....	45
Свойства математического ожидания.....	47
<b>Лекция 8. Математическая обработка результатов измерений. Часть II</b> .....	50
Свойства математического ожидания (продолжение).....	50
Условное математическое ожидание .....	51
Матрица ковариации .....	51
Модели измерений. Закон больших чисел .....	52
Понимание о сходимости.....	53
Примеры решения задач.....	54
<b>Лекция 9. Центральная предельная теорема.</b> .....	57
Преобразование Фурье .....	57
Функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.....	57
Характеристическая функция.....	58
Свойство характеристической функции.....	59
Центральная предельная теорема.....	59
<b>Лекция 10. Приложение Центральной Предельной Теоремы для обработки результатов измерений</b> .....	65
Требования к точечной оценке .....	66
<b>Лекция 11. Радиоизотопное датирование</b> .....	68
Rb-Sr метод.....	68
<b>Лекция №12. Современные тренды в обработке результатов измерений</b> .....	71
Минимум Маундера .....	71
Количественный анализ с помощью преобразования Фурье .....	73

## Лекция 1

### Введение

Представление о вероятности у каждого сложилось из обыденной жизни. Например, всем нам понятен смысл предложения: «Вероятно, к Новому году выпадет снег».

Математика сложилась на элементарной геометрии. Вероятность – математическая дисциплина, поэтому она также строится по образу элементарной геометрии. Примерно в 300 г. до н.э. Евклид написал книгу «Начала», где изложил систематическое построение геометрии и теории чисел. Больше чем через 2000 лет Давид Гильберт представил то, что хотел сделать Евклид.

Примерно также структурно устроена и теория вероятности. Проблема в том, что Евклид жил давно, а первые научные теории вероятности появились в XVII веке. Как наука эта дисциплина сложилась только в XX веке. Один из основоположников современной теории вероятностей - Андрей Николаевич Колмогоров. Он объяснил, как научно отвечать на вопрос, что такое вероятность и т. д.

Геометрические представления также сложились еще у древних египтян, когда они строили каналы, орошения, но все-таки это было гораздо раньше, чем в XVII веке, когда начались первые упоминания о вероятности.

Теория вероятности сложилась поздно, поэтому эта теория использует все мыслимые достижения математики того времени, когда она создавалась – 20е - 30е годы XX века – современность.

### Литература

Учебники оттачиваются десятилетиями, но так как теория вероятности – наука молодая, хороших учебников еще не так много. Первый учебник по математическому анализу был написан Леонардом Элейром. Книга, написанная для механико-математического факультета – Гниденко Б.В. «Курс теории вероятностей».

Также лектор рекомендует учебник – Пытьева Ю.П. и Шишмарева И.А. «Курс теории вероятности и статистики для физиков». Задачник – доступный и всеобъемлющий «Сборник задач по теории вероятностей» Л.Д. Мешалкина.

### Как строится теория вероятности научно

Что же называется вероятностью? Все математически науки строятся по элементарной геометрии.

В течение очень долгого времени люди пытались ответить на вопрос, что такое вероятность. Рассуждали, что если есть однотипные испытания, и в 30% случаях появляется то, что мы ожидаем, а в 70% нет, то вероятность будет равна 3/10.

Хорошее построение получилось после того, как Колмогоров сказал, что нужно исходить из того, что вероятность – характеристика событий. Она в чем-то подобна площади, количеству воды, которую мы налили в сосуд и т.д. Подобные вещи называются в математике – мера. Вероятность - это мера того, насколько часто возникает данное явление.

### **Теория вероятности и ее применение для наук о Земле**

Существует такая наука, как изотопная геохимия – изучает методы определения абсолютного возраста. В частности, например, радиоуглеродный метод. У углерода есть радиоактивный изотоп, который содержится в растениях, деревьях, и т.д. и, когда, например, дерево срубят, он перестает накапливаться и начинает распадаться. По соотношению углеродов можно определить, когда это дерево спилили.

Рассмотрим ситуацию. Археолог работает, собирает материал – кости, а затем относит их к геологу, который занимается определением возраста. Это происходит в г. Москва. Геолог определяет возраст и сообщает его археологу. Далее археолог приносит другую кость, и процедура повторяется. Набирается примерно 30-35 определений. Археологу геолог сообщает с какой точностью было проведено измерение: примерно  $\pm 100$  лет. Разброс в определениях – 5000 лет. Археолог утверждает, что этого не может быть, но именно такие получились результаты. Затем через несколько десятков лет при анализе этих данных другим человеком выяснилось, что туда попали неточные возраста, более поздние или более ранние, но по прошествии такого долгого времени определить возраст теми же способами в этом месте уже невозможно.

Мы сталкиваемся с ситуацией, когда есть набор однотипных данных, и их необходимо привести к единому целому. С другой стороны, знаний как именно геолог ошибся, у нас нет, но необходимо прийти к результату и оценить погрешность. Эта задача относится к сфере наук о Земле, её цель - научиться подбивать к единому целому несовершенные измерения. Это можно сделать с помощью теории вероятностей.

### **Пространство элементарных событий**

Мы будем рассматривать некоторое множество - пространство элементарных событий. Это пространство обозначается  $\Omega$ . На нем определена вероятность, она существует и обладает примерно теми же свойствами, что и площадь. Вероятность и пространство элементарных событий необходимо наделить свойствами, схожими с свойствами площади.

### **Понятие площади и его применение в теории вероятности**

Что же такое площадь? Площадь прямоугольника – произведение основания на высоту. В школе мы изучали, что площадь многоугольника можно получить, если выпуклый многоугольник разрезать на треугольники, а по треугольнику доказать, чему равна его площадь. Затем формируем квадрат, и, пользуемся представлениями о том, что

если фигуру сложить в прямоугольник, площадь равна сумме площадей треугольников. В итоге мы найдем площадь многоугольника.

Площадь и вероятность устроены так: если есть в пространстве какие-то множества  $A_1$ ,  $A_2$  и т. д, которые не пересекаются, можно рассматривать их объединение, а площадь этого объединения равна сумме этих множеств.

Площадь, вероятность – неотрицательные числа, это меры. Следовательно, вероятность – мера. На всем множестве необходимо ввести подмножества и сделать так, чтобы для непересекающихся подмножеств вероятность всего множества, была равна сумме входящих вероятностей.

Сколько точек будет в пространстве элементарных событий? Если есть конечное число точек, у каждого множества будет соответствующая ему вероятность. Например, есть точка, принадлежащая пространству случайных событий  $\omega \subset \Omega$ .  $\xi(\omega)$  – функция, которая задана на пространстве элементарных событий, она говорит о том, что именно мы получили в этом измерении. Если в пространстве элементарных событий конечное число точек – все просто. Это приводит к тому, что все случайные величины могут принимать дискретный набор значений.

Толщина геологического пласта не может быть равна  $\pi$  м. Во всех естественных науках доминирующее представления занимают непрерывные образы, набор значений не конечный. Необходимо рассматривать непрерывные модели теории вероятности.

Даже на плоскости нельзя ввести понятие вероятности так, чтобы оно обладало интересующими нас свойствами, если не учесть, что всем множествам припишем площадь, равную 0. Мы вынуждены явно описать, что требуется от тех множеств, на которых определена вероятность.

## Лекция 2

### Классическая модель теории вероятности

Представим, что у нас есть пространство элементарных событий  $\Omega$ , и на нем мы хотим ввести вероятность, которая удовлетворяет такому свойству, что при объединении нескольких непересекающихся множеств-событий их вероятность объединения равна сумме вероятностей.

Просто приписать вероятность любому множеству нельзя. На этом пространстве элементарных событий выделим множества, которым можно приписать вероятность – события  $A, A_1$  и т. д  $A \subset \Omega$ . К этим множествам мы можем применять операции теории множеств.

1. Объединение 2х множеств:

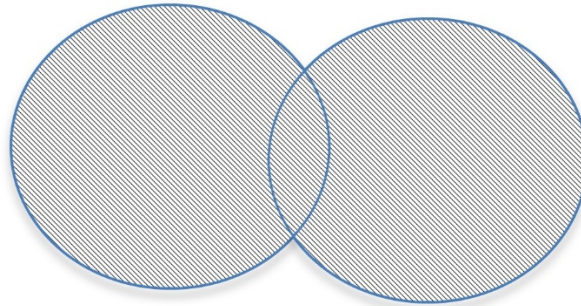


Рис. 2.1. Операция объединения двух множеств

2. Пересечение 2х множеств:

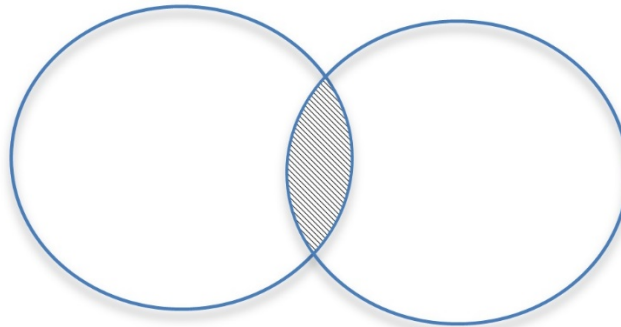


Рис. 2.2. Операция пересечения двух множеств

3. Разность 2х множеств:



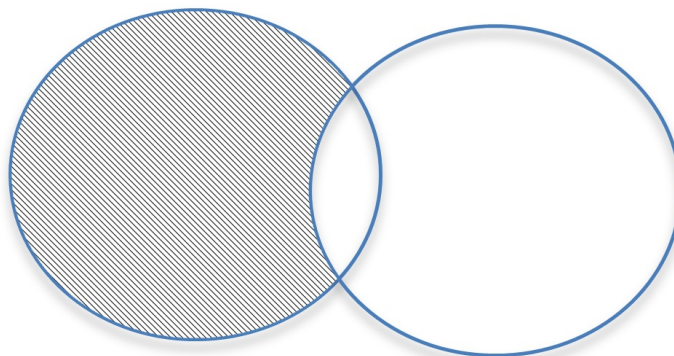


Рис. 2.3. Операция разности двух множеств

4. Симметрическая разность 2х множеств:

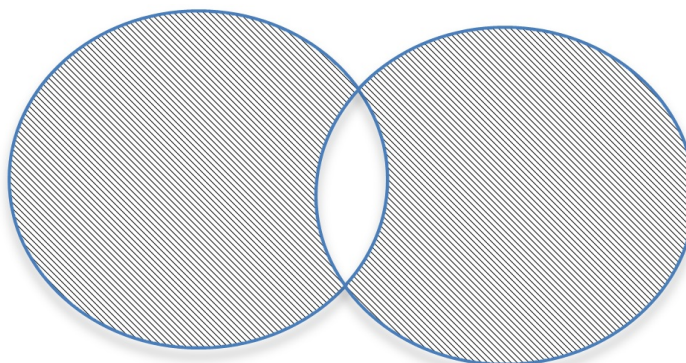


Рис. 2.4. Операция симметрической разности двух множеств

### Определение понятия площади множества на плоскости

Есть множество (Рис. 2.5). Далее рассмотрим многоугольники, которые покрывают это множество, и назовем их  $Q$ . Также можем рассматривать многоугольники, которые лежат внутри множества – многоугольники  $P$ .

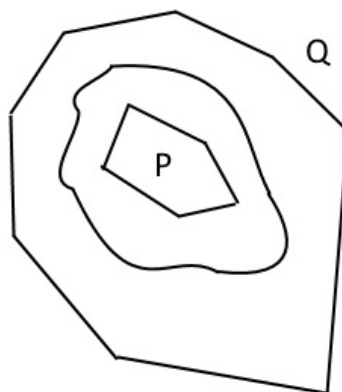


Рис. 2.5. Множество и многоугольники  $P$  и  $Q$

Площадь многоугольников, которые покрывают это множество, больше, чем у многоугольников, которые лежат внутри множества.

$$S(Q) \geq S(P) \quad (2.1)$$

Затем возьмем точную верхнюю грань многоугольников  $P$ , получим нижнюю площадь по Жордану:

$$S \leq \bar{S} \quad (2.2)$$

Если точная верхняя грань многоугольников  $P$  равна точной нижней грани многоугольников  $Q$ , то нижняя площадь по Жордану равна верхней площади. Когда две площади совпадают – это множество квадратируемое по Жордану, что говорит о существовании у него площади по Жордану.

*Пример множества, у которого нет площади*

Возьмем единичный квадрат с осями  $x$  и  $y$  (Рис. 2.6) и рассмотрим множество точек в квадрате, имеющих рациональные координаты. Это множество можно занумеровать.

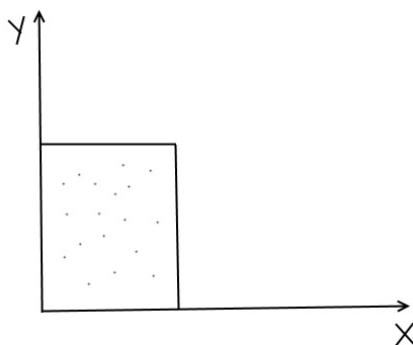


Рис. 2.6. Множество точек в единичном квадрате

Верхняя площадь по Жордану – это и есть сам квадрат, его площадь равна 1, нижняя площадь – только точка, площадь равна 0. С другой стороны, так как все точки с рациональными координатами, их в квадрате можно пересчитать. Вокруг  $n$ -й точки построен квадрат, площадь которого:

$$S_n = \frac{\varepsilon}{2n} \quad (2.3)$$

Сумма этих площадей пропорциональна  $\varepsilon$ . Это получается за счет того, что мы покрываем множество не одним многоугольником, а набором многоугольников, где их бесконечно много, и их можно пересчитать. Это разница между площадью по Жордану и по Лебегу.

Если площадь определяется по Лебегу, то сразу можно брать не конечное, а счетное число множеств –  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Если потребовать, чтобы эти множества не пересекались, то вероятность этого события  $P$  будет равна:

$$P(UA_n) = \sum P(A_n) \quad (2.4)$$

где  $A_n$  – бесконечная сумма. Такие меры – счетно-аддитивные, поэтому естественно требовать, чтобы все эти операции проводились в счетном числе.

Борелевская алгебра ( $\sigma$ -алгебра) - набор множеств, для которых теоретико-вероятностные операции можно проводить в счетном числе. Для проведения таких операций необходимо, чтобы на пространстве элементарных событий был задан набор множеств, образующих  $\sigma$ -алгебру.

На этом наборе множеств должна быть задана вероятность множества  $A$  –  $P(A)$ , которая является счетно-аддитивной функцией (мерой). В ней вероятность объединения счетного набора множеств равняется сумме ряда.

Далее на этом пространстве элементарных событий будем рассматривать функции, результаты измерений, случайные величины. Структура пространства неизвестна, но того, что мы ввели, достаточно, чтобы по этому пространству научиться интегрировать.

### Разница между интегралами Римана и Лебега

Как строится интеграл Римана?

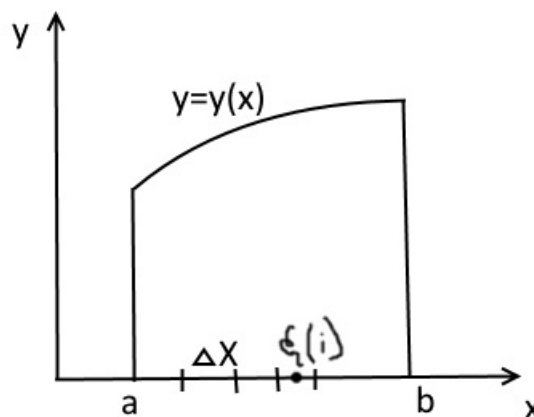


Рис. 2.7. Построение интеграла Римана

Разобьем отрезок  $ab$  на мелкие части длиной  $\Delta x_i$ . Возьмем точку  $\zeta(i)$ .

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta(i)) \Delta x_i \quad (2.5)$$

Далее разбиение будем уменьшать и затем сформулируем предел интегральной суммы. При уменьшении интегральной суммы она сходится к пределу, который называется интегралом Римана.

$$\sum_{i=1}^n f\xi(i)\Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad (2.6)$$

Далее сделаем подобное в пространстве элементарных событий. Лебег предложил, что интегральную сумму нужно строить так. Разобьем на отрезки не область определения функции, а область значений (Рис. 2.8). Далее отстроим пересечение оси  $y$  с фигурой на ось  $x$  и получим интегральную сумму, которая устроена так:

$$\sum y_i \mu(A_i) \quad (2.7)$$

где  $\mu$  – мера множества  $A_i$

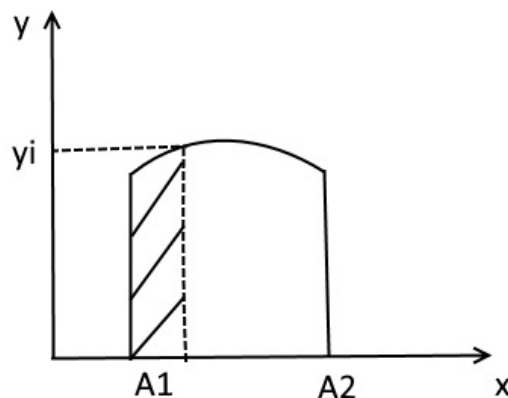


Рис. 2.8. Построение интеграла Лебега

Для построения такой интегральной суммы не нужно знать, как устроено пространство событий. Достаточно знать, как устроена вероятность и как ее измерить. Идея Лебега позволяет интегрировать по пространству элементарных событий и вводить величины, которые фигурируют в теории вероятностей.

### Определение вероятности

Колмогоровская систематика теории вероятностей:

- Пространство элементарных событий ( $\Omega$ );
- Борелевская алгебра ( $\sigma$ );
- $P(A), A \subset \sigma$ ;
- $P(\Omega) = 1$

**Вероятность** – счетно-аддитивная и нормированная (вероятность всего пространства равна единице) мера на пространстве элементарных событий.

### Классическая модель теории вероятности

Рассмотрим игру в кости. Это игра имеет конечное число исходов, то есть может быть изображено конечное число точек. Всего этих точек  $n$ . Далее можно считать, что все точки имеют одну и ту же вероятность  $1/n$ . В качестве борелевской алгебры можно взять множество всех множеств этого пространства.

Возьмем множество  $A$ , в котором  $m$  точек. Вероятность равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (2.8)$$

$(\Omega, \sigma, P)$  – вероятностное пространство

*Задача, относящаяся к классической теории вероятности*

В XVII веке Б. Паскаль – известный ученый – сделал первый результат по теории вероятности. К нему однажды обратился профессиональный игрок в кости. Его интересовал вопрос: какова вероятность выпадения на трех костях 11 и 12 очков. Он произвел статистику по игре, получил научный результат и предложил его Паскалю.

Он рассуждал как может выпасть 11 и 12 очков на трех костях:

P(11)	P(12)
4+4+3	4+4+4
5+3+3	5+4+3
5+4+2	5+5+2
5+5+1	6+3+3
6+3+2	6+4+2
6+4+1	6+5+1

Исходов одинаковое количество, следовательно, вероятность должна быть одинаковой. Но игрок экспериментально убедился, что вероятность этих исходов разная. Он утверждал это и написал письмо о противоречии Паскалю.

Оказалось, что исходы выпадения 11 и 12 очков имеют разный статистический вес. У одного исхода вес в 2 раза больше, чем в другом. Так как при выпадении 12 очков есть вероятность выпадения 3х одинаковых четверок (4+4+4), а в случае выпадения 11 очков такого варианта нет, следовательно, статистический вес в первом случае в 2 раза больше. Таким образом, и вероятности будут разные.

Рассмотрим 2 примера, которые можно решить с помощью аксиоматики теории вероятности.  $A$  – событие, у которого есть дополнение:

$\bar{A}$

Дополнение – то, что не принадлежит множеству  $A$  (Рис. 2.9).

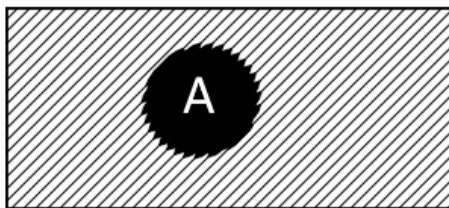


Рис. 2.9. Дополнение события  $A$

Докажем, что:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (2.9)$$

Доказательство:

$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad (2.10)$$

при этом

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (2.11)$$

$$A + \bar{A} = \Omega \quad (2.12)$$

следовательно, множества не пересекаются.

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1 \quad (2.13)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (2.14)$$

## Задача №2

Пусть событие  $A \subset B$ , тогда:

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (2.15)$$

Доказательство:

$$B = A + (B - A) \quad (2.16)$$

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \quad (2.17)$$

Следовательно

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (2.18)$$

### Понятие независимости в теории вероятности

Условная вероятность формирует представление о вероятности того, что, например, человек не просто спит 10 минут, а вероятность того, что он спит 10 минут именно ночью, т.е. задается дополнительное условие.

Зафиксируем некоторое событие  $B$ ,  $P(B) = 0$ . Также у нас есть вероятность  $P(A)$ .  $P(A|B)$  – вероятность события  $A$ , при наступлении условия  $B$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.19)$$

$P(A|B)$  обладает всеми свойствами вероятности. Пусть в событии  $A$  –  $m$  точек, а в событии  $B$  –  $k$  точек.  $A \cap B = m'$ , всего  $n$  точек.

$\frac{m'}{k}$  – вероятность того, что наступит событие  $A$  при условии  $B$ :

$$\frac{m'}{k} = \frac{\frac{m'}{n}}{\frac{k}{n}} \quad (2.20)$$

Уравнение (2.20) есть:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.21)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) \quad (2.22)$$

(2.22) - теорема перемножения вероятностей.

### Понятие о независимости событий

$A$  и  $B$  называются независимыми, если вероятность их пересечения равняется произведению вероятности  $A$  на вероятность  $B$ :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (2.23)$$

Если события независимы, то условная вероятность:

$$P(A|B) = P(A) \quad (2.24)$$

*Свойства независимости:*

1. Любое событие  $A$  и все пространство элементарных событий независимы.

Доказательство:

$$A \cap \Omega = A \quad (2.25)$$

$$P(A \cap \Omega) = A \quad (2.26)$$

$$P(A) \times P(\Omega) = A \quad (2.27)$$

следовательно, две вероятности совпадают, поэтому событие  $A$  и все пространство элементарных событий независимы.

2. Если  $P(B)=0$ , то любое событие  $A$  и  $B$  независимы

$$A \cap B \subset B \quad (2.28)$$

$$P(A \cap B) = P(B) = 0 \quad (2.29)$$

$$P(A) \times P(B) = 0 \quad (2.30)$$

3. Дано, что  $A$  и  $B$  независимы.

Доказать, что  $\bar{A}$  и  $B$  независимы.

Рассмотрим  $A \cap B$  и  $\bar{A} \cap B$ . Они не пересекаются и составляют множество  $B$ .

Следовательно:

$$P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B) \quad (2.31)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) \times (1 - P(A)) \\ &= P(B) \times P(\bar{A}) \end{aligned} \quad (2.33)$$



## Лекция 3

### Независимость в теории вероятности. Часть I.

Мы ввели понятие условной вероятности:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3.1)$$

Введем понятие полной группы взаимно несовместимых событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Их может быть конечное или счетное число. Эти события исчерпывают все пространство элементарных событий

$$\cup A_i = \Omega$$

Для  $i \neq j$  их пересечение  $A_i \cap A_j = \emptyset$

#### Формула полной вероятности

Пусть есть событие  $B$ . Его можно пересечь с полной группой взаимно несовместимых событий. Оно окажется состоящим из пересечений с  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

$B = B \cap \Omega$ , а  $\cup A_i = \Omega$ , следовательно,  $B = \cup (B \cap A_i) = \sum_i (B \cap A_i)$  (так как события не пересекаются)

$$P(B) = \sum (B \cap A_i) = \sum P(A_i|B) \quad (3.2)$$

$$P(B) = \sum P(B|A_i) \times P(A_i) \quad (3.3)$$

(3.3) – формула полной вероятности.

Пусть есть события  $A_k$  из полной группы несовместимых событий и  $B$ . Посчитаем условную вероятность  $A_k$  при выполнении события  $B$  -  $P(A_k|B)$ .

Необходимо посчитать вероятность, что одновременно произойдет событие  $A$  и  $B$ .

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A) \quad (3.4)$$

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \times P(A_k)}{P(B)} \quad (3.5)$$

С другой стороны, заменим  $P(B) = \sum P(B|A_i) \times P(A_i)$ , следовательно:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \times P(A_k)}{\sum P(B|A_i) \times P(A_i)} \quad (3.6)$$

(3.6) - формулы Байеса. Они также используются на практике в медицинской статистике, для обработки геологической вероятности.

### Понятие независимых событий

Понятие рождается из формулы:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3.7)$$

Для независимых событий условная вероятность совпадает с вероятностью события  $A$ .

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A) \quad (3.8)$$

(3.8) - определение независимых событий.

Например, нам необходимо узнать, с какой точностью получились результаты. Есть пространство элементарных событий, и на нем что-то предусмотрено, чтобы ввести понятие о многократно повторяющихся одинаковых и независимых друг от друга опытах.

Представим, что наше пространство элементарных событий – плоскость, в которой одна ось отвечает за одно измерение, а другая ось за второе измерение. В итоге получится прямоугольник, оси которого параллельны осям  $x$  и  $y$ . Вероятность - это подобие площади прямоугольника. Площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту, а это и есть множество пересечений  $A \cap B$ .

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$ , что и является произведением основания на высоту (Рис. 3.1).

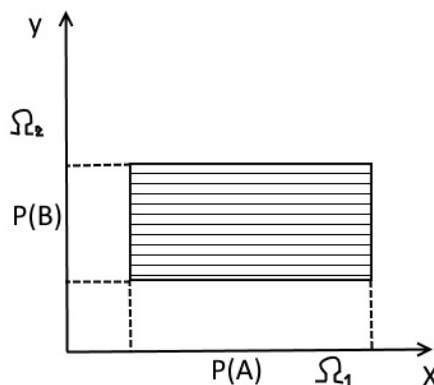


Рис. 3.1. Пространство элементарных событий в виде плоскости

Прямое произведение вероятностных пространств – это случай, когда события лежат в разных пластах прямого произведения, и они независимы. Независимые события нужны для того, чтобы описывать многократную последовательность экспериментов.

### Пример важности понятия независимых событий

Однажды Г.Д. Будкер, который являлся известным физиком-экспериментатором и создателем коллайдера, провёл опыт. Как известно, для того чтобы пошла любая реакция, необходима энергия. Для ядерных реакций было необходимо придумать прибор, который бы вносил эту энергию в систему. Для этого необходимо было заставить частицу много раз проходить одну и ту же разность потенциалов.

Пусть частица летает по замкнутому тоннелю, а электрическое поле, действующее на частицу, представляет собой волну, которая также движется в этом направлении.

Существует предел применимости. При полете частица движется ускоренно, поэтому она излучает, и при движении по тоннелю частица теряет энергию на излучение. Есть предел, выше которого нельзя ускорить частицу на данном приборе. Также нужно иметь в виду, чем больше энергия, тем больше должен быть диаметр кольца.

Будкер придумал способ выхода за предел этого ограничения. Идея: рано или поздно частицу необходимо достать из прибора. Если взять два кольца, то и из одного кольца и из другого будут вылетать частицы навстречу друг другу. От того, что будут сталкиваться два противоположных потока, их относительная скорость будет возрастать, следовательно,  $v$  относительно друг друга у потоков равна  $2v$ , а кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости и равна  $4v$ , то есть выигрыш получается в 4 раза.

Будкер обратил внимание на то, что эти частицы летят со скоростью света, а такие скорости складываются не по законам евклидовой геометрии, а по законам Лобачевского. Таким образом, этот выигрыш гораздо больше, чем в 4 раза, и это зависит от того, насколько большую энергию они получили на первом этапе ускорения. Он хотел воплотить эту идею в жизнь. Далее будет рассказано об опыте, который является фундаментальным опытом в теории вероятности.

Для того чтобы построить новый ускоритель, Будкеру было необходимо летать в Москву для соглашения финансирования. У него в Москве были две любовницы, которые жили симметрично к станции метро Парк Культуры. Он решил, что придет в метро в случайное время, поэтому рассчитывал, что с вероятностью  $\frac{1}{2}$  поезд будет идти в левом направлении, и с вероятностью  $\frac{1}{2}$  в правом направлении, а Будкер поедет к той любовнице, поезд к которой придет первым.

Он провел серию таких экспериментов и выяснил, что к одной из своих любовниц он ездил значительно чаще, чем к другой. Как это могло быть? Он приходил в метро в случайное время, но дело в том, что поезда в метро ходят по расписанию.

Например, пусть поезда ходят:

влево	вправо
18:00	18:01
18:05	18:06
18:10	18:11
18:15	18:16

Допустим, он пришел в промежуток между 18:00 и 18:01, тогда первым придет поезд, движущийся вправо. Если бы Будкер пришел в промежутке с 18:01 до 18:05, то первым приехал поезд, который едет влево. Эти временные отрезки отличаются в 4 раза.

Он приходил в случайный момент времени, но движение поездов влево и вправо зависимо друг от друга. Он соотносил свое прибытие с зависимыми событиями. Это говорит о том, чем чревато игнорирование зависимости случайных величин.

Допустим, возникают много разнообразных событий  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ . Необходимо охарактеризовать не только два факта независимости двух случайных событий, но и то, что все эти события все вместе также являются независимыми.

**Определение.** Выберем из набора событий  $A_{i1}, A_{i2}$ , затем рассмотрим их пересечение, которое для любого выбора должно равняться произведению вероятностей:

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ip}) = P(A_{i1}) \times P(A_{i2}) \dots P(A_{ip}) \quad (3.9)$$

Тогда события (3.9) называются независимыми в совокупности.

Иногда достаточно требовать, чтобы события были независимыми попарно, а иногда, чтобы они были независимы в совокупности. Но необходимо понимать, что это разные независимости.

### **Схема Бернулли. Последовательность независимых испытаний**

Например, рассмотрим игру в монетку. Бросается монетка, у которой есть две стороны – орел и решка. Если вы загадываете орла, и он выпадает – это успех, а если нет – неудача.

Броски являются независимыми. Движение подчиняется законам классической механики. Выпадение орла или решки – случайные события. Вероятность  $\frac{1}{2}$ , что выпадет орел, и вероятность  $\frac{1}{2}$ , что выпадет решка, если монетка симметричная. Если она не симметричная, то возникают вероятности  $p$  и  $q$ , сумма которых равна 1, т.е.  $p+q=1$ . Таким образом,  $p$  и  $q$  - это вероятности одного и другого выпадения, их сумма равна 1. Один из исходов – успех, противоположный – неудача. Это основа для схемы Бернулли.

## Лекция 4

### Независимость в теории вероятностей. Часть II.

Описание схемы Бернулли – последовательность независимых испытаний. В этом случае возникают два события, одно из которых имеет вероятность  $p$ , а другое вероятность  $q$ . При многочисленном проведении таких испытаний пространство образует последовательность, а все пространство состоит из:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p, \dots\} \quad (4.1)$$

Эта конструкция укладывается в прямое произведение. Каждая из игр в орел и решку соответствует последовательности  $\omega$ . Будем говорить, что есть вероятность удачи  $p$  и вероятность неудачи  $q$ .

Эти последовательности можно зашифровывать числами, например, 1 – получу деньги – успех, 0 – неудача. Это будет последовательность 0 и 1. С помощью десятичных дробей можно записать любое действительное число.

Будем считать, что монету бросали конечное число раз. Бросим монетку  $N$  раз, из них  $m$  раз – успех, а  $n-m$  – неудача. Вероятность серии легко оценить, так как мы считаем эти вероятности независимыми, они перемножаются.

$$P\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p, \dots\} = p^m q^{n-m} \quad (4.2)$$

Вероятности (4.2) очень маленькие, так как возможностей очень много. Неважно, в каком порядке идет успех и неудача. Главное, сколько было неудач и успеха, какова вероятность, что в серии будет  $m$  успехов и, соответственно,  $n-m$  неудач, а как они будут распределяться – неважно.

Например, из  $n$  испытаний было  $m$  успехов. Значение (4.3) получится путем домножения на число количества способов распределения успехов и неудач в наборе. Такое число- это число сочетаний.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (4.3)$$

(4.3) - вероятность того, что в серии из  $n$  испытаний наблюдается  $m$  выигрышей.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (4.4)$$

Бернулли увидел здесь место для развития теории. Если у нас фиксированное число  $n$ , то  $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

Распределение вероятности (4.4) – биномиальное распределение. Необходимо проверить, что:

$$\sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1 \quad (4.5)$$

$(p + q)^n = 1$  – бином Ньютона.

$$(p + q)^n = 1 = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1 \quad (4.6)$$

Между задачей о бросании монеты и биномом Ньютона есть связь, поэтому это распределение называется биномиальным. Здесь мы сталкиваемся с функцией, которая задана на пространстве элементарных событий.

Бернулли сказал, что имеет смысл рассматривать на пространстве элементарных событий соответствующие последовательности из  $n$  испытаний, которые состоят в том, что выпало  $m$  успехов. Возникает кусочно-постоянная функция, которая на таком событии принимает значение  $m$ . Возникает проблема, что сначала нужно вычислить маленькие и большие числа, а затем их перемножать. Теряется точность.

Для того чтобы вычислить эти вероятности, были созданы формулы (Пуассона, Лапласа, Муавра). Они сформировали две группы результатов. Одну сформировал Пуассон, другую – Муавр и Лаплас. Они сформулировали две теоремы: 1 – локальная теорема Муавра-Лапласа, 2 – интегральная теорема Муавра-Лапласа.

### Теорема Пуассона

Докажем теорему Пуассона. Мы будем рассматривать как устроена вероятность при больших  $n$ . В математике нет понятия большого числа. Вместо этого рассматривают конструкции, когда  $n$  стремится к бесконечности. Если вероятность  $p$  (вероятность успеха) маленькая, следовательно, мало успеха. Именно это рассматривает Пуассон.

Рассмотрим последовательность независимых испытаний, вероятность успеха:

$$p = \frac{\lambda}{n} \quad (4.7)$$

Если  $p$  устроена таким образом, то вычислим предел  $P_{n \rightarrow \infty}(m)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \times \frac{\lambda^m}{n^m} \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^m} \quad (4.8)$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^m}{m!} \times e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \times \frac{\lambda^m}{n^m} \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^m} \quad (4.9)$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^m}{m!} \times e^{-\lambda} \quad (4.7)$$

$$\frac{n!}{n^m(n-m)!} = \frac{(n-m+1)}{n} \times \frac{(n-m+2)}{n} \dots \frac{n}{n} \rightarrow 1$$

При больших  $n$ :

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \times e^{-\lambda} \quad (4.10)$$

В этом состоит теорема Пуассона.

Есть пространство элементарных событий, которое состоит из последовательности точек  $m=0, 1, \dots, n$ ,

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \times e^{-\lambda}$$

Необходимо проверить, что сумма этих вероятностей = 1

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = 1 \quad (4.11)$$

Для этого необходимо просуммировать ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x \quad (4.12)$$

### Теорема Муавра-Лапласа

Будем считать, что  $p$  связано с  $n$ . Оно постоянно,  $n \rightarrow \infty$ .

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (4.13)$$

Для того чтобы получился предел, необходимо поделить  $p$  на какое-то значение. Локальное утверждение Муавра-Лапласа состоит в том, что предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(m) \sqrt{npq}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x_m^2}{2}}} = 1 \quad (4.14)$$

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \quad (4.15)$$

$$q = 1 - p \quad (4.16)$$

(4.13) - локальная теорема Муавра-Лапласа.

Условие применимости формулы:

$$\sqrt{npq} \gg 1$$

Допустим, мы занимаемся планированием полевых работ. Планируется заказать вертолеты для перевозки керн. Для этого необходимо знать вес образцов и количество перелетов.

Вычислим самое большое произведение  $p \times q$ . Рассмотрим функцию:

$$f(p) = p(1 - p) \quad (4.17)$$

и найдем у нее максимум.

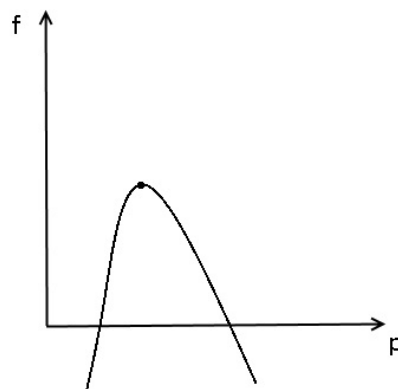


Рис. 4.1. Функция  $f(p) = p(1-p)$



$$f' = 1 - 2p \quad (4.18)$$

$$p = \frac{1}{2} \quad (4.19)$$

$$\sqrt{npq} < \sqrt{\frac{n}{4}} \gg 1 \quad (4.20)$$

Какое число  $\gg 1$ ? Допустим, большое число = 3. Необходимо, чтобы:

$$\sqrt{\frac{n}{4}} > 3$$

$$\frac{n}{2} > 9$$

$$n > 36$$

Таким образом, мы должны отобрать 36 образцов, чтобы можно было обрабатывать данные с помощью математической статистики, но необходимо больше вариантов.

У методов обработки теории наблюдений невыполнимые требования, которые удается выполнить частично. Необходимо серьезно относиться к тому, что действительно нужно, а чем можно пренебречь.

Более удобная форма для записи теоремы Муавра-Лапласа.

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} \times e^{-\frac{x_m^2}{2}} \quad (4.21)$$

Когда  $m = np$ ,  $x_m \rightarrow 0$ . Необходимо знать, какова вероятность того, что  $x_m$  заключался в каких-то пределах.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ a \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.22)$$

(4.22) - интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Предел при  $n \rightarrow \infty$  - это вероятность того, что величина  $x_m$  заключена между числами  $a$  и  $b$ .  $a$  и  $b$  могут быть любыми.

## Интеграл ошибок

Интеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.23)$$

Интеграл ошибок важен для теории вероятности. (4.23) - **интеграл ошибок**. Интеграл ошибок вне всякого сомнения существует, так как подинтегральная функция непрерывна. Для любых  $a$  и  $b$  существует это число.

Но возникает проблема. Этот интеграл не выражается в элементарных функциях, поэтому мы не можем его вычислить по формуле Ньютона-Лейбница. Интегралы ошибок находятся по составленным таблицам или в специальной программе.

Как устроен интеграл ошибок? Кажется, что он зависит только от  $a$  и  $b$ . Но на самом деле это не так. Это иллюзия, так как достаточно знать только один интеграл. Может быть известно либо только  $a$ , либо только  $b$ .

Вводится интеграл ошибок:

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.24)$$

С помощью (4.24) легко вычисляется интеграл от  $a$  до  $b$ .

Насколько  $\frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq \sigma$ ? В качестве  $\sigma$  выбирают несложное число (1,2,5 и т.д.). Значение этого интеграла при  $\sigma=1$  равно около 67%, для  $\sigma=2$  равно около 95%, для  $\sigma=3$  близко к 100%.

Соответственно, решается вопрос, с какой вероятностью вести вычисления. Если речь идет о массовых измерениях, то считают, что  $\sigma=2$  вполне достаточно.

На самом деле часто приводят результаты, где  $\sigma=1$  и вероятность равна 67%. Лучше всего брать  $\sigma=3$ . Тогда говорят о правиле  $3\sigma$ . Считают, что  $\frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq 3$ . Если речь идет об открытии нового закона природы берут  $\sigma=5$ . Если это результат рядовой, то  $\sigma=2$  вполне достаточно.

Все эти проблемы стоят перед людьми, которые занимаются обработкой экспериментальных данных.

## Лекция 5

### Случайные величины

#### Применение интегральной теоремы Муавра - Лапласа

Как применяется интегральная теорема Муавра-Лапласа в практической жизни. Мы говорили, что известный игрок в кости рассчитал вероятность выпадения 11 и 12 очков на трех костях. Оценим этот эксперимент.

Мы хотим измерить вероятности выпадения разных комбинаций с точностью до  $10^{-2}$ , а сами вероятности у нас  $10^{-1}$  порядка. Очевидно, что  $p$ -вероятность успеха равна  $10^{-1}$ , а  $q=1$ . Далее рассмотрим, как устроена интегральная теорема Муавра – Лапласа. Оценивается:

$$\frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \sigma \quad (5.1)$$

Если мы говорим о фундаментальном открытии закона природы, то  $\sigma=5$ . Так и сделаем в нашей задаче. Оценку вероятности будем проводить по отношению числу успехов –  $m$ , к общему числу бросаний –  $n$ . Нам необходимо оценить насколько  $m/n$  меньше  $p$ , т.е.

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| \quad (5.2)$$

$$\frac{\left| \frac{m}{n} - p \right|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < 5 \quad (5.3)$$

Формула (5.2) - это точность, с которой мы хотим оценить вероятность, в данном случае она равна  $10^{-2}$ .

$$\sqrt{\frac{n}{pq}} < 5 \times 10^{-2}$$

$$\frac{n}{pq} < 25 \times 10^4$$

$$pq \approx 0,1$$

$$n < 25 \times 10^4 \times 0,1$$

$$n = 2,5 \times 10^4$$

Столько раз необходимо бросать кости, чтобы убедиться, что вероятность данного исхода измерена с точностью до  $10^{-2}$ . Гораздо надежнее это измерять в независимых событиях, то есть для каждого исхода отдельно. Всего таких результатов 18, тогда:

$$n = 5 \times 10^5$$

Реально за день можно выполнить максимум 100 опытов. Итого  $5 \times 10^3$  дней разделим на 365 дней, получим 15 лет каторжной работы. Это тяжелый эксперимент.

Необходимо ввести понятие, чтобы на месте величины  $m$  (число успехов) была функция, заданная на пространстве элементарных событий. Она достаточно просто устроена и принимает только конечный набор значений для заданного числа испытаний.

### Случайная величина

Возникает понятие случайная величина. У нас есть пространство элементарных событий  $\omega \subset \Omega$ , а случайная величина – функция  $\xi(\omega)$  на пространстве элементарных событий.

Мы хотим, чтобы случайную величину можно было интегрировать по пространству элементарных событий. Для этого нужно, чтобы существовала вероятность:

$$\{P(\omega: \xi(\omega) < C\} \quad (5.4)$$

При этом множество должно принадлежать алгебре элементарных событий. Тогда мы сможем интегрировать по этому пространству. Подобные функции называются измеримыми.

### Функция распределения

Далее эти случайные величины будут представлять результаты разных измерений. Для случайной величины необходимо знать функцию распределения. Эта функция:

$$F(x) = P\{\xi < x\} \quad (5.5)$$

Функция распределения – числовая функция. Она неубывающая, неотрицательная. При  $x \rightarrow +\infty$  функция приближается к 1, а если  $x \rightarrow -\infty$ , функция приближается к 0 (Рис. 5.1).

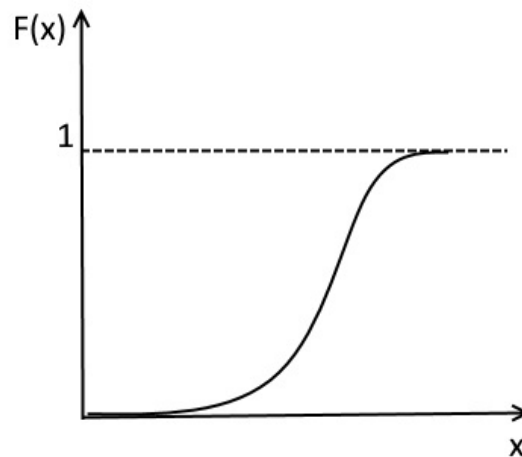


Рис. 5.1. График функции распределения

Как этим пользоваться? Мы хотим принять во внимание события, которые имеют не слишком маленькую вероятность. Там, где хвосты графика приближаются к 1, значение функции равно 1, а где к 0, значение функции равно 0. Мы можем этот отрезок от 0 до 1 отсечь, а другими маленькими вероятностями пренебречь. Наша случайная величина может принимать значения из этого отрезка (Рис. 5.2).

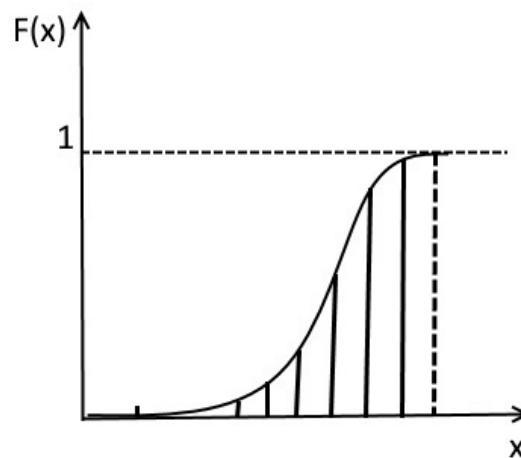


Рис. 5.2. Отрезок, из которого может принять значение случайная величина

### Примеры функции распределения

Самый простой пример – правая часть интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz \quad (5.6)$$

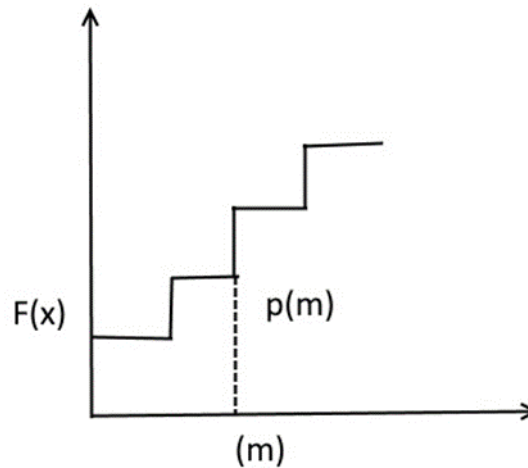
Случайные величины, у которых такая функция распределения (5.6), называются гауссовскими случайными величинами, то есть нормальными. Кроме того, бывают другие случайные величины.

### *Распределение Пуассона*

Оно состоит в том, что  $\zeta$  принимает значение  $m=0, 1, 2, \dots$  с вероятностью:

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \times e^{-\lambda} \quad (5.7)$$

$F(x)$ -ступенчатая функция, которая делает скачок в каждой целочисленной точке. Этот скачок в точке  $m$  равен  $P_m$  (Рис. 5.3).



*Рис. 5.3. Функция распределения Пуассона*

Для того чтобы проверить, является ли эта функция функцией распределения, необходимо доказать, что для гауссовской случайной величины:

$$F(+\infty) = 1 \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz = 1 \quad (5.9)$$

Вычислим этот интеграл. Заменяем  $x-\mu \rightarrow y \rightarrow x$ . Этот интеграл принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5.10)$$

Далее уберем из интеграла  $\sigma$ . Возьмем:

$$y = \frac{x}{\sqrt{2\sigma^2}} \quad (5.11)$$

Тогда:

$$dx = \sqrt{2\sigma^2} dy \quad (5.12)$$

Далее  $y \rightarrow x$ , получим:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \rightarrow I \quad (5.13)$$

Пусть этот интеграл будет  $I$ . Предложение состоит в том, чтобы вычислить интеграл не  $I$ , а  $I^2$ .

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \quad (5.14)$$

Интегрируем по первому квадранту.

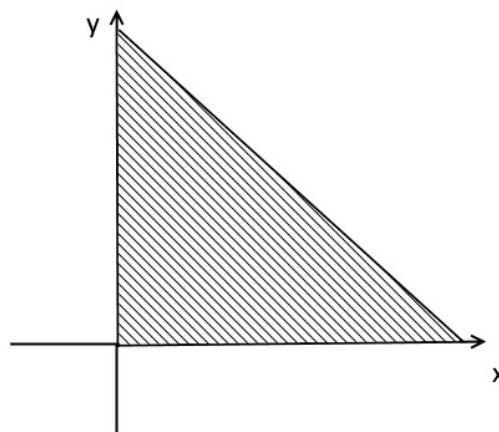


Рис. 5.4. Первый квадрант

Далее

$$I^2 = \iint dx dy e^{-(x^2+y^2)} = \iint d\rho d\varphi e^{-\rho^2} \quad (5.15)$$

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-\rho^2}$$

Маленький элемент площади в координатах  $x$  и  $y$  равен  $dx dy$ . В других координатах  $dx dy$  перемножается на геометрический коэффициент, который показывает, как мы переходим от одной системы координат к другой.

$$dx dy = Y d\rho d\varphi$$

$Y$ - якобиан,  $x(\rho; \varphi)$ ,  $y(\rho; \varphi)$

$$Y = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \rho \quad (5.16)$$

$$\iint d\rho d\varphi e^{-\rho^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int d\rho \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2^2} = I^2 \quad (5.17)$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (5.18)$$

Следовательно,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1 \quad (5.19)$$

### Свойства случайных величин

1. Функция распределения изменяется от 0 до 1  

$$0 \leq F(x) \leq 1$$
2.  $P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$
3.  $F(x)$  монотонно не убывает, непрерывна слева, то есть у нее предел слева равен ее значению
4. Предел справа  $F(x + 0) = P\{\xi \leq x\}$
5.  $F(-\infty = 0), F(+\infty = 1)$



Те функции, для которых функция распределения непрерывна, называются непрерывными, а для которых она состоит из конечного числа скачков – дискретными. Для наук о Земле актуальны непрерывные случайные величины. Далее будем говорить только о них.

### Плотность вероятности

Для непрерывных случайных величин:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx' \quad (5.20)$$

$p(x')$  - плотность вероятности.

Если эта функция дифференцируема, то:

$$p(x') = \frac{dF}{dx} \quad (5.21)$$

$$p(x)dx = P\{x \leq \xi \leq x + dx\} \quad (5.22)$$

Между непрерывными и дифференцируемыми функциями есть разница, но на практике это несущественно. Для непрерывной случайной величины:

$$P\{\xi = C\} = 0, \forall C \quad (5.23)$$

Формула (5.23) - парадокс нулевой вероятности.

Кажется, что все случайные величины можно представить суммой дискретных и непрерывных величин, но это не так. Существуют еще сингулярные случайные величины. Для гауссовской случайной величины плотность вероятности равна:

$$p(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.24)$$

Другой пример непрерывной случайной величины – равномерная случайная величина. Есть некоторый отрезок  $ab$ , на котором функция принимает постоянное значение, равное  $\frac{1}{b-a}$ . Площадь внутри прямоугольник равна 1, а вне его равна 0 (Рис. 5.5).

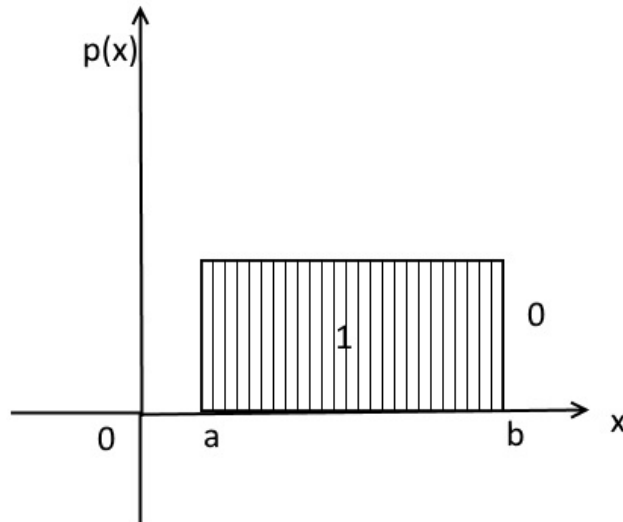


Рис. 5.5. График плотности равномерной случайной величины

Для функции распределения график принимает вид:

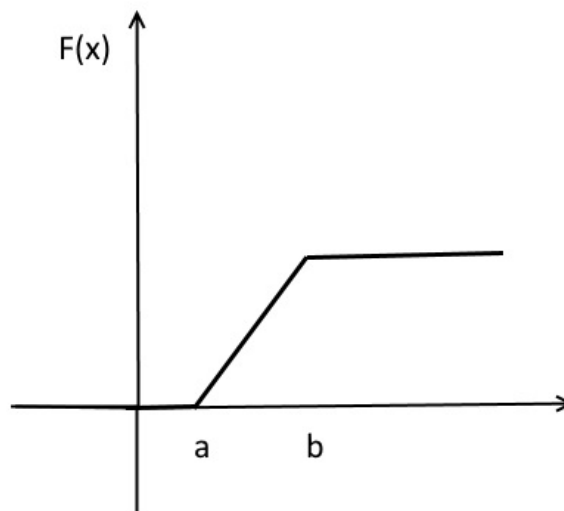


Рис. 5.6. График функции распределения равномерной случайной величины

Будем рассматривать набор случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , который необходимо чем-то охарактеризовать. Его характеризуют многомерной функцией распределения. Она очевидно должна быть построена так:  $F(x_1, \dots, x_n)$ . Если у нее  $m$  случайных величин, то она зависит от  $n$  аргументов.

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) \quad (5.25)$$

(5.25) - многомерная функция распределения, обладающая свойствами, близкими к свойствам функции распределения для одной случайной величины.

Будем считать, что существуют две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ , следовательно, функция распределения зависит от двух аргументов  $F(x,y)$ .

1.  $F(x,y)$  не убывает по  $x$  и по  $y$
2. Она непрерывна слева по  $x$  и  $y$
3.  $F(+\infty; -\infty) = 1$
4.  $F(-\infty; y) = 0, F(x; -\infty) = 0$
5.  $F(x, y), F_{\xi} = (x; +\infty), F_{\eta} = (+\infty; y)$

Вводится понятие плотности вероятности для непрерывных случайных величин.  
Двумерная плотность вероятности

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(x', y') dx' dy' \quad (5.26)$$

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (5.27)$$

$$P(\xi, \eta) = \iint p(x, y) dx dy \quad (5.28)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1 \quad (5.29)$$

$$P_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \quad (5.30)$$

$$P_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx \quad (5.31)$$

## Независимые случайные величины

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) \quad (5.32)$$

**Свойство:** для независимых случайных величин функция распределения факторизуется на произведении функций распределения для отдельных случайных величин:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \quad (5.33)$$

Для двух случайных величин:

$$F(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y) \quad (5.34)$$

Двумерная совместная плотность вероятности:

$$p(x, y) = p_\xi(x)p_\eta(y) \quad (5.35)$$

Рассмотрим функцию от случайных величин.  $\xi, \eta$  - случайные величины. Рассмотрим новую случайную величину:

$$\zeta = \xi + \eta \quad (5.36)$$

Известно  $p_\xi, p_\eta$ , необходимо найти  $p_\zeta$ . Считаем, что все случайные величины независимы.

Решим эту задачу:

$$\Phi(y) = P\{\zeta < y\} = P\{\xi + \eta < y\} \quad (5.37)$$

$x_1 + x_2 < y$  – условие, означающее, что мы рассматриваем множество, которое находится снизу от этой прямой. Необходимо проинтегрировать плотность вероятности по тому, что лежит ниже прямой.

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} p(z_1 - z_2; z_2) dz_2 \\ &= \int_{-\infty}^y dz_2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(z_1, z_2) dz_1 \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\frac{d\Phi}{dy} = p_{\zeta} \quad (5.39)$$

$$p_{\xi}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z_1 - y_1; z_1) dz_1 \quad (5.40)$$

Плотность вероятности суммы:

$$p_{\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x - y) p_{\eta}(y) dy \quad (5.41)$$

## Лекция 6

### Приложения теории вероятности к наукам о Земле

#### Определение возраста по радиоуглеродному методу

В таблице 6.1. представлен анализ результатов, получившихся при определении возраста радиоуглеродным методом для различных археологических памятников.

Мальта – место возле г. Иркутска, стоянка древнего человека. Ниже представлены результаты определения возраста по костным остаткам древнего человека. Абсолютный возраст определялся в геологической лаборатории.

Таблица 6.1. Результаты измерений

Мальта, возраст
14.680±100
14.720±130
16.510±150
19.600±300
19.900±800
20.440±240
20.700±150
21.000±140
21.400±110
22.900±240
41.100±150

Земля подвергается воздействию разных источников радиации, в атмосфере возникают ядерные реакции, и в результате получается изотопный углерод. Всё зависит от солнечной активности. Например, животное ест траву с углеродом, затем после смерти наступает радиоактивный распад. Далее учёные, определяя современное количество углерода, получают абсолютный возраст.

Количество изотопов определяется с помощью радиоактивного счетчика. Из костей берется белок – коллаген, и по нему измеряется изотоп углерода. В счётчике частицы вылетают, но они могут вылететь не все, поэтому появляется погрешность, ± какое-то значение. Этот полученный возраст принято отсчитывать от 1953 года, так как в это время начались массовые ядерные испытания, появился новый источник радиоактивного углерода от загрязнения окружающей среды.

Когда люди вычисляли данные, они считали, что поток заряженных частиц от солнца один и тот же, но на самом деле он немного меняется, так как изменяется магнитное поле солнца. Борьба с этой проблемой состоит в том, что берут старые деревья, вырезают из них столбики от поверхности к центру, считают годовые кольца,

определяют их возраст и содержание углерода, и вычисляют насколько от года к году менялась активность солнца. Эта наука называется дендрохронология. Далее по калибровочной кривой эти данные поправляются.

Какие возникают проблемы при обработке данных? Допустим, землянка существовала максимум 20 лет по историческим данным. А разница в полученных данных у нас несколько тысяч лет.

### Объяснение большого разброса значений. Вероятностная модель

Необходимо сформировать вероятностную модель. Например, было место с захороненными остатками, а затем в это место приходили люди из других поколений и также оставляли остатки, мусор. Допустим, что Мальта существовала в качестве древнего населенного пункта, а затем другое поколение также приезжало туда, либо наоборот, оно приезжало до возникновения поселка.

Эти данные (Таблица 6.1) – значения случайной величины. Необходимо знать функцию распределения. Там, где функция существенно переходит от 0 к 1, мы предполагаем, что именно тогда существовало поселение.

То, что необходимо узнать – эмпирическая функция распределения. Мы берем все определения возраста и упорядочиваем их в порядке возрастания. Их номера расставляем по порядку. Берем ось времени  $x$ , по  $y$  – значение функции распределения. До 1 значение функции равно 0, затем рисуем скачки. Получается ступенчатая функция, которая изменяется от 0 до 1. Затем сгладим функцию сплайном и посмотрим, что у нас получится (Рис. 6.1.).

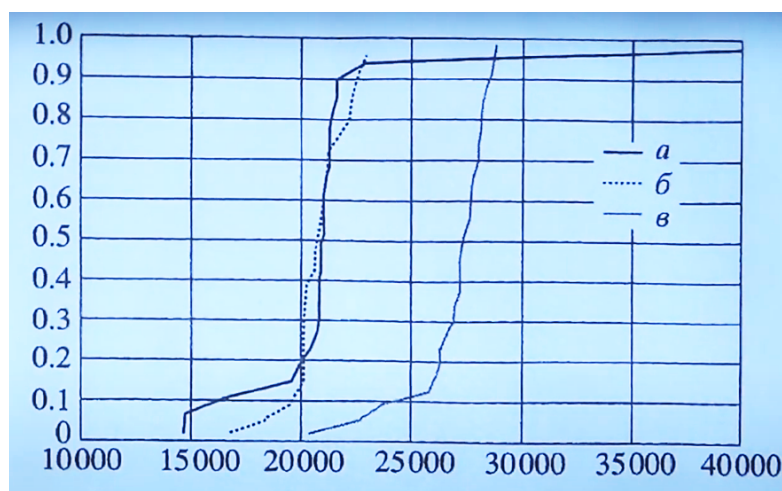


Рис. 6.1. Эмпирическая функция распределения. а-Мальта, б-Авдеево, в-Сунгирь.  
По горизонтали оси указан некалиброванный возраст.

Эмпирическая функция распределения для Мальты (Рис. 6.1). Она существенно меняется на достаточно коротком промежутке. Для Авдеево функция меняется также на достаточно коротком промежутке. Хвосты функции – последующие посещения других

людей. Сунгирь заметно древнее, чем Мальта и Авдеево, и это также видно на графике. Проекция этих наклонных участков гораздо короче, чем времена жизни, и сопоставимы с погрешностями, объявленными радиоактивными счетчиками. Для Авдеево характерно 3 части – 3 строительных периода. Здесь на графике 6.1. мы видим проявление этих трех строительных периодов.



## Лекция 7

### Математическая обработка результатов измерений. Часть I

Мы рассматривали случайную величину  $\xi$ , а затем взяли обычную функцию от случайной величины  $f(\xi)$ . Функция также является случайной величиной. Если мы взяли две функции от независимых случайных величин, то они тоже оказываются независимыми. Это устанавливается с помощью прямого вычисления.

### Числовые характеристики случайных величин

Необходимо ввести числовые характеристики случайных величин.

#### Математическое ожидание

Для дискретной случайной величины, которая принимает значение  $x_i$  с вероятностью  $p_i$  математическое ожидание будет равно:

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i \quad (7.1)$$

Суммирование происходит по тем значениям, которые принимает эта дискретная случайная величина. Если речь идет о непрерывной случайной величине, то мы умножаем на плотность вероятности и интегрируем:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \quad (7.2)$$

Общее определение математического ожидания – интеграл случайной величины по пространству элементарных событий.

$$M(\xi) = \int_{\Omega} \xi d\omega \quad (7.3)$$

*Решим некоторые примеры*

Равномерное распределение. Для него плотность вероятности сосредоточена на отрезке  $ab$ , она равняется  $\frac{1}{b-a}$ .

$$M\xi = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2} \quad (7.4)$$

То есть мы получили середину отрезка – среднее значение (7.4).

*Другой пример*

Математическое ожидание гауссовского распределения.

$$p(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (7.5)$$

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (7.6)$$

Заменим  $x-\mu$  на  $y$ , а  $x=y+\mu$ . Тогда:

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = 0 \quad (7.7)$$

Второй интеграл равен 0, так как это интеграл от нечетной функции в симметричных пределах, а первый интеграл равен 1 (доказывалось ранее). Следовательно, для гауссовского распределения (Рис. 7.1).

$$M\xi = \mu \quad (7.8)$$

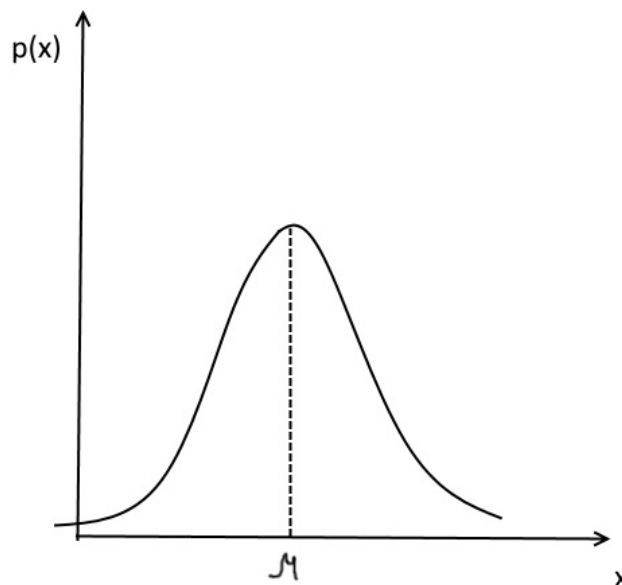


Рис. 7.1. Математическое ожидание гауссовского распределения

Рассмотрим другой пример. Выясним, чему равно математическое ожидание пуассоновской случайной величины. Она принимает все целочисленные значения  $k=0,1,\dots$  с вероятностью  $p(k)$ :

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda} \quad (7.9)$$

$$M\xi = \sum x_k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \times e^{-\lambda} \quad (7.10)$$

Пусть  $n=k-1$ , тогда

$$M\xi = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times e^{-\lambda} = e^{\lambda} \times e^{-\lambda} \times \lambda = \lambda \quad (7.11)$$

$$M\xi = \lambda \quad (7.12)$$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \quad (7.13)$$

Когда мы так рассматриваем  $M\xi$  необходимо, чтобы этот интеграл сходиллся абсолютно.

### Функция Коши

Пример такой функции – функция Коши.

Рассмотрим плотность вероятности, которая устроена так:

$$p(x) = \frac{C}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (7.14)$$

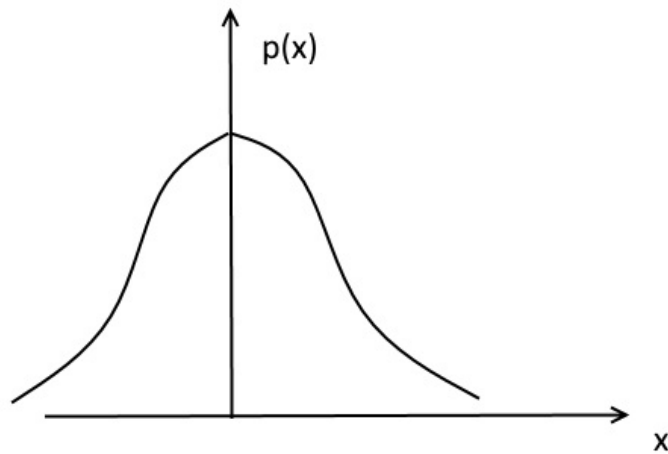


Рис. 7.2. Распределение по Коши

Параметр  $C$  подбирается из условия, что:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = C \arctg x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 \quad (7.15)$$

$$C \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 1 \quad (7.16)$$

$$C\pi = 1 \quad (7.17)$$

$$C = \frac{1}{\pi} \quad (7.18)$$

$$M\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} \quad (7.19)$$

Общий член убывает при  $|x| \rightarrow \infty \approx 1/x$ , следовательно, интеграл расходится. Коши проверил, что, если взять две гауссовские величины, где  $\mu=0$ ,  $\sigma=1$ , они будут независимы. Их отношение распределено по Коши. У таких функций нет среднего значения.

Если у нас есть  $\eta = f(\xi)$ , и мы для случайной величины  $\xi$  знаем плотность вероятности, тогда:

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx \quad (7.20)$$

С помощью формулы (7.20) мы можем вычислить вероятности для функций от случайной величины.

Мы можем теперь записать:

$$M\left(\sum_k C_k \xi^k\right) = \sum_k C_k M\xi^k \quad (7.21)$$

$M\xi^k$  – момент k-го предела

$$\begin{aligned} &\text{Дисперсия} \\ D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 \end{aligned} \quad (7.22)$$

То есть мы рассматриваем центральный момент:

$$D\xi = M(\xi^2 - (2M\xi)\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 \quad (7.23)$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \quad (7.24)$$

$\xi$  измеряется в см,  $M\xi$  измеряется в см, а  $D\xi$  измеряется в см<sup>2</sup>.

Удобно ввести величину:

$$\sigma = \sqrt{D\xi} \quad (7.25)$$

Тогда  $\sigma$  также будет измеряться в см. Это удобно для сравнения.

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x) dx \quad (7.26)$$

Вычислим дисперсию у равномерного распределения:

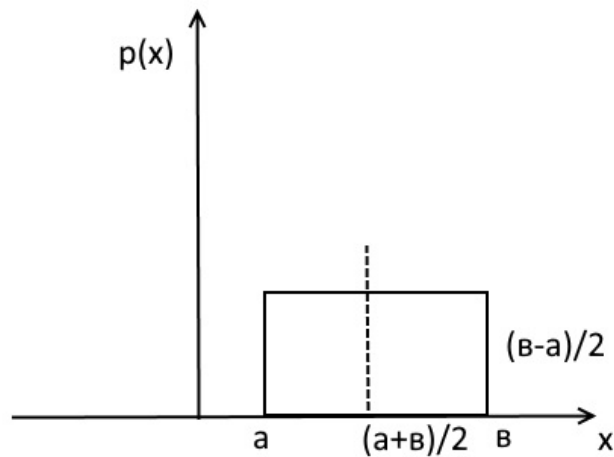


Рис. 7.3. График равномерного распределения

$$D\xi = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 p(x) dx = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)} \Big|_a^b \quad (7.27)$$

$$= \frac{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)} = \frac{1}{12} (b-a)^2$$

$$\sigma = \frac{|b-a|}{2\sqrt{3}} \quad (7.28)$$

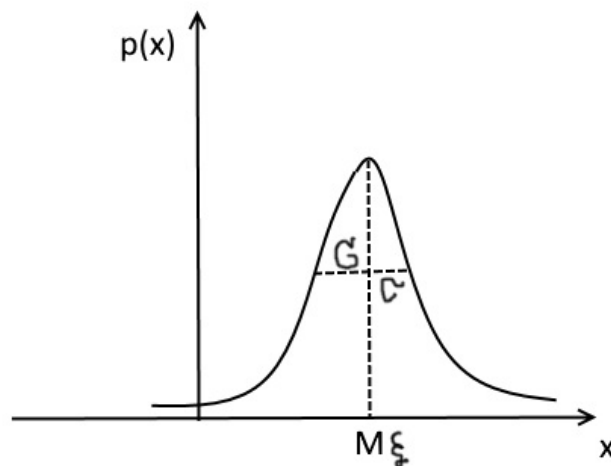


Рис. 7.4. График отклонения

Посчитаем, чему равно  $D\xi$  для пуассоновской случайной величины. Она принимает значения  $k$  с вероятностью:

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} - \lambda^2 = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$M\xi = \lambda \quad (7.31)$$

$$D\xi = \lambda \quad (7.32)$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \quad (7.33)$$

### Свойства математического ожидания

1.

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta \quad (7.34)$$

2. Математические ожидания линейной комбинации

$$M(C_1\xi + C_2\eta) = C_1M\xi + C_2M\eta \quad (7.35)$$

3. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то

$$M(\xi \times \eta) = (M\xi) \times (M\eta) \quad (7.36)$$

Проверим это свойство для дискретных случайных величин. У нас есть случайная величина:

$$\zeta = \xi \times \eta \quad (7.37)$$

Эта случайная величина принимает значения  $t$  с вероятностью  $r_c$ , случайная величина  $\xi$  принимает значения  $x_i$  с вероятностью  $p_i$ , случайная величина  $\eta$  принимает значения  $y_j$  с вероятностью  $q_j$ .

$$M\zeta = \sum_c t_c r_c \quad (7.38)$$

$$M\zeta = \sum_c t_c r_c \quad (7.39)$$

$$t_c = x_i y_i \quad (7.40)$$

$$r_c = \sum p_i q_i \quad (7.41)$$

$$M\zeta = \sum_c t_c \sum p_i q_i \quad (7.42)$$

Переставим порядок суммирования

$$M\zeta = \sum_i p_i x_i \sum_j y_j q_j = M\xi \times M\eta \quad (7.43)$$

Рассмотрим деление двух найденных в эксперименте величин  $\frac{\xi}{\eta}$

У  $\xi$  и  $\eta$   $M=0, D=1$ .

Их частное – распределение Коши, у него и вовсе нет математического ожидания. Это получается из-за того, что хоть и с маленькой вероятностью, но  $\eta$  может быть близка к 0.

Более того, если мы будем рассматривать две гауссовские величины, то с очень маленькой вероятностью знаменатель может обратиться в 0. Если мы считаем, что обе величины гауссовские, то у этого частного не будет математического ожидания.



4. 
$$\xi \geq \eta, M\xi \geq M\eta \quad (7.44)$$

5. 
$$M|\xi\eta| \leq \sqrt{M\xi^2 \times M\eta^2} \quad (7.45)$$

Докажем это:

$$M(|\xi| + \lambda|\eta|)^2 = M\xi^2 + 2\lambda M|\xi\eta| + \lambda^2 M\eta^2 \geq 0 \quad (7.46)$$

Найдем дискриминант и получим это соотношение

6. Неравенство Чебышева

$$P\{|\xi - M\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad (7.47)$$

Доказательство:

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{M\xi^2}{\varepsilon^2} \quad (7.48)$$

$$\eta = \begin{cases} 0, & |\xi| \leq \varepsilon \\ \varepsilon^2, & |\xi| > \varepsilon \end{cases}, |\xi| > \eta \Rightarrow M\xi \geq M\eta = \varepsilon^2 P\{|\xi| > \varepsilon\} \quad (7.49)$$

Далее делим на  $\varepsilon$  и получаем исходное уравнение.

Другая форма записи неравенства Коши. Если  $\zeta \geq 0$ , то:

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D\xi \quad (7.50)$$

## Лекция 8

### Математическая обработка результатов измерений. Часть II

#### Свойства математического ожидания (продолжение)

7.  $DC = 0$ , дисперсия константы равна 0

Математическое ожидание совпадает с этой константой.

$$\int (x - Mx)^2 p(x) dx \quad (8.1)$$

$P(x)$  отлично от 0 только тогда, когда  $x - Mx = 0$

8.

$$D(C\xi) = C^2 D\xi \quad (8.2)$$

$$D(C\xi)^2 = M(C^2\xi^2 - C^2M\xi^2) \quad (8.3)$$

Мы знаем, что математическое ожидание сумм равно сумме математических ожиданий.

9. Для дисперсии:

$$D\left(\sum_i \xi_i\right) = \sum_i D\xi_i \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} D\left(\sum_i \xi_i\right) &= M\left(\sum_i \xi_i - \sum_i M\xi_i\right)^2 \quad (8.5) \\ &= M\sum_i (\xi_i - M\xi_i)^2 + M\sum_{i,j,i \neq j} (\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j) \\ &= \sum_i M(\xi_i - M\xi_i)^2 + \sum_{i,j,i \neq j} M(\xi_i - M\xi_i)M(\xi_j - M\xi_j) \end{aligned}$$

Если  $\xi_i$  и  $\xi_j$  попарно независимы, то вторая сумма = 0, что и требовалось доказать.

### Условное математическое ожидание

Можно взять математическое ожидание при каком-то условии:

$$M\xi|A = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x|A)dx \quad (8.6)$$

Допустим, у нас есть набор случайных величин, вектор.  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , тогда мы можем ввести вектор, состоящий из математических ожиданий и вектор, состоящий из дисперсий случайных величин.

### Матрица ковариации

Также, когда у нас много случайных величин, мы можем ввести матрицу ковариации.

$$a_{ij} = cov(\xi_i, \xi_j) = M(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j) \quad (8.7)$$

Если  $i=j$ , то  $a_{ii} = D\xi_i$

Если  $i \neq j$ , то  $a_{ij}$  – матрица ковариации показывает, насколько  $\xi_i$  и  $\xi_j$  связаны друг с другом. Это корреляционная матрица.

Величину  $a_{ij}$  необходимо пронормировать на величину дисперсии:

$$M|\xi_i \xi_j| \leq \sqrt{D\xi_i D\xi_j} \quad (8.8)$$

$a_{ij}$  отнормируем:

$$\frac{a_{ij}}{\sqrt{D\xi_i D\xi_j}} = \rho \quad (8.9)$$

$\rho$ -коэффициент корреляции (см<sup>2</sup>)

$$\rho \leq 1$$

Коэффициент корреляции является мерой того, насколько независимы величины  $\xi_i$  и  $\xi_j$ . Если  $\xi_i$  и  $\xi_j$  независимы, то  $\rho=0$ .

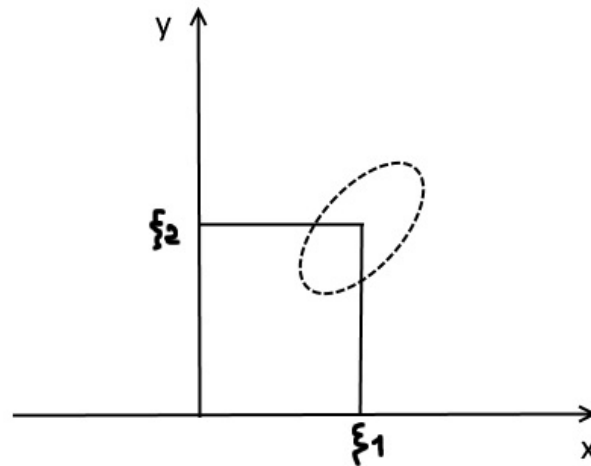


Рис. 8.1. Поле рассеивания

Значения случайных величин будут занимать эллипс (Рис. 8.1). Математическое ожидание – положение центра этого эллипса. Дисперсия – стандартное отклонение. Коэффициент корреляции дает угол, на который повернут этот эллипс.

### Модели измерений. Закон больших чисел

Для того чтобы обрабатывать результаты измерений, у нас должно быть представление о том, что нам предстоит сделать, и мы должны знать что-то об этих измерениях.

Необходимо сформулировать модель измерений. Простейшая модель измерений состоит в определении того, что представляют собой случайные величины.

$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  – независимые случайные величины, у которых единое математическое ожидание  $M\xi_i = \mu$ . Это математическое ожидание необходимо найти. Его мы можем найти с помощью закона больших чисел.

Если есть набор результатов, то можно построить новую случайную величину:

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (8.10)$$

Эта величина  $\eta_n$  будет ближе к математическому ожиданию, чем  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

В этом состоит закон больших чисел. Если у нас есть результаты измерений, и они являются случайными величинами, эта случайная величина будет отличаться от математического ожидания, но будет близка к нему. В математике нет понятия близких

чисел. Возникает понятие о предельном переходе.  $\eta$  к  $\infty$ , в результате  $\eta_n$  будет стремиться к математическому ожиданию.

### Понимание о сходимости

Одна случайная величина может сходиться к константе или к другой случайной величине. Как это объяснить?

#### 1. Сходимость по вероятности

**Определение.**

$$\xi_\eta \rightarrow \xi \forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_\eta - \xi| > \varepsilon\} = 0 \quad (8.11)$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  вероятность того, что  $\xi_\eta$  отличается от  $\xi$  больше, чем на  $\varepsilon$  с ростом  $n$  становится равно 0.

Простейшая форма закона больших чисел. Пусть у нас будет последовательность случайных величин  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , у которых есть одинаковое для всех математическое ожидание  $M\xi_i = \mu$  и дисперсия  $D\xi_i = \sigma^2$ , и они попарно независимы. Тогда (8.22) - последовательность случайных величин:

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \rightarrow \mu \quad (8.12)$$

То есть  $\eta_n$  сходится по вероятности к математическому ожиданию.

Докажем:

$$M\eta_n = \frac{1}{n} n\mu = \mu \quad (8.13)$$

$$D\eta_n = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \quad (8.14)$$

$$P\{|\eta_n - M\eta_n| > \varepsilon\} \leq \frac{D\eta_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \quad (8.15)$$

При  $n \rightarrow \infty \rightarrow 0$ , что и требовалось доказать.

## Примеры решения задач

Сходимость почти наверное:

$$\eta_n \rightarrow \mu$$

Это значит, что:

$$P\{\eta_n \neq \mu\} = 0$$

Величина  $\eta_n \rightarrow \mu$  не только по вероятности, но и почти наверное.

### Задача

Есть две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ . Они независимы.

$$P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{\eta < x\} = x, \quad 0 < x < 1$$

Необходимо найти функцию распределения.

$$\zeta = \eta + \xi$$

$$F(x) = P\{\zeta < x\} = P\{\xi + \eta < x\}$$

$$\xi + \eta = x, \quad 0 < x < 1$$

$$\zeta = 0, \quad \eta = x$$

$$P\{\xi + \eta < x\} = P\{\xi = 0\}P\{\eta < x\} = \frac{1}{2}x$$

Найдем  $F(x)$  на отрезке  $1 < x < 2$

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{\xi + \eta < x\} = F(1) + P\{1 < \xi + \eta < x\} \\ &= F(1) + P\{\xi = 1, 0 < \eta < x - 1\} \\ &= \frac{1}{2} + P\{\xi = 1\}P\{0 < \eta < x - 1\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

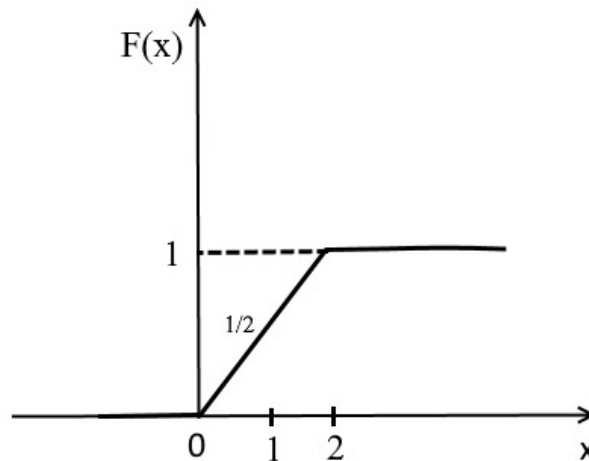


Рис. 8.2. График функции распределения

### Задача №2

Есть две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ . Они независимы.

$$P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{\eta < x\} = x, \quad 0 < x < 1$$

Необходимо найти функцию распределения.

$$\zeta = \eta\xi$$

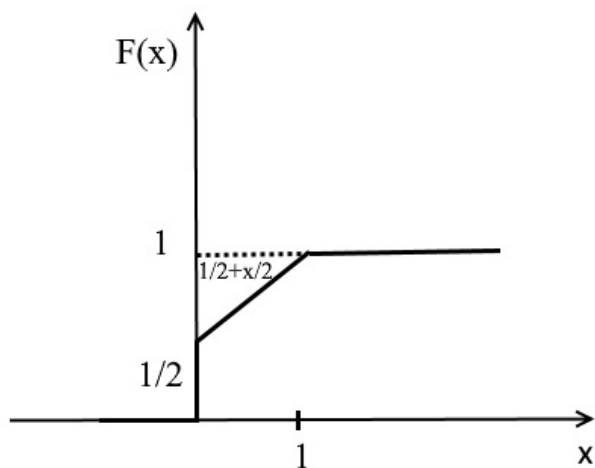
$$F(x) = P\{\zeta < x\} = P\{\xi\eta < x\}$$

Речь идет о произведении двух неотрицательных случайных величин, оно не может быть меньше 0, следовательно,  $F(x)$  до  $0 = 0$  Это произведение двух чисел не превосходит единицу.

Далее у нас с вероятностью  $\frac{1}{2}$  случайная величина будет обращаться в 0, т.е. у функции  $F(x)$  есть разрыв, величина скачка равна  $\frac{1}{2}$ .

Между  $0 < x < 1$

$$P\{\zeta < x\} = P\{\zeta = 0\} + P\{0 < \xi\eta < x\} = \frac{1}{2} + P\{\xi = 1\}P\{\eta < x\} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$



*Рис. 8.3. График функции распределения*



## Лекция 9

### Центральная предельная теорема.

#### Преобразование Фурье

Преобразование Фурье – операция, сопоставляющая одной функции вещественной переменной другую функцию вещественной переменной.

То есть колебания проходящего «сигнала» описывают двумя периодическими колебаниями  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ .

Леонард Эйлер, используя комплексные числа и формулу Тейлора, пришел к соотношению:  $\cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}$

Преобразование Фурье определяется интегралом:

$$F(\omega) = A \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (9.1)$$

Обратное преобразование Фурье определяется интегралом:

$$f(t) = B \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (9.2)$$

где  $\cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}$ ,  $A * B = \frac{1}{2\pi}$  (в теоретической физике  $A = B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , в теории вероятности  $A = 1, B = \frac{1}{2\pi}$ )

Преобразование Фурье от производной функции равно произведению исходной функции преобразования Фурье на  $(-i\omega)$ . Тем самым переведем функцию из дифференциального вида в алгебраический:

$$F_{f'}(\omega) = F(\omega) \cdot (-i\omega) \quad (9.3)$$

#### Функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана

Величина  $z = x + iy$  называется комплексным переменным, если  $x$  и  $y$  – переменные величины.

Величина  $w$  называется функцией независимого переменного  $z$ , если каждому значению  $z$  по некоторому правилу соответствует одно или несколько комплексных значений  $w \in E$ : ( $w = f(z)$ )

Производная функции  $w = f(z)$  в точке  $z$  называется пределом отношения приращения функции к приращению аргумента

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \quad (9.4)$$

Для того чтобы функция  $f'(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , определенная в некоторой области  $D$ , была дифференцируема в точке  $z$  этой области как функция комплексного переменного, необходимо и достаточно, чтобы функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  были дифференцируемы в соответствующей точке  $(x, y)$ , и выполнялись условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (9.6)$$

Интеграл комплексной переменной

$$\int f(z) dz = \lim_{\Delta z_i \rightarrow 0} \sum_i (f(z_i) * \Delta z_i) \quad (9.7)$$

Интеграл от функции комплексной переменной по замкнутому контуру равен 0 – теорема Коши.

### Характеристическая функция

Пусть дана случайная величина  $\xi$ , ее плотность вероятности  $p(x)$ . Введем характеристическую функцию:

$$f_{\xi}(t) = M e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) d(x) \quad (9.8)$$

Если случайная величина комплексная, то она состоит из действительной и мнимой части:

$$\xi = \eta + i\zeta \quad (9.9)$$

Тогда математическое ожидание  $\xi$ :

$$M\xi = M\eta + iM\zeta \quad (9.10)$$

Если случайная величина  $\xi$  принимает дискретный набор значений  $x_i$  с вероятностью  $p_i$ , то ее характеристическая функция:

$$f_\xi(t) = \sum_i e^{itx_i} p_i \quad (9.11)$$

### Свойство характеристической функции

Рассмотрим случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимые в свободности.

Рассмотрим величину  $\eta$ , представляющую собой сумму этих случайных величин:

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \quad (9.12)$$

Затем вычислим характеристическую функцию  $f_\eta(t)$ :

$$f_\eta(t) = Me^{it\eta} = Me^{it(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)} = M(e^{it\xi_1} * e^{it\xi_2} * \dots * e^{it\xi_n}) \quad (9.13)$$

Математическое ожидание произведения равняется произведению математических ожиданий:

$$f_\eta(t) = Me^{it\xi_1} * Me^{it\xi_2} * \dots * Me^{it\xi_n} \quad (9.14)$$

Преобразование Фурье переводит характеристическую функцию суммы в произведение характеристических функций слагаемых:

$$f_\eta(t) = f_{\xi_1}(t) * f_{\xi_2}(t) * \dots * f_{\xi_n}(t) \quad (9.15)$$

### Центральная предельная теорема

Если мы возьмем последовательность случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots \quad (9.16)$$

И построим из них новую последовательность, которая сходится к математическому ожиданию:

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \rightarrow \eta \quad (9.17)$$

Согласно интегральной теореме Муавра-Лапласа

$$\frac{m - np}{\sqrt{npq}} \quad (9.18)$$

где,  $m$  аналог –  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$

$p$  аналог –  $n\mu$

$pq$  аналог –  $\sigma^2$

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad (9.19)$$

Утвердим, что  $\eta_n$  при широких условиях сходится к гауссовской случайной величине. Гауссовская величина задана путем указания плотности вероятности.

**Опр. Сходимость по распределению (слабая сходимость)**

Последовательность случайных величин  $F$  сходится по распределению к случайной величине  $\xi$ , если последовательность их функции распределения сходится к функции распределения величины  $\xi$ .

$$\xi_n \xrightarrow{F} \xi \quad (9.20)$$

Если

$$F_n(x) = F(x) \quad (9.21)$$

**Теорема Центральная предельная теорема**

Пусть дана последовательность независимых равно распределенных случайных величин:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots \quad (9.22)$$

$$\mu = M\xi; \sigma^2 = D\xi_i \quad (9.23)$$

Тогда:

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{F} N(0; 1) \quad (9.24)$$

$$P\{a < \eta_n < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (9.25)$$

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} = \sum_{i=1}^n \zeta_i \quad (9.26)$$

Выясним, каково математическое ожидание и дисперсия величины  $\eta_n$

$$M\eta_n = \frac{0}{\sqrt{n\sigma^2}} = 0 \quad (9.27)$$

$$D\eta_n = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_i D(\xi_i - \mu) = \frac{1}{n\sigma^2} n\sigma^2 = 1 \quad (9.28)$$

Введем величину:

$$\zeta_i = \frac{\xi_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad (9.29)$$

$$M\zeta_i = 0 \quad (9.30)$$

$$D\zeta_i = \frac{\sigma^2}{n\sigma^2} = \frac{1}{n} \quad (9.31)$$

Вычислим характеристическую функцию  $\eta_n$

$$f_{\eta_n}(t) = f_{\zeta_1}(t), f_{\zeta_2}(t), \dots, f_{\zeta_n}(t) = [f_{\zeta_i}(t)]^n \quad (9.32)$$

$$f_{\zeta_i}(t)_{t \rightarrow 0} = f_{\zeta_i}(0) + f'_{\zeta_i}(0)t + \frac{1}{2} f''_{\zeta_i}(0)t^2 + \dots \quad (9.33)$$

$$f_{\zeta_i}(t) = 1 \quad (9.34)$$

$$f(t) = Me^{itx} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx \quad (9.35)$$

Если  $t=0$ , то

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx \quad (9.36)$$

$$f'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{itx} p(x) dx|_{t=0} = i \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = iM\xi_i = 0 \quad (9.37)$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{itx} p(x) dx|_{t=0} = i \int_{-\infty}^{+\infty} ixx e^{itx} p(x) dx|_{t=0} \quad (9.38) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = -D\xi_i = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$f_{\zeta_i}(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2) \quad (9.39)$$

$$f_{\eta_n}(t) = [f_{\zeta_i}(t)]^n = \left[ 1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2) \right]^n \quad (9.40)$$

Формула (9.40) – второй замечательный предел, он равен:

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (9.41)$$

Мы узнали, что характеристическая функция  $\eta_n$  в пределе равняется  $e^{-\frac{t^2}{2}}$

## Лекция 10

### Приложение Центральной Предельной Теоремы для обработки результатов измерений

У нас есть набор случайных независимых величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ , у них есть  $M = \mu$  и  $D = \sigma^2$ . Рассмотрим, как различаются ответы в зависимости от того, что мы хотим получить.

Одна задача – нахождение интервала, который с заданной вероятностью покрывает то, что мы ищем. Это точечная оценка. Другая задача – указание числа, которое нам больше нравится. Это интегральная оценка

Допустим, нам неизвестно  $M\xi = \mu$ , но известна точность измерения  $\sigma^2$ .  $U_p$  – вероятность, которая нас устраивает:

$$\frac{|\sum(\xi_i) - \mu|}{\sqrt{n\sigma^2}} < u_p \quad (10.1)$$

Эта величина распределена по Гауссу

То, что не лежит в отрезке  $[-u_p; u_p]$  нас не устраивает

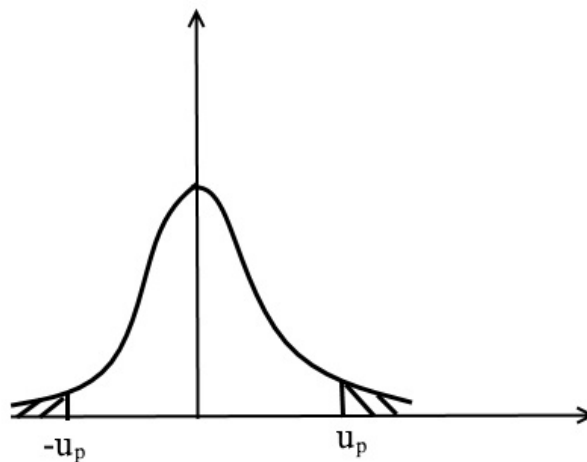


Рис. 10.1. График распределения величины по Гауссу

$$\frac{-u_p\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \mu < \frac{u_p\sigma}{\sqrt{n}} \quad (10.2)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \frac{u_p \sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} + \frac{u_p \sigma}{\sqrt{n}} \quad (10.3)$$

(10.3) - интервал, в котором с заданной вероятностью меняется наша искомая величина.

**Оценка параметров нормального распределения:**

1.  $\mu$  неизвестно, а  $\sigma$  известно
2.  $\sigma$  неизвестно, а  $\mu$  известно

Построим что-то похожее на величину  $\sigma$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu)^2 \sim \sigma^2 = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2}{n} \quad (10.4)$$

Возьмем стандартные величины  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ , для них  $M\zeta = 0, D\zeta = 1$

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \quad (10.5)$$

(10.5) - сумма квадратов независимых случайных величин.

$\chi_n^2$  – величина, которая зависит от  $n$ ,  $n$ -число степеней свободы

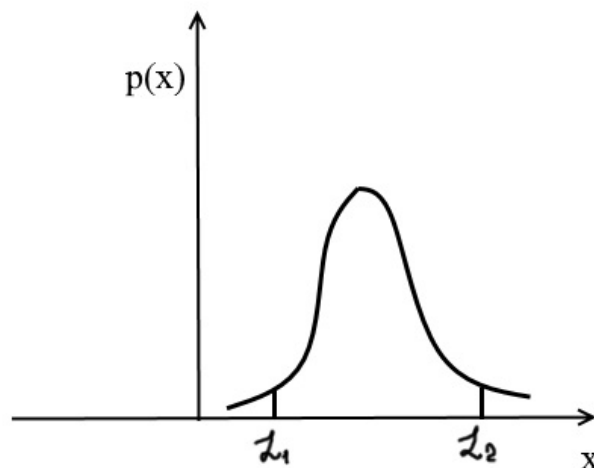


Рис. 10.2. Функция распределения  $\chi_n^2$

Для нее есть таблицы – таблицы квантилей. Все, что не лежит в промежутке от  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  нам не подходит.



$$\frac{n}{\sigma^2} \alpha_1 \leq \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \leq \frac{n}{\sigma^2} \alpha_2 \quad (10.6)$$

Мы можем считать, что  $\alpha_1 = \alpha_2$ , тогда сможем найти  $\sigma$  при известном  $\mu$ .

3.  $\sigma^2$  неизвестно,  $\mu$  неизвестно

$$\widetilde{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (10.7)$$

Если  $n=1$ , то знаменатель может обратиться в 0. Необходимо заменить  $n$  на  $n-1$ .

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \quad (10.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 = \chi_{n-1}^2 \quad (10.9)$$

4.  $\mu$  неизвестно,  $\sigma$  неизвестно, но мы и не хотим его узнать

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \widetilde{\mu}_n)^2}{\sqrt{n(n-1)}} O \leq \mu \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i + \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \widetilde{\mu}_n)^2}{\sqrt{n(n-1)}} O \quad (10.10)$$

О-квантиль – коэффициент, который показывает, как величина доверительных интервалов связана с вероятностью, с которой мы ведем рассмотрение.

(10.10) - распределение Стьюдента:

$$O = t_{n-1}(p) \quad (10.11)$$

Точечная оценка

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$$

Мы должны из этого набора построить то, что нам необходимо, оценкой известного нам  $\mu$  и неизвестного  $\sigma$ .

$$M \widetilde{\mu}_n = \mu \quad (10.12)$$

$$M \widetilde{\sigma}_n = \sigma^2 \quad (10.12) \quad (10.13)$$

(10.12) и (10.13) - метод моментов.

### Требования к точечной оценке

1. Несмещаемость, т.е. математические ожидания должны быть равными тому, что мы хотим

2. Состоятельность

При  $n \rightarrow \infty$  оценка стремится к истинному значению

Несмещаемая оценка для математического ожидания:

$$\widetilde{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (10.14)$$

Несмещаемая оценка для дисперсии:

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \widetilde{\mu}_n)^2 \quad (10.15)$$

Допустим, мы провели ряд измерений, и нам необходимо узнать, какое среднее значение мы взяли.

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$$

Мы знаем их точность  $\sigma$  и хотим проверить их математическое ожидание. Но может быть такое, что при проведении измерений образец менялся, например, происходил радиоактивный распад. Как убедиться, что у всех этих измерений одинаковое математическое ожидание? Это задача о проверке статистических гипотез.

Предположим, что  $\mu$  – математическое ожидание, которое мы ищем.

$$\sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i - \mu)^2}{\sigma^2} < \text{квантили } \chi_n^2 \quad (10.16)$$

Если мы задаем  $\mu$  и проверяем, что она меньше квантилей, то говорим, что все сходится, т.е. у всех случайных величин одинаковое математическое ожидание.

**Решим задачу:**

Есть две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ . Они независимы.

$$P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{\eta < x\} = x, \quad 0 < x < 1$$

Необходимо найти функцию распределения.

$$\zeta = \eta + 1/2\xi$$

Две случайные величины не могут быть  $<0$ , следовательно, сначала функция равна 0. Самая большая величина по оси  $x=3/2$ , также отметим характерное значение  $x=1/2$

От  $0 < x < 1/2$

$$P\{\zeta < x\} = P\{\xi = 0; n < x\} = P\{\xi = 0\}P\{n < x\} = \frac{x}{2}$$

$1/2 < x < 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{\zeta < x\} = \frac{1}{4} + P\left\{\frac{1}{2} < \zeta < x\right\} \\ &= \frac{1}{4} + P\left\{\xi = 0; \frac{1}{2} < n < x\right\} + P\left\{\xi = 1, n < x - \frac{1}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$1 < x < 3/2$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{3}{4} + P\{1 < \zeta < x\} = \frac{3}{4} + P\{\xi = 1\}P\left\{\frac{3}{4} < \eta < x - \frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{x-1}{2} \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

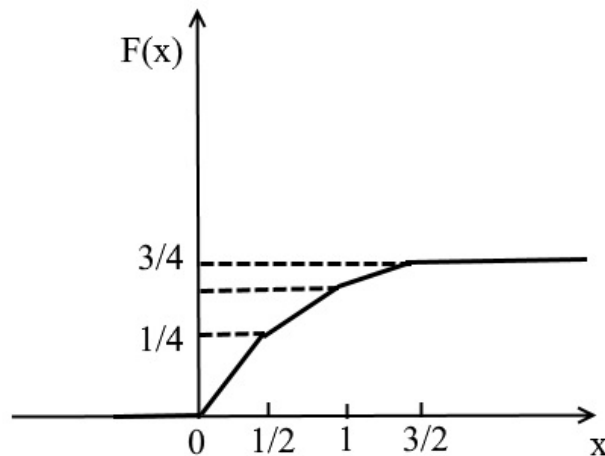


Рис. 10.3 График функции распределения

## Лекция 11

### Радиоизотопное датирование

Определением абсолютного возраста пород занимается изотопная геохимия. Радиоактивные изотопы распадаются, скорость их распада нам известна. Зная сколько изотопов было, и сколько их сейчас, можно определить абсолютный возраст.

#### Rb-Sr метод

Рассмотрим Rb-Sr метод

Рубидий-87 постепенно распадается и преобразуется в стронций-87. Стронций-86 – радиогенный изотоп.

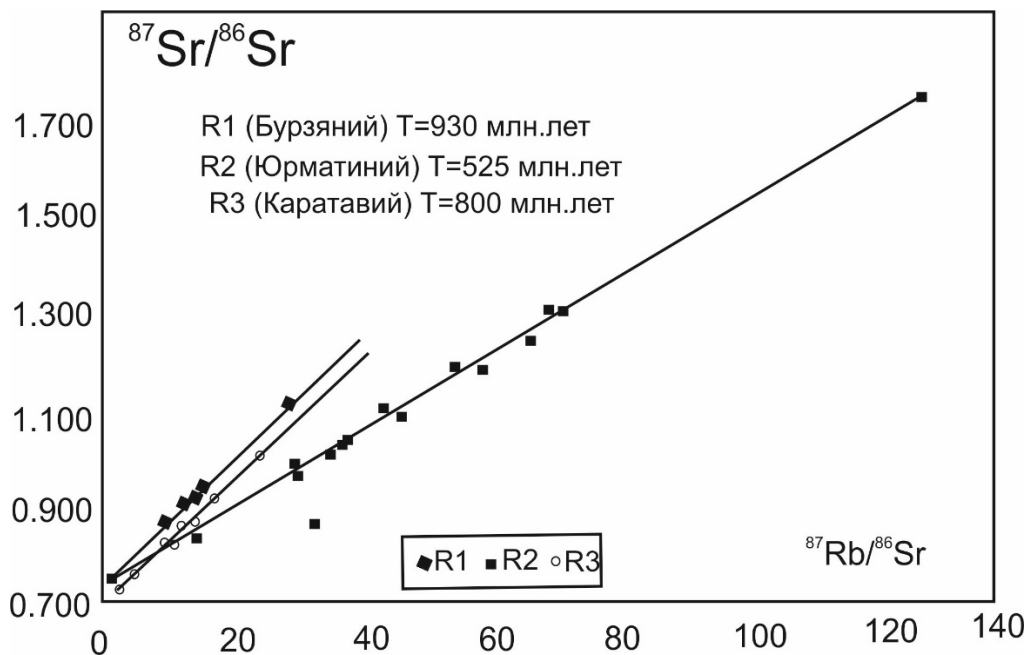


Рис. 11.1. Результаты, полученные с помощью Rb-Sr метода

Представим, что сначала на объекте, из которого отбирались образцы, все было однородно, но в разных частях содержалось разное количество рубидия. Затем система закрылась, изотопы перестали перемещаться с места на место и только распадались. В результате рубидий распадался, из него получался радиогенный изотоп Sr. Чем больше будет Rb, тем больше он будет распадаться, и тем больше будет количество Sr.

На диаграмме (Рис. 11.1) по оси y - содержание радиогенного изотопа Sr, по горизонтальной оси - содержание радиоактивного изотопа Rb. Мы обнаружили, что точки должны лежать на одной прямой.

Сама модель – это изохронная модель. Диаграмма – это изохронная плоскость, прямая – это изохрона. На графике приведены изотопные соотношения, так как они измерялись на масс-спектротре, который выдает только соотношения.

Как с таких графиков читать геологическую информацию? Прямая определяется двумя параметрами:  $y=ax+b$ . По оси  $y$  - вертикальные величины диаграммы, по оси  $x$  - горизонтальные.

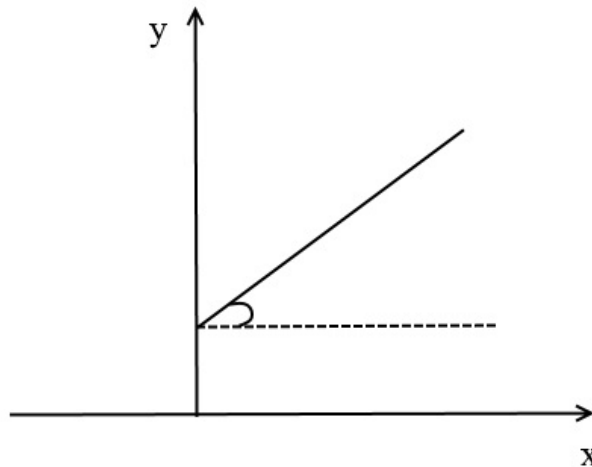


Рис. 11.2. График изохроны

Сначала была прямая линия без наклона, то есть соотношение изотопов было одинаково. Затем изменились соотношения, и образовалась наша нынешняя прямая. Угол определяется временем, когда все продолжалось, и постоянным распадом.

Зная угол, можно пересчитать тангенс угла и возраст. Коэффициент  $a$  говорит нам о возрасте. Необходимо понять, с какой точностью померили положение точек на изохронной плоскости. Стандартное отклонение по оси  $x$  -  $\sigma_{xi}$ , по оси  $y$  -  $\sigma_{yi}$ . Ошибки возникают при переводе образца в жидкую фазу, либо они связаны с работой масс-спектрометра. Было бы лучше, если бы эти ошибки были независимы, то есть измерялись в разных опытах.

Мы должны узнать, как полученные точки рассеяны по отношению к прямой. Сделать это можно с помощью метода наименьших квадратов.

Будем измерять расстояние по горизонтали в единицах  $\sigma_x$ , а по вертикали в  $\sigma_y$ . Таким образом посчитаем расстояние от точки до прямой.

$y_i x_i$ - координаты измерений

$$\sum_i \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{a^2 \sigma_{xi}^2 + \sigma_{yi}^2} = S(a, b) \quad (11.1)$$

Полученная величина – невязка. Там, где она минимальна, находятся настоящие значения.

$$S(\bar{a}, \bar{b}) = S_{min} \quad (11.2)$$

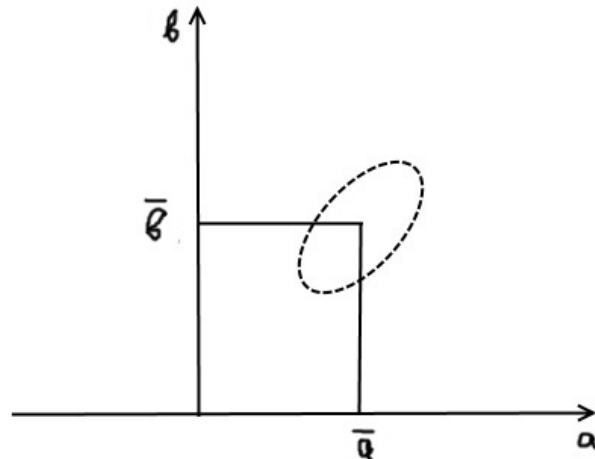


Рис. 11.3. Эллипс

Если  $S(a, b) < \chi^2$ , то образуется эллипс. Если мы постоянно будем уменьшать  $\sigma$ , то эллипс будет сужаться и превратится в точку.

Почему точка немного съехала от прямой?

$$y = ax + b + \sigma_b \xi_i \quad (11.3)$$

$$\sigma_b \xi_i = y_i - ax_i - b \quad (11.4)$$

$$\sum \sigma_b^2 \xi_i^2 = \sum_i (y_i - ax_i - b)^2 = S(a, b) \quad (11.5)$$

$t_n \rightarrow F$ -распределение Фишера

Можем не разделять все точки, а соединить их все в одну прямую и посчитать их невязку. Или посчитать сумму отдельных невязок для каждой прямой. Получим:  $S_{1+2} > S_1 + S_2$

## Лекция №12

### Современные тренды в обработке результатов измерений Минимум Маундера

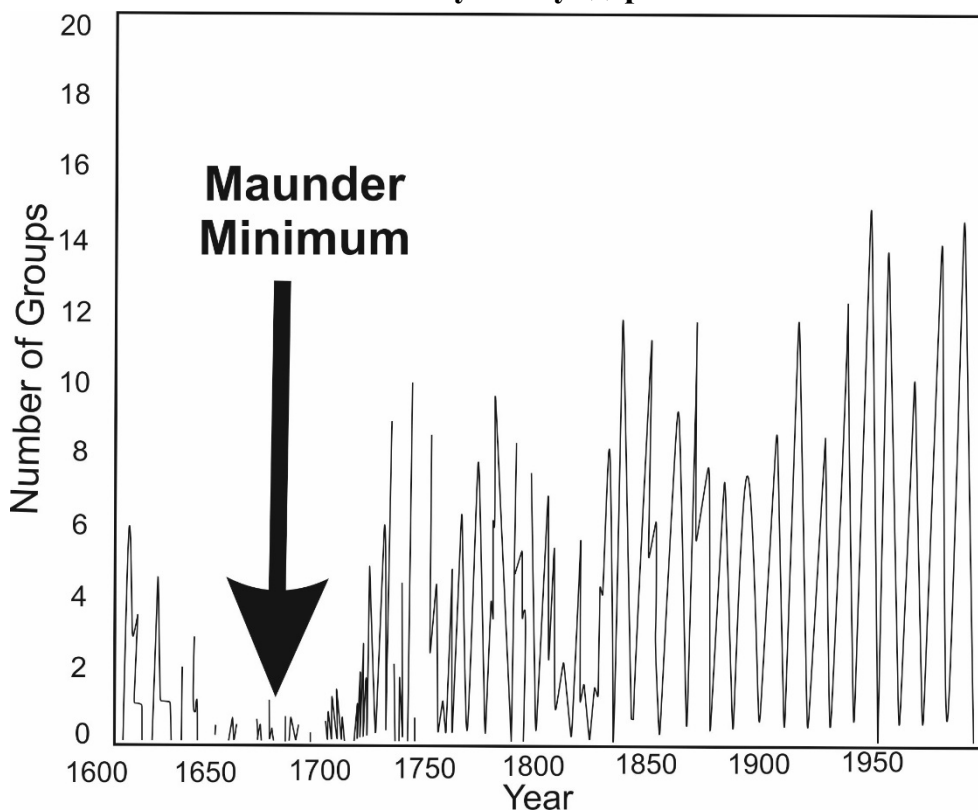


Рис. 12.1. График солнечной активности

Начиная с 1611 года (с изобретением телескопа) начались наблюдения за Солнцем. С тех пор известно, что на Солнце стали появляться пятна. Солнечные пятна – это места, где на поверхность Солнца выходят трубки линий магнитного поля. И в тех местах, где магнитное поле сильнее, температура меньше. Из-за этого со стороны они кажутся темными.

На графике по оси ординат число групп, по оси абсцисс время. Из этого графика видна цепочка пиков, расстояние между ними соответствует 11 годам – одиннадцатилетний цикл солнечной активности. Также мы видим провал Маундера в интервале от 1650 – 1700 г. Далее с 1800 – 1850 еще один провал – провал Дальтона.

Из графика видны элементы порядка (одиннадцатилетний цикл солнечной активности) и элементы беспорядка (провалы, разная высота пиков).

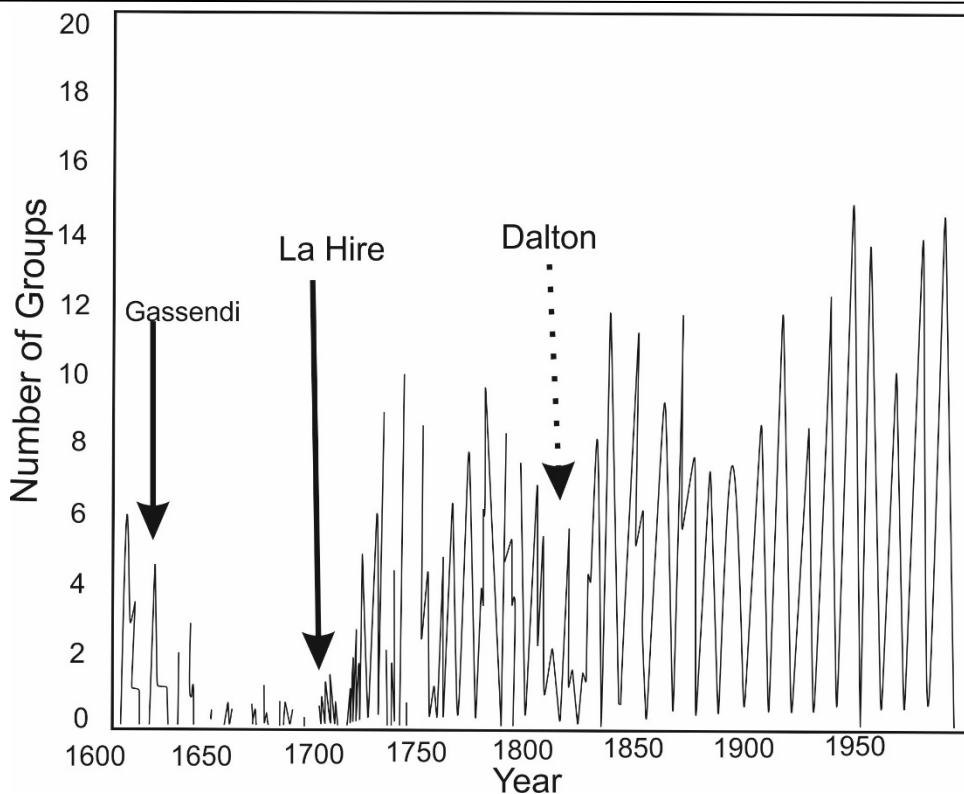


Рис. 12.2. Ученые ведущие наблюдение за солнечной активностью в период провалов

Появляется необходимость описать зависимость изменения солнечной активности во времени. В связи с этим возникает ряд проблем, например, такие как качество проводимых измерений, непериодичность провалов, проблема интерпретации данных и тд.

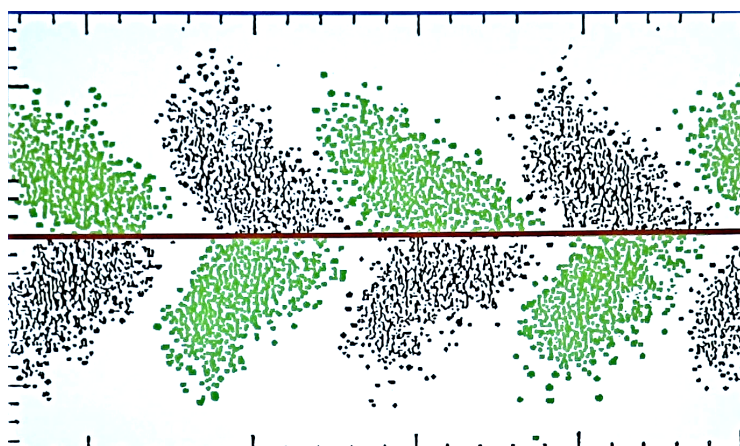


Рис. 12.3. Butterfly-диаграмма. По горизонтали ось времени, по вертикали широта на Солнце. Красная линия положение экватора Солнца.

На Butterfly-диаграмму вынесены положения групп солнечных пятен. Поскольку Солнце вращается, у групп солнечных пятен можно ввести понятие полярности. Есть



пятно, где оно вышло из под поверхности, и есть, где вошло. И если направление от того, где вышло, к тому, где вошло, то же самое, что направление туда, где вошло, то оно положительно, а если наоборот - отрицательно.

На рисунке 12.3 мы видим волну активности, которая распространяется от средних широт к экватору. Зеленым и серым цветами показаны противоположные полярности магнитного поля. Мы видим изменения полярности – правило полярности Хэйлора.

### Количественный анализ с помощью преобразования Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \quad (12.1)$$

Где преобразование Фурье больше, там колебания больше, и на частоте, соответствующей 11 годам, есть пик. Но это нереализуемо, так как для того чтобы вычислить интеграл, нужно взять интеграл от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а данные наблюдений взяты только в ограниченный период времени.

В 1980 году было предложено вместо этого сравнивать сигнал с волновым пакетом – вейвлетом Морле, который затухает со временем. Его можно интегрировать от начала до конца наблюдений.

$$W(a, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\frac{t-t_0}{a}\right) f(t) dt \quad (12.2)$$

$W(a, t_0)$  - вейвлет коэффициент, зависящий от временного фактора и от места, в котором мы находимся.

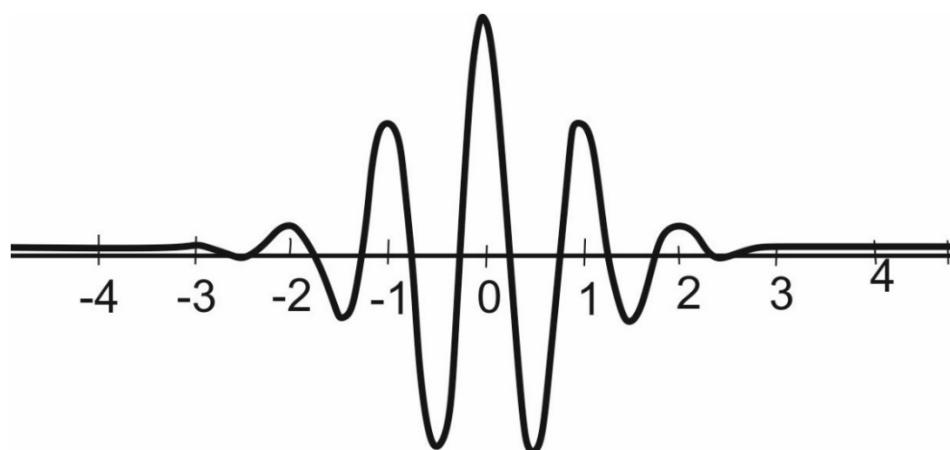


Рис. 12.4. Вейвлет Морле

С помощью вейвлетовой плоскости были получены вейвлет коэффициенты, и получился аналог спектра Фурье.

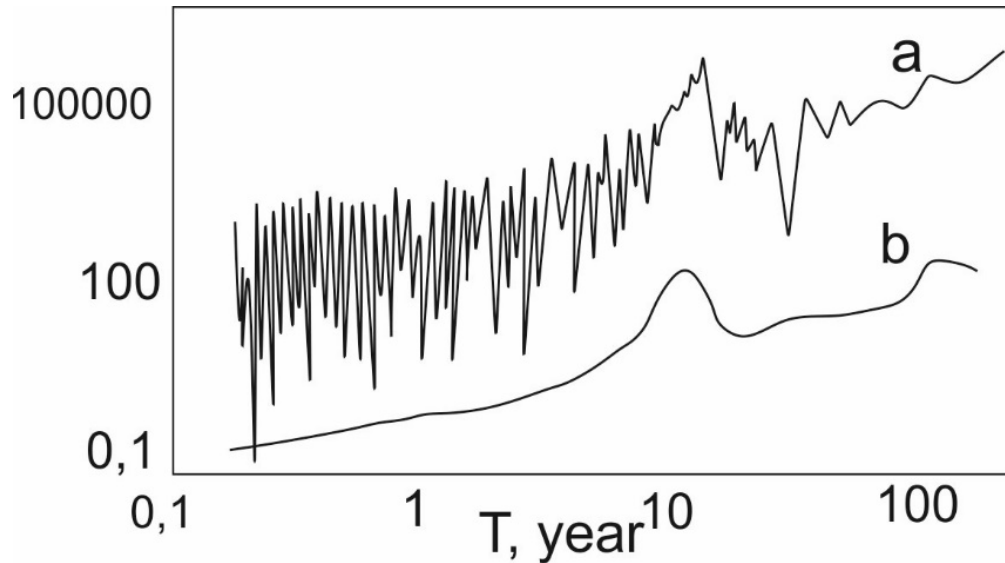


Рис. 12.5. Аналог спектра Фурье. Спектр a - получен простым интегрированием от 1611 года до 1997 года, спектр b - получен с помощью вейвлет преобразования

С помощью вейвлетовой плоскости появились следы на одиннадцатилетних колебаниях в минимуме Маундера.

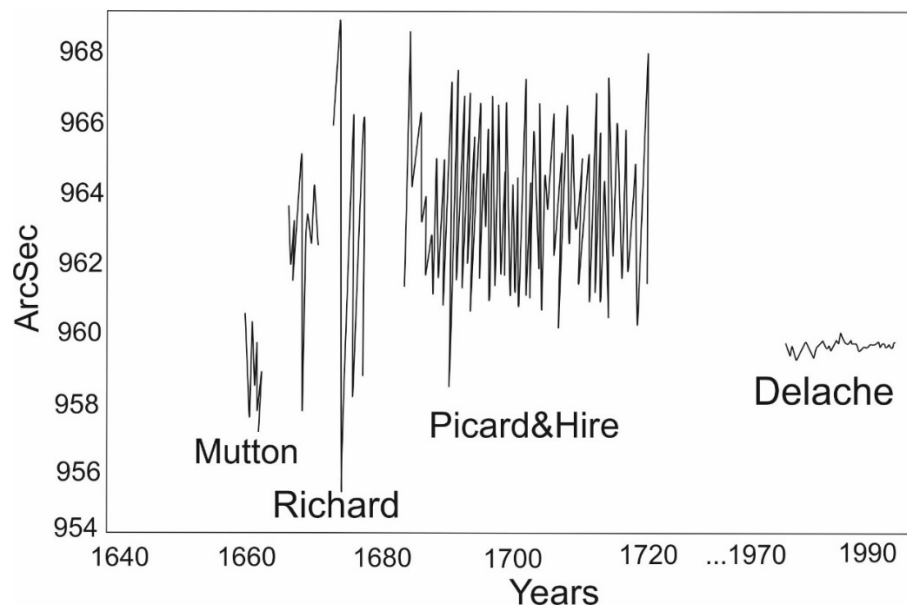


Рис. 12.6. Наблюдения за видимым солнечным диаметром. Видны следы одиннадцатилетнего колебания

С помощью вейвлетового анализа можно изучить сигнал наблюдения за колебаниями температуры в центральной Англии.



ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ