ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ТИХОНОВ
НИКОЛАЙ АНДРЕЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КУЩЕНКО АННУ КОНСТАНТИНОВНУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. ТИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ 5

Основные этапы методов математического моделирования 5
Основные понятия 5
Иерархия моделей 6
Универсальность математических моделей. 7
Внешние задачи для уравнения Гельмгольца 8
Условия излучения Зоммерфельда 10
Принцип предельного поглощения 13

ЛЕКЦИЯ 2. ПАРЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ 15

Парциальные условия излучения 15
Задача Гурса 19
Математическая задача дифракции 21
Общая задача Коши 22

ЛЕКЦИЯ 3. ОБЩАЯ ЗАДАЧА КОШИ. ФУНКЦИЯ РИМАНА 24

Общая задача Коши 24
Функция Римана 25
Функция влияния точечного импульса 28
Постановка задачи 29

ЛЕКЦИЯ 5. МЕТОД ПОДОБИЯ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ 38

Метод подобия 38
Задача Стефана 39
Нелинейные процессы переноса 41
Линейное уравнение 42
Квазилинейное уравнение 44
Метод характеристик 46
Разрывы решения 47

ЛЕКЦИЯ 6. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ 50

Нелинейное уравнение теплопроводности 50
Модель «Хищник-Жертва» 57

ЛЕКЦИЯ 7. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ 60

Общие понятия 60
Разностные схемы для уравнения теплопроводности 62
Устойчивость решения задачи теплопроводности 63
Метод прогонки 66

ЛЕКЦИЯ 8. МЕТОД ПРОГОНКИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ 68

Метод прогонки 68
Консервативные разностные схемы 68

ЛЕКЦИЯ 9. КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). СХЕМА БЕГУЩЕГО СЧЕТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА 71

Консервативные разностные схемы 71
Экономичные разностные схемы 72
Линейно-одномерная схема 75
Итерационные методы при решении нелинейных уравнений 76
Схемы бегущего счета для уравнения переноса 76
Геометрический критерий устойчивости схемы бегущего счета 78

ЛЕКЦИЯ 10. ВАРИАЦИОННЫЕ И ПРОЕКИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 81

Сведение дифференциальной задачи к вариационной 81
Метод Ритца 82
Проекционные методы 84
Разностные схемы для уравнений с разрывными коэффициентами, основанные на вариационных принципах. Метод конечных элементов 85

ЛЕКЦИЯ 11. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА 88

Вариационный подход к решению задачи Штурма-Лиувилля 88
Метод малого параметра 88
Метод осреднения 93

ЛЕКЦИЯ 12. МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). МЕТОД ВКБ 95

Метод осреднения 95
Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса и Бриллюэна) 100

ЛЕКЦИЯ 13. НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ОБЪЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 102

Вейвлет-анализ 102
Фракталы 105
Синергетика 107
Детерминированный хаос 107
Перколяция 110
Метод обратной задачи рассеяния 110

ЛЕКЦИЯ 1. ТИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Основные этапы методов математического моделирования

Математическое моделирование заключается в составлении для данного процесса некоторой модели, то есть системы уравнений, описывающей этот процесс. Далее исследуют решение такой системы и делают некий вывод. Моделирование имеет ряд преимуществ, во-первых, дешевизна процесса, во-вторых, можно исследовать различные варианты процесса, можно анализировать вклад различных слагаемых и влияние каких-либо условий на результат и, наконец, можно исследовать объекты вообще не доступные для экспериментального наблюдения, например, черные дыры.

При изучении физической задачи с помощью математического моделирования, обычно проходят через следующие этапы:

1. Формулировка модели.
2. Исследование математической задачи.
3. Поиск алгоритма решения (аналитического или численного).
4. Создание компьютерной программы.
5. Исследование результатов и сопоставление их с имеющимися данными.
6. Доработка модели.

Основные понятия

Формулировка модели существенно зависит от специфики конкретной задачи – поэтому рассмотрим лишь некоторые понятия и терминологию.

I. Классификация моделей:

1. Функциональные модели: отдельные этапы процесса исследованы, описаны дифференциальными или интегральными уравнениями, таким образом, у нас есть представление о всех частях процесса, и требуется его проанализировать.
2. Модели типа черного ящика: нам известен отклик системы на известные входящие сигналы в широком диапазоне, но мы не знаем, что находится у нее внутри.

Также модели можно разделить на

1. Теоретические модели
2. Эвристические модели

II. Модели могут формулироваться в разной форме.

1. Как система дифференциальных и/или интегральных уравнений с соответствующими дополнительными (начальными и граничными) условиями.

2. В виде вариационных задач. В курсе вариационного исчисления мы стремились от вариационной задачи перейти к дифференциальной. Часто, при использовании численных методов, удобнее наоборот – от систем дифференциальных уравнений переходить к вариационным задачам. Например, в сложной системе вместо решения множества уравнений Ньютона бывает удобнее составить функцию Лагранжа и использовать принцип наименьшего действия.

3. Модель, в которой процесс описывается некоторыми уравнениями, называется детерминированной. Если модель описывается некоторыми вероятностными законами, она называется стохастической.

III. Задачи бывают прямые и обратные.

A. Прямые – изучались, например, в рамках курсов дифференциальных уравнений и методов математической физики. Задано уравнение и дополнительные условия, требуется найти его решение.
B. Обратные – нахождение неизвестных характеристик модели по известному решению или известным его свойствам.

Обратные задачи бывают разного вида. Их условно можно разбить на группы:

1. Задачи обратные по самой постановке – например, задача поиска нефти. Требуется определить недоступные прямому наблюдению места расположения и объемы нефтяных пластов по проявлениям на поверхности земли: изменению гравитационной силы или отклику на электромагнитные возбуждения.

2. Задача определения функциональной структуры модели и значений ее параметров по опытным данным, как вспомогательный этап при решении прямой задачи. Пусть наша цель состоит в том, чтобы рассчитать прямой процесс. При этом часто оптимальная структура модели заранее однозначно не определена, и значения части ее параметров неизвестны, поэтому необходимо предварительно восстановить значения неизвестных параметров по имеющимся экспериментальным данным.

3. Задача синтеза или задача проектирования физической системы. Требуется так построить систему, чтобы иметь заданные характеристики на выходе, например, выбрать последовательность нанесения отражающих слоев в задаче просветленной оптики или покрытия самолета-невидимки.

Иерархия моделей

При моделировании любого процесса существует иерархия моделей, описывающих процесс с различной степенью подробности путем учета различного количества физических факторов. Даже в простейшей задаче распространения тепла можно рассматривать линейное уравнение с постоянными коэффициентами, а можно учитывать зависимость коэффициентов от температуры и конечную скорость распространения тепла. Иерархия особенно актуальна в многофакторных задачах, например, в экологических задачах, задачах предсказания погоды и т.д.

Примером такой задачи является прогноз влажности поля под сельскохозяйственной культурой. Все поле можно рассматривать как единое целое и записать для него соотношения баланса влаги. Можно разбить почву на слои и рассматривать баланс влаги в слоях, в таком случае мы получим модель, представляющую собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Также мы можем учитывать факторы, связанные с растениями и наблюдать, например, изменение интенсивности испарения жидкости с листьев в зависимости от внешней температуры, влажности, интенсивности солнечной радиации и т.д. Получаем очень широкий спектр моделей, в той или иной мере описывающих происходящее.

В этих задачах выбор удачной модели становится не просто важным, а центральным вопросом моделирования. Не надо думать, что наилучшая модель – та, которая учитывает максимально возможное количество факторов. Это не так, поскольку с усложнением модели увеличивается количество неизвестных параметров, которые необходимо определить на основе имеющегося ограниченного опытного материала. Обратная задача определения параметров становится неустойчивой. Попытки прогнозировать процесс с помощью такой модели в условиях отличных от тех, в которых определялись параметры, приводят к ошибочным результатам.

Сложность модели должна быть согласованна с объемом и точностью экспериментальных данных. В случае, когда в системе присутствуют несколько факторов одного порядка, все они должны быть или одновременно учтены в модели, или отброшены.

Универсальность математических моделей.

Сильной стороной моделирования является то, что часто совсем разные естественнонаучные задачи приводят к сходным математическим моделям. Например, задача о диффузии вещества, задача теплопроводности и задача определения уровня грунтовых вод описываются одинаковыми уравнениями. Исследовав одну математическую задачу, часто можно сделать выводы о решении и других физических задач, или если вы работаете с некоторой задачей, то ее решения целесообразно сравнивать с известными решениями других физических задач, приводящих к той же математической модели.

Немецкий химик Лотке рассматривал процесс автокаталитических реакций, примером может служить реакция

$$CaO + 2HF \underset{H_2O}{\longrightarrow} CaF_2 + 2H_2O.$$

Для того, чтобы разорвать связь $H^+ - F^-$, требуется присутствие полярных молекул воды, растягивающих ионы в разные стороны. Таким образом, скорость реакции зависит от количества молекул воды – продукта реакции, такие реакции называются автокаталитическими.

Исследовав реакцию $A \overset{X}{\rightarrow} X \overset{Y}{\rightarrow} Y \downarrow$, Лотке описал ее протекание уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = k_1 AX - k_2 XY \\ \dfrac{dY}{dt} = \overline{k_2} XY - k_3 Y \end{cases}.$$

Он показал, что процесс сопровождается автоколебаниями, то есть концентрации компонентов X и Y периодически изменяются.

Позже исследователь Вольтер, занимающийся экологическими задачами, предположил, что изменение популяции животных в системе «хищник-жертва» описывается сходными уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 xy \\ \dfrac{dy}{dt} = k_3 xy - k_4 y \end{cases},$$

где $x -$ численность потенциальных жертв, а $y -$ хищников. Используя результаты Лотке, Вольтер пришел к выводу, что колебательный процесс изменения численности популяции имеет место и в системе «хищник-жертва».

Из универсальности математических моделей следует универсальность результатов. Если несколько, разных по физической природе процессов описываются сходной математической моделью, то очевидно, что полученные с помощью этой модели результаты применимы ко всем этим процессам.

Внешние задачи для уравнения Гельмгольца

Уравнением Гельмгольца называется уравнение вида

$$\Delta u - \varkappa^2 u = f, \tag{1.1}$$

будем рассматривать его решение в бесконечной области. Эта задача может быть получена из задачи диффузии вещества с его распадом при наличии стационарных источников:

$$u_t = a^2 \Delta u - \beta u - F(M),$$

где $a^2 \Delta u$ описывает перераспределение тепла, $\beta u -$ поглощение, $F(M) -$ источники. В стационарном режиме $u_t = 0$ получим

$$\Delta u - \frac{\beta}{a^2} u = \frac{F}{a^2}.$$

Мы знаем, что для уравнения Гельмгольца имеет место принцип максимума, который гласит, что в замкнутой области решение не может достигать положительного максимума или отрицательного минимума во внутренней точке. На базе принципа максимума легко доказать, что при условии ограниченности на бесконечности решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = f \\ |u| \underset{r\to\infty}{\Longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

будет единственно. (Функция u стремится к нулю равномерно по углу.)

Действительно, пусть u_1 и u_2 – два различных решения задачи (1.2), тогда их разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет однородному уравнению:

$$\begin{cases} \Delta w - \varepsilon^2 w = 0 \\ |w| \underset{r\to\infty}{\Longrightarrow} 0 \end{cases}.$$

Пусть $w \neq 0$ в некоторой точке M. Рассмотрим сферу C_R радиуса R с центром в начале координат, включающую M внутрь себя. Из принципа максимума и условий на бесконечности получаем

$$|w(M)| \leq \max_{M\in C_R} |w(M)| \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда следует, что $w(M) = 0$. Поскольку M выбиралась произвольным образом, то $w \equiv 0$, и решение задачи (1.2) единственно.

Мы рассмотрели случай со знаком «-» в уравнении Гельмгольца. Теперь обратимся к более сложному случаю и рассмотрим уравнение Гельмгольца с положительным коэффициентом:

$$\Delta u + k^2 u = f. \tag{1.3}$$

Уравнение такого типа может получиться при решении задачи колебаний:

$$V_{tt} = a^2 \Delta V + F(M) e^{i\omega t}.$$

Будем искать решение последнего уравнения в виде $V = u(M) e^{i\omega t}$. При подстановке V в уравнение и сокращения на $e^{i\omega t}$ для функции $u(M)$ получим:

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{a^2} u = -\frac{F(M)}{a^2}.$$

Это и есть уравнение вида (1.3), для него принцип максимума не справедлив.

Если мы потребуем выполнение условия $|u| \underset{r\to\infty}{\Longrightarrow} 0$, то уже не получим единственности решения. Пусть функция f – финитная, то есть отличная от нуля только в некоторой конечной области D. С помощью объемных потенциалов можно построить два решения, стремящиеся к нулю при $R \to \infty$. Действительно, фундаментальными решениями однородного уравнения (1.3) будут

$$U(M,P) = \frac{e^{\pm ikR_{MP}}}{R_{MP}}.$$

Следовательно, решениями (1.3) являются функции

$$u_1(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} f(P)dV_P,$$

$$u_2(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} f(P)dV_P.$$

При любом выборе знака в показателе экспоненты решение убывает, когда точка удаляется от области D. Таким образом, условие $|u| \underset{r\to\infty}{\Longrightarrow} 0$ не достаточно для выделения единственного решения.

Рассматривая u как амплитуду в задаче колебаний, для $V = u(M)e^{i\omega t}$ получим:

$$V_1(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{e^{i(kR_{MP}+\omega t)}}{R_{MP}} f(P)dV_P,$$

$$V_2(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{e^{i(\omega t-kR_{MP})}}{R_{MP}} f(P)dV_P.$$

Интеграл V_2 описывает волны, излучаемые источниками f, а V_1 описывает волны, приходящие из бесконечности к источникам, очевидно, что это решение физически неразумно. Если мы ставим задачу колебаний, то мы должны выделить одно из двух решений, хотя с точки зрения уравнения Гельмгольца они эквивалентны. Значит, мы должны научиться ставить задачу так, чтобы выделить единственное решение, для этого рассмотрим условия излучения Зоммерфельда.

Условия излучения Зоммерфельда

Докажем, что условия

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \tag{1.4}$$

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{1.5}$$

выделяют единственность задачи (1.3).

Для начала рассмотрим условия (1.4), (1.5) применительно к фундаментальному решению $U(M,P) = \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}}$. Фиксируем точку M, а точку P будем удалять от нуля, при этом ρ постоянно, а r и $R \equiv R_{MP}$ увеличиваются (рис. 1.1).

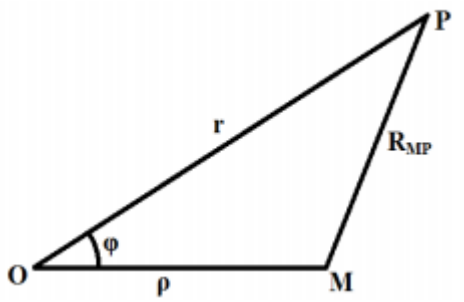

Рис. 1.1. Иллюстрация доказательства условий излучения.

Получим:

$$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varphi} = r\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r}\cos\varphi} \cong r\left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right),$$

мы использовали утверждение о том, что $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2}$ при $x \ll 1$. Для производной получим:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - \rho\cos\varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varphi}} = \frac{1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)\cos\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r}\cos\varphi}} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Наконец, докажем единственность задачи

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f \\ \frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{r}\right). \\ u = O\left(\frac{1}{r}\right) \end{cases} \tag{1.6}$$

Пусть $u_1(M) и\, u_2(M)$ – два разных решения задачи (1.6). Тогда функция $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial r} + ikw = o\left(\frac{1}{r}\right). \\ w = O\left(\frac{1}{r}\right) \end{cases}$$

Фиксируем произвольную точку M и возьмем сферу большого радиуса r так, что M лежит внутри сферы (рис. 1.2).

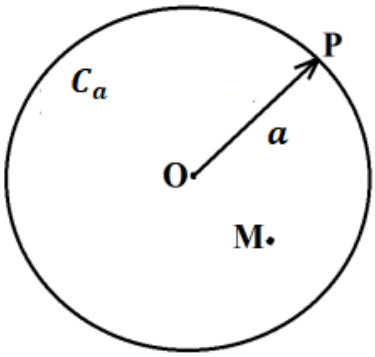

Рис. 1.2. Иллюстрация доказательства условий излучения.

Запишем 3-ю формулу Грина:

$$4\pi w(M) = \int\limits_{C_a} \left(\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \right) w \right) d\sigma_P,$$

учитывая $\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{P\epsilon C_a} = \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{P\epsilon C_a}$, имеем

$$4\pi w(M) = \int\limits_{C_a} \left[\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \left(-ikw + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) - w \frac{\partial}{\partial R_{MP}} \left(\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \right) \frac{\partial R_{MP}}{\partial r} \right] d\sigma_P$$

$$= \int\limits_{C_a} \left[\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \left(-ikw + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) - w \left(-ik \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} - \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}^2} \right) \frac{\partial R_{MP}}{\partial r} \right] d\sigma_P$$

$$= \int\limits_{C_a} \left[O\left(\frac{1}{r}\right) \left(1 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) + O\left(\frac{1}{r}\right) O\left(\frac{1}{r^2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right] d\sigma_P$$

$$= \int\limits_{C_a} o\left(\frac{1}{r^2}\right) d\sigma_P.$$

Площадь сферы C_a с ростом r растет как r^2, поэтому

$$4\pi w(M) = \int\limits_{C_a} o\left(\frac{1}{r^2}\right) d\sigma_P \xrightarrow[a\to\infty]{} 0,$$

следовательно, $w(M) = 0$. В силу произвольного выбора точки M получаем, что $w \equiv 0$, то есть решение задачи (1.6) единственно.

Замечание 1.

Условия (1.4) и (1.5) позволяют отобрать единственное решение уравнения (1.3) в неограниченной области. Условия

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (1.7)$$
$$u = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

также позволяют выделить единственное решение, но уже другое, в этом смысле они равноценны. Поскольку мы пришли к уравнению (1.3), описывая пространственную часть решения уравнения колебаний, то знак перед слагаемым iku в условиях излучения должен быть согласован с выбором знака у временной гармоники. Таким образом, если решение уравнения колебаний ищется в виде $V = u(M)e^{i\omega t}$, то физически разумное, расходящееся от источников решение соответствует условию излучения (1.4) со знаком «+». Если же мы ищем решение уравнения колебаний в виде $V = u(M)e^{-i\omega t}$, то физически разумное решение выделяется условием (1.7) со знаком «-».

Замечание 2.
В двумерном случае условия излучения принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$
$$u = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Принцип предельного поглощения

Условия Зоммерфельда можно использовать, если источник излучения находится в локализованной области. Если же источники или препятствия, от которых происходит отражение, уходят на бесконечность, то требуются другие принципы выделения единственного решения, одним из которых является принцип предельного поглощения.

Рассмотрим задачу колебаний в среде с поглощением. Приходящие из бесконечности волны, чтобы дойти до области начала координат, должны иметь на бесконечности бесконечно большую амплитуду. Для того, чтобы отсечь эту физически нереальную часть решения, достаточно потребовать ограниченность решения на бесконечности. Рассмотрим следующую задачу в неограниченной области, пусть функция V является решением уравнения

$$V_{tt} + \beta V_t = a^2 \Delta V - f(M)e^{i\omega t}.$$

Ищем решение в виде $V = u(M)e^{i\omega t}$, получаем

$$\Delta u + (k^2 - i\gamma)u = F,$$

где $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \gamma = \frac{\beta\omega}{a^2}, F = \frac{f}{a^2}$.

Теперь сформулируем принцип предельного поглощения. Пусть требуется решить уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = f,$$

где k – вещественный коэффициент. Тогда рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta\bar{u} + (k^2 - i\gamma)\bar{u} = f \\ \bar{u} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \end{cases}, \tag{1.8}$$

и в качестве решения исходной задачи будем понимать функцию $u = \lim\limits_{\gamma\to 0}\bar{u}$. Проверим, что в случае, когда f – финитная функция, принцип предельного поглощения выделяет то же решение, что и условия излучения Зоммерфельда.

Пусть $q = q_1 + iq_2$ – комплексное число такое, что $q^2 = k^2 - i\gamma$, тогда уравнение перепишется в виде $\Delta\bar{u} + q^2\bar{u} = f$. Можем записать также $q^2 = (q_1)^2 - (q_2)^2 + 2iq_1q_2$, тогда

$$\begin{cases} k^2 = (q_1)^2 - (q_2)^2 \\ \gamma = -2q_1q_2 \end{cases}.$$

Эта алгебраическая система сводится к биквадратному уравнению, решая его и учитывая, что q_1 и q_2 – вещественные числа, находим:

$$q_1 = \pm\sqrt{\frac{k^2+\sqrt{k^4+\gamma^2}}{2}}, \tag{1.9}$$

$$q_2 = \mp\sqrt{\frac{-k^2+\sqrt{k^4+\gamma^2}}{2}}. \tag{1.10}$$

Запишем решение системы (1.8) с помощью объемных потенциалов:

$$\bar{u}_{1,2} = \frac{1}{4\pi}\int_V f\frac{e^{\pm iqR}}{R}dV. \tag{1.11}$$

Поскольку знак «±» присутствует как в (1.11), так и в уравнениях (1.9) и (1.10), можем зафиксировать знак, считая, что $q_1 > 0$ и $q_2 < 0$. Для выполнения условия $\bar{u} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ необходимо в показателе экспоненты выбрать знак «–». Таким образом, решением задачи (1.8) будет функция

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V f\frac{e^{-q_2R+iq_1R}}{R}dV.$$

Переходя к пределу при $\gamma \to 0$ в (1.9) получаем, что $q_1 \to k, q_2 \to 0$. Следовательно, согласно принципу предельного поглощения, в качестве решения исходного уравнения мы должны выбрать

$$u = \lim_{\gamma\to 0}\bar{u} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V f\frac{e^{-ikR}}{R}dV.$$

Нетрудно проверить, что такое решение удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда.

ЛЕКЦИЯ 2. ПАРЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Парциальные условия излучения

Условия Зоммерфельда или принцип предельного поглощения, нужные для выделения единственного решения, не удобны в использовании при численном расчете задачи с помощью компьютерной программы, поскольку требуется искать решение в бесконечном пространстве и определять его характер при $r \to \infty$. Рассмотрим принцип парциального излучения позволяющий, в определенных случаях, свести задачу к расчету в ограниченной области.

Задача в волноводе.

Пусть в волноводе имеется вставка, в которой диэлектрическая проницаемость и проводимость отличны от остальной части волновода (рис. 2.1).

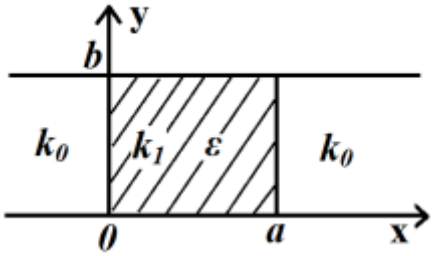

Рис. 2.1. Волновод.

Электромагнитные колебания описываются уравнениями Максвелла:

$$rotH = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j,$$
$$rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t},$$
$$divH = 0,$$
$$divD = 4\pi\rho = 0,$$
$$j = \sigma E,$$
$$D = \varepsilon E,$$
$$B = \mu H.$$

Первое уравнение продифференцируем по времени и разделим на c, на второе уравнение подействуем оператором rot, и результаты сложим. Получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = -c\, rot\, rotE = -c(grad\, divE - \Delta E).$$

Полагая вектор $\vec{E}$ поляризованным, приходим к волновому уравнению с затуханием:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}=\Delta E.$$

Считая проводимость σ стенок волновода бесконечно высокой, а токи конечными, из соотношения $j=\sigma E$ получаем граничное условие:

$$E|_{\sum}=0,$$

где $\sum-$ поверхность волновода.

Решение будем искать в виде $E=ue^{-i\omega t}$. Тогда приходим к следующей задаче для u:

$$\begin{cases}\Delta u+k^2u=0\\ u|_{\sum}=0\end{cases}, \tag{2.1}$$

где $k^2=\bar{k}^2+i\bar{\bar{k}}^2$, $\bar{k}^2=\frac{\omega^2\mu\varepsilon}{c^2}>0, \bar{\bar{k}}^2=\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}>0$. Для простоты будем рассматривать двумерный по пространственным координатам случай, тогда в области вставки имеем $0<x<a$ и $0<y<b$.

Постановка парциальных условий излучения.

Рассмотрим, так называемую, регулярную волну вида $E=\psi(y)e^{i\gamma x-i\omega t}$. Ей соответствует решение $u(M)=\psi(y)e^{i\gamma x}$. У волн, движущихся слева направо, $\mathrm{Re}\,\gamma>0$, у волн, движущихся в противоположном направлении, $\mathrm{Re}\,\gamma<0$. Подставляя амплитуду волны $u(M)$ в систему уравнений (2.1), получим задачу Штурма-Лиувилля для нахождения функции $\psi(y)$:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+(k^2-\gamma^2)\psi=0\\ \psi(0)=\psi(b)=0\end{cases}.$$

Решая ее, находим собственные значения и собственные функции

$$\gamma_n=\pm\sqrt{k^2-\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2},$$

$$\psi_n(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right).$$

Заметим, что γ_n^2 лежит либо в первой, либо во второй четверти комплексной плоскости. Извлекая квадратный корень, получим, что само число γ_n лежит либо в первой, либо в третьей четверти комплексной плоскости. Таким образом, $\gamma_n=\gamma_n^1+i\gamma_n^2$, где $\gamma_n^1\gamma_n^2>0$. Будем выбирать из двух получившихся чисел γ_n такое, чтобы $\gamma_n^1>0$ и $\gamma_n^2>0$.

Пусть слева на вставку падает регулярная волна, пространственная часть которой имеет вид

$$u_0=Ae^{i\gamma_{n_0}x}\psi_{n_0}(y).$$

Требуется поставить задачу для u так, чтобы от вставки расходились отраженные волны, но не было бы других приходящих извне волн, кроме заданной. Такие условия были предложены А.Г. Свешниковым и названы парциальными условиями излучения. Задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \\ \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n u\right)\Big|_{x=0} \psi_n(y)dy = 2Ai\gamma_{n_0}\delta_{nn_0}, \\ \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n u\right)\Big|_{x=a} \psi_n(y)dy = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

где $n \in N, \delta_{nn_0}$ – символ Кронекера.

Два последних соотношения в системе (2.2) и есть парциальные условия излучения. Первое из них отсекает все другие волны, движущиеся в сечении $x = 0$ слева направо, кроме заданной падающей гармоники. Действительно, если из бесконечности приходит еще одна волна с амплитудой $u = A_n\psi_n(y)e^{i\gamma_n x}$, то подынтегральное выражение при $x = 0$ будет равно $2A_n i\gamma_n \psi_n^2(y)$. Следовательно, интеграл будет равен нулю лишь при $A_n = 0$. Аналогично, последнее условие в системе (2.2) оставляет в сечении $x = a$ только волны, уходящие от вставки.

Покажем, взяв для простоты случай $\bar{\bar{k}}^2 > 0$, что решение задачи (2.2) единственно. Действительно, пусть существуют два различных решения u_1 и u_2. Тогда разность этих решений $w = u_1 - u_2$ будет удовлетворять однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 \\ w|_{y=0} = w|_{y=b} = 0 \\ \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\gamma_n w\right)\Big|_{x=0} \psi_n(y)dy = 0 \\ \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\gamma_n w\right)\Big|_{x=a} \psi_n(y)dy = 0 \end{cases}. \tag{2.3}$$

Умножим первое уравнение (2.3) на комплексно-сопряженную к w функцию w^*, проинтегрируем по области D и применим первую формулу Грина:

$$0 = \int_D w^*(\Delta w + k^2 w)dV$$

$$= \left(\int_0^b w^*\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0}\right)dy + \int_0^b w^*\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=a}dy - \int_D |\nabla w|^2 dV\right)$$

$$+ \int_D k^2|w|^2 dV. \tag{2.4}$$

Знак «-» в первом интеграле правой части (2.4) появился при учете направления нормали к поверхности (см. рис. 2.2).

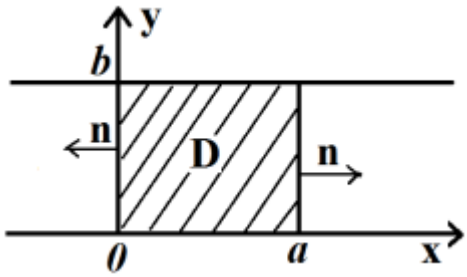

Рис. 2.2. Волновод.

Так как ψ_n – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, они образуют полную замкнутую систему функций. Мы можем разложить по ним функцию w на границе области D:

$$w|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(y),$$

$$w|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \psi_n(y).$$

Поскольку функции ψ_n вещественные для w^* получим:

$$w^*|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \psi_n(y),$$

$$w^*|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \psi_n(y).$$

Используя эти разложения и последние соотношения в (2.3), имеем:

$$-\int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} dy + \int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=a} dy = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} \psi_n dy + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=a} \psi_n dy$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \int_0^b (-iw)|_{x=0} \psi_n dy + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \int_0^b (iw)|_{x=a} \psi_n dy$$

$$= i\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \int_0^b \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_m \psi_m\right) \gamma_n \psi_n dy + i\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \int_0^b \left(\sum_{m=1}^{\infty} D_m \psi_m\right) \gamma_n \psi_n dy$$

$$= i\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n |C_n|^2 + i\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n |D_n|^2,$$

мы учли, что $\int_0^b \psi_m \psi_n dy = \delta_{mn}$, поскольку $\{\psi_n\}$ – ортонормированная система. Используя полученное равенство, преобразуем (2.4) и получаем:

$$\int\limits_D w^*(\Delta w + k^2 w)dV = \int\limits_D (k^2|w|^2 - |\nabla w|^2)dV + i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(|C_n|^2 + |D_n|^2) = 0.$$

Приравниваем к нулю мнимую часть, имеем

$$\int\limits_D \bar{\bar{k}}^2|w|^2 dV + i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(|C_n|^2 + |D_n|^2) = 0.$$

Отсюда следует, что $w \equiv 0$, значит, решение единственно.

Задача Гурса

Задачей Гурса называется задача гиперболического типа, в которой начальные условия заданы на характеристиках. Ранее в курсе ММФ изучалась задача $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с начальными условиями, заданными при $t = 0$. Характеристиками этого уравнения являются прямые $x = \pm at$, поэтому начальные условия задавались не на характеристиках, и, следовательно, рассматривавшаяся задача не являлась задачей Гурса.

Рассмотрим простейшую задачу Гурса:

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x,y), x > 0, y > 0 \\ u(x,0) = \psi(x) \\ u(0,y) = \varphi(y) \\ \psi(0) = \varphi(0) \end{cases}. \tag{2.5}$$

Проинтегрировав дважды исходное уравнение, получим решение этой задачи:

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^y u_{\zeta\eta} d\zeta d\eta = u(x,y) - u(x,0) - u(0,y) + u(0,0),$$

откуда

$$u(x,y) = \psi(x) + \varphi(y) - \psi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta. \tag{2.6}$$

Решение существует и единственно.

Рассмотрим общую задачу Гурса (в области $x > 0, y > 0$):

$$\begin{cases} u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \\ u(x,0) = \psi(x) \\ u(0,y) = \varphi(y) \\ \psi(0) = \varphi(0) \end{cases}. \tag{2.7}$$

Здесь ψ и φ, а также a, b, c и f – непрерывно-дифференцируемые функции. Перепишем уравнение (2.7) в следующем виде:

$$u_{xy} = f(x,y) - \left[a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u\right]. \tag{2.8}$$

Рассматривая правую часть уравнения (2.8) как неоднородность в уравнении (2.5), получаем из (2.6) следующую формулу:

$$u(x,y) = \psi(x) + \varphi(y) - \psi(0) + \int_0^x \int_0^y \left[f(\zeta,\eta) - a(\zeta,\eta)u_\zeta - b(\zeta,\eta)u_\eta - c(\zeta,\eta)u\right]d\zeta d\eta. \tag{2.9}$$

Введем обозначение

$$F(x,y) = \psi(x) + \varphi(y) - \psi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta,$$

и, дифференцируя (2.9) по x и y, приходим к системе интегральных уравнений типа Вольтера:

$$\begin{cases} u(x,y) = -\int_0^x \int_0^y \left[a(\zeta,\eta)u_\zeta + b(\zeta,\eta)u_\eta + c(\zeta,\eta)u\right]d\zeta d\eta + F(x,y) \\ u_x(x,y) = -\int_0^y \left[a(x,\eta)u_\zeta + b(x,\eta)u_\eta + c(x,\eta)u\right]d\eta + F_x(x,y) \\ u_y(x,y) = -\int_0^x \left[a(\zeta,y)u_\zeta + b(\zeta,y)u_\eta + c(\zeta,y)u\right]d\zeta + F_y(x,y) \end{cases}. \tag{2.10}$$

Как известно, уравнение Вольтера

$$y(x) = \int_0^x K(x,s)y(s)ds + f(x)$$

может быть решено методом последовательных приближений. Для этого рассматривают рекуррентную последовательность y_n, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} y_{n+1} = Ay_n + f \\ y_0 \equiv 1 \end{cases},$$

где $Ay_n = \int_0^x K(x,s)y_n(s)ds$. В курсе интегральных уравнений было доказано, что последовательность y_n равномерно сходится к некоторой функции y, которая будет являться решением рассматриваемого интегрального уравнения. Доказательство строится на последовательных оценках для разности $(y_{i+1} - y_i)$.

В нашем случае, вводя вектор-функции $U = \{u, u_x, u_y\}$ и $F = \{F, F_x, F_y\}$, систему уравнений (2.10) можно переписать в векторном виде:

$$U = AU + F, \tag{2.11}$$

где оператор A определяется правой частью (2.10). Аналогично случаю одного уравнения Вольтера, решение (2.11) может быть получено с помощью метода последовательных приближений. Вектор-функция U может быть найдена, как предел сходящейся последовательности U_n, определяемой из рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} U_{n+1} = AU_n + F \\ U_0 \equiv 1 \end{cases}.$$

При этом $U_n \to U$ равномерно, то есть каждая из компонент вектор-функции U_n равномерно сходится к соответствующей компоненте вектор-функции U. Решение (2.10) существует и единственно.

Непосредственным дифференцированием первого из уравнений (2.10) по x и y легко проверить, что решение (2.10) $u(x, y)$ удовлетворяет условиям (2.7). Решение задачи (2.7) существует и единственно. Действительно, мы нигде не предполагали специального вида решения, поэтому для любого решения (2.7) можно провести преобразования, сделанные выше и прийти к системе уравнений (2.10), решение которой единственно.

Математическая задача дифракции

Задача дифракции возникает при изучении рассеяния различного вида волн (сейсмических, звуковых, электромагнитных) на препятствиях.

Пусть в неограниченном пространстве D расположены области D_i, в которых физические характеристики отличны от характеристик в D (рис. 2.3). Пусть под действием источников возникают колебания v, гармонические по времени, а $u -$ пространственная часть функции v: $v = u(M)e^{i\omega t}$. Обозначим функцию u внутри D_i как u_i. На границе $\sum_i$ областей D_i должны сопрягаться значения u и u_i, а также с некоторыми коэффициентами их нормальные производные. Например, пусть рассматриваются электромагнитные колебания, и v – потенциал электрического поля, тогда при переходе через границу области остаются непрерывными потенциал $u|_{\sum_i} = u_i|_{\sum_i}$ и нормальная составляющая индукции электрического поля $\varepsilon E_n = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sum_i}$. Следовательно, выполнено $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sum_i} = \varepsilon_i \frac{\partial u_i}{\partial n}\Big|_{\sum_i}$.

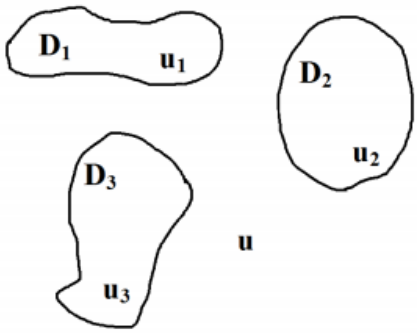

Рис. 2.3. Иллюстрация к задаче дифракции.

Общая система для определения функций u_i состоит из уравнений Гельмгольца, условий на границах областей D_i и условий излучения:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f, \ M \notin D_i \\ \Delta u_i + k^2 u_i = f_i, \ M \in D_i \\ u|_{\Sigma_i} = u_i|_{\Sigma_i} \\ \varepsilon \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma_i} = \varepsilon_i \left.\dfrac{\partial u_i}{\partial n}\right|_{\Sigma_i} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\dfrac{1}{r}\right) \\ u = O\left(\dfrac{1}{r}\right) \end{cases}.$$

Возможна другая постановка задачи: поиск результата рассеяния на препятствиях падающей из бесконечности волны (рис. 2.4).

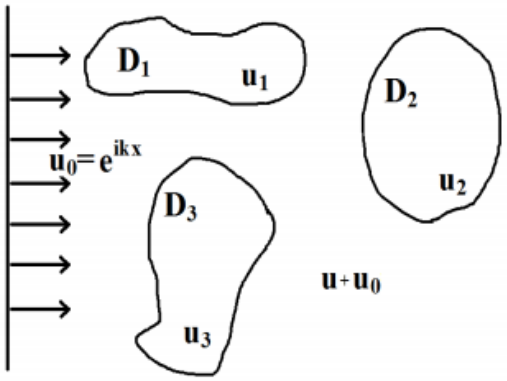

Рис. 2.4. Рассеяние падающей из бесконечности волны на препятствиях.

Обозначим пространственную часть этой волны как $u_0 = e^{ikx}$. Тогда получим задачу:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f, \ M \notin D_i \\ \Delta u_i + k^2 u_i = f_i, \ M \in D_i \\ (u_0 + u)|_{\Sigma_i} = u_i|_{\Sigma_i} \\ \varepsilon \left.\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial n} + \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\Sigma_i} = \varepsilon_i \left.\dfrac{\partial u_i}{\partial n}\right|_{\Sigma_i} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\dfrac{1}{r}\right) \\ u = O\left(\dfrac{1}{r}\right) \end{cases}. \qquad (2.12)$$

Общая задача Коши

Общая задача Коши формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} Lu = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \\ u|_C = \varphi(x,y) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_C = \psi(x,y) \end{cases}.$$

В этой задаче характеристиками уравнения будут прямые $x = const$ и $y = const$. На контур C наложим следующие условия:

1) C – гладкая кривая
2) C – не является характеристикой
3) Любая характеристика пересекает контур C один раз (рис.2.5)

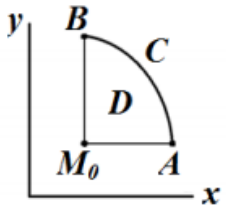

Рис. 2.5. Кривая C для задачи Коши.

Введем сопряженный к оператору L оператор K вида

$$Kv = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv.$$

Нетрудно проверить, что

$$vLu - uKv = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), \tag{2.13}$$

где

$$\begin{cases} P = uv_x - vu_x - 2buv \\ Q = vu_y - uv_y + 2auv \end{cases}.$$

Проинтегрируем уравнение (2.13) по области D, используем формулу Грина и получим:

$$\int\limits_D (vLu - uKv)dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_\Sigma (Qdy + Pdx)$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{M_0}^{A} Pdx + \frac{1}{2}\int\limits_{B}^{M_0} Qdy + \frac{1}{2}\int\limits_{AB} (Qdy + Pdx). \tag{2.14}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЛЕКЦИЯ 3. ОБЩАЯ ЗАДАЧА КОШИ. ФУНКЦИЯ РИМАНА

Общая задача Коши

Продолжим рассуждения из прошлой лекции. Рассмотрим по отдельности интегралы, входящие в правую часть (2.14):

$$\int_{M_0}^{A} Pdx = \int_{M_0}^{A} (uv_x - vu_x - 2buv)dx = \int_{M_0}^{A} (uv_x + uv_x - 2buv)dx + vu|_A^{M_0}$$

$$= 2\int_{M_0}^{A} uRvdx + vu|_A^{M_0},$$

где $Rv = v_x - bv$. Аналогично, вводя оператор $Tv = v_y - av$, преобразуем второй интеграл в правой части (2.14):

$$\int_{B}^{M_0} Qdy = -2\int_{B}^{M_0} uTvdy + vu|_B^{M_0}.$$

Используя (2.14) и полученные выражения, получим:

$$(vu)|_{M_0} = \frac{vu|_A + vu|_B}{2} - \int_{M_0}^{A} uRvdx + \int_{B}^{M_0} uTvdy - \frac{1}{2}\int_{AB} (Qdy + Pdx)$$

$$+ \int_{D} (vLu - uKv)dxdy. \qquad (3.1)$$

На функцию v пока не было наложено никаких условий кроме гладкости, поэтому можно выбрать функцию v так, чтобы максимально упростить правую часть (3.1). Потребуем:

$$\begin{cases} Kv = 0 \\ Rv = v_x - bv = 0 \text{ на } M_0A \\ Tv = v_y - av = 0 \text{ на } BM_0 \\ v = 1 \text{ в точке } M_0 \end{cases}. \qquad (3.2)$$

Функцией Римана $v = v(M, M_0)$ называется функция, являющаяся решением задачи (3.2). Задача (3.2) является задачей с данными на характеристиках – задачей Гурса. Ее решение существует и единственно. Считая функцию Римана известной, подставим ее в выражение (3.1) и получим решение задачи Коши в виде:

$$u(M_0) = \frac{vu|_A + vu|_B}{2} + \int_{D} vfdxdy - \frac{1}{2}\int_{AB} (Qdy + Pdx). \qquad (3.3)$$

Для расчета последнего интеграла в (3.3) по контуру C между точками A и B нужно представить частные производные функции u в следующем виде:

$$\begin{cases} u_x = u_n \cos(x,n) + u_\tau \cos(x,\tau) \\ u_y = u_n \cos(y,n) + u_\tau \cos(y,\tau) \end{cases}.$$

Значения u_n и u_τ определяются условиями на кривой C в задаче (2.12).

Формула (3.3) является обобщением формулы Даламбера. Из формулы (3.3) видно, что значение $u(M_0)$ определяется условиями на участке AB кривой C и значениями f внутри характеристического (криволинейного) треугольника M_0AB.

Обратимся к требованию, наложенному выше на кривую C. Допустим, что характеристика пересекает контур C в двух точках, тогда решение может не существовать (рис. 3.1). В точке M_0 решение, с одной стороны, полностью определено условиями, заданными в криволинейном треугольнике M_0AB; с другой стороны, $M_0 \in C$, поэтому решение в этой точке определено вторым соотношением в (2.12). Если эти значения не совпадают, то решение не существует.

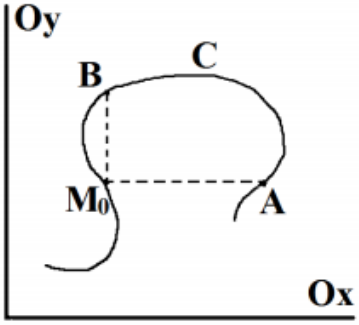

Рис. 3.1. Иллюстрация нарушения условия на контур C.

Функция Римана

Построим функцию Римана для конкретного случая:

$$u_{xy} + Cu = 0,$$

она будет удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} v_{xy} + Cv = 0 \\ v = 1 \text{ на } M_0A \text{ и } BM_0 \end{cases}. \tag{3.4}$$

Ищем решение в виде $v = f\left(\sqrt{(x_0 - x)(y_0 - y)}\right) \equiv f(z)$, тогда

$$v_x = -\frac{f'}{2}\frac{\sqrt{y_0 - y}}{\sqrt{x_0 - x}},$$

$$v_{xy} = \frac{f''}{4} + \frac{1}{4}\frac{f'}{z},$$

подставим производные в (3.4) и получим уравнение Бесселя нулевого порядка:

$$f'' + \frac{1}{z}f' + 4Cf = 0.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Его решением является функция Бесселя нулевого порядка:

$$f(z) = J_0\left(2\sqrt{C}z\right).$$

Окончательно функция Римана примет вид:

$$v(M, M_0) = J_0\left(2\sqrt{C(x_0 - x)(y_0 - y)}\right).$$

Теперь рассмотрим задачу Коши на бесконечной прямой для уравнения колебаний:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + cu = 0 \\ u(z,0) = \varphi(z) \\ u_t(z,0) = \psi(z) \end{cases}, \tag{3.5}$$

где $a, b, c = const$. Будем искать решение в виде $u = Ue^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}$, тогда

$$u_t = \left(U_t - \frac{a}{2}U\right)e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z},$$

$$u_{tt} = \left(U_{tt} - \frac{a}{2}U_t - \frac{a}{2}\left(U_t - \frac{a}{2}U\right)\right)e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z},$$

$$u_z = \left(U_z + \frac{b}{2}U\right)e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z},$$

$$u_{zz} = \left(U_{zz} + \frac{b}{2}U_z + \frac{b}{2}\left(U_z + \frac{b}{2}U\right)\right)e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}.$$

Подставим производные в (3.5), сократим $e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}$ и получим:

$$U_{tt} - U_{zz} + U\left(c - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = 0. \tag{3.6}$$

Сделаем замену

$$x = t + z,$$
$$y = t - z,$$

тогда для производных получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Приведем уравнение (3.6) к каноническому виду:

$$4U_{xy} + gU = 0,$$

где $g = c - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$. Воспользуемся формулой (3.3):

$$U(M_0) = \frac{(vU)|_A + (vU)|_B}{2} - \frac{1}{2}\int_A^B (Qdy + Pdx).$$

Функция Римана в переменных x, y нам известна $v(M, M_0) = J_0\left(\sqrt{g(x_0 - x)(y_0 - y)}\right)$. Перейдем к переменным t, z:

$$(x_0 - x)(y_0 - y) = (t + z - t_0 - z_0)(t - z - t_0 + z_0) = (t - t_0)^2 - (z - z_0)^2.$$

Тогда, учитывая, что

$$P = uv_x - vu_x = u\frac{v_t + v_z}{2} - v\frac{u_t + u_z}{2},$$
$$Q = vu_y - uv_y = v\frac{u_t - u_z}{2} - u\frac{v_t - v_z}{2},$$
$$dx = dy = dz,$$

получим

$$U(M_0) = \frac{\varphi|_A + \varphi|_B}{2} - \frac{1}{2}\int_A^B \left\{\left(u\frac{v_t + v_z}{2} - v\frac{u_t + u_z}{2}\right)dz - \left(v\frac{u_t - u_z}{2} - u\frac{v_t - v_z}{2}\right)dz\right\}$$
$$= \frac{\varphi|_A + \varphi|_B}{2} - \frac{1}{2}\int_A^B (uv_t - vu_z)dz.$$

Функция Римана в переменных t, z принимает вид

$$v = J_0\left(\sqrt{g}\sqrt{(t - t_0)^2 - (z - z_0)^2}\right),$$

ее производная при $t = 0$:

$$v_t|_{t=0} = -J_1\left(\sqrt{g}\sqrt{(t - t_0)^2 - (z - z_0)^2}\right)\frac{\sqrt{g}(-t_0)}{\sqrt{(t - t_0)^2 - (z - z_0)^2}}.$$

Тогда

$$U(t_0, z_0) = \frac{\varphi(z_0 - t_0) + \varphi(z_0 + t_0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{z_0 - t_0}^{z_0 + t_0} \psi(z) J_0\left(\sqrt{g}\sqrt{t_0^2 - (z - z_0)^2}\right)dz$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{z_0 - t_0}^{z_0 + t_0} \varphi(z)\sqrt{g}t_0 \frac{J_1\left(\sqrt{g}\sqrt{t_0^2 - (z - z_0)^2}\right)}{\sqrt{t_0^2 - (z - z_0)^2}}dz. \qquad (3.7)$$

Для того, чтобы получить u, нужно выполнить обратную замену функций.

Рассмотрим частный случай задачи (3.5) при $a = b = c = 0$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} = 0 \\ u(z, 0) = \varphi(z) \\ u_t(z, 0) = \psi(z) \end{cases},$$

получаем формулу Даламбера:

$$U(t_0, z_0) = \frac{\varphi(z_0 - t_0) + \varphi(z_0 + t_0)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{z_0 - t_0}^{z_0 + t_0} \varphi(z)dz.$$

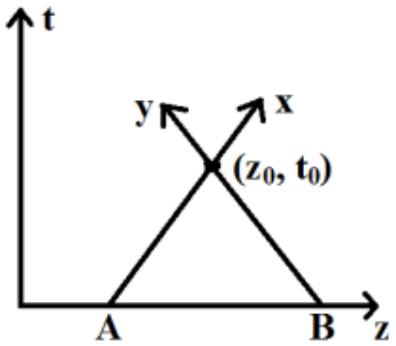

Рис. 3.2. Иллюстрация замены переменных.

Функция влияния точечного импульса

Функция влияния точечного импульса определяется как решение (в классе обобщенных функций) задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + cu = 0 \\ u(z,0) = 0 \\ u_t(z,0) = \delta(z - z_0) \end{cases}.$$

Используя замену $u = Ue^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}$, переходим к задаче для U:

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{zz} + U\left(c - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = 0 \\ U(z,0) = 0 \\ U_t(z,0) = \delta(z - z_0)e^{-\frac{b}{2}z} \end{cases},$$

для решения которой будем использовать выражение (3.7). Получим

$$u(z,t) = \frac{e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}}{2}\int\limits_{z-t}^{z+t} \delta(\zeta - z_0)e^{-\frac{b}{2}\zeta} J_0\left(\sqrt{g}\sqrt{t^2 - (\zeta - z_0)^2}\right)d\zeta,$$

$$u(z,t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}(z - z_0)}}{2} J_0\left(\sqrt{g}\sqrt{t^2 - (z - z_0)^2}\right) & \text{при } |z - z_0| < t \\ 0 & \text{при } |z - z_0| > t \end{cases}.$$

В случае $a = b = c = 0$ получим функцию Хевисайда:

$$u(z,t) = \frac{1}{2}H(t - |z - z_0|) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } |z - z_0| < t \\ 0 & \text{при } |z - z_0| > t \end{cases}.$$

ЛЕКЦИЯ 4. ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ. ДИНАМИКА СОРБЦИИ

Постановка задачи

Сорбция – это процесс поглощения целевого компонента сорбентом. Сорбент – это вещество, способное собирать на своей поверхности некоторый компонент из окружающей среды. Таким веществом, например, является уголь в противогазе, или гранулы в фильтре для очистки питьевой воды. Явление сорбции распространено в природных и технологических процессах. Рассмотрим задачу сорбции в простейшем виде.

Пусть у нас есть труба, заполненная гранулами сорбента (рис. 4.1). По трубе слева направо с постоянной скоростью q движется поток жидкости (или газа), который переносит растворенное в нем изучаемое вещество - целевой компонент. Целевой компонент может селективно осаждаться на поверхности гранул сорбента.

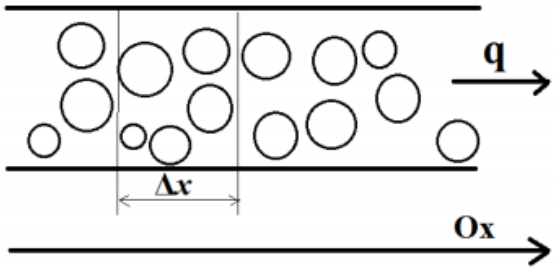

Рис. 4.1. Труба, заполненная гранулами сорбента.

Введем следующие обозначения: $c(x,t)$ – концентрация компонента в межзерновом пространстве, $a(x,t)$ – концентрация компонента, сорбированного на поверхности гранул. Наша задача заключается в том, чтобы найти распределение в разные моменты времени профиля концентрации искомого компонента внутри фильтра, а также, так называемую, выходную кривую концентрации.

Функция $c = \psi(a)$, связывающая концентрацию компонента в фазе сорбента с его концентрацией в фазе раствора при условии их равновесия называется изотермой сорбции. С ростом концентрации компонента количество свободных мест на поверхности сорбента, куда могут садиться его молекулы, убывает. Поэтому кривая $\psi(a)$ выходит на насыщение (рис. 4.2). Поскольку изотерма является взаимно-однозначной функцией, можно рассматривать и обратную изотерму в виде $a = \varphi(c)$.

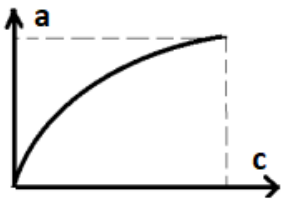

Рис. 4.2. Изотерма сорбции.

Рассмотрим единичный слой трубы Δx и запишем уравнение баланса рассматриваемого компонента за время Δt:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} [a(\eta, t+\Delta t) + c(\eta, t+\Delta t) - a(\eta, t) - c(\eta, t)]d\eta = \int_{t}^{t+\Delta t} q[c(x,\tau) - c(x+\Delta x, \tau)]d\tau. \qquad (4.1)$$

Предположим, что функции $c(x,t)$ и $a(x,t)$ гладкие и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда, поделив равенство (4.1) на $\Delta x \Delta t$ и устремив Δx и Δt к нулю, получим уравнение баланса вещества в дифференциальном виде:

$$a_t + c_t + qc_x = 0. \qquad (4.2)$$

Учтем, что сорбция вещества происходит не мгновенно, а за некоторое время. Скорость изменения концентрации сорбированного вещества пропорциональна разности текущей и равновесной концентраций. Дополняя уравнение (4.2) кинетическим уравнением, уравнением изотермы и задавая начальные и граничные условия, можно поставить простейшую задачу сорбции в области $x > 0, t > 0$:

$$\begin{cases} a_t + c_t + qc_x = 0 \\ a_t = \beta\big(\mathrm{c} - \psi(a)\big) \\ \quad \text{изотерма} \\ a|_{t=0} = c|_{t=0} = 0 \\ \quad c|_{x=0} = c_0 \end{cases}. \qquad (4.3)$$

Для того, чтобы полностью поставить задачу, нам осталось задать изотерму. Чаще всего используют изотерму Ленгмюра:

$$a = \varphi(c) = \frac{k_1 c}{k + c},$$

или обратную функцию:

$$c = \psi(a) = \frac{ka}{k_1 - a}.$$

В случае низких концентраций используют прямую и обратную изотермы Генри:

$$a = Гc,$$

$$c = \frac{a}{\Gamma}.$$

Выражение $\tau = t - \frac{x}{q}$ называется локальным временем. Значение τ «запаздывает» относительно t на время переноса вещества от границы до рассматриваемой точки x. Перейдем к безразмерным переменным:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{x}{q}\right),$$

$$\zeta = \beta\frac{x}{q},$$

где $\beta -$ кинетический коэффициент. Обратная замена выглядит следующим образом:

$$t = \frac{\tau + \zeta}{\beta},$$

$$x = \frac{\zeta q}{\beta}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial a}{\partial t},$$

$$\frac{\partial c}{\partial \zeta} = \frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \zeta} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{q}{\beta}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Складывая эти два выражения, получим исходное уравнение (4.2) с точностью до коэффициента $\frac{1}{\beta}$. В новых переменных τ, ζ система (4.3) примет следующий вид, при этом область $x > 0, t > 0$ переходит в область $\zeta > 0, \tau > -\zeta$:

$$\begin{cases} a_\tau + c_\zeta = 0 \\ a_\tau = \mathrm{c} - \psi(a) \\ \text{изотерма} \\ a|_{\tau+\zeta=0} = c|_{\tau+\zeta=0} = 0 \\ c|_{\zeta=0} = c_0 \end{cases}. \qquad (4.4)$$

Продифференцируем второе уравнение системы (4.4) по ζ и сложим результат с первым уравнением, получим:

$$\begin{cases} a_{\tau\zeta} + a_\tau + \psi'(a)a_\zeta = 0 \\ a|_{\tau+\zeta=0} = 0, a_\tau|_{\tau+\zeta=0} = [\mathrm{c} - \psi(a)]|_{\tau+\zeta=0} = 0 \end{cases}. \qquad (4.5)$$

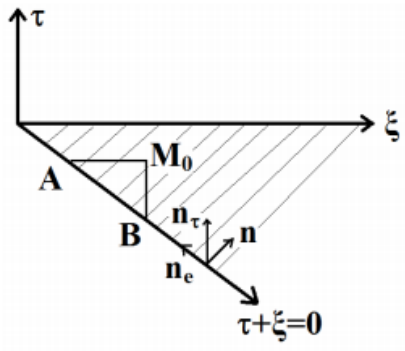

Рис. 4.3. Область решения задачи (4.4).

Обозначим область при $-\zeta < \tau < 0 -$ I, при $\tau > 0 -$ II. На граничной линии $\tau + \zeta = 0$ области I выполнено

$$a|_{\tau+\zeta=0} = c|_{\tau+\zeta=0} = 0,$$

$$a_\tau|_{\tau+\zeta=0} = 0,$$

на границе $\zeta = 0$ области II имеем задачу

$$\begin{cases} a_\tau = c_0 - \psi(a) \\ a|_{\tau=0} = 0 \end{cases}.$$

Вернемся к задаче (4.5), мы получили гиперболическое уравнение, решением которого является обобщенная формула Даламбера. Для начала найдем решение в некоторой внутренней точке M_0 области I. При любой фиксированной функции a, можно рассматривать $\psi'(a)$ как заданный переменный коэффициент k. Далее на прямой $\tau + \zeta = 0$ выполнено:

$$a_\tau = a_n \cos\frac{\pi}{4} + a_l \cos\frac{\pi}{4} = \frac{a_n + a_l}{\sqrt{2}},$$

где $l -$ вектор вдоль прямой, а $n -$ нормаль к ней. Отсюда и из граничных условий (4.5) получаем:

$$a_n|_{\tau+\zeta=0} = 0.$$

В результате, в области I имеем задачу:

$$\begin{cases} a_{\zeta\tau} + k a_\zeta + a_\tau = 0 \\ a|_{\tau+\zeta=0} = a_n|_{\tau+\zeta=0} = 0 \end{cases}.$$

По обобщенной формуле Даламбера значение a в произвольной точке M_0 определяется заданными условиями на отрезке AB – основании характеристического треугольника M_0AB, отсюда следует, что всюду в области I $a = 0$, и по непрерывности $a = 0$ также на прямой $\tau = 0$.

Теперь нужно решить задачу в области II, при этом на границе $\tau = 0$ наша функция a обращается в ноль, а на границе $\zeta = 0$ имеем задачу:

$$\begin{cases} a_\tau = c_0 - \psi(a) \\ a|_{\tau=0} = 0 \end{cases}, \tag{4.6}$$

обозначим ее решение за $Q(\tau)$. Тогда задача в области II принимает вид

$$\begin{cases} a_{\tau\zeta} + a_\tau + \psi'(a)a_\zeta = 0 \\ a|_{\tau=0} = 0, a|_{\zeta=0} = Q(\tau) \end{cases}. \tag{4.7}$$

Рассмотрим два случая: линейный – задача с изотермой Генри, и нелинейный – задача с изотермой Ленгмюра.

Линейный случай.

Пусть $\varphi(c) = \Gamma c$, соответственно, $\psi(a) = \frac{a}{\Gamma}$. Для этого случая решаем задачу (4.6) и подставляем найденную функцию $Q(\tau)$ в (4.7). Получаем задачу Гурса:

$$\begin{cases} a_{\tau\zeta} + a_\tau + \dfrac{a_\zeta}{\Gamma} = 0 \\ a|_{\tau=0} = 0, a|_{\zeta=0} = \Gamma c_0\left(1 - e^{-\tau/\Gamma}\right) \end{cases}.$$

Для простоты записи введем новую переменную $\theta = \tau/\Gamma$ и выберем без ограничения общности значение c_0 таким, чтобы $\Gamma c_0 = 1$. Тогда в области $\theta > 0, \tau > 0$ имеем:

$$\begin{cases} a_{\theta\zeta} + a_\theta + a_\zeta = 0 \\ a|_{\theta=0} = 0, a|_{\zeta=0} = 1 - e^{-\theta} \end{cases}. \tag{4.8}$$

Сделаем замену функции $a = ze^{-(\theta+\zeta)}$. Вычислив производные z по ζ и θ и подставив их в (4.8), получаем:

$$\begin{cases} z_{\theta\zeta} - z = 0 \\ z|_{\theta=0} = 0, z|_{\zeta=0} = e^\theta - 1 \end{cases}. \tag{4.9}$$

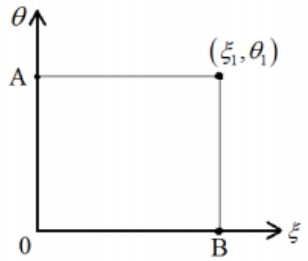

Рис. 4.4. Область II решения задачи (4.9) в переменных θ, ζ.

Мы уже находили функцию Римана для задачи

$$\begin{cases} w_{xy} + cw = 0 \\ \text{гр. условия} \end{cases},$$

она принимает вид $v(x, x_0, y, y_0) = J_0\left(2\sqrt{c}\sqrt{(x - x_0)(y - y_0)}\right)$. В нашем случае $c = -1$, поскольку функция Бесселя от мнимого аргумента есть функция Инфельда, получаем

$$v(\zeta, \theta, \zeta_0, \theta_0) = I_0\left(2\sqrt{(\zeta - \zeta_0)(\theta - \theta_0)}\right),$$

где I_0 – функция Инфельда нулевого порядка. Решение находим по обобщенной формуле Даламбера:

$$z(\zeta_0, \theta_0) = \frac{(vz)|_A + (vz)|_B}{2} - \frac{1}{2}\int_A^B \tilde{P}d\zeta + \tilde{Q}d\theta + \iint_D vf d\theta d\zeta,$$

где $\tilde{P} = zv_\zeta - vz_\zeta$, $\tilde{Q} = vz_\theta - zv_\theta$. В нашем случае $f = 0$, тогда

$$\begin{aligned}
z(\zeta_0, \theta_0) &= \frac{(vz)|_A + (vz)|_B}{2} - \frac{1}{2}\int_A^B \left[\left(zv_\zeta - vz_\zeta\right)d\zeta + (vz_\theta - zv_\theta)d\theta\right] \\
&= \frac{(vz)|_{\zeta=0,\theta=\theta_0}}{2} + \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{0} (zv_\theta - vz_\theta)|_{\zeta=0} d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\zeta_0} \left(zv_\zeta - vz_\zeta\right)\Big|_{\theta=0} d\zeta \\
&= \frac{(vz)|_{\zeta=0,\theta=\theta_0}}{2} + \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{0} (zv_\theta - vz_\theta)|_{\zeta=0} d\theta \\
&= \frac{e^{\theta_0} - 1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} (zv_\theta - vz_\theta)|_{\zeta=0} d\theta \\
&= \frac{e^{\theta_0} - 1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} (zv_\theta)|_{\zeta=0} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} (vz_\theta)|_{\zeta=0} d\theta \\
&= \frac{e^{\theta_0} - 1}{2} + \left[-\frac{1}{2} zv|_{\zeta=0,\theta=0}^{\zeta=0,\theta=\theta_0} + \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} (vz_\theta)|_{\zeta=0} d\theta\right] + \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} (vz_\theta)|_{\zeta=0} d\theta \\
&= \frac{e^{\theta_0} - 1}{2} - \frac{e^{\theta_0} - 1}{2} + \int_0^{\theta_0} (vz_\theta)|_{\zeta=0} d\theta = \int_0^{\theta_0} e^\theta I_0\left(2\sqrt{\zeta_0(\theta_0 - \theta)}\right) d\theta.
\end{aligned}$$

В итоге решение задачи (4.7) выражается формулой:

$$a(\zeta_0,\theta_0) = z(\zeta_0,\theta_0)e^{-(\theta_0+\zeta_0)} = e^{-\zeta_0}\int_0^{\theta_0} e^{-(\theta_0-\theta)} I_0\left(2\sqrt{\zeta_0(\theta_0-\theta)}\right)d\theta$$

$$= e^{-\zeta_0}\int_0^{\theta_0} e^{-\theta} I_0\left(2\sqrt{\zeta_0\theta}\right)d\theta.$$

На рис. 4.5 изображен вид решения для нескольких моментов времени θ. Значение концентрации целевого компонента в фазе сорбента на границе, то есть на входе в сорбционную трубу, со временем возрастает до единицы, фронт распространения компонента продвигается вдоль трубы, расплываясь.

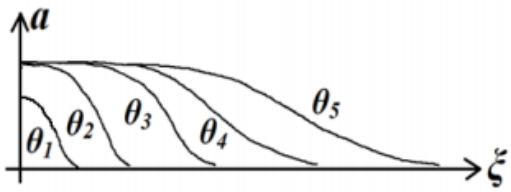

Рис. 4.5. Профиль концентрации $a(\zeta,\theta)$ целевого компонента.

Нелинейный случай.

Рассмотрим случай изотермы Ленгмюра $a = \varphi(c) = \frac{k_1 c}{k+c}$. Обратная зависимость равновесного значения c от a имеет вид: $c = \psi(a) = \frac{ka}{k_1-a}$. Коэффициент k_1 – это максимальное количество компонента в сорбированной фазе, соответствующее $c \to \infty$.

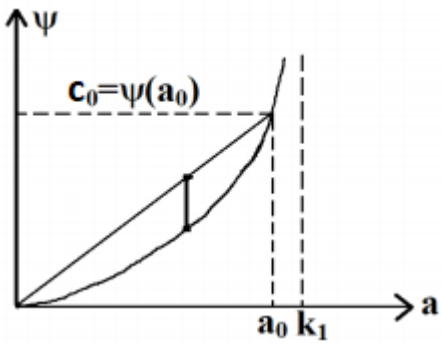

Рис. 4.6. Обратная изотерма Ленгмюра.

Найдем производные функции $\psi(a)$:

$$\psi'(a) = \frac{kk_1}{(k_1-a)^2} > 0,$$

$$\psi''(a) = \frac{2kk_1}{(k_1 - a)^3} > 0.$$

Рассмотрим качественный характер решения уравнений задачи (4.4) в нелинейном случае. Пусть профиль a как функции ζ имеет вид плавно убывающей функции (рис. 4.7), тогда $c \cong \psi(a)$ и $c_\zeta = \psi'(a)a_\zeta$. Из первого уравнения системы (4.4) получаем квазилинейное уравнение переноса:

$$a_\tau + \psi'(a)a_\zeta = 0.$$

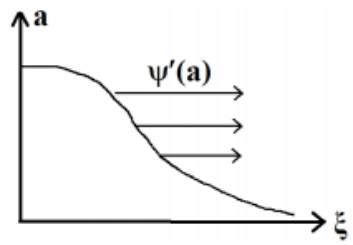

Рис. 4.7. Профиль функции $a(\zeta)$.

Как известно из курса дифференциальных уравнений, в этом уравнении коэффициент $\psi'(a)$ имеет смысл скорости переноса со временем значения a вдоль оси ζ. Поскольку $\psi'(a)$ является растущей функцией a ($\psi''(a) > 0$), то большие значения a переносятся быстрее, и фронт становится более крутым. Однако из уравнения кинетики следует, что $a_\tau = -c_\zeta = c - \psi(a) < c_{max}$, следовательно, крутизна фронта ограничена. Решение выходит на режим бегущей волны $a = f(\zeta - \mu\tau)$, когда образуется некоторый установившийся профиль, переносимый вдоль оси ζ. Численное моделирование процесса, подтверждает приведенные качественные соображения.

Определим вид функции f. Для этого рассмотрим решение в форме бегущей волны $a = f(\zeta - \mu\tau)$ следующей задачи на бесконечном участке $-\infty < \zeta < \infty$:

$$\begin{cases} a_{\tau\zeta} + a_\tau + \psi'(a)a_\zeta = 0 \\ a|_{\zeta=-\infty} = a_0, a|_{\zeta=\infty} = 0 \end{cases}.$$

Подставляя искомый вид решения в систему, получаем:

$$\begin{cases} -\mu f'' - \mu f' + \psi'(f)f' = 0 \\ f(-\infty) = a_0, f(\infty) = f'(\pm\infty) = 0 \end{cases}. \tag{4.10}$$

Интегрируя уравнение (10) от $-\infty$ до ∞, имеем: $\mu a_0 = \psi(a_0)$, откуда находим скорость переноса $\mu = \frac{\psi(a_0)}{a_0}$. Интегрируя уравнение (4.10) от α до ∞, получаем:

$$\mu f'(\alpha) + \mu f(\alpha) - \psi\big(f(\alpha)\big) = 0.$$

Используя найденное значение μ, имеем:

$$\frac{\psi(a_0)}{a_0}\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \psi(f) - \frac{\psi(a_0)}{a_0} f.$$

Это уравнение определяет профиль бегущей волны $f(\alpha)$. Значение правой части уравнения равно длине вертикального отрезка между прямой и кривой, соединяющей точки 0 и $\left(a_0, \psi(a_0)\right)$. Производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ отрицательна, мала при $a \cong 0$ и $a \cong a_0$, возрастает по модулю в средней части интервала значений a.

Сравнивая результаты, полученные для линейного и нелинейного случаев, видим, что в линейном случае фронт волны концентрации представляет собой продвигающийся по сорбционной трубе расплывающийся профиль; в нелинейном случае образуется бегущая волна постоянного профиля. Образование подобных структур имеет место во многих нелинейных задачах.

ЛЕКЦИЯ 5. МЕТОД ПОДОБИЯ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Метод подобия

В некоторых физических задачах уравнения и дополнительные условия сохраняются, если переменные x_i изменить в некоторой пропорции. В этом случае целесообразно применять метод подобия, позволяющий уменьшать число переменных, взяв в качестве новых переменных комбинацию старых. Рассмотрим этот прием на примере известной нам одномерной задачи теплопроводности в бесконечной области $-\infty < x < \infty$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \end{cases}. \tag{5.1}$$

Заметим, что при умножении переменной t на k^2 и переменной x на k все уравнения сохраняются. Следовательно можем искать решение в виде функции $u = f(z)$ переменной $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$. Тогда первое уравнение системы (5.1) будет выглядеть следующим образом:

$$-f'\frac{z}{2t} = a^2 f''\frac{1}{4t},$$

а вся система примет вид:

$$\begin{cases} a^2 f'' = -2zf' \\ f(-\infty) = 0 \\ f(\infty) = 1 \end{cases}. \tag{5.2}$$

Задача (5.2) легко решается:

$$f' = Ce^{-z^2/a^2},$$

$$f(z) = C\left\{\int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/a^2}dx + C_1\right\} = C\left\{\int_{-\infty}^{z/a} e^{-x^2}dx + C_1\right\} = A\Phi\left(\frac{z}{a}\right) + B.$$

Константы A и B определяем подстановкой решения в граничные условия:

$$f(\infty) = A + B = 1,$$

$$f(-\infty) = B - A = 0,$$

получаем $A = B = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1 + \Phi(z)),$$

и, следовательно,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right).$$

Задача Стефана

Задачей Стефана называется задача о распространении тепла в двух соприкасающихся областях, граница между которыми может перемещаться вследствие фазового перехода. Рассмотрим эту задачу на примере процесса оттаивания мерзлой земли. Пусть везде в почве, ниже дневной поверхности, начальная температура отрицательна и равна $T_- < 0$, а на поверхности, начиная с момента времени $t = 0$, температура положительна, постоянна и равна $T_+ > 0$. С течением времени земля прогревается вглубь и при достижении нулевой температуры – оттаивает. Требуется определить температурный профиль почвы и скорость движения границы, отмеченной на рис. 5.1 координатой ξ, на которой температура равна нулю и происходит переход воды из фазы льда в фазу жидкости.

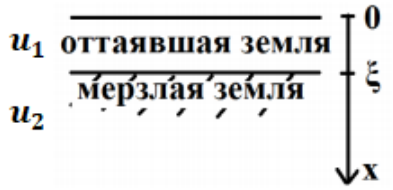

Рис. 5.1. Задача об оттаивании мерзлой земли.

Физические коэффициенты у замерзшей и оттаявшей земли различны, поэтому для описания теплопереноса в этих зонах будем рассматривать отдельно температуру u_1 для $x < \xi$ и u_2 для $x > \xi$. Учтем, что фазовый переход требует затрат тепла. Пусть λ – скрытая теплота плавления, тогда процесс можно описать следующей моделью:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, 0 < x < \xi \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \xi < x < \infty \\ u_1|_{x=\xi} = u_2|_{x=\xi} = 0 \\ u_1|_{x=0} = T_+ > 0,\ u_2|_{t=0} = T_- < 0 \\ \left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi} = -\lambda \frac{\partial \xi}{\partial t}, \xi|_{t=0} = 0 \end{cases}. \tag{5.3}$$

Исходя из соображений подобия, будем искать решение в виде $u_i = f_i(z)$, где $i = 1{,}2$, а $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$. Обозначим значение z, соответствующее границе фазового перехода $x = \xi$, как α, тогда $\xi = 2\alpha\sqrt{t}$. Подставляя такой вид решения в (5.3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1^2 f_1'' = -2z f_1', 0 < z < \alpha \\ a_2^2 f_2'' = -2z f_2', \alpha < z < \infty \\ f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0 \\ f_1(0) = T_+ > 0, f_2(\infty) = T_- < 0 \\ \left(k_1 f_1' - k_2 f_2'\right)\Big|_{z=\alpha} = -2\lambda\alpha \end{cases}.$$

Решение последней задачи будем искать в виде $f_i(z) = A_i \Phi\left(\frac{z}{a_i}\right) + B_i$. Условия на фазовом переходе дадут уравнения

$$A_i \Phi\left(\frac{\alpha}{a_i}\right) + B_i = 0. \tag{5.4}$$

Из соотношения для фазового перехода получим

$$-\frac{k_1 A_1}{2\sqrt{t} a_1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2/a_1} + \frac{k_2 A_2}{2\sqrt{t} a_2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2/a_2} = \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{t}}. \tag{5.5}$$

Подставим выражения для $f_i(z)$ в граничные условия и получим

$$B_1 = T_+,$$

$$A_2 + B_2 = T_-.$$

Константы A_1 и A_2 находим из (5.4) как

$$A_1 = -\frac{T_+}{\Phi\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)},$$

$$A_2 = \frac{T_-}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{a_2}\right)},$$

подставляя полученные значения в (5.5), получаем алгебраическое уравнение для определения параметра α. Заметим, что с ростом α числитель первого слагаемого убывает, а знаменатель растет. Таким образом, первое слагаемое левой части уравнения (5.5) монотонно убывает с ростом α. Нетрудно проверить, что и второе слагаемое также монотонно убывает (оно является отрицательным и монотонно растет по модулю). Правая часть уравнения (5.5) является линейно возрастающей функцией. Таким образом, уравнение (5.5) имеет единственное решение (рис. 5.2).

По найденному значению α_0 получаем закон движения фазовой границы $\xi = 2\alpha_0\sqrt{t}$. Зная α, находим коэффициенты A_1, A_2 и функции f_1 и f_2 – решение исходной задачи.

Рис. 5.2. Графическая интерпретация уравнения (5.5).

Нелинейные процессы переноса

Ранее мы рассматривали линейные задачи, для которых существуют общие методы решения. Для нелинейных задач ситуация гораздо сложнее, поскольку в этом случае не действует принцип суперпозиции, и нельзя искать решение в виде разложения по фундаментальной системе решений, использовать метод Фурье и т.д. Нелинейное уравнение в аналитическом виде решается лишь в отдельных частных случаях, поэтому обычно приходится решать задачу численно. Нелинейные процессы имеют некоторые характерные черты: формирование крутых фронтов решений, возникновение разрывов, образование локальных структур и другие особенности.

Начнем изучение нелинейных процессов с рассмотрения линейного и квазилинейного уравнений переноса. Пусть у нас имеется труба, по которой вдоль оси x идет поток воздуха концентрации u со скоростью q, которая может зависеть от координат x, t. Рассмотрим баланс вещества в слое от x до $x + \Delta x$ за время от t до $t + \Delta t$:

$$\int_x^{x+\Delta x} [u(\xi, t+\Delta t) - u(\xi, t)]d\xi = \int_t^{t+\Delta t} [Q(x,\tau) - Q(x+\Delta x,\tau)]d\tau + \int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t} f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где $Q = qu -$ поток вещества.

Делим последнее уравнение на $\Delta x \Delta t$. Считая u и q непрерывно дифференцируемыми функциями своих переменных, переходим к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$. Получим дифференциальный аналог уравнения баланса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = f.$$

Если $q = const$, то, раскрывая производную $\frac{\partial Q}{\partial x}$, приходим к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + q\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

если $q = q(u, x)$, то получаем квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(q + u\frac{\partial q}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

коэффициент при производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ зависит от u.

Линейное уравнение

Стоит кратко напомнить некоторые результаты из курса дифференциальных уравнений, относящиеся к линейным задачам переноса. Рассмотрим в области D переменных x, y, t следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y,t)u = f(x,y,t) \\ u|_{\Sigma} = \varphi(x,y,t) \end{cases}, \qquad (5.6)$$

где a, b, c и $f -$ гладкие функции. Для решения этой задачи составляются уравнения характеристик:

$$dt = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}. \qquad (5.7)$$

Решения (5.7) называются характеристиками. Если рассмотреть характеристику, проходящую через точку (x_0, y_0, t_0), то она удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,y,t), x|_{t=t_0} = x_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x,y,t), y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}.$$

Система имеет единственное решение, то есть через любую точку проходит только одна характеристика. Таким образом, характеристики заполняют собой всю область D, нигде не пересекаясь.

Фиксируем некоторую характеристику γ и посчитаем производную u по t вдоль нее. Используя (5.7), получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Тогда уравнение задачи (5.6) примет вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\gamma} + cu = f.$$

Каждой характеристике можно приписать два параметра, определяющих ее выбор в трехмерном пространстве координат. В качестве таких параметров можно выбрать, например, значения x_0, y_0. Кроме того, как мы знаем, уравнения (5.7) имеют два первых интеграла, это такие функции $\gamma_{1,2}(x,y,t)$, которые сохраняют постоянные значения на решениях (5.7). Для точек (x,y,t), лежащих на фиксированной характеристике имеем $\gamma_1 = C_1$ и $\gamma_2 = C_2$. Между точками (x,y,t) и (C_1, C_2, t) имеется однозначное соответствие, поэтому последние можно выбрать в качестве новых координат.

В новой системе координат задача (5.6) примет вид

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\gamma} + cu = f \\ u(M^*) = \varphi(M^*) \end{cases}, \tag{5.8}$$

где M^* – точка пересечения выбранной характеристики с поверхностью Σ. Таким образом, задача свелась к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Решаем эту задачу, после этого делаем обратный переход к старым координатам и получаем решение задачи (5.6).

Замечание 1.

В случае, когда каждая характеристика в D пересекает поверхность Σ, причем только один раз, решение (5.8), а, следовательно, и (5.6) существует и единственно. Если какая-то характеристика не пересекает Σ, то решение на ней не единственно. Если

характеристика пересекает Σ более одного раза, то решение (5.6) может не существовать.

Замечание 2.

Если $c = f = 0$, то уравнение задачи (5.6), эквивалентно уравнению

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\gamma} = 0,$$

то есть представляет собой закон сохранения u вдоль характеристики.

Замечание 3.

В уравнении (5.6) присутствуют производные u по независимым переменным, тем самым, под решением (5.6) понимается гладкая функция. После перехода к (5.8) требование непрерывности решения при переходе от одной характеристики к другой снимается. Если функция φ имеет разрывы, то можно рассматривать решения (5.8) как обобщенные решения (5.6), имеющие разрывы вдоль характеристик, проходящих через точки разрыва функции φ.

Квазилинейное уравнение

Обратимся к задаче Коши для случая квазилинейного уравнения. Для простоты рассмотрим случай двух независимых переменных. Кривая, на которой заданы дополнительные условия, определяется соотношением $\Phi(x,t) = 0$. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = R(x,t,u) \\ u|_{\Phi(x,t)=0} = \varphi(x,t) \end{cases}. \tag{5.9}$$

Будем искать решение этой задачи, исходя из неявного соотношения

$$v(x,t,u) = 0, \tag{5.10}$$

где $v(x,t,u)$ – некоторая подлежащая определению функция. При этом мы предполагаем, что $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$. Из (5.10) можно определить частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t}\Big/\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial v}{\partial u}$$

Используя (5.9), получим задачу, которой удовлетворяет функция v:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + a(x,t,u)\frac{\partial v}{\partial x} + R(x,t,u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0 \\ v\big(x,t,\varphi(x,t)\big)\big|_{\Phi(x,t)=0} = 0 \end{cases}. \tag{5.11}$$

Уравнение задачи (5.11) является линейным относительно функции $v(x,t,u)$, поскольку коэффициенты $a(x,t,u)$ и $R(x,t,u)$ от нее не зависят. Соответствующие уравнения характеристик имеют вид:

$$dt = \frac{dx}{a(x,t,u)} = \frac{du}{R(x,t,u)}. \tag{5.12}$$

В рассматриваемом случае характеристики являются кривыми в пространстве (x,t,u), включающем в качестве координат не только независимые переменные x и t, но и u. Этим характеристики квазилинейного уравнения отличаются от линейного случая, где они были кривыми в пространстве только независимых переменных. Из (5.12) имеем два первых интеграла: $\psi_1(x,t,u)$ и $\psi_2(x,t,u)$.

Уравнение (5.11) представляет собой закон сохранения v вдоль характеристик. На кривой начальных условий v было равно нулю, рассмотрим соответствующие характеристики, они образуют некоторую поверхность Г в пространстве (x,t,u), любая точка которой является решением. На поверхности Г лежит кривая σ, заданная вторым соотношением в (5.11). На σ точки (x,t,u) связаны условиями: $\Phi(x,t) = 0$ и $u = \varphi(x,t)$.

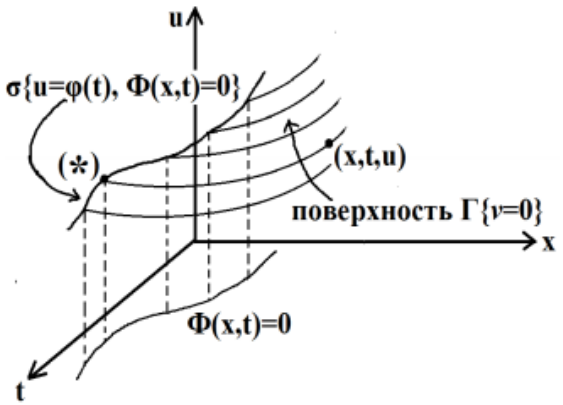

Рис. 5.3. Поверхность $v = 0$ в пространстве (x,t,u).

Выберем произвольную точку (x,t,u) на поверхности Г и проведем через эту точку характеристику до пересечения с кривой σ. Обозначим точку пересечения (x^*,t^*,u^*), значение – $u^* = \varphi(x^*,t^*)$. Поскольку первые интегралы сохраняют свои значения на характеристиках, получаем:

$$\begin{cases} \psi_1(x,t,u) = \psi_1\big(x^*, t^*, \varphi(x^*, t^*)\big) \\ \psi_2(x,t,u) = \psi_2\big(x^*, t^*, \varphi(x^*, t^*)\big) \\ \Phi(x^*, t^*) = 0 \end{cases}.$$

Исключая x^* и t^* из этой системы, получаем алгебраическое соотношение, связывающее u, x и t между собой, то есть решение задачи (5.9).

Метод характеристик

Рассмотрим задачу в области $-\infty < x < \infty, t > 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}. \tag{5.13}$$

Запишем уравнение характеристик для квазилинейного уравнения (5.13):

$$dt = \frac{dx}{a} = \frac{du}{0},$$

его можно переписать также следующим образом:

$$\begin{cases} u = const \\ \dfrac{dx}{dt} = a(x,t,u) \end{cases}.$$

Выберем некоторую точку x^*, ей соответствует $u(x^*, 0) = \varphi(x^*)$. Учитывая сказанное, получаем, что u постоянно и равно $\varphi(x^*)$ на кривой:

$$\frac{dx}{dt} = a\big(x, t, \varphi(x^*)\big), x|_{t=0} = \varphi(x^*). \tag{5.14}$$

Метод характеристик заключается в том, что для построения решения задачи (5.13) при некотором $t_1 > 0$ нужно через различные точки x^*, лежащие на прямой $t = 0$ провести кривые, удовлетворяющие (5.14), до пересечения с прямой $t = t_1$; в точках пересечения значения $u(x, t_1) = \varphi(x^*)$.

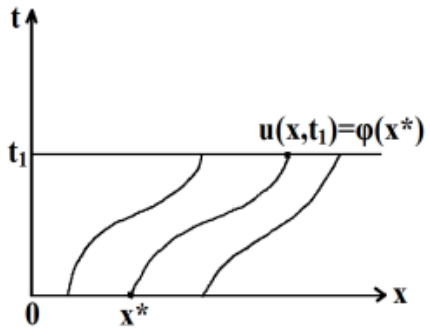

Рис. 5.4. Метод характеристик.

Разрывы решения

Давайте еще упростим нашу задачу (в области $-\infty < x < \infty, t > 0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}, \tag{5.15}$$

где $\varphi(x)$ – монотонно убывающая функция x, а $a(u)$ – монотонно возрастающая функция u, то есть $\varphi'(x) < 0$ и $a'(u) > 0$.

Согласно (5.14) проекции характеристик квазилинейного уравнения (5.15) имеют наклон:

$$\frac{dx}{dt} = a\big(\varphi(x^*)\big),$$

где x^* – координата пересечения проекции с осью $t = 0$. При указанном характере изменения $\varphi(x)$ и $a(u)$ значение $\frac{dx}{dt}$ тем меньше, чем больше x^*. Это означает, что при некотором $\bar{t}$ наступит пересечение проекций характеристик (рис. 5.5).

Пусть в точке $(\bar{x}, \bar{t})$ пересеклись проекции характеристик, на которых $u = u_1 = \varphi(x_1^*)$ и $u = u_2 = \varphi(x_2^*)$. Тогда, согласно (5.10), имеем $v(\bar{x}, \bar{t}, u_1) = v(\bar{x}, \bar{t}, u_2) = 0$, то есть при некотором $u_3 \in (u_1, u_2)$ будет нарушено условие $\frac{\partial v}{\partial u}(\bar{x}, \bar{t}, u_3) \neq 0$, используя которое строился метод решения задачи (5.9).

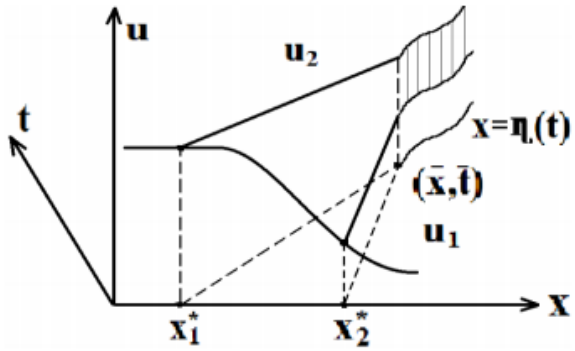

Рис. 5.5. Разрывы решения.

В случае разрыва рассматривают, так называемое, обобщенное решение. Скорость разрыва определяется с помощью условия Гюгонио, которое базируется на законе сохранения вещества. Пусть разрыв, на одном берегу которого $u = u_1$, а на другом – $u = u_2$, за время Δt продвинулся на Δx. Тогда изменение количества вещества (заштрихованная зона на рис. 5.6) равно разности входящего и выходящего потоков:

$$(u_2 - u_1)\Delta x = (Q_2 - Q_1)\Delta t.$$

Откуда скорость движения разрыва есть

$$v_{\text{разр}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{u_2 - u_1},$$

где Q – это поток, фигурирующий в уравнении переноса.

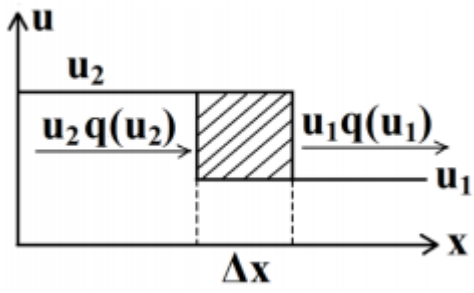

Рис. 5.6. Движение разрыва.

Пример.

Рассмотрим методологию решения задачи на примере задачи о протекании воды сквозь песок. Пусть x – вертикальная координата, возрастающая вниз, t – время; $u(x,t)$ – влажность песка, q – скорость стекания воды под действием силы тяжести. Скорость q зависит от влажности, пусть для удобства $q = \frac{u}{2}$, а влажность u меняется от нуля до некоторого максимального значения u_{max}, которое определяется пористостью песка. Тогда для потока получаем $Q = qu = \frac{u^2}{2}$. Для гладкой функции $u(x,t)$ соотношение баланса количества воды, приводит к дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Пусть в начальный момент времени

$$u(x,0) = \begin{cases} 2, & x \le 0 \\ 2 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Выберем точку x^*, из которой мы выпускаем характеристику. Имеем

$$x^* < 0, x - x^* = 2t,$$

$$x^* > 1, x - x^* = t,$$

$$0 \le x^* \le 1, x - x^* = (2 - x^*)t\,.$$

Рассмотрим интервал $0 \leq x^* \leq 1$, тогда при $t = 1$ все проекции характеристик сходятся в точке $x = 2$ (рис. 5.7). При $t > 1$ мы должны искать обобщенное решение, состоящее из двух классических, сшитых по линии разрыва, которая определяется условием Гюгонио:

$$v_{\text{разр}} = \frac{(u_2/2)u_2 - (u_1/2)u_1}{u_2 - u_1} = \frac{u_2 + u_1}{2} = \frac{3}{2}.$$

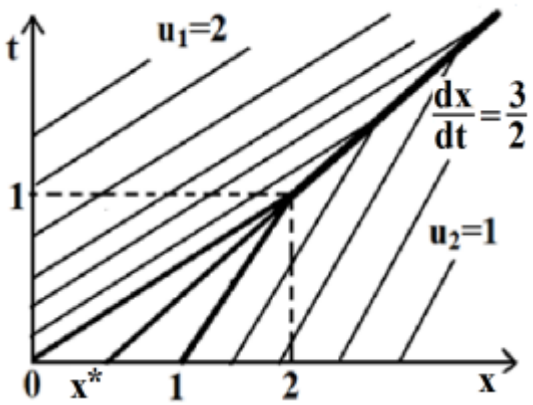

Рис. 5.7. Разрыв решения на примере задачи о протекании воды.

На рис. 5.8 показано изменение профиля u от x для различных моментов времени t. Чем больше u, тем с большей скоростью происходит перемещение этого значения вдоль x. В момент $t = 1$ в точке x фронт становиться вертикальным – происходит образование разрыва решения и ударной волны.

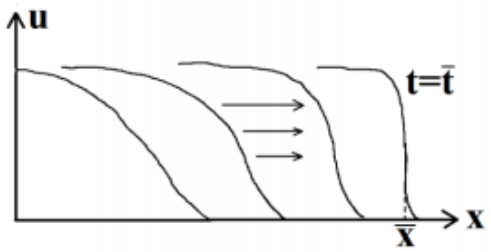

Рис. 5.8. Фронт решения для разных моментов времени.

ЛЕКЦИЯ 6. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

На прошлой лекции мы с вами рассматривали квазилинейное уравнение переноса и выяснили, что при этом могут возникать разрывы. Кратко повторим идею, если мы имеем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

то решение сохраняется на характеристике, которая определяется соотношениями

$$\begin{cases} u = const \\ \dfrac{dx}{dt} = a(u) \end{cases}.$$

Это значит, что если мы возьмем некий профиль $u(x)$, то точка профиля со значением u переносится со скоростью $a(u)$. В линейном же случае, когда $\frac{\partial u}{\partial t} + a_0\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, имеем решение в виде $u = f(x - a_0 t)$, профиль переносится единым целым, то есть разные значения u переносятся с одной и той же скоростью. Если $a(u)$ – растущая функция, то большие значения u будут переноситься быстрее, а маленькие – медленнее, и у нас получится заострение фронта. Если $a(u)$ – убывающая функция, то, наоборот, большие значения будут переноситься медленно, а маленькие – быстро, тогда задний фронт будет крутой, а передний пологий. И в том, и в другом случае будет иметь место заострение либо переднего, либо заднего фронта.

Нелинейное уравнение теплопроводности

В курсе ММФ изучалась задача Коши для линейного уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом a (в области $-\infty < x < \infty, t > 0$):

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \delta(x - x_0) \end{cases}. \tag{6.1}$$

Фундаментальное решение задачи определяется следующим образом:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x-x_0}{4a^2 t}}.$$

Видно, что $u(x,t) > 0$ даже при малых положительных t сразу для всех значений x. То есть тепло распространяется с бесконечной скоростью. Это нереально с точки зрения физики, поскольку процесс распространения тепла в природе идет с конечной скоростью, вследствие конечной скорости движения молекул. Модель рассчитана на описание процессов теплопередачи в пространственно-временных масштабах, в которых ограниченностью скорости передачи тепла можно пренебречь.

Поскольку решение было построено в предположении наличия непрерывных производных по x, возникает следующий вопрос: может быть это было сделано «в угоду математике», и на самом деле можно искать финитное решение с разрывной производной, отличное от нуля лишь в некоторой расширяющейся со временем окрестности точки ξ, в которой был произведен нагрев (рис. 6.1). Легко убедится, что это не так. Мы знаем, что поток тепла есть $q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$, где $k = a^2\rho$, поэтому в точках x_1 и x_2 на рис. 6.1 нарушено физическое условие непрерывности теплового потока. Таким образом, нельзя искать решение, имеющее разрыв производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $t > 0$.

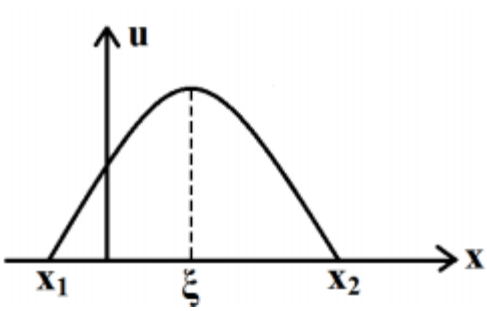

Рис. 6.1. График решения с разрывными производными.

Ситуация меняется, если рассматривать задачу с нелинейным уравнением

$$u_t = (k(u)u_x)_x,$$

где $k(u) \to 0$ при $u \to 0$. В этом случае разрыва теплового потока в точках x_1 и x_2 не происходит: с обеих сторон этих точек предельное значение потока равно нулю, и можно искать финитные решения, что будет продемонстрировано в дальнейшем.

Пример 1. Задача о наводнении

Пусть имеется озеро и деревня (рис. 6.2), под ними расположен гидроупорный слой (глина), показанный жирной линией. Пусть $u(x,t)$ – высота грунтовой воды над гидроупором в области $x > 0$. Будем считать, что весной к моменту $t = 0$ вода в озере поднялась до нулевой отметки и продолжает прибывать по закону $u(0,t) = kt$. Задача заключается в том, чтобы определить, как быстро затопление дойдет до деревни, расположенной на высоте h над гидроупором и имеющей координату $x = L$.

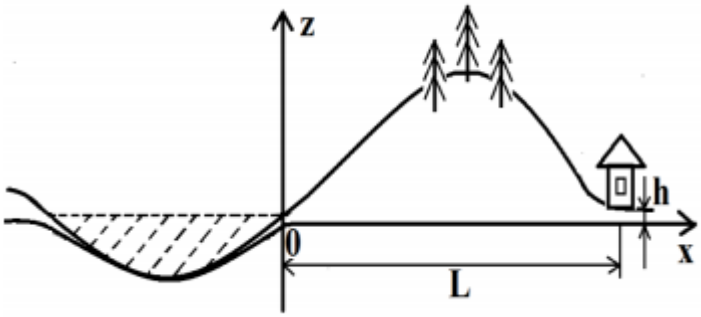

Рис. 6.2. Задача об озере и деревне.

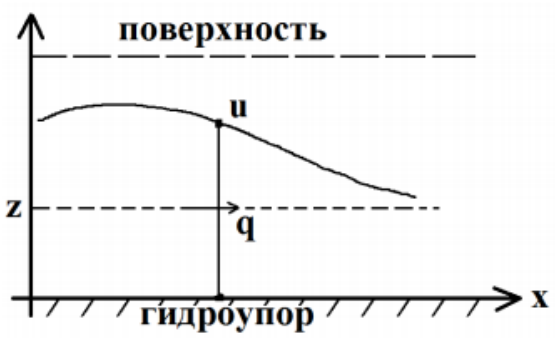

Рис. 6.3. Вертикальное сечение земли от дневной поверхности до гидроупора.

Сначала получим уравнение, описывающее изменение u. Рассмотрим вертикальное сечение земли от дневной поверхности до гидроупора (рис. 6.3). Плотность горизонтального потока воды равна $q = -D\frac{\partial P}{\partial x}$, где $P -$ давление, а $D -$ коэффициент проводимости среды. Рассмотрим некоторую высоту z: $0 < z < u$, давление на ней равно

$$P(z) = \rho g(u - z),$$

где $\rho -$ плотность воды, а $g -$ ускорение свободного падения. Следовательно, $q = -D\rho g\frac{\partial u}{\partial x}$ не зависит от z, поэтому полный поток, идущий через сечение будет равен

$$Q = -D\rho g \cdot u\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Теперь запишем интегральное уравнение баланса воды в слое от x до $x + \Delta x$ за время от t до $t + \Delta t$:

$$\int_x^{x+\Delta x} \varepsilon\big(u(\xi, t+\Delta t) - u(\xi, t)\big)d\xi$$
$$= \int_t^{t+\Delta t} D\rho g\left(u(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\tau+\Delta\tau)}{\partial x}u(x,\tau+\Delta\tau)\right)d\tau,$$

где ε – плотность среды. Поделим уравнение на $\Delta x \Delta t$ и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$. Мы получим дифференциальное уравнение, описывающее высоту уровня грунтовой воды над гидроупором, называемое уравнением Буссинеска:

$$u_t = \frac{D\rho g}{\varepsilon}(uu_x)_x.$$

Сделаем замену переменной $\tau = \frac{\varepsilon}{D\rho g}t$, (т.е. введем новый масштаб времени), введем обозначение $A = \frac{k\varepsilon}{D\rho g}$. Получаем следующую математическую модель процесса:

$$\begin{cases} u_\tau = (uu_x)_x \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,\tau) = A\tau \end{cases}. \tag{6.1}$$

Мы уже выяснили ранее, что имеем право для уравнения (6.1) искать решение, которое имеет перелом производной при $u = 0$, а именно в виде движущейся волны:

$$\begin{cases} u = f(v\tau - x), & v\tau - x > 0 \\ u = 0, & v\tau - x \le 0 \end{cases},$$

где v – постоянная скорость, подлежащая определению. Подставив такой вид решения в (6.1), получаем уравнение в обыкновенных производных для функции $f(\alpha)$, где $\alpha = v\tau - x$:

$$vf' = (ff')'.$$

Интегрируем это уравнение от нуля до некоторого $\alpha < 0$, имеем:

$$vf = ff'.$$

Откуда $f' = v$. Из граничного условия задачи (6.1) $u(0,\tau) = A\tau = f(v\tau - 0)$ находим функциональный вид f:

$$f(\alpha) = \frac{A\alpha}{v}. \tag{6.2}$$

Зная (6.2) и то, что $f' = v$, получаем $v = \sqrt{A}$, тогда $f(\alpha) = \alpha\sqrt{A}$. Решение задачи (6.2) принимает вид:

$$u(x,\tau)=\begin{cases} A\tau-\sqrt{A}x, x<\sqrt{A}\tau \\ 0, \qquad\qquad x\geq\sqrt{A}\tau \end{cases}.$$

Наводнение дойдет до деревни при τ, которое определяется равенством $h=A\tau-\sqrt{A}L$.

Пример 2. Модель большого взрыва

Баренблаттом и Зельдовичем была рассмотрена и исследована модель большого взрыва, положившего начало движения вещества во Вселенной. Пусть в начальный момент времени масса вселенной M была сосредоточена в одной точке $x=0$. Распространение вещества после взрыва авторы описали моделью:

$$\begin{cases} u_t=(u^2u_x)_x \\ u(x,0)=\delta(0)M \end{cases}. \tag{6.3}$$

Решение будем искать в виде $u(x,t)=\frac{\varphi\left(\frac{x^2}{\sqrt{t}}\right)}{\sqrt[4]{t}}$, введем обозначение $\xi=\frac{x^2}{\sqrt{t}}$. Производная по времени примет вид

$$u_t=-\frac{\varphi' x^2}{2t^{7/4}}-\frac{\varphi}{4t^{5/4}},$$

посчитаем также производную

$$\left(\frac{x}{4t}u\right)_x=\frac{\varphi}{4t^{5/4}}+\frac{x}{4t}\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\frac{2x}{\sqrt{t}}.$$

Видим, что выражения совпадают с точностью до знака, то есть $u_t=-\left(\frac{x}{4t}u\right)_x$, таким образом, уравнение (6.3) сводится к следующему виду:

$$\left(\frac{x}{4t}u\right)_x=(u^2u_x)_x.$$

Интегрируя это уравнение по x, используя искомый вид u, получаем:

$$u^2u_x=-\frac{x}{4t}u,$$

$$\frac{\varphi}{\sqrt[4]{t}}\frac{\varphi'}{\sqrt[4]{t}}\frac{2x}{\sqrt{t}}=-\frac{x}{4t},$$

$$8\varphi\varphi'=-1,$$

$$[(2\varphi)^2]'=-1,$$

$$(2\varphi)^2=\xi_0-\xi,$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\xi_0 - \xi}.$$

Решение задачи (6.3):

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{\xi_0 - \xi}}{\sqrt[4]{t}}, & |x| < \sqrt{\xi_0}\sqrt[4]{t} \\ 0, & |x| > \sqrt{\xi_0}\sqrt[4]{t} \end{cases}.$$

Величину ξ_0, определяющую границу возмущения, можно найти из начального условия (6.3):

$$\frac{M}{2} = \int_0^{x_0} u(x,t)dx = \int_0^{\xi_0} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt[4]{t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}} \sqrt[4]{t} = \frac{1}{4}\int_0^{\xi_0} \frac{\sqrt{\xi_0 - \xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = \frac{\xi_0}{4}\int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} d\alpha,$$

где $x_0 \equiv \sqrt{\xi_0}\sqrt[4]{t}$, мы также учли, что $d\xi = \frac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt[4]{t}} dx$. Выражаем ξ_0:

$$\xi_0 = 2M \Big/ \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} d\alpha.$$

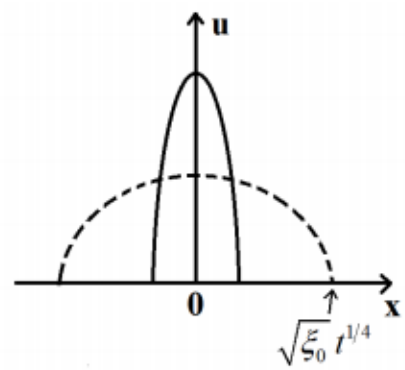

Рис. 6.4. График решения задачи большого взрыва.

Пример 3. Нелинейная модель горения

Часто мощность источников тепла зависит от температуры. Например, в плохо горящем костре выделение тепла дровами слабое, а когда костер разгорится, то те же дрова выделяют много энергии. Передача тепла часто имеет конвективный характер. При этом коэффициент теплопроводности зависит от интенсивности конвективных процессов и, тем самым, от температуры.

Рассмотрим уравнение

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^\beta. \tag{6.4}$$

Будем искать решения этого уравнения для разных значений параметра β.

1. $\beta = 3$

   В этом случае решение (6.4) ищем в виде $u(x,t) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{T-t}}$, подставив данное выражение в уравнение, мы получим:

$$\frac{\varphi}{2(T-t)^{3/2}} = \frac{(\varphi^2\varphi')'}{(T-t)^{3/2}} + \frac{\varphi^3}{(T-t)^{3/2}},$$

$$\varphi''\varphi + 2\varphi'^2 + \varphi^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

   Подставляя в последнее уравнение в качестве решения $\varphi = A\cos\alpha x + B$, получим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{3}}, & |x| < \frac{\pi}{2}\sqrt{3} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}\sqrt{3} \end{cases}.$$

   Таким образом, решением задачи

$$\begin{cases} u_t = (u^2 u_x)_x + u^3 \\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{T}}, & |x| < \frac{\pi}{2}\sqrt{3} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

   является функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{T-t}}, & |x| < \frac{\pi}{2}\sqrt{3} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}\sqrt{3} \end{cases}.$$

   Последнее выражение описывает структуру фиксированной ширины, величина которой бесконечно возрастает за конечное время. Решения, обладающие последним свойством, называются решениями с обострением.

2. $\beta = 2$

В этом случае решение ищем в виде $u(x,t) = \frac{\varphi(x\sqrt{T-t})}{T-t}$, подставив данное выражение в уравнение, мы получим:

$$-\frac{\varphi' x}{2(T-t)^{3/2}} + \frac{\varphi}{(T-t)^2} = \frac{(\varphi^2\varphi')'}{(T-t)^2} + \frac{\varphi^2}{(T-t)^2}.$$

Обозначим аргумент функции φ за $\xi = x\sqrt{T-t}$. Такая замена приводит уравнение к виду

$$-\frac{\xi\varphi'}{2} + \varphi = (\varphi^2\varphi')' + \varphi^2.$$

Это уравнение также дает решение в виде некоторого «колокола». Решение образует локальную структуру, которая расширяется пропорционально $\frac{1}{\sqrt{T-t}}$ и неограниченно возрастает в центре за конечное время.

Модель «Хищник-Жертва»

Пусть x – число зайцев, а y – число волков. Изменение числа зайцев во времени происходит за счет двух факторов: рождения новых зайцев, что пропорционально количеству живущих зайцев, и смерти в результате встречи с волком, количество встреч пропорционально произведению числа зайцев и волков. Соответственно, волкам для увеличения популяции и вскармливания молодого поколения требуется пища. Будем считать прирост количества волков пропорциональным количеству их встреч с зайцами. Кроме того, имеет место естественная убыль волков от старости и голода, которая тем больше, чем больше количество волков. Получаем модель:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 xy \\ \frac{dy}{dt} = k_3 xy - k_4 y \end{cases}. \tag{6.5}$$

Если рассматривать $\frac{dx}{dt}$ не как символ производной, а как отношение дифференциалов, можно поделить одно уравнение на другое, получим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(k_1 - k_2 y)}{y(k_3 x - k_4)}$$

или уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dx(k_3 x - k_4)}{x} = \frac{dy(k_1 - k_2 y)}{y}.$$

Проинтегрируем его:

$$k_3 x - k_4 \ln x = k_1 \ln y - k_2 y + \ln C,$$

пропотенцируем:

$$\frac{e^{k_3 x}}{x^{k_4}} \cdot \frac{e^{k_2 y}}{x^{k_1}} = C. \tag{6.6}$$

С – интеграл движения, то есть величина, сохраняющая значение на решении уравнений (6.5). Условие $C = const$ определяет линию уровня интегральной кривой в пространстве (x, y, C).

Приравняв нулю правые части уравнений системы (6.5), можно найти точку покоя (x_0, y_0):

$$x_0 = \frac{k_4}{k_3}, y_0 = \frac{k_1}{k_2}.$$

Подставляя эти координаты в (6.6), находим значение интеграла движения, соответствующее точке покоя:

$$C_0 = \frac{e^{k_3 x_0}}{(x_0)^{k_4}} \cdot \frac{e^{k_2 y_0}}{(y_0)^{k_1}}.$$

Рассмотрим функции $f(x) = \frac{e^{k_3 x}}{x^{k_4}}$ $и$ $g(y) = \frac{e^{k_2 y}}{x^{k_1}}$. Легко видеть, что функция $f(x)$ неограниченно возрастает при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Вычислим ее производную:

$$f'(x) = \frac{e^{k_3 x}}{x^{k_4}}\left(k_3 - \frac{k_4}{x}\right),$$

видно, что $f'(x) > 0$ при $x > x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, тем самым, ее минимум достигается при $x = x_0$. Аналогично ведет себя функция $g(y)$: она имеет минимум при $y = y_0$. Поэтому поверхность $C(x,, y) = f(x)g(y)$ имеет характер прогнутой поверхности, имеющей минимум в точке покоя и бесконечно возрастающую к границам первого квадранта и бесконечности на плоскости (x, y).

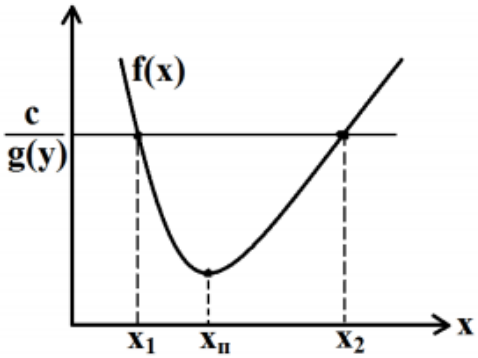

Рис. 6.5. График функции $f(x)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При $C > C_0$ получаем замкнутые линии уровня, лежащие в области $x > 0, y > 0$ (рис. 6.6). Отсюда, если начальная точка (x_0, y_0) лежит в первом квадранте, то фазовая траектория не покидает первого квадранта, т.е. $x(t) > 0$ и $y(t) > 0$ в любой момент времени.

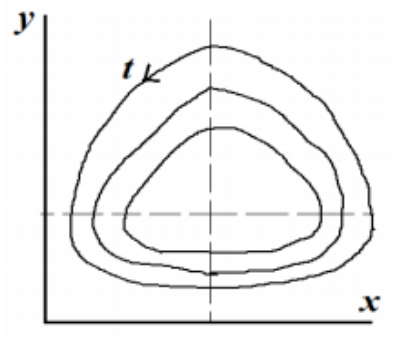

Рис. 6.6. Сечение $u(x, t)$ в пространстве (x, y).

Если начальная точка не совпадает с точкой покоя, то из (6.5) следует, что либо $\frac{\partial x}{\partial t} \neq 0$, либо $\frac{\partial y}{\partial t} \neq 0$. Иными словами $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \neq 0$, получаем непрерывное движение. Направление движения на фазовой плоскости можно определить по нижней точке фазовой кривой, соответствующей $x = x_0$. При этом $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$, а $\frac{\partial x}{\partial t} = x_0(k_1 - k_2 y)$, что задает направление обхода против часовой стрелки.

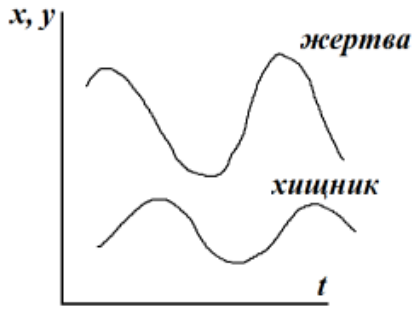

Рис. 6.7. Колебания числа зайцев и волков.

ЛЕКЦИЯ 7. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Общие понятия

Пусть требуется численным методом найти решение следующей задачи:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \\ Ku(x) = \varphi(x), x \in \sum \end{cases}, \tag{7.1}$$

где $\sum -$ граница области D, $L -$ дифференциальный оператор, $K -$ оператор дополнительных (начальных или граничных) условий.

Введем в области D прямоугольную координатную сетку w. Будем для простоты рассматривать равномерную сетку, для которой шаг изменения координаты x_m $(m = 1, \dots, n)$ постоянный, равный h_m. По разным направлениям величина шага h может быть разной. Обозначим узлы сетки как x^h, совокупность точек x^h внутри области D как w^h, а совокупность точек x^h, лежащих на границе области D, обозначим как γ^h, также $f(x^h) = f^h$ и $\varphi(x^h) = \varphi^h$.

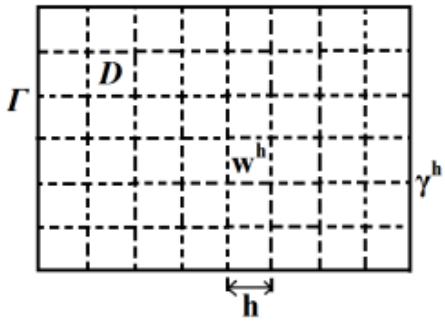

Рис. 7.1. Сетка.

Наряду с решением $u(x)$ задачи (7.1), которое является дифференцируемой функцией, будем рассматривать, так называемую, сеточную функцию v^h, представляющую собой совокупность значений v_i в узлах сетки. В соответствие дифференциальному оператору L ставится разностный оператор L_h. Например, оператору $Lu = \frac{\partial u}{\partial x}$ в точке x_i соответствует разностный оператор

$$L_h v = \frac{v_{i+1} - v_i}{h},$$

а оператору $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ соответствует

$$L_h v = \frac{1}{h}\left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h}\right) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}.$$

Тогда система уравнений для v^h, соответствующая (7.1), будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} L_h v^h = f^h, x^h \in w^h \\ K_h v^h = \varphi^h, x^h \in \gamma^h \end{cases}. \tag{7.2}$$

Систему алгебраических уравнений (7.2) называют разностной схемой системы (7.1).

Будем говорить, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с точностью порядка k, если

$$\|Lu^h - L_h u^h\| \leq Ch^k,$$

где константа C не зависит от величины шага сетки h. Близость сеточных функций можно оценивать в различных нормах, мы для простоты рассматриваем их в норме равномерного приближения: $\|v^h\| = \max_i |v_i|$. Рассмотрим первое разностное соотношение, имеем $Lu_i = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i)$ и $L_h u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$, представим u_{i+1} в виде разложения в ряд Тейлора:

$$u_{i+1} = u(x_{i+1}) = u(x_{i+1}) + u'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + u''(x^*)\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}.$$

Тогда

$$\|Lu_i - Lu^h\| = \left\| u'(x_i) - u'(x_i) - u''(x^*)\frac{h}{2} \right\| = \left\| u''(x^*)\frac{h}{2} \right\| \leq Ch,$$

где $C = \max_i \left| \frac{u''}{2} \right|$. Таким образом, первое разностное соотношение аппроксимирует первую производную с первым порядком точности. Аналогично можно показать, что второе разностное соотношение аппроксимирует вторую производную со вторым порядком точности.

Если подставить решение u задачи (7.1) в разностные соотношения (7.2), то получим, что эти соотношения выполнены не точно:

$$\begin{cases} L_h v^h = f^h + \varepsilon^h, x^h \in w^h \\ K_h v^h = \varphi^h + \varepsilon^h, x^h \in \gamma^h \end{cases},$$

величина ε^h называется невязкой. Будем говорить, что разностная схема (7.2) аппроксимирует задачу (7.1) с порядком k, если $\|\varepsilon^h\| \leq Ch^k$. Легко видеть, что если L_h и K_h аппроксимируют операторы L и K с точностью порядка k, то и схема (7.2) аппроксимирует задачу (7.1) с тем же порядком точности.

Рассмотрим решение v^h задачи (7.2) и z^h – решение такой же задачи с мало измененной правой частью:

$$\begin{cases} L_h z^h = f^h + \delta^h, x^h \in w^h \\ K_h z^h = \varphi^h + \eta^h, x^h \in \gamma^h \end{cases}.$$

Разностная схема называется устойчивой, если найдутся такие числа C_1 и C_2, что для любых δ^h и η^h будет выполнено следующее условие:

$$\|z^h - v^h\| \leq C_1\|\delta^h\| + C_2\|\eta^h\|.$$

Возьмем $f = \varphi = v^h = 0$, тогда задача примет вид

$$\begin{cases} L_h z^h = \delta^h, x^h \in w^h \\ K_h z^h = \eta^h, x^h \in \gamma^h \end{cases},$$

и условие устойчивости можно записать как

$$\|z^h\| \leq C_1\|\delta^h\| + C_2\|\eta^h\|.$$

Будем говорить, что решение (7.2) v^h сходится к решению (7.1) u^h с порядком k, если $\|u^h - v^h\| \leq Ch^k$.

В курсе дифференциальных уравнений было доказано, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость с порядком, равным порядку аппроксимации.

Разностные схемы для уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу теплопроводности на отрезке $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(1,t) = \mu_2(t) \end{cases}.$$

Будем интересоваться изменением решения за период времени $0 \leq t \leq T$. В указанной области введем равномерную сетку с некоторым шагом h по пространственной координате и с шагом τ по временной координате так, что

$$w^h = \{x_m = hm; m = 0,1,\dots,N_x; hN_x = 1\},$$

$$w^\tau = \{t_n = \tau n; n = 0,1,\dots,N_t; \tau N_t = T\}.$$

Символом $v_{m,n}$ обозначим значение сеточной функции в узле с координатами (x_m, t_n), соответствующее $u(x_m, t_n)$. Таким образом, разностный аналог производной $u_t(x_m, t_n)$ будет иметь вид

$$v_t = \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau},$$

для производной $u_{xx}(x_m, t_n)$ получим

$$\Lambda v = \frac{v_{m+1,n} - 2v_{m,n} + v_{m-1,n}}{h^2}.$$

При составлении разностного аналога уравнения задачи (7.1) мы можем брать Λv на n-ом слое по времени, а можем на $(n+1)$-ом. В первом случае получаем, так называемую, явную разностную схему, а во втором – неявную. Будем помечать все переменные, относящиеся к $(n+1)$-ому временному слою, «галочкой» сверху, например $\hat{v}$ или $\hat{u}$, а к n-ому, соответственно, без «галочки». Тогда для явной разностной схемы получим:

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} = \frac{v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}}{h^2} + f_{m,n}, \tag{7.3}$$

начальное и граничное условия преобразуются следующим образом:

$$v_{m,0} = \varphi_m,$$

$$v_{0,n} = \mu_{1_n},$$

$$v_{N_x,n} = \mu_{2_n}.$$

Для неявной разностной схемы имеем уравнение

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} = \frac{\hat{v}_{m+1} - 2\hat{v}_m + \hat{v}_{m-1}}{h^2} + f_{m,n}. \tag{7.4}$$

Шаблоном называется совокупность узлов сетки, значения сеточной функции v в которых присутствуют в разностном уравнении.

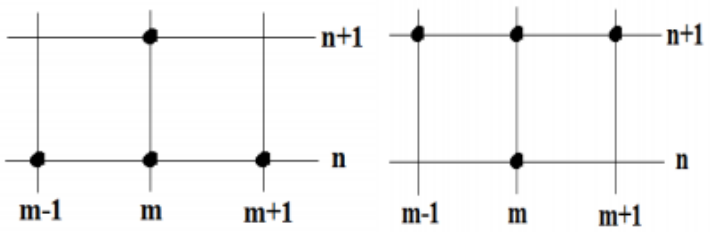

Рис. 7.2. Шаблоны явной (слева) и неявной (справа) разностных схем.

Устойчивость решения задачи теплопроводности

Необходимые условия. Спектральный метод.

Необходимые условия устойчивости могут быть найдены с помощью спектрального метода Неймана. Рассмотрим явную схему однородной задачи с начальными условиями в виде гармоники некоторой частоты:

$$\begin{cases} \frac{v_{m,n+1}-v_{m,n}}{\tau} = \frac{v_{m+1,n}-2v_{m,n}+v_{m-1,n}}{h^2} \\ v_{m,0} = e^{i\omega m} \end{cases}. \tag{7.5}$$

Будем искать решение задачи (7.5) в виде $v_{m,n} = \lambda^n e^{i\omega m}$, где $\lambda -$ некоторое число, подлежащее определению. Необходимым условием устойчивости будет являться то, что $|\lambda| \leq 1$ для любых ω. Это условие требуется, чтобы решение со временем не нарастало по модулю.

Подставив функцию $v_{m,n} = \lambda^n e^{i\omega m}$ в уравнение (7.5) и сократив на $v_{m,n}$, получим

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \frac{e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}}{h^2}.$$

После простых преобразований находим

$$\lambda = 1 - \frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Необходимое условие устойчивости $|\lambda| \leq 1$ выполняется для любых ω при $\frac{4\tau}{h^2} \leq 1$. Таким образом, для устойчивости явной разностной схемы необходимо выполнение определенного условия на соотношение шагов τ и h, такая устойчивость называется условной.

Теперь рассмотрим неявную разностную схему для той же задачи:

$$\begin{cases} \frac{v_{m,n+1}-v_{m,n}}{\tau} = \frac{v_{m+1,n+1}-2v_{m,n+1}+v_{m-1,n+1}}{h^2} \\ v_{m,0} = e^{i\omega m} \end{cases}. \tag{7.6}$$

Подставив функцию $v_{m,n} = \lambda^n e^{i\omega m}$ в уравнение (7.6) и сократив на $v_{m,n}$, получим

$$\frac{1 - \frac{1}{\lambda}}{\tau} = \frac{e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}}{h^2}.$$

Откуда следует, что

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{\omega}{2}} \leq 1,$$

поскольку знаменатель всегда больше либо равен единице. Таким образом, для неявной схемы необходимое условие устойчивости выполнено при любом соотношении шагов. Такая схема называется абсолютно устойчивой.

Достаточные условия устойчивости.

Получим достаточные условия устойчивости для явной разностной схемы:

$$\begin{cases} \frac{v_{m,n+1}-v_{m,n}}{\tau} = \frac{v_{m+1,n}-2v_{m,n}+v_{m-1,n}}{h^2} + f_{m,n}. \\ v_{m,0} = \varphi_m \end{cases} \tag{7.7}$$

Докажем, что решение (7.7) удовлетворяет оценке $\|v^h\| \le C_1\|f^h\| + C_2\|\varphi^h\|$. Перепишем уравнение (7.7) в виде

$$v_{m,n+1} = \frac{\tau}{h^2}v_{m+1,n} + \left(\frac{\tau}{h^2} - 1\right)v_{m,n} + \frac{\tau}{h^2}v_{m-1,n} + \tau f_{m,n}.$$

Далее производим мажорирование последнего уравнения при условии $\tau \le \frac{h^2}{2}$, получаем:

$$\left|v_{m,n+1}\right| \le \frac{\tau}{h^2}\|v_n\| + \left(1 - \frac{\tau}{h^2}\right)\|v_n\| + \frac{\tau}{h^2}\|v_n\| + \tau\|f\| = \|v_n\| + \tau\|f\|,$$

где $\|v_n\| = \max\limits_m\left|v_{m,n}\right|$. Следовательно, $\|v_{n+1}\| \le \|v_n\| + \tau\|f\|$, по индукции имеем $\|v_{n+1}\| \le \|\varphi\| + n\tau\|f\|$. Зная, что $\tau = \frac{T}{N_t}$, получим $n\tau\|f\| \le T\|f\|$ и, наконец, $\|v\| \le \|\varphi\| + T\|f\|$. Таким образом схема устойчива, и условие $\tau \le \frac{h^2}{2}$ является как необходимым, так и достаточным условием устойчивости явной схемы.

Заметим, что в случае уравнения $u_t = a^2u_{xx} + f$ условие устойчивости явной разностной схемы будет иметь вид $\tau \le \frac{h^2}{2a^2}$.

Обратимся к случаю неявной разностной схемы. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} = \frac{v_{m+1,n+1} - 2v_{m,n+1} + v_{m-1,n+1}}{h^2} + f_{m,n}. \\ v_{m,0} = \varphi_m \end{cases}$$

Перепишем уравнение этой задачи в виде

$$v_{m,n+1} = v_{m,n} + \frac{\tau}{h^2}\left(v_{m+1,n+1} - 2v_{m,n+1} + v_{m-1,n+1}\right) + \tau f_{m,n}.$$

Пусть на $(n+1)$-ом временном слое максимальное значение $v_{m,n+1}$ достигается при некотором $m = m_0$, тогда

$$\left(v_{m_0+1,n+1} - 2v_{m_0,n+1} + v_{m_0-1,n+1}\right) \leq 0,$$

$$v_{m,n+1} \leq v_{m_0,n+1} = v_{m_0,n} + \frac{\tau}{h^2}\left(v_{m_0+1,n+1} - 2v_{m_0,n+1} + v_{m_0-1,n+1}\right) + \tau f_{m_0,n}$$
$$\leq v_{m_0,n} + \tau f_{m_0,n} \leq \|v_n\| + \tau\|f\|.$$

Аналогично доказывается, что $v_{m,n+1} \geq -\|v_n\| - \tau\|f\|$, следовательно, $\|v_{n+1}\| = \max\limits_m \left|v_{m,n+1}\right| \leq \|v_n\| + \tau\|f\|$ и, наконец, $\|v\| \leq \|\varphi\| + T\|f\|$, что означает безусловную устойчивость неявной схемы.

Итак, неявная схема имеет преимущество перед явной в плане устойчивости. Однако явная схема лучше с точки зрения простоты алгоритма вычислений. Если нам известны значения сеточной функции на n-ом слое по времени, то решение на $(n+1)$-ом слое находится непосредственно из уравнения (7.3). Для неявной схемы, зная значения v на n-ом слое, мы должны решать систему алгебраических уравнений (7.4) размерности $(N_x - 1)$ для определения v на $(n+1)$-ом слое. Такая задача требует порядка $O(N_x^3)$ операций, что может быть очень большим числом. Поэтому для численного решения исходной задачи по неявной схеме был разработан метод прогонки, использующий специальный трехдиагональный вид матрицы системы алгебраических уравнений. Число операций, используемых при применении метода прогонки, имеет порядок $O(N_x)$.

Ограничение на шаги сетки $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$ может быть весьма чувствительным при расчете больших задач, где число точек по x велико, соответственно, h мало, и необходимость проводить расчет с очень мелким шагом τ требует больших затрат времени счета.

Метод прогонки

Вернемся к задаче из предыдущего пункта, будем решать ее численно, используя неявную схему:

$$\frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} = \frac{v_{m+1,n+1} - 2v_{m,n+1} + v_{m-1,n+1}}{h^2} + f_{m,n},$$

$$v_{m-1,n+1}\frac{\tau}{h^2} - \left(2\frac{\tau}{h^2} + 1\right)v_{m,n+1} + v_{m+1,n+1}\frac{\tau}{h^2} + f_{m,n} + \frac{v_{m,n}}{\tau} = 0.$$

Общий вид задачи, для которой применяется метод прогонки:

$$\begin{cases} A_n v_{n+1} - C_n v_n + B_n v_{n-1} = F_n, 0 \leq n \leq N \\ v_0 = \alpha_1 v_1 + \beta_1 \\ v_N = \alpha_2 v_{N-1} + \beta_2 \end{cases}. \qquad (7.8)$$

Метод применяется либо в случае $C_n > A_n + B_n$, при этом $0 \leq \alpha_{1,2} \leq 1$, либо в случае $C_n \geq A_n + B_n$, но тогда $0 \leq \alpha_{1,2} < 1$.

Решение будем искать в виде

$$v_n = d_{n+1}v_{n+1} + \varkappa_{n+1} \text{ или } v_{n-1} = d_n v_n + \varkappa_n, \tag{7.9}$$

где d_{n+1} и $\varkappa_{n+1}$ называются прогоночными коэффициентами. Подставим v_{n-1} в уравнение и получим:

$$A_n v_{n+1} - C_n v_n + B_n(d_n v_n + \varkappa_n) = F_n,$$

$$A_n v_{n+1} + (B_n d_n - C_n)v_n = F_n - B_n \varkappa_n.$$

Теперь подставим выражение для v_n:

$$A_n v_{n+1} + (B_n d_n - C_n)(d_{n+1}v_{n+1} + \varkappa_{n+1}) = F_n - B_n \varkappa_n,$$

$$v_{n+1}[A_n + (B_n d_n - C_n)d_{n+1}] = F_n - B_n \varkappa_n - \varkappa_{n+1}(B_n d_n - C_n).$$

Выберем прогоночные коэффициенты так, чтобы уравнение выполнялось при любых v, то есть

$$d_{n+1} = \frac{A_n}{B_n d_n - C_n},$$

$$\varkappa_{n+1} = \frac{F_n - B_n \varkappa_n}{B_n d_n - C_n}.$$

ЛЕКЦИЯ 8. МЕТОД ПРОГОНКИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Метод прогонки

Продолжим рассматривать метод прогонки. Мы получили выражения для прогоночных коэффициентов:

$$d_{n+1} = \frac{A_n}{B_n d_n - C_n}, \tag{8.1}$$

$$\varkappa_{n+1} = \frac{F_n - B_n \varkappa_n}{B_n d_n - C_n}. \tag{8.2}$$

Сравнивая граничные условия задачи (7.8) $v_0 = \alpha_1 v_1 + \beta_1$ с (7.9) при $m = 0$: $v_0 = d_1 v_1 + \varkappa_1$, находим

$$d_1 = \alpha_1, \tag{8.3}$$

$$\varkappa_1 = \beta_1. \tag{8.4}$$

Используя значения d_1 и $\varkappa_1$, совершаем прогонку в направлении возрастания индекса, последовательно определяя из формулам (8.1), (8.2) значения коэффициентов d_n и $\varkappa_n$ для $n = 1, \dots, N$.

Аналогично, на правом конце имеем два соотношения, связывающие v_{N-1} и v_N: $v_{N-1} = d_N v_N + \varkappa_N$ и $v_N = \alpha_2 v_{N-1} + \beta_2$. Из этих уравнений находим

$$v_N = \frac{\alpha_2 \varkappa_N + \beta_2}{1 - \alpha_2 d_N}. \tag{8.5}$$

При выполнении (8.3) и условий, наложенных при постановке задачи (7.8) на $A_n, B_n, C_n, \alpha_{1,2}$, из (8.1) и (8.2) получаем, что $d_n < 1$ при $n > 2$. Учитывая, что $\alpha_2 \leq 1$, получаем положительный знаменатель в (8.5), следовательно, значение v_N определено. Далее, зная все прогоночные коэффициенты и v_N, совершаем по формуле (7.9) прогонку в обратном направлении, тем самым, определяя все v_n. Число операций при поиске решения задачи (7.8) пропорционально числу узлов в слое.

Консервативные разностные схемы

При составлении разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами, кроме точности аппроксимации и устойчивости схемы, важно чтобы для численного решения выполнялись законы сохранения, присущие

дифференциальной задаче, такие схемы называются консервативными. При нарушении консервативности можем получить ошибочное решение.

Рассмотрим простейший пример, задачу стационарного распределения тепла на отрезке:

$$\begin{cases} (k(x)u_x)_x = 0 \\ u(0) = 1, u(1) - 0 \end{cases}. \tag{8.6}$$

Если $k(x)$ непрерывна, то раскрываем производную и получаем

$$ku_{xx} + k_x u_x = 0.$$

Составим разностную схему

$$\frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{h^2} k_n + \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} \frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{2h} = 0,$$

$$v_{n+1}(4k_n + k_{n+1} - k_{n-1}) - 8v_n k_n + v_{n-1}(4k_n - k_{n+1} - k_{n-1}) = 0. \tag{8.7}$$

Теперь рассмотрим случай, когда коэффициент теплопроводности $k(x)$ является разрывной функцией:

$$k(x) = \begin{cases} 4, 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

Решением задачи (8.6) является кусочно-линейная функция, давайте получим это решение из разностной схемы.

Выберем на отрезке $0 \le x \le 1$ равномерную сетку, состоящую из четного количества точек N, тогда точка разрыва $x = \frac{1}{2}$ не совпадет ни с одной точкой разбиения сетки x_n, и значения коэффициента $k(x)$ и разностный аналог производной k_x будут определены. Обозначим ближайшую точку разбиения слева от $x = \frac{1}{2}$ за x_m, а точка x_{m+1} будет точкой разбиения, ближайшей справа.

Решение разностной задачи будем искать в виде кусочно-линейной функции:

$$v_n = \begin{cases} 1 - \alpha x_n, n \le m \\ \beta(1 - x_n), n \ge m + 1 \end{cases}. \tag{8.8}$$

По физическому смыслу решение должно быть непрерывным, то есть

$\lim\limits_{h \to 0} v_n = 1 - \frac{\alpha}{2} = \lim\limits_{h \to 0} v_{n+1} = \beta\left(1 - \frac{1}{2}\right)$. Отсюда следует, что $\alpha + \beta = 2$.

Рассмотрим уравнение (8.7) для случаев $n = m$ и $n = m + 1$. Используя равенства, следующие из (8.8):

$$v_{m-1} = v_m + \alpha h,$$

$$v_{m+2} = v_{m+1} - \beta h,$$

получаем:

$$13v_{m+1} - 13v_m = -19h\alpha,$$

$$v_{m+1} - v_m = -\frac{19\alpha h}{13}$$

и

$$(v_{m+1} - \beta h) - 8v_{m+1} + 7v_m = 0,$$

$$v_{m+1} - v_m = -\frac{\beta h}{7},$$

таким образом,

$$\alpha\frac{19}{13} = \beta\frac{1}{7}.$$

Получаем $\beta = \frac{26}{146} \sim \frac{1}{7}$, при этом $v|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{2} \sim \frac{1}{14}$. То есть решение $u(x)$ дифференциальной задачи отличается от численного решения v_n (рис. 8.1). Причиной расхождения численного и аналитического решений является использование неконсервативной разностной схемы, которая не отражает законы сохранения. В дифференциальной задаче имеет место закон сохранения теплового потока, при составлении разностной схемы мы не обратили на это внимание.

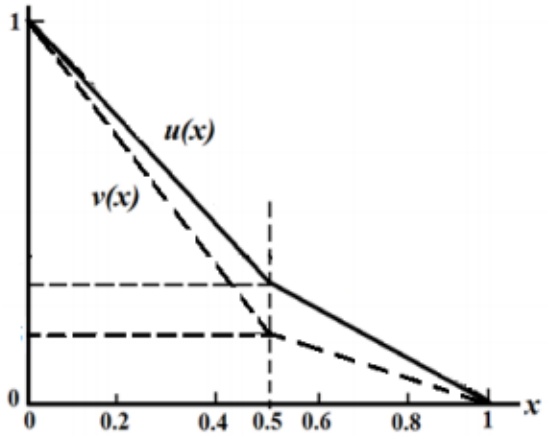

Рис. 8.1. График, иллюстрирующий расхождение аналитического и численного решения задачи (8.6).

ЛЕКЦИЯ 9. КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). СХЕМА БЕГУЩЕГО СЧЕТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Консервативные разностные схемы

Рассмотрим разностную схему для уравнения теплопроводности в случае переменных коэффициентов:

$$u_t = (ku_x)_x + f(x). \tag{9.1}$$

Мы будем считать, что выполняется условие непрерывности теплового потока и производной u_t.

Введем сетку, значения сеточной функции на n-ом временном слое в узлах сетки x_i будем обозначать v_i, а на $n+1$-ом слое – $\hat{v}_i$. Кроме того, введем промежуточные точки $x_{i+\frac{1}{2}} = h + x_{i-\frac{1}{2}} = h\left(i + \frac{1}{2}\right)$ и будем рассматривать в них разностные аналоги потока тепла $W_{i+\frac{1}{2}}$.

Перепишем уравнение (9.1) в виде:

$$u_t = -q_x + f, \tag{9.2}$$

где $q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$. Проинтегрируем (9.2), получим

$$\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_t dx = -\left(q_{i+\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}}\right) + \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx,$$

разностный аналог будет иметь вид

$$\frac{\hat{v}_i - v_i}{\tau} = \frac{q_{i-\frac{1}{2}} - q_{i+\frac{1}{2}}}{h} + g_i,$$

где $g_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(\zeta, t)d\zeta$. Мы не можем вынести функцию f из под интеграла, поскольку она может быть разрывной. Теперь проинтегрируем выражения для потока q, получим

$$u_{i+1} - u_i = -\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{q}{k}dx,$$

разностный аналог будет иметь вид

$$\frac{v_{i+1}-v_i}{h}=-q_{i+\frac{1}{2}}\cdot a_{i+\frac{1}{2}},$$

где $a_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k}$. Мы опять же не можем вынести функцию k из под интеграла, поскольку она может быть разрывной.

В итоге мы получаем следующую разностную схему

$$\frac{\hat{v}_i-v_i}{\tau}=\frac{1}{h}\left\{\frac{v_{i+1}-v_i}{ha_{i+\frac{1}{2}}}-\frac{v_i-v_{i-1}}{ha_{i-\frac{1}{2}}}\right\}+g_i.$$

Напомним, что она является консервативной.

Экономичные разностные схемы

Экономичной разностной схемой называется схема, которая, вопервых, является безусловно устойчивой, во-вторых, требует при расчетах число операций, пропорциональное числу узлов сетки. Создание и использование таких схем важно в многомерных задачах, требующих большого объема вычислений. В основе построения экономичных разностных схем лежит идея сведения многомерной задачи к цепочке одномерных.

Рассмотрим уравнение теплопроводности в двумерном случае:

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}+f.$$

Введем трехмерную сетку по двум пространственным координатам и по времени:

$$x_n=h_xn;n=0,1,\dots,N_x;h_xN_x=l_x;$$

$$y_n=h_ym;m=0,1,\dots,N_y;h_yN_y=l_y;$$

$$t_s=\tau s;s=0,1,\dots,N_t;\tau N_t=T.$$

Для решения задачи можем использовать явную схему, однако для того, чтобы явная схема была устойчивой, необходимо выполнение условия $\tau\le\frac{h_x^2+h_y^2}{8}$. В случае использования неявной схемы получаем сложную систему, которая не решается методом прогонки.

В результате была придумана схема переменных направлений или продольно-поперечная схема. Она устроена так, что переход со слоя на слой осуществляется в два

этапа. Введем промежуточный слой по времени, значение на нем сеточной функции обозначим за $\tilde{v}$. Тогда разностная схема принимает вид

$$\frac{\tilde{v}_{n,m}-v_{n,m}}{\tau/2} = \Lambda_x v_{n,m} + \Lambda_y \tilde{v}_{n,m} + f_{n,m}, \tag{9.3}$$

где

$$\Lambda_x v = \frac{v_{n+1,m} - 2v_{n,m} + v_{n-1,m}}{h_x^2},$$

$$\Lambda_y v = \frac{v_{n,m+1} - 2v_{n,m} + v_{n,m-1}}{h_y^2}.$$

Обратим внимание на то, что схема (9.3) в направлении x построена как явная, а в направлении $y-$ как неявная. То есть схема является неявной только по одному направлению, поэтому ее можно решить методом прогонки. Мы пока сделали только пол шага, на второй половине шага имеем

$$\frac{\hat{v}_{n,m}-\tilde{v}_{n,m}}{\tau/2} = \Lambda_x \hat{v}_{n,m} + \Lambda_y \tilde{v}_{n,m} + \hat{f}_{n,m}. \tag{9.4}$$

В итоге продольно-поперечная схема выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \frac{\tilde{v}_{n,m}-v_{n,m}}{\tau/2} = \Lambda_x v_{n,m} + \Lambda_y \tilde{v}_{n,m} + f_{n,m} \\ \frac{\hat{v}_{n,m}-\tilde{v}_{n,m}}{\tau/2} = \Lambda_x \hat{v}_{n,m} + \Lambda_y \tilde{v}_{n,m} + \hat{f}_{n,m} \end{cases}. \tag{9.5}$$

Расчет (9.5) по схеме переменных направлений требует числа арифметических операций, пропорционального числу узлов сетки: $O(N_x, N_y, N_t)$, и на каждый узел сетки приходится число операций, не зависящее от числа узлов. Схема имеет точность аппроксимации $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

Используя спектральный метод, проанализируем необходимое условие устойчивости схемы (9.5). Рассмотрим переход с s-го на $(s+1)$-й временный слой для однородных уравнений ($f = 0$). Пусть на нулевом слое $v_{n,m}^0 = e^{i\omega n + i\mu n}$, решение на s-ом, $\left(s + \frac{1}{2}\right)$-ом и $(s+1)$-ом слое будем искать в виде:

$$v_{n,m}^s = \lambda^s e^{i\omega n + i\mu n},$$

$$v_{n,m}^{s+\frac{1}{2}} = v_{n,m}^s \cdot \eta,$$

$$v_{n,m}^{s+1} = v_{n,m}^{s+\frac{1}{2}} \cdot \varkappa,$$

где $\varkappa\eta = \lambda$. Подставим такой вид решения в (9.5) и получим:

$$\frac{v_{n,m}^{s+\frac{1}{2}} - v_{n,m}^{s}}{\tau/2} = \frac{v_{n+1,m}^{s} - 2v_{n,m}^{s} + v_{n-1,m}^{s}}{h_x^2} + \frac{v_{n,m+1}^{s+\frac{1}{2}} - 2v_{n,m}^{s+\frac{1}{2}} + v_{n,m-1}^{s+\frac{1}{2}}}{h_y^2},$$

$$\frac{v_{n,m}^{s+1} - v_{n,m}^{s+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \frac{v_{n+1,m}^{s+1} - 2v_{n,m}^{s+1} + v_{n-1,m}^{s+1}}{h_x^2} + \frac{v_{n,m+1}^{s+\frac{1}{2}} - 2v_{n,m}^{s+\frac{1}{2}} + v_{n,m-1}^{s+\frac{1}{2}}}{h_y^2}.$$

Сократим первое уравнение на $v_{n,m}^{s}$, а второе – на $v_{n,m}^{s+\frac{1}{2}}$, получаем:

$$\frac{\eta - 1}{\tau/2} = \frac{e^{-i\omega} - 2 + e^{i\omega}}{h_x^2} + \eta \cdot \frac{e^{-i\mu} - 2 + e^{i\mu}}{h_y^2},$$

$$\frac{\varkappa - 1}{\tau/2} = \varkappa \cdot \frac{e^{-i\omega} - 2 + e^{i\omega}}{h_x^2} + \frac{e^{-i\mu} - 2 + e^{i\mu}}{h_y^2}.$$

Вычисляем $\varkappa$ и η, используя $e^{-i\omega} - 2 + e^{i\omega} = -4\sin^2\frac{\omega}{2}$:

$$\eta = \frac{1 - 2\frac{\tau}{h_x^2}\sin^2\frac{\omega}{2}}{1 + 2\frac{\tau}{h_y^2}\sin^2\frac{\mu}{2}},$$

$$\varkappa = \frac{1 - 2\frac{\tau}{h_y^2}\sin^2\frac{\mu}{2}}{1 + 2\frac{\tau}{h_x^2}\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

Легко проверить, что каждое из чисел $|\varkappa|$ и $|\eta|$ по отдельности при некоторых значениях частот ω, μ и выборе некоторого соотношения шагов τ, h_x, h_y может быть больше единицы. При этом их произведение (поменяли местами знаменатели) всегда

$$|\lambda| = |\eta\varkappa| = \frac{1 - 2\frac{\tau}{h_x^2}\sin^2\frac{\omega}{2}}{1 + 2\frac{\tau}{h_x^2}\sin^2\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{1 - 2\frac{\tau}{h_y^2}\sin^2\frac{\mu}{2}}{1 + 2\frac{\tau}{h_y^2}\sin^2\frac{\mu}{2}} \le 1.$$

Мы проверили, что при любом соотношении шагов выполнено необходимое условие устойчивости, на доказательстве достаточного условия мы останавливаться не будем.

Схема переменных направлений является экономичной разностной схемой в двумерном пространстве, ее нельзя обобщить на трехмерный случай. В трехмерном случае схема, построенная по тому же принципу, что и (9.5), будет неявной только по одному направлению и явной уже по двум; в результате, она уже не будет устойчивой.

Линейно-одномерная схема

Рассмотрим уравнение теплопроводности в трехмерном случае:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + f. \tag{9.6}$$

Идея локально-одномерной схемы вычисления заключается в том, что переход с s-го на $(s+1)$-й временный слой производится в три этапа, на каждом из которых учитывается лишь один из разностных операторов Λ_i. Пусть v – это значение сеточной функции на s-м временном слое, $\hat{v}$ – на $(s+1)$-ом. Вводим еще два массива промежуточных значений $\bar{v}$ и $\bar{\bar{v}}$. Один из возможных вариантов схемы для уравнения (9.6):

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{v} - v}{\tau} = \Lambda_x \bar{v} + f \\ \dfrac{\bar{\bar{v}} - \bar{v}}{\tau} = \Lambda_y \bar{\bar{v}} \\ \dfrac{\hat{v} - \bar{\bar{v}}}{\tau} = \Lambda_z \hat{v} \end{cases}.$$

Мы получили систему разностных уравнений, каждое из которых не аппроксимирует исходное дифференциальное, но может быть легко решено методом прогонки вдоль соответствующего направления. Суммируя уравнения системы, получаем:

$$\frac{\hat{v} - v}{\tau} = \Lambda_x \bar{v} + \Lambda_y \bar{\bar{v}} + \Lambda_z \hat{v} + f.$$

Можно показать, что это уравнение уже аппроксимирует (9.6) с точностью $O\left(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2\right)$. Говорят, что имеет место суммарная аппроксимация, результирующий оператор послойного перехода получился аппроксимирующим.

В полученной разностной схеме уравнения для простоты составлены по чисто неявной схеме. Для повышения точности аппроксимации можно использовать схему с весами. Возможны также другие способы учета правой части f, например, введение ее во все уравнения с весовыми множителями, которые подбираются из условий наилучшей суммарной аппроксимации (минимизации ошибки аппроксимации на следующем слое по времени).

Приведенная выше схема является абсолютно устойчивой. Применяя при ее вычислениях метод прогонки, получаем, что число необходимых операций пропорционально числу узлов сетки, таким образом, локально-одномерная схема является экономичной.

Итерационные методы при решении нелинейных уравнений

При изучении высокотемпературных процессов необходимо учитывать зависимость коэффициентов теплоемкости и теплопроводности от температуры. Рассмотрим простейшее нелинейное уравнение теплопроводности:

$$u_t = k(u)u_{xx}.$$

Пусть $v -$ это значение сеточной функции на s-м временном слое, $\hat{v} -$ на $(s+1)$-ом. Дополнительно вводим итерации $\hat{v}^{(i)}$ значения сеточной функции на $(s+1)$-ом слое. Получаем следующую схему:

$$\frac{\hat{v}_n^{(i)} - v_n}{\tau} = k\left(\hat{v}^{(i-1)}\right)\frac{\hat{v}_{n+1}^{(i)} - 2\hat{v}_n^{(i)} + \hat{v}_n^{(i)}}{h^2}.$$

В качестве нулевой итерации $\hat{v}_n^{(0)}$ на $(s+1)$-ом временном слое обычно берут значение v_n сеточной функции на s-м слое. Суть метода в том, что мы нелинейное уравнение превращаем в линейное путем «заморозки» коэффициента k: аргумент $\hat{v}^{(i-1)}$ берем из предыдущей итерации.

Обычно либо считают фиксированное число итераций, либо считают до тех пор, пока не будет выполнено $\left|\hat{v}_n^{(i+1)} - \hat{v}_n^{(i)}\right| < \varepsilon$, где $\varepsilon -$ заранее заданное число.

Схемы бегущего счета для уравнения переноса

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t + \mathrm{C}u_x = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x). \\ u(0,t) = \mu(x) \end{cases} \tag{9.7}$$

Как обычно вводим равномерную сетку:

$$x_n = hn; n = 0,1,\dots,N_x; hN_x = X;$$

$$t_s = \tau s; s = 0,1,\dots,N_t; \tau N_t = T.$$

Для данной задачи можно написать несколько различных разностных схем, которые называются схемами бегущего счета. Рассмотрим следующие аппроксимации верхнего уравнения системы (9.7) и соответствующие шаблоны:

$$\frac{\hat{v}_n - v_n}{\tau} + C\frac{v_n - v_{n-1}}{h} = 0, \tag{9.8}$$

$$\frac{\hat{v}_n - v_n}{\tau} + C\frac{\hat{v}_{n+1} - \hat{v}_n}{h} = 0, \qquad (9.9)$$

$$\frac{\hat{v}_n - v_n}{\tau} + C\frac{\hat{v}_n - \hat{v}_{n-1}}{h} = 0, \qquad (9.10)$$

$$\frac{\hat{v}_{n+1} - v_{n+1}}{\tau} + \frac{\hat{v}_n - v_n}{\tau} + C\frac{\hat{v}_{n+1} - \hat{v}_n}{h}C\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = 0. \qquad (9.11)$$

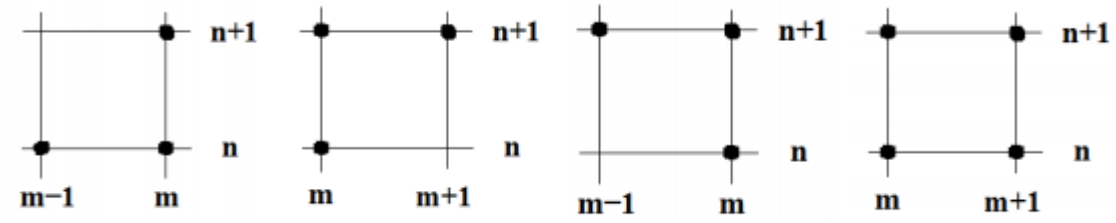

Рис. 9.1. Шаблоны разностных схем (9.8), (9.9), (9.10) и (9.11), соответственно.

Вычисления по схемам бегущего счета очень просты алгоритмически. Зная из условий задачи (9.7) значения разностной функции на нулевом по времени слое и в левой точке на первом слое, последовательно слева направо определяем значения на всем первом слое. Далее повторяем операцию на следующем временном слое и т.д.

Давайте исследуем схему (9.8), начнем с анализа необходимого условия устойчивости спектральным методом. Пусть $v_n = e^{i\omega n}$ и $\hat{v}_n = \lambda e^{i\omega n}$, подставим такой вид решения в (9.8) и поделим уравнение на v_n, получим:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + C\frac{1 - e^{-i\omega}}{h} = 0,$$

$$\lambda = 1 + \frac{\tau C}{h}\left(e^{-i\omega} - 1\right).$$

Значения λ при различных ω лежат на окружности радиуса $\frac{\tau C}{h}$, изображенной на рис. 9.2. Схема будет устойчива, если λ лежат внутри круга единичного радиуса. Малая окружность будет лежать внутри большой при $\frac{\tau C}{h} \leq 1$.

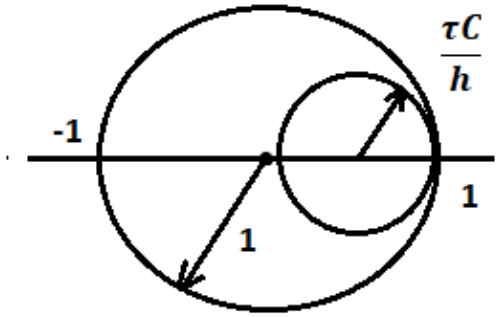

Рис. 9.2. Иллюстрация анализа устойчивости схемы (9.8).

Теперь проверим, что полученное необходимое условие на соотношение шагов τ и h является также и достаточным условием устойчивости схемы (9.8). Рассмотрим схему в случае неоднородного уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{v}_n - v_n}{\tau} + C\dfrac{v_n - v_{n-1}}{h} = f_n. \\ v_n^0 = \varphi_n \end{cases}$$

Пусть выполнено необходимое условие устойчивости $\frac{\tau C}{h} \leq 1$. Перепишем нашу схему следующим образом:

$$\hat{v}_n = v_n\left(1 - \frac{\tau C}{h}\right) + \frac{\tau C}{h} v_{n-1} + \tau f_n.$$

Мажорируем левую часть уравнения, получаем:

$$|\hat{v}_n| \leq \|v\|\left(1 - \frac{\tau C}{h}\right) + \frac{\tau C}{h}\|v\| + \tau\|f\|,$$

$$\|\hat{v}\| \leq \|v\| + \tau\|f\|.$$

Следовательно, $\|v\| \leq \|\varphi\| + T\|f\|$. Эта оценка, по определению, означает устойчивость решения задачи по начальным данным и правой части. Таким образом, схема (9.8) является условно устойчивой.

Можно аналогично исследовать схемы (9.9)-(9.11) или использовать, так называемый, геометрический критерий.

Геометрический критерий устойчивости схемы бегущего счета

Существует простой геометрический критерий, позволяющий установить условия устойчивости той или иной схемы бегущего счета по виду шаблона. На каждом

шаге вычисления по любой из рассматриваемых схем, в одной из точек шаблона разностная функция ищется, а в остальных уже известна. Проведем характеристику уравнения (9.7) из точки, в которой мы ищем решение. (Характеристикой является прямая $x - ct = const$). Если шаги τ и h выбраны так, что эта характеристика пересекает отрезок соединяющий точки шаблона, в которых решение известно, то схема будет устойчивой; если же характеристика проходит мимо такого отрезка, то неустойчивой.

На левом рис. 9.3 показан случай, когда схема (9.8) устойчива, на правом рис. 9.3 – когда неустойчива. Получаем условие $\tau \leq \frac{h}{c}$. Светлым маркером помечена точка шаблона, в которой ищем решение, темным – точка, где решение известно, пунктиром – характеристика. Аналогично на рис. 9.4 для схемы (9.9), и $\tau \geq \frac{h}{c}$.

Рис. 9.3. Шаблоны устойчивой (слева) и неустойчивой (справа) схемы (9.8).

Рис. 9.4. Шаблоны устойчивой (слева) и неустойчивой (справа) схемы (9.9).

Для схем (9.10) и (9.11) характеристика всегда пересекает отрезок, соединяющий точки, в которых решение известно. На рис. 9.5 этот отрезок изображен точками. Таким образом, данные схемы являются безусловно устойчивыми.

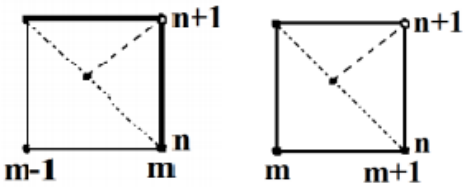

Рис. 9.5. Шаблоны схем (9.10) и (9.11).

Как мы говорили ранее, четырехточечная схема (9.11) имеет более высокий порядок аппроксимации, чем трехточечные, и является безусловно устойчивой. Однако она имеет недостаток по сравнению с трехточечными схемами: она не является монотонной.

Разностная схема называется монотонной, если она обладает следующим свойством: из того, что разностная функция $v_{n,m}$ на s-ном временном слое монотонно меняется с изменением номера s, следует, что она будет также монотонно меняться и на $(s+1)$–ом слое. Можно показать, что линейная монотонная разностная схема для уравнения переноса не может иметь второй или более высокий порядок точности. В качестве иллюстрации сказанного, рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x,0) = 1 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}. \tag{9.12}$$

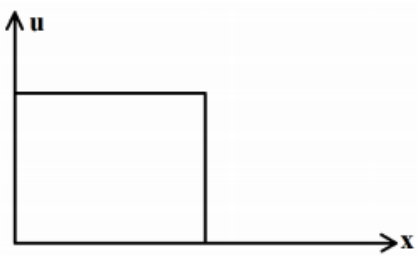

Рис. 9.6. Точное решение задачи (9.12).

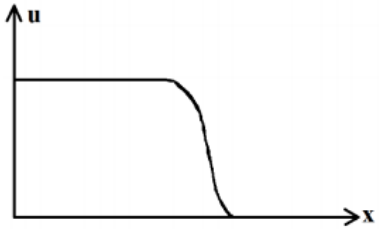

Рис. 9.7. Решение задачи (9.12), полученное с помощью монотонной схемы (9.10).

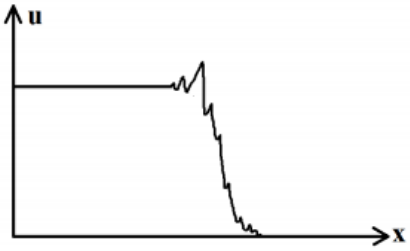

Рис. 9.8. Решение задачи (9.12), полученное с помощью немонотонной схемы (9.11).

ЛЕКЦИЯ 10. ВАРИАЦИОННЫЕ И ПРОЕКИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Сведение дифференциальной задачи к вариационной

Рассмотрим в области D следующую задачу:

$$\begin{cases} Lu = f \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases}. \tag{10.1}$$

Мы будем использовать обозначения $(u, v) = \int_D uvdv$ и $\|u\|^2 = (u, u)$. Пусть L:

a) Линейный самосопряженный оператор, то есть $(Lu, v) = (u, Lv)$ для любых $u|_{\Sigma} = v|_{\Sigma} = 0$.
b) Отрицательно определенный оператор, то есть для любого u выполнено: $-(Lu, u) \geq \gamma\|u\|^2$, где $\gamma = const > 0$.

Рассмотрим следующий функционал:

$$I[u] = 2(u, f) - (Lu, u) \tag{10.2}$$

и для него следующую вариационную задачу:

$$\begin{cases} I[u] \to min \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases}. \tag{10.3}$$

Покажем, что если функция u является решением задачи (10.1), то она является и решением задачи (10.3).

Рассмотрим приращение функционала $I[u]$:

$$I[u + \delta u] - I[u] = 2(u + \delta u, f) - (L(u + \delta u), u + \delta u) - 2(u, f) + (Lu, u) = 2(\delta u, f) - (L\delta u, u) - (Lu, \delta u) - (L\delta u, \delta u) = 2(-Lu + f, \delta u) - (L\delta u, \delta u). \tag{10.4}$$

Вариация функционала, то есть линейная часть приращения, равна нулю при $-Lu + f = 0$. Следовательно, экстремаль функционала в задаче (10.3) является решением задачи (10.1). На этой экстремали достигается сильный минимум, поскольку $-(L\delta u, \delta u) \geq \gamma\|\delta u\|^2$.

Пусть, наоборот, $u -$ решение задачи (10.1), тогда $(-Lu + f, \delta u) = 0$. Зная, что $-(L\delta u, \delta u) \geq \gamma\|\delta u\|^2 \geq 0$, делаем вывод, что $I[u + \delta u] - I[u] \geq 0$ для любой функции $u + \delta u$. Следовательно, решение задачи (10.1) является решением и задачи (10.3).

Примером самосопряженного отрицательно определенного оператора может служить дифференциальный оператор:

$$Au = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u.$$

Действительно, легко проверить, что Au является самосопряженным:

$$\int_a^b vAudx = \int_a^b v[(pu')' - qu]dx = \int_a^b u[(pv')' - qv]dx = \int_a^b uAvdx.$$

Теперь покажем знакоопределенность оператора, учтем, что $p, q > 0$:

$$-(Au, u) = -\int_a^b u[(pu')' - qu]dx = \int_a^b u[p(u')^2 + qu^2]dx \geq \gamma \int_a^b u^2 dx = \gamma\|\delta u\|^2,$$

где $\gamma = \min(q)$.

Метод Ритца

Пусть функционал $I[u]$, заданный выражением (10.2), определен на множестве $u \in U$. Выберем некоторую систему линейно-независимых функций $\{\varphi_n\} \in U$. Фиксируем произвольное натуральное число N, будем строить функции вида

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n. \tag{10.5}$$

Их совокупность образует множество U_N.

Обозначим точное решение задачи (10.3) как $\bar{u}$, тогда минимальное значение функционала есть $\min\limits_{u \in U} I[u] = I[\bar{u}] = \bar{\mu}$. Минимум $I[u_N]$ на множестве U_N обозначим как $\min\limits_{u_N \in U_N} I[u_N] = I[\bar{u}_N] = \mu_N$, а функцию, на которой этот минимум достигается, как $\bar{u}_N$. Требуется ответить на вопрос: верно ли, что $\bar{u}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \bar{u}$ и $\mu_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \bar{\mu}$.

<u>Теорема.</u> Пусть система функций $\{\varphi_n\}$ такова, что $\forall u\ \forall \varepsilon > 0$ существуют $N(\varepsilon)$ и u_N такие, что $|I[u_N] - I[u]| < \varepsilon$. Тогда $\mu_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \bar{\mu}$ и $\|\bar{u}_N - \bar{u}\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

<u>Доказательство</u>:

В соответствие с условиями теоремы можно выбрать ε, по нему $N(\varepsilon)$ и u_N так, что $|I[u_N] - I[\bar{u}]| < \varepsilon$. Мы можем убрать знак модуля, поскольку U является более полным множеством, то есть $U_N \subset U_{N-1} \subset U$, тогда $I[u_N] - I[\bar{u}] < \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ существуют $N(\varepsilon)$ и μ_N такие, что

$$\varepsilon > I[u_N] - I[\bar{u}] \geq I[\bar{u}_N] - I[\bar{u}] = \mu_N - \bar{\mu}.$$

Мы доказали сходимость $\mu_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \bar{\mu}$.

Рассмотрим $\bar{u}_N$ как сумму $\bar{u}_N = \bar{u} + \delta u$, тогда согласно (10.4) получим

$$I[u_N] - I[\bar{u}] = \mu_N - \mu = -(L\delta u, \delta u) \geq \gamma\|\delta u\|^2 = \gamma\|\bar{u}_N - \bar{u}\|^2,$$

$$\|\bar{u}_N - \bar{u}\|^2 \leq \frac{\mu_N - \mu}{\gamma} < \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Таким образом, мы доказали сходимость $\|\bar{u}_N - \bar{u}\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Перейдем к построению решения. Можем представить функционал I на множестве U_N в виде:

$$I[u_N] = I\left[\sum_{n=1}^{N} C_n\varphi_n\right] = \Phi(C_1, \dots, C_N).$$

Задача минимизации функционала сводится к минимизации функции N переменных. Вспоминаем, что

$$I[u_N] = \Phi(C_1, \dots, C_N) = 2\left(f, \sum_{n=1}^{N} C_n\varphi_n\right) - \left(\sum_{n=1}^{N} C_n\varphi_n, L\left(\sum_{n=1}^{N} C_n\varphi_n\right)\right).$$

Для поиска минимума функции Φ решаем систему уравнений:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C_i} = 0, i = 1, \dots, N.$$

Дифференцируем выражение для $\Phi(C_1, \dots, C_N)$ по C_m, получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C_m} = 2(f, \varphi_m) - (\varphi_m, Lu_N) - (u_N, L\varphi_m) = 2(f - Lu_N, \varphi_m) = 0.$$

Таким образом, для определения коэффициентов C_m получаем систему уравнений:

$$(Lu_N - f, \varphi_m) = 0, m = 1, \dots, N. \qquad (10.6)$$

Заметим, что интеграл $I[u]$ в выражении (10.6) не фигурирует. Можно непосредственно искать приближенное решение задачи (10.1) в форме (10.5). В этом случае для определения коэффициентов C_m также получим уравнения (10.6), это будет, так называемый, метод Ритца в дифференциальной форме. Мы вводили интеграл $I[u]$ и рассматривали интегральные соотношения для доказательства сходимости u_N к точному решению.

Уравнения (10.6) можно переписать в виде:

$$\sum_{n=1}^{N} C_n\alpha_{mn} = \beta_m, \qquad (10.7)$$

где $\alpha_{mn} = (L\varphi_n, \varphi_m)$ и $\beta_m = (\varphi_m, f)$. Докажем единственность решения системы (10.7). Для этого нужно доказать, что однородная система имеет только тривиальное решение:

$$\sum_{n=1}^{N} C_n\alpha_{mn} = 0. \qquad (10.8)$$

Умножим (10.8) на C_m и просуммируем по m, получим:

$$0 = \sum_{m=1}^{N} C_m \sum_{n=1}^{N} C_n(L\varphi_n, \varphi_m) = \sum_{m=1}^{N} C_m(u_N, L\varphi_m) = \sum_{m=1}^{N} C_m(\varphi_m, Lu_N) = (u_N, Lu_N).$$

Воспользуемся знакоопределенностью оператора L:

$$0 = -(u_N, Lu_N) \geq \gamma\|u_N\|^2$$

Следовательно, $u_N = 0$, что доказывает единственность решения системы (10.7).

Рассмотренный метод Ритца относится к, так называемым, проекционным методам. Соотношению (10.6) можно придать следующий геометрический смысл: в

качестве приближенного решения задачи (10.1) ищется функция u_N такая, что проекция вектора $Lu_N - f$ на плоскость, образованную векторами $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, равна нулю.

Проекционные методы

Метод Галеркина.

Данный метод нахождения приближенного решения задачи (10.1) применяется в случае, когда оператор L не является самосопряженным и знакоопределенным. Алгоритм аналогичен методу Ритца. Приближенное решение ищется в виде разложения по базисным функциям $u_N = \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n$, где коэффициенты определяются из системы уравнений (10.6).

Метод наименьших квадратов.

Если в задаче (10.1) малые изменения функции f приводят к малым изменениям решения u, то есть обратный оператор L^{-1} ограничен, то решение задачи можно искать из условия минимизации функционала невязки:

$$\|Lu - f\|^2 \to min.$$

Ищем приближенное решение задачи в виде $u_N = \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n$. Подставим u_N в функционал невязки:

$$\|Lu - f\|^2 = \left(L\left(\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n\right) - f, L\left(\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n\right) - f \right)$$
$$= \left(L\left(\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n\right), L\left(\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n\right) \right) - 2\left(L\left(\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n\right), f \right) + (f, f).$$

Условие минимума:

$$\frac{\partial}{\partial C_m} \|Lu - f\|^2 = (L\varphi_m, Lu_N) + (Lu_N, L\varphi_m) - 2(L\varphi_m, f) = 0,$$

откуда получаем систему уравнений на коэффициенты C_m:

$$(Lu_N - f, L\varphi_m) = 0, m = 1, \dots, N.$$

Метод моментов.

Метод Галеркина для интегральных уравнений называют методом моментов. Пусть нам дано интегральное уравнение:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x).$$

Приближенное решение ищем в виде разложения по некоторой базисной системе функций $\{\varphi_n\}$:

$$y_N = \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n + f.$$

Подставляя указанный вид решения в уравнение, получаем:

$$\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \left[\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(s) + f(s) \right] ds.$$

Скалярно умножая на φ_m и интегрируя последнее уравнение, приходим к линейной системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N} C_n(\varphi_m, \varphi_n) = \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,s)\varphi_m(x) \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(s)\, dxds + \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,s)\varphi_m(x) f(s) dxds,$$

$$\sum_{n=1}^{N} C_n \alpha_{mn} = \beta_m,$$

где

$$\alpha_{mn} = (\varphi_n, \varphi_m) - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,s)\varphi_m(x)\varphi_n(s) dxds,$$

$$\beta_m = \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,s)\varphi_m(x) f(s) dxds.$$

Разностные схемы для уравнений с разрывными коэффициентами, основанные на вариационных принципах. Метод конечных элементов

Рассмотрим способ построения разностной схемы, использующий метод конечных элементов, для задачи:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = f(x), 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}. \qquad (10.9)$$

Введем по x равномерную сетку $w^h = \left\{x_i = hi, i = 0,1,\dots,N = \frac{1}{h}\right\}$, значения сеточной функции в узлах – v_i. Аппроксимируем функцию $u(x)$ непрерывной ломаной линией $u^h(x)$, линейной на каждом отрезке $x_i \le x \le x_{i+1}$:

$$u^h(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h} v_i + \frac{x - x_i}{h} v_{i+1},$$

где v_i подлежат определению. Можем представить u^h в виде суммы:

$$u^h = \sum_{i=0}^{N} v_i \varphi_i(x),$$

где функции φ_i определяются следующим образом:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases},$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h}, x \in [0, x_1] \\ 0, x \notin [0, x_1] \end{cases},$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{h}, x \in [x_{N-1}, 1] \\ 0, x \notin [x_{N-1}, 1] \end{cases}.$$

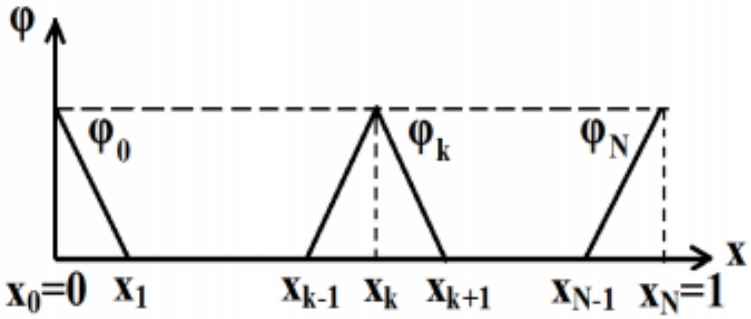

Рис. 10.1. Графики функций $\varphi_i(x)$.

Мы знаем, что наша дифференциальная задача (10.9) сводится к задаче минимизации функционала:

$$\begin{cases} I[u] = \int\limits_0^1 \left[p(x) \left(\dfrac{du}{dx} \right)^2 + q(x)u^2 + 2uf \right] dx \to min \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

Теперь подставим полученную аппроксимацию u^h функции $u(x)$ в функционал $I[u]$ и поменяем местами интегрирование и суммирование, получим:

$$I[u] = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left[p(x) \left(\frac{du^h}{dx} \right)^2 + q(x)(u^h)^2 + 2u^h f \right] dx.$$

Условие минимизации функционала принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial v_m} I[u] = 0.$$

Учтем, что

$$(u^h)^2 = (v_i w_1 + v_{i+1} w_2)^2,$$
$$\frac{\partial}{\partial v_i} (u^h)^2 = \alpha v_i + \beta v_{i+1}$$

и так далее. В результате мы получим систему вида:

$$A_i v_{i-1} + B_i v_i + C_i v_{i+1} = F_i, i = 1, \dots, N-1. \qquad (10.10)$$

Коэффициенты A_i, B_i, C_i, F_i принимают довольно сложный вид. Мы получили консервативную разностную схему. Задачу (10.10) можно решать методом прогонки.

ЛЕКЦИЯ 11. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Вариационный подход к решению задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля в области G:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases}. \tag{11.1}$$

Умножая уравнение задачи (11.1) на u, интегрируя по области G и применяя формулу Грина, получаем:

$$-(\nabla u, \nabla u) + \lambda(u, u) = 0.$$

Введем функционал $I[u] = \frac{(\nabla u, \nabla u)}{(u,u)}$ и рассмотрим для него вариационную задачу:

$$\begin{cases} I[u] \to min \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases}. \tag{11.2}$$

Покажем, что если функция $\bar{u} \neq 0$ является решением задачи (11.2), то она также является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля (11.1), а $\mu = I[\bar{u}] = \min\limits_{u} I[u]$ – ее наименьшим собственным значением.

Рассмотрим приращение функционала $I[u]$:

$$I[u + \delta u] - I[u] = \frac{\big(\nabla(u + \delta u), \nabla(u + \delta u)\big)}{(u + \delta u, u + \delta u)} - \frac{(\nabla u, \nabla u)}{(u, u)}$$
$$= 2\frac{(\nabla u, \nabla \delta u)(u, u) - (\nabla u, \nabla u)(u, \delta u)}{(u, u)^2} + O(\delta u^2).$$

Вариация функционала на решении $\bar{u}$ должна быть равна нулю:

$$\delta I[\bar{u}] = (\nabla \bar{u}, \nabla \delta u) - \mu(\bar{u}, \delta u),$$
$$(\delta u, \Delta \bar{u} + \mu \bar{u}) = 0,$$

здесь мы учли, что $\mu = I[\bar{u}] = \frac{(\nabla \bar{u}, \nabla \bar{u})}{(\bar{u}, \bar{u})}$. Поскольку δu – произвольная вариация, имеем:

$$\Delta \bar{u} + \mu \bar{u} = 0.$$

Таким образом, минимум функционала $I[u]$ определяется уравнением системы (11.1), то есть решение задачи (11.2) является решением задачи Штурма-Лиувилля, эквивалентность задач доказана.

Метод малого параметра

Как известно, многие физические задачи описываются нелинейными уравнениями, аналитические решения которых могут быть найдены лишь в редких случаях. Тем не менее, в физике часто встречаются задачи с, так называемой, слабой нелинейностью. В таких задачах нелинейные члены малы по сравнению с линейной частью, это отношение малости можно рассматривать как малый параметр. Простейшим примером является задача о свободных колебаниях математического

маятника. Из курса механики известно, что точное уравнение, описывающее колебания, выглядит следующим образом:

$$\ddot{u} + \omega^2 \sin u = 0.$$

Поскольку это уравнение аналитически не решается, то обычно рассматривают лишь случай предельно малых колебаний, при которых полагают, что $\sin u \cong u$. Тогда получаем:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0.$$

Решение этого вырожденного уравнения хорошо известно. Если же нас интересует более точное решение, то помимо первого члена надо удерживать также следующий член разложения Тейлора: $\sin u \cong u + \frac{u^3}{3!}$. Тогда получаем:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \frac{\omega^2 u^3}{6}.$$

Представим u в виде $u = A\varphi(t)$, подставляем в уравнение, получаем:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = \frac{A^2\omega^2}{6}\varphi^3.$$

Величину $\mu = \frac{A^2\omega^2}{6}$ можно рассматривать как малый параметр и искать поправки к гармоническому решению.

Регулярный случай.

Этот случай рассматривался в курсе дифференциальных уравнений, кратко напомню некоторые результаты. Рассмотрим задачу на интервале $0 \le t \le T$:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, t, \varepsilon) \\ y|_{t=0} = y^0 \end{cases}. \tag{11.3}$$

Пусть известно решение $\bar{y}$ вырожденной задачи:

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}} = f(\bar{y}, t, 0) \\ \bar{y}|_{t=0} = y^0 \end{cases}. \tag{11.4}$$

Будем искать решение задачи (11.3) в виде ряда по степеням ε:

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots.$$

Подставим такой вид решения в правую часть уравнения (11.3), а затем функцию $f(y, t, \varepsilon)$ также разложим по степеням ε:

$$f(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots, t, \varepsilon)$$
$$= f(y_0, t, 0) + \varepsilon\left[f_y(y_0, t, 0)y_1 + f_\varepsilon(y_0, t, 0)\right] + \varepsilon^2\left[\frac{f_{yy}}{2}y_1^2 + f_y y_2 + f_{y\varepsilon}y_1\right]$$
$$+ \cdots.$$

Отсюда получаем следующую цепочку соотношений, приравнивая члены при одинаковых степенях ε. При ε в нулевой степени имеем:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = f(y_0, t, 0) \\ y_0 = y^0 \end{cases}.$$

С точностью до обозначений мы получили задачу (11.4), решение которой известно. При ε в первой степени имеем:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f(y_0, t, 0)y_1 + f_\varepsilon(y_0\,, t, 0) \\ y_1|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, для нахождения функций $y_i(t)$, где $i = 1,2, \dots$, получаем последовательность задач, каждая из которых представляет собой задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{y}_i = f_y(y_0, t, 0)y_i + Q_i(y_0\,, \dots, y_{i-1}, t, \varepsilon) \\ y_i|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

Неоднородности $Q_i(y_0\,, \dots, y_{i-1}, t, \varepsilon)$ содержат функции $y_i(t)$, найденные ранее из соответствующих задач для $y_0\,, \dots, y_{i-1}$.

В курсе дифференциальных уравнений было доказано, что

$$\left| y(t, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i y_i(t) \right| \le O(\varepsilon^{n+1}),$$

таким образом, можно найти решение задачи (11.3) с необходимой степенью точности.

Случай сингулярного возмущения.

К данному случаю относятся задачи, в которых малый параметр стоит множителем при старшей производной. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{y} = f(y, t) \\ y|_{t=0} = y^0(\varepsilon) \end{cases}. \tag{11.5}$$

Особенностью такой задачи является то, что соответствующее вырожденное уравнение $f(\bar{y}, t) = 0$ является алгебраическим уравнением. Его решение в общем случае не удовлетворяет начальным условиям. Кроме того, уравнение $f(\varphi(t), t) = 0$ может иметь несколько корней – решений $\varphi_i(t)$. Возникает вопрос, к какому из них стремится $y(t)$ – решение задачи (11.5) при $\varepsilon \to 0$.

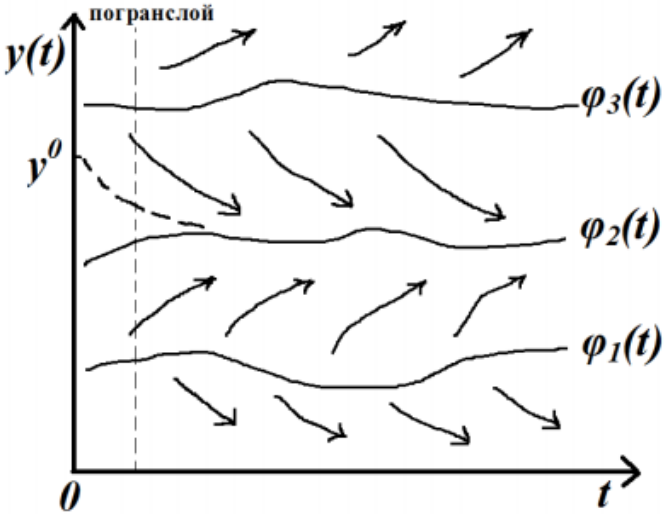

Рис. 11.1. Графики решений вырожденного уравнения $f(\varphi(t), t) = 0$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На рис. 11.1 изображен случай трех корней $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$. В области между каждыми двумя решениями функция f сохраняет знак, следовательно, сохраняет знак и $\dot{y}$. Стрелками показан ход интегральных кривых с ростом t. Рассмотрим область вокруг корня $\varphi_2(t)$. Выше $\varphi_2(t)$ интегральные кривые опускаются, функция f отрицательна, а ниже – кривые поднимаются, f положительна. При переходе через корень $\varphi_2(t)$ функция f меняет знак с положительного на отрицательный. Интегральные кривые сходятся к тому корню, для которого $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi_i(t), t) < 0$. Такое решение $\varphi_i(t)$ вырожденного уравнения $f(\varphi(t), t) = 0$ является устойчивым. Областью влияния некоторого корня называется область в пространстве $\{t, y\}$, в которой интегральные кривые направлены к этому корню.

Имеет место теорема, утверждающая, что если $\varphi_i(t)$ является устойчивым корнем вырожденного уравнения и начальное значение y^0 находится в области влияния этого корня, то для любого $t > 0$ решение $y(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \varphi_i(t)$. Очевидно, равномерной сходимости нет, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $t > 0$ настолько малым, что для разности имеем $y(t) - \varphi_i(t) \cong y^0 - \varphi_i(0)$. Существует пограничный слой (область значений t вблизи нуля), где разность $y(t) - \varphi_i(t)$ быстро убывает, но является существенной.

Построение равномерной асимптотики.

Для построения равномерной по t асимптотики в задаче (11.5) решение строят в виде ряда, содержащего регулярную и сингулярную части:

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \cdots + \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \cdots, \tag{11.6}$$

где $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. Правая часть уравнения (11.5) также представляют аналогично в виде:

$$f = F + \psi, \tag{11.7}$$

где регулярная часть представляет собой $F(t) = f(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \cdots, t)$, а сингулярная часть – $\psi(t) = f(y_0(\tau\varepsilon) + \varepsilon y_1(\tau\varepsilon) + \cdots + \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \cdots, \tau\varepsilon) - f(y_0(\tau\varepsilon) + \varepsilon y_1(\tau\varepsilon) + \cdots, \tau\varepsilon)$.

Подставляем (11.6) и (11.7) в уравнение (11.5), приравниваем слагаемые при одинаковых степенях ε отдельно для регулярной части разложения и для сингулярной. Учитываем, что $\varepsilon \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$. Тогда, приравняв слагаемые при ε^0, имеем:

$$\begin{cases} f(y_0(t), t) = 0 \\ \frac{d\Pi_0}{d\tau} = f(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) - f(y_0(0), 0), \\ \Pi_0(0) = y_0^0 - y_0(t) \end{cases} \tag{11.8}$$

где y_0^0 появляется из соотношения $y|_{t=0} = y^0(\varepsilon) = y_0^0 + \varepsilon y_1^0 + \cdots$.

Приравняв слагаемые при ε^1, получаем:

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dt} = f_y(y_0(t),t)y_1 \\ \frac{d\Pi_1}{d\tau} = f_y(y_0(0)+\Pi_0(\tau),0)\Pi_1(\tau) + Q, \\ \Pi_1(0) = y_1^0 - y_1(t) \end{cases} \tag{11.9}$$

где

$$Q = \left[f_y(y_0(0)+\Pi_0(\tau),0) - f_y(y_0(0),0)\right]y_0'^{(0)} + \left[f_t(y_0(0)+\Pi_0(\tau),0) - f_t(y_0(0),0)\right]\tau.$$

Обратим внимание, что первое из уравнений (11.9) – это алгебраическое уравнение, из которого находится y_1 при уже известной функции y_0.

Для произвольной степени ε^i имеем:

$$\begin{cases} \frac{dy_{i-1}}{dt} = f_y(y_0(t),t)y_i \\ \frac{d\Pi_i}{d\tau} = f_y(y_0(0)+\Pi_0(\tau),0)\Pi_i(\tau) + Q_i \\ \Pi_i(0) = y_i^0 - y_i(t) \end{cases}.$$

Можно показать, что

$$\left| y(t,\varepsilon) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(y_i(t) + \Pi_i\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right| \le O(\varepsilon^{n+1}).$$

<u>Пример</u>.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{y} = y - y^2 \\ y|_{t=0} = \frac{1}{2} + \varepsilon \end{cases}. \tag{11.10}$$

Решениями вырожденного уравнения $y - y^2 = 0$ являются функции $y(t) = 0$ и $y(t) = 1$. Устойчивым из них будет только второе решение, так как в этом случае $f_y = 1 - 2y < 0$. Согласно (11.8) получаем систему:

$$\begin{cases} y_0 - y_0^2 = 0 \to y_0 = 1 \\ \frac{d\Pi_0}{d\tau} = y_0(0) + \Pi_0(\tau) - \left(y_0(0) + \Pi_0(\tau)\right)^2 \\ \Pi_0(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Второе уравнение данной системы перезапишем в виде:

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = 1 + \Pi_0(\tau) - \left(1 + \Pi_0(\tau)\right)^2 = -\Pi_0(\tau) - \Pi_0^2(\tau).$$

Это уравнение является уравнением Бернулли. Решением его будет функция

$$\Pi_0(\tau) = -\frac{1}{1+e^{\tau}}.$$

Получаем асимптотическое приближение решения задачи (11.10) в виде:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{1+e^{t/\varepsilon}} + O(\varepsilon).$$

Для получения следующего члена разложения выпишем систему (11.9):

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ \dfrac{d\Pi_1}{d\tau} = 1 - 2\left(1 - \dfrac{1}{1+e^{\tau}}\right)\Pi_1. \\ \Pi_1(0) = 1 \end{cases}$$

Решением системы является функция

$$\Pi_1(\tau) = \frac{4e^{\tau}}{(1+e^{\tau})^2}.$$

Получаем второе приближение решения задачи (11.10):

$$y(t) = 1 - \frac{1}{1+e^{t/\varepsilon}} + \frac{4e^{t/\varepsilon}}{(1+e^{t/\varepsilon})^2} + O(\varepsilon^2).$$

Метод осреднения

Рассмотрим ламповый генератор колебаний. Справедливы известные соотношения между зарядом Q и разностью потенциалов U на конденсаторе, током I через него и током I_a в анодной цепи лампы:

$$Q = CU, I = \dot{Q}, I_a = S(U),$$
$$S'(U) = S_0 - S_1U^2,$$
$$L\dot{I} = -U + M\dot{I}_a.$$

Исключая из приведенных выше уравнений Q, I и I_a, получаем:

$$LC\ddot{U} + U - MS'(U)\dot{U} = 0,$$
$$LC\ddot{U} + U - M(S_0 - S_1U^2)\dot{U} = 0.$$

Вводя обозначения $t = \frac{\tau}{\sqrt{LC}}$, $y = \sqrt{\frac{S_1}{S_0}}$ и $\varepsilon = \frac{MS_0}{\sqrt{LC}}$, получим уравнение Ван-дер-Поля, описывающее колебания в генераторе:

$$\begin{cases} \ddot{y} - \varepsilon(1-y^2)\dot{y} + y = 0 \\ y|_{t=0} = y^0 \\ y'|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

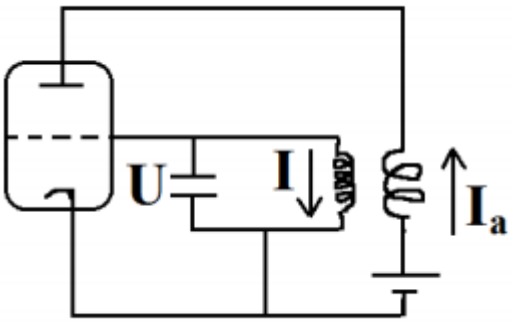

Рис. 11.2. Ламповый генератор.

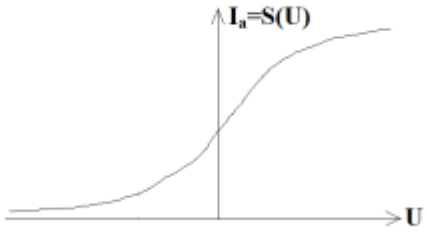

Рис. 11.3. ВАХ лампового генератора.

ЛЕКЦИЯ 12. МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). МЕТОД ВКБ

Метод осреднения

На прошлой лекции мы начали рассматривать метод осреднения для задачи лампового генератора, мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{y} - \varepsilon(1-y^2)\dot{y} + y = 0 \\ y|_{t=0} = y^0 \\ y'|_{t=0} = 0 \end{cases}. \tag{12.1}$$

Задача рассматривается на большом промежутке времени $0 \le t \le T \sim O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Можем переписать уравнение (12.1) следующим образом:

$$\ddot{y} + y = \varepsilon(1-y^2)\dot{y}$$

и рассматривать правую часть как малое регулярное возмущение. Решение будем искать в виде

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \cdots. \tag{12.2}$$

В нулевом приближении получим уравнение

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0,$$

его решением является функция $y_0(t) = y^0 \cos t$. В первом приближении имеем уравнение

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -y^0 \sin t\,(1 - (y^0)^2 \cos^2 t) = A \sin t + B \sin 3t.$$

Так как частота первого слагаемого вынуждающей силы совпадает с характеристическим числом уравнения, то имеет место резонансный случай. Как известно, при этом $y_1(t)$ содержит слагаемое, неограниченно возрастающее по времени: $y_1(t) = \frac{t}{2}\cos t +$ колебания.

Видно, что второе слагаемое в (12.2) за время $t \sim O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ становится не малым по сравнению с первым и метод разложения решения в ряд (12.2) по степеням ε (иначе говоря, регулярный метод малого параметра) неприменим. Этот случай является типичным для уравнений, описывающих колебания со слабой нелинейностью на большом интервале времени. Возникающие затруднения, преодолеваются различными методами, одним из которых является метод осреднения. В физике его часто называют методом медленно меняющихся амплитуд. Существенный вклад в его развитие внесли Н.М.Крылов и Н.Н.Боголюбов.

Формализм метода.

Рассмотрим систему в так называемой стандартной форме:

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon), \tag{12.3}$$

где $x -$ искомый вектор, $X -$ заданная вектор-функция. Предполагается, что X достаточно гладкая и допускает осреднение по t, то есть существует функция $\langle X(x, \varepsilon)\rangle$, определяемая следующим образом:

$$\langle X(x,\varepsilon)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(x,t,\varepsilon)dt.$$

Интеграл берется по явно входящей переменной t при фиксированном параметре x. Если X является 2π-периодической функцией переменной t, то осредненная функция $\langle X(x,\varepsilon)\rangle$ определяется из соотношения:

$$\langle X(x,\varepsilon)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(x,t,\varepsilon)dt.$$

Решение будем искать в виде суммы медленно меняющейся ζ и быстро меняющейся частей:

$$x = \zeta + \varepsilon u_1(\zeta,t) + \varepsilon^2 u_2(\zeta,t) + \cdots. \tag{12.4}$$

Функция ζ удовлетворяет системе вида:

$$\dot{\zeta} = \varepsilon A_1(\zeta) + \varepsilon^2 A_2(\zeta) + \cdots. \tag{12.5}$$

Функции $u_i(\zeta,t)$ *и* $A_i(\zeta)$ подлежат определению. Для того, чтобы представление (12.4) могло служить источником равномерных асимптотических приближений переменной x, функции $u_i(\zeta,t)$ должны быть ограниченными. Разложим функцию $X(x,t,\varepsilon)$ по степеням ε:

$$X(x,t,\varepsilon) = X_0(x,t) + \varepsilon X_1(x,t) + \varepsilon^2 X_2(x,t) + \cdots.$$

Подставим (12.4) в (12.3), получим:

$$\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \varepsilon\dot{u}_1 + \varepsilon^2\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}A_1 + \varepsilon^2\dot{u}_2 + \cdots = \varepsilon X_0(\zeta,t) + \varepsilon^2 X_1(\zeta,t) + \varepsilon^2\frac{\partial X_0}{\partial\zeta}u_1.$$

Приравнивая члены при ε и ε^2 из правой и левой части, получаем:

$$A_1 + \dot{u}_1 = X_0, \tag{12.6}$$

$$A_2 + \dot{u}_2 = X_1 - \frac{\partial u_1}{\partial\zeta}A_1 + \frac{\partial X_0}{\partial\zeta}u_1 = F. \tag{12.7}$$

Представим правую часть (12.6) в виде $\langle X_0\rangle + (X_0 - \langle X_0\rangle)$, где среднее значение $\langle X_0(\zeta)\rangle$ не зависит от t.

Приравниваем друг другу функции, не зависящие от t и зависящие от t, получаем:

$$A_1 = \langle X_0\rangle,$$

$$\dot{u}_1 = X_0 - \langle X_0\rangle.$$

Аналогично для уравнения (12.7):

$$A_2 = \langle F\rangle,$$
$$\dot{u}_2 = F - \langle F\rangle.$$

Первое приближение.

В формуле (12.5) отбросим квадратичные слагаемые, при этом в $\dot{\zeta}$ мы внесем ошибку $O(\varepsilon^2)$, тогда можно ожидать, что на большом интервале $T \sim O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ошибка ζ составит $O(\varepsilon)$. Тогда в (12.4) погрешность порядка ε возникает уже в первом слагаемом, то удерживать член εu_1 и следующие не имеет смысла. В результате для первого приближения имеем:

$$x_1 = \zeta_1,$$
$$\dot{\zeta}_1 = \varepsilon A_1(\zeta_1) = \varepsilon\langle X_0\rangle.$$

Улучшенное первое приближение.

В данном случае мы в (12.4) удерживаем слагаемое вида εu_1:

$$x_1 = \zeta_1 + \varepsilon u_1(\zeta_1, t),$$

где

$$\dot{\zeta}_1 = \varepsilon A_1(\zeta_1),$$
$$\dot{u}_1 = X_0 - \langle X_0\rangle.$$

Второе приближение.

В формуле (12.5) отбрасываем члены порядка ε^3, ошибка для $\dot{\zeta}$ составит $O(\varepsilon^2)$, тогда за время $T \sim O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ набежит ошибка ζ порядка $O(\varepsilon^2)$. В результате для второго приближения имеем:

$$x_2 = \zeta_2 + \varepsilon u_1(\zeta_2, t),$$
$$\dot{\zeta}_2 = \varepsilon A_1(\zeta_2) + \varepsilon^2 A_2(\zeta_2),$$
$$\dot{u}_1(\zeta_2, t) = X_0 - \langle X_0\rangle.$$

Улучшенное второе приближение.

В формуле (12.4) удерживаем слагаемое вида $\varepsilon^2 u_2$ и далее действуем аналогично предыдущим пунктам.

Вернемся к рассмотрению задачи (12.1), представим ее в стандартном для метода осреднения виде:

$$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = \varepsilon(1 - y^2)z - y \\ y|_{t=0} = y^0 \\ z|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

Будем искать решение в виде $y(t) = a(t)\cos\big(t + \theta(t)\big)$, тогда $z(t) = -a(t)\sin\big(t + \theta(t)\big)$, при $\varepsilon = 0$ имеем $a(t) = const$ и $\theta(t) = 0$. Подставим $y(t), z(t)$ в первое уравнение системы, получим:

$$\dot{a}\cos(t + \theta) - a\sin(t + \theta) - a\sin(t + \theta)\,\dot{\theta} = -a\sin(t + \theta).$$

Аналогично проделаем со вторым уравнением, в итоге после всех выкладок мы получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\left[\frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right) - \frac{a}{2}\cos 2(t+\theta) + \frac{a^3}{8}\cos 4(t+\theta)\right] \\ \dot{\theta} = \varepsilon\left[\frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\sin 2(t+\theta) - \frac{a^3}{8}\sin 2(t+\theta)\right] \\ a|_{t=0} = y^0 \\ \theta|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

Вводя обозначения

$$x = \begin{pmatrix} a \\ \theta \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} y^0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right) - \frac{a}{2}\cos 2(t+\theta) + \frac{a^3}{8}\cos 4(t+\theta) \\ \frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\sin 2(t+\theta) - \frac{a^3}{8}\sin 2(t+\theta) \end{pmatrix},$$

получаем задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x,t) \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases}.$$

В *первом приближении* имеем:

$$x_1 = \zeta_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\zeta}_1 = \varepsilon\begin{pmatrix} \frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Распишем уравнения построчно, получим задачу

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = \varepsilon\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{a_1^2}{4}\right) \\ \dot{\theta}_1 = 0 \\ a_1|_{t=0} = y^0 \\ \theta_1|_{t=0} = 0 \end{cases}. \qquad (12.8)$$

Решением системы (12.8) являются функции

$$a_1(t) = \frac{2y^0}{\sqrt{(y^0)^2 + (4-y^0)^2 e^{-\varepsilon t}}},$$

$$\theta_1 = 0.$$

Верхнее уравнение имеет две точки покоя $a_1 = 0$ и $a_1 = 2$, для первой точки имеем $\left.\frac{\partial\langle X_1(a_1)\rangle}{\partial a_1}\right|_{a_1=0} = \frac{1}{2} > 0$, для второй – $\left.\frac{\partial\langle X_1(a_1)\rangle}{\partial a_1}\right|_{a_1=2} = -\frac{1}{2} < 0$. Следовательно, стационарная точка $a_1 = 0$ неустойчива, а $a_1 = 2$ устойчива. Интегральные кривые удаляются от начала координат фазовой плоскости и притягиваются к окружности радиуса 2 (рис. 12.1). Множества точек на фазовой плоскости, притягивающие к себе

интегральные кривые, называются аттракторами. В данном случае аттрактором для интегральных кривых уравнения Ван-дер-Поля в первом приближении является окружность радиуса 2 с центром в начале координат, $y \xrightarrow[t\to\infty]{} 2\cos t$.

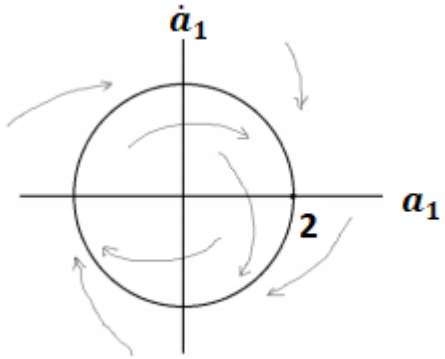

Рис. 12.1. Интегральные кривые на фазовой плоскости.

В *улучшенном первом приближении* имеем:

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1^3}{32}\sin 4(t+\theta_1) - \frac{a_1}{4}\sin 2(t+\theta_1) \\ \frac{a_1^2}{32}\cos 4(t+\theta_1) - \frac{1}{4}\left(1-\frac{a_1^2}{4}\right)\cos 2(t+\theta_1) \end{pmatrix}.$$

Во *втором приближении*:

$$\begin{cases} \dot{a}_2 = \varepsilon\frac{a_2}{2}\left(1-\frac{a_2^2}{4}\right) \\ \dot{\theta}_2 = -\varepsilon^2\left(\frac{1}{8}-\frac{a_2^2}{8}+\frac{7a_2^4}{256}\right) \end{cases}.$$

Получаем второе приближение стационарного колебательного решения уравнения Ван-дер-Поля:

$$y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} y_{\text{стац}}(t) = 2\cos\left(\left(1-\frac{\varepsilon^2}{16}\right)t+\theta_0\right) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3\left(\left(1-\frac{\varepsilon^2}{16}\right)t+\theta_0\right).$$

На фазовой плоскости аттрактор представляет собой окружность с центром в нуле и радиусом, равным 2, «помятую» на величину ~ ε (рис. 12.2).

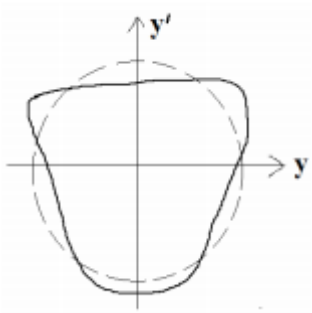

Рис. 12.2. Аттрактор во втором приближении.

Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса и Бриллюэна)

Пусть требуется найти фундаментальную систему решений уравнения

$$\mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q^2(x) y = 0 \tag{12.9}$$

на отрезке $a \le x \le b$, при этом $\mu -$ некоторое малое число, а $Q(x) > 0 -$ заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Такие уравнения возникают, например, в квантовой механике, когда требуется решить уравнение Шредингера, при условии $E > U(x)$:

$$\boldsymbol{\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + [E - U]\psi = 0}.$$

Решение вырожденного уравнения (12.8) (при $\mu = 0$) тождественно равно нулю. Поэтому, прежде всего, нужно так преобразовать (12.8), чтобы можно было выделить основную часть решения, вокруг которой строятся дополнительные асимптотически малые добавки. Для этого в уравнении (12.8) сделаем замену искомой функции:

$$y(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{Q(x)}},$$

тогда для производных имеем

$$y_x = \frac{u_x}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{2}\frac{u}{Q^{3/2}},$$

$$y_{xx} = \frac{u_{xx}}{\sqrt{Q}} - \frac{u_x Q_x}{Q^{3/2}} - \frac{u Q_{xx}}{2Q^{3/2}} + \frac{3}{4}\frac{u Q_x^2}{Q^{5/2}}.$$

Далее делаем замену переменных:

$$t = \frac{1}{\mu}\int_a^x Q(\zeta) d\zeta,$$

тогда

$$u_x = u_t \frac{Q}{\mu},$$

$$u_{xx} = u_{tt}\frac{Q^2}{\mu^2} + u_t \frac{Q_x}{\mu}.$$

Подставляем все в уравнение (12.9) и получаем:

$$\mu^2 \left[u_{tt}\frac{Q^2}{\mu^2\sqrt{Q}} + u_t \frac{Q_x}{\mu\sqrt{Q}} - u_t \frac{Q}{\mu}\frac{Q_x}{Q^{3/2}} + u\left(\frac{3}{4}\frac{Q_x^2}{Q^{5/2}} - \frac{Q_{xx}}{2Q^{3/2}}\right)\right] + Q^2 \frac{u}{\sqrt{Q}} = 0,$$

в итоге мы придем к задаче:

$$\begin{cases} u_{tt} + u + \mu^2 F u = 0 \\ u(a) = A, u'(a) = B' \end{cases} \tag{12.10}$$

где $F = \frac{3}{4}\frac{Q_x^2}{Q^4} - \frac{1}{2}\frac{Q_{xx}}{Q^3}$.

Вырожденным решением (12.10) будет функция $\bar{u} = C\cos t + D\sin t$. Рассмотрим разность $z = u - \bar{u}$, подставляя ее в уравнение (12.10), с учетом граничных условий, получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} z'' + z = \mu^2 F z - \mu^2 F \bar{u} \\ z(a) = 0, z'(a) = 0 \end{cases}.$$

Решение задается формулой

$$z(t) = \mu^2 \int_0^t \sin(t-\tau)\, F(\tau) z(\tau)\, d\tau - \mu^2 \int_0^t \sin(t-\tau)\, F(\tau)\bar{u}(\tau)\, d\tau.$$

Введем обозначения $F_0 = \max\limits_{a\le x\le b}|F|, F_1 = \max\limits_{a\le x\le b}|\bar{u}F|, z_0 = \max\limits_{a\le x\le b}|z|$ и мажорируем полученное выражение для $z(t)$:

$$z \le \mu^2 t z_0 + \mu^2 t F_1 \le \mu z_0 C_1 + \mu C_1 F_1,$$

мы учли, что $t \le \frac{1}{\mu}\int_a^b Q(\zeta)d\zeta = \frac{C_1}{\mu}$. Поскольку неравенство выполнено для всех z, для z_0 имеем

$$z_0 \le \mu z_0 C_1 + \mu C_1 F_1,$$

$$z_0 \le \frac{\mu C_1 F_1}{1 - \mu C_1}.$$

Таким образом, с точностью до членов порядка μ фундаментальная система решений уравнения (12.9) будет иметь вид:

$$y(x) = \frac{A\sin\left(\frac{1}{\mu}\int_a^x Q(\zeta)d\zeta\right) + B\cos\left(\frac{1}{\mu}\int_a^x Q(\zeta)d\zeta\right) + O(\mu)}{\sqrt{Q}}.$$

ЛЕКЦИЯ 13. НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ОБЪЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Вейвлет-анализ

С начала 17 века по настоящее время астрономы ведут наблюдения за изменением солнечной активности, изучая пятна на солнце, порожденные выбросами плазмы. Обозначим среднегодовое количество солнечных пятен как $f(t)$, характер этой функции изображен на рис. 13.1.

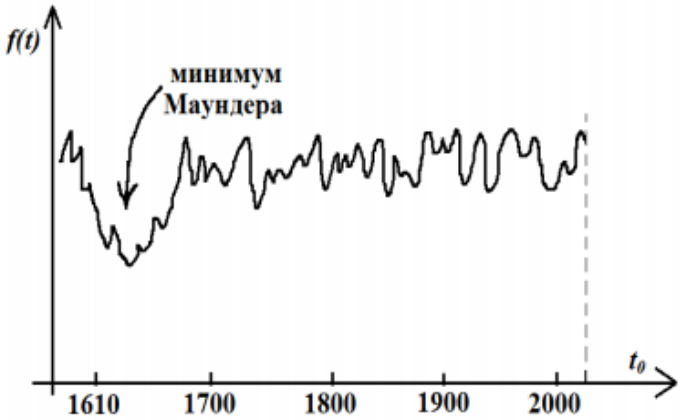

Рис. 13.1. График солнечной активности.

Солнечная активность меняется с периодом примерно в 11 лет. Однако это изменение не является строго периодичным. Возникает вопрос: имеются ли колебания других периодов? Наиболее простой путь поиска ответа на поставленный вопрос – это применить разложение в спектр Фурье:

$$A(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \tag{13.1}$$

где $t_1 - 1610$ год, время начала наблюдений Галилеем пятен на Солнце, а $t_2 -$ настоящее время. Однако такой путь имеет существенные недостатки, поскольку разложение (13.1) может давать искаженные результаты.

Как известно, преобразование Фурье будет строгим, если брать интеграл по всей действительной прямой:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

В связи с отсутствием данных приходится брать интеграл по отрезку (t_1, t_2), а не по всей числовой прямой, что эквивалентно внесению искажения в функцию $f(t)$. Это может приводить к большим погрешностям в определении $A(\omega)$, в том числе, к появлению лишних пиков, не имеющих под собой физического обоснования.

Второй недостаток использования преобразования Фурье состоит в том, что функция $A(\omega)$ характеризует спектральный состав сразу за весь период наблюдения, в среднем, а на рис. 13.1 видно, что интенсивность колебаний $f(t)$ менялась от века к веку. Представляет интерес вопрос о том, как меняются частотные характеристики с течением времени.

В 1980 году Морле предложил следующее преобразование:

$$F(\omega, t_0) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)\psi(\omega, t_0, \tau)d\tau,$$

которое стало называться вейвлет-преобразованием. Морле использовал ядро $\psi(\omega, t_0, t) = e^{i\omega(t-t_0)}e^{-a(t-t_0)^2}$. Функция $\psi(\omega, t_0, t)$ представляет собой волновой пакет с огибающей $e^{-a(t-t_0)^2}$, которая убывает при отклонении t от t_0. Функция $F(\omega, t_0)$ дает представление о частотных составляющих функции $f(t)$ в окрестности t_0. Кроме того, отсутствие информации о $f(t)$ при $t \notin (t_1, t_2)$ не сказывается на $F(\omega, t_0)$, при t_0 далеких от концов интервала интегрирования.

На рис. 13.2 приведен примерный вид получаемого результата. Затемнение определяет величину $F(\omega, t_0)$. Видно, что кроме периода в 11 лет в солнечной активности присутствуют и другие периоды, самый существенный из них порядка 100 лет. Амплитуда спектральных характеристик меняется, например, заметно падение, приходящееся на минимум Маундера.

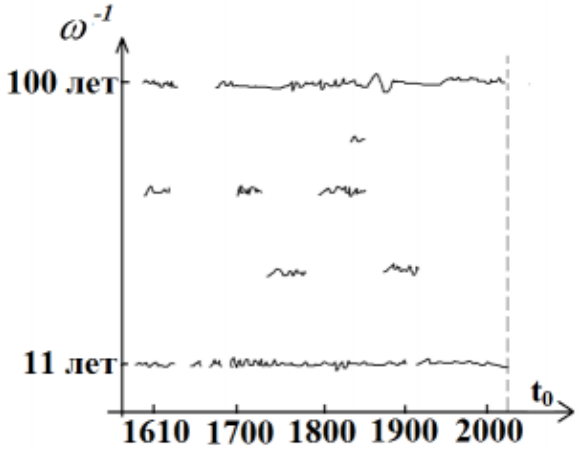

Рис. 13.2. Диаграмма солнечной активности.

Сильной стороной преобразования Фурье является простота его обратного преобразования. Можно показать, что для вейвлет-преобразования также существует обратное, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega, t_0, \tau)d\tau = 0. \qquad (13.2)$$

У Морле условие (13.2) строго не выполняется, но при малых значениях коэффициента a выполняется приближенно. Условие (13.2) выполняется строго, например, для следующей функции, прозванной за форму графика «мексиканской шляпой»:

$$\psi(\omega, t_0, \tau) = (1 - \omega^2(t - t_0)^2)e^{-\frac{\omega^2}{2}(t-t_0)^2}.$$

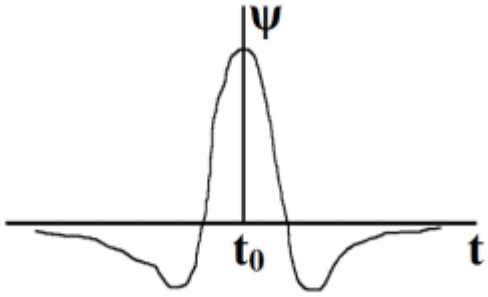

Рис. 13.3. «Мексиканская шляпа».

При выполнении (13.2) обратное преобразование существует, но вид его достаточно сложный. Пусть $\psi = \psi\big(\omega(t - t_0)\big)$, и известна функция прямого преобразования $W = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*\big(\omega(t - t_0)\big)dt$. Для того, чтобы получить обратное преобразование введем следующие вспомогательные операции:

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega t)e^{i\omega t}dt,$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|}{|\omega|}d\omega,$$

тогда само обратное преобразование примет вид:

$$f(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{5/2}\left[\int_{0}^{\infty} \psi\big(\omega(t - t_0)\big)W(\omega, t_0)\,dt_0\right]d\omega.$$

Таким образом, достоинством рассматриваемого подхода является именно прямое вейвлет-преобразование, дающее большую информацию о спектральных характеристиках, чем преобразование Фурье. В то же время, его корректность позволяет использовать функцию $F(\omega, t_0)$ для получения дополнительной информации.

Рассмотрим следующий пример: для центральной Англии имеются данные наблюдений среднегодовой температуры, начиная с 1659 года, они имеют примерно такой же вид, какой изображен на рис. 13.1. Подвергнув имеющуюся зависимость вейвлет-преобразованию, получим функцию $F(\omega, t_0)$. Для вейвлет-преобразования аналогом Фурье-образа является функция $A(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} F(\omega, t_0)dt_0$, в рассматриваемом примере она имеет вид, показанный на рис.13.4.

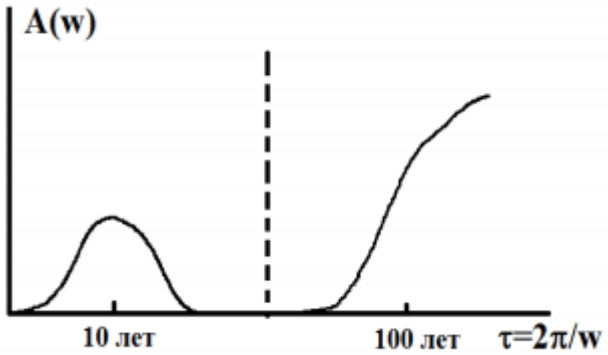

Рис. 13.4. Фурье-образ вейвлет-преобразования в задаче наблюдения среднегодовой температуры.

Обнуляя функцию $A(\omega)$ левее пунктира на рисунке, отсекая тем самым колебания высокой частоты, и совершая обратное преобразование для оставшейся части функции $A(\omega)$, получаем представления о медленных изменениях климата.

В результате было получено, что потепление началось до начала интенсивной индустриальной деятельности человечества, а значит оно не связано с загрязнением окружающей среды.

Фракталы

Фракталы – это структуры, состоящие из частей, подобных целому. В 1904 г. Хелге фон Кох рассмотрел необычную кривую. Часто ее приводят в курсе математического анализа как пример непрерывной, но не дифференцируемой кривой. Рассмотрим отрезок единичной длины, удалим из него среднюю треть и дополним двумя отрезками длиной $1/3$. Отрезок превратиться в ломанную из 4-х звеньев. Применим ту же самую процедуру к каждому из отрезков ломанной. Будем повторять эту процедуру бесконечное число раз.

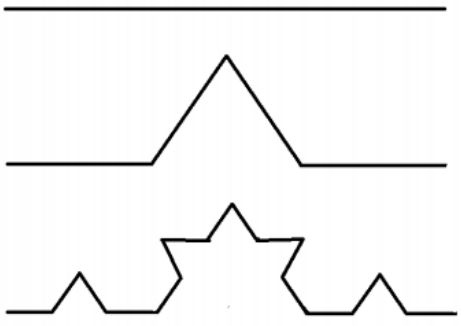

Рис. 13.5. Этапы построения кривой Коха.

В 1915 г. Вацлав Серпинский придумал несколько интересных конструкций, названных впоследствии его именем. Прокладка Серпинского или салфетка

Серпинского получается из равностороннего треугольника следующим образом: проведем в треугольнике средние линии и удалим ограниченную ими центральную часть треугольника, повторим эту процедуру по отношению к каждому из полученных треугольников и так до бесконечности.

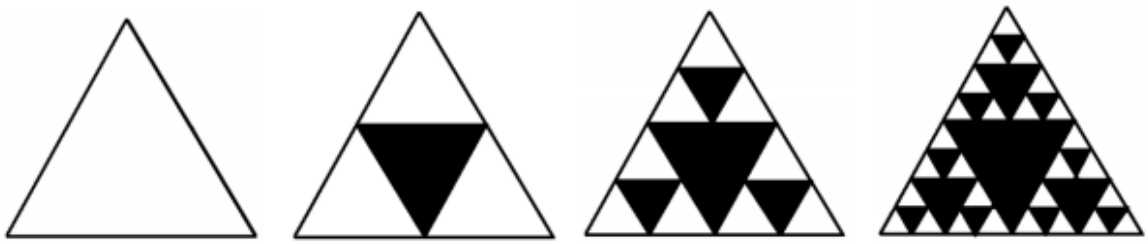

Рис. 13.6. Этапы построения прокладки Серпинского.

Можно подойти к определению фрактала с другой стороны, сказав, что фракталы – это фигуры не целой размерности. Например, если разбить единичный куб на $N = 8$ равных кубов со стороной $l = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} = \frac{1}{2}$, то объем исходного куба будет равен $1 = Nl^3$. Или если разбить равносторонний треугольник средними линиями на $N = 4$ равных треугольника со стороной $l = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{2}$, то площадь исходного треугольника будет равна $1 = Nl^2$. В обоих случаях выполняется соотношение $1 = Nl^d$, где $d -$ размерность самоподобия. В рассмотренных примерах она выражалась целым числом и совпадала с Евклидовой размерностью, в общем случае размерность самоподобия может быть вычислена по формуле:

$$d = -\frac{\ln N}{\ln l}.$$

Найдем размерность самоподобия для кривой Коха, она окажется дробной: $d = -\frac{\ln 4}{\ln 1/3}$.

Множество физических объектов имеют фракталоподобную структуру. Типичные природные фракталы – деревья, реки, облака, береговая линия, кровеносная система человека, пористые среды. Фракталами являются дендриты (от греч. дендрон – дерево). Дендритоподобные структуры возникают в различных областях физики, например, при кристаллизации металлов. Дендритоподобную структуру имеет обыкновенная снежинка.

При моделировании физических процессов с объектами, имеющими фрактальную структуру, чаще всего встает вопрос о соотношении между площадями поверхности и объемами фрактальной структуры и ее частей при различной подробности описания объекта.

Синергетика

Процессы, влияющие друг на друга, называются синергетическими (от греческого «совместные»). Классические модели, описывающие такие процессы, выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(u,v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(u,v) \end{cases}.$$

Первая система, имеющая подобную структуру, была названа «брюсселятором»:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a + vu^2 - (b+1)u \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - vu^2 + bu \end{cases}.$$

Можно показать, что при разных значениях коэффициентов a и b могут возникать бегущие импульсы, стоячие волны, автоколебания и стационарные структуры. Исследование подобных процессов является относительно новым направлением в моделировании. В нашем курсе мы сталкивались с явлением взаимного влияния нелинейных процессов друг на друга с образованием устойчивых колебаний в задаче «хищник-жертва».

Детерминированный хаос

Мы привыкли к тому, что задание начальных условий – координат и импульсов – однозначно определяет последующую эволюцию механической системы. Известно изречение Лапласа: "Дайте мне начальные условия, и я предскажу будущее мира". Однако исследования последних 50 лет показали, что не все так просто. Встречаются задачи, в которых процесс подчинен определенным законам, но выглядит, как беспорядочный. Уверенность в возможности предсказания поведения детерминированной системы зиждется на интуитивном представлении о том, что малые изменения начальных условий ведут к малому изменению решения. Если это не так и малые флуктуации начальных условий приводят к существенному изменению решения, то создается впечатление о том, что решение хаотично.

Рассмотрим пример двойного плоского маятника с точечными массами m_1 и m_2, изображенный на рис. 13.7. Система имеет две степени свободы – это два угла φ_1 и φ_2. Если отклонение от положения равновесия мало, то система, как и в случае простого маятника, совершает регулярные гармонические колебания. Однако при увеличении полной энергии наступает такой момент, когда колебания становятся хаотическими.

Два близких начальных условия приводят, в конце концов, к совершенно различной динамике этой системы с двумя степенями свободы.

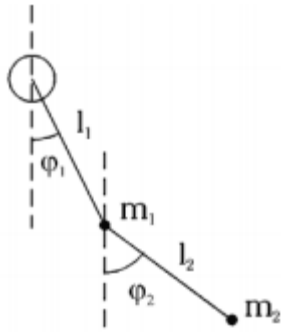

Рис. 13.7. Двойной плоский маятник.

Другой классический пример – это задача трех тел. Частным случаем последней является движение частицы в гравитационном поле двух неподвижных точечных масс. Даже если движение происходит в одной плоскости, траектория частицы выглядит чрезвычайно сложной и запутанной: она то обвивается вокруг одной из масс, то неожиданно перескакивает к другой. На рис. 13.8 вверху показана начальная часть траектории, а внизу ее продолжение. Первоначально близкие траектории очень быстро расходятся.

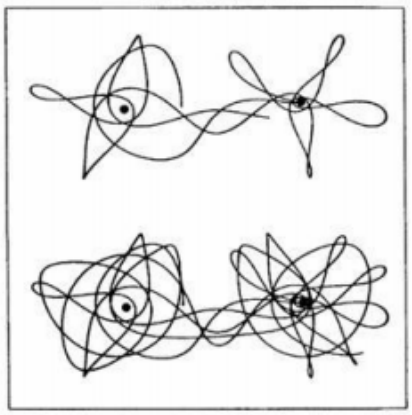

Рис. 13.8. Траектории движения частицы в задаче трех тел.

Спустя 70 лет Э.Лоренц решал совершенно другую задачу о тепловой конвекции жидкости. Слой жидкости конечной толщины подогревается снизу так, что между верхней – холодной и нижней – горячей поверхностями поддерживается постоянная разность температур. Нагретая жидкость вблизи дна, расширяясь, стремится подняться вверх, и, наоборот, холодная вблизи верха жидкость – опуститься вниз. Максимально упрощая уравнения Навье-Стокса, описывающие это явление, Лоренц случайно наткнулся на то, что даже сравнительно простая система из трех связанных нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка может иметь решением совершенно

хаотические траектории. Эта система уравнений, ставшая теперь классической, имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = \alpha(y - x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = \beta x - xz - y. \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = xy - \gamma z \end{cases}$$

Переменная x пропорциональна скорости конвективного потока, y описывает разность температур для потоков вверх и вниз, z характеризует отклонение профиля температуры от линейного в продольном направлении, вдоль приложенного градиента температуры, α, β и γ – параметры. Решение системы уравнений определяет траекторию в трехмерном фазовом пространстве (x, y, z). Ввиду однозначности функций, стоящих в правых частях этих уравнений, траектория никогда не пересекает сама себя.

Лоренц исследовал вид этих траекторий при разных начальных условиях для некоторого набора параметров (α, β, γ). Он обнаружил, что траектория хаотическим образом блуждает из полупространства $x > 0$ в полупространство $x < 0$, формируя две почти плоских, перепутанных сложным образом спирали.

На рис. 13.9 показана проекция этих спиралей на плоскость xz для некоторого начального условия. Траектория сначала делает 1 оборот справа, затем 20 слева, затем опять 1 справа, затем 4 слева и так далее. Похожее поведение было найдено и при других значениях параметров. Изначально близкие кривые сильно расходятся. Создается впечатление, что процесс носит произвольный непредсказуемый характер, в то время, как на самом деле он детерминирован.

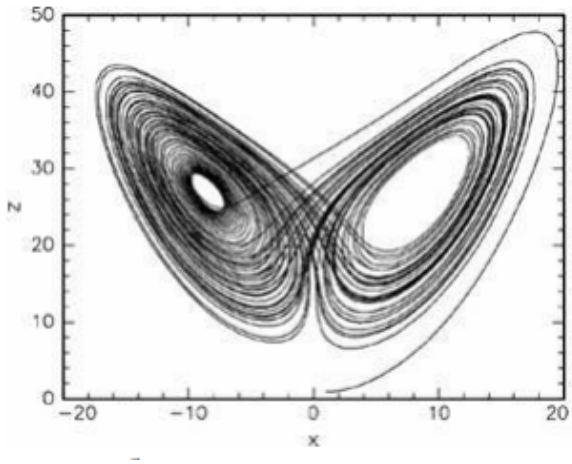

Рис. 13.9. Проекция траектории на ось xz в задаче Лоренца.

Подобные проявления детерминированного хаоса встречаются во многих задачах математики, физики, биологии, информатики, экономики, финансов.

Исследование вопросов, связанных с этими задачами является одним из новых направлений математического моделирования.

Перколяция

Возьмем квадрат, разделим его на маленькие квадратики, будем случайным образом выбирать какой-то квадратик и выводить его из строя. С течением времени сложится ситуация, когда наметится какой-то проход сквозь квадрат, состоящий из выключенных квадратиков, либо массив разделится на две части. Вопрос ставится так: при каком количестве вышедших из строя звеньев конструкция разрушается, или, наоборот, при каком количестве образовавшихся пор, если это проводящая среда, образуются каналы протекания. Данное научное направление называется теорией перколяции, грубо говоря, это определение процента бракованных звеньев, при котором конструкция разрушается.

Метод обратной задачи рассеяния

Идея метода заключается в следующем, если у нас имеется некоторая функция – решение уравнения с начальными условиями, мы можем сделать прямое и обратное преобразование для искомой функции. Сделав некоторое прямое преобразование, мы получим, так называемые, данные рассеяния. Далее, имея дифференциальное уравнение, мы можем посмотреть, как эти данные рассеяния меняются со временем. А потом решить обратную задачу и по данным рассеяния восстановить функцию. Каждый из этих этапов линейный, а в результате получается решение нелинейной задачи.

Прямое преобразование. I часть.

Пусть у нас есть функция $u(x,t)$, быстро убывающая на бесконечности, то есть

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)u dx\right| < A.$$

Рассмотрим задачу на бесконечном участке $-\infty < x < \infty$:

$$\psi_{xx} + \big(\lambda - u(x,t)\big)\psi = 0, \tag{13.3}$$

при этом выполняется условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2 dx = 1.$$

Считаем потенциал u заданной функцией, t в уравнении (13.3) участвует, как параметр. Требуется определить значения λ, при которых существует нетривиальная, нормированная на единицу функция ψ, удовлетворяющая уравнению (13.3).

Поскольку u убывает на бесконечности, то при больших x решение уравнения

$$\psi_{xx} + \lambda\psi = 0$$

выглядит, как $e^{\pm\sqrt{-\lambda}x}$. Условие нормировки может быть выполнено только при $\lambda < 0$. Функция $\psi(x,t)$ имеет на бесконечности асимптотику $\psi_n \sim C_n e^{-\eta_n x}$, где $\eta_n = \sqrt{-\lambda_n}$. Решая задачу (13.3), находим $\{C_n, \eta_n\}$ по заданной $u(x,t)$.

Прямое преобразование. II часть.

Решаем задачу:

$$\psi_{xx} + \left(k^2 - u(x,t)\right)\psi = 0. \tag{13.4}$$

В случае $u = 0$ существует решение вида $\psi_0 = e^{-ikx}$, соответствующее волне, идущей из бесконечности. Ищем результат рассеяния этой волны на неоднородности u. Иными словами, по заданной функции $u(x,t)$ из уравнения (13.4) нужно рассчитать проходящую и отраженную часть ψ. Характер асимптотики в этом случае будет следующим:

$$\begin{cases} \psi(x,t) \sim e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx}, x \to \infty \\ \psi(x,t) \sim a(k,t)e^{-ikx}, x \to -\infty \end{cases}.$$

Находим коэффициенты отражения $\{b(k,t)\}$ по заданной функции $u(x,t)$ для всех k. Совокупность $\{C_n(t), \eta_n(t), b(k,t)\}$ называется данными рассеяния.

Обратная задача рассеяния.

Составляем функцию

$$B(x,t) = \sum_n C_n^2(t)e^{-\eta_n(t)x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k,t)e^{ikx}dk.$$

Далее решаем линейное интегральное уравнение Гельфанда – Левитана:

$$K(x,y,t) + B(x+y,t) + \int_x^{\infty} B(x+\alpha,t)K(x,\alpha,t)d\alpha = 0.$$

Тогда искомая функция принимает вид

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t).$$

Таким образом, функция может быть построена по данным рассеяния. Обратим внимание на то, что все указанные выше задачи являются линейными.

Уравнение Кортевега - де Фриза.

Применим метод обратной задачи рассеяния к решению задачи Коши с уравнением Кортевега - де Фриза:

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}. \tag{13.5}$$

Можно показать, что для функции $u(x,t)$, являющейся решением задачи (13.5) выполнено:

$$\begin{cases} C_n(t) = C_n(0)e^{4\eta_n^3 t} \\ b(k,t) = b(k,0)e^{8ik^2 t} \end{cases}, \tag{13.6}$$

а η_n не зависят от времени.

Можно найти решения задачи (13.5) следующим образом. Решаются прямые задачи (I) и (II) для функции $u(x,0) = \varphi(x)$. Находится совокупность данных рассеяния $\{C_n(0), \eta_n, b(k,0)\}$. По ним, используя (13.6), строится совокупность $\{C_n(t), \eta_n(t), b(k,t)\}$. По этой совокупности, решается обратная задача рассеяния и определяется функция $u(x,t)$, являющаяся решением (13.5).

Рассмотрим пример задачи с $\varphi(x) = -\frac{2}{ch^2 x}$. В этом случае имеем всего одну собственную функцию, $\eta_1 = 1$, $C_1(0) = \sqrt{2}$ и $b(k,0) = 0$. Находим, что

$$\{C_n(t), \eta_n(t), b(k,t)\} = \left\{\sqrt{2}e^{4t}, 1{,}0\right\}.$$

Решаем обратную задачу рассеяния, при этом $B(x,t) = 2e^{4t-x}$. Получаем интегральное уравнение:

$$K(x,y,t) + 2e^{4t-x-y} + 2\int_x^\infty K(x,\alpha,t)e^{4t-x-\alpha}d\alpha = 0.$$

Его решением будет функция

$$K(x,y,t) = \frac{-2e^{x-y}}{1+e^{2t-8t}}.$$

Дифференцируем полученный результат и находим решение задачи:

$$u(x,t) = -\frac{2}{ch^2(x-4t)}.$$

Найденная в этом примере функция $u(x,t)$ представляет собой солитон. Солитоны – это решения в виде уединенных бегущих волн колоколообразной формы. Если начальные условия задать так, что возникают несколько солитонов, движущихся с различными скоростями, то можно рассматривать их взаимодействие в рамках решения уравнения. Солитоны уравнения Кортевега - де Фриза при взаимодействии ведут себя как частицы: сталкиваясь, они расходятся, не меняя формы и приобретая сдвиг по фазе. Такой характер солитонных решений делает их интересными объектами математического моделирования.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ