



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФЕНОМЕНОЛОГИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

ДЕМИДОВ
СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ГЕОРГИЕВСКУЮ ЕКАТЕРИНУ ПАВЛОВНУ



Оглавление

1	Лекция 1. Описание фермионов в теории поля	6
1.1	Физика нейтрино. Описание фермионов в теории поля	6
1.2	Случай нескольких нейтрино	9
1.3	Нейтринные осцилляции	14
2	Лекция 2. Нейтринные осцилляции	17
2.1	Нейтринные осцилляции	17
2.2	Нерешенные проблемы физики нейтрино	23
2.3	Формула нейтринных осцилляций	24
2.4	Замечание	25
2.5	Свойства нейтринных осцилляций	26
2.6	Нейтринные осцилляции в веществе	27
3	Лекция 3. Взаимодействие нейтрино с веществом	30
3.1	Упрощенные случаи трехфлейворных осцилляций	30
3.2	Взаимодействие нейтрино с веществом	31
3.3	Случай двухфлейворных нейтрино	39
4	Лекция 4. Солнечные нейтрино. Введение	41
4.1	Влияние взаимодействия нейтрино с веществом на нейтринные осцилляции	41
4.2	Солнечные нейтрино	44
4.3	Эксперименты по регистрации солнечных нейтрино	47
4.4	Теоретическое описание солнечных нейтрино	50
5	Лекция 5. Солнечные нейтрино. Атмосферные нейтрино	53
5.1	Основные результаты экспериментов по детектированию солнечных нейтрино	53
5.2	Теоретическое описание солнечных нейтрино (продолжение)	53
5.3	Реакторные эксперименты	59
5.4	CHOOZ	60
5.5	KamLand	60
5.6	Атмосферный сектор	60
6	Лекция 6. Атмосферные нейтрино	63

6.1	Эксперименты по обнаружению нейтринных осцилляций в атмосферных нейтрино	63
6.2	Ускорительные эксперименты с фиксированной мишенью	69
6.3	Эксперименты с реакторными нейтрино	70
6.4	CP-фаза	71
7	Лекция 7. Нейтринная иерархия. Сильное взаимодействие	74
7.1	Нейтринная иерархия	74
7.2	Природа масс нейтрино	78
7.3	Спектр по энергиям нейтрино	83
7.4	Некоторые идеи, связанные с нейтрино	83
7.5	Сильное взаимодействие	84
8	Лекция 8. Сильное взаимодействие. Группа симметрий $SU(3)$	87
8.1	Сильное взаимодействие	87
8.2	Схема классификации адронов. Группа симметрий $SU(3)$	90
8.3	Фундаментальные представления группы $SU(3)$	96
9	Лекция 9. Константа связи сильных взаимодействий	100
9.1	Калибровочная группа сильных взаимодействий $SU(3)$	100
9.2	Константа связи сильных взаимодействий	101
9.3	Квантовая хромодинамика при низких энергиях	104
9.4	Пример. Одночастичные состояния	107
9.5	Киральная аномалия	108
10	Лекция 10. Аномалии в квантовой теории поля	113
10.1	Аномалии в квантовой теории поля. Аксиальная аномалия	113
11	Лекция 11. Аномалии в квантовой теории поля. Часть 2	121
11.1	Аксиальная аномалия (продолжение)	121
11.2	Замечание. Теорема Адлера-Бардина	125
11.3	Замечание об аномалиях в токах	127
11.4	Стандартная модель	128
12	Лекция 12. Теорема Голдстоуна в квантовой теории поля	132
12.1	Замечание о стандартной модели	132
12.2	Симметрии	132
12.3	Теорема Голдстоуна в квантовой теории поля	134
12.4	Следствия из теоремы Голдстоуна	139
12.5	Эффективная теория взаимодействия голдстоуновских бозонов	140
13	Лекция 13. Низкоэнергетическая теория голдстоуновских бозонов	142
13.1	Теорема Голдстоуна (продолжение)	142
13.2	Идеи построения низкоэнергетической теории голдстоуновских бозонов	144
13.3	Общий случай	145

13.4	Лагранжиан эффективной теории в низшем порядке по импульсам	149
13.5	Причины нарушения симметрии	150
14	Лекция 14. Обобщение киральной теории возмущений	155
14.1	Теория голдстоуновских бозонов (продолжение)	155
14.2	Обобщение киральной теории возмущений	159
15	Лекция 15. Проблема лишней симметрии в киральной теории возмущений	168
15.1	Киральная теория возмущений (продолжение)	168
15.2	Вспомогательная задача	168
15.3	Способы решения проблемы	170

Лекция 1. Описание фермионов в теории поля

Физика нейтрино. Описание фермионов в теории поля

Существует три типа нейтрино – электронные, мюонные и τ -нейтрино. Их названия обусловлены тем, что каждый тип нейтрино ассоциирован с лептонами соответствующего флейвора. Напомним, что нейтрино – это фермион (частица со спином $\frac{1}{2}$), причем экспериментально было доказано, что нейтрино является левополяризованным фермионом.

Напомним, что фермионы в квантовой теории поля описываются с помощью спиноров (обычно обозначаются через ψ). Если речь идет о свободных полях, то кинетический член для фермиона имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{к.ч.}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad (1.1)$$

Здесь ψ – это четырехкомпонентный фермион, γ^μ – гамма-матрица. Далее мы будем использовать следующее представление гамма-матриц:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Здесь подразумевается блочно-диагональная запись, где

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad (1.3)$$

$$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad (1.4)$$

Заметим, что полезным объектом также является матрица

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

С её помощью определяются проекторы на правые и левые состояния:

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Эти проекторы проектируют биспиноры на так называемые двухкомпонентные спиноры. Так, спинор из четырёх компонент можно записать через двухкомпонентные спиноры ψ_L ,

ψ_R

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Тогда, левую компоненту можно получить, действовав на ψ левым проектором на ψ :

$$P_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \psi_L \quad (1.9)$$

Аналогично для правой компоненты:

$$P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \equiv \psi_R \quad (1.10)$$

Замечание

В некотором смысле двухкомпонентные спиноры являются даже более фундаментальными объектами, чем четырехкомпонентными. Это станет более понятным, если обратиться к теории групп. У группы Лоренца L есть подгруппа – так называемая собственная ортохронная группа Лоренца L_+^\uparrow (без пространственных отражений и отражений по времени). Алгебра этой группы изоморфна алгебре группы $SL(2, \mathbb{C})$ (группа комплекснозначных матриц 2×2 с единичным детерминантом $\det \omega = 1$). Двухкомпонентные спиноры ψ_L и ψ_R являются фундаментальным и антифундаментальным представлением группы $SL(2, \mathbb{C})$.

Напомним, что для построения фундаментального представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, нужно взять двумерное комплекснозначное пространство. Тогда фундаментальное представление – это умножение матриц на вектора этого пространства. Соответственно, антифундаментальное представление – это умножение сопряженных матриц на элементы этого линейного пространства. Элементами этого пространства как раз и будут левые и правые спиноры ψ_L, ψ_R .

Распишем кинетический член через левые и правые компоненты:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{к.ч.}} &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = i \begin{pmatrix} \psi_L^+ & \psi_R^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu \psi_L \\ \partial_\mu \psi_R \end{pmatrix} = \\ &= i \begin{pmatrix} \psi_R^+ & \psi_L^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \end{pmatrix} = i \psi_R^+ \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + i \psi_L^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \end{aligned} \quad (1.11)$$

Заметим, что кинетическое слагаемое распалось на два – для правых и левых фермионов. Это наводит на мысль, что они преобразуются независимо при преобразованиях Лоренца.

Задача на дом 1. Докажите, что двухкомпонентные фермионы ψ_R, ψ_L преобразуются

независимо при преобразованиях из собственной ортохронной группы Лоренца L_+^\uparrow . Покажите также, что пространственное отражение переводит правые в левые.

Изоморфны ли ψ_L, ψ_R как представления ортохронной группы Лоренца? Подсказка: если изоморфизм есть, то можно показать, что существует некоторая матрица, которая осуществляет преобразование подобия между соответствующими элементами. Если изоморфизма нет, то нужно показать, что такой матрицы нет.

Изоморфны ли эти представления ψ_L, ψ_R из группы обычных вращений?

Теперь обсудим массовые слагаемые:

$$\mathcal{L}_D = -m\bar{\psi}\psi \quad (1.12)$$

Используя введенные выше обозначения, это слагаемое можно расписать через правые и левые фермионы:

$$\mathcal{L}_D = -m\bar{\psi}\psi = -m \begin{pmatrix} \psi_L^+ & \psi_R^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = -m (\psi_L^+ \psi_R + \psi_R^+ \psi_L) \quad (1.13)$$

Таким образом, дираковская масса перемешивает правые и левые спиноры. Более того, чтобы дираковская масса была, и правые и левые спиноры должны быть. Так, если есть только левый спинор, то дираковскую массу построить нельзя.

Заметим, что оба слагаемых в (1.13) – $\psi_L^+ \psi_R$ и $\psi_R^+ \psi_L$ – являются Лоренц-инвариантными (то есть скаляры относительно преобразований из группы Лоренца). Эти скаляры построены из двух разных спиноров – правого и левого. Оказывается, можно построить скаляр (инвариант относительно преобразований группы Лоренца), воспользовавшись только одним типом спиноров. Например, пусть дано только ψ_L . Тогда фермиону нельзя сопоставить дираковскую массу. Однако, можно построить билинейную инвариантную комбинацию без производных вида

$$\psi_L i \sigma^2 \psi_L \quad (1.14)$$

Свертка по индексам имеет вид

$$\psi_L i \sigma^2 \psi_L = i \sigma_{\alpha\beta}^2 \psi_{L\alpha} \psi_{L\beta} \quad (1.15)$$

Заметим, что матрица σ^2 является антисимметричной. Свободный лагранжиан фермиона имеет вид

$$\mathcal{L}_M = i \psi_L^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - \frac{m}{2} (\psi_L i \sigma^2 \psi_L + h.c.) \quad (1.16)$$

Задача на дом 2. Покажите, что (1.15) является Лоренц-инвариант. Для этого нужно подействовать преобразованиями Лоренца и убедиться, что слагаемое не изменится.

Перепишем лагранжиан (1.16) в другой форме. Для этого представим двухкомпонентный

фермион через четырехкомпонентный:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Тогда лагранжиан приобретает вид

$$\mathcal{L}_M = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{m}{2}(\bar{\psi}^c\psi + h.c.) \quad (1.18)$$

где зарядовое сопряжение устроено следующим образом

$$\psi^c = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T \quad (1.19)$$

Задача на дом 3. Покажите, что решение уравнения с дираковской массой для фермионов с левой спиральностью с точностью до поправок, связанных с массой, совпадают с решениями уравнений для безмассовых фермионов (для нейтрино). Аналогично для правой спиральности показать, что решения совпадают с решениями для антинейтрино.

Случай нескольких нейтрино

Обобщим сказанное выше на случай нескольких нейтрино. Напомним, что все лептоны сгруппированы в три поколения. Часть из них являются дублетами L_α , где $\alpha = e, \mu, \tau$ обозначает тип лептона. Таким образом,

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad (1.20)$$

Отметим, что все дублеты стандартной модели являются левыми (в них входят только левые части заряженных лептонов). Правые лептоны E_α рассматриваются отдельно:

$$E_e = e_R, \quad E_\mu = \mu_R, \quad E_\tau = \tau_R \quad (1.21)$$

Заметим, что говоря о группе $U(1)_Y$, можно воспользоваться формулой

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.22)$$

и найти гиперзаряды для дублетов и синглетов:

$$Y_L = -1 \quad (1.23)$$

$$Y_E = -2 \quad (1.24)$$

Поговорим о массах заряженных лептонов. Распишем юкавские слагаемые:

$$\mathcal{L}_Y = -Y_{\alpha\beta}^L \bar{L}_\alpha H E_\beta + h.c. \quad (1.25)$$

Выбираем поле Хиггса следующим образом

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Тогда

$$\mathcal{L}_Y = -Y_{\alpha\beta}^L \bar{L}_\alpha H E_\beta + h.c. = -\frac{1}{\sqrt{2}} Y_{\alpha\beta}^L (v + h) \bar{l}_{L\alpha} l_{R\beta} + h.c. \quad (1.27)$$

Если опустить кусочек юкавского взаимодействия с бозоном Хиггса, то оставшееся дает массовое слагаемое для заряженных лептонов:

$$M_{\alpha\beta}^L = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{\alpha\beta}^L v \quad (1.28)$$

Чтобы отсюда найти физические массы, нужно диагонализировать полученное выражение. Для этого нужно совершить унитарные преобразования:

$$l_L = U^{lL} l_L^m \quad (1.29)$$

$$l_R = U^{lR} l_R^m \quad (1.30)$$

Здесь U – унитарные матрицы, то есть

$$U^\dagger U = 1 \quad (1.31)$$

Чтобы матрица была диагональной, нужно потребовать, чтобы

$$U^{lL\dagger} M_{\alpha\beta} U^{lR} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \quad (1.32)$$

Положительные числа, стоящие на диагонали, как раз и будут массами электрона, мюона и τ -лептона соответственно. Указанное преобразование называется биунитарным. Биунитарным преобразованием можно диагонализировать любую комплекснозначную матрицу независимо от размерности.

Распишем кинетические слагаемые для лептонов:

$$\mathcal{L}_{\text{кин.ч.}} = i \bar{L}_\alpha \gamma^\mu D_\mu L_\alpha + i \bar{E}_\alpha \gamma^\mu D_\mu E_\alpha \quad (1.33)$$

Первое слагаемое относится к дублетам, а второе – к синглетам.

Здесь D_μ – это ковариантные производные вида

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} V_\mu^a - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \quad (1.34)$$

Заметим, что второе слагаемое в (1.33) есть только у дублетов.

Отсюда можно получить массовые состояния

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g' V_\mu^3 + g B_\mu) \quad (1.35)$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g V_\mu^3 - g' B_\mu) \quad (1.36)$$

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_\mu^1 \mp i V_\mu^2) \quad (1.37)$$

Мы хотим узнать, как влияет сделанное нами преобразование на остальной лагранжиан (1.33). Посмотрим, какую структуру будут иметь слагаемые из этого лагранжиана:

$$\bar{l}_{R\alpha} \gamma^\mu l_{R\alpha} \# \quad (1.38)$$

$$\bar{l}_{L\alpha} \gamma^\mu l_{L\alpha} \# \quad (1.39)$$

$$\bar{\nu}_{L\alpha} \gamma^\mu \nu_{L\alpha} \# \quad (1.40)$$

Заметим, что второе слагаемое в (1.34) – это матрица вида

$$\begin{pmatrix} \#A_\mu + \#Z_\mu & V_\mu^1 - iV_\mu^2 \\ V_\mu^1 + iV_\mu^2 & \#A_\mu + \#Z_\mu \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \#A_\mu + \#Z_\mu & V_\mu^1 - iV_\mu^2 \\ V_\mu^1 + iV_\mu^2 & \#A_\mu + \#Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Под структурой мы понимаем разные ситуации свертки разных фермионов. Из (1.42) видно, что нейтрино может сворачиваться с нейтрино, лептон – с лептоном, и нейтрино – с лептоном. Таким образом, получаем еще одну структуру вида

$$\bar{\nu}_{L\alpha} \gamma^\mu l_{L\alpha} W_\mu \quad (1.43)$$

Получаем лагранжиан взаимодействия нейтрино с лептонами и W -бозонами:

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{L\alpha} \gamma^\mu l_{L\alpha} W_\mu^+ + h.c. \quad (1.44)$$

Заметим, что сделанное нами преобразование подействует только на перекрёстное слагаемое вида (1.43). Поэтому после преобразования лагранжиан приобретает вид

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{L\alpha} \gamma^\mu l_{L\alpha} W_\mu^+ + h.c. = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{L\alpha} \gamma^\mu U_{\alpha i}^{lL} l_i W_\mu^+ + h.c. \quad (1.45)$$

Если нейтрино безмассовое $m_\nu = 0$ (в канонической стандартной модели), то можно сделать аналогичное преобразование для нейтрино и убрать это слагаемое из лагранжиана. Например, можно сделать преобразование вида

$$\nu_L = U^{lL} \nu_L^m \quad (1.46)$$

Далее считаем, что массовые слагаемые для заряженных лептонов диагональны. Учтем, что у нейтрино все же есть масса (из-за чего возникают нейтринные осцилляции). Запишем массовые слагаемые для нескольких нейтрино. Есть два типа массовых слагаемых. Если есть дираковская масса, то её общий вид

$$\mathcal{L}_D = - \left[m_{\alpha\beta}^D \nu_{L\alpha}^+ \nu_{R\beta} + h.c. \right] \quad (1.47)$$

Теперь рассмотрим майорановское массовое слагаемое:

$$\mathcal{L}_M = - \frac{m_{\alpha\beta}^M}{2} \nu_{L\alpha} i \sigma^2 \nu_{L\beta} + h.c. \quad (1.48)$$

Заметим, что $m_{\alpha\beta}^D$ – это произвольная комплекснозначная матрица, а $m_{\alpha\beta}^M$ – симметричная матрица.

Теперь полученные матрицы надо диагонализировать, то есть сделать соответствующие преобразования полей. Диагонализуем массовые слагаемые для дираковских нейтрино с помощью биунитарного преобразования вида

$$\nu_L = U \nu_L^m \quad (1.49)$$

$$\nu_R = U^R \nu_R^m \quad (1.50)$$

Причем массы мы подбираем таким образом, чтобы выполнялось соотношение вида

$$U^+ m^D U^R = \text{diag} (m_1, m_2, m_3) \quad (1.51)$$

Отметим, что так как экспериментально мы можем регистрировать только левые нейтрино, то формула (1.49) дает связь между массовым и флейворным базисами. Соответствующая матрица является матрицей смешивания.

Во втором случае нам тоже разрешено делать унитарные преобразования, однако структура выражения уже другая – в (1.48) отсутствует сопряженное поле. Существует

теорема, согласно которой можно сделать унитарное преобразование вида

$$v_L = U v_L^m \quad (1.52)$$

таким образом, что преобразованное массовое слагаемое будет иметь вид диагональной матрицы

$$U^T m^M U = \text{diag} (m_1, m_2, m_3) \quad (1.53)$$

Более точно, теорема звучит следующим образом: если m – произвольная симметричная комплекснозначная матрица, то преобразованием вида (1.43) (где U – эрмитова матрица) её можно привести к диагональному виду с положительными значениями на диагонали.

Итак, мы увидели, что нейтрино смешиваются. При этом связь между массовым и флейворным состояниями нейтрино выражается формулой

$$v_{L\alpha} = U_{\alpha i} v_{Li}^{(m)} \quad (1.54)$$

Отметим, что матрица U здесь в литературе часто обозначается как U_{PMNS} (матрица Понтекорво — Маки — Накагавы — Сакаты). Эта матрица унитарная:

$$U^+ U = \mathbb{1} \quad (1.55)$$

У нее 9 параметров. Рассмотрим подгруппу этих унитарных матриц (размером 3×3), когда ее элементы чисто действительные:

$$O^T O = \mathbb{1} \quad (1.56)$$

Такие матрицы описывают группы поворота. Соответственно, среди матриц U типа (1.55) есть группы поворота. Значит, среди указанных девяти параметров есть три угла поворота. А все остальные параметры связаны с комплексностью элементов, то есть шесть фаз. Таким образом, произвольная унитарная матрица 3×3 параметризуется девятью параметрами, среди которых три угла и шесть фаз. Отметим, что не все из этих параметров являются физическими (наблюдаемыми). Некоторые из указанных фаз устраняются с помощью фазовых преобразований полей. После указанного преобразования мы переходим к массовому базису. Тогда лагранжиан в массовом базисе нейтрино приобретает вид

$$\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_{L\alpha} \gamma^\mu (U_{PMNS})_{\alpha i} v_{Li} W_\mu^- + h.c. \quad (1.57)$$

Мы можем устранить фазы, сделав преобразования типа

$$v_{L_1} \rightarrow e^{i\alpha_1} v_{L_1} \quad (1.58)$$

$$l_1 \rightarrow e^{i\beta_1} l_1 \quad (1.59)$$

Предположим, что у нейтрино дираковские массы. Тогда мы можем сделать оба преобразования (1.58)-(1.59). В полученном лагранжиане три нейтрино и три лептона. Таким образом, у нас есть шесть независимых преобразований для устранения шести фаз. Однако, одно из этих преобразований на самом деле не меняет фазу матрицы (в том случае, если все фазы в преобразованиях (1.58)-(1.59) сделать одинаковыми). Таким образом, из шести указанных фаз можно устранить пять с помощью указанных фазовых преобразований. Таким образом, в дираковском случае у матрицы U_{PMNS} есть четыре физических параметра – три угла и одна фаза.

В майорановском случае преобразованиями типа (1.58) для нейтрино воспользоваться нельзя. Значит, из пяти фаз можно устранить только три фазы преобразованиями лептонных полей. Таким образом, в майорановском случае у матрицы U_{PMNS} в качестве независимых параметров есть три угла и три фазы.

Рассмотрим общий вид матрицы смешивания для дираковского случая. Углы обозначим через $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$, фазу – через δ . Далее примем следующие обозначения

$$\sin \theta_{ij} = s_{ij} \quad (1.60)$$

$$\cos \theta_{ij} = c_{ij} \quad (1.61)$$

Таким образом, стандартная параметризация для матрицы смешивания нейтрино имеет вид

$$U_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Заметим, что если бы фазы δ не было, то мы бы получили матрицу поворота в соответствующих плоскостях на соответствующие углы.

В майорановском случае параметризация матрицы смешивания будет иметь вид

$$U_M = U_D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

Задача на дом 4. Сколько фаз будет в случае двух флейворов нейтрино? Сделайте фазовые преобразования, явно уменьшающие количество фаз.

Нейтринные осцилляции

Перейдем к основному следствию существования смешивания между массовыми и флейворными состояниями – нейтринным осцилляциям. Здесь нужно помнить, что у нейтрино есть масса, а массовые и флейворные состояния разные. Далее нам потребуется

следующее соотношение

$$v_{\alpha(L)} = U_{\alpha i} v_{i(L)} \quad (1.64)$$

то есть флейворное состояние нейтрино связано с массовым состоянием с помощью матрицы смешивания U . Далее мы будем опускать индекс L . Отметим, что v_{α} – это флейворный базис (где $\alpha = e, \mu, \tau$), а v_i – массовый базис (где $i = 1, 2, 3$).

Указанное выражение – это соотношение между полями, стоящими в лагранжиане. Теперь, чтобы обсуждать осцилляции, нам нужно получить аналогичное соотношение (связь между флейворными и массовыми состояниями) для квантово-механических состояний. В квантовой теории поля состояния получаются путем действия оператора вырождения на вакуум. Таким образом, если речь идет об одночастичном состоянии

$$|1 - \text{час.}\rangle = a^{\dagger} |0\rangle \quad (1.65)$$

Если мы квантуем какое-то поле, то мы раскладываем его в суперпозицию операторов рождения и уничтожения

$$\psi = \sum (a^{\dagger} + b^{\dagger}) \quad (1.66)$$

$$\bar{\psi} = \sum (a + b) \quad (1.67)$$

Значит, если мы хотим написать аналогичное соотношение между состояниями $|\nu\rangle_{\alpha}$ и $|\nu\rangle_i$, то нам нужно посмотреть, как связаны между собой $\bar{\psi}$. Понятно, что $\bar{\psi}$ связаны между собой сопряженной матрицей U . Отсюда получаем

$$|\nu_{\alpha}\rangle = U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (1.68)$$

Учтем, что матрица U унитарна. Поэтому получаем выражение между массовыми и флейворными состояниями в виде

$$|\nu_i\rangle = U_{\alpha i} |\nu_{\alpha}\rangle \quad (1.69)$$

Типичный эксперимент по нейтринным осцилляциям устроен следующим образом. Есть места, где нейтрино рождаются и фиксируются. Это расстояние называется базой нейтринных осцилляций и обозначается обычно L . Источник нейтрино – это нечто, где рождаются нейтрино, причем желательно, чтобы экспериментаторы знали, какого флейвора нейтрино (например, нейтрино типа ν_{α}). Например, в реакторе есть только β -распадчики. Значит, там могут рождаться только электронные нейтрино. Итак, из источника вылетает нейтрино определённого типа, прилетает в детектор и взаимодействует. В результате вылетает лептон. Если мы знает, что из детектора вылетел лептон типа l_{β} , то мы также знаем, что в детектор прилетело нейтрино типа ν_{β} . Таким образом, нас интересует вероятность перехода нейтрино типа α в нейтрино типа β когда он пролетит расстояние L :

$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L)$.

Пока что мы говорим о нейтринных осцилляциях в вакууме. Пусть у нас покоится нейтрино массового типа с индексом j . Эволюция этого состояния устроена следующим образом: через время t набегает фаза:

$$|\nu_j(t)\rangle = e^{-im_j t} |\nu_j(0)\rangle \quad (1.70)$$

Если нейтрино летит, у него есть энергия и импульс, и состояние эволюционирует по следующему правилу

$$|\nu_j(L, t)\rangle = e^{-i(Et - pL)} |\nu_j(0, 0)\rangle \quad (1.71)$$

Лекция 2. Нейтринные осцилляции

Нейтринные осцилляции

На прошлой лекции мы обсуждали, что происходит, когда у нас есть несколько типов нейтрино (электронные, мюонные и τ -нейтрино). В общем случае они смешиваются. Тогда, если массовые слагаемые вводятся произвольным образом, получаем некоторую массовую матрицу (произвольность этой матрицы зависит от вида лагранжиана). Если речь идет о дираковской массе, то получаем произвольную комплексную матрицу, если о майорановской массе, то соответствующая массовая матрица является симметричной. Также мы обсудили, как диагонализировать массовую матрицу. В результате мы сделали вывод, что массовые состояния нейтрино могут смешиваться и могут быть линейной комбинацией флейворных состояний нейтрино. Обратно, флейворные состояния нейтрино есть смесь массовых состояний нейтрино

$$\nu_\alpha = U_{\alpha i} \nu_i \quad (2.1)$$

где $\alpha = e, \mu, \tau$ – флейворный индекс, $i = 1, 2, 3$ – массовый индекс.

Нетривиальная матрица $U_{\alpha i}$ показывает, что массовые и флейворные базисы смешиваются. Напомним, что флейворный базис – это базис, в котором нейтрино участвует в слабых взаимодействиях. Взаимодействие нейтрино через заряженный W -бозон устроено следующим образом

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_{L\alpha} \gamma^\mu \nu_{L\alpha} W_\mu^- + h.c. \quad (2.2)$$

здесь g – калибровочная константа связи группы SO_2 .

Если в этот лагранжиан взаимодействия с W -бозоном подставить представление (2.1), то появится выражение вида $U_{\alpha i} \nu_{Li}$. Ранее мы обсудили, сколько независимых физических параметров в этой матрице и увидели, что в зависимости от того, какое массовое слагаемое, возможны разные ситуации. В случае трех флейворов нейтрино и дираковской массы в матрице смешивания будет три угла смешивания и одна фаза (далее мы покажем, что эта фаза отвечает за CP -нарушение в нейтринном секторе). В случае майорановской массы появляется еще две дополнительных фазы, причем их можно выбрать таким образом, что будет справедлива связь между майорановской матрицей смешивания U_M и дираковской матрицей смешивания U_D вида

$$U_M = U_D \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\phi_1} & \\ & & e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Теперь перейдем к обсуждению осцилляций. Пусть есть некоторый источник и детектор нейтрино. Из источника вылетает нейтрино определенного флейвора ν_α . Детектор детектирует нейтрино ν_β . Как мы показали ранее, испускаются

флейворные состояния, так как происходит взаимодействие с лептонами l_α (рис. 2.1).

Таким образом, если на входе регистрируем лептон типа l_α , то знаем, что вылетает нейтрино того же типа. Аналогично, если в конце регистрируется лептон типа l_β , то мы знаем, что в детектор прилетело нейтрино флейвора β . Между источником и детектором расстояние L . Будем считать, что нейтрино релятивистские.

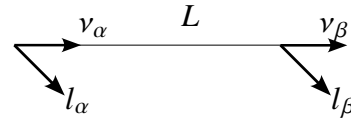


Рис. 2.1: Иллюстрация к объяснению.

Пусть в начальный момент времени нейтрино покоится. Возьмем массовые состояния нейтрино.

Тогда состояние в момент времени t будет связано с состоянием в начальный момент времени преобразованием

$$|v_i(t)\rangle = e^{-imt} |v_i(t=0)\rangle \quad (2.4)$$

Если нейтрино летит, то на расстоянии L через время t

$$|v_j(L, t)\rangle = e^{-iE_j t + i p_j L} |v_j(0, 0)\rangle \quad (2.5)$$

Для простоты будем считать, что в источнике родились нейтрино с определенной энергией E . Соответственно, учитывая это, а также тот факт, что мы рассматриваем ультрарелятивистский режим, получаем

$$E_j = E \gg m_j \quad (2.6)$$

Кроме того, импульс нейтрино связан с энергией следующим образом

$$p_j = \sqrt{E_j^2 - m_j^2} \quad (2.7)$$

Так как мы предположили ультрарелятивистский режим, то можно сказать, что первое слагаемое под корнем много больше второго. Тогда импульс можно представить в виде

$$p_j = \sqrt{E_j^2 - m_j^2} = E_j \sqrt{1 - \frac{m_j^2}{E_j^2}} \simeq E_j \left(1 - \frac{m_j^2}{2E_j^2}\right) = E_j - \frac{m_j^2}{2E_j} \quad (2.8)$$

\simeq – разложим корень в ряд Тейлора до первого члена

Учтем, что все энергии у нейтрино совпадают. Более того, нейтрино ультрарелятивистское, поэтому $t \simeq L$. Тогда из эволюции вида (2.5) можно получить, что состояние массового нейтрино на расстоянии L от источника выражается следующим

образом

$$|v_j(L)\rangle = e^{-iEL + i\left(E - \frac{m_j^2}{2E}\right)L} |v_j(0)\rangle = e^{-i\frac{m_j^2}{2E}L} |v_j(0)\rangle \quad (2.9)$$

Таким образом, массовые состояния нейтрино эволюционируют как будто с гамильтонианом вида

$$\hat{H}_0^m = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & & \\ & \frac{m_2^2}{2E} & \\ & & \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Итак, волновой вектор (2.9) подчиняется уравнению Шредингера с гамильтонианом \hat{H}_0^m

$$i \frac{\partial}{\partial L} |v_i(L)\rangle = \hat{H}_0^m |v_i(L)\rangle \quad (2.11)$$

Вообще говоря, нас интересует эволюция нейтрино во флейворном базисе, так как мы хотим узнать, что произойдет с нейтрино типа α на расстоянии L .

Перейдем в массовый базис с помощью соотношения между базисами

$$|v_\alpha(L)\rangle = U_{\alpha j}^* |v_j(L)\rangle \quad (2.12)$$

Учтем, что $|v_i(L)\rangle$ эволюционирует согласно (2.9)

$$|v_\alpha(L)\rangle = U_{\alpha j}^* |v_j(L)\rangle = U_{\alpha j}^* e^{-i\frac{m_j^2}{2E}L} |v_j(0)\rangle \stackrel{1}{=} U_{\alpha j}^* e^{-i\frac{m_j^2}{2E}L} U_{\beta j} |v_\beta(0)\rangle \quad (2.13)$$

¹ – сделаем обратный переход от массового базиса во флейворный

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Найдем амплитуду перехода нейтрино типа α в нейтрино типа β на расстоянии L

$$\mathcal{A}(v_\alpha \rightarrow v_\beta) = \langle v_\beta(0) | v_\alpha(L) \rangle = \sum_j U_{\alpha j}^* e^{-i\frac{m_j^2}{2E}L} U_{\beta j} \quad (2.14)$$

Чтобы найти вероятность такого перехода, надо найти квадрат этой амплитуды

$$P(v_\alpha \rightarrow v_\beta) = |\mathcal{A}(v_\alpha \rightarrow v_\beta)|^2 \quad (2.15)$$

Замечание 1

Обратите внимание, что в формуле для амплитуды (2.14) есть три слагаемых, каждое из которых входит в выражение с фазовым множителем вида $-i\frac{m_j^2}{2E}$. Распишем выражение для \mathcal{A} подробно. Мы можем вынести за скобки первую фазу. Тогда в выражении для амплитуды останется три слагаемых, причем первое будет без фазы, а в оставшиеся два слагаемых

войдет разность фаз

$$\mathcal{A}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = e^{-i\frac{m_1^2}{2E}L} \left(U_{\alpha_1}^* U_{\beta_1} + U_{\alpha_2}^* U_{\beta_2} e^{-i\frac{m_2^2 - m_1^2}{2E}L} + U_{\alpha_3}^* U_{\beta_3} e^{-i\frac{m_3^2 - m_1^2}{2E}L} \right) \quad (2.16)$$

Таким образом, если подставить это выражение в (2.15), то множитель $e^{-i\frac{m_1^2}{2E}L}$ не даст вклада в вероятность. Это означает, что вероятность $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ зависит только от разности квадратов масс, которую мы обозначим

$$\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2 \quad (2.17)$$

Таким образом, из изучения таких переходов и осцилляций нельзя найти абсолютное значение массы нейтрино – можно определить только разность масс.

Случай двух флейворов нейтрино

Рассмотрим частный случай данной задачи. Пусть есть только электронное и мюонное нейтрино.

Тогда матрица смешивания имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

В случае двух флейворов в дираковском случае из независимых параметров матрицы смешивания остается только один угол.

Найдем амплитуду осцилляций ν_e в ν_μ . Для этого воспользуемся формулой (2.16).

$$\mathcal{A}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = e^{-i\frac{m_1^2}{2E}L} \left(U_{e_1}^* U_{\mu_1} + U_{e_2}^* U_{\mu_2} e^{-i\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L} \right) \stackrel{1}{=} e^{-i\frac{m_1^2}{2E}L} \underbrace{\left(\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta e^{-i\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L} \right)}_{\frac{1}{2} \sin 2\theta \left(-1 + e^{-i\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L} \right)} \quad (2.19)$$

¹ – подставим в явном виде выражения для $U_{\alpha i}$, используя (2.18)

Найдем вероятность, учитывая, что фазовый множитель перед скобкой в (2.19) не дает вклада

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= |\mathcal{A}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)|^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \left(1 - 2 \cos \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L + \cos^2 \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L + \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L \right) = \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}L \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Итак, мы получили так называемую *вероятность возникновения* – вероятность появления нейтрино того типа, которого раньше не было.

Заметим, что если угол смешивания θ маленький, то осцилляции будут с маленькой амплитудой (вероятность перехода невелика). Если угол смешивания близок к $\frac{\pi}{4}$, то амплитуда максимальна и нейтрино может полностью переходить в другой тип (при некоторых энергиях).

Легко показать, что

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \quad (2.21)$$

Найдем так называемую *вероятность исчезновения* (часть нейтрино определенного типа из общего потока исчезла). В сущности это вероятность того, сколько нейтрино данного типа осталось. Если речь идет об электронных нейтрино, то

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \quad (2.22)$$

Учитывая (2.21), можно показать, что

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \quad (2.23)$$

Задание на дом

Получите общую формулу для произвольного количества флейворов из общей формулы для \mathcal{A} . Ответ:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} \text{Re} \left[U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \right] \cdot \sin^2 \frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} + 2 \sum_{j>i} \text{Im} \left[U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \right] \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E} \right) \quad (2.24)$$

Замечание 2

Обсудим параметры нейтринных осцилляций. Ранее мы сказали, что есть три угла и одна фаза. Будем использовать стандартную параметризацию матрицы смешивания. Будем говорить об одной фазе матрицы смешивания, которая относится к дираковскому случаю.

Итак, мы получили амплитуду вида

$$\mathcal{A}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = U_{\alpha j}^* e^{-i \frac{m_j^2}{2E} L} U_{\beta j} \quad (2.25)$$

Если смотреть на неё как на матрицу с индексами $\alpha\beta$, то получим

$$\mathcal{A} = U_M \text{diag} \left(e^{-i \frac{m_1^2}{2E} L}, \dots \right) U_M^+ \quad (2.26)$$

В майорановском случае матрица смешивания связана с матрицей смешивания в дираковском случае через матрицу из фаз

$$U_M = U_D \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\phi_1} & \\ & & e^{i\phi_2} \end{pmatrix}}_{:=D} \quad (2.27)$$

Отсюда получаем, что амплитуда равна

$$\mathcal{A} = U_D \underbrace{D \text{diag}(\dots) D^+}_{\text{diag}\left(e^{-i\frac{m_1^2}{2E}L}, \dots\right)} U_D^+ \quad (2.28)$$

Легко сообразить, что произведение $D \text{diag}(\dots) D^+$ совпадает с той диагональной матрицей, которая появлялась ранее. Таким образом, матрица D на самом деле не дает никакого вклада. Значит, майорановские фазы в матрице D не оказывают никакого влияния на вероятности нейтринных осцилляций. Поэтому майорановские фазы не измеряются в экспериментах по нейтринным осцилляциям. Поэтому, когда мы будем говорить о параметрах смешивания нейтрино, мы будем обсуждать только о трех углах и одной фазе, которая стоит в стандартной параметризации матрицы смешивания.

Итак, в качестве параметров нейтринных осцилляций имеем углы и фазу $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta$, и разности квадратов масс $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$.

Экспериментов по нейтринным осцилляциям довольно много. Существуют несколько групп экспериментов, которые регулярно обновляют параметры нейтринных осцилляций, извлекая их из той или иной совокупности экспериментальных данных. Приведем некоторые значения этих параметров:

$$\Delta m_{21}^2 \simeq 7.4 \cdot 10^{-5} \text{эВ}^2 \quad (2.29)$$

$$\sin^2 \theta_{12} \simeq 0.31 \quad (2.30)$$

$$|\Delta m_{32}^2| \simeq 2.5 \cdot 10^{-3} \text{эВ}^2 \quad (2.31)$$

Заметим, что в случае Δm_{32}^2 знак не фиксирован, измеряется модуль величины.

$$\sin^2 \theta_{23} \simeq 0.55 \quad (2.32)$$

$$\sin^2 \theta_{13} \simeq 0.021 \quad (2.33)$$

Далее мы увидим, что значения (2.29)-(2.30) возникают из изучения солнечных нейтрино, а (2.31)-(2.32) – из изучения нейтрино в атмосфере. Там и будет объяснение, почему в случае (2.29) знак фиксирован, а в (2.31) – нет.

Фаза δ на данный момент измерена с очень плохой точностью, по совокупности экспериментальных данных предлагается довольно широкий диапазон

$$\delta \simeq 150 - 360^\circ \quad (2.34)$$

Отметим еще раз, что осцилляции не фиксируют абсолютный масштаб масс нейтрино. На сегодняшний момент он неизвестен, есть только ограничение на массу самого легкого нейтрино

$$|m_{\nu_e}| \lesssim 1\text{эВ} \quad (2.35)$$

Это ограничение получено в прямых измерениях массы из β -распада трития. Для определения массы изучают спектр электронов (точнее, рассматривают самые высокоэнергичные электроны), возникающие в процессе распада. Из этого спектра можно понять, есть ли у нейтрино масса и какая она.

Помимо прямых измерений есть различные космологические ограничения на массу нейтрино. Как известно, нейтрино влияют в том числе на образование структуры во вселенной. Отсюда возникают на порядок более сильные ограничения на сумму масс нейтрино

$$\left| \sum_j m_j \right| \lesssim 0.02 \quad (2.36)$$

Нерешенные проблемы физики нейтрино

1. Измерение абсолютного значения массы нейтрино
2. Определить иерархию нейтрино. Есть два типа иерархии: прямая и обратная. Она связана с знаком Δm_{32}^2 . В случае прямой иерархии сначала идет самое легкое нейтрино типа 1, потом – нейтрино типа 2, а третье состояние нейтрино удалено от первого и второго на более значительное расстояние, чем расстояние между первым и вторым (рис. 2.2). В этом случае

$$\Delta m_{32}^2 > 0 \quad (2.37)$$

В случае обратной иерархии состояния 1 и 2 тяжелее, чем третье (рис. 2.2). Тогда

$$\Delta m_{32}^2 < 0 \quad (2.38)$$

3. Нахождение фазы δ
4. Определение, дираковское нейтрино или майорановское
5. Откуда эти массы нейтрино возникли?

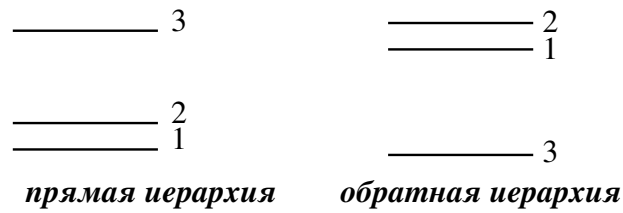


Рис. 2.2: Прямая и обратная иерархии

Формула нейтринных осцилляций

Для оценок нам понадобится одно полезное соотношение. Введем так называемую *длину осцилляции*

$$L = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \quad (2.39)$$

Заметим, что для разных фаз длина осцилляции будет разной.

Имеет место следующая оценочная формула

$$L = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \approx 2.48 \text{км} \left(\frac{E}{1 \text{ГэВ}} \right) \left(\frac{\text{эВ}^2}{\Delta m^2} \right) \quad (2.40)$$

Вспомним, что при выводе амплитуды осцилляций нейтрино мы предположили, что есть монохроматический поток нейтрино. В реальности, это, конечно, никогда не выполняется, всегда есть какой-то спектр нейтрино $\Phi(E)$. Соответственно, если мы хотим посчитать вероятность перехода, нам нужно усреднить этот спектр с рассматриваемой вероятностью (то есть нужно проинтегрировать функцию $Pho_\nu(E)$ с вероятностью осцилляций, которая тоже является функцией от E). Возникает вопрос: что в этом случае происходит с нейтринными осцилляциями? В какой-то момент осцилляции должны замыться (произойдет нарушение когерентности).

Пусть характерная ширина спектра довольно мала:

$$\Delta E \ll E \quad (2.41)$$

Фаза нейтринных осцилляций имеет вид

$$\phi_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2}{4E} L \quad (2.42)$$

Итак, у нас есть нейтрино разных энергий. Значит, будет некоторый разброс фаз. Этот разброс фаз можно оценить, если вместо E в (2.42) подставить ΔE и разложить по ΔE

$$\Delta\phi_{ij} \sim \frac{\Delta m_{ij}^2}{4E^2} L \Delta E = \phi_{ij} \frac{\Delta E}{E} \quad (2.43)$$

Потеря когерентности произойдет тогда, когда нельзя будет увидеть осцилляции. Значит, разброс фаз должен быть достаточно большим (сравним с 2π). Таким образом,

$$\phi_{ij} \simeq 2\pi \quad (2.44)$$

– полная потеря когерентности.

Через сколько осцилляций произойдет полное нарушение когерентности? За одну осцилляцию фаза меняется на 2π . Предположим, что произошло n осцилляций. Тогда фаза поменялась на $2\pi n$. Таким образом, разброс фаз через n осцилляций будет иметь вид

$$2\pi n \frac{\Delta E}{E} \quad (2.45)$$

Итак, если этот разброс фаз сравним с 2π :

$$2\pi n \frac{\Delta E}{E} \sim 2\pi \quad (2.46)$$

то происходит полная потеря когерентности.

Из (2.43) следует, что разброс фаз пропорционален самой фазе. Значит, чем больше осцилляций произошло, тем больше разброс фаз. Таким образом, через

$$n \sim \frac{E}{\Delta E} \quad (2.47)$$

осцилляций мы уже не увидим осцилляции.

Замечание

Чему равна вероятность перехода одного типа нейтрино в другое, если когерентность полностью пропала? Согласно сказанному выше, вероятность перехода имеет вид

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |\mathcal{A}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)|^2 = \left| \sum_j U_{\alpha j}^* e^{-i \frac{m_j^2}{2E} L} U_{\beta j} \right|^2 = \sum_{jk} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k}^* e^{-i \frac{\Delta m_{jk}^2}{2E} L} \stackrel{1}{=} \\ &= \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 \quad (2.48) \end{aligned}$$

¹ – если произошла потеря когерентности, то все нетривиальные фазы усреднились в ноль. Таким образом, нужно занулить все слагаемые при $j \neq k$:

$$\left\langle e^{-i \frac{\Delta m_{jk}^2}{2E} L} \right\rangle = 0 \quad (2.49)$$

Отметим, что $|U_{\alpha j}|^2$ – это вероятность найти массовое состояние типа j в нейтрино флейвора α . Обратное, $|U_{\beta j}|^2$ – вероятность найти нейтрино флейвора β в массовом состоянии типа j . Таким образом, формула (2.48) дает вероятность перехода нейтрино типа α в нейтрино типа β при полной потере когерентности.

О полной потере когерентности можно также говорить в терминах волновых пакетов. В реальной ситуации, как было отмечено выше, нейтрино не является монохроматическим, есть волновой пакет конечной ширины σ . Это есть суперпозиция массовых состояний. У этого волнового пакета есть некоторая энергия E . Массовые состояния имеют какие-то свои массы m_1, m_2, m_3 . Значит, у всех массовых состояний будут разные импульсы p_1, p_2, p_3 . Значит, скорости тоже разные. Отсюда следует, что этот волновой пакет распадется на три волновых пакета. Предположим, что мы имеем дело с прямой иерархией. Тогда самое легкое нейтрино 1 будет лететь первым (рис. 2.3). В какой-то момент эти волновые пакеты разойдутся и осцилляции прекратятся, так как пакеты перестанут перекрываться. В этом

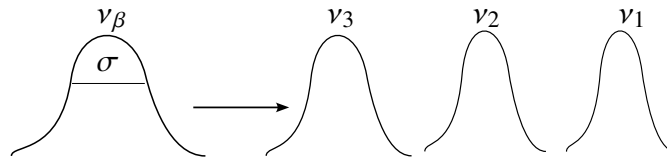


Рис. 2.3: Иллюстрация к объяснению.

случае вероятность переходов также будет определяться формулой (2.48).

Свойства нейтринных осцилляций

1. Сумма всех вероятностей равна 1

$$\sum_{\alpha} P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) = \sum_{\beta} P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) = 1 \quad (2.50)$$

2. Имеет место следующее следствие CPT -инвариантности

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) = P(\bar{\nu}_{\beta} \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha}) \quad (2.51)$$

3. Вероятность осцилляций антинейтрино $P(\bar{\nu}_{\alpha} \rightarrow \bar{\nu}_{\beta})$ можно получить, если вспомнить, что оператор рождения антинейтрино содержится в поле Ψ , а оператор рождения

нейтрино – в поле $\bar{\Psi}$. Матрицу смешивания надо заменить на U^* :

$$U \rightarrow U^* \quad (2.52)$$

Значит, если в формуле для вероятностей нейтринных осцилляций поменять знак фазы, то получим формулу для вероятностей осцилляций антинейтрино.

Нейтринные осцилляции в веществе

Рассмотрим взаимодействие нейтрино с веществом. Рассмотрим лагранжиан взаимодействия нейтрино флейвора α с лептоном флейвора α через W -бозон:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_{\alpha L} \gamma^\mu v_{\alpha L} W_\mu^- + h.c. \quad (2.53)$$

Вообще говоря, такой лагранжиан не очень удобен. Например, пусть мы рассматриваем рассеяние нейтрино на электроном. Тогда имеют место следующие диаграммы (рис. 2.4). В

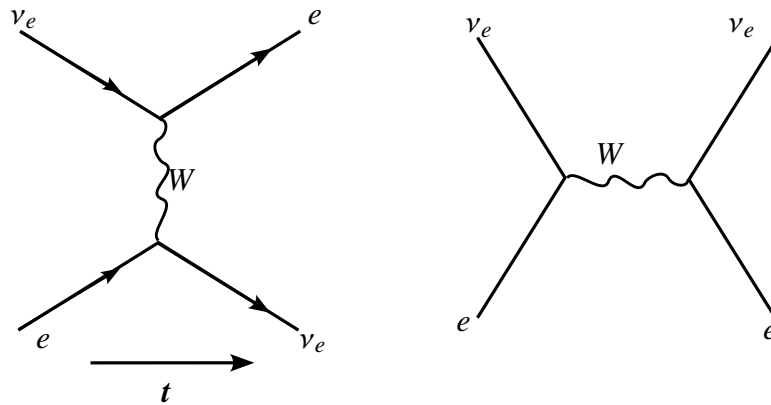


Рис. 2.4: Иллюстрация к объяснению.

квантовой теории поля вместо волновой линии нужно поставить пропагатор следующего вида

$$\frac{1}{q^2 - m_w^2} \quad (2.54)$$

где q – это импульс W -бозона.

Во многих ситуациях этот импульс достаточно маленький:

$$q^2 \ll m_w^2 \quad (2.55)$$

Аналогичные диаграммы имеют место для β -распадов (рис. 2.5). Передача энергии в β -распаде много меньше массы W -бозона. Переданная энергия – это характерная энергия

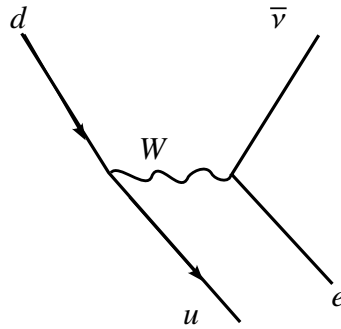


Рис. 2.5: Иллюстрация к объяснению.

промежуточной частицы. Таким образом, очень часто выполняется приближение (2.55). Тогда лагранжиан (2.53) использовать очень неудобно, используют эффективную теорию Фреми. Чтобы её получить, нужно переписать лагранжиан взаимодействия в виде

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} J_{\mu}^{+} W^{-\mu} + J_{\mu}^{-} W^{+\mu} \frac{g}{\sqrt{2}} + m_w^2 W_{\mu}^{+} W_{\mu}^{-} \quad (2.56)$$

где были введены токи

$$J_{\mu}^{+} = \bar{l}_{\alpha L} \gamma^{\mu} \nu_{\alpha L} \quad (2.57)$$

Последнее слагаемое в (2.56) – это массовое слагаемое W -бозона.

Итак, в новый лагранжиан W -бозон входит без производных. Значит, его можно решить на уравнения движения. Проварьируем новый лагранжиан по $W^{+\mu}$. Тогда получим следующее уравнение движения:

$$\frac{g}{\sqrt{2}} J_{\mu}^{-} + m_w^2 W_{\mu}^{-} = 0 \quad (2.58)$$

Аналогично, если проварьировать по $W^{-\mu}$, получим уравнение движения вида

$$\frac{g}{\sqrt{2}} J_{\mu}^{+} + m_w^2 W_{\mu}^{+} = 0 \quad (2.59)$$

Из этих уравнений можно извлечь $W^{+\mu}$ и подставить обратно в лагранжиан. В результате мы исключим W из рассмотрения:

$$W_{\mu}^{-} = -\frac{g}{\sqrt{2}m_w^2} J_{\mu}^{-} \quad (2.60)$$

Подставим полученное выражение обратно в лагранжиан

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g^2}{2m_w^2} J_\mu^+ J_\mu^- - \cancel{\frac{g^2}{2m_w^2} J_\mu^+ J_\mu^-} + \cancel{\frac{g^2}{2m_w^2} J_\mu^+ J_\mu^-} = -2\sqrt{2}G_F J_\mu^+ J_\mu^- \quad (2.61)$$

Здесь введена *постоянная Ферми*

$$G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}m_w^2} \quad (2.62)$$

Лекция 3. Взаимодействие нейтрино с веществом

Упрощенные случаи трехфлейворных осцилляций

На прошлой лекции мы обсуждали нейтринные осцилляции в вакууме и получили явную формулу для двухфлейворных осцилляций. Также мы выписали точную формулу для случая, когда число флейворов произвольное. В случае трех типов нейтрино формула сложная и может быть не очень иллюстративна. В ряде случаев эту формулу можно упростить. Эти упрощения случаются из-за того, что разность квадратов масс нейтрино иерархическая:

$$\Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{31}^2| \quad (3.1)$$

Значит, можно воспользоваться приближением.

Рассмотрим амплитуду перехода из нейтрино типа α в нейтрино типа β :

$$\mathcal{A}(v_\alpha \rightarrow v_\beta) = e^{-i\frac{m_1^2}{2E}L} \left(U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} + U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} e^{-i\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L} + U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3} e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} \right) \quad (3.2)$$

Иерархия типа (3.1) означает, что при каких-то параметрах (при некоторой энергии и расстоянии) может быть так, что второй осциллирующий фактор начнет играть раньше, чем первый. В этом случае

$$\left| e^{-i\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L} \right| \simeq 1 \quad (3.3)$$

Тогда вторым слагаемым в (3.2) можно пренебречь. Далее можно упрощать полученную формулу:

$$\mathcal{A}(v_\alpha \rightarrow v_\beta) \simeq e^{-i\frac{m_1^2}{2E}L} \left(U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} + U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} + U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3} e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} \right) \quad (3.4)$$

Результат упрощения зависит от того, что мы изучаем

1. Рассмотрим случай $\alpha \neq \beta$. Нужно учесть, что матрица U является унитарной:

$$\sum_j U_{\alpha j}^* U_{\beta j} = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

Тогда сумма первых двух слагаемых равна $-U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}$. Тогда формула (3.4) преобразуется к виду

$$\mathcal{A}(v_\alpha \rightarrow v_\beta) \simeq -e^{i\frac{m_1^2}{2E}L} U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3} \left(1 - e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} \right) \quad (3.6)$$

Можно показать, что вероятность перехода в данном случае будет иметь вид

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \simeq \frac{|U_{\beta 3}|^2}{\sum_{\beta' \neq \alpha} |U_{\beta' 3}|^2} \sin^2 \theta_{eff} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \quad (3.7)$$

Где θ_{eff} дается выражением

$$\sin^2 \theta_{eff} = |U_{\alpha 3}|^2 \quad (3.8)$$

2. В случае $\alpha = \beta$ вероятность выживания нейтрино дается выражением

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) \approx 1 - \sin^2 2\theta_{eff} \sin^2 \frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \quad (3.9)$$

Существует также второй способ упрощения формулы, связанный с иерархией типа (3.1). Ранее мы говорили, что если есть какой-то спектр, то происходит замытие по всей когерентности, так как нейтрино разных энергий имеют разную длину осцилляций. В этом случае вторая фаза в (3.2) осциллирует быстрее. Значит, осцилляции, связанные с этой фазой, замоятся быстрее. Это означает, что если мы будем усреднять по спектру последнюю фазу, то при полной потере когерентности усреднение будет равно нулю. Обозначим $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ – усреднение по спектру. Тогда

$$\langle\langle e^{-i \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} L} \rangle\rangle = 0 \quad (3.10)$$

В случае синуса в квадрате той же самой фазы

$$\langle\langle \sin^2 \frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \rangle\rangle = \frac{1}{2} \quad (3.11)$$

Задача на дом.

Рассмотрите формулу для амплитуды трехфлейворных нейтринных осцилляций, найдите выражение для вероятности и усредните по спектру, используя указанные условия. Найдите вероятность выживания нейтрино типа α , то есть

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) \quad (3.12)$$

Взаимодействие нейтрино с веществом

В прошлый раз мы обсудили, как устроено взаимодействие нейтрино с другими частицами стандартной модели. Это взаимодействие идет через W -бозон. Таким образом, лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_w = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + h.c. \quad (3.13)$$

Если процесс такой, что передачи энергии достаточно маленькие (малы по сравнению с массой W -бозона), то такой лагранжиан взаимодействия использовать неудобно. Тогда это взаимодействие удобно заменить на локальное

$$\mathcal{L} = -2\sqrt{2}G_F J_\mu^{CC} \left(J^{CC \mu} \right)^+ \quad (3.14)$$

Здесь $J^{CC \mu}$ – это заряженный ток, в который входит вклад электронного, мюонного и τ -нейтрино

$$J^{CC \mu} = \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_{\mu L} \gamma^\mu \mu_L + \bar{\nu}_{\tau L} \gamma^\mu \tau_L \quad (3.15)$$

Это взаимодействие возникает из вершины типа рис. 3.1.

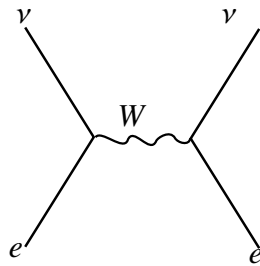


Рис. 3.1: Иллюстрация к объяснению.

Помимо такого взаимодействия возможно также взаимодействие через Z -бозон (рис. 3.2).

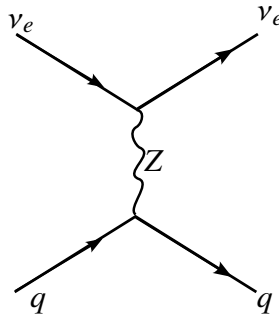


Рис. 3.2: Иллюстрация к объяснению.

Более того, вершину взаимодействия через W -бозон можно заменить взаимодействие с кварками (рис. 3.3). В этом случае в (3.15) нужно также включить кварковые токи:

$$J^{CC \mu} = \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_{\mu L} \gamma^\mu \mu_L + \bar{\nu}_{\tau L} \gamma^\mu \tau_L + (\bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{c}_L \gamma^\mu + \dots) \quad (3.16)$$

Рассмотрим сначала процесс взаимодействия нейтрино с веществом. Ограничимся для начала заряженными токами (для нейтральных токов оценка будет похожей).

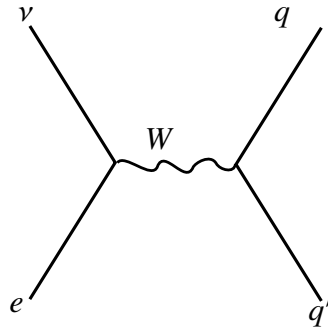


Рис. 3.3: Иллюстрация к объяснению.

Пусть нейтрино рассеивается на электроне. Получим оценку для сечения, при условии, что дан лагранжиан взаимодействия вида (3.14).

$$\sigma \sim \frac{G_F^2 s}{\pi} \quad (3.17)$$

Задача на дом

Посчитайте сечение рассеяния нейтрино на кварке. Считаем, что электронное нейтрино рассеивается на кварке через заряженный ток. Решить аналогичную задачу для антикварков первого поколения. Убедитесь, что указанная оценка работает.

Представим, что нейтрино рассеивается на электроне. Если электрон покоится, а на него налетает нейтрино энергии E , то

$$s = (p_\nu + p_e)^2 = \underbrace{p_\nu^2}_{=0} + p_e^2 + 2p_\nu p_e \approx 2E_\nu m_e \quad (3.18)$$

Последнее равенство получено в приближении больших энергий.

Таким образом, сечение растет с ростом энергии нейтрино линейно. Значит, оценка (3.17) работает при условии, что s – достаточно мало (чтобы можно было применять теорию Ферми):

$$s \ll m_w^2 \quad (3.19)$$

С другой стороны, если мы хотим применить также приближение больших энергий, то должно выполняться

$$m_e^2 \ll s \ll m_w^2 \quad (3.20)$$

Если говорить о численных значениях, то для нейтрино с энергией

$$E_\nu \sim 1 \text{ ГэВ} \quad (3.21)$$

сечение рассеяния нейтрино на электроны имеет порядок

$$\sigma_{\nu e} \sim 10^{-41} \text{ см}^2 \quad (3.22)$$

Также нейтрино может рассеиваться на протонах и нейтронах. При этом рассеяние может происходить с помощью как заряженных, так и нейтральных токов. В этом случае посчитать сечение затруднительно, так как протоны и нейтроны – сложные объекты (они состоят из кварков). В этом случае используются методы теории глубоко неупругого рассеяния. Так, для нейтрино с энергией

$$E_\nu = 100 \text{ ГэВ} \quad (3.23)$$

сечение рассеяния нейтрона на протоне через заряженные или нейтральные токи

$$\sigma_{\nu N}^{CC,NC} \sim \# \cdot 10^{-37} \text{ см}^2 \quad (3.24)$$

Чтобы оценить слабость этого взаимодействия, рассмотрим, как нейтрино распространяется в Земле. Оценим длину свободного пробега нейтрино в этом случае:

$$\lambda \sim \frac{1}{n\sigma} \quad (3.25)$$

Здесь n – плотность тех объектов, на которых нейтрино рассеивается. Учтем, что сечением рассеяния на электронах можно пренебречь, основное рассеяние происходит на нуклонах. Поэтому в качестве сечения σ возьмем (3.24), а в качестве n берем плотность нуклонов. Чтобы оценить плотность нуклонов, вспомним среднюю плотность Земли и представим, что все эту массу составляют нуклоны. Значит, чтобы узнать плотность нуклонов, нужно указанную плотность разделить на массу одного нуклона:

$$n_N \sim \frac{2.5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}}{1.7 \cdot 10^{-27} \text{ г}} \sim 10^{27} \frac{1}{\text{см}^3} \quad (3.26)$$

Итак,

$$\lambda \sim \frac{1}{n\sigma} \sim \frac{1}{10^{27} \frac{1}{\text{см}^3} \# \cdot 10^{-37} \text{ см}^2} \sim \# \cdot 10^{10} \text{ см} \sim 10^5 \text{ км} \quad (3.27)$$

Таким образом, нейтрино пролетает сквозь Землю, практически не замечая ее. В частности поэтому нейтрино тяжело детектировать.

Возвращаясь к вопросу о нейтринных осцилляциях, далее по этой причине мы будем пренебрегать взаимодействием нейтрино с Землей (в первом приближении).

Итак, можно сделать вывод, что Земля никак не влияет на осцилляции нейтрино. На самом деле это не так. Есть другой эффект, не связан с рассеянием нейтрино, а связан с изменением энергии нейтрино. Если у нас есть взаимодействие нейтрино с частицами среды, то это взаимодействие создает дополнительный потенциал нейтрино. То есть, энергия нейтрино немного меняется за счёт взаимодействия с веществом. Этот тип взаимодействия

как раз влияет на нейтринные осцилляции. Оценим величину этого влияния. Для этого нам потребуется лагранжиан этого взаимодействия:

$$\mathcal{L} = -2\sqrt{2}G_F \left[J_\mu^{CC} \left(J^{CC \mu} \right)^+ + \frac{1}{16} J_\mu^{NC} J^{NC \mu} \right] \quad (3.28)$$

Здесь мы учли вклад, связанный с взаимодействием с нейтральными токами. Здесь заряженный ток

$$J^{CC \mu} = \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L + \dots \quad (3.29)$$

Нейтральный ток имеет вид

$$J^{NC \mu} = \sum_\alpha \bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu \left(1 - \gamma^5 \right) \nu_\alpha + \bar{e} \left[\gamma^\mu \left(1 - \gamma^5 \right) - 4 \sin^2 \theta_w \gamma^\mu \right] e + \bar{p} \left[\gamma^\mu \left(1 - g_A^{(p)} \gamma^5 \right) - 4 \sin^2 \theta_w \gamma^\mu \right] p - \bar{n} \gamma^\mu \left(1 - \gamma^5 g_A^{(n)} \right) n \quad (3.30)$$

Нас интересует дополнительный вклад в энергию нейтрино, когда оно распространяется в среде. Энергию нам дает гамильтониан. Значит, мы должны усреднить гамильтониан взаимодействия по состояниям среды. Итак, плотность гамильтониана взаимодействия

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int} \quad (3.31)$$

Будем предполагать, что среда изотропна, однородна, в ней отсутствуют потоки. Пусть у электронов в среде есть некоторая функция распределения $f_e(E)$. Усредним гамильтониан взаимодействия по состояниям среды. Операцию взятия среднего значения гамильтониана по состоянию электрона с определенными импульсом и спином обозначим через

$$\int d^3 p f_e(E) \langle e(p, s) | \mathcal{H}_{int} | e(p, s) \rangle = \langle \langle e(p, s) | \mathcal{H} | e(p, s) \rangle \rangle \quad (3.32)$$

В результате такого усреднения по состояниям среды с электронной матрицей плотности останется гамильтониан нейтрино. Отсюда и можно получить информацию, какая добавочная энергия появилась у нейтрино после попадания в данную среду.

Рассмотрим случай взаимодействия с электроном через заряженные токи. Это взаимодействие осуществляется только через электронные нейтрино. Найден эффективный гамильтониан для нейтрино в среде:

$$\begin{aligned} H_{эфф}^\nu &= \langle \langle e(p, s) | 2\sqrt{2}G_F \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L \cdot \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_{eL} | e(p, s) \rangle \rangle = \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu \left(1 - \gamma^5 \right) \nu_e \langle \langle e(p, s) | \bar{e} \gamma_\mu \left(1 - \gamma^5 \right) e | e(p, s) \rangle \rangle \end{aligned} \quad (3.33)$$

Здесь мы воспользовались тем, что после преобразований получается оператор вида

$$\bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e = \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e \quad (3.34)$$

Итак, мы усредняем некоторый лоренцев вектор. У него есть пространственные и временные индексы. Для начала рассмотрим усреднение по пространственным индексам. Среда изотропна и однородна, нет потоков и выделенных направлений. Значит, в этом случае, если $\mu = i$, в результате усреднения (3.33) получим ноль. Таким образом, после указанной свертки остается только нулевая компонента. В этой компоненте появляется оператор вида

$$\bar{e} \gamma^0 (1 - \gamma^5) e \quad (3.35)$$

После усреднения этот оператор даст плотность электронов в среде в данной точке. Таким образом, получаем

$$H_{\text{эфф}}^\nu = \frac{2G_F n_e(x)}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^0 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \nu_e \quad (3.36)$$

Итак, гамильтониан для электронного нейтрино через заряженные токи

$$H_{CC}^{\nu L} = \sqrt{2} G_F n_e \bar{\nu}_{eL} \gamma^0 \nu_{eL} \quad (3.37)$$

Задача на дом

Покажите, что если подставить полученное выражение (3.37) в дираковский лагранжиан свободного нейтрино, то добавка к энергии нейтрино при его распространении в среде имеет вид

$$\Delta E = \sqrt{2} G_F n_e \quad (3.38)$$

При этом для электронного антинейтрино добавка имеет вид

$$\Delta E = -\sqrt{2} G_F n_e \quad (3.39)$$

Напомним, что лагранжиан нейтрино имеет вид

$$\mathcal{L} = i \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} \quad (3.40)$$

При решении этой задачи нужно учесть добавку к этому лагранжиану:

$$\mathcal{L} = i \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} - \sqrt{2} G_F n_e \bar{\nu}_{eL} \gamma^0 \nu_{eL} \quad (3.41)$$

Плотность электронов в данной задаче считать постоянной.

Итак, (3.38) – это дополнительная энергия взаимодействия, которая появляется при распространении электронного нейтрино в среде за счет заряженных токов. Если говорить

о мюонном и τ -нейтрино, то таких дополнительных вкладов (для случая заряженных токов) не появляется.

Теперь обсудим случай нейтральных токов. Чтобы найти дополнительную энергию, связанную с взаимодействием в нейтральных токах, надо усреднить взаимодействие по состояниям среды. В данном случае усреднять надо не только по электронам, но и по состояниям протонов и нейтронов. Это приведет к таким же добавкам к энергии нейтрино:

$$V_{NC} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} G_F \left[-n_e \left(1 - 4 \sin^2 \theta_w \right) + n_p \left(1 - 4 \sin^2 \theta_w \right) - n_n \right] \quad (3.42)$$

Вместо ΔE , указанное ранее в (3.39), далее будем писать

$$V_{CC} = \pm \sqrt{2} G_F n_e \quad (3.43)$$

Задача на дом

Найти дополнительную энергию нейтрино в плазме.

Рассмотрим эволюцию в среде, рассмотрев для начала только заряженные токи. В этом случае у нас есть дополнительный вклад в энергию (3.43). Для этого вспомним, как устроена эволюция нейтрино в вакууме. Пусть $|\nu\rangle$ – некоторое состояние нейтрино. Как мы обсуждали ранее, есть флейворный $|\nu_\alpha\rangle$ и массовый $|\nu_i\rangle$ базисы. Между ними существует связь:

$$|\nu_i\rangle = U_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle \quad (3.44)$$

где $U_{\alpha i}$ – матрица смешивания.

Нас интересует амплитуда нахождения в данном состоянии ν нейтрино определенного флейвора: $\langle \nu_\alpha | \nu \rangle$. Мы можем рассмотреть аналогичным числом в массовом базисе: $\langle \nu_i | \nu \rangle$. В этом случае нам известно, как устроена эволюция:

$$i \frac{\partial}{\partial x} \langle \nu_i | \nu \rangle = \frac{M_{ii}^2}{2E} \langle \nu_i | \nu \rangle \quad (3.45)$$

Теперь нам нужно перейти от этого уравнения к уравнению на флейворные амплитуды. Для этого нам потребуется сопряженное к (3.44) выражение:

$$\langle \nu_i | = U_{\alpha i}^* \langle \nu_\alpha | \quad (3.46)$$

Вспомним, что матрица смешивания унитарна. Тогда

$$U_{\alpha i} \langle \nu_i | = \langle \nu_\alpha | \quad (3.47)$$

Умножим уравнение (3.45) на $U_{\alpha i}$ и просуммируем по i . Более того, в правую часть равенства

вставим $U_{\beta i}^* U_{\beta j}$:

$$U_{\alpha i} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \langle \nu_i | \nu \rangle = \frac{M_{ii}^2}{2E} U_{\beta i}^* U_{\beta j} \langle \nu_i | \nu \rangle \right) \quad (3.48)$$

В результате получаем

$$\sum_i i \frac{\partial}{\partial x} U_{\alpha i} \langle \nu_i | \nu \rangle = \sum_{i,j} U_{\alpha i} \frac{M_{ii}^2}{2E} U_{\beta i}^* U_{\beta j} \langle \nu_j | \nu \rangle \quad (3.49)$$

Заметим, что в (3.49) появляется комбинация, которую можно переписать в матричном виде:

$$\sum U_{\alpha i} \frac{M_{ii}^2}{2E} U_{\beta i}^* = \left(U \frac{M^2}{2E} U^+ \right)_{\alpha\beta} \quad (3.50)$$

Обозначим амплитуду нахождения нейтрино флейвора типа α в состоянии ν через

$$\nu_\alpha \equiv \langle \nu_\alpha | \nu \rangle \quad (3.51)$$

Итак, получаем уравнение эволюции состояний нейтрино во флейворном базисе

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu_\alpha = \left(U \frac{M^2}{2E} U^+ \right)_{\alpha\beta} \nu_\beta \quad (3.52)$$

Заметим, что это уравнение мы уже получали ранее, когда говорили об осцилляциях в вакууме. Это уравнение можно записать в матричном виде:

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu = \underbrace{\left(U \frac{M^2}{2E} U^+ \right)}_{H_{\text{вакуум}}} \nu \quad (3.53)$$

где ν – это вектор амплитуд нахождения нейтрино разного типа:

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Уравнение (3.53) описывает эволюцию в вакууме. Учтем, что есть взаимодействие с электронами через заряженные токи. Рассмотрим распространение нейтрино (а не антинейтрино). В этом случае уравнение добавку типа (3.43) нужно внести в гамильтониан.

Таким образом, гамильтониан в среде будет иметь вид

$$H^{\text{среда}} = U \frac{M^2}{2E} U^+ + \begin{pmatrix} \sqrt{2} G_F n_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Итак, сейчас мы учли только заряженные токи. В этом случае дополнительный вклад появляется только для электронных нейтрино. Если учесть взаимодействие с нейтральными токами, то получаем

$$H^{\text{среда}} = U \frac{M^2}{2E} U^+ + \begin{pmatrix} \sqrt{2} G_F n_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{NC} & 0 & 0 \\ 0 & V_{NC} & 0 \\ 0 & 0 & V_{NC} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Таким образом, нейтральные токи входят в гамильтониан в качестве единичной матрицы, умноженной на некоторое число:

$$H + \underbrace{\lambda \mathbb{1}}_{e^{-i\lambda t}} \quad (3.57)$$

Как это изменит временную эволюцию состояний? Появится временная добавка вида $e^{-i\lambda t}$. Понятно, что такая добавка не влияет на вероятность нейтринных осцилляций. Таким образом, из гамильтониана можно выбрасывать произвольные диагональные матрицы. Таким образом, на осцилляции влияет только взаимодействие электронных нейтрино с электронами в среде через заряженные токи.

Случай двухфлейворных нейтрино

Пусть есть два флейвора нейтрино – мюонное и электронное. Матрица смешивания имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Обозначим

$$\cos \theta = c_\theta, \quad \sin \theta = s_\theta \quad (3.59)$$

Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta \\ s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 c_\theta & m_2^2 s_\theta \\ -m_1^2 s_\theta & m_2^2 c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta \\ s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 c_\theta^2 + m_2^2 s_\theta^2 & (m_2^2 - m_1^2) s_\theta c_\theta \\ (m_2^2 - m_1^2) s_\theta c_\theta & m_1^2 s_\theta^2 + m_2^2 c_\theta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.60) \end{aligned}$$

Преобразуем диагональные члены матрицы в первом слагаемом в (3.60). В первом диагональном члене перейдем к косинусу двойного угла:

$$m_1^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + m_2^2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{m_2^2 - m_1^2}{2} \cos 2\theta \quad (3.61)$$

Распишем второй диагональный член:

$$\frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{m_2^2 - m_1^2}{2} \cos 2\theta \quad (3.62)$$

Подставим полученные выражения обратно в матрицу и заметим, что в результате у нас выделяются два одинаковых вклада. Значит, из рассматриваемой матрицы можно выделить единичную матрицу, умноженную на число $\frac{m_1^2 + m_2^2}{2}$. Мы договорились ранее, что все, что пропорционально единичной матрице, можно свободно выкидывать. Таким образом, рассматриваемая матрица преобразуется к виду

$$\frac{\Delta m_{21}^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & +\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Симметризуем последнее слагаемое в (3.60):

$$\begin{pmatrix} \frac{V^{CC}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{V^{CC}}{2} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Обозначим

$$\Delta_{21} = \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} \quad (3.65)$$

Таким образом, получаем гамильтониан

$$H^{\text{среда}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_{21} \cos 2\theta + V^{CC} & \Delta_{21} \sin 2\theta \\ \Delta_{21} \sin 2\theta & \Delta_{21} \cos 2\theta - V^{CC} \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

Лекция 4. Солнечные нейтрино. Введение

Влияние взаимодействия нейтрино с веществом на нейтринные осцилляции

В прошлый раз мы начали рассматривать, как взаимодействие нейтрино с веществом влияет на нейтринные осцилляции. Напомним, что взаимодействие может происходить через заряженный W -бозон (обмен взаимодействием в заряженных токах) или за счет обмена нейтральным током (нейтральный Z -бозон). Оба этих взаимодействия важны для регистрации нейтрино. Отметим еще раз, что нейтрино – очень слабо взаимодействующая частица. Как мы выяснили ранее, взаимодействие нейтрино с веществом через заряженные и нейтральные токи создает дополнительный потенциал для нейтрино, который дает вклад в гамильтониан эволюции флейворных состояний нейтрино.

Общее уравнение эволюции нейтрино в веществе имеет вид

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu_f = \left[U \frac{M^2}{2E} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_{CC} + V_{NC} & 0 & 0 \\ 0 & V_{NC} & 0 \\ 0 & 0 & V_{NC} \end{pmatrix} \right] \nu_f \quad (4.1)$$

здесь U – матрица смешивания, M – массовая матрица нейтрино.

Заметим, что первое слагаемое в правой части (4.2) – это вакуумная часть гамильтониана. Второе слагаемое – это добавка, которая появляется, если нейтрино распространяется в веществе. Здесь

$$V_{CC} = \sqrt{2} G_F n_e \quad (4.2)$$

это дополнительный потенциал, который приобретает нейтрино, находясь в среде. Этот потенциал (в первом порядке теории возмущений) определяется плотностью электронов n_e . Вклад, определяемый плотностью нейтронов в среде имеет вид

$$V_{NC} \sim G_F n_n \quad (4.3)$$

Отметим, что на самом деле этот вклад ни на что не влияет, так как V_{NC} отвечает за вклад в гамильтониан, пропорциональный единичной матрице. Как мы показали на прошлой лекции, это приводит к умножению на общую фазу. Поэтому из гамильтониана можно выбросить часть, пропорциональную единичной матрице. Поэтому далее мы будем рассматривать уравнение типа

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu_f = \left[U \frac{M^2}{2E} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \nu_f \quad (4.4)$$

Ранее мы рассмотрели простейший случай двухфлейворных осцилляций, то есть

$$\nu_f = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

где по определению

$$\nu_e \equiv \langle \nu_e | \nu \rangle \quad (4.6)$$

Матрица смешивания имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

то есть фазы отсутствуют, все определяется углом смешивания θ .

Итак, в прошлый раз мы получили гамильтониан вида

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_{21} \cos 2\theta + V_{CC} & \Delta_{21} \sin 2\theta \\ \Delta_{21} \sin 2\theta & \Delta_{21} \cos 2\theta - V_{CC} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

где

$$\Delta_{21} = \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} \quad (4.9)$$

Проанализируем, как будет эволюционировать нейтрино с таким гамильтонианом.

Если бы вещества не было, то в гамильтониане осталась бы только вакуумная часть. В этом случае наблюдаются осцилляции переходов между нейтрино двух типов. Угол смешивания θ диагонализует этот гамильтониан.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда член, связанный с взаимодействием с веществом не равен нулю. Рассмотрим несколько возможных случаев.

1. Пусть слагаемое, связанное с взаимодействием нейтрино с веществом, достаточно мало

$$V_{CC} \ll |\Delta_{21} \cos 2\theta| \quad (4.10)$$

Таким образом, получаем режим, близкий к вакуумному. Вещество дает небольшой эффект. Чтобы найти эволюцию нейтрино с таким гамильтонианом, его снова нужно диагонализировать. Гамильтониан (4.8) по-прежнему является эрмитовой матрицей, которая диагонализуется ортогональным преобразованием вида (4.7), но с другим углом θ . Нужно найти новый угол смешивания θ_m , причем этот угол должен быть примерно равным тому углу, что появляется в вакууме:

$$\theta_m \simeq \theta \quad (4.11)$$

2. Рассмотрим обратную ситуацию

$$V_{CC} \gg |\Delta_{21} \cos 2\theta| \quad (4.12)$$

Таким образом, рассматриваемый гамильтониан уже близок к диагональному. Значит, угол смешивания в веществе будет маленьким (так как для диагонализации указанную матрицу нужно немного покрутить)

$$\theta_m \ll 1 \quad (4.13)$$

В этом случае гамильтониан диагонален уже во флейворном базисе и амплитуда осцилляций очень мала.

3. Теперь рассмотрим промежуточную ситуацию

$$V_{CC} = \Delta_{21} \cos 2\theta \quad (4.14)$$

В этом случае на диагонали гамильтониана стоят нули, недиагональные слагаемые ненулевые. Чтобы диагонализировать этот гамильтониан, нужно совершить поворот на угол

$$\theta_m = \frac{\pi}{4} \quad (4.15)$$

Вспомним формулу вероятности перехода

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m L}{4E} \quad (4.16)$$

Таким образом, амплитуда осцилляций связана с удвоенным углом θ . Значит, в рассматриваемом случае амплитуда осцилляций будет максимальной. Таким образом, условие типа (4.14) является резонансным. Пусть угол в вакууме маленький. Значит, в вакууме осцилляции идут с небольшой амплитудой. Если же нейтрино попадает в вещество, причем выполняется условие (4.14), то резонанс усилит эти нейтринные осцилляции до максимально возможных независимо от того, какой угол был в вакууме.

Найдем угол смешивания в веществе в явном виде. Итак, у нас есть гамильтониан (4.8). Нам нужно перейти от флейворного базиса к новому ν_m :

$$\nu_f = U_m \nu_m \quad (4.17)$$

В этом базисе гамильтониан диагонален.

При этом мы знаем, что матрица смешивания имеет тот же вид, что и в вакууме, только

с другим углом смешивания:

$$U_m = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

После подстановки указанных выражений в уравнение, получаем гамильтониан вида

$$H^m = U_m^+ H U_m \quad (4.19)$$

Чтобы найти угол в веществе, нам нужно востребовать, чтобы новый гамильтониан H^m был диагональным. Распишем выражение для гамильтониана:

$$\begin{aligned} H^m = U_m^+ H U_m &= \begin{pmatrix} c_m & -s_m \\ s_m & c_m \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_{21} \cos 2\theta + V_{CC} & \Delta_{21} \sin 2\theta \\ \Delta_{21} \sin 2\theta & \Delta_{21} \cos 2\theta - V_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_m & s_m \\ -s_m & c_m \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-\Delta_{21} \cos 2\theta + V_{CC}) c_m - \Delta_{21} \sin 2\theta s_m \\ \Delta_{21} \sin 2\theta c_m - (\Delta_{21} \cos 2\theta - V_{CC}) s_m \end{pmatrix} \quad (4.20) \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство – результат перемножения первых двух матриц для получения верхних элементов конечной матрицы.

Отсюда получаем уравнение на угол θ_m

$$\frac{2}{2} (-\Delta_{21} \cos 2\theta + V_{CC}) s_m c_m + \frac{1}{2} \Delta_{21} \sin 2\theta \underbrace{(c_m^2 - s_m^2)}_{\cos 2\theta_m} = 0 \quad (4.21)$$

Таким образом, получаем

$$\operatorname{tg} 2\theta_m = \frac{\Delta_{21} \sin 2\theta}{\Delta_{21} \cos 2\theta - V_{CC}} \quad (4.22)$$

Видно, что если вклад V_{CC} мал, то угол θ совпадает с θ_m . Если же знаменатель обращается в ноль, тангенс стремится к бесконечности, что соответствует тому, что угол стремится к $\frac{\pi}{2}$. Если V_{CC} очень большое, то угол смешивания маленький.

Солнечные нейтрино

Итак, мы обсудили нейтринные осцилляции в веществе в контексте случая, когда вещество имеет постоянную плотность. Однако в общем случае плотность электронов может меняться. Рассмотрим теперь нейтринные осцилляции для солнечных нейтрино.

Изучение солнечных нейтрино – это то направление, с которого началась нейтринная физика в контексте нейтринных осцилляций. В Солнце идут различные термоядерные реакции, в результате которых образуются нейтрино, которые и называются солнечными

нейтрино. Характерные энергии этих нейтрино

$$E \sim 0.1 - 10 \text{ МэВ} \quad (4.23)$$

Основные реакции, в которых образуются солнечные нейтрино

(pp) Основная реакция, в которой образуются солнечные нейтрино:



Это основная реакция, в которой выделяется основная масса нейтрино. Вообще говоря, полный поток нейтрино от Солнца

$$\Phi \sim 6 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \quad (4.25)$$

Несмотря на то, что выделяется много нейтрино, они почти не взаимодействуют, при указанных энергиях они пролетают Солнце, практически "не заметив" его. Прямые взаимодействия нейтрино с веществом неважны при обсуждении эволюции нейтрино в Солнце.

Спектр нейтрино от указанной реакции указан на рис. 4.1.

(He) В реакции



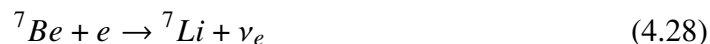
появляются наиболее высокоэнергичные нейтрино. При этом их появляется довольно мало. Спектр указан на рис. 4.1. При этом конечная энергия у нейтрино в этом случае не фиксирована. Она зависит от того, какую энергию получил позитрон и образовавшееся ядро.

(pep) В реакции



образуются монохроматические нейтрино. Здесь образуется $\sim 10^8$.

(Be) В реакции



возможно два канала (в зависимости от того, в каком состоянии образуется литий). Здесь образуется $\sim 5 \cdot 10^9$.

(B) Также существуют так называемые борные нейтрино, образующиеся в реакции



Здесь образуется поток нейтрино $\sim 5 \cdot 10^6$. Более того, их больше всего на высокоэнергичной части спектра (см. рис. 4.1).

(CNO) Существует так называемый CNO-цикл



Здесь образуется поток нейтрино $\sim 5 \cdot 10^8$.

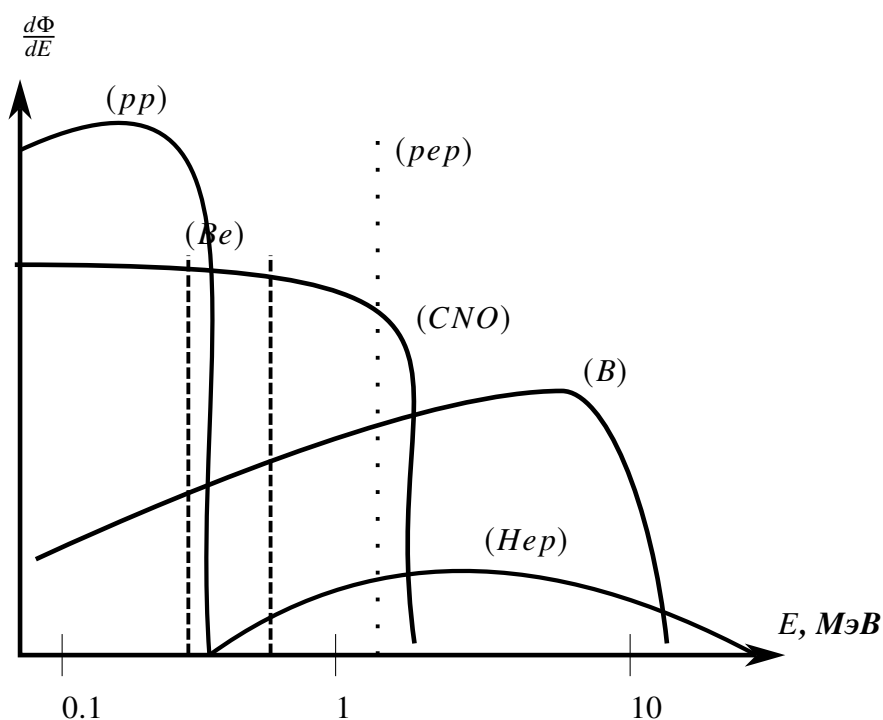


Рис. 4.1: Иллюстрация к объяснению.

Как было отмечено выше, несмотря на то, что борных нейтрино образуется довольно мало по сравнению с остальными нейтрино, у них довольно высокие энергии. Как известно, сечение взаимодействия нейтрино растет с ростом энергии. Поэтому, чем больше энергия нейтрино, тем лучше мы сможем его задетектировать.

Здесь возникают некоторые теоретические неопределенности, связанные с предсказаниями стандартной солнечной модели. Существуют различные вариации стандартной солнечной модели, которые связаны с составом более тяжелых элементов. Однако, в основном, это очень мало влияет на спектр нейтрино.

Эксперименты по регистрации солнечных нейтрино

Итак, из Солнца должно приходить довольно много нейтрино. Возникает вопрос их регистрации.

Радиохимические методы детектирования нейтрино. Эксперимент Девиса

Первым экспериментом по регистрации солнечных нейтрино был эксперимент Девиса. Для регистрации нейтрино использовалась реакция обратного β -распада на хлоре:



Для эксперимента использовался большой сосуд с веществом, содержащим хлор. Если хлор налетает нейтрино, то образуется аргон и электрон. Сечение взаимодействия нейтрино с аргоном очень мало, поэтому атомов аргона образовывалось очень мало. Аргон химическим методом выделялся из указанного сосуда с хлором. Методы, которые используют такого типа методику, называются радио-химическими методами детектирования нейтрино. Эксперименты в таком режиме проходили больше двадцати лет. Образовавшийся аргон является β -распадчиком. По тому, сколько распадов произошло, можно определить, сколько образовалось аргона. Значит, можно измерить, сколько нейтрино прилетело.

В результате этого эксперимента был измерен поток нейтрино. Заметим, что реакция (4.32) является пороговой, то есть реагируют не все нейтрино, а только те, у которых энергия превышает пороговое значение

$$E_{th} \approx 0.8 \text{ МэВ} \quad (4.33)$$

Из спектра на рис. 4.1 получаем, что основная масса нейтрино в данном эксперименте не регистрировалась.

Поток нейтрино, полученный в данном эксперименте, сравнили с потоком, полученным из предсказания стандартной солнечной модели. Отношение этих потоков

$$\frac{\Phi_{\text{эксп}}^{Ga}}{\Phi_{\text{ССМ}}^{Cl}} = 0.34 \pm 0.05 \quad (4.34)$$

Другими словами, наблюдалась нехватка нейтрино по сравнению с предсказаниями. Полученный результат называется проблемой солнечных нейтрино.

Отметим, что в статьях результаты приводят в единицах SNU (число захватов в секунду на один атом) :

$$10^{-36} \frac{\text{захв}}{\text{с} \cdot \text{1 атом}} \quad (4.35)$$

Радиохимические методы детектирования нейтрино. Эксперименты SAGE и GALLEX

Существуют другие эксперименты, использующие радиохимические методы. В них используется реакция на галлии:



Порог этой реакции значительно ниже:

$$E_{th} \simeq 0.23 \text{ МэВ} \quad (4.37)$$

Чтобы подтвердить или опровергнуть результат, полученный Девисом, в этом случае поставили два эксперимента: SAGE и GALLEX. Результаты этих экспериментов дали значения потоков нейтрино по сравнению с потоком, который дает стандартная солнечная модель:

$$\frac{\Phi_{\text{ЭКСП}}^{\text{Ga}}}{\Phi_{\text{ССМ}}^{\text{Ga}}} = \begin{cases} 0.54 \pm 0.06, & \text{SAGE} \\ 0.56 \pm 0.06, & \text{GALLEX} \end{cases} \quad (4.38)$$

Аналогично предыдущему методу, Ge выделялся радиохимическим методом. Его период полураспада

$$T_{\frac{1}{2}} \simeq 16.5 \text{ дн} \quad (4.39)$$

Итак, снова подтвердилась проблема дефицита солнечных нейтрино по сравнению с предсказаниями.

Kamiokande

Следующий эксперимент использовал большой чан с водой, расположенный в шахте. Для регистрации нейтрино использовалась реакция



Изучение, получающееся в этой реакции, регистрировалось фотоумножителем. Здесь удалось сделать так, чтобы порог регистрации был

$$E_{th} \simeq 5.5 \text{ МэВ} \quad (4.41)$$

Значит, регистрировались в основном борные нейтрино.

Заметим, что в этой реакции могут реагировать не только электронные нейтрино, но и другие типы нейтрино, если они есть. Однако надо учитывать, что сечения взаимодействия нейтрино с электроном немного разные

$$\frac{\sigma(\nu_\mu, \nu_\tau)}{\sigma_{\nu_e}} \simeq 0.155 \quad (4.42)$$

Фактически был измерен поток

$$\Phi_{\nu e} = \Phi_{\nu e} + 0.155 (\Phi_{\nu\mu} + \Phi_{\nu\tau}) \quad (4.43)$$

Экспериментальный результат:

$$\frac{\Phi_{\nu e}^{SK}}{\Phi_{\nu e, CCM}^{SK}} \simeq 0.41 \pm 0.06 \quad (4.44)$$

Итак, этот результат тоже указывал на дефицит солнечных нейтрино. Пока что ни один из указанных экспериментов не говорит о том, что нейтрино переходят из одного типа в другие.

SNO (Канада)

Здесь также использовался чан, в котором находилась тяжелая вода. Особенность этого экстерната заключалась в том, что на нем можно было измерить взаимодействие нейтрино двух типов. Первая реакция была чувствительна только к электронным нейтрино. Электронное нейтрино может взаимодействовать с дейтроном:

$$\Phi_{\nu e} : \quad \nu_e + {}^2H \rightarrow p + p + e \quad (4.45)$$

Реакция определялась в результате детектирования излучения электрона.

Второй тип реакции

$$\Phi_{\nu} : \quad \nu + {}^2H \rightarrow p + n + \nu \quad (4.46)$$

Таким образом, в первая реакция происходит в заряженном токе. Во второй же реакции число протонов не изменилось. Эта реакция имеет место для всех типов нейтрино и происходит через нейтральные токи. Измерение второй реакции происходило за счёт того, что нейтрон захватывается на других ядрах. Эти ядра становятся возбуждёнными и испускают γ -кванты, по которым и можно было судить, что такая реакция произошла.

Пороговая энергия этих реакций

$$E_{th} \simeq 2.2 \text{ МэВ} \quad (4.47)$$

то есть здесь тоже регистрировались в основном борные нейтрино.

Итак, измеряя количество реакций (4.45), эксперимент измерял поток электронных нейтрино. Изменяя количество реакций типа (4.46), эксперимент измерял поток всех нейтрино.

В результате было получено для потока электронных нейтрино

$$\frac{\Phi_{\nu_e}^{SNO}}{\Phi_{\nu_e,CCM}^{SNO}} \simeq 0.3 \pm 0.05 \quad (4.48)$$

для полного потока нейтрино

$$\frac{\Phi_{\nu}^{SNO}}{\Phi_{\nu,CCM}^{SNO}} \simeq 0.87 \pm 0.19 \quad (4.49)$$

Таким образом, эксперимент показал, что полное число приходящих нейтрино совпадает с тем количеством нейтрино, которое предсказывает стандартная солнечная модель, но электронных нейтрино из них только часть.

Можно показать, что результаты экспериментов *SNO* и *SK* совместны между собой. Их можно сравнивать, так как они чувствительны к высокоэнергичной части спектра. Более того, из результатов *SNO* можно извлечь сумму потоков мюонных и τ -нейтрино. Полученное значение можно подставить в (4.43) и сравнить с результатом, полученным в *SK*. Итак,

$$\Phi_{\nu_\mu} + \Phi_{\nu_\tau} = \underbrace{(0.87 - 0.3)}_{0.57} \Phi_{\nu,CCM} \quad (4.50)$$

Значит, для *SK* ожидаем величину

$$\Phi_{\nu_e}^{SK} = \Phi_{\nu_e} + 0.155 \left(\Phi_{\nu_\mu} + \Phi_{\nu_\tau} \right) = \underbrace{(0.3 + 0.155 \cdot 0.57)}_{\approx 0.38} \Phi_{\nu,CCM} \quad (4.51)$$

Таким образом, эти эксперименты совместны друг с другом в высокоэнергичной части спектра.

Теоретическое описание солнечных нейтрино

Уравнение, описывающее эволюцию нейтрино в веществе

$$i \frac{d}{dx} \nu_f = \left[U \frac{M^2}{2E} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \nu_f \quad (4.52)$$

В отличие от случая, разобранный ранее (распространение нейтрино в веществе постоянной плотности), здесь

$$V_{CC} = \sqrt{2} G_F n_e(r) \quad (4.53)$$

и n_e зависит от расстояния от центра Солнца.

Поэтому аналитически это уравнение решить нельзя. Его можно решить численно, но

при этом надо хотя бы приближенно проанализировать это уравнение, чтобы понимать, что происходит.

Чтобы проанализировать это уравнение, сделаем несколько приближений.

Первое приближение

Пренебрежем CP -нарушением. При этом говорим, что $\theta_{13} = 0$. Тогда матрица смешивания сильно упрощается. Ее можно представить в виде произведения трех матриц

$$U = R_{23} \underbrace{R_{13}}_1 R_{12} \simeq R_{23} R_{12} \quad (4.54)$$

где R_{ij} – это матрицы поворота в соответствующих плоскостях. Например,

$$R_{12} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Подставим матрицу смешивания в указанном виде в уравнение

$$i \frac{d}{dx} \nu_f = \left[R_{23} R_{12} \frac{M^2}{2E} R_{12}^T R_{23}^T + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \nu_f \quad (4.56)$$

Перейдем в новый базис

$$\nu_f = R_{23} \tilde{\nu}_f = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \tilde{\nu}_\mu \\ \tilde{\nu}_\tau \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

В результате, если подставить такую замену (4.57) в уравнение (4.56) и умножим полученное уравнение на R_{23}^T , получим уравнение для $\tilde{\nu}_f$

$$i \frac{d}{dx} \tilde{\nu}_f = \left[R_{12} \frac{M^2}{2E} R_{12}^T + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \tilde{\nu}_f \quad (4.58)$$

Видно, что $\frac{M^2}{2E}$ в первом слагаемом в правой части (4.58) – это диагональная матрица. R_{12} поворачивает в плоскости 12. Таким образом, уравнение для $\tilde{\nu}_\tau$ отщепляется, то есть $\tilde{\nu}_\tau$ эволюционирует отдельно. Значит, мы возвращаемся в ситуацию с осцилляциями между двумя флейворами нейтрино между ν_e и $\tilde{\nu}_\mu$.

Итак, мы получили осцилляции двух флейворов в веществе. Этот случай мы уже изучили в начале лекции. Мы показали, что гамильтониан взаимодействия нейтрино в веществе

зависит от соотношения между вакуумным вкладом и вкладом вещества в уравнение эволюции. Характерной особенностью было условие выполнения резонанса:

$$\Delta_{21} \cos 2\theta \sim V_{CC} \quad (4.59)$$

Чтобы понять, когда это происходит, нужно оценить величину V_{CC} . Оценим ее в центре Солнца

$$V_{CC}^{\text{центр}} = \sqrt{2} G_F n_e = \sqrt{2} \cdot 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{25} \frac{1}{\text{см}^3} \cdot 7.7 \cdot 10^{-42} \text{ ГэВ}^3 \cdot \text{см}^3 \sim 7.6 \cdot 10^{-12} \text{ эВ} \quad (4.60)$$

В результате можно получить, что резонанс выполняется для нейтрино с энергией $E \sim 3 \text{ МэВ}$.

Лекция 5. Солнечные нейтрино. Атмосферные нейтрино

Основные результаты экспериментов по детектированию солнечных нейтрино

Ранее мы начали изучать солнечные нейтрино. Мы изучили осцилляции в вакууме и веществе постоянной плотности. На прошлой лекции мы начали изучать солнечные нейтрино. Основные результаты:

- Интервал энергий солнечных нейтрино 0.1 МэВ – 20 МэВ.
- Разные эксперименты по детектированию солнечных нейтрино имеют разные пороги энергии.
- Экспериментальные данные приводятся в виде отношения измеренного потока солнечных нейтрино к потоку, который ожидается в стандартной солнечной модели в отсутствие осцилляций. Для эксперимента SuperKamioKande:

$$\frac{\Phi_{\nu_e}^{SK}}{\Phi_{\nu_e,CCM}} = 0.41 \quad (5.1)$$

В этом эксперименте изучалось рассеяние нейтрино на электроны.

В эксперименте *SNO* для потока электронных нейтрино было получено

$$\frac{\Phi_{\nu_e}^{SNO}}{\Phi_{\nu_e,CCM}} \simeq 0.3 \quad (5.2)$$

Полный поток нейтрино, который измерялся за счет взаимодействия в нейтральных токах

$$\frac{\Phi_{NC}^{SN}}{\Phi_{NC,CCM}} = 0.87 \pm 0.19 \quad (5.3)$$

Таким образом, эксперимент показал, что происходят переходы между различными типами нейтрино.

Теоретическое описание солнечных нейтрино (продолжение)

Вернемся к теоретическому описанию солнечных нейтрино. Напомним, что исходно у нас был базис из трех нейтринных флейворов:

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Элементы этого базиса – элементы типа $\langle \nu_e | \nu \rangle$.

После замены переменных мы привели гамильтониан к виду

$$H = U \frac{M^2}{2E} U^T + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

где элемент

$$V_{CC} = +\sqrt{2} G_F n_e \quad (5.6)$$

отвечает за вклад вещества.

В сделанных предположениях матрица смешивания имеет вид

$$U = R_{23} R_{12} \quad (5.7)$$

Замена переменных имеет вид

$$\nu = R_{23} \tilde{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \tilde{\nu}_\mu \\ \tilde{\nu}_\tau \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

где матрица поворота имеет вид

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Эволюционное уравнение приобретает вид

$$i \frac{d}{dx} \tilde{\nu} = \underbrace{\left\{ R_{12} \frac{M^2}{2E} R_{12}^T + V_{CC} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_H \tilde{\nu} \quad (5.10)$$

Далее под $\tilde{\nu}$ будем понимать

$$\tilde{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \tilde{\nu}_\mu \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Матрицу, стоящую в фигурных скобках в (5.10), мы уже находили ранее:

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_{21} \cos 2\theta_{23} + 2V_{CC} & \Delta_{21} \sin 2\theta_{23} \\ \Delta_{21} \sin 2\theta_{23} & \Delta_{21} \cos 2\theta_{23} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Отметим, что при рассмотрении нейтрино в веществе, важно учитывать соотношение между вкладом вещества и вакуумным вкладом. Если вклад вещества маленький, осцилляции

близки к вакуумным. Если вклад вещества большой, осцилляции подавлены. В случае резонанса (эти две величины сравнимы) осцилляции будут с большой амплитудой (даже если угол смешивания мал).

На прошлой лекции мы получили значения вклада V_{CC} в центре Солнца:

$$V_{CC}^{max} \sim 7.6 \cdot 10^{-12} \text{ эВ} \quad (5.13)$$

Энергия, при которой будет резонанс, определяется соотношением

$$\frac{\Delta m_{21}^2}{2E} \cos 2\theta_{23} = V_{CC} \quad (5.14)$$

Соответственно, резонансная энергия в центре Солнца

$$E_{рез} \simeq 3 \text{ МэВ} \quad (5.15)$$

Плотность электронов падает при движении от центра Солнца наружу. Значит, резонансная энергия тоже будет расти. Если нейтрино имеет энергию меньше 3 МэВ, то оно никогда не будет в резонансе. Если же энергия нейтрино больше 3 МэВ, то где-то по дороге от центра Солнца к поверхности оно испытает резонанс.

Рассмотрим поподробнее эффективный гамильтониан (5.12). Из-за его сложного вида уравнение нельзя решить аналитически. Поставим вопрос по-другому. Какие собственные значения бывают у этого гамильтониана в некоторой точке (найдем мгновенные собственные значения гамильтониана). Посмотрим, как эти собственные значения меняются при изменении r .

Пусть угол смешивания $\theta_{23} = 0$. В этом случае матрица диагональна. Будем рассматривать случай, когда $E \gg 3 \text{ МэВ}$. Тогда в центре Солнца вклад $2V_{CC}$ доминирует. При увеличении r компонента V_{CC} уменьшается. В результате получаем изменение уровней в зависимости от r вида рис. 5.1. Видно, что уровни в таком гамильтониане пересекаются.

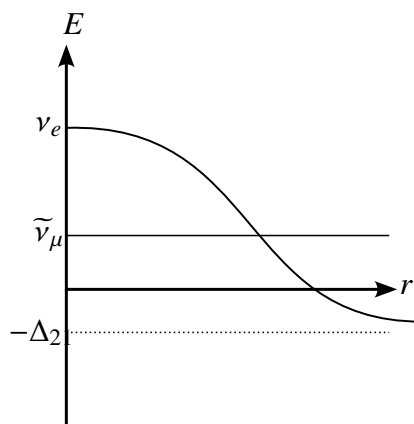


Рис. 5.1: Случай $\Delta_{21} > 0$

Заметим, что такое расположение уровней имеет место при предположении

$$\Delta_{21} \cos 2\theta_{23} > 0 \quad (5.16)$$

В противном случае мы получили бы рис. 5.2.

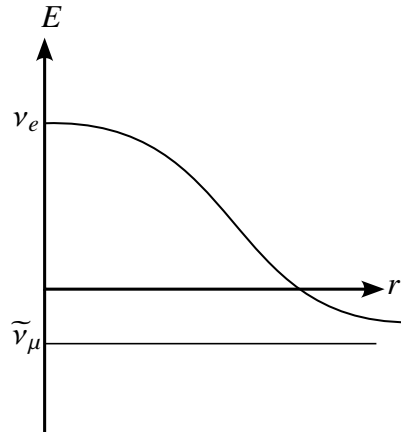


Рис. 5.2: Случай $\Delta_{21} < 0$

Задача на дом

Доказать, что если угол смешивания θ_{23} не равен нулю, но мал, для уровней получится рис. 5.3. Таким образом, в данном случае уровни перестают пересекаться. Область, в которой уровни близки друг к другу, называется резонансной, так как в ней вакуумный вклад и вклад вещества близки.

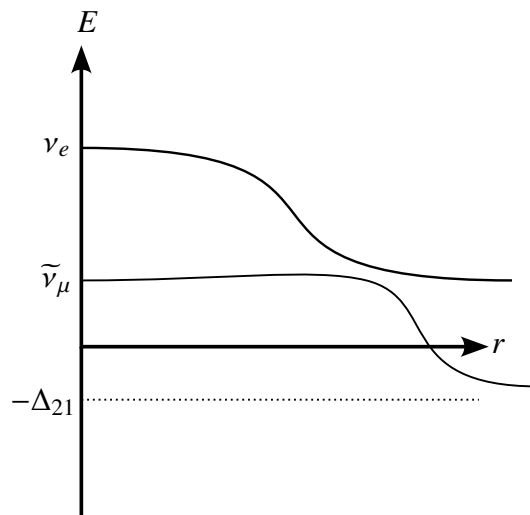


Рис. 5.3: Случай малого θ_{23}

Проанализируем состояния нейтрино. Уравнение эволюции имеет следующий вид

$$i \frac{d}{dx} \tilde{\nu}(x) = H(x) \tilde{\nu}(x) \quad (5.17)$$

Диагонализуем гамильтониан в каждой точке с помощью матрицы поворота на угол θ_m в веществе

$$U_m = \begin{pmatrix} \cos \theta_m(x) & \sin \theta_m(x) \\ -\sin \theta_m(x) & \cos \theta_m(x) \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

С помощью этой матрицы поворота перейдем к новому базису

$$\tilde{\nu} = U_m \nu_m \quad (5.19)$$

В этом базисе гамильтониан диагонален. В результате уравнение приобретает вид

$$i \frac{d}{dx} (U_m \nu_m) = H U_m \nu_m \quad (5.20)$$

После дифференцирования получаем

$$i \left(\frac{d}{dx} U_m \right) \nu_m + i U_m \frac{d}{dx} \nu_m = H U_m \nu_m \quad (5.21)$$

Умножим это уравнение слева на U_m^T и преобразуем уравнение. В результате получаем уравнение вида

$$i \frac{d}{dx} \nu_m = \left[U_m^T H U_m - i U_m^T \frac{d}{dx} U_m \right] \nu_m \quad (5.22)$$

Так как U_m диагонализует H , то матрица $U_m^T H U_m$ тоже диагональна и имеет вид

$$U_m^T H U_m = \begin{pmatrix} E_1(x) & 0 \\ 0 & E_2(x) \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Найдем оставшуюся часть нового гамильтониана:

$$U_m^T \frac{d}{dx} U_m = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s & c \\ -c & -s \end{pmatrix} \dot{\theta}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\theta}_m \quad (5.24)$$

Таким образом, получаем уравнение

$$i \frac{d}{dx} \nu_m = \begin{pmatrix} E_1(x) & -i \dot{\theta}_m(x) \\ i \dot{\theta}_m(x) & E_2(x) \end{pmatrix} \nu_m \quad (5.25)$$

Отметим еще раз, что

$$\tilde{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \tilde{\nu}_\mu \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

где $\tilde{\nu}$ мы получили в результате поворота ν с помощью матрицы R_{23} :

$$\nu \xrightarrow{R_{23}} \tilde{\nu} \quad (5.27)$$

Проанализируем, что будет, если недиагональные элементы будут достаточно малы. Если они равны нулю, то никаких перескоков не будет, ν_m эволюционируют домножением на некоторую фазу. Если недиагональные элементы не равны нулю, то появляется вероятность перехода с одного уровня на другой. Если $\dot{\theta}_m$ достаточно малы, этими переходами можно пренебречь. Такой случай называется адиабатическим приближением. Этот режим выполняется при условии

$$\left| \frac{\dot{\theta}_m}{E_1(x) - E_2(x)} \right| \ll 1 \quad (5.28)$$

Чтобы убедиться, что эволюция везде адиабатическая, это условие надо проверять в окрестности резонанса.

Задача на дом

Выразите условие адиабатичности (5.28) в терминах функций $n_e(r)$ (плотность электронов) и $\frac{d}{dr}n_e(r)$. Рассмотрите простую модель Солнца, в которой плотность падает экспоненциально:

$$n_e = n_e^{max} e^{-\frac{r}{0.1R}} \quad (5.29)$$

где n_e^{max} – максимальная плотность вещества в центре Солнца.

Для такой зависимости от r проверьте выполнение условия для солнечных нейтрино. Убедитесь, что условие адиабатичности выполняется для всего диапазона солнечных нейтрино.

Итак, мы пренебрегаем переходами между уровнями. В центре Солнца образуются электронные нейтрино. На выходе из Солнца мы останемся на том же уровне энергии (так как пренебрегли переходами). Указанные уровни – уровни гамильтониана в вакууме. Значит, они соответствуют массовым состояниям нейтрино. Таким образом, на выходе из Солнца образуется состояние нейтрино $|\nu_2\rangle$, которое и прилетит на Землю:

$$|\nu_e\rangle \xrightarrow{\text{переход}} |\nu_2\rangle \quad (5.30)$$

Вероятность найти ν_e

$$P_{\nu_e} = |\langle \nu_e | \nu_2 \rangle|^2 = \sin^2 \theta_{12} \simeq 0.3 \quad (5.31)$$

Рассмотрим следующую гипотетическую ситуацию. Предположим, что вещество не

оказывало бы никакого влияния на нейтринные осцилляции. Пусть у нас есть обычные осцилляции в вакууме. Тогда вероятность выживания электронного нейтрино

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \quad (5.32)$$

Если усреднить ее по спектру, то получим

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{12} > 0.5 \quad (5.33)$$

Заметим, что это выражение больше 0.5 для любого угла смешивания. Экспериментальные же данные указывают, что результат меньше 0.5. Другими словами, вещество должно играть какую-то роль. Вакуумные осцилляции не объясняют эффект дефицита солнечных нейтрино.

Задача на дом

Получите

1. поправку к формуле для вероятности найти электронное нейтрино, связанную с θ_{13} (предполагая, что θ_{13} – маленькая величина)
2. поправку к $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$, связанную с тем, что ν_e – не собственное состояние гамильтониана H .

Замечание: изначально, гамильтониан был недиагональным:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_{12} \cos + 2V_{CC} & \Delta_{12} \sin \\ \Delta_{21} \sin & \Delta_{21} \cos \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Реакторные эксперименты

Указанный выше подход позволяет найти значение угла θ_{12} . Однако, в этом секторе есть еще один параметр – Δm_{21}^2 , от которого зависят, в частности, вакуумные осцилляции. В этом рассмотрении Δm_{21}^2 никак не ограничен. Измерить Δm_{21}^2 позволили так называемые реакторные эксперименты.

В реакторных экспериментах образуются реакторные антинейтрино и электроны. Эти эксперименты используют реакцию обратного β -распада

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad (5.35)$$

Далее возникает два сигнала – позитрон аннигилирует с электроном, который есть в веществе, нейтрон захватывается ядром, которое становится возбужденным (после захвата образуется γ -квант).

CHOOZ

Первым таким экспериментом был CHOOZ во Франции. Здесь база $L \sim$ км, длина осцилляций

$$L_{osc} \sim 2.5 \text{ км} \frac{E}{1 \text{ ГэВ}} \frac{\text{эВ}^2}{\Delta m^2} \quad (5.36)$$

Представим, что произошла одна осцилляция. Тогда соответствующая Δm_{21}^2 должна быть равна

$$\Delta m_{21}^2 \sim \frac{2.5 \text{ км}}{L} \frac{E}{1 \text{ ГэВ}} \sim 2.5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \sim 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ} \quad (5.37)$$

Экспериментальное же значение равно $7 \cdot 10^{-5}$ эВ. Значит, чтобы эксперимент был чувствителен к реальным значениям, надо было увеличить базу. Таким образом, указанный эксперимент ничего не показал.

KamLand

Первый эксперимент, в котором была измерена Δm_{21}^2 – KamLand в Японии. Здесь базы разнились от 80 км до нескольких сотен километров. Понятно, что эти базы уже чувствительны к тем значениям, которые реализуются в природе.

Формула для вероятности имеет вид

$$P(E) = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \quad (5.38)$$

Ее, как функцию от E нужно усреднить по спектру и нормировать на полный поток

$$\frac{\int P(E)\Phi(E)dE}{\int \Phi(E)dE} \quad (5.39)$$

Эта величина и измеряется в эксперименте. Отсюда была обнаружена величина

$$\Delta m_{21}^2 \simeq 7.6 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2 \quad (5.40)$$

Атмосферный сектор

Как известно, атмосферу постоянно бомбардируют космические лучи. Обычно это протоны или тяжелые ядра. Они бьют по ядрам в атмосфере и рождают много адронов. Многие из этих адронов нестабильны. В конечном итоге тяжелые мезоны распадаются на более легкие. Самые легкие мезоны – пионы. Нас интересует, как будет образовываться нейтрино в атмосфере.

Итак, космические лучи бомбардируют атмосферу. В результате образуются адронные ливни. Наиболее часто встречающееся конечное состояние – π^\pm . Они могут распадаться:

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu^{(-)} \quad (5.41)$$

При этом

$$\tau_\pi \sim 2 \cdot 10^{-8} \text{ с} \quad (5.42)$$

Мюоны тоже нестабильные частицы. Они тоже распадаются следующим образом

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e \quad (5.43)$$

Его время жизни

$$\tau_\mu \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ с} \quad (5.44)$$

Какой спектр нейтрино мы бы получили на Земле, если бы все эти мюоны успели долететь? Мы получили бы соотношение потоков

$$\Phi_{\nu_\mu} : \Phi_{\nu_e} \approx 2 : 1 \quad (5.45)$$

Вообще говоря, это соотношение действительно выполняется для достаточно маленьких энергий. Для достаточно высоких энергий мюон не успевает долетать. Чтобы понять, сколько будет лететь мюон, нужно учесть γ -фактор:

$$\gamma = \frac{E}{m_\mu} \quad (5.46)$$

Итак, мюон пролетит расстояние

$$L_\mu \sim c\tau_\mu \cdot \gamma \sim 3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ с} \cdot \frac{10}{0.1} = 60 \text{ км} \quad (5.47)$$

Соответственно, если мюон достаточно высокоэнергичный, он может долететь до Земли, где и затормозится и распадется.

Полный поток атмосферных нейтрино

$$\Phi_{\nu_{\text{атм}}} \sim 0.1 \frac{1}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \quad (5.48)$$

Спектр имеет вид кривой, близкой к константе (рис. 5.4). Спектр ведет себя как

$$\frac{d\Phi}{d \ln E_\nu} \sim \frac{1}{E_\nu^2} \quad (5.49)$$

и довольно быстро спадает с энергией.

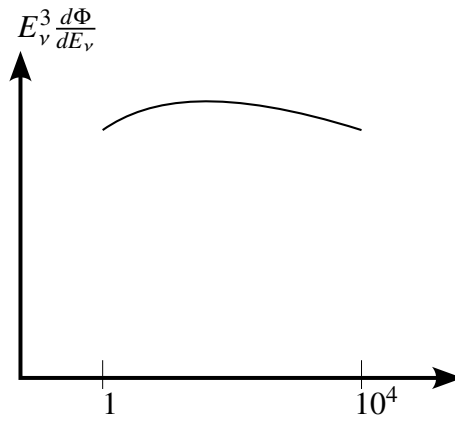


Рис. 5.4: Иллюстрация к объяснению.

Заметим, что эксперименты по изучению атмосферных нейтрино изучают осцилляции нейтрино в широком диапазоне баз (10 км – 10⁴ км) в зависимости от того, с какой стороны пришло нейтрино.

Лекция 6. Атмосферные нейтрино

Эксперименты по обнаружению нейтринных осцилляций в атмосферных нейтрино

На прошлой лекции мы закончили обсуждение переходов солнечных нейтрино. Мы рассмотрели проблему дефицита солнечных нейтрино и то, как она объясняется в рамках парадигмы нейтринных осцилляций. В контексте этой парадигмы объяснение заключается в том, что часть электронных нейтрино переходит в другие типы нейтрино.

Также мы начали обсуждать атмосферные нейтрино. Вспомним некоторые основные моменты. Интересующая нас область энергии атмосферных нейтрино

$$E_\nu \sim 1 \text{ ГэВ} - 100 \text{ ТэВ} \quad (6.1)$$

Поток атмосферных нейтрино где-то на десять порядков меньше потока солнечных нейтрино. Рождение атмосферных нейтрино происходит в основном в результате распада пионов и других адронов. В результате возникает поток мюонных и электронных нейтрино ν_μ , ν_e и антинейтрино. В некотором пределе можно считать, что соотношение между этими потоками 2 : 1, в особенности если речь идет о невысоких энергиях.

Характерным моментом является также то, что в экспериментах имеет место очень большой диапазон расстояний (база эксперимента) в зависимости от угла наблюдения.

Super-Kamiokande

Первый эксперимент, в котором были обнаружены нейтринные осцилляции в атмосферных нейтрино – это Super-Kamiokande. Ранее мы обсуждали этот эксперимент в контексте солнечных нейтрино. Здесь же мы рассмотрим этот эксперимент в контексте регистрации атмосферных нейтрино.

В этом эксперименте используется реакция рассеяния нейтрино на нуклоне. Так, нейтрино типа l взаимодействует с нуклоном N , в результате чего образуется заряженный лептон соответствующего типа и все остальное X

$$\nu_l + N \rightarrow l + (X) \quad (6.2)$$

Само нейтрино здесь не регистрируется, регистрируется свет от заряженного лептона. Соответственно, с той или иной степенью точности восстанавливается направление образующегося лептона. По этому направлению можно судить, какое направление было у исходного нейтрино в зависимости от того, насколько сильно они коррелировали между собой. Так, если нейтрино ультрарелятивистское, то, скорее всего, лептон полетит туда же. Если же нейтрино небольшой энергии, то корреляция будет меньше.

Так как энергии измеряются в зависимости от энергии нейтрино, то экспериментаторам

удобно разделять события по разным категориям. Здесь события были разделены на три следующие категории.

(FC) В первом случае (fully contained) нейтрино влетает в детектор, образуется лептон, причем точка рождения лептона находится внутри детектора. Более того, лептон останавливается в детекторе. Таким образом, то, что образуется в результате взаимодействия, полностью находится внутри детектора. Эти события хороши тем, что в таких случаях можно с неплохой точностью определить энергию. Такие события были дополнительно разделены еще на два события в зависимости от энергии.

(a) Случай, когда энергия лептона

$$E_l \lesssim 1.4 \text{ ГэВ} \quad (6.3)$$

Энергия лептона маленькая, а значит, и энергия нейтрино, скорее всего, была маленькая. Таким образом, имеем маленькую корреляцию между направлением прихода нейтрино и направлением лептона. Поэтому в этой группе событий очень плохое угловое разрешение:

$$\delta\theta \sim 60^\circ \quad (6.4)$$

Итак, в этом случае угловое разрешение плохое, но можно определить энергию.

(b) Вторая категория событий – события с энергией лептона

$$E_l \gtrsim 1.4 \text{ ГэВ} \quad (6.5)$$

Такие события возникают в случае, когда у нейтрино достаточно большая энергия. Поэтому здесь больше корреляция между направлением прихода лептона и нейтрино. Ошибка в измерении направления прихода нейтрино составляет

$$\delta\theta \sim 15^\circ \quad (6.6)$$

(PC) Вторая категория событий – так называемые partially contained – соответствует ситуации, когда нейтрино провзаимодействовало где-то снаружи детектора. В результате образовался лептон, который влетел в детектор и там остановился. Симуляция показала, что такие события происходят в случае, когда энергия нейтрино порядка нескольких ГэВ. Аналогичный диапазон энергий имеет место в предыдущем случае. Поэтому категории событий типа (FC) – (b) и (PC) были объединены между собой для экспериментального анализа. Такие события называют multi-GeV.

(UPM) Третья категория событий (upper going muons) соответствует ситуации, в которой точка рождения и точка остановки лептона находятся вне детектора. Что характерно,

энергии нейтрино (в среднем), достаточно большие

$$E_\nu \gtrsim 10 \text{ ГэВ} \quad (6.7)$$

Более того, направление измеряется очень хорошо, так как для высокоэнергичных нейтрино имеет место высокая корреляция. Таким образом, в такой группе событий получаем очень хорошее угловое разрешение. Энергия здесь не измеряется.

Экспериментальные данные

Итак, у нас есть поток нейтрино, который рождается в атмосфере от распадов пионов и каонов (его можно посчитать). В нем есть некоторая неопределенность в абсолютной нормировке. При этом форма спектра известна относительно хорошо. Совместно, экспериментаторы измеряли отношение между измеряемым и ожидаемым.

В результате рассмотренных экспериментов были получены следующие результаты.

1. Для электронных нейтрино были измерены столько, сколько и ожидалось. То есть, спектр ν_e совпал с теоретическим.
2. Для событий с низкой энергией диаграмма для косинуса зенитного угла имеет вид рис. 6.1. Видно, что экспериментальные данные лежат чуть ниже теоретических предсказаний. Более того, экспериментальные данные довольно сильно разбросаны из-за большой ошибки в угле.

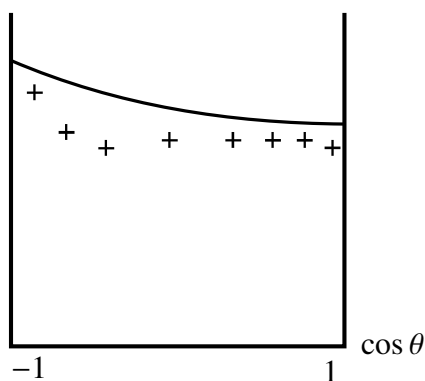


Рис. 6.1: Sub-GeV

3. В случае multi-GeV диаграмма имеет вид рис. 6.2. Для нейтрино, которые летят сверху, экспериментальные данные совпадают с теоретическими. Примерно в нуле начинается отклонение от теоретических значений, причем отклонение все больше увеличивалось. Так, для нейтрино, приходящего из земли, измеренный поток был в два раза меньше предсказанного.

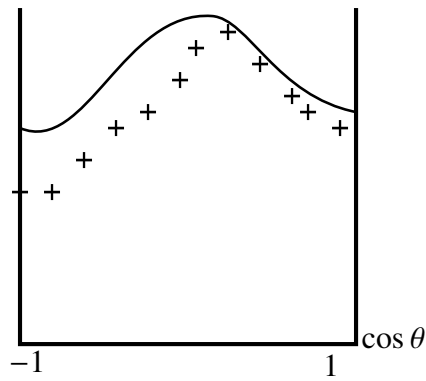


Рис. 6.2: multi-GeV

4. В третьей категории событий UGM речь идет только о нейтрино, летящих снизу. Поэтому измерялся интервал $[-1, 0]$. Измеренный поток не сильно отличался от предсказанного (рис. 6.3).

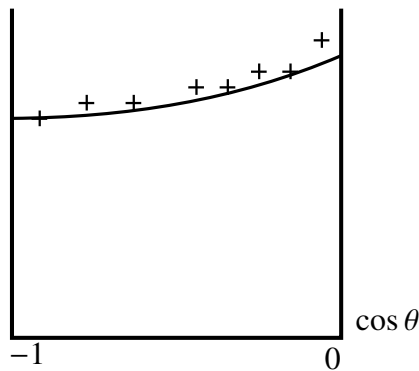


Рис. 6.3: Upper going muons

Попробуем объяснить экспериментальные данные в рамках нейтринных осцилляций. Как и ранее, пренебрежем маленьким углом θ_{13} :

$$\theta_{13} \ll 1 \quad (6.8)$$

Значит, его эффект (в первом приближении) незначителен.

Как и в случае солнечных нейтрино, можно сделать замену базиса

$$\nu \rightarrow \tilde{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \tilde{\nu}_\mu \\ \tilde{\nu}_\tau \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

В таком базисе в веществе $\tilde{\nu}_\tau$ отщепляется, и далее осцилляции идут между ν_e и $\tilde{\nu}_\mu$, причем эти осцилляции управляются фазой $\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}$.

Оценим длину этих осцилляций

$$L_{21} \sim 2.5 \text{ км} \frac{E}{\text{ГэВ}} \frac{\text{эВ}^2}{\Delta m_{21}^2} \sim \frac{2.5 \text{ км}}{7.8 \cdot 10^{-5}} \frac{E}{\text{ГэВ}} \sim \frac{1}{3} \cdot 10^5 \text{ км} \cdot \frac{E}{1 \text{ ГэВ}} \quad (6.10)$$

Таким образом, длина осцилляций довольно большая (больше диаметра Земли). Значит, указанные осцилляции, которые управляются за счет фазы $\frac{\Delta m_{21}^2}{2E} L$, не успевают произойти, так как характерная длина осцилляций больше имеющейся у нас базы. Это объясняет, почему поток электронных нейтрино не поменялся. Тот факт, что осцилляций нет, означает, что

$$P \left(\overset{(-)}{\nu}_e \rightarrow \overset{(-)}{\nu}_e \right) \simeq 1 \quad (6.11)$$

Таким образом, мы можем забыть о смешивании в секторе 21. Остаются осцилляции между $\tilde{\nu}_\mu$ и $\tilde{\nu}_\tau$. Значит, нужно рассмотреть осцилляции, которые управляются углом θ_{23} и фазой $\frac{\Delta M_{23}^2}{2E} L$.

Вернемся к исходному базису. В этом базисе уравнение имеет вид

$$i \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \underbrace{\left[R_{23} \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_2^2 & 0 \\ 0 & m_3^2 \end{pmatrix} R_{23}^T \right]}_{H_{\text{эфф}}} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Введем обозначение для эффективного гамильтониана $H_{\text{эфф}}$, который будет описывать осцилляции между ν_μ и ν_τ .

Для двухфлейворных нейтринных осцилляций в вакууме все результаты были получены ранее. Вероятность появления нейтрино можно рассчитать по формуле

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2}{4E} L \right) \quad (6.13)$$

Вероятность выживания мюонного нейтрино имеет вид

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \quad (6.14)$$

Именно эта вероятность нас и интересует.

Оценим длину осцилляций, которые управляются фазой с разностью квадратов масс Δm_{32} :

$$L_{23} \sim 2.5 \text{ км} \frac{E}{1 \text{ ГэВ}} \frac{\text{эВ}^2}{2.5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2} \sim 10^3 \text{ км} \frac{E}{\text{ГэВ}} \quad (6.15)$$

Таким образом, длина осцилляций сравнима с радиусом Земли. Для событий с $\cos \theta = -1$ (нейтрино летит из-под Земли) усредняем по спектру (так как в этом случае укладывается много длин осцилляций).

Тогда вероятность выживания мюонного нейтрино имеет вид

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \simeq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{23} \quad (6.16)$$

Из эксперимента следует (см. рис. 6.2), что эта вероятность равна примерно 0.5 :

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \simeq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{23} \simeq 0.5 \quad (6.17)$$

Значит,

$$\sin^2 2\theta_{23} \simeq 1 \quad (6.18)$$

Таким образом, в секторе 23 имеет место почти максимальное смешивание.

Также можно учесть, что отличие экспериментальных данных от ожидаемого потока начинается с тех углов, когда $\cos \theta = 0$ (рис. 6.4). Значит, длина осцилляций сравнима с соответствующей базой. Зная оценку для длины осцилляций, можно получить Δm .

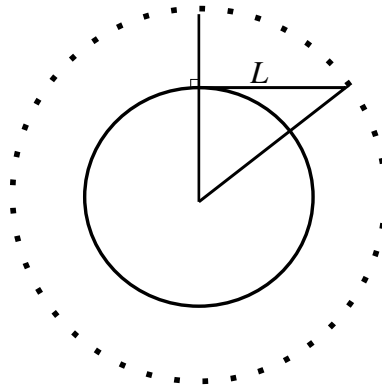


Рис. 6.4: Иллюстрация к объяснению.

Итак, интересующую нас L можно найти через радиус Земли R , высоту атмосферы h :

$$L = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \simeq 200 - 500 \text{ км} \quad (6.19)$$

Мы знаем, что это L должно быть сравнимо с длиной осцилляций:

$$L \sim L_{23} \simeq 2.5 \text{ км} \frac{E}{1 \text{ ГэВ}} \frac{\text{эВ}^2}{\Delta m_{32}^2} \quad (6.20)$$

Отсюда можно получить оценку для Δm_{32}^2 .

Таким образом, из экспериментов по измерению потоков атмосферных нейтрино можно извлечь угол смешивания θ_{23} и Δm_{32} .

Отметим, что мы рассмотрели упрощенный случай, так как мы пренебрегли эффектом

Земли. Вообще говоря, это приближение имеет место, так как оценка потенциала

$$V \simeq \sqrt{2}G_F n_e \quad (6.21)$$

для Земли имеет вид

$$V \sim 10^{-13} - 10^{-14} \text{ эВ} \quad (6.22)$$

Эту величину надо сравнивать с характерной фазой, например, с

$$\Delta_{32} \sim \frac{\Delta m_{32}^2}{2E} \sim \frac{2.5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2}{2 \cdot 10^9 \text{ эВ}} \sim 10^{-12} \text{ эВ} \quad (6.23)$$

Таким образом, вакуумный вклад больше вклада вещества.

Ускорительные эксперименты с фиксированной мишенью

Помимо экспериментов с атмосферными нейтрино, мы можем провести эксперименты, в которых нейтрино рождаются в ускорителях. Например, пучок протонов бьет по мишени, в результате чего рождаются адроны. Они распадаются на нейтрино. Таким образом, образуется поток нейтрино, который летит вдоль пучка ускорителя.

В экспериментах такого типа используются два детектора – ближний и дальний. Отношение между измеренными потоками и дает вероятность нейтринных осцилляций. Расстояние между этими детекторами L .

Характерные энергии для нейтрино в этих экспериментах – несколько ГэВ. Возникает вопрос: какие базы должны быть в этих экспериментах, чтобы быть чувствительным к соответствующим осцилляциям. Оценим:

$$L_{osc} \simeq 2.5 \text{ км} \frac{E}{\text{ГэВ}} \frac{\text{эВ}^2}{2.5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2} = 10^3 \text{ км} \frac{E}{\text{ГэВ}} \quad (6.24)$$

Таким образом, ближний и дальний детектор должны находиться на расстоянии порядка 1000 км.

Рассмотрим некоторые эксперименты такого типа.

1. Один из первых экспериментов – эксперимент K2K (Япония). Его база

$$L \simeq 250 \text{ км} \quad (6.25)$$

Средняя энергия нейтрино порядка 1 ГэВ. Измерялся поток мюонных нейтрино. Был обнаружен дефицит нейтрино. Например, ожидалось обнаружить 158 событий, а обнаружили 115 событий.

2. Эксперимент MINOS (США).

3. Эксперимент T2K (Япония). Здесь база

$$L \approx 295 \text{ км} \quad (6.26)$$

Указанные эксперименты рассматривали случай выживания нейтрино, то есть измерялось $P(\nu_l \rightarrow \nu_l)$.

Эксперимент, который изучал рождение нейтрино – эксперимент OPERA. Здесь измерялся переход

$$\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau \quad (6.27)$$

Измерялось именно рождение ν_τ .

Эксперименты с реакторными нейтрино

Перейдем к обсуждению измерения угла θ_{13} . Это маленький угол. Напомним, что в стандартной параметризации матрица смешивания представляет собой произведение трех матриц поворота, причем угол θ_{13} входит в элемент U_{e3} ($s_{13}e^{-i\delta}$).

Ранее мы показали, что в ряде случаев можно перейти от формулы трехфлейворных нейтринных осцилляций к формулам а-ля двухфлейворных нейтринных осцилляций с одной фазой. Из-за того, что

$$\Delta m_{21}^2 \ll \Delta m_{31}^2 \quad (6.28)$$

осцилляции, которые управляются фазой 21, включаются позже. Существует набор расстояний, где мы можем эти осцилляции не учитывать. Для таких переходов справедлива формула для вероятности нейтринных осцилляций

$$\alpha \neq \beta \quad P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = 4 |U_{\alpha 3}|^2 |U_{\beta 3}|^2 \sin^2 \frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \quad (6.29)$$

Аналогично, для вероятности выживания нейтрино типа α справедлива формула

$$\alpha = \beta \quad P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - 4 |U_{\alpha 3}|^2 (1 - |U_{\alpha 3}|^2) \sin^2 \frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \quad (6.30)$$

Эти формулы работают в режиме

$$\frac{\Delta m_{21}^2}{4E} L \ll 1 \quad (6.31)$$

Заметим, что в формулу (6.30) входит $U_{\alpha 3}$. Если в качестве α взять электронное нейтрино, то туда будет входить угол θ_{13} . Значит, вероятность выживания электронного нейтрино дается формулой

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - 4s_{13}^2 c_{13}^2 \sin^2 \frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \quad (6.32)$$

Значит, изучая эту вероятность, можно измерить угол. Проблема заключается в том, что

угол является маленьким. Значит, чтобы его измерить, нужно набрать много статистики, чтобы найти отличие от 1. В этом случае полезными оказались эксперименты с реакторными нейтрино.

Напомним, что энергия таких нейтрино

$$\langle E_\nu \rangle \sim 3 \text{ МэВ} \quad (6.33)$$

Соответственно, чтобы воспользоваться указанной формулой, нужно оперировать базами порядка

$$L_{13} \sim 2.5 \text{ км} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\text{эВ}^2}{2.5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2} \quad (6.34)$$

Значит, нам нужны базы порядка километра

$$L_{13} \sim \text{км} \quad (6.35)$$

Эксперимент Daya Bay (Китай). В этом эксперименте было два ближних детектора, которые стояли на расстояниях 470 м и 576 м, и один дальний детектор на расстоянии 1648 м. Было измерено отношение числа счета в дальнем детекторе к числу счета в ближнем детекторе:

$$R = 0.944 \pm 0.007 \pm 0.003 \quad (6.36)$$

Аналогичные результаты были получены в эксперименте RENO (Корея).

CP-фаза

Итак, мы обсудили экспериментальные данные, из которых извлекаются параметры нейтринных осцилляций (разность квадратов масс, углы смешивания). Остались неизмеренными CP-фаза и иерархия масс нейтрино.

CP-фаза входит в матрицу смешивания. Распишем матрицу смешивания:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

Вспомним формулу для вероятности нейтринных осцилляций

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} \text{Re} \left[U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \right] \sin^2 \frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} L + \\ + 2 \sum_{j>i} \text{Im} \left[U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \right] \sin \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} L \quad (6.38)$$

Соответствующая асимметрия имеет вид

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha - \bar{\nu}_\beta) \quad (6.39)$$

Если такая разность отлична от нуля, то у нас есть CP -нарушение. В эту разность дает вклад последнее слагаемое (6.38):

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha - \bar{\nu}_\beta) = 4 \sum_{j>i} Ym \left[U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \right] \sin \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} L \quad (6.40)$$

Заметим, что если $\alpha = \beta$, то в квадратных скобках будет стоять чисто действительная величина. Поэтому в эксперименте по исчезновению CP -нарушение измерить нельзя. Значит, нам нужен эксперимент по появлению.

Задача на дом

Покажите, что все величины, входящие в (6.40) (в квадратных скобках) пропорциональны одной величине. Таким образом, у нас есть одна независимая величина. Например, в качестве этой независимой величины можно взять

$$Ym \left[U_{e3}^* U_{\mu 3} U_{e2} U_{\mu 2}^* \right] \quad (6.41)$$

Более того, указанные величины совпадают с точностью до знака.

Таким образом, любая CP -нарушающая величина пропорциональна указанной величине (6.41). Подставим известные нам значения в стандартном представлении матрицы смешивания и получим явное выражение для (6.41):

$$\begin{aligned} Y_{CP} &= Ym \left[U_{e3}^* U_{\mu 3} U_{e2} U_{\mu 2}^* \right] = Ym \left[s_{13} e^{i\delta} s_{23} c_{13} s_{12} c_{13} \left(-s_{12} s_{23} s_{13} e^{-i\delta} + c_{12} c_{23} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{8} \cos \theta_{12} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \sin \delta \quad (6.42) \end{aligned}$$

Итак, любая CP -нарушающая наблюдаемая пропорциональна величине (6.42), в которую входит произведение всех трех синусов углов смешивания. Заметим, что $\sin 2\theta_{13}$ – маленькая величина. Более того, любой синус и косинус здесь (кроме максимального $\sin 2\theta_{23}$) представляет собой дополнительное подавление.

Распишем CP -нарушающую фазу

$$\mathcal{A}_{e\mu} = 4J_{CP} \left(\sin \frac{\Delta m_{32}^2}{2E} L + \sin \frac{\Delta m_{13}^2}{2E} L + \sin \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} L \right) \quad (6.43)$$

Проанализируем ответ. Представим, что какая-то из разностей масс равна нулю (полное вырождение). Например, $\Delta m_{21}^2 = 0$. Значит, последнее слагаемое в (6.43) равно нулю. Тогда

Δm_{32} и Δm_{13} равны друг другу по модулю и различны по знаку. Значит, первые два вклада в (6.43) сокращаются. Другими словами, если есть вырождение между массами, то ответ для CP -нарушения равен нулю.

Примерно это и имеет место для наших параметров, так как в нашем случае справедлива иерархия

$$\Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{31}^2| \quad (6.44)$$

Это еще один подавляющий фактор на CP -нарушающие эффекты. Именно поэтому так сложно извлечь CP -нарушающую фазу из всех экспериментальных данных. Это уменьшает любую вероятность, связанную с CP -нарушением.

Отметим, что после подстановки численных значений можно получить

$$|J_{CP}| \lesssim 0.04 |\sin \delta| \quad (6.45)$$

Лекция 7. Нейтринная иерархия. Сильное взаимодействие

Нейтринная иерархия

На прошлой лекции мы обсуждали те аспекты нейтринной физики, которые еще предстоит изучить. Характеристики, которые еще нужно измерить – это CP -нарушение в нейтринном секторе при имеющемся наборе параметров и нейтринную иерархию.

Известно, что есть две возможные иерархии масс нейтрино – прямая и обратная. Это связано с тем, что есть две разности квадратов масс – Δm_{21}^2 и Δm_{31}^2 . При этом Δm_{21}^2 положительна и примерно равна

$$\Delta m_{21}^2 \simeq 7.5 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2 \quad (7.1)$$

Про Δm_{31}^2 экспериментально известен только модуль:

$$|\Delta m_{31}^2| \simeq 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 \quad (7.2)$$

Разница между этими значениями очевидна. Значит, существует две возможности. В случае прямой иерархии два легких состояния и одно – тяжелое. В случае обратной иерархии третье состояние самое легкое, а первые два – более тяжелые (рис. 7.1).

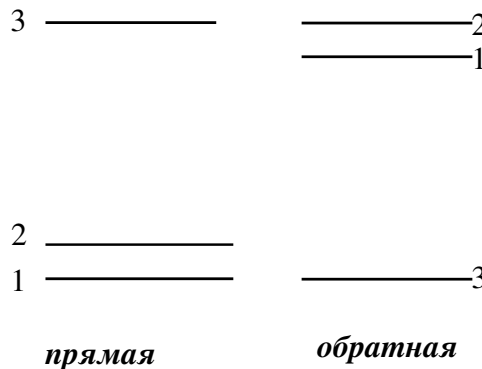


Рис. 7.1: Иллюстрация к объяснению.

Тот факт, что Δm_{21}^2 должно быть положительным, известно из экспериментов по изучению солнечных нейтрино. Мы знаем, что для количественного объяснения дефицита солнечных нейтрино нужно, чтобы в Солнце происходили переходы в соответствии с MSW-эффектом. Этот эффект зависит от вещества и, как следствие, от того, нейтрино ли летит или антинейтрино, так как добавочная энергия в гамильтониан имеет вид

$$V = \pm \sqrt{2} G_F n_e \quad (7.3)$$

где + – для нейтрино и – – для антинейтрино.

Как было показано ранее, в случае Солнца резонанс происходит в секторе нейтрино, если выполняется следующее соотношение

$$\Delta m_{21}^2 \cos 2\theta_{12} > 0 \quad (7.4)$$

Угол θ_{12} лежит в первой четверти, значит, косинус от него положительный. Отсюда следует, что $\Delta m_{21}^2 > 0$.

Как мы видели раньше, эксперименты по нейтринным осцилляциям в вакууме не позволяют определить иерархию. Однако, если мы рассматриваем вещество, иерархию определить можно. В случае солнечных нейтрино влияет только сектор 12. Можно также рассмотреть нейтрино другого происхождения. Например, атмосферные нейтрино.

Вспомним, как эволюционируют нейтрино в веществе. Гамильтониан эволюции имеет вид

$$H = \frac{1}{2E} U M_{diag}^2 U^+ + \begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

где, U – матрица смешивания, V – член взаимодействия с веществом, а массовая матрица диагональна и имеет вид

$$M_{diag}^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Проанализируем эволюцию нейтрино под действием этого гамильтониана. Для этого сделаем несколько предположений.

1. Положим CP -фазу равной нулю: $\delta = 0$. Матрица смешивания имеет вид

$$U = R_{23} R_{13} R_{12} \quad (7.7)$$

2. Учтем, что из гамильтониана можно выкидывать матрицы, пропорциональные единичной, так как они не влияют на вероятности осцилляций. Вычтем из матрицы (7.6) единичную матрицу, пропорциональную m_1^2 , то есть преобразуем (7.6) в матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

После этой процедуры гамильтониан будет явно зависеть от квадратов масс.

3. Введем обозначение

$$r_{\Delta} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \approx 0.026 \ll 1 \quad (7.9)$$

4. Теперь гамильтониан может быть переписан следующим образом

$$H = \underbrace{\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}}_{\Delta_{31}} R_{23} R_{13} R_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{12}^T R_{13}^T R_{23}^T + \begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Это гамильтониан в флейворном базисе. Поэтому уравнение Шредингера имеет вид

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu = H \nu \quad (7.11)$$

где

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_{\mu} \\ \nu_{\tau} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \langle \nu_e | \nu \rangle \\ \langle \nu_{\mu} | \nu \rangle \\ \langle \nu_{\tau} | \nu \rangle \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

5. В этом гамильтониане есть несколько маленьких параметров: r_{Δ} и

$$s_{13} \approx 0.15 \quad (7.13)$$

Таким образом, чтобы описать эволюцию нейтрино под действием рассматриваемого гамильтониана, можно воспользоваться теорией возмущений по этим параметрам. Далее можно последовательно диагонализировать этот гамильтониан. Рассмотрим основные этапы такого подхода и покажем, как это можно использовать для выяснения иерархии.

Как и ранее, сделаем замену переменных:

$$\tilde{\nu} = R_{23}^T \nu \quad (7.14)$$

Такая замена меняет слагаемое, отвечающее за взаимодействие с веществом. В результате новый гамильтониан будет иметь вид

$$\tilde{H} = \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \begin{pmatrix} s_{13}^2 + r_{\Delta} s_{12}^2 c_{13}^2 + \frac{2VE}{\Delta m_{31}^2} & r_{\Delta} s_{12} c_{12} c_{13} & (-r_{\Delta} s_{12}^2 + 1) s_{13} c_{13} \\ \dots & r_{\Delta} c_{12}^2 & -r_{\Delta} s_{12} c_{12} s_{13} \\ \dots & \dots & c_{13}^2 + r_{\Delta} s_{12}^2 s_{13}^2 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Заметим, что малые параметры стоят в наддиагональных элементах данной матрицы. Таким образом, в результате замены матрица уже стала почти диагональна. Далее можно последовательно диагонализировать эту матрицу. Начнем со следующего по величине элемента, то есть с элемента

$$(r_{\Delta} s_{12}^2 + 1) s_{13} c_{13} \quad (7.16)$$

Далее можно поворачивать плоскость 13, чтобы занулить это слагаемое. Для этого переходим к новому базису

$$\tilde{v} = R_{13}(\theta_{13}^m) v' \quad (7.17)$$

Этот поворот зависит от некоторого угла θ_{13}^m , который фактически является углом в веществе. Он отличается от угла в вакууме, так как есть взаимодействие с веществом.

Угол θ_{13}^m подбирается таким образом, чтобы занулить элемент

$$H'_{13} = 0 \quad (7.18)$$

Выражение для тангенса этого угла будет иметь вид

$$\operatorname{tg} 2\theta_{13}^m = \frac{\sin 2\theta_{13}}{\cos 2\theta_{13} - \frac{2V'E}{\Delta m_{31}^2}} \quad (7.19)$$

где

$$V' = \frac{V}{1 - r_{\Delta} s_{12}^2} \quad (7.20)$$

Заметим, что если вещества нет, то это угол совпадает с θ_{13} в вакууме. Более того, знаменатель при ряде параметров может обращаться в ноль. Эти случаи соответствуют резонансу. Таким образом, получаем условие резонанса в секторе 13:

$$E_{\text{рез}} = \frac{\Delta m_{31}^2}{2V'} \cos 2\theta_{13} \quad (7.21)$$

В этом случае вещество делает амплитуду осцилляций близкой к единице.

Напомним, что

$$V = \pm \sqrt{2} G_F n_e \quad (7.22)$$

Понятно, что в случае нейтрино резонанс действительно будет – уравнение (7.21) имеет решение (при определенной злостности найдется такая энергия, при которой это условие будет выполнено). При этом Δm_{31} должно быть положительно. Если же $\Delta m_{31} < 0$, то в секторе нейтрино решения нет. Это и будет определять прямую или обратную иерархию.

Таким образом,

1. если иерархия прямая: $\Delta m_{31}^2 > 0$, то 1 – 3 резонанс в секторе "нейтрино"
2. если иерархия обратная: $\Delta m_{31}^2 < 0$, то 1 – 3 резонанс в секторе "антинейтрино"

Используя этот факт, можно выяснить тип иерархии.

Далее можно продолжать диагонализацию гамильтониана.

После указанной замены переменных гамильтониан будет иметь вид

$$H' = \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \begin{pmatrix} h'_{11} & r_{\Delta} s_{12} c_{12} \cos(\theta_{13}^m - \theta_{13}) & 0 \\ 0 & r_{\Delta} c_{12}^2 & r_{\Delta} s_{12} c_{12} \sin(\theta_{13}^m - \theta_{13}) \\ 0 & 0 & h'_{33} \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Далее можно диагонализировать в секторе 12, то есть занулить следующий по величине элемент:

$$r_{\Delta} s_{12} c_{12} \cos(\theta_{13}^m - \theta_{13}) \quad (7.24)$$

Для этого можно сделать замену переменных

$$v' = R_{12}(\theta_{12}^m) v'' \quad (7.25)$$

В результате можно получить формулу для угла

$$\operatorname{tg} 2\theta_{12}^m = \frac{r_{\Delta} \sin 2\theta_{12} \cos(\theta_{13}^m - \theta_{13})}{c_{12}^2 r_{\Delta} - h_{11}} \quad (7.26)$$

Отсюда в явном виде можно получить условие резонанса.

Оценим характерную резонансную энергию, если мы обсуждаем эксперименты в Земле. Учтем, что в этом случае

$$V \simeq 10^{-13} \text{ эВ} \quad (7.27)$$

Тогда

$$E_{\text{рез}} \simeq \frac{2.5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2}{2 \cdot 10^{-13} \text{ эВ}^2} \sim 10 \text{ ГэВ} \quad (7.28)$$

Более аккуратный расчет дает значение

$$E_{\text{рез}}^{(akk)} \simeq 6.3 \text{ ГэВ} \quad (7.29)$$

Природа масс нейтрино

Вясним природу масс нейтрино – дираковская или майорановская. Дираковское нейтрино предполагает, что помимо левого нейтрино, в теорию также нужно добавить правое нейтрино. Майорановская масса подразумевает, что у нас есть только левое нейтрино и есть массовое слагаемое определенного типа. Возникает вопрос: как можно различить эти две ситуации экспериментально? Когда мы обсуждали осцилляции нейтрино, мы увидели, что осцилляции не могут различать эти две ситуации. Когда мы переходили от флейворного базиса к массовому, мы делали замену переменных. Полная матрица смешивания при этом

имела вид

$$U_{\text{смеш}} = U_{\text{осц}} \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

где $U_{\text{осц}}$ – это матрица, которая влияет на осцилляции. Она содержит три угла и одну фазу: $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta$.

В осцилляционных экспериментах вторая матрица в (7.30) исчезает. Поэтому мы никак не можем отличить дираковскую массу от майорановской. Тем не менее, есть некоторые наблюдаемые, которые позволяют отличить случаи майорановского и дираковского нейтрино.

Рассмотрим следующий процесс. Пусть нейтрон в ядре распадается (рис. 7.2).

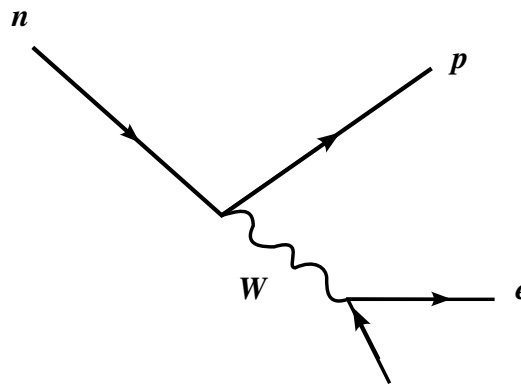


Рис. 7.2: Иллюстрация к объяснению.

Пусть в этом же ядре есть еще один нейтрон, который тоже испытывает β -распад (рис. 7.3).

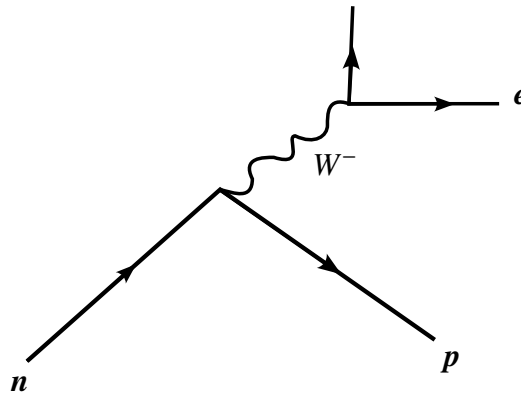


Рис. 7.3: Иллюстрация к объяснению.

Замкнем линии таким образом, чтобы получилась диаграмма типа рис. 7.4. Итак, имеем заряженные токи в лептонном секторе:

$$(\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L) (\bar{\nu}_L \gamma^\nu e_L) \quad (7.31)$$

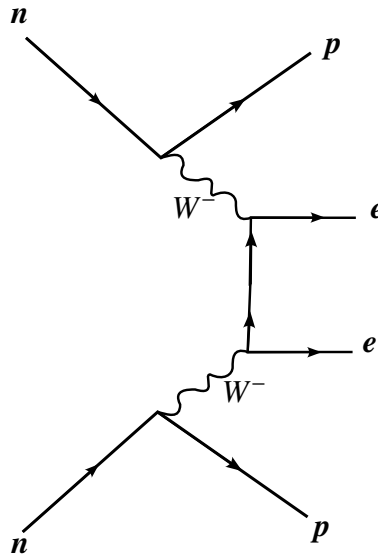


Рис. 7.4: Иллюстрация к объяснению.

Так как мы соединили две точки диаграмм, то у нас есть нетривиальное спаривание. Спаривание подразумевает, что у нас есть нетривиальная функция Грина типа

$$\langle 0|T\nu_\alpha(x)\nu_\beta(y)|0\rangle \quad (7.32)$$

Чтобы рассматриваемый матричный элемент был нетривиальный, нужно, чтобы спаривание типа (7.32) тоже было нетривиальным.

В дираковском случае стандартный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (7.33)$$

В этом случае единственное нетривиальное спаривание имеет вид

$$\langle T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle = S_{\alpha\beta}(x-y) \quad (7.34)$$

Все остальные спаривания равны нулю, в том числе

$$\langle T\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)\rangle = 0 \quad (7.35)$$

Для майрановского же случая

$$\langle 0|T\nu_\alpha(x)\nu_\beta(y)|0\rangle \neq 0 \quad (7.36)$$

Более того, для нейтрино определенной массы можно получить

$$\langle 0|T\nu_\alpha(x)\nu_\beta(y)|0\rangle \sim \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{im}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.37)$$

Стандартная двухточечная функция Грина имеет вид

$$\langle T\nu(x)\bar{\nu}(y)\rangle \sim \frac{i\hat{p}}{p^2 - m^2} \quad (7.38)$$

тогда как в дираковском случае Фурье-образ имеет вид

$$\frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2} \quad (7.39)$$

Таким образом, если нейтрино майорановское, то в ряде случаев должен быть разрешен следующий процесс двойного безнейтринного β -распада

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e \quad (7.40)$$

Прикинем по порядку величины характерное время жизни такого ядра относительно такого процесса. Учтем, что пропагатор пропорционален массе нейтрино. Значит, амплитуда этой величины должна быть подавлена массой нейтрино. При этом масса нейтрино достаточно мала. В этом и заключается сложность такого двойного безнейтринного β -распада. Учтем также, что у нас три флейвора нейтрино. Значит, чтобы посчитать амплитуду данного процесса, нужно перейти относительно нейтрино к массовому базису. Тогда амплитуда данного процесса пропорциональна величине

$$\sum m_i U_{ei}^2 = m_{ee} \quad (7.41)$$

Итак, амплитуда двойного безнейтринного β -распада пропорциональна m_{ee} и G_F^2 :

$$\mathcal{M} \sim m_{ee} G_F^2 \quad (7.42)$$

Значит, для ширины получаем

$$\Gamma \sim |m_{ee}|^2 G_F^4 E_*^7 \quad (7.43)$$

где E_* – характерная энергия. Она должна быть сравнимой с энергией связи в ядре (по порядку величины). Для оценки возьмем характерную энергию связи

$$E_* \sim 6 \text{ МэВ} \quad (7.44)$$

Тогда оценка для ширины

$$\begin{aligned} \Gamma &\sim \left(10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}\right)^4 |0.1 \cdot 10^{-9}|^2 \left(10^{-3}\right)^7 6^7 \text{ ГэВ} \sim 10^{-20} \cdot 10^{-20} \cdot 10^{-21} \cdot 2.8 \cdot 10^5 \text{ ГэВ} \sim \\ &\sim 3 \cdot 10^{-56} \text{ ГэВ} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Таким образом, характерное время жизни

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \sim \frac{6 \cdot 10^{-25} \text{ с}}{3 \cdot 10^{-56}} \sim 2 \cdot 10^{31} \text{ с} \sim 10^{24} \text{ лет} \quad (7.46)$$

Понятно, что оценка довольно грубая.

Обсудим экспериментальные ситуации по поиску двойного безнейтринного β -распада. Рассмотрим график зависимости величины $|m_{ee}|^2$ от массы легчайшего нейтрино (рис. 7.5). Текущая экспериментальная ситуация – это некоторая линия, которая исключает все значения m_{ee} больше некоторой. Отметим, что

$$m_{ee} = m_i U_{ei}^2 \quad (7.47)$$

причем U_{ei} – это элементы полной матрицы, в которой стоят дополнительные майорановские фазы, про которые мы ничего не знаем. Значит, у этой величины есть какой-то разброс. То есть, мы не знаем эту величину, даже зная параметры нейтринных осцилляций.

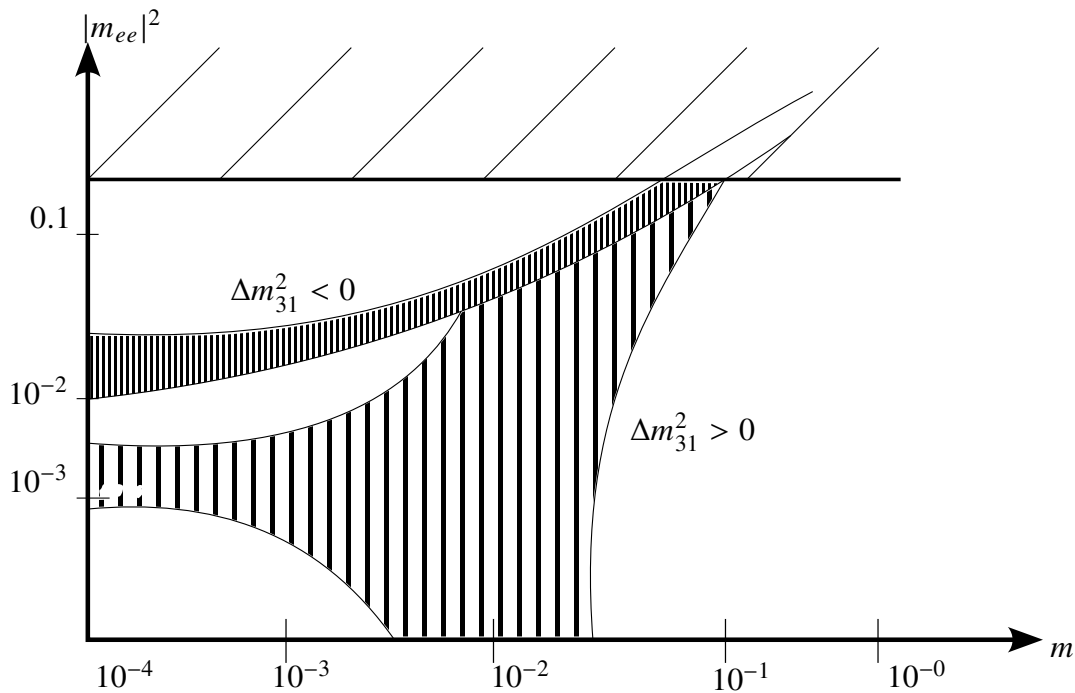


Рис. 7.5: Иллюстрация к объяснению.

Таким образом, в случае прямой иерархии есть сколько угодно малые значения m_{ee} . Поэтому предсказания времени жизни для двойного безнейтринного распада могут находиться сколь угодно низко.

Отметим также, что такой график имеет место только в предположении, что у нас есть три флейвора нейтрино. Если модель более сложная, график имеет уже другой вид.

Спектр по энергиям нейтрино

Ранее мы обсуждали нейтрино различного происхождения: солнечные и атмосферные нейтрино. На самом деле, существует очень широкий спектр по энергиям этих нейтрино. Достаточно недавно были открыты так называемые астрофизические нейтрино. В ходе эксперимента было показано, что при энергиях выше 100 ТэВ есть компонента, для которой наклон больше, чем для атмосферных нейтрино (рис. 7.6).

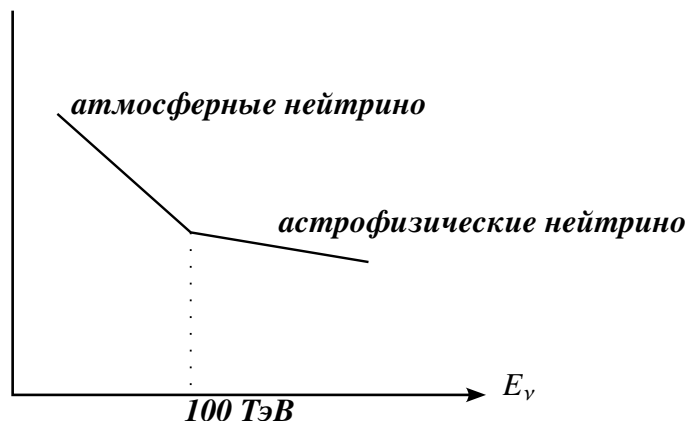


Рис. 7.6: Иллюстрация к объяснению.

Есть еще один источник нейтрино – сверхновые. От взрывов сверхновых образуются нейтрино энергий порядка

$$E_\nu \sim 10 - 20 \text{ МэВ} \quad (7.48)$$

Эти нейтрино пока еще не зарегистрированы.

Еще ниже по энергии находятся так называемые геонейтрино. Эти нейтрино образуются в результате различных β -распадов в земле. Их энергии порядка нескольких МэВ. В этой же области находятся солнечные нейтрино.

Также предсказывают существование реликтовых нейтрино. Их температура порядка

$$T \sim 2.7 \text{ К} \quad (7.49)$$

Нейтрино нерелятивистские. Сечение взаимодействия такого нейтрино крайне мала. Сейчас обсуждаются эксперименты по регистрации таких нейтрино с помощью обратного β -распада.

Некоторые идеи, связанные с нейтрино

Так как параметры нейтрино измерены достаточно хорошо, то нейтрино можно использовать как инструмент для изучения чего-либо. Например, есть идея изучения плотности Земли с помощью нейтринного потока. Так, когда нейтрино проложит через Землю, нейтрино чувствует, сколько электронов в земле (так как есть эффект вещества).

Вероятности перехода есть функции от угла и энергии

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)(\theta, E) \quad (7.50)$$

Оказывается, что эта величина очень чувствительна к составу земли. Значит, посредством изучения такой наблюдаемой можно определить плотность электронов в земле.

Также есть идея с помощью нейтрино узнавать, где люди обогащают уран.

С помощью нейтрино можно искать темную материю. Темная материя может где-то аннигилировать. Среди продуктов распада могут быть нейтрино, которые можно зарегистрировать.

Сильное взаимодействие

В стандартной модели сильные взаимодействия описываются квантовой хромодинамикой. Существует шесть типов кварков q . Относительно сильного взаимодействия кварки преобразуются по фундаментальному представлению группы $SU(3)$. Как следствие, есть соответствующие калибровочные поля. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{КХД}} = i\bar{q}_a \gamma^\mu D_\mu q_a - \frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \quad (7.51)$$

где a – массовые состояния. В этом семестре в контексте КХД мы не будем их различать.

Ковариантная производная:

$$D_\mu q = \left(\partial_\mu - ig_s A_\mu^a t^a \right) q \quad (7.52)$$

где g_s – константа связи сильных взаимодействий, A_μ – калибровочное поле, t^a – генератор группы $SU(3)$,

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_s [A_\mu, A_\nu] \quad (7.53)$$

где A_μ – матрица

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad (7.54)$$

Наблюдать мы можем адроны. Единственным стабильным адроном в большой группе адронов является протон p . Его масса

$$m_p \simeq 938.3 \text{ МэВ} \quad (7.55)$$

Нейтрон n имеет массу

$$m_p \simeq 939.6 \text{ МэВ} \quad (7.56)$$

Среди более легких адронов есть π -мезоны. Мезоны могут быть нейтральными – π^0 и заряженными – π^\pm .

Их массы

$$m_{\pi^0} \simeq 135 \text{ МэВ} \quad (7.57)$$

$$m_{\pi^\pm} \simeq 140 \text{ МэВ} \quad (7.58)$$

Адроны любят группироваться в группы по своим свойствам (масса и сила взаимодействия относительно сильного взаимодействия). Эти группы носят название мультиплетов. Пара p, n называется нуклоном. На это в ряде случаев можно смотреть как на одну частицу с двумя состояниями. Нуклон фактически является дублетом относительно изоспиновой группы $SU(2)$. Причем верхняя компонента этого дублета – протон, а нижняя – нейтрон.

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (7.59)$$

Пионы составляют мультиплет, который обычно обозначают π

$$\pi : [\pi^0, \pi^\pm] \quad (7.60)$$

Это триплет относительно изоспиновой группы. Это означает, что для π^0 : $I_3 = 0$, а для π^\pm : $I_3 = \pm 1$.

Есть представление с изоспином $\frac{3}{2}$ (Δ -изобара):

$$\Delta : \Delta^{++} \Delta^+ \Delta^0 \Delta^- \quad (7.61)$$

В этом случае изоспины соответственно

$$I_3 \quad +\frac{3}{2} \quad +\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad (7.62)$$

В сильном взаимодействии в качестве сохраняющихся величин можно выбрать \vec{I}^2, I_3 . Была введена группа флейворных симметрий $SU(2)$. обсудим смысл введения этой симметрии. Полный гамильтониан можно разбить на гамильтониан, который отвечает за сильное взаимодействие и за все остальные, которые нарушают симметрию:

$$H = H_{\text{сильн}} + \lambda H \quad (7.63)$$

где λ – относительно малая константа связи, по которой можно делать теорию возмущений.

Задача на дом

Известно, что Δ -изобара распадается за счет сильных взаимодействий на нуклон и пион:

$$\Delta \rightarrow N\pi \quad (7.64)$$

Рассмотрим распад Δ^+ -изобары. Здесь возможно два случая

$$\Delta^+ \rightarrow p\pi^0 \quad (7.65)$$

$$\Delta^+ \rightarrow n\pi^+ \quad (7.66)$$

Используя изоспиновую симметрию, найдите соотношение

$$\frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow p\pi^0)}{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow n\pi^+)} \quad (7.67)$$

Отметим, что были обнаружены более тяжелые состояния $N(1440)$, $N(1520)$, $\Delta(1600)$. Все эти возбуждённые состояния распадаются за счет сильных взаимодействий. Оказалось, что в этом случае для заряда частицы справедливо

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B \quad (7.68)$$

здесь B – барионное число. По сути оно было введено, чтобы запретить распад протона

$$p \rightarrow \pi^0 e^+ \quad (7.69)$$

Лекция 8. Сильное взаимодействие. Группа симметрий $SU(3)$

Сильное взаимодействие

Ранее мы обсудили спектр адронов. Напомним, что адроны делятся на две большие группы – мезоны и барионы. Мезоны – это сильновзаимодействующие бозоны, а барионы – сильновзаимодействующие фермионы. Барионам приписывается барионный заряд. Для мезонов барионное число равно нулю.

Также мы отметили, что адроны группируются в мультиплеты по изоспину, причем соответствующие квантовые числа сохраняются. Так как группа изоспина – это группа $SU(2)$, то можно выбрать базис из

$$\vec{I}^2 = I(I + 1) \quad (8.1)$$

и третьей компонентой изоспина I_3 . Эти величины сохраняются в сильном взаимодействии.

Как было отмечено ранее, для нуклонов (в том числе возбужденных), пионов и Δ -изобар $N^{(*)}$, π , Δ справедливо следующее: легчайшие из этих состояний либо стабильны (как протон), либо распадаются по слабым или электромагнитным взаимодействиям. Более тяжелые состояния распадаются по сильным взаимодействиям:

$$N^{(*)} \rightarrow N + \pi \quad (8.2)$$

с временем, характерным для сильных взаимодействий

$$\tau \sim 10^{-22} - 10^{-24} \text{ с} \quad (8.3)$$

Эта группа адронов удачно классифицируется с помощью группы симметрий $SU(2)$, причем для этой группы заряд можно представить в виде

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B \quad (8.4)$$

где B – барионное число.

Через какое-то время были обнаружены частицы, которые не попадали под указанную классификацию. Например,

$$p + \pi^- \rightarrow \underbrace{\Lambda^0}_{B=1} + \underbrace{K^0}_{B=0} \quad (8.5)$$

Необычным было то, что образовавшиеся частицы долго живут. Здесь Λ -гиперон – это фермион, K^0 – нейтральный K -мезон (это псевдоскаляр). При этом сечение рождения этой пары частиц достаточно большое (характерно для сильных взаимодействий). При этом

характерное время жизни

$$\tau_{\Lambda} \sim \tau_K \sim 10^{-10} \text{ с} \quad (8.6)$$

Такое время распада говорит о том, что такой распад происходит за счёт слабых взаимодействий. Заметим, что масса Λ -гиперона

$$m_{\Lambda} \simeq 1116 \text{ МэВ} \quad (8.7)$$

При этом распадается он согласно

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad (8.8)$$

K^0 распадается

$$K^0 \rightarrow \pi\pi \quad (8.9)$$

Таким образом, получаем противотечение с известной схемой: все, кроме самых легчайших, распались по сильным взаимодействиям.

Более того, были также обнаружены частицы, называющиеся Σ -гиперонами. Существует три вида таких частиц: Σ^0 , Σ^{\pm} . Их массы очень близки, то есть по изоспину получаем триплет. По массам они располагаются следующим образом: $\Sigma^+(1189 \text{ МэВ})$, $\Sigma^0(1193 \text{ МэВ})$, $\Sigma^-(1197 \text{ МэВ})$. Это барионы (фермионы со спином $\frac{1}{2}$). При этом время жизни Σ^{\pm}

$$\tau \sim 10^{-10} \quad (8.10)$$

а Σ^0 распадается по электромагнитному взаимодействию на Λ -гиперон и фотон с временем жизни, характерным для электромагнитных взаимодействий

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma \quad (8.11)$$

Помимо большого времени жизни, указанные частицы не вписывались в известную схему из-за формулы (8.4). Попробуем применить эту формулу к какой-нибудь из рассмотренных частиц, например, к Λ -гиперону. Заряд Λ -гиперона равен нулю, $I_3 = 0$, так как это синглет, а барионное число $B = 1$, так как это барион. Таким образом,

$$0 = \underbrace{0}_{I_3} + \frac{1}{2} \quad (8.12)$$

Значит, формула (8.4) не выполняется. Таким образом, для самого легкого набора барионов это соотношение выполняется, а для нового набора частиц – нет. Это странно, так как заряд Q сохраняется всегда, I_3 сохраняется в сильных взаимодействиях. Значит, и разница между этими величинами тоже должна сохраняться. Было предложено модифицировать это равенство, введя новую сохраняющуюся величину – странность S .

Для Λ -гиперона странность должна быть равна -1 :

$$S_{\Lambda^0} = -1 \quad (8.13)$$

Тогда правильное выражение для формулы типа (8.4) приобретает вид

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} (B + S) \quad (8.14)$$

Эта формула называется формулой Гелл-Мана — Нисидзимы.

Странность должна сохраняться в сильных взаимодействиях. Напомним, что Λ -гиперон и K^0 образуются в реакции



Частицы p , π^- не являются странными. Значит, для них странность $S = 0$. Для Λ^0 странность $S = -1$. Значит, чтобы реакция имела место, для K^0 странность нужно положить $S = +1$.

Заметим, что во всех реакциях, по которым распадаются странные частицы (за счет слабого взаимодействия), странность нарушается на единицу.

Сумму барионного числа и странности обозначают

$$Y = B + S \quad (8.16)$$

и называют гиперзарядом.

Итак, и странные, и нестранные барионы, характеризуются двумя квантовыми числами по сильным взаимодействиям – третьей компонентой изоспина и гиперзарядом.

Также были обнаружены частицы Ξ^0 , Ξ^- . Они образуют дублет по изоспину. Их массы 1315, 1322 МэВ соответственно, а характерное время жизни

$$\tau \sim 10^{-10} \quad (8.17)$$

Они также распадаются за счет слабых взаимодействий.

Итак, все указанные выше барионы имеют спин $J = \frac{1}{2}$ и четность, равную единице

$$J^P = \left(\frac{1}{2}\right)^+ \quad (8.18)$$

Также отметим, что масса K^0 равна

$$m_{K^0} \simeq 498 \text{ МэВ} \quad (8.19)$$

K^0 , K^+ образуют дублет по изоспину, причем масса K^+

$$m_{K^+} \simeq 494 \text{ МэВ} \quad (8.20)$$

У этих частиц есть античастицы: \bar{K}^0 и K^- соответственно. Эта пара частиц также является дублетом относительно группы изоспина. К ним же добавляются частицы π^0 , π^\pm . Также был обнаружен η^0 -мезон. Это нейтральный мезон, очень похожий на пион. Он является синглетом по изоспину, то есть $I = 0$, а его масса

$$m \simeq 548 \text{ МэВ} \quad (8.21)$$

Заметим, что у всего этого октета мезонов спин-четность одинакова и равна

$$J^P = 0^- \quad (8.22)$$

Схема классификации адронов. Группа симметрий $SU(3)$

Итак, у нас есть 8 легких мезонов и 8 достаточно легких барионов. Была предложена следующая схема классификации обычных и странных адронов.

Таблица 1: Схема классификации адронов

барионы	мезоны	I	Y
p, n	K^+, K^0	$\frac{1}{2}$	1
$\Sigma^0, \Sigma^+, \Sigma^-$	π^0, π^+, π^-	1	0
Λ^0	η	0	0
Ξ^0, Ξ^-	\bar{K}^0, K^-	$\frac{1}{2}$	-1

Отсюда возникает идея, что группа $SU(2)$ (то есть группа изоспина) не является самой общей группой симметрий сильных взаимодействий. Возможно, есть более широкая группа симметрий, причем в нее должны входить рассмотренные восьмимерные представления. Итак, нам нужно найти группу, в которой есть две сохраняющиеся величины. Такой группой симметрий является группа $SU(3)$.

Прежде, чем обсудить группу $SU(3)$, вспомним группу $SU(2)$. Это группа матриц ω

$$\omega^+ \omega = 1 \quad (8.23)$$

с единичным детерминантом

$$\det \omega = 1 \quad (8.24)$$

Причем матрицу представления можно разложить в окрестности единицы следующим образом

$$U = 1 + i\alpha^a I^a \quad (8.25)$$

причем для I^a известны коммутационные соотношения

$$[I^a, I^b] = i\epsilon^{abc} I^c \quad (8.26)$$

Итак, у нас есть две сохраняющиеся величины \vec{I}^2 и I_3 . Можно построить понижающие и повышающие операторы I_+ и I_- . С помощью этих операторов можно переходить между разными базисными элементами представления.

Теперь рассмотрим группу симметрий $SU(3)$. Это группа матриц 3×3 таких, что

$$\omega^\dagger \omega = 1 \quad (8.27)$$

$$\det \omega = 1 \quad (8.28)$$

Число генераторов равно восьми. Матрицу произвольного представления можно разложить в окрестности единицы следующим образом

$$U \simeq \mathbb{1} + i\epsilon_a F_a \quad (8.29)$$

Здесь ϵ_a – некоторые параметры, F_a – базисные элементы. Если речь идет о некотором конечномерном представлении, то F_a – это некоторые матрицы, причем для них справедливы коммутационные соотношения вида

$$[F_a, F_b] = if_{abc} F_c \quad (8.30)$$

где f_{abc} – структурные константы алгебры (или группы).

В качестве базиса удобно выбрать

$$F_a = \frac{1}{2} \lambda_a \quad (8.31)$$

где λ_a – это матрицы Геллмана

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

Заметим, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ похожи на матрицы Паули. Это подалгебра $SU(2)$ алгебры $SU(3)$.

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

λ_4, λ_5 генерируют вращение в плоскости 13. Матрицы λ_6, λ_7 строятся аналогично:

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Матрица λ_8 диагональна и имеет вид

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

Естественно отождествить третью компоненту изоспина с генератором F_3

$$I_3 \equiv F_3 \quad (8.36)$$

Более того, можно построить оператор

$$\vec{F}^2 = F_a F_a \quad (8.37)$$

Легко показать, что он коммутирует со всеми операторами. Значит, это будет некоторое число в данном неприводимом представлении.

Чтобы построить базис, нужно понять, какие генераторы можно выбрать в качестве полного набора коммутирующих операторов. Естественно выбрать третью и восьмую компоненты, так как они коммутируют между собой. Далее мы увидим, что восьмую компоненту нужно отождествить с гиперзарядом

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \quad (8.38)$$

Представления можно строить как в группе $SU(2)$. Первые три базисных элемента похожи на группу $SU(2)$. Значит, из них можно построить понижающий и повышающий операторы, которые будут действовать в подгруппе изоспина, так как эти элементы образуют подгруппу изоспина. Построим эти операторы следующим образом

$$I_{\pm} = F_1 \pm iF_2 \quad (8.39)$$

$$U_{\pm} = F_6 \pm iF_7 \quad (8.40)$$

$$V_{\pm} = F_4 \pm iF_5 \quad (8.41)$$

Заметим, что теперь все неприводимые представления будут располагаться в плоскости (в случае $SU(2)$ все представления располагались на прямой). При этом базисные элементы нашего представления будут характеризоваться определенными значениями третьей

компоненты изоспина и гиперзаряда.

Задача на дом

Покажите, что построенные операторы действуют так, как показано на рис. 8.1.

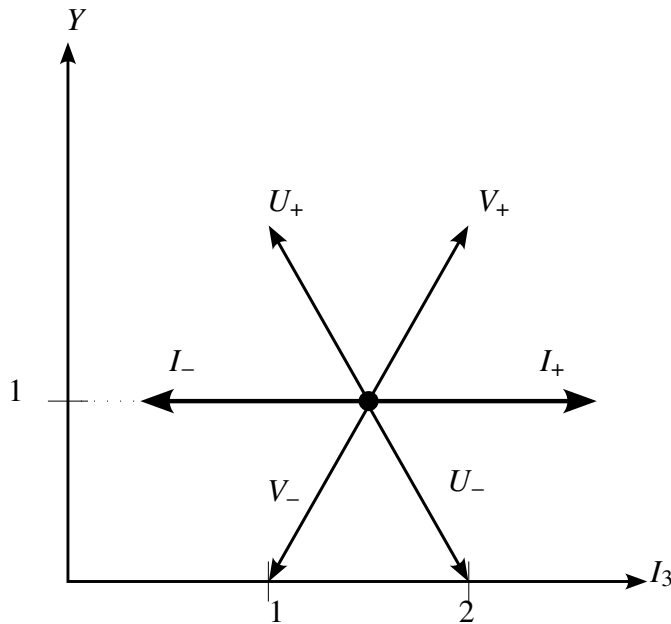


Рис. 8.1: Иллюстрация к объяснению.

Для этого надо найти коммутационные соотношения между V_{\pm} и третьей компонентой изоспина и гиперзаряда.

Итак, все представления располагаются в плоскости $I_3 - Y$. Октетное представление группы $SU(3)$ представлено на рис. 8.2 (здесь каждая точка – это базисный элемент с соответствующими координатам квантовыми числами). Понятно, что горизонтальные линии образуют представления подгруппы $SU(2)$ группы $SU(3)$. Октет легчайших мезонов,

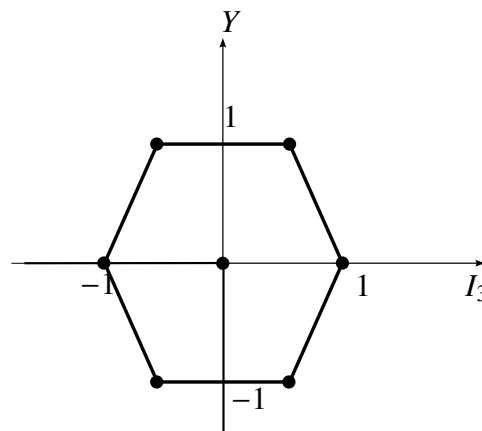


Рис. 8.2: Иллюстрация к объяснению.

для которых

$$J^P = 0^- \quad (8.42)$$

можно расположить на указанной схеме согласно рис. 8.3.

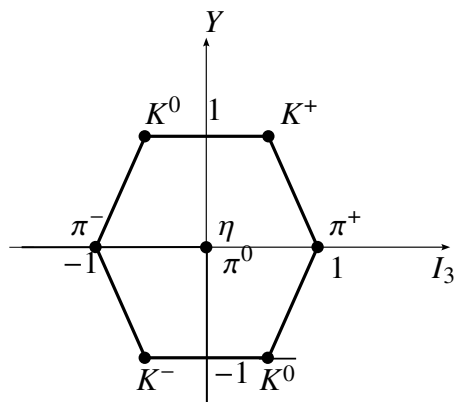


Рис. 8.3: Иллюстрация к объяснению.

Октет легчайших барионов, для которых спин-четность

$$J^P = \frac{1}{2}^+ \quad (8.43)$$

можно представить согласно рис. 8.4.

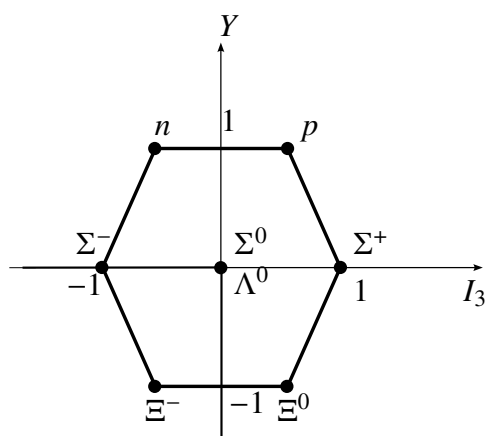


Рис. 8.4: Иллюстрация к объяснению.

Из таких графиков можно быстро получить квантовые числа, которыми характеризуются адроны относительно сильных взаимодействий.

У мезонов, помимо указанного октета была также обнаружена частица η' – мезон. Этот мезон является синглетом относительно группы $SU(3)$. Тот факт, что есть группа симметрий $SU(3)$ означает, что у всех реакций амплитуды реакций частиц, входящих в различные мультиплеты, связаны между собой групповыми свойствами. Это подтверждалось экспериментами по изучению указанных частиц. Тем самым, подтверждалось, что частицы

образуют октет по группе $SU(3)$ (рис. 8.3), а частица η' образует синглет по группе $SU(3)$. У барионов синглеты не были найдены. Когда начали изучать более тяжелые адронные состояния, то помимо псевдоскалярного октета мезонов был найден векторный октет мезонов (рис. 8.5), для которых

$$J^P = 1^- \quad (8.44)$$

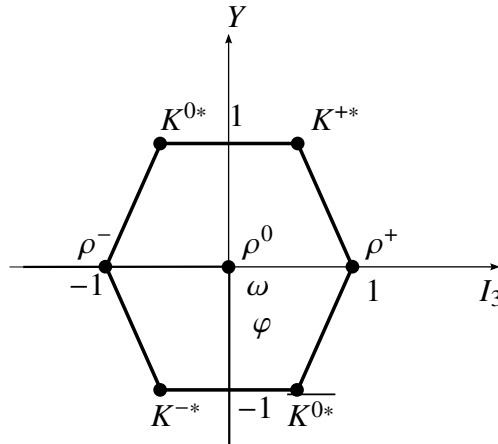


Рис. 8.5: Иллюстрация к объяснению.

Итак, анализируя мезоны, можно сделать вывод, что у нас есть октеты (восьмерное представление группы $SU(3)$) и синглеты (одномерное представление группы $SU(3)$).

Следующим мультиплетом по бариону был найден триальный мультиплет из десяти компонент (рис. 8.6).

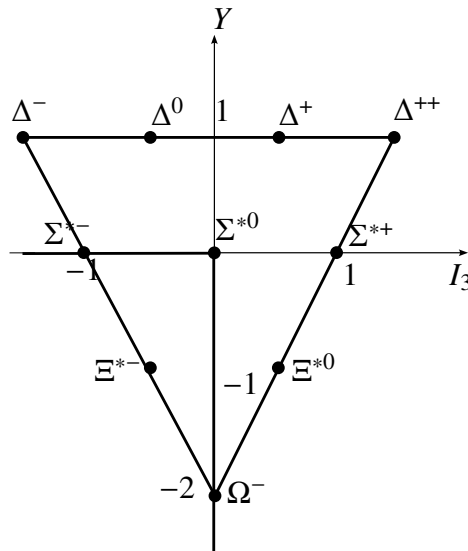


Рис. 8.6: Иллюстрация к объяснению.

Причем для частиц из этого мультиплета

$$J^P = \frac{3^+}{2} \quad (8.45)$$

Это десятимерное представление группы $SU(3)$ или декуплет. Таким образом, среди барионов у нас есть октеты и декуплеты, а синглеты не были обнаружены. В связи с этим возникла идея создать некоторую упрощенную схему для объяснения этого спектра. Так как адронов так много и они классифицируются указанным способом, то скорее всего, они являются составными частицами.

Фундаментальные представления группы $SU(3)$

Заметим, что в рассмотренных случаях не встречаются более фундаментальные представления, характерные для группы $SU(3)$. Отсюда возникает идея, что все адроны состоят из кварков, которые преобразуются по фундаментальному представлению группы $SU(3)$. Было предложено ввести три кварка: u, d, s . Другими словами, у нас есть кварки, которые можно обозначить через q_i , где i – это флейворный индекс.

Кварки должны быть фермионами, так как составляющие должны уметь образовывать как барионы, так и мезоны. Мезоны можно представить в виде $q\bar{q}$, а барионы – в виде qqq . У кварков u, d, s заряды $+\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ соответственно. Мы предполагаем, что спин $J = \frac{1}{2}$, а барионное число кварков

$$B_q = \frac{1}{3} \quad (8.46)$$

а для антикварков –

$$B_{\bar{q}} = -\frac{1}{3} \quad (8.47)$$

Более того, предполагается, что объект q_i преобразуется по фундаментальному представлению группы $SU(3)$, то есть

$$q \rightarrow \omega q \quad (8.48)$$

где ω – это матрица группы $SU(3)$:

$$\omega \in SU(3) \quad (8.49)$$

На какие неприводимые представления группы $SU(3)$ разбиваются объекты типа $q\bar{q}$ и qqq ?

Сперва рассмотрим мезоны. Будем обозначать представления их размерностью. Таким образом, в данном случае 3 – это фундаментальное представление, а 3^* – сопряженное фундаментальное представление. Произведение таких представлений можно разложить на

неприводимые следующим образом

$$3 \times 3^* = 1 + 8 \quad (8.50)$$

Чтобы объяснить это, можно перейти к тензорным представлениям:

$$q_i \cdot \bar{q}^j \quad (8.51)$$

Из такого набора объектов можно собрать объект

$$\sum_i q_i \bar{q}^i \quad (8.52)$$

Этот объект будет синглетом. Итак, след матрицы (8.51) является синглетным представлением группы $SU(3)$, а все остальное (то есть бесследовая часть этой матрицы) является восьмимерным представлением группы $SU(3)$.

Теперь рассмотрим случай объектов, состоящих из трех кварков. Для начала рассмотрим случай 3×3 :

$$q_i q_j = q_{[ij]} + q_{\{ij\}} \quad (8.53)$$

Симметричное представление имеет размерность 6, а антисимметричное представление имеет размерность 3. Все эти представления можно получать, сворачивая с разными инвариантными тензорами: δ_i^j , ϵ^{ijk} и ϵ_{ijk} . Например, $q_i q_j \epsilon^{ijk}$.

Итак

$$3 \times 3 = 3^* + 6 \quad (8.54)$$

Задача на дом

Покажите, что

$$3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10 \quad (8.55)$$

Итак, для мезонов у нас есть синглеты и октеты (как и должно быть), а для барионов – есть октет, декуплет и синглет (хотя экспериментально синглет не наблюдается).

Рассмотрим мезоны как связанные состояния кварков: $q\bar{q}$. По аналогии с атомом водорода, для самых низколежащих состояний мы ожидаем $L = 0$. Для спина есть два варианта. В первом случае $S = 0$ и, соответственно, $J = 0$. Это соответствует легчайшему октету мезонов, для которого спин-четность

$$J^P = 0^- \quad (8.56)$$

– октет псевдоскалярных мезонов.

Чтобы объяснить отрицательную четность, учтем, что внутренняя четность фермиона

и антифермиона равна -1 :

$$P_{\text{внут}} (\text{ферм+антиферм}) = -1 \quad (8.57)$$

Полная четность определяется согласно формуле

$$P = P_{\text{внут}} \cdot (-1)^L \quad (8.58)$$

Поэтому для легчайших адронных состояний четность должна быть -1 .

Во втором случае спин $S = J = 1$. Тогда четность $P = -1$. Это состояние соответствует спин-четности

$$J^P = 1^- \quad (8.59)$$

это соответствует октету векторных мезонов.

Теперь рассмотрим барионы. В этом случае у нас три кварка. Рассмотрим различные случаи расположения спинов.

- Два кварка имеют спин в одну сторону, а третий – в противоположную. Это дает

$$S = J = \frac{1}{2} \quad (8.60)$$

При этом четность должна быть $P = +1$. Такая ситуация соответствует октету барионов.

- Если все спины сонаправлены, то

$$S = J = \frac{3}{2} \quad (8.61)$$

Эта ситуация соответствует декуплету барионов.

Однако тут возникает некоторое несоответствие. Можно показать, что все состояния в декуплете являются симметричными относительно перестановки флейворов. Это значит, что флейворная часть волновой функции симметрична относительно перестановки кварков. Теперь рассмотрим полную волновую функцию. У нее есть пространственная, спиновая и флейворная части:

$$\Psi = \Psi_{\text{простр}} \times \Psi_{\text{спин}} \times \Psi_{\text{флейв}} \quad (8.62)$$

Пространственная часть волновой функции имеет нулевой орбитальный момент. Это симметричная функция относительно перестановки кварков. Спиновая часть волновой функции тоже симметрична относительно перестановки кварков. Аналогично и для флейворной части волновой функции. Значит, вся волновая функция симметрична относительно перестановки кварков. Значит, получаем волновую функцию, симметричную относительно перестановки фермионов, что не согласует с принципом Паули.

Предположили, что у кварков есть дополнительное квантовое число – цвет. Например, у кварка u есть три состояния u_α , $\alpha = 1, 2, 3$. Таким образом, волновая функция должна быть антисимметричной по цвету.

$$\Psi = \Psi_{\text{простр}} \times \Psi_{\text{спин}} \times \Psi_{\text{флейв}} \times \Psi_{\text{цвет}} \quad (8.63)$$

Чтобы построить антисимметричный объект из трех объектов в фундаментальном представлении, надо свернуть их с ϵ -символом:

$$u_\alpha u_\beta u_\gamma \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \quad (8.64)$$

Введение цвета также позволило объяснить отсутствие синглетов у барионов.

Лекция 9. Константа связи сильных взаимодействий

Калибровочная группа сильных взаимодействий $SU(3)$

Ранее мы выяснили, что из спектроскопии адронов следует необходимость введения как минимум трех типов кварков u, d, s . Сейчас мы знаем, что есть и более тяжелые кварки: c, b, t . У каждого из этих кварков есть дополнительное квантовое число – цвет. Далее будем использовать следующее обозначение для кварков: q_{Ai} . Здесь $A = 1, \dots, 6$ – флейворный индекс, $i = 1, 2, 3$ – индекс, обозначающий цвет. Формально к такому обозначению надо добавить спиновый индекс $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

По этим цветовым индексам используется калибровочная теория с калибровочной группой $SU(3)$ (это калибровочная группа сильных взаимодействий). В прошлый раз мы говорили, что в природе реализуются только такие состояния, которые антисимметричны по цвету (бесцветные состояния). Состояния, которые несут нетривиальный цвет, не могут быть асимптотическими и не наблюдаются. Таким образом, кварки мы не видим, но видим связанные состояния из этих кварков.

Полный лагранжиан КХМ имеет вид

$$\mathcal{L} = i\bar{q}_A \gamma^\mu D_\mu q_A - \frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} \quad (9.1)$$

здесь ковариантная производная D_μ устроена следующим образом

$$D_\mu q = (\partial_\mu - ig_s A_\mu) q \quad (9.2)$$

Здесь q – поле, на которое действует производная, g_s – константа связи сильных взаимодействий.

Так как представление фундаментальное, то

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad (9.3)$$

где t^a – это генераторы группы $SU(3)$:

$$t^a = \frac{1}{2} \lambda^a \quad (9.4)$$

где λ^a – это матрицы Геллмана.

Вообще говоря, в указанный лагранжиан надо также добавить массовое слагаемое:

$$\mathcal{L} = i\bar{q}_A \gamma^\mu D_\mu q_A - \frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} - m_A \bar{q}_A q_A \quad (9.5)$$

Если пренебречь всеми остальными взаимодействиями, то это весь лагранжиан квантовой хромодинамики. Параметры здесь – это массы кварков и константа связи сильных

взаимодействий.

Константа связи сильных взаимодействий

Известно, что есть бегущие константы связи. Рассмотрим параметр β -функцию бегущей константы связи. Эта функция определяется следующим образом

$$\beta(g_s) = \mu \frac{dg_s}{d\mu} \quad (9.6)$$

где μ – это некоторый характерный масштаб, на котором мы делаем перенормировку.

Заметим, что β -функция вычисляется по теории возмущений. Известно, что в электромагнитных взаимодействиях константа связи растет с ростом характерной энергии. На введенную здесь μ можно смотреть как эту характерную энергию. Более того, в теории перенормировок можно увидеть, что константа связи растет с ростом масштаба энергии процесса. Поэтому β -функция оказывается положительной. В квантовой хромодинамике ситуация оказывается немного другой. Если посчитать ее по теории возмущений, можно получить

$$\beta(g_s) = \mu \frac{dg_s}{d\mu} = -\frac{b_1}{4\pi^2} g_s^3 + O(g_s^5) \quad (9.7)$$

причем коэффициент b_1 устроен следующим образом

$$b_1 = \frac{11}{4} - \frac{1}{6} n_f > 0 \quad (9.8)$$

где n_f – число типов активных кварков (то число кварков, которые могут рождаться при данной энергии). Видно, что b_1 положителен. Значит, β -функция оказывается отрицательной. Отсюда получаем, что константа связи падает с ростом характерной энергии.

Решим соответствующее уравнение на β -функцию и посмотрим, как ведет себя константа связи

$$\frac{dg_s}{g_s^3} = -\frac{b_1}{4\pi^2} \frac{d\mu}{\mu} \quad (9.9)$$

Проинтегрируем это уравнение от некоторого μ_0 до μ

$$\int_{g_s(\mu_0)}^{g_s(\mu)} \frac{dg_s}{g_s^3} = -\frac{b_1}{4\pi^2} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu} \quad (9.10)$$

В результате получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_s^2(\mu)} - \frac{1}{g_s^2(\mu_0)} \right) = \frac{b_1}{4\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \quad (9.11)$$

Преобразуем полученное выражение

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} = \frac{1}{g_s^2(\mu_0)} + \frac{b_1}{2\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \quad (9.12)$$

Выразим отсюда бегущую константу связи $g(\mu)$:

$$g_s^2(\mu) = \frac{g_s^2(\mu_0)}{1 + \frac{b_1 g_s^2(\mu_0)}{4\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \quad (9.13)$$

Отсюда получаем, что график зависимости бегущей константы связи от масштаба μ имеет вид, представленный на рис. 9.1.

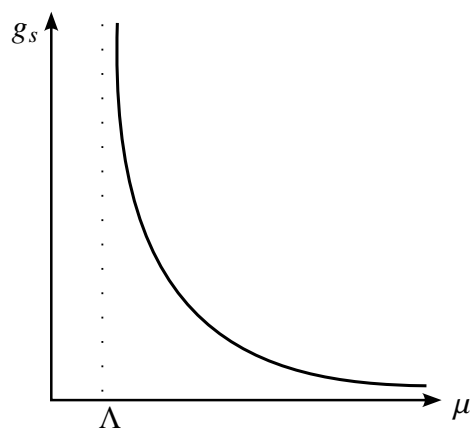


Рис. 9.1: Зависимость $g_s(\mu)$.

Заметим, что здесь константа связи становится большой уже при маленьких энергиях. При больших энергиях константа связи маленькая, и можно использовать теорию возмущений для описания, например, столкновения кварков.

Отметим, что выражение для β -функции зависит от схемы перенормировок. Поэтому сперва надо выбрать схему. Обычно рассматривают так называемую (\overline{MS}) -схему. В литературе можно найти выражение для константы связи в этой схеме. В этом случае обычно нормируют на массу Z -бозона:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{g_s^2(\overline{MS})}{4\pi} (\mu = m_z \simeq 91 \text{ ГэВ}) \simeq 0.118 \quad (9.14)$$

Здесь α_s – это аналог постоянной тонкой структуры для сильных взаимодействий, который определяется через

$$\alpha_s^{(\mu)} = \frac{g_s^2}{4\pi} \quad (9.15)$$

Определим параметр Λ :

$$g_s^2(\mu) = \frac{g_s^2(\mu_0)}{1 + \frac{b_1 g_s^2(\mu_0)}{4\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} = \frac{g_s^2(\mu_0)}{\underbrace{\frac{b_1 g_s^2(\mu_0)}{4\pi^2} \left(\frac{4\pi^2}{b_1 g_s^2(\mu_0)} + \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right)}_{\equiv \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}} = \frac{4\pi^2}{b_1 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}} \quad (9.16)$$

Здесь мы ввели параметр Λ – масштаб сильных взаимодействий.

Из полученной формулы видно, что если $\mu^2 = \Lambda^2$, то в знаменателе будет ноль. Этот параметр можно определить в любом порядке теории возмущений. Более того, вместо того, чтобы задавать параметр g_s^2 или α_s , можно задавать параметр Λ . Итак, для Λ получаем формулу

$$\Lambda^2 = \mu^2 e^{-\frac{4\pi^2}{b_1 g_s^2(\mu)}} \quad (9.17)$$

Отметим, что в этой формуле отсутствует зависимость от начального условия. Заметим также, что из полученной формулы следует, Λ нельзя посчитать по теории возмущений. Это характерное для теории сильной связи свойство. Более того, можно показать, что константа связи Λ не зависит от μ , то есть

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Lambda = 0 \quad (9.18)$$

То есть Λ – это параметр теории, не зависящий от масштаба перенормировок.

Забудем пока про массы кварков. В построенной теории сильной связи мы ожидаем существования некоторых связанных состояний, состоящих из кварков и глюонов. У этих связанных состояний будут какие-то массовые параметры M . Эти массовые параметры должны быть физическими. Значит, они не зависят от μ :

$$\mu \frac{d}{d\mu} M = 0 \quad (9.19)$$

Формально этот параметр M может зависеть от μ и $g_s(\mu)$. Значит, если мы требуем выполнения условия

$$\mu \frac{d}{d\mu} M(\mu, g_s(\mu)) = 0 \quad (9.20)$$

то из размерных соображений можно получить

$$M = \mu f(g_s(\mu)) \quad (9.21)$$

где f – некоторая функция от константы связи. Значит, M пропорциональна масштабу сильной связи Λ

$$M \propto \Lambda \quad (9.22)$$

Грубо говоря, это означает, что все массивные состояния можно представить в виде

$$M_A = \Lambda \alpha_A \quad (9.23)$$

где α_A – это некоторые числа, зависящие исключительно от групповой структуры.

Квантовая хромодинамика при низких энергиях

Теперь обратимся к квантовой хромодинамике в связи с низколежащими адронами. Это адроны, состоящие из трех типов кварков u, d, s . То есть рассмотрим q_A , где $A = 1, 2, 3$ описывает три типа флейвора.

Обсудим сперва массы кварков. Самый тяжелый кварк – t -кварк:

$$m_t \simeq 172 \text{ МэВ} \quad (9.24)$$

Это самая тяжелая элементарная частица в стандартной модели. Из нее не образуются адроны, так как его время жизни меньше характерного времени организации (он не успевает образовывать адронные состояния). t -кварк распадается по основному каналу распада

$$t \rightarrow Wb \quad (9.25)$$

Далее идет b -кварк

$$m_b \simeq 4.5 \text{ ГэВ} \quad (9.26)$$

Масса c -кварка

$$m_c \simeq 1.4 \text{ ГэВ} \quad (9.27)$$

Далее идут самые легкие кварки:

$$m_s \simeq 480 - 120 \text{ МэВ} \quad (9.28)$$

Заметим, что чем легче кварк, тем больше неопределённость наших знаний о его массе. Поэтому здесь указывается характерный интервал.

$$m_d \simeq 7 \text{ МэВ} \quad (9.29)$$

$$m_u \simeq 4 \text{ МэВ} \quad (9.30)$$

Отсюда мы переходим к рассмотрению квантовой хромодинамики при низких энергиях, то есть рассмотрим адроны, состоящие из самых легких кварков. Как мы выяснили выше, параметр Λ связан с константой связи. Если посчитать его численное значение, можно

получить

$$\Lambda \simeq 200 - 300 \text{ МэВ} \quad (9.31)$$

Отметим, что интервал значений здесь достаточно большой, так как Λ экспоненциально зависит от константы связи. Значит, даже если ошибка для константы связи небольшая, ошибка для Λ становится большой из-за экспоненты.

Таким образом, все кварки разделяются на две группы: одни больше этого масштаба (по энергии), а другие – легче этого масштаба. Соответственно, для той группы кварков, которые легче масштаба сильной связи имеет смысл рассматривать в качестве первого приближения теорию, в которой массами кварков можно пренебречь. Эта теория называется киральным пределом.

Итак,

$$m_u, m_d, m_s \ll \Lambda \quad (9.32)$$

Поэтому в нулевом приближении $m_q = 0$. Вспомним выражение для лагранжиана

$$\mathcal{L} = i\bar{q}_A \gamma^\mu D_\mu q_A + \dots \quad (9.33)$$

Какие симметрии появляются в такой теории? Чтобы ответить на этот вопрос, надо выяснить, какие преобразования можно осуществлять, оставляя лагранжиан неизменным. Обозначим

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

С этим вектором можно осуществлять преобразования типа

$$q \rightarrow \omega q \quad (9.35)$$

$$\bar{q} \rightarrow \bar{q} \omega^+ \quad (9.36)$$

Такие преобразования будут симметриями, если

$$\omega^+ \omega = 1 \quad (9.37)$$

Соответствующую группу симметрий $U(3)$ можно разбить на две группы

$$U(3) \simeq SU(3) \times U(1) \quad (9.38)$$

Все ли это симметрии? Вспомним, что есть правые и левые фермионы. Когда мы рассматриваем безмассовые фермионы, рассмотрение правых и левых фермионов имеет смысл. В этом случае

$$\mathcal{L} = i\bar{q}_A \gamma^\mu D_\mu q_A + \dots = i\bar{q}_{AL} \gamma^\mu D_\mu q_{AL} + i\bar{q}_{AR} \gamma^\mu D_\mu q_{AR} \quad (9.39)$$

Причем наличие ковариантной производной не мешает такому разбиению.

Из такого разбиения следует, что на самом деле у нас не одна, а две симметрии, так как мы можем независимо вращать правые и левые. Таким образом, полная группа симметрий ("наивно") имеет вид

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_L \times U(1)_R \quad (9.40)$$

Иногда эти симметрии рассматривают по-другому. Например, рассмотрим абелевы части

$$U(1)_L \times U(1)_R \quad (9.41)$$

При действии преобразования из $U(1)_L$ осуществляется переход

$$q \xrightarrow{U(1)_L} e^{i\alpha P_L} q \quad (9.42)$$

Здесь P_L – проектор на левую компоненту.

Аналогично

$$q \xrightarrow{U(1)_R} e^{i\beta P_R} q \quad (9.43)$$

Можно рассмотреть разбиение на аксиальные и векторные преобразования

$$q \xrightarrow{U(1)_V} e^{ia} q \quad (9.44)$$

$$q \xrightarrow{U(1)_A} e^{ib\gamma^5} q \quad (9.45)$$

Понятно, что преобразования (9.44)-(9.45) являются линейными комбинациями преобразований (9.42)-(9.43). Поэтому часто полную группу симметрий представляют следующим образом

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_L \times U(1)_R = SU(3)_V \times SU(3)_A \times U(1)_V \times U(1)_A \quad (9.46)$$

Итак, у нас довольно много симметрий. Любая симметрия дает дополнительное знание, так как симметрия описывает связи между различными состояниями и процессами.

Каждая симметрия подразумевает наличие связанного с ней тока, причем этот ток сохраняется. Ток для $U(1)_V$

$$j^\mu = \bar{q}_A \gamma^\mu q_A \quad (9.47)$$

Для $U(1)_A$ –

$$j^{\mu 5} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 q_A \quad (9.48)$$

Токи для $SU(3)_V$ имеют вид

$$j^{\mu a} = \bar{q}_A \gamma^\mu t_{AB}^a q_B \quad (9.49)$$

Ток, связанный с $SU(3)_A$, имеет вид

$$j^{\mu 5a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 t^a q \quad (9.50)$$

Интегралы от нулевых компонент этих токов дают заряды, которые должны наивно сохраняться (в классической теории).

$$Q = \int d^3x j^0 \quad (9.51)$$

В квантовой теории эти заряды становятся генераторами соответствующих преобразований в гильбертовом пространстве. Таким образом, в квантовой теории преобразования

$$e^{i\alpha Q} |\Psi\rangle \quad (9.52)$$

дают преобразованное состояние под действием преобразования из соответствующей группы.

Задача на дом

Вычислить коммутаторы всех зарядов между собой

$$[Q^i, Q^j] = ? \quad (9.53)$$

используя одноименные коммутационные соотношения для токов. Так как заряд не зависит от времени, их можно взять в один и тот же момент времени. После этого можно применить одновременные антикоммутационные соотношения.

Пример. Одночастичные состояния

Обсудим некоторые следствия наличия такого большого количества симметрий. Рассмотрим какое-нибудь одночастичное адронное состояние. Мы ожидаем, что теория описывает реальный мир. Значит, она должна приближенно описывать состояния адронов. Рассмотрим какое-нибудь адронное состояние $|h\rangle$. Параметры этого состояния – импульс, масса, спин, четность P_μ, m, J, P .

Построим из этого состояния какое-то другое состояние, подействовав одним из зарядов. Воспользуемся наборами зарядов Q^5 и Q^{5a} . Полученное состояние назовем $|\tilde{h}\rangle$:

$$|\tilde{h}\rangle = Q^{5a} |h\rangle \quad (9.54)$$

Какие квантовые числа у этого состояния? Что можно сказать про массу этого состояния? Масса – это собственное значение P_μ^2 . Значит, вопрос заключается в том, коммутирует ли импульс с Q . Известно, что со всеми глобальными зарядами P_μ коммутирует:

$$[P_\mu, Q^5] = 0 \quad (9.55)$$

Вообще говоря, глобальные заряды коммутируют с любыми пространственно-временными преобразованиями

$$[M_{\mu\nu}, Q^5] = 0 \quad (9.56)$$

Значит, у нового состояния та же самая масса m и тот же спин J . Рассмотрим четность этого состояния. Представим, что у состояния h четность +

$$\hat{P} |h\rangle = +1 |h\rangle \quad (9.57)$$

Подействуем оператором P -четности на состояние $tkdh$:

$$PQ^5 |h\rangle = -Q^5 P |h\rangle \quad (9.58)$$

Значит, у нового состояния четность противоположна. Значит, среди адронов должно быть удвоение спектра по четности. Если наблюдаем мультиплет адронов с близкими массами, то мы должны наблюдать аналогичный мультиплет с близкими массами, но с противоположной P -четностью. Однако такая ситуация не наблюдается. Значит, что-то в нашей теории не так. Какие-то симметрии не являются на самом деле симметриями или с ними что-то происходит. Как мы сказали ранее, у нас есть симметрии

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \times U(1)_A \quad (9.59)$$

Часть из этих симметрий (а именно $U(1)_A$) не является симметрией лагранжиана. Эта симметрия аномальна. Другими словами, классический лагранжиан удовлетворяет этой симметрии, но после квантования перестает сохраняться. Такое явление симметрией лагранжиана. Эта симметрия аномальна. Другими словами, классический лагранжиан удовлетворяет этой симметрии, но после квантования перестает сохраняться.

С первыми двумя группами симметрий происходит так называемое спонтанное нарушение симметрии до $SU(3)_V$.

Киральная аномалия

Рассмотрим простой случай – безмассовую квантовую электродинамику. Лагранжиан в этом случае

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \quad (9.60)$$

где ковариантная производная

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi \quad (9.61)$$

Пусть есть две классические симметрии: $U(1)$ -симметрия:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \quad (9.62)$$

и аксиальная симметрия $U(1)_A$:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5} \psi \quad (9.63)$$

Соответствующие токи

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (9.64)$$

$$j^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (9.65)$$

Из них можно построить сохраняющиеся заряды. В терминах правых и левых фермионов это заряды можно записать через число правых и левых фермионов

$$Q = N_R + N_L \quad (9.66)$$

$$Q^5 = N_R - N_L \quad (9.67)$$

Таким образом, классически у нас по-отдельности сохраняется число правых и число левых фермионов (разность между фермионами и антифермионами).

Киральную аномалию можно выводить по-разному. Например, с помощью функционального интеграла (это общий метод вывода различных аномалий). Однако мы сейчас рассмотрим другой метод. Рассмотрим ток $j^{\mu 5}$. Известно, что классически дивергенция равна нулю:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 0 \quad (9.68)$$

Пусть A_μ – это внешнее поле. Нас интересует, как ведут себя функции Грина. В частности, нас интересует, как ведет себя величина

$$\langle 0 | \partial_\mu j^{\mu 5}(x) | 0 \rangle \quad (9.69)$$

Здесь под вакуумом подразумевается отсутствие фермионов (классическое внешнее поле есть).

Тут возникает некоторая трудность. Ток $j^{\mu 5}$ – это произведение операторов, взятых в одной точке. Даже в самой обычной теории скалярного поля, если мы рассматриваем обычное локальное поле $\varphi(x)$, то даже для простого локального оператора

$$O(x) = \varphi^2(x) \quad (9.70)$$

матричные элементы

$$\langle 0|\hat{O}(x)|0\rangle = D(0) \quad (9.71)$$

являются плохо определенными величинами.

Чтобы избавиться от этой неопределенности, раздвинем две точки. Модифицируем наш локальный оператор в произведение локальных операторов, взятых в разных точках

$$j^{\mu 5}(x) \rightarrow \bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma^{\mu} \gamma^5 \psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (9.72)$$

Однако такое определение не слишком хорошо с точки зрения Лоренц-инвариантности. Поэтому нужно поставить сюда T -упорядочивание.

$$j^{\mu 5}(x) \rightarrow T\bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma^{\mu} \gamma^5 \psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (9.73)$$

Однако это тоже еще не все. Учтем, что в нашей теории есть калибровочная симметрия:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x) \quad (9.74)$$

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) + \frac{1}{e} \partial_{\mu} \alpha(x) \quad (9.75)$$

Исходно $j^{\mu 5}$ был калибровочно инвариантен

$$j^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma^5 \psi \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha(x)} \gamma^{\mu} \gamma^5 e^{i\alpha(x)} \psi \quad (9.76)$$

То, что мы построили согласно (9.73), перестало быть калибровочно-инвариантным объектом, так как преобразование зависит от точки. Значит, $\psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ будет вращаться с фазой

$$i\alpha\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (9.77)$$

а $\bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ – с фазой

$$-i\alpha\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (9.78)$$

Значит, нам никто не гарантирует, что при пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ мы восстановим калибровочно-инвариантный объект. Чтобы исправить ситуацию, нужно подобрать регуляризацию так, чтобы на всех этапах мы работали с калибровочно-инвариантным объектом.

Вспомним, что преобразование A_{μ} имеет вид (9.75). Рассмотрим регуляризацию следующего вида

$$T\bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma^{\mu} \gamma^5 e^{i \int_{x - \frac{\varepsilon}{2}}^{x + \frac{\varepsilon}{2}} dz^{\mu} A_{\mu}(z)} \psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) = j_{\varepsilon}^{\mu 5}(x) \quad (9.79)$$

Легко убедиться, что это калибровочно-инвариантный объект.

Далее мы хотим взять дивергенцию от этого объекта, а потом – взять вакуумное среднее в присутствии внешнего поля. После чего мы устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако мы хотим, чтобы предел не зависел от направления. Поэтому ε нужно стремиться к нулю симметричным образом. Предельный переход будет устроен следующим образом

1. Усредняем по направлениям вектора ε .
2. В результате усреднения получим функцию от ε^2 . Теперь устремляем

$$\varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad (9.80)$$

Задача на дом

Покажите, что при таком определении предельного перехода выполнено

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^\mu}{\varepsilon^2} = 0 \quad (9.81)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^\mu \varepsilon^\nu}{\varepsilon^2} = \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \quad (9.82)$$

где d – число измерений.

Явно проверьте калибровочную инвариантность регуляризованного тока.

Вернемся к вычислению вакуумного среднего дивергенции тока. Посчитаем дивергенцию регуляризованного тока. Для этого воспользуемся уравнением движения

$$\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi = 0 \quad (9.83)$$

Сопряженное уравнение движения имеет вид

$$\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) = 0 \quad (9.84)$$

Вычислим дивергенцию

$$\partial_\mu j_\varepsilon^{\mu 5}(x) \quad (9.85)$$

Так как мы рассматриваем случай малых ε , сперва можно расписать экспоненту, находящуюся в определении (9.79):

$$e^{i \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} dz^\mu A_\mu(z)} = 1 + i \underbrace{\int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} dz^\mu A_\mu}_{i\varepsilon^\mu A(x)+O(\varepsilon^2)} + \frac{i^2}{2} \left(\int \dots \right)^2 + \dots \quad (9.86)$$

Здесь мы разложили экспоненту в ряд, после чего расписали первое слагаемое в линейном

порядке по ε легко показать, что следующие слагаемые тоже будут $O(\varepsilon^2)$.

В результате получаем, что производная будет содержать три слагаемых

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_\varepsilon^{\mu 5}(x) = & \left[\partial_\mu \bar{\psi} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \gamma^\mu \gamma^5 (1 + i\varepsilon^\nu A_\nu(x)) \psi \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \bar{\psi} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma^\mu \gamma^5 i\varepsilon^\nu \partial_\mu A_\nu(x) \psi \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \\ & + \bar{\psi} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma^\mu \gamma^5 (1 + i\varepsilon^\nu A_\nu(x)) \partial_\mu \psi \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \end{aligned} \quad (9.87)$$

Теперь воспользуемся уравнениями движения

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_\varepsilon^{\mu 5}(x) = & -ie\bar{\psi} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma^\mu \gamma^5 A_\mu \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) (1 + i\varepsilon^\nu A_\nu(x)) \psi \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \\ & + ie\bar{\psi} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma^\mu \gamma^5 (1 + i\varepsilon^\nu A_\nu(x)) A_\mu \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \psi \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \\ & + \bar{\psi} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma^\mu \gamma^5 ie\varepsilon^\nu \partial_\mu A_\nu(x) \psi \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \\ = & ie\bar{\psi} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma^\mu \gamma^5 [\varepsilon^\nu \partial_\mu A_\nu(x) - \varepsilon^\nu \partial_\nu A_\mu(x)] \psi \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (9.88)$$

Найдем вакуумное среднее от дивергенции:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \partial_\mu j_\varepsilon^{\mu 5}(x) | 0 \rangle = & \left\langle 0 | ieT \bar{\psi} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma^\mu \gamma^5 F_{\mu\nu}(x) \varepsilon^\nu \psi \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) | 0 \right\rangle \stackrel{1}{=} \\ = & \left\langle 0 | ieT \bar{\psi}_{int} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma^\mu \gamma^5 F_{\mu\nu}(x) \varepsilon^\nu \psi_{int} \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) e^{i\rho_{int}} | 0 \right\rangle \end{aligned} \quad (9.89)$$

$\stackrel{1}{=}$ – чтобы перейти к теории возмущений, нужно перейти к представлению взаимодействия

Здесь

$$\rho_{int} = \int d^4x e A_\mu^{int}(x) \bar{\psi}^{int}(x) \gamma^\mu \psi^{int}(x) \quad (9.90)$$

Лекция 10. Аномалии в квантовой теории поля

Аномалии в квантовой теории поля. Аксиальная аномалия

На прошлой лекции мы обсудили лагранжиан КХД, в котором оставили только три (самых легких) кварка. Также мы выяснили, какие симметрии появляются в так называемом киральном пределе (массы кварков считаются равными нулю). Как мы показали, не все из полученных симметрий имеют место быть на самом деле. Здесь мы переходим к изучению так называемой киральной аномалии и вообще аномалии в квантовой теории поля. Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере квантовой безмассовой электродинамики. В этом случае лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \quad (10.1)$$

В этой теории есть две симметрии – $U(1)$ и $U_A(1)$. В первом случае имеет место преобразование вида

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi \quad (10.2)$$

В случае аксиальной симметрии преобразование имеет вид

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi \quad (10.3)$$

Другими словами, это соответствует тому, что правые и левые компоненты мы крутим с разными знаками. В случае векторной симметрии компоненты вращаются одинаково.

В соответствии с этими симметриями появляются сохраняющиеся токи: векторный ток

$$j(x)^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (10.4)$$

и аксиальный ток

$$j(x)^{\mu 5} = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x) \quad (10.5)$$

Рассмотрим аксиальный ток в присутствии внешнего электромагнитного поля. Точнее, рассмотрим дивергенцию от среднего значения:

$$\partial_\mu \langle 0|j^{\mu 5}(x)|0\rangle \quad (10.6)$$

Здесь подразумевается фермионный вакуум (нет внешних фермионов, но может быть внешнее поле). Заметим, что если эта величина окажется равной нулю, то ток сохраняется.

Отметим, что найти эту величину не так просто, так как тут стоит произведение локальных операторов. Чтобы решить эту проблему, раздвинем две точки на $\pm\epsilon$. Более того, так как мы хотим сохранить калибровочную инвариантность, то сдвиг нужно сделать таким образом, чтобы ток остался калибровочно-инвариантным. Для этого воспользуемся

калибровочно-инвариантной регуляризацией тока:

$$j_{\epsilon}^{\mu 5}(x) = T\bar{\psi}\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)\gamma^{\mu}\gamma^5 e^{ie\int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} A(z)dz^{\mu}}\psi\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) \quad (10.7)$$

В этом случае поля перемножаются в разных точках и расходимости нет. После вычислений нужно будет снять регуляризацию, то есть устремить $\epsilon \rightarrow 0$.

На прошлой лекции мы вычислили

$$\partial_{\mu}j_{\epsilon}^{\mu 5}(x) = Tie\bar{\psi}\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)\gamma^{\mu}\gamma^5\epsilon^{\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) + O(\epsilon) \quad (10.8)$$

Вакуумное среднее от этого выражения:

$$\langle 0|\partial_{\mu}j_{\epsilon}^{\mu 5}(x)|0\rangle = \langle 0|Tie\bar{\psi}_{int}\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)\gamma^{\mu}\gamma^5\epsilon^{\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right)e^{iS_{int}}|0\rangle + \dots \quad (10.9)$$

Найдем среднее по теории возмущений. Введем обозначения

$$x_1 = x + \frac{\epsilon}{2} \quad (10.10)$$

$$x_2 = x - \frac{\epsilon}{2} \quad (10.11)$$

Если вынести из выражения (10.9) все константы

$$ie\epsilon_{\nu}F^{\mu\nu}(x) \quad (10.12)$$

то окажется, что в сущности нам нужно найти

$$\langle 0|T\bar{\psi}(x_1)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi(x_2)e^{iS_{int}}|0\rangle \quad (10.13)$$

Напомним, что действие взаимодействия для указанного лагранжиана выглядит следующим образом

$$S_{int} = \int eA_{\mu}(z)\bar{\psi}(z)\gamma^{\mu}\psi(z)d^4z \quad (10.14)$$

Таким образом, нулевой и первый порядки теории возмущения дают выражение

$$\begin{aligned} \langle 0|T\bar{\psi}(x_1)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi(x_2)e^{iS_{int}}|0\rangle &= \langle 0|T\bar{\psi}(x_1)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi(x_2)|0\rangle + \\ &+ \langle 0|T\bar{\psi}(x_1)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi(x_2)ie\int d^4z\bar{\psi}(z)\gamma^{\nu}\psi(z)A_{\nu}(z)|0\rangle + \dots \end{aligned} \quad (10.15)$$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое. Переставим $\bar{\psi}(x_1)$ и $\psi(x_2)$, тем самым получив пропагатор $S_{\alpha\beta}$, где α, β – спинорные индексы. Учтём также, что α, β сворачиваются с

γ -матрицами. В результате получим

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x_2) | 0 \rangle &= -S_{\alpha\beta} \left(\gamma^\mu \gamma^5 \right)_{\beta\alpha} \stackrel{1}{=} -\text{Tr} S(x_2 - x_1) \gamma^\mu \gamma^5 \stackrel{2}{=} \\ &\stackrel{2}{=} - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_2-x_1)} \frac{i \text{Tr} \hat{p} \gamma^\mu \gamma^5}{p^2 + i\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (10.16)$$

$\stackrel{1}{=}$ – учтем, что полученное выражение на самом деле является следом пропагатора S

$\stackrel{2}{=}$ – распишем выражение, учитывая, что в импульсном представлении пропагатор имеет вид

$$S(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{i \hat{p}}{p^2 + i\varepsilon} \quad (10.17)$$

Итак, нулевой порядок теории возмущений дает ноль.

Рассмотрим первый порядок теории возмущений. Переставим фермионы:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x_2) i e \int d^4 z \bar{\psi}(z) \gamma^\nu \psi(z) A_\nu(z) | 0 \rangle &= \\ &= -i e \int d^4 z \text{Tr} [S(z - x_1) \gamma^\mu \gamma^5 S(x_2 - z) \gamma^\nu] A_\nu(z) \stackrel{1}{=} \\ &\stackrel{1}{=} -i e \int d^4 z \int \frac{d^4 p d^4 q d^4 k}{(2\pi)^4 (2\pi)^4 (2\pi)^4} e^{-ip(z-x_1)-iq(x_2-z)+ikz} \text{Tr} \frac{i \hat{p} \gamma^\mu \gamma^5 i \hat{q} \gamma^\nu}{p^2 q^2} A_\nu(k) \end{aligned} \quad (10.18)$$

$\stackrel{1}{=}$ – перепишем выражение, используя явный вид пропагатора и воспользуемся преобразованием Фурье для внешнего поля

$$A_\mu(z) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikz} A_\mu(k) \quad (10.19)$$

Учтем также

$$S(x - y) = \int e^{-ip(x-y)} \quad (10.20)$$

Возьмем интеграл по z , учитывая, что зависимость от z есть только в экспоненте. Таким образом, коэффициент при z имеет вид

$$iz(-p - q + k) \quad (10.21)$$

В результате интегрирования получим

$$(2\pi)^4 \delta(k - p - q) \quad (10.22)$$

Таким образом, можно снять интеграл по dq . В результате получим

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x_2) i e \int d^4 z \bar{\psi}(z) \gamma^\nu \psi(z) A_\nu(z) | 0 \rangle = \\ & = -i e \cdot i^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i p x_1 - i(p-k)x_2} A_\nu(k) \text{Tr} \frac{\hat{p} \gamma^\mu \gamma^5 (\hat{k} - \hat{p}) \gamma^\nu}{p^2 (k-p)^2} \end{aligned} \quad (10.23)$$

Распишем аргумент экспоненты, учитывая введенные обозначения для x_1 и x_2 :

$$p x_1 - (p-k) x_2 = p \left(x + \frac{\epsilon}{2} \right) - (p-k) \left(x - \frac{\epsilon}{2} \right) = p \epsilon + k \left(x - \frac{\epsilon}{2} \right) \quad (10.24)$$

Итак, получаем

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x_2) i e \int d^4 z \bar{\psi}(z) \gamma^\nu \psi(z) A_\nu(z) | 0 \rangle = \\ & = -i e \cdot i^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i p \epsilon + i k (x - \frac{\epsilon}{2})} A_\nu(k) \frac{\text{Tr} \left[\hat{p} \gamma^\mu \gamma^5 (\hat{p} - \hat{k}) \gamma^\nu \right]}{p^2 (k-p)^2} \end{aligned} \quad (10.25)$$

Сделаем замену

$$p \rightarrow p + k \quad (10.26)$$

Напомним, что в наших обозначениях

$$\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^5 = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \quad (10.27)$$

Рассмотрим след, возникающий в (10.25)

$$\text{Tr} \hat{p} \gamma^\mu \gamma^5 (\hat{p} - \hat{k}) \gamma^\nu = -4i \epsilon^{\rho\mu\sigma\nu} P_\rho (p-k)_\sigma \stackrel{1}{=} 4i \epsilon^{\rho\mu\sigma\nu} P_\rho k_\sigma \quad (10.28)$$

$\stackrel{1}{=}$ – учтем симметрию

Подставим полученное выражение в (10.25), интеграл по dk возьмем как внешний и сделаем нечетное число перестановок.

В результате получим

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x_2) i e \int d^4 z \bar{\psi}(z) \gamma^\nu \psi(z) A_\nu(z) | 0 \rangle = \\ = 4e \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-\frac{\epsilon}{2})} A_\nu(k) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip\epsilon} \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\rho k_\sigma}{p^2 (k-p)^2} \end{aligned} \quad (10.29)$$

Заметим, что полученный интеграл – интеграл Фурье. Он нас интересует при $\epsilon \rightarrow 0$. Значит, нам нужно рассмотреть случай больших p . Будем считать, что k меньше p . Разложим подынтегральное выражение в ряд

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip\epsilon} \frac{P_\rho}{p^2 (p-k)^2} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip\epsilon} \left[\frac{P_\rho}{(p^2)^2} + \frac{P_\rho 2(pk)}{(p^2)^6} + \dots \right] \quad (10.30)$$

Далее мы рассмотрим основной член разложения.

Задача на дом

Покажите, что остальные члены разложения обращаются в ноль в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Вычислите первый член разложения и получите

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip\epsilon}}{(p^2)^2} = -\frac{i}{16\pi^2} \ln \epsilon^2 \quad (10.31)$$

Чтобы получить нужно нам выражение, нужно продифференцировать полученное выражение

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon^\rho} \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip\epsilon}}{(p^2)^2} = -\frac{i}{16\pi^2} \ln \epsilon^2 \right] \quad (10.32)$$

В результате надо получить

$$i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\rho}{(p^2)^2} e^{ip\epsilon} = -\frac{i}{8\pi^2} \frac{\epsilon^\rho}{\epsilon^2} \quad (10.33)$$

Итак, учитывая все сказанное, можно собрать ответ:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x_2) i e \int d^4 z \bar{\psi}(z) \gamma^\nu \psi(z) A_\nu(z) | 0 \rangle &= \\
 &= -\frac{i}{8\pi^2} \cdot 4e \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-\frac{\epsilon}{2})} A_\nu(k) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\sigma \frac{\epsilon_\rho}{\epsilon^2} = \\
 &= -\frac{ie}{2\pi^2} \frac{\epsilon_\rho}{\epsilon^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (-i) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-\frac{\epsilon}{2})} A_\nu(k)}_{A_\nu(x)}
 \end{aligned} \tag{10.34}$$

Итак, получаем выражение для вакуумного среднего

$$\langle 0 | \partial_\mu j_\epsilon^{\mu 5}(x) | 0 \rangle = ie \epsilon_\nu F^{\mu\nu} \left(-\frac{ie}{2\pi^2} \right) \frac{\epsilon_\rho}{\epsilon^2} \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} (-i) \partial_\sigma A_\lambda \tag{10.35}$$

Здесь мы учли фактор (10.12).

Перейдем к пределу $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$. Учтем, что предел надо брать симметричным образом, то есть

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^\mu \epsilon^\nu}{\epsilon^2} = g^{\mu\nu} \tag{10.36}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle 0 | \partial_\mu j_\epsilon^{\mu 5}(x) | 0 \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} ie \epsilon_\nu F^{\mu\nu} \left(-\frac{ie}{2\pi^2} \right) \frac{\epsilon_\rho}{\epsilon^2} \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} (-i) \partial_\sigma A_\lambda = \frac{e^2}{8\pi^2} g_{\rho\nu} F^{\mu\nu} \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} \partial_\sigma A_\lambda = \\
 &= -\frac{e^2}{8\pi^2} F^{\mu\nu} \underbrace{\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma} \partial_\sigma A_\lambda}_{\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma} F_{\sigma\lambda}} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\sigma\lambda} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}
 \end{aligned} \tag{10.37}$$

$\frac{1}{2}$ – учтем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon_\mu \epsilon_\nu}{\epsilon^2} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \tag{10.38}$$

Итак, дивергенция аксиального тока не равна нулю. Такая ситуация и называется аксиальной аномалией. Отметим, что вообще говоря, имеет место следующее операторное равенство

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \tag{10.39}$$

Тем самым, аксиальный ток не сохраняется.

Чтобы подтвердить операторное равенство (10.39), нужно вычислить матричный элемент

между нулем и двухфотонным состоянием

$$\langle 0 | \partial_\mu j^{\mu 5}(x) | \gamma\gamma \rangle \quad (10.40)$$

Чтобы найти этот матричный элемент, нужно перейти к представлению взаимодействия (производную вычислим позднее)

$$\begin{aligned} \langle 0 | j^{\mu 5}(x) | \gamma\gamma \rangle &= \langle 0 | T j_{int}^{\mu 5}(x) e^{iS_{int}} | \gamma\gamma \rangle \stackrel{1}{=} \\ &= \langle 0 | T j^{\mu 5}(x) \frac{1}{2!} \int dz_1 \int dz_2 e\bar{\psi}(z_1) \gamma^\nu \psi(z_1) A_\nu(z_1) e\bar{\psi}(z_2) \gamma^\rho \psi(z_2) A_\rho(z_2) | \gamma\gamma \rangle \end{aligned} \quad (10.41)$$

$\stackrel{1}{=}$ – чтобы получить ненулевой ответ, нужно работать как минимум во втором порядке теории возмущений

Приведенный выше расчет был сделан для случая квантовой электродинамики с безмассовым фермионом. Однако такой расчет далее можно применять для случая ядерной теории. В этом случае безмассовые фермионы взаимодействуют с ядерным калибровочным током. Более того, сами токи могут содержать какой-то неабелев генератор. Такая ситуация относится к случаю симметрии, возникающей в КХД:

$$\bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 t^a q \quad (10.42)$$

Посмотрим, как модифицируется выражение для $\partial_\mu j^{\mu 5}$ в случае, когда ток неабелев. Рассмотрим еще раз выражение типа (10.41). Если забыть про все, что связано, с фотонами, то можно получить

$$\langle 0 | T j^{\mu 5}(x) j^\nu(z_1) j^\rho(z_2) | 0 \rangle \quad (10.43)$$

Таким образом, нам нужно вычислить точку токов для неабелева случая и найти соответствующие коэффициенты. Ранее мы нашли аномалия для абелева случая. Теперь мы хотим вычислить трехточку токов для неабелева случая и сравнить соответствующий коэффициент, который там появляется с абелевым случаем. Это изменение коэффициента даст нам изменение коэффициента в аномалии.

Пусть у нас есть неабелевы токи следующего вида

$$j^{\mu a} = \bar{\psi} \gamma^\mu T^a \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi \quad (10.44)$$

Здесь мы рассматриваем общую теорию, в которой фермионы ψ заряжены в какой-то калибровочной группе, причем возможны какие-то внутренние симметрии. Более того, в данном случае мы ограничимся рассмотрением только левых фермионов.

Учитывая вышесказанное, вычислим трехточку токов.

Лекция 11. Аномалии в квантовой теории поля. Часть 2

Аксиальная аномалия (продолжение)

Ранее мы вычислили дивергенцию аксиального тока. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \quad (11.1)$$

Мы посчитали

$$\langle \partial_\mu j^{\mu 5} \rangle_A = -\frac{e^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \quad (11.2)$$

Эту теорию, связанную с аксиальной аномалией, можно обобщить. Отметим также, что указанная аномалия происходит из диаграмм типа треугольника. Более того, в квантовой теории поля равенство (11.2) становится просто операторным равенством (операторным соотношением между дивергенцией аксиального тока и локальным оператором в правой части). Чтобы это проверить, нужно посчитать какой-то матричный элемент типа

$$\partial_\mu \langle 0 | j^{\mu 5} | \gamma\gamma \rangle \quad (11.3)$$

Полученное выражение будет отлично от нуля. Как мы показывали выше, чтобы сделать данное вычисление, нужно воспользоваться разложением до второго порядка теории возмущений. После такого разложения получим три тока: $j^{\mu 5}$, $j^\nu A_\nu$, $j^\rho A_\rho$. В результате получим диаграмму типа треугольника (рис. 11.1).

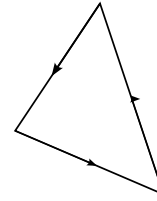


Рис. 11.1: Иллюстрация к объяснению.

На прошлой лекции мы решили восстановить общий ответ, рассматривая общую трехточку токов: пусть у нас есть ток $j^{\mu a}$:

$$j^{\mu a} = \bar{\psi}_L \gamma^\mu T^a \psi_L \quad (11.4)$$

Мы хотим посчитать трехточку токов

$$\langle T j^{\mu a}(x) j^{\nu b}(y) j^{\rho c}(z) \rangle = \Gamma_{a,b,c}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \quad (11.5)$$

Если взять дивергенцию, то получим аномальный вклад

$$\partial_\mu \langle T j^{\mu a}(x) j^{\nu b}(y) j^{\rho c}(z) \rangle \quad (11.6)$$

Где Γ представляет собой сумму двух слагаемых, которые отвечают диаграммам:

$$\begin{aligned} \Gamma &= Tr \left[\gamma^\mu P_L T^a \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu T P_L \psi(y) \bar{\psi}(z) \gamma^\rho T^c P_L \psi(z) \bar{\psi}(x) \right] + \\ &\quad + Tr \left[\gamma^\mu P_L T^a \psi(x) \bar{\psi}(z) \gamma^\rho T^c P_L \psi(z) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu T^b P_L \psi(y) \bar{\psi}(x) \right] \stackrel{1}{=} \\ &= \iint -i(p-k_1)(x-y) - ip(y-z) - i(p+k_2)(z-x) = i(k_1+k_2)x - ik_1y - ik_2z \iint = \\ &= i^3 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} e^{i(k_1+k_2)x - ik_1y - ik_2z} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left(T^a T^b T^c \right) \cdot Tr \left[\frac{\hat{p} - \hat{k}_1}{(p-k_1)^2} \gamma^\nu \frac{\hat{p}}{p^2} \gamma^\rho \frac{\hat{p} + \hat{k}_2}{(p+k_2)^2} \gamma^\mu P_L \right] + \right. \\ &\quad \left. + Tr \left(T^a T^c T^b \right) Tr \frac{\hat{p} - \hat{k}_2}{(p-k_2)^2} \gamma^\rho \frac{\hat{p}}{p^2} \gamma^\nu \frac{\hat{p} + \hat{k}_1}{(p+k_1)^2} \gamma^\mu P_c \right\} \quad (11.7) \end{aligned}$$

$\stackrel{1}{=}$ – перейдем в импульсное представление, учитывая выражение для пропагатора

$$\psi(x) \bar{\psi}(y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i\hat{p}}{p^2 + i\varepsilon} \quad (11.8)$$

Итак, мы получили выражение для Γ . Нас же интересует дивергенция. Вообще говоря, мы рассматриваем трехточку одинаковых токов, поэтому дивергенцию можно брать по любой компоненте, однако в нашем случае все подобрано так, что дивергенцию удобнее всего брать по j^μ . Поэтому вычислим

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \Gamma_{abc}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) &= \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} e^{i(k_1+k_2)x - ik_1y - ik_2z} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left(T^a T^b T^c \right) \times \right. \\ &\quad \times Tr \left[\frac{\hat{p} - \hat{k}_1}{(p-k_1)^2} \gamma^\nu \frac{\hat{p}}{p^2} \gamma^\rho \frac{\hat{p} + \hat{k}_2}{(p+k_2)^2} (\hat{k}_1 + \hat{k}_2) P_L \right] + Tr \left(T^a T^b T^c \right) \times \\ &\quad \left. \times Tr \left[\frac{\hat{p} - \hat{k}_2}{(p-k_2)^2} \gamma^\rho \frac{\hat{p}}{p^2} \gamma^\nu \frac{\hat{p} + \hat{k}_1}{(p+k_1)^2} (\hat{k}_1 + \hat{k}_2) P_L \right] \right\} \quad (11.9) \end{aligned}$$

Упростим полученное выражение. Распишем сумму $\hat{k}_1 + \hat{k}_2$ следующим образом

$$\hat{k}_1 + \hat{k}_2 \stackrel{1}{=} (\hat{k}_1 - \hat{p}) + (\hat{k}_2 + \hat{p}) \stackrel{2}{=} \hat{k}_1 + \hat{p} + (\hat{k}_2 - \hat{p}) \quad (11.10)$$

В первом слагаемом в (11.9) заменим $\hat{k}_1 + \hat{k}_2$ на сумму $\stackrel{1}{=}$, а во втором – на сумму $\stackrel{2}{=}$. Учтем также, что

$$\hat{p}^2 = p^2 \quad (11.11)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \partial_x \Gamma_{abc}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) = \int \dots & \left\{ Tr \left(T^a T^b T^c \right) Tr \left[\frac{\hat{p} - \hat{k}_1}{(p - k_1)^2} \gamma^\nu \frac{\hat{p}}{p^2} \gamma^\rho P_L \right] - \right. \\ & \left. - Tr \left(T^a T^b T^c \right) Tr \left[\frac{\hat{p}}{p^2} \gamma^\rho \frac{\hat{p} + \hat{k}_2}{(p + k_2)^2} \gamma^\nu P_L \right] + \right. \\ & \left. + Tr \left(T^a T^c T^b \right) Tr \left[\frac{\hat{p} - \hat{k}_2}{(p - k_2)^2} \gamma^\rho \frac{\hat{p}}{p^2} \gamma^\nu P_L \right] - Tr \left(T^a T^c T^b \right) Tr \left[\frac{\hat{p}}{p^2} \gamma^\rho \frac{\hat{p} + \hat{k}_1}{(p + k_1)^2} \gamma^\nu P_L \right] \right\} \end{aligned} \quad (11.12)$$

Рассмотрим подробнее след от генераторов. Так, след типа $Tr (T^a T^b T^c)$ можно представить как сумму симметричных и антисимметричных по индексам a и b слагаемых

$$Tr \left(T^a T^b T^c \right) = \underbrace{\frac{1}{2} Tr \{ T^a T^b \} T^c}_{D^{abc}} + \frac{1}{2} Tr [T^a, T^b] T^c \stackrel{1}{=} D^{abc} + \frac{i}{2} \mathcal{N} f^{abc} \quad (11.13)$$

Здесь антисимметричную часть мы обозначили через D^{abc} .

$\stackrel{1}{=}$ – Коммутатор генераторов во втором слагаемом можно посчитать явно через структурные константы f^{abd} :

$$[T^a, T^b] = i f^{abd} T^d \quad (11.14)$$

Учтем также, что след зависит от того, в каком представлении мы работаем. Эта информация вшита в число \mathcal{N} . Также мы учли, что

$$Tr \left(T^a T^b \right) = \mathcal{N} \delta^{ab} \quad (11.15)$$

Отметим, что D^{abc} полностью симметричен по всем индексам.

Итак, мы нашли представление для $Tr (T^a T^b T^c)$, которое присутствует в первом слагаемом (11.12). Заметим, что в других слагаемых присутствуют конструкции такого же вида, но с переставленными индексами. Например, $Tr (T^a T^c T^b)$. Подобные выражения будут содержать тот же вклад D^{abc} , но при этом второе слагаемое будет с противоположным знаком.

Таким образом, результат можно разбить на два вклада. Один будет пропорционален симметричной части по индексам, а другой будет пропорционален структурным константам.

Задача на дом

Убедитесь, что та часть, которая пропорциональна структурным константам, соответствует

$$\partial_\mu^x \langle T j^{\mu,a}(x) j^{\nu,b}(y) j^{\rho,c}(z) \rangle \quad (11.16)$$

После дифференцирования здесь возникнет коммутатор

$$[j^{\mu,a}(x), j^{\nu,b}(y)] \quad (11.17)$$

Который будет пропорционален

$$f^{abc} \delta(\vec{x} - \vec{y}) j^c(\vec{x}) \quad (11.18)$$

δ -функция здесь трехмерная. Видно, что ответ должен быть пропорционален f^{abc} , потому что он возникает из коммутатора токов, а этот коммутатор следует из того, что эти токи дают заряды.

Та часть, которая будет интересовать нас, пропорциональна D^{abc} . Кстати, заметим, что в электродинамике $f^{abc} = 0$, поэтому останется только слагаемое с D^{abc} . В электродинамике все генераторы равны единице. Поэтому D^{abc} будет безиндексным (индексов вообще нет, потому что у нас трехточка токов единственная) и это $D^{abc} = 1$. Более того, мы знаем, чему равен аномальный вклад в электродинамике.

Итак, теперь мы можем выписать ответ для аномального вклада для аномалии в неабелевом случае

$$\partial_\mu J^{\mu,a} = \frac{g^2}{32\pi^2} D_{abc} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\rho}^c \quad (11.19)$$

Отметим, что здесь присутствует $\frac{1}{32}$, а не $\frac{1}{16}$, потому что при вычислении мы рассматривали трехточку токов, которая стоит в проекторе налево. А для электродинамики мы получали ранее

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon F F \quad (11.20)$$

Поэтому $\frac{1}{32}$ возникает из-за того, что в проекторе стоит $\frac{1}{2}$.

Если мы будем рассматривать правые частицы, будет аналогичный вклад, но с другим знаком. Другими словами, если в теории есть и левые, и правые частицы, мы можем записать ответ в виде (11.19), где D_{abc} имеет вид

$$D_{abc} = \frac{1}{2} Tr_{\text{лев}} \{T^a, T^b\} T^c - \frac{1}{2} Tr_{\text{прав}} [\{T^a, T^b\} T^c] \quad (11.21)$$

Таким образом, мы учитываем оба вклада.

Это и будет ответом для аномалии в произвольном токе.

На самом деле все проделанные вычисления были нужны, чтобы получить коэффициент, который мы хотели сравнить с электродинамикой (в которой мы ответ уже получили). На этом основании мы и сделали вывод, каким должен быть коэффициент в общем случае.

Замечание. Теорема Адлера-Бардина

Подытожим. Во-первых, мы с вами сделали вычисления в первом нетривиальном порядке теории возмущений. Отсюда возникает вопрос: что будет в следующих порядках теории возмущений? На этот счет есть следующее утверждение, носящее название "теорема Адлера-Бардина". Суть этого утверждения заключается в следующем: киральная аномалия однопетлевая. Более строго: существует такая схема перенормировок, такая что киральная аномалия имеет однопетлевой вид.

Замечание

Сделаем еще одно замечание относительно полученного выражения (11.12). На самом деле можно продолжить вычисление этого выражения и явно получить ответ для аномалий. Здесь нужно учесть, что нам придется взять петлевой интеграл. Сначала нужно посчитать следы посчитаем. В частности, нужно вычислять след γ -матриц. Можно показать, что конечный ответ будет пропорционален выражению

$$Tr \left(\hat{p} - \hat{k}_1 \right) \gamma^\nu \hat{p} \gamma^\rho \gamma^5 \quad (11.22)$$

Если расписать этот след, то можно получить, что он пропорционален следующему выражению

$$Tr \left(\hat{p} - \hat{k}_1 \right) \gamma^\nu \hat{p} \gamma^\rho \gamma^5 \propto \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} (p - k_1)_\mu P_\sigma \quad (11.23)$$

Полученное выражение мы подставим в исходный интеграл. Результат надо регуляризовать и взять. Отметим, что первое слагаемое зависит только от k_1 . Это означает, что после взятия интеграла мы получим ответ, который должен быть пропорционален какому-то тензору, зависящему только от k_1 . Таких тензоров может быть только два. После свертки любого из этих тензоров с антисимметричным тензором $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ получим ноль. Таким образом, наивное данного интеграла приводит к нулевому ответу. Такое вычисление является "наивным" так как на самом деле этот интеграл расходится. Значит, прежде чем его считать, надо его регуляризовать. Это можно делать по-разному. Например, можно использовать размерную регуляризацию. Ее суть заключается в том, что мы аналитически продолжаем все выражения по размерности. Делаем замену, а дальше продолжаем все наши определения, которые у нас были в четырехмерии в d -мерии.

Однако, для киральной теории этот метод имеет некоторые недостатки. Здесь возникает проблема с матрицей γ^5 . В d -мерии мы должны определить γ -матрицы

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (11.24)$$

при этом

$$g_\mu^\mu = d \quad (11.25)$$

При этом наивно мы хотим определить γ^5 так, чтобы она антикоммутировала со всеми матрицами Дирака:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (11.26)$$

Если внимательно приглядеться, то можно понять, что это свойство несовместно с требованием непрерывного продолжения по d . Например, посчитаем, чему равняется след γ^5 при таком определении

$$dTr\gamma^5 = Tr\gamma^5\gamma^\mu\gamma_\mu = -Tr\gamma_\mu\gamma^\mu\gamma^5 = -dTr\gamma^5 \quad (11.27)$$

Отсюда следует, что след γ^5 равен нулю. Эту процедуру можно продолжить. Рассмотрим след γ^5 с двумя γ -матрицами

$$\begin{aligned} dTr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu &= Tr\gamma^5\gamma_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu \stackrel{1}{=} Tr\gamma^5\gamma_\rho(2g^{\rho\mu} - \gamma^\mu\gamma^\rho)\gamma^\nu = \\ &= 2Tr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu - Tr\gamma^5\gamma_\rho\gamma^\mu(2g^{\rho\nu} - \gamma^\nu\gamma^\rho) = 2Tr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu - 2Tr\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\mu + Tr\gamma^5\gamma_\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = \\ &= 4Tr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu - dTr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu \quad (11.28) \end{aligned}$$

¹ – воспользуемся перестановкой под знаком следа.

В результате получаем выражение

$$(2d - 4) Tr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0 \quad (11.29)$$

Отсюда следует, что если $d \neq 2$, то

$$Tr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0 \quad (11.30)$$

Однако, так как мы гладко продолжаем по всем d , то это условие должно выполняться и при $d = 2$ тоже. В противном случае продолжение по d будет негладким.

Задача на дом

Вычислите аналогичным способом след с четырьмя γ -матрицами вида

$$dTr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda \quad (11.31)$$

Убедитесь, что в этом случае в результате получится соотношение

$$(d - 4) Tr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda = 0 \quad (11.32)$$

Отсюда следует, что если $d \neq 4$, то

$$Tr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda = 0 \quad (11.33)$$

По непрерывности, это условие должно выполняться и при $d = 4$, что, очевидно, не так.

Таким образом, нельзя определить γ^5 через

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (11.34)$$

Такое определение γ^5 приводит к некорректному продолжению по d .

Замечание об аномалиях в токах

Ранее мы сказали, что любой ток потенциально может иметь аномалию. Причем ток может быть глобальным. Так, в КХД, в случае трех флейворов u, d, s и кирального предела имеется симметрия

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \times U(1)_A \quad (11.35)$$

Оказывается, что симметрия $U(1)_A$ является аномальной. Ток, отвечающей этой симметрии

$$j^{\mu 5} = \bar{q}_A \gamma^\mu \gamma^5 q_A \quad (11.36)$$

Причем здесь производится суммирование по всем типам кварков.

Соответственно, если мы хотим посчитать дивергенцию этого тока, то нам нужно обратиться к диаграмме на рис. 11.2. Однако у нас есть вершины взаимодействия кварков с глюонами (рис. 11.3). Такие вершины аналогичны вершинам взаимодействия с фотоном, однако в вершине стоит $ig_s \gamma^\mu t^a$, где g_s – сильная константа связи. Поэтому в диаграмму вида рис. 11.2 нужно добавить калибровочные токи (рис. 11.4).

Отметим, что в этом случае дивергенция тока будет ненулевой. Чтобы это показать, нужно учесть, что

$$Tr \{T^a, T^b\} T^c = Tr T^a \{T^b, T^c\} \quad (11.37)$$

В сущности это тривиальное следствие из перестановки под знаком следа.

В нашем случае T , который соответствует току, это единичная матрица (так как в этом случае

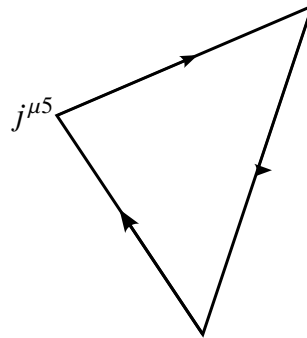


Рис. 11.2: Иллюстрация к объяснению.

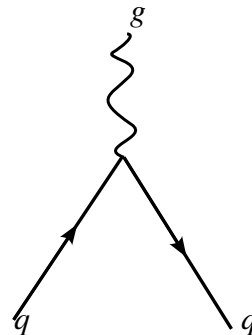


Рис. 11.3: Иллюстрация к объяснению.

соответствующий генератор единичный).

Остальные генераторы – это генераторы группы $SU(3)$. Отсюда следует, что дивергенция тока будет пропорциональна следующему выражению

$$\partial_\mu j^{\mu 5} \propto \frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (11.38)$$

Здесь через G обозначено глюонное поле. Таким образом, ток $j^{\mu 5}$ является аномальным. Значит, этот ток можно выбросить из полного списка наших симметрий.

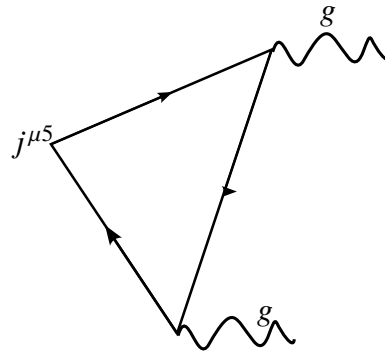


Рис. 11.4: Иллюстрация к объяснению.

Задача на дом

Докажите, что все остальные симметрии в этой теории

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \quad (11.39)$$

неаномальны.

Для этого нужно посчитать все указанные величины, и убедиться, что все они равны нулю.

Стандартная модель

Теперь поговорим про стандартную модель. Ранее, говоря о равенстве (11.19), мы нигде не уточняли, о каких токах идет речь. Токи могут быть как глобальными, как в примере выше, так и связанными с локальными калибровочными симметриями. Представим, что такая аномалия возникает в калибровочной симметрии. Это будет означать, что калибровочная симметрия нарушается. Как известно, калибровочная симметрия лежит в основе перенормируемости в соответствующей теории.

Рассмотрим стандартную модель. В ней есть три калибровочные группы

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (11.40)$$

Каждой калибровочной группе соответствует ток, который сохраняется калибровочным образом. Возникает вопрос: есть ли здесь какие-либо аномалии? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно вспомнить состав стандартной модели, и понять, как он преобразуется по калибровочным группам. Для этого обратимся к таблице 2. Напишем все фермионы, которые есть в стандартной модели.

Напомним, что для нахождения гиперзаряда надо учесть

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \quad (11.41)$$

Итак, в таблице учтено, что

- левые кварки образуют дублет, сами они образуют триплет относительно $SU(3)_c$, а гиперзаряд находится по формуле

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Y \quad (11.42)$$

Таким образом,

$$Y = \frac{1}{3} \quad (11.43)$$

- u_R, d_R являются правыми синглетами по группе $SU(2)$. Они тоже являются триплетом по цвету. Гиперзаряд у них совпадает с обычным зарядом с точностью до коэффициента 2.
- лептоны могут быть в виде дублета. Этот дублет является синглетом по группе $SU(3)$ и дублетом по группе $SU(2)$. Гиперзаряд находится по формуле

$$0 = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}Y \quad (11.44)$$

- правый электрон является синглетом по группам $SU(3)$ и $SU(2)$. Гиперзаряд равен -2 .

Таблица 2: caption

	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	3	2	$\frac{1}{3}$
u_R	3	1	$\frac{4}{3}$
d_R	3	1	$-\frac{2}{3}$
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	1	2	-1
e_R	1	1	-2

Возникает вопрос: сокращаются ли калибровочные аномалии? Если они сокращаются, теория аномальна.

Чтобы посмотреть, как сокращаются аномалии, нужно вычислять все коэффициенты

$$D_{abc} = \frac{1}{2}Tr_{\text{лев}} \{T^a, T^b\} T^c - \frac{1}{2}tr_{\text{прав}} [\{T^a, T^b\} T^c] \quad (11.45)$$

Сокращение аномалий будет соответствовать ситуации, в которой эти коэффициенты будут равны нулю.

Чтобы проверить это, будем рассматривать треугольные диаграммы, в вершинах которых будут стоять соответствующие калибровочные токи.

1. В первом случае рассмотрим токи, соответствующие группам $SU(3)$, $U(1)$. Чтобы посчитать D_{abc} , нужно взять след по всем индексам. В результате ответ будет пропорционален следу генератора t^a

$$\propto \text{tr } t^a = 0 \quad (11.46)$$

Таким образом, такие аномалии сокращаются.

Аналогично сокращаются аномалии в случае $SU(2) - U(1) - U(1)$, так как в этом случае ответ пропорционален

$$\propto \text{tr } \frac{t^a}{2} = 0 \quad (11.47)$$

2. Менее тривиальная аномалия возникает, например, когда рассматривается три тока из группы $SU(2)$. В этом случае вклад дают только левые фермионы. С другой стороны, ответ будет пропорционален

$$\propto \text{Tr} \left\{ \frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2} \right\} \frac{\tau^c}{2} \quad (11.48)$$

Видно, что

$$\left\{ \frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2} \right\} = \delta^{ab} \quad (11.49)$$

Поэтому

$$\text{Tr} \left\{ \frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2} \right\} \frac{\tau^c}{2} = 0 \quad (11.50)$$

3. Теперь рассмотрим случай, когда все токи из группы $SU(3)$. Заметим, что в такой аномальный треугольник вклад дают только кварки, так как только они заряжены по группе $SU(3)$. Отсюда получаем два вклада

$$\frac{1}{2} \text{tr}_{\text{лев}} \{t^a, t^b\} t^c - \frac{1}{2} \text{tr}_{\text{прав}} \{t^a, t^b\} t^c = 0 \quad (11.51)$$

Так как число левых и правых кварков одинаково, то вклады совпадают.

4. Рассмотрим треугольник типа $U(1) - SU(3) - SU(3)$. Тогда ответ будет пропорционален

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \{t^a, t^b\} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) = 0 \quad (11.52)$$

5. Теперь рассмотрим случай $U(1) - SU(2) - SU(2)$. В эту аномалию дают вклад только левые фермионы, поэтому ответ будет пропорционален конструкции

$$\propto \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2} \right\} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3 + (-1) \right) = 0 \quad (11.53)$$

6. В случае $U(1) - U(1) - U(1)$ ответ будет пропорционален сумме кубов гиперзарядов

$$\left(\frac{1}{3} \right)^3 \cdot 2 \cdot 3 + (-1)^3 \cdot 2 - \left(\left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdot 3 + \left(-\frac{2}{3} \right)^3 \cdot 3 + (-2)^3 \right) = \frac{2}{9} - 2 - \frac{64}{9} + \frac{8}{9} + 8 = 0 \quad (11.54)$$

Лекция 12. Теорема Голдстоуна в квантовой теории поля

Замечание о стандартной модели

Пусть

$$\partial_\mu j^{\mu 5} \propto \text{Tr} G_{\mu\nu} G_{\lambda\rho} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \quad (12.1)$$

Возникает вопрос: когда указанный оператор отличен от нуля? Заметим, что данный оператор может иметь ненулевое вакуумное значение

$$\langle 0 | \text{Tr} G_{\mu\nu} G_{\lambda\rho} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} | 0 \rangle \quad (12.2)$$

В этом случае дивергенция тока отлична от нуля.

Заметим, что лагранжиан стандартной модели можно дополнить слагаемым

$$\Delta\mathcal{L} = \theta \text{Tr} G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} \quad (12.3)$$

Это полная производная, поэтому в классическом смысле она ни на что не влияет. Однако, в квантовой интерпретации это слагаемое может вносить изменения. В вакууме могут быть конфигурации, где вакуумное среднее (12.2) отлично от нуля.

Здесь θ – некоторый параметр. Важно отметить, что введенный член типа (12.3) нарушает CP -четность, что приводит к CP -нарушающим наблюдаемым. Таким образом, приходим к CP -нарушению в сильном секторе (так как речь идет о глюонах).

Оказывается, чтобы посчитать CP -нарушающую наблюдаемую, должно выполняться условие

$$|\theta| \lesssim 10^{-10} \quad (12.4)$$

Здесь появляется теория аксионов, которая пытается решить эту проблему.

Итак, добавки в лагранжиан, являющиеся полными производными, играют роль в квантовой теории. Вообще говоря, это связано с киральной аномалией. Добавку в лагранжиан типа (12.3) можно переписать, сделав киральные преобразования вида

$$q \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5} q \quad (12.5)$$

Тогда

$$\Delta\mathcal{L} = \bar{q}\gamma^5 q \theta \quad (12.6)$$

Такие добавки могут производить различные наблюдаемые.

Симметрии

Итак, мы рассматриваем симметрии $SU(3)_V \times SU(3)_A \times U(1)_V \times U(1)_A$. При этом $U(1)_A$ является аномальной симметрией. Таким образом, у нас остается следующий набор

симметрий

$$SU(3)_V \times SU(3)_A \times U(1)_V \quad (12.7)$$

$U(1)_V$ соответствует вращению типа

$$q \rightarrow e^{i\alpha} q \quad (12.8)$$

Ток, соответствующий этой симметрии

$$j^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q \quad (12.9)$$

Заряд, соответствующий этой симметрии, считает разницу между числом кварков и антикварков

$$Q = N_q - N_{\bar{q}} \quad (12.10)$$

Это сохраняющаяся величина. Кроме того, это выражение есть барионное число с точностью до нормировки. Таким образом, $U(1)_V$ отвечает сохранению барионного числа B .

Рассмотрим оставшиеся симметрии. Ток, соответствующий векторной симметрии, имеет вид

$$j^{\mu a} = \bar{q}\gamma^\mu t^a q \quad (12.11)$$

В этом случае имеем восемь сохраняющихся зарядов Q^a .

Ток, соответствующий аксиальной симметрии, имеет вид

$$j^{\mu 5a} = \bar{q}\gamma^\mu \gamma^5 q \quad (12.12)$$

В этом случае имеем восемь сохраняющихся зарядов Q^{5a} .

Пример. Адронное состояние

Понятно, что любая симметрия должна проявляться в спектре. В качестве примера рассмотрим состояние, состоящее из одного адрона $|h\rangle$. С помощью действия оператора Q^{5a} получим новое состояние

$$Q^{5a} |h\rangle = |\tilde{h}\rangle \quad (12.13)$$

Какие квантовые числа есть у этого состояния? Понятно, что у адрона $|h\rangle$ есть импульс, спин, четность p, J, P . Чтобы выяснить, какие квантовые числа есть у нового состояния, нужно понять, как генератор Q^{5a} коммутирует с остальными генераторами всех остальных симметрий. Ясно, что для всех глобальных симметрий имеет место коммутационное соотношение

$$[P^\mu, Q^{5a}] = 0 \quad (12.14)$$

Более того,

$$[M^{\mu\nu}, Q^{5a}] = 0 \quad (12.15)$$

Это значит, что если у исходного состояния $|h\rangle$ был импульс p , то и у нового состояния $|\tilde{h}\rangle$ будет импульс p . Значит, массы у них тоже равны. Аналогичное рассуждение можно привести и для спинов.

Пусть у исходного состояния была P -четность $P = +1$. Учтем, что Q^{5a} является псевдоскаляром. Значит, при P -четности он меняет знак. Значит, у нового состояния четность $P = -1$. Если U_P – оператор, реализующий P -четность, то

$$U_P Q^{5a} U_P^+ = -Q^{5a} \quad (12.16)$$

Это значит, что у каждого адрона должна быть пара – состояние с той же самой массой, тем же спином, но с противоположной P -четностью. Однако в эксперименте адроны не наблюдаются пары адронов по четности.

Ситуация, при которой симметрия есть, но не наблюдается в спектре, реализуется только в том случае, когда симметрия спонтанно нарушена. Таким образом, симметрия $SU(3)_V \times SU(3)_A$ должна быть спонтанно нарушена.

Задача на дом

Покажите, что симметрия

$$SU(3)_V \times SU(3)_A \quad (12.17)$$

не является аномальной.

Теорема Голдстоуна в квантовой теории поля

При спонтанном нарушении симметрии возникают голдстоуновские бозоны (некоторые безмассовые частицы). Отметим, что симметрия типа (12.17) является приближенной симметрией модели. Она нарушается массами кварков. Значит, и в реальности голдстоуновские бозоны будут все же массивными.

Отметим также, что в данной теории должно возникать восемь голдстоуновских бозонов, отвечающим восьми легчайшим адронным состояниям (октет мезонов).

Вообще говоря, спонтанное нарушение симметрии происходит за счет того, что есть некоторое поле, которое нетривиально действием симметрии, причем оно приобретает ненулевое вакуумное среднее.

Пусть есть некоторое скалярное поле ϕ . Вообще говоря, это может быть набор полей ϕ_n . Пусть есть некоторая симметрия, которая задается генератором Q . Квантовая теория поля утверждает, что имеет место соотношение для коммутатора

$$[Q, \phi_n] = -t_{nm} \phi_m \quad (12.18)$$

Под действием преобразования симметрии поле преобразуется следующим образом

$$e^{-iQ\epsilon} \phi e^{iQ\epsilon} = \phi' = e^{i\epsilon t} \phi \quad (12.19)$$

где ϵ – параметр преобразования.

Воспользовавшись разложением при малых ϵ , получаем

$$\phi - i\epsilon [Q, \phi] = \phi + i\epsilon t \phi \quad (12.20)$$

Отсюда и получаем соотношение (12.18).

Формулировка теоремы Голдстоуна

Пусть φ приобретает ненулевое вакуумное среднее

$$\langle \phi_m \rangle \neq 0 \quad (12.21)$$

Тогда соответствующий вакуумный коммутатор тоже отличен от нуля

$$\langle 0 | [Q, \phi_n] | 0 \rangle \neq 0 \quad (12.22)$$

В этом случае существуют безмассовые состояния.

Убедимся в этом. Для этого рассмотрим коммутатор тока с φ . Заряду Q соответствует некоторый ток $J^\mu(x)$. Рассмотрим вакуумное среднее от такого коммутатора

$$\langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle \quad (12.23)$$

Раскроем коммутатор

$$[J^\lambda(y), \phi_n(x)] = J^k m d(y) \phi_n(x) - \phi_n(x) J^\lambda(y) \quad (12.24)$$

Здесь стоит произведение двух операторов. Вставим между ними полный набор состояний, то есть

$$\mathbb{1} = \sum_N \langle N | | N \rangle \quad (12.25)$$

В результате получаем

$$\langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle = \sum_N \left(\langle 0 | J^\lambda(y) | N \rangle \langle N | \phi_n(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi_n(x) | N \rangle \langle N | J^\lambda(y) | 0 \rangle \right) \quad (12.26)$$

Учтем, что любой оператор в точке x можно связать с оператором в точке $x = 0$ с помощью сдвигов

$$O(x) = e^{iP_\mu x^\mu} O(0) e^{-iP_\mu x^\mu} \quad (12.27)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle &= \int d^4 p \sum_N \left\{ \langle 0 | J^\lambda(0) | N \rangle \langle N | \phi_n(0) | 0 \rangle e^{ip_N(y-x)} - \right. \\ &\quad \left. - \langle 0 | \phi_n(0) | N \rangle \langle N | J^\lambda(0) | 0 \rangle e^{-ip_N(y-x)} \right\} \delta^{(4)}(p - p_N) \end{aligned} \quad (12.28)$$

Введём обозначения

$$\frac{i}{(2\pi)^3} \rho^\lambda(p) = \sum_N \langle 0 | J^\lambda(0) | N \rangle \langle N | \phi_n(0) | 0 \rangle \delta^{(4)}(p - p_N) \quad (12.29)$$

$$\frac{i}{(2\pi)^3} \tilde{\rho}^\lambda(p) = \sum_N \langle 0 | \phi_n(0) | N \rangle \langle N | J^\lambda(0) | 0 \rangle \delta^{(4)}(p - p_N) \quad (12.30)$$

При этом

$$\rho^\lambda(p) = p^\lambda \rho(p^2) \theta(p^0) \quad (12.31)$$

$$\tilde{\rho}^\lambda(p) = p^\lambda \tilde{\rho}(p^2) \theta(p^0) \quad (12.32)$$

Подставим введенные обозначения (12.29)-(12.30) с учетом (12.31)-(12.32) в (12.28)

$$\begin{aligned} \langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p \left(e^{-ip(y-x)} p^\lambda \rho(p^2) \theta(p^0) - e^{ip(y-x)} p^\lambda \rho(p^2) \theta(p^0) \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \left(e^{-ip(y-x)} \rho(p^2) \theta(p^0) + e^{ip(y-x)} \tilde{\rho}(p^2) \theta(p^0) \right) \end{aligned} \quad (12.33)$$

Введем еще одну δ -функцию и продолжим равенство

$$\begin{aligned} \langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle &= -\frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - \mu^2) \left(e^{-ip(y-x)} \rho(p^2) \theta(p^0) + \right. \\ &\quad \left. + e^{ip(y-x)} \tilde{\rho}(p^2) \theta(p^0) \right) \end{aligned} \quad (12.34)$$

Теперь p^2 в аргументах функций ρ и $\tilde{\rho}$ мы можем заменить на μ^2 . После этого неизвестные функции можно вынести за знак интегрирования по p . Заметим, что в получающемся выражении появились перестановочные функции $\Delta^-(y-x; \mu^2)$, $\Delta^+(y-x; \mu^2)$, причем μ здесь играет роль массы.

$$\langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle = -\frac{\partial}{\partial y^\lambda} \int d\mu^2 \left[\underbrace{\rho(\mu^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ip(y-x)} \delta(p^2 - \mu^2) \theta(p^0)}_{\Delta^-(y-x; \mu^2)} + \underbrace{\tilde{\rho}(\mu^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{ip(y-x)} \delta(p^2 - \mu^2) \theta(p^0)}_{\Delta^+(y-x; \mu^2)} \right] \quad (12.35)$$

Рассмотрим случай пространственно подобного интервала. Пусть $x - y$ – пространственно подобен. Значит, существует система отсчета, в которой $x^0 = y^0$. В такой системе отсчета перестановочные функции равны

$$\Delta^-(y-x, \mu^2) = \Delta^+(y-x, \mu^2) \quad (12.36)$$

В этом случае перестановочные функции можно вынести за скобку. Тогда вакуумное среднее приобретает вид

$$\langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle = -\frac{\partial}{\partial y^\lambda} \int d\mu^2 (\rho(\mu^2) + \tilde{\rho}(\mu^2)) \Delta^-(y-x, \mu^2) \quad (12.37)$$

Поскольку ток сохраняется, то его дивергенция равна нулю. Возьмем производную от обеих частей равенства (12.37)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle &= -\frac{\partial^2}{\partial y^\lambda \partial y^\lambda} \int d\mu^2 (\rho(\mu^2) + \tilde{\rho}(\mu^2)) \Delta^-(y-x, \mu^2) = \\ &= \int d\mu^2 (\rho(\mu^2) + \tilde{\rho}(\mu^2)) \mu^2 \Delta^-(y-x, \mu^2) \end{aligned} \quad (12.38)$$

Вспомним ранее полученный результат

$$\langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle = -\frac{\partial}{\partial y^\lambda} \int d\mu^2 (\rho(\mu^2) + \tilde{\rho}(\mu^2)) \Delta^-(y-x, \mu^2) \quad (12.39)$$

Это равенство справедливо для пространственно подобных интервалов. Значит, коммутатор должен быть равен нулю. Отсюда следует

$$\tilde{\rho}(\mu^2) = -\rho(\mu^2) \quad (12.40)$$

Вернемся к общей ситуации. Теперь рассмотрим произвольный интервал. Тогда

$$\langle 0 | [J^\lambda(y), \phi_n(x)] | 0 \rangle = -\frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 \rho(\mu^2) \left(\Delta^-(y-x, \mu^2) - \Delta^+(y-x, \mu^2) \right) \quad (12.41)$$

Возьмем производную $\frac{\partial}{\partial y_\lambda}$ от этого равенства

$$0 = \int d\mu^2 \mu^2 \rho(\mu^2) \left(\Delta^-(y-x, \mu^2) - \Delta^+(y-x, \mu^2) \right) \quad (12.42)$$

Отсюда следует

$$\mu^2 \rho(\mu^2) = 0 \quad (12.43)$$

Может показаться, что из этого следует $\rho = 0$. Однако это не так. Чтобы показать это, нужно рассмотреть тот же самый коммутатор при $\lambda = 0$, то есть коммутатор нулевой компоненты тока с полем

$$\langle 0 | [J^0(\vec{y}, t), \phi_n(\vec{x}, t)] | 0 \rangle = i \int d\mu^2 \rho(\mu^2) \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^0}{2p^0} e^{i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})} + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^0}{2p^0} e^{-i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})} \right\} \quad (12.44)$$

Здесь мы воспользовались выражением

$$\Delta^-(y-x, \mu^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ip(y-x)} \delta(p^2 - \mu^2) \theta(p^0) \quad (12.45)$$

и учли выражение для интеграла

$$\int dp^0 \delta(p^2 - \mu^2) \theta(p^0) = \frac{1}{2p^0} \quad (12.46)$$

где под p^0 подразумевается комбинация

$$p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + \mu^2} \quad (12.47)$$

Продолжим равенство (12.44)

$$\langle 0 | [J^0(\vec{y}, t), \phi_n(\vec{x}, t)] | 0 \rangle = i \int d\mu^2 \rho(\mu^2) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (12.48)$$

В результате получаем

$$\langle 0 | [Q, \phi_n(\vec{x})] | 0 \rangle = i \int d\mu^2 \rho(\mu^2) \quad (12.49)$$

Ранее мы предположили, что произошло спонтанное нарушение симметрии. Значит, вакуумное среднее отлично от нуля

$$\langle 0 | [Q, \phi_n(\vec{x})] | 0 \rangle = -t_{nm} \langle \phi_m \rangle \neq 0 \quad (12.50)$$

Значит, и интеграл (12.49) отличен от нуля. Отсюда следует, что функция $\rho \neq 0$.

Итак, мы получили соотношение

$$\mu^2 \rho(\mu^2) = 0 \quad (12.51)$$

как следствие закона сохранения тока.

При этом должно выполняться

$$\int d\mu^2 \rho(\mu^2) = it_{nm} \langle \phi_m \rangle \neq 0 \quad (12.52)$$

как следствие предположения о спонтанном нарушении симметрии.

Понятно, что эти условия выполняются для функции вида

$$\rho(\mu^2) = it_{nm} \langle \phi_n \rangle \delta(\mu^2) \quad (12.53)$$

Вспомним исходное выражение для функции ρ

$$\frac{i}{(2\pi)^3} \rho^\lambda(p) = \sum_N \delta^{(4)}(p - p_N) \langle 0 | J^\lambda(0) | N \rangle \langle N | \phi_n(0) | 0 \rangle \quad (12.54)$$

при этом

$$\rho^\lambda(p) = p^\lambda \rho(p^2) \theta(p^0) \quad (12.55)$$

Если выполняется (12.53), то ρ^λ отлично от нуля только для тех p , чей квадрат равен нулю. Учитывая определение (12.54), получаем, что вклад в ρ^λ дают только те состояния, у которых масса равна нулю. Таким образом, $|N\rangle$ – безмассовые состояния. Тем самым мы доказали теорему Голдстоуна.

Следствия из теоремы Голдстоуна

Если $|N\rangle$ – состояния голдстоуновского бозона, то

$$\langle 0 | J^\lambda(0) | N \rangle \neq 0 \quad (12.56)$$

Таким образом, $|N\rangle$ имеют те же квантовые числа, что и ток J^λ .

В случае КХД роль тока в киральном пределе играет $j^{\mu 5a}$. Для каждого из этих токов можно применить указанную теорему. Значит, у каждого тока будет свое безмассовое состояние. Более того, этот ток псевдовекторный. Значит, $|B^a\rangle$ – октет относительно $SU(3)_V$ (псевдоскалярные бозоны). Заметим, что в КХД легчайшими адронами является октет мезонов. Они и играют роль псевдоскалярных бозонов.

Эффективная теория взаимодействия голдстоуновских бозонов

Итак, у нас есть теория со спонтанным нарушением симметрии G до подгруппы H . У нас есть голдстоуновские бозоны, число которых равно числу нарушенных генераторов. Их массы равны нулю. Есть также некоторые массивные состояния начиная с некоторой массы m_0 . Теперь нам надо рассмотреть энергии

$$E \ll m_0 \quad (12.57)$$

Тогда в спектре останутся только голдстоуновские бозоны.

Пример

В качестве примера рассмотрим комплексное скалярное поле ϕ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - \lambda (|\phi|^2 - \delta^2)^2 \quad (12.58)$$

Происходит спонтанное нарушение симметрии. Пусть основное состояние (состояние с минимальным значением энергии)

$$\phi_0 = v \quad (12.59)$$

Возмущение этого состояния удобно записывать в следующем виде

$$\phi(x) = (v + \rho(x)) e^{i\theta(x)} \quad (12.60)$$

Понятно, что $\theta(x)$ – голдстоуновский бозон, а $\rho(x)$ – массивное поле. Его масса имеет порядок

$$m_\rho \sim \sqrt{\lambda} v \quad (12.61)$$

Рассмотрим энергии

$$E \ll m_\rho \quad (12.62)$$

Изначально у нас была симметрия

$$U(1) : \quad \phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \quad (12.63)$$

Применим это преобразование симметрии к (12.60)

$$(v + \rho(x)) e^{i\theta(x)} \xrightarrow{U(1)} (v + \rho(x)) e^{i(\theta(x)+\alpha)} \quad (12.64)$$

Значит,

$$\rho(x) \rightarrow \rho(x) \quad (12.65)$$

$$\theta(x) \rightarrow \theta(x) + \alpha \quad (12.66)$$

Единственный оператор, соответствующий симметрии (12.66) – это оператор $\partial_\mu \theta$. Из таких операторов и будем строить низкоэнергетическую теорию

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \theta)^2 + \# (\partial_\mu \theta)^2 (\partial_\nu \theta)^2 \quad (12.67)$$

Лекция 13. Низкоэнергетическая теория голдстоуновских бозонов

Теорема Голдстоуна (продолжение)

На прошлой лекции мы обсудили теорему Голдстоуна, а именно низкоэнергетическое КДХ. В этом случае группы симметрий

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B \quad (13.1)$$

Отметим, что $U(1)_B$ – это группа, закон сохранения которой представляет собой сохранение барионного числа.

Напомним, что оставшиеся $SU(3)$ -группы не проявляются в спектре. В спектре проявляется только одна из них. Если бы проявлялись обе, то было бы удвоение спектра адронов по чётности, что не наблюдается. Точнее говоря, такое возможно только в том случае, когда происходит спонтанное нарушение симметрии. Из этой группы $SU(3)_L \times SU(3)_R$ надо нарушить подгруппу $SU(3)_A$. Ее преобразование устроено следующим образом

$$SU(3)_A : \quad q \rightarrow e^{i\alpha^a t^a \gamma^5} q \quad (13.2)$$

Зарядами этого преобразования являются Q^{5a} . Из-за этих операторов происходит удвоение по четности, если соответствующая симметрия не нарушена спонтанно.

Поскольку удвоения по чётности нет, мы предположили, что происходит спонтанное нарушение симметрии. В соответствии с этим мы обсудили теорему голдстоуна на примере одного из таких генераторов. Другими словами, мы рассмотрели какой-то нарушенный генератор Q и рассмотрели коммутатор этого генератора с некоторым полем. В общем случае этот коммутатор пропорционален преобразованию поля

$$[Q, \varphi] \propto \delta\varphi \quad (13.3)$$

Спонтанное нарушение симметрии проявляется в том, что вакуумное среднее от этого $\delta\varphi$ отлично от нуля

$$\langle 0 | [Q, \varphi] | 0 \rangle \propto \langle 0 | \delta\varphi | 0 \rangle \neq 0 \quad (13.4)$$

Поясним это. Если симметрия не является спонтанно нарушенной, то соответствующее преобразование при действии на основное состояние должна давать сам вакуум, так как вакуум инвариантен относительно таких преобразований

$$e^{i\alpha\hat{Q}} | 0 \rangle = | 0 \rangle \quad (13.5)$$

Отсюда следует, что генератор Q он аннигилирует в вакууме, то есть Q при действии на

вакуум даёт ноль

$$\hat{Q} |0\rangle = 0 \quad (13.6)$$

Отсюда следует, что если расписать коммутатор в равенстве (13.4), то вакуумное среднее этого коммутатора всегда будет нулём, если Q аннигилирует в вакуум. Другими словами, если симметрия не нарушена спонтанно, то вариация любого поля по вакууму равняется нулю. Наоборот, если симметрия спонтанно нарушена, то

$$\hat{Q} |0\rangle \neq 0 \quad (13.7)$$

Это соответствует спонтанному нарушению симметрии. Как следствие, преобразование поля, которое есть вакуумное среднее коммутатора Q и φ отлично от нуля.

$$\langle 0 | [\hat{Q}, \varphi_n] | 0 \rangle = - \sum_m t_{nm} \langle 0 | \varphi_m | 0 \rangle \quad (13.8)$$

Здесь t_{nm} – это некоторые коэффициенты, связанные с генераторами.

Мы расписали этот коммутатор, подставив туда полный набор состояний. Также мы ввели функцию ρ следующим образом

$$\frac{i}{(2\pi)^3} \rho_n^\lambda(p) = \sum_N \delta^{(4)}(p - p_N) \langle 0 | J^\lambda(0) | N \rangle \langle N | \varphi_n | 0 \rangle \quad (13.9)$$

Для этой плотности мы получили представление

$$\rho_n^\lambda(p) = p^\lambda \theta(p^0) \rho(p^2) \quad (13.10)$$

Мы показали, что эта функция пропорциональна

$$\rho(p^2) \propto \delta(p^2) \quad (13.11)$$

Таким образом, в сумме (13.9) присутствуют только безмассовые состояния.

Вернемся к симметрии КХД, которая спонтанно нарушается. Так как здесь восемь генераторов, у нас будет октет голдстоуновских бозонов. Назовем их B_a . Роль тока в теореме Голдстоуна играет ток нарушенной подгруппы $J^{\mu 5 a}$. Таким образом, следующий матричный элемент

$$\langle 0 | J^{\mu a 5}(x) | B_N, p \rangle = i F_N^a p^\mu e^{-ipx} \quad (13.12)$$

Вообще говоря, можно сделать замену линейного базиса, чтобы диагонализировать матрицу F_N^a . Таким образом, можно считать

$$F_N^a = \delta_N^a F_\pi \quad (13.13)$$

Отсюда получаем

$$\langle 0|J^{\mu a5}(x)|B_N p\rangle = i\delta_N^a F_\pi p^\mu e^{-ipx} \quad (13.14)$$

Константа F_π называется константой распада пиона, так как она входит в ширину распада пиона.

Идеи построения низкоэнергетической теории голдстоуновских бозонов

Возникает вопрос: можно ли построить низкоэнергетическую теорию голдстоуновских бозонов? В теории спонтанного нарушения симметрии у нас есть целый набор безмассовых частиц, который отделен от массивных частиц. Соответственно, если мы пойдём на энергии, много меньшие всех массивных частиц, то у нас останутся только голдстоуновские бозоны. Какая теория их описывает? В прошлый раз мы рассмотрели пример скалярного комплексного поля φ с лагранжианом вида

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - \lambda (|\varphi|^2 - v^2)^2 \quad (13.15)$$

В основном состоянии φ приобретает ненулевое вакуумное среднее. В качестве основного состояния можно выбрать

$$\varphi_0 = v \quad (13.16)$$

Возмущение можно записать в виде

$$\varphi(x) = (v + \rho(x)) e^{i\theta(x)} \quad (13.17)$$

Видно, что если подставить (13.17) в лагранжиан, то θ не войдет в потенциал. Таким образом, θ описывает безмассовую частицу, соответствующую голдстоуновскому бозону.

Идея о построении низкоэнергетической эффективной теории состоит в следующем. Отметим, что в данном случае у нас есть симметрия относительно преобразований вида

$$U(1) : \quad \varphi \rightarrow e^{i\alpha\varphi} \quad (13.18)$$

Отсюда видно, что при этих преобразованиях $\rho(x)$ никуда не переходит,

$$\rho(x) \rightarrow \rho(x) \quad (13.19)$$

а θ сдвигается

$$\theta(x) \rightarrow \theta(x) + \alpha \quad (13.20)$$

Таким образом, мы должны потребовать, чтобы наша теория была инвариантна относительно таких сдвиговых преобразований. Значит, мы можем записать любой лагранжиан, инвариантный относительно сдвиговых преобразований. Значит, он должен быть построен

из производных:

$$\mathcal{L} = F(\partial_\mu \theta(x)) \quad (13.21)$$

где F – некоторая скалярная функция.

Общий случай

Перейдем к более общему случаю. Будем рассуждать на примере классической теории поля. Пусть у нас есть набор скалярных полей φ . Пусть G – группа симметрий лагранжиана

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) \quad (13.22)$$

Будем предполагать, что происходит спонтанное нарушение симметрии. Другими словами, φ_0 – основное состояние (конфигурация, которая доставляет минимум функционала энергии). Будем предполагать, что это нетривиальная конфигурация. G – спонтанно нарушается до некоторой подгруппы $H \subset G$.

У нас есть некоторые генераторы в группе G . Разобьем их на те, которые принадлежат подгруппе H и все остальные. Пусть x^i – генераторы группы H , t^a – оставшиеся генераторы группы $G \setminus H$.

Теперь легко выделить те возмущения, которые соответствуют голдстоуновским бозонам. Для этого рассмотрим возмущения около основного состояния следующего вида

$$\varphi(x) = \underbrace{e^{it^a \theta^a(x)}}_{\in G} \varphi_0 \quad (13.23)$$

Матрица, присутствующая в (13.23), является элементом группы G . Потенциал $V(\varphi)$ мы предполагаем инвариантным относительно преобразований группы G . Значит, если мы подставим представление (13.23) в V , то $\theta(x)$ туда не войдут. Таким образом, $\theta^a(x)$ – безмассовые поля спонтанно нарушенной симметрии G .

Если рассмотреть возмущения типа

$$e^{ix^i \lambda^i(x)} \quad (13.24)$$

где x^i – генераторы оставшейся симметрии, то

$$e^{ix^i \lambda^i(x)} \varphi_0 = \varphi_0 \quad (13.25)$$

то есть это, вообще говоря, возмущением не является.

Как преобразуются голдстоуновские бозоны под действием преобразований из группы G ? Осуществим преобразование над полем φ

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i(\alpha^i x^i + \beta^a t^a)} \varphi(x) \quad (13.26)$$

Подействуем возмущениями:

$$e^{i(\alpha^i x^i + \beta^a t^a)} e^{it^b \theta^b(x)} \varphi_0 = e^{it^a \tilde{\theta}^a(x)} e^{ix^i \tilde{\beta}^i(\alpha, \beta, \theta)} \varphi_0 \quad (13.27)$$

Здесь мы воспользовались тем, что произведение элементов группы G есть снова элемент G , который можно представить в виде произведение элемента из $G \setminus H$ и элемента из H . Таким образом, $\tilde{\theta}^a$ – это преобразованные голдстоуновские поля.

Отсюда видно, что у голдстоуновских полей весьма сложный закон преобразования. Он очень нелинейный в отличие от обычных линейных преобразований, в которых вариация поля пропорциональна самому полю. Здесь, чтобы получить новые поля, мы действуем элементом группы на поля, записанные в экспоненциальной форме.

Про такой закон преобразования говорят как про нелинейную реализацию группы симметрии. Отметим, что большинстве случаев в лагранжиане все симметрии реализованы линейно. Сейчас же мы рассмотрели пример ситуации, когда симметрия реализована нелинейно.

Рассмотрим конкретный пример: пусть есть спонтанное нарушение

$$\underbrace{SU(3)_L \times SU(3)_R}_G \xrightarrow{\text{спонт. наруш.}} \text{до} \underbrace{SU(3)_V}_H \quad (13.28)$$

Будем рассматривать генераторы так, как будто они действуют на поля кварков. Тогда генератор из группы H устроен следующим образом

$$q \rightarrow e^{i\alpha^a t^a} q \quad (13.29)$$

поэтому соответствующие генераторы – это t^a . Такой набор генераторов обозначим

$$\{t^a\} = x \quad (13.30)$$

В данном случае часть группы, которая спонтанно нарушилась,

$$G \setminus H = SU(3)_A \quad (13.31)$$

Поэтому преобразования устроены следующим образом

$$q \rightarrow e^{i\beta^a t^a \gamma^5} q \quad (13.32)$$

Соответствующие генераторы – $t^a \gamma^5$.

Введем голдстоуновские поля

$$\underbrace{e^{i\alpha^a t^a + i\beta^a t^a \gamma^5}}_{SU(3)_L \times SU(3)_R} \cdot \underbrace{e^{it^a \gamma^5 \theta^a(x)}}_{\in SU(3)_A} = e^{it^a \gamma^5 \tilde{\theta}^a(x)} e^{it^a \beta^a(\alpha, \beta, \theta(x))} \quad (13.33)$$

Отметим, что β здесь выражаются достаточно сложным образом. Упростим это равенство. Подставим вместо единичной матрицы и γ -матрицы проекторы на правые и левые фермионы.

Напомним, что проектор на левое состояние имеет вид

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad (13.34)$$

а проектор на правое –

$$P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad (13.35)$$

Единичную матрицу можно представить в виде

$$\mathbb{1} = P_L + P_R \quad (13.36)$$

С другой стороны, γ -матрицу можно представить в виде

$$\gamma^5 = P_R - P_L \quad (13.37)$$

Подставим эти представления в равенство (13.33) и соберем коэффициенты при P_R и P_L :

$$e^{iP_R(\alpha^a + \beta^a)t^a + iP_L(\alpha^a - \beta^a)t^a} \cdot e^{i(P_R - P_L)t^a \theta^a(x)} = e^{i(P_R - P_L)t^a \tilde{\theta}^a(x)} \cdot e^{i(P_L + P_R)t^a \tilde{\beta}^a(\alpha, \beta, \theta)} \quad (13.38)$$

В фермионном пространстве это не что иное как две блочно-диагональные матрицы. Соответственно, это равенство эквивалентно двум равенствам, которые можно получить, спроецировав равенство отдельно на левые и правые фермионы. Так, если спроектировать равенство (13.38) на левые фермионы, получим соотношение

$$e^{iP_L(\alpha^a - \beta^a)t^a} e^{-iP_L t^a \theta^a(x)} = e^{-iP_L t^a \tilde{\theta}^a(x)} e^{iP_L t^a \tilde{\beta}^a(\alpha, \beta, \theta)} \quad (13.39)$$

Если же спроецировать равенство (13.38) на правые фермионы, получим

$$e^{iP_R(\alpha^a + \beta^a)t^a} e^{iP_R t^a \theta^a(x)} = e^{iP_R t^a \tilde{\theta}^a(x)} e^{iP_R t^a \tilde{\beta}^a(\alpha, \beta, \theta)} \quad (13.40)$$

Вообще говоря, так как полученные равенства – результат действия на фермионы, проекторы здесь можно опустить:

$$e^{i(\alpha^a - \beta^a)t^a} e^{-it^a \theta^a(x)} = e^{-it^a \tilde{\theta}^a(x)} e^{it^a \tilde{\beta}^a(\alpha, \beta, \theta)} \quad (13.41)$$

$$e^{i(\alpha^a + \beta^a)t^a} e^{it^a \theta^a(x)} = e^{it^a \tilde{\theta}^a(x)} e^{it^a \tilde{\beta}^a(\alpha, \beta, \theta)} \quad (13.42)$$

Обозначим преобразование из (13.42) через

$$e^{i(\alpha^a + \beta^a)t^a} = \omega_R \quad (13.43)$$

так как оно соответствует правой группе $SU(3)$.

Аналогично введем обозначение для преобразования из (13.41)

$$e^{i(\alpha^a - \beta^a)t^a} = \omega_L \quad (13.44)$$

так как оно соответствует левой подгруппе $SU(3)$.

Также введем обозначение

$$e^{it^a \theta^a(x)} = \tilde{U}^{-1}(x) \quad (13.45)$$

$$e^{-it^a \theta^a(x)} = \tilde{U}(x) \quad (13.46)$$

В результате равенства типа (13.41)-(13.42) можно записать в виде

$$\omega_L \tilde{U}(x) = \tilde{U}'(x) e^{it^a \tilde{\beta}^a(\alpha, \beta, \theta(x))} \quad (13.47)$$

$$\omega_R \tilde{U}^{-1}(x) = \tilde{U}'^{-1}(x) e^{it^a \tilde{\beta}^a(\alpha, \beta, \theta)} \quad (13.48)$$

Избавимся от неизвестной матрицы, которая содержит $\tilde{\beta}$. Для этого обратим равенство (13.48). После сопряжения получим

$$\tilde{U}(x) \omega_R^\dagger = e^{-it^a \tilde{\beta}^a(\alpha, \beta, \theta)} \tilde{U}'(x) \quad (13.49)$$

Теперь мы можем перемножить равенства (13.47) и (13.49). В результате получим

$$\omega_L \tilde{U}^2(x) \omega_R^\dagger = \tilde{U}'^2(x) \quad (13.50)$$

Обозначим

$$\tilde{U}^2(x) = U(x) \in SU(3) \quad (13.51)$$

Закон преобразования этого поля голдстоуновских бозонов выглядит следующим образом

$$U(x) \rightarrow U'(x) = \omega_L U(x) \omega_R^\dagger \quad (13.52)$$

Отметим, что фактически мы вывели аналог того закона преобразования, который мы получали для абелевой модели, в которой поле θ преобразовывалось сдвиговым образом:

$$\theta(x) \rightarrow \theta(x) + \alpha \quad (13.53)$$

Поэтому (13.52) – это аналог этого такого закона преобразования для конкретного примера со спонтанным нарушением (13.28). Отметим, что такой закон преобразования является

более приятным, так как он не содержит сложных функций типа $\tilde{\beta}$. С другой стороны, его достаточно для того, чтобы записать эффективное действие при низких энергиях.

Лагранжиан эффективной теории в низшем порядке по импульсам

Рассмотрим энергии $E \ll$ масс всех массивных частиц. После этого у нас остаются только голдстоуновские поля $U(x)$. Получим лагранжиан эффективной теории в низшем порядке по импульсам. Вообще говоря, здесь нам нужно использовать $\partial_\mu U$. Воспользуемся тем, что

$$U^+ \rightarrow \omega_R U^+ \omega_L \quad (13.54)$$

Если взять след

$$Tr [\partial_\mu U \partial_\mu U^+] \quad (13.55)$$

то получим инвариант преобразований.

Таким образом, лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{F_0^2}{4} Tr [\partial_\mu U \partial_\mu U^+] \quad (13.56)$$

где F_0 – это некоторая константа, имеющая размерность массы.

Посмотрим, как выглядит этот лагранжиан для бесконечно малых полей. Отметим, что $U(x)$ – это элемент группы $SU(3)$, поэтому его можно представить в виде

$$U(x) = e^{it^a \theta^a(x)} \simeq 1 + it^a \theta^a(x) + \dots \quad (13.57)$$

Тогда

$$\partial_\mu U(x) = it^a \partial_\mu \theta^a(x) + \dots \quad (13.58)$$

$$\partial_\mu U^+(x) = -it^a \partial_\mu \theta^a + \dots \quad (13.59)$$

Учтем, что

$$Tr (t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (13.60)$$

В результате получаем

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} 4 Tr [t^a \partial_\mu \theta^a \cdot t^b \partial_\mu \theta^b] = \frac{F_0^2}{2} \partial_\mu \theta^a \partial_\mu \theta^a \quad (13.61)$$

Отметим, что такой квадратичный лагранжиан не является канонически нормированным. Чтобы его канонически нормировать, нужно перешкалировать поля θ . После этого правильное определение нормированных голдстоуновских полей выглядит следующим образом

$$U(x) = \exp \left(\frac{2i}{F_0} t^a \varphi^a(x) \right) \quad (13.62)$$

Заметим, что даже в низшем порядке по импульсам \mathcal{L} является нетривиальным лагранжианом. Вообще говоря, поля можно раскладывать дальше первого порядка. Тогда в разложении появятся старшие слагаемые, которые будут давать нетривиальные члены взаимодействия в лагранжиане. Таким образом, симметрия автоматически фиксирует члены взаимодействия. В низшем порядке по импульсам они однозначно находятся.

Ранее мы сказали, что φ – это голдстоуновские бозоны, которые можно сопоставить физическим полям (октету легчайших мезонов). Это сопоставление выглядит следующим образом

$$\sqrt{2}\varphi^a t^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix} \quad (13.63)$$

Задача на дом

Используя закон преобразования полей, найдите кварковый состав мезонов, и убедитесь, что он совпадает с кварковым составом, который мы использовали ранее для классификации мезонов. Так, K^+ имеет кварковый состав $(u\bar{s})$.

Задача на дом

Мы построили теорию с законом преобразования

$$U \rightarrow \omega_L U \omega_R^\dagger \quad (13.64)$$

под действием группы симметрии $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Лагранжиан инвариантен относительно этой симметрии. Значит, есть соответствующие токи. Найдите токи $j_L^{\mu a}$, $j_R^{\mu a}$. Эти токи будут зависеть от полей и константы F_0 .

Отметим, что для аксиального тока верно

$$\langle 0 | J^{\mu 5a} | \varphi^b, p \rangle = i F_\pi p^\mu \quad (13.65)$$

Используя выражения для указанных токов, можно получить связь между константами F_0 и F_π . Более того, можно убедиться, что они совпадают

$$F_0 = F_\pi \quad (13.66)$$

Причины нарушения симметрии

Ранее возникал вопрос: какое поле приобретает ненулевое вакуумное среднее (за счет чего и нарушается симметрия)? Как мы говорили ранее, в КХД среди фундаментальных полей есть только поля кварков, которые не могут приобретать ненулевое вакуумное среднее.

Значит, нужно придумать какие-то нетривиальные операторы, составленные из этих полей, которые, с одной стороны, будут нетривиально преобразовываться относительно группы симметрий, а с другой стороны будут скалярны. Естественными кандидатами на роль этих операторов являются билинейные комбинации, построенные из кварков. Введем следующие скалярные

$$S^a = \bar{q} \lambda^a q \quad (13.67)$$

и псевдоскалярные плотности

$$P^a = \bar{q} i \gamma^5 \lambda^a q \quad (13.68)$$

Дополним набор матриц Геллмана единичной матрицей: λ^a , $a = 0, \dots, 8$,

$$\lambda^0 \equiv \mathbb{1} \quad (13.69)$$

Далее для рассуждения нам потребуются коммутаторы следующих объектов

$$A_i = q^+ \hat{A}_i q \quad (13.70)$$

Рассмотрим

$$[A_1(\vec{x}, t), A_2(\vec{y}, t)] = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) q^+ [\hat{A}_1, \hat{A}_2] q(\vec{x}, t) \quad (13.71)$$

Рассмотрим в качестве одного из таких A_i векторный заряд

$$Q_V^a(t) = \int d^3x \bar{q} \gamma^0 \lambda^a q = \int d^3x q^+ \lambda^a q \quad (13.72)$$

Посчитаем коммутаторы этого выражения со всеми скалярными плотностями, используя формулу (13.71). Учтем, что скалярная плотность

$$S^a = q^+ \underbrace{\gamma^0 \lambda^a}_{\hat{A}_1} q \quad (13.73)$$

Таким образом, в данном случае коммутатор (13.71) имеет вид

$$[\lambda^a, \gamma^0 \underbrace{\lambda^0}_{\equiv \mathbb{1}}] = 0 \quad (13.74)$$

Для случая $b \neq 0$

$$[\lambda^a, \gamma^0 \lambda^b] = 2i f^{abc} \gamma^0 \quad (13.75)$$

Отсюда получаем

$$[Q_V^a, S^0] = 0 \quad (13.76)$$

$$[Q_V^a, S^b(y)] = 2i f^{abc} S^c(y), \quad b \neq 0 \quad (13.77)$$

Отсюда можно получить S^c , воспользовавшись соотношением для структурных констант

$$f^{abc} f^{abd} = 3\delta^{cd} \quad (13.78)$$

Тогда

$$S^a = -\frac{i}{6} f^{abc} [Q_V^b, S^c] \quad (13.79)$$

Напомним, что Q – это генератор ненарушенной симметрии. Значит, этот заряд должен аннигилировать в вакууме. Возьмем вакуумное среднее от (13.79). Расписав это среднее, получим

$$\langle 0|S^a|0\rangle = 0, \quad a = 1, \dots, 8 \quad (13.80)$$

Явно подставим S^a в (13.80) для случаев диагональных генераторов, то есть для $a = 3, 8$. Учтем, что для $a = 3$

$$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.81)$$

а для $a = 8$

$$\lambda^8 \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (13.82)$$

с точностью до коэффициента.

Напомним также, что

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (13.83)$$

В результате для $a = 3$ получим

$$\langle 0|\bar{u}u - \bar{d}d|0\rangle = 0 \quad (13.84)$$

Для $a = 8$ получаем

$$\langle \bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s|0\rangle = 0 \quad (13.85)$$

Все остальные равенства приводят к результату

$$\langle \bar{q}_i q_j \rangle = 0 \quad \text{при } i \neq j \quad (13.86)$$

С другой стороны, из равенств (13.84)-(13.85) следует, что

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle = \frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle \quad (13.87)$$

Теперь рассмотрим спонтанно нарушенную симметрию. В этом случае генераторы

$$Q_A^a = \int d^3x q^\dagger(\vec{x}, t) \gamma^5 \lambda^a q(\vec{x}, t) \quad (13.88)$$

Вычислим коммутаторы Q с псевдоскалярными плотностями

$$i [Q_A^a, P^a(y)] \quad (13.89)$$

Здесь мы подразумеваем, что сумма по a отсутствует.

Отсюда возникает необходимость в вычислении коммутатора

$$i [\gamma^5 \lambda^a, \gamma^0 \gamma^5 \lambda^a] = -2i \gamma^0 (\lambda^a)^2 \quad (13.90)$$

Учтем, что квадраты всех генераторов имеют вид

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.91)$$

$$\lambda_4^2 = \lambda_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.92)$$

$$\lambda_6^2 = \lambda_7^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.93)$$

$$\lambda_8^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (13.94)$$

В результате получаем выражение для коммутатора

$$i [Q_A^a, P^a(y)] = \begin{cases} \frac{1}{2} (\bar{u}u + \bar{d}d), & a = 1, 2, 3 \\ \frac{1}{2} (\bar{u}u + \bar{s}s), & a = 4, 5 \\ \frac{1}{2} (\bar{d}d + \bar{s}s), & a = 6, 7 \\ \frac{1}{6} (\bar{u}u + \bar{d}d + 4\bar{s}s), & a = 8 \end{cases} \quad (13.95)$$

Теперь возьмем среднее по вакууму, и учтем, что Q_A^a – нарушенный генератор, который при действии на вакуум дает ненулевой результат.

Поэтому получаем

$$\langle 0|i [Q_A^a, P^a(y)] |0\rangle \propto \langle \bar{q}q \rangle \neq 0 \quad (13.96)$$

Отметим, что оператор $\bar{q}_i q_j$ приобретает ненулевое вакуумное среднее

$$\langle 0|\bar{q}_i q_j|0\rangle = \frac{1}{3}\delta_{ij} \langle \bar{q}q \rangle \neq 0 \quad (13.97)$$

К соотношению (13.96) можно формально применить теорему Голдстоуна. Далее, чтобы построить эффективную теорию, нужно построить лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{4} Tr (\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U) \quad (13.98)$$

где

$$U(x) = e^{\frac{2i}{F_\pi} t^a \varphi^a(x)} \quad (13.99)$$

Лекция 14. Обобщение киральной теории возмущений

Теория голдстоуновских бозонов (продолжение)

На прошлой лекции мы построили теорию голдстоуновских бозонов. Мы обозначили через G группу симметрий, которая спонтанно нарушается до подгруппы H . При таком спонтанном нарушении возникают безмассовые частицы – голдстоуновские бозоны. Для них мы построили теорию, которая работает при энергиях, много меньших масс всех массивных частиц. Пространством, в котором лежат голдстоуновские бозоны, фактически является фактор-пространство G/H . В случае примера КХД с тремя флейворами кварков

$$\underbrace{SU(3)_L \times SU(3)_R}_G \rightarrow SU(3)_V \quad (14.1)$$

То есть, все аксиальные токи спонтанно нарушаются. На прошлой лекции мы выяснили удобную параметризацию для платоновских полей:

$$U(x) = \exp\left(\frac{2i}{F_\pi} \varphi^a t^a\right) \quad (14.2)$$

Здесь t^a – это генератор группы $SU(3)$ в фундаментальном представлении, φ^a – голдстоуновские поля.

Преобразования, которым подчиняется это поле, имеют вид

$$U(x) \xrightarrow{G} \omega_L U(x) \omega_R^\dagger \quad (14.3)$$

Низкоэнергетическая теория должна удовлетворять указанной симметрии. Как мы показали ранее, лагранжиан такой теории имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} [\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger] + \mathcal{O}(\partial^4) \quad (14.4)$$

Ранее присутствующая здесь константа обозначалась F_0 . Была задана задача связать константу F_0 и константу F_π , которая возникает в матричном элементе тока

$$\langle 0 | J^{\mu 5a}(x) | \phi^a, p \rangle = i p^\mu \delta^{ab} F_\pi e^{-ipx} \quad (14.5)$$

F_π – константа распада пиона, а F_0 – размерная константа, которая была введена искусственно для соответствия размерностей.

Решив указанную задачу, можно показать, что

$$F_\pi = F_0 \quad (14.6)$$

Известно, что рассматриваемая группа симметрий на самом деле не является точной. Она нарушается массами кварков и взаимодействиями кварков с различными полями. Вид этих взаимодействий нам известен. Используя этот вид, можно построить эффективную теорию взаимодействия голдстоуновских бозонов, которые будут содержать нарушаемые симметрию слагаемые.

В качестве примера рассмотрим массовые слагаемые кварков. Запишем лагранжиан

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{КХД}}(m_q = 0) - \bar{q}_i \left(s_{ij} + i\gamma^5 p_{ij} \right) q_j \quad (14.7)$$

Здесь s_{ij}, p_{ij} – некоторые функции. Будем рассматривать их как внешние источники. Аналогичным образом ранее в теорию делались добавки с источником вида

$$\Delta\mathcal{L} \ni J(x)\varphi(x) \quad (14.8)$$

Если положить

$$s_{ij} = \delta_{ij}m_i \quad (14.9)$$

то получим массовые слагаемые в лагранжиане КХД.

Перепишем добавку в (14.7) следующим образом. Разобьем кварки на правые и левые. Для этого вставим в выражение проекторы P_L, P_R . Тогда последнее слагаемое можно переписать в виде

$$-\bar{q}_{iR} (s_{ij} - ip_{ij}) q_{jL} - \bar{q}_{iL} (s_{ij} + ip_{ij}) q_{jR} \quad (14.10)$$

Отсюда видно, что если s, p – некоторые массовые слагаемые, то они явно нарушают группу симметрий. Однако, эту симметрию можно установить, если дополним флейворные преобразования кварков преобразованиями этих источников. Таким образом, новый лагранжиан инвариантен относительно преобразований вида

$$q_L \rightarrow \omega_L q_L \quad (14.11)$$

$$q_R \rightarrow \omega_R q_R \quad (14.12)$$

$$(s - ip) \rightarrow \omega_R (s - ip) \omega_L^\dagger \quad (14.13)$$

$$(s + ip) \rightarrow \omega_L (s + ip) \omega_R^\dagger \quad (14.14)$$

Итак, мы рассмотрели микроскопическую теорию (на уровне кварков). Теперь вернемся к теории голдстоуновских бозонов. Будем считать введенные источники маленькими возмущениями лагранжиана и рассмотрим энергии, много меньшие масс всех массивных частиц. В качестве степеней свободы у нас останутся поля U . При этом низкоэнергетический лагранжиан будет зависеть от полей U и источников s, p .

Введем величину

$$\chi = 2B_0 (s + ip) \quad (14.15)$$

где параметр B_0 имеет размерность энергии.

Тогда группа преобразований полей устроена следующим образом

$$U \rightarrow \omega_L U \omega_R^+ \quad (14.16)$$

$$\chi \rightarrow \omega_L \chi \omega_R^+ \quad (14.17)$$

$$\chi^+ \rightarrow \omega_R \chi^+ \omega_L \quad (14.18)$$

Теория голдстоуновских бозонов, как и в предыдущем (микроскопическом) примере должна быть инвариантна относительно преобразований из группы $SU(3)$. Поэтому эффективный лагранжиан тоже должен быть инвариантным относительно этих преобразований. Ограничиваясь первым порядком по источникам, получим

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} [\partial_\mu U^+ \partial_\mu U + \chi U^+ + \chi^+ U] \quad (14.19)$$

Таким образом, мы разбили теорию возмущений по источникам, считая их достаточно малыми.

Теперь выясним смысл константы B_0 . Для этого рассмотрим величину (работаем в микроскопической теории)

$$Z[s, p] = \int D[q, A] e^{iS - i \int d^4x \bar{q}(s+i\gamma^5 p)q} \quad (14.20)$$

Отметим, что введенная величина фактически является производящим функционалом для функции Грина определенного типа. Если мы будем варьировать по источникам (брать вариационные производные функционала Z по источникам), то будем получать функции Грина локальных операторов $\bar{q}q$ или $\bar{q}\gamma^5 q$.

Рассмотрим величину

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta s_{ij}} Z \Big|_{s=p=0} = - \langle 0 | \bar{q}_i q_j | 0 \rangle = -\frac{1}{3} \delta_{ij} \langle \bar{q}q \rangle \neq 0 \quad (14.21)$$

Напомним, что за счет этой величины происходит спонтанное нарушение $SU(3)$ -симметрии, поэтому она не может быть равной нулю.

Теперь мы можем посчитать тот же самый производящий функционал, используя макроскопическую теорию голдстоуновских бозонов. Получим этот функционал как функциональный интеграл по полям U

$$Z[s, p] = \int D[U] e^{iS_{\chi=0} + i \int d^4x \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr}[U \chi^+ + U^+ \chi]} \quad (14.22)$$

Напомним, что

$$\chi = 2B_0 (s + ip) \quad (14.23)$$

Возьмем вариационную производную по s_{ij}

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta s_{ij}} Z \Big|_{s=p=0} = \frac{F_\pi^2}{4} 2B_0 \underbrace{\langle 0 | U_{ij} + U_{ij}^+ | 0 \rangle}_{2\delta_{ij}} \quad (14.24)$$

Приравняем только что полученную вариационную производную с производной (14.21), полученной по микроскопической теории. отсюда получаем

$$B_0 = -\frac{1}{3F_\pi^2} \langle \bar{q}q \rangle \quad (14.25)$$

Таким образом, константа B_0 , которая входит в лагранжиан киральной теории возмущений, фактически определяется кварковым конденсатом.

Посмотрим, что будет, если в качестве источников подставить массы кварков

$$s_{ij} = \delta_{ij} m_j \quad (14.26)$$

$$p_{ij} = 0 \quad (14.27)$$

Подставим (14.26)-(14.27) в лагранжиан. Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} [\partial_\mu U^+ \partial_\mu U] + \frac{F_\pi^2}{4} 2B_0 \delta_{ij} m_i (U_{ji} + U_{ji}^+) \quad (14.28)$$

во втором слагаемом в круглых скобках стоит матрица, которую можно разложить в низших порядках по полям. Напомним, что

$$U = \exp \left[\frac{2i}{F_\pi} \varphi^a t^a \right] \quad (14.29)$$

Мы можем разложить эту матрицу в низшем порядке по своим полям. Члены, не зависящие от полей, нас не интересуют, линейные по полям члены сократятся. В результате останется член, квадратичный по полям, который умножается на некоторую константу размерности квадрата массы. Эта константа определяется B_0 и массами кварков. Таким образом, теория возмущений по источникам дает нам массы мезонов. В результате мы получаем связь между массами мезонов и массами кварков в микроскопической теории.

Отметим, что в микроскопической теории у нас есть три массы кварков m_u, m_d, m_s . В киральной теории появляется параметр B_0 . Из эксперимента можно получить массы мезонов $\pi^0, \pi^\pm, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$.

Обобщение киральной теории возмущений

Киральную теорию возмущений можно обобщать в нескольких направлениях.

1. Можно добавлять следующие порядки по производным ∂_μ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \dots \quad (14.30)$$

Где \mathcal{L}_2 соответствует построенному выше выражению

$$Tr [\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U] \quad (14.31)$$

2. Можно добавлять взаимодействия кварков (ранее мы добавили в теорию массы кварков). Например, можно добавить взаимодействие с калибровочными полями. Соответственно, в микроскопической теории мы имеем лагранжиан вида

$$\mathcal{L}_{int} = -\bar{q} (s + i\gamma^5 p) q + \bar{q}\gamma^\mu (v_\mu + i\gamma^5 a_\mu) q \quad (14.32)$$

Здесь мы добавили к скалярным и псевдоскалярным источникам векторные источники (второе слагаемое).

Используя те же самые симметричные соображения, можно построить теорию в низших порядках по источникам и тем самым описать взаимодействия голдстоуновских полей с калибровочными полями.

Например, в качестве поля v можно взять электромагнитное поле. Тогда лагранжиан ("наивно") можно построить следующим образом

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{4} Tr [D_\mu U^\dagger D_\mu U] \quad (14.33)$$

то есть, мы заменили производные на ковариантные и тем самым получили взаимодействие с электромагнитным полем.

Отметим, что из всего набора мезонов, с электромагнитным полем будут взаимодействовать только заряженные. Если расписать выражение в квадратных скобках в (14.33), то получим

$$D_\mu \varphi D_\mu \varphi : D_\mu \pi^+ D_\mu \pi^- \quad (14.34)$$

то есть ковариантные производные появляются только у заряженных полей.

Однако, здесь возникает следующий вопрос. Как известно, основная мода распада π^0 – два фотона

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad (14.35)$$

Как мы сказали ранее, так как π^0 – нейтральная частица, добавление ковариантной производной не добавит ему электромагнитных взаимодействий.

Терминологическое замечание (гипотеза о частичном сохранении аксиального тока)

Ранее мы рассматривали матричный элемент аксиального тока

$$\langle 0 | J^{\mu 5a}(x) | \phi^b, p \rangle = i p^\mu F_\pi \delta^{ab} e^{-ipx} \quad (14.36)$$

Возьмем дивергенцию этого равенства

$$\langle 0 | \partial_\mu J^{\mu 5a}(x) | \phi^b, p \rangle = p^2 F_\pi \delta^{ab} e^{-ipx} \quad (14.37)$$

Соответственно, если симметрия точная, то $p^2 = 0$. С другой стороны, если симметрия неточная, то

$$p^2 = m_\pi^2 \quad (14.38)$$

в случае $a = 1, 2, 3$.

Тогда дивергенция тока – некоторый скалярный оператор. Таким образом, (14.37) дает некоторое число, которое можно записать в виде

$$\langle 0 | \partial_\mu J^{\mu 5a} | \phi^b, p \rangle = m_\pi^2 F_\pi \underbrace{\langle 0 | \phi^a(x) | \phi^b, p \rangle}_{\delta^{ab} e^{-ipx}} \quad (14.39)$$

Иногда указанное равенство матричных элементов транслируют в равенство операторов. Предположим, что

$$\partial_\mu J^{\mu 5a} = m_\pi^2 F_\pi \phi^a \quad (14.40)$$

Тогда из указанного предположения (14.40) будет следовать равенство типа (14.39). Обратное, вообще говоря, неверно. Это равенство называют гипотезой о частичном сохранении аксиального тока. Частичное сохранение связано с тем, что правая часть (14.40) отлична от нуля.

Вернемся к распаду типа (14.35). Выясним, какой ток соответствует π^0 . Для этого нужно вспомнить, где в матрице расположен π^0 . Напомним, что матрица голдстоуновских бозонов имеет вид

$$U(x) = \exp\left(\frac{2i}{F_\pi} \varphi^a t^a\right) \quad (14.41)$$

Ранее мы получили выражение для матрицы

$$\sqrt{2} \varphi^a t^a = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (14.42)$$

Таким образом, за π^0

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad (14.43)$$

отвечает ток

$$J^{\mu 53} = \bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 t^3 q \quad (14.44)$$

Его можно расписать через кварки. Здесь

$$t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.45)$$

Теперь учтем электромагнитное взаимодействие. Также учтем, что для дивергенции тока справедливо

$$\partial_\mu J^{\mu 53} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \frac{1}{2} (Q_u^2 - Q_d^2) N_c = -\frac{e^2 N_c}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \quad (14.46)$$

Отметим, что этот ток соответствует преобразованиям кварков типа

$$q \rightarrow e^{i\alpha t^3 \gamma^5} q \quad (14.47)$$

Сделаем следующее предположение. Пусть параметр преобразования зависит от координат

$$\alpha = \alpha(x) \quad (14.48)$$

Будет ли в этом случае действие инвариантным относительно преобразований? Вообще говоря, нет, так как у нас есть член типа

$$i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q \quad (14.49)$$

Соответственно, при преобразовании типа (14.47) действие преобразуется следующим образом

$$S \xrightarrow{\alpha \ll 1} S - \int d^4x \partial_\mu \alpha \underbrace{\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 t^3 q}_{J^{\mu 53}} \stackrel{1}{=} S + \int d^4x \alpha(x) \partial_\mu J^{\mu 53}(x) \quad (14.50)$$

$\stackrel{1}{=}$ – учтем, что в добавке, которая появляется после учета всех предположений, в явном виде появляется ток $J^{\mu 53}$. Проинтегрируем по частям

Отметим, что здесь мы считаем α бесконечно малым преобразованием.

Итак, фактически мы произвели в действии вариацию полей типа (14.47). Действие получило добавку, присутствующую в (14.50). Предположим, что мы берем вариацию действия на уравнение движения. В этом случае добавка должна обратиться в ноль:

$$S \xrightarrow{\alpha \ll 1} S + \underbrace{\int d^4x \alpha(x) \partial_\mu J^{\mu 53}(x)}_{=0} \quad (14.51)$$

Поскольку это должно выполняться для любых α , то

$$\partial_\mu J^{\mu 53} = 0 \quad (14.52)$$

Это стандартный вывод теоремы Нетер. Однако, мы знаем, что эта теорема не работает в квантовой теории, так как есть аномалии.

Аномалия говорит о том, что на самом деле мы неправильно записали вариацию действия. Настоящее квантовое действие преобразуется по-другому. Это преобразование можно найти, используя функциональный интеграл. Мы же попробуем догадаться, как преобразуется действие, воспользовавшись найденным ответом для аномалии.

Мы знаем, что в результате вариации действия должно получиться уравнение для аномалии. То есть, правильное квантовое действие должно преобразовываться следующим образом

$$S^{\text{квант}} \rightarrow S^{\text{квант}} + \int d^4x \alpha(x) \left[\partial_\mu J^{\mu 53} + \frac{e^2 N_c}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \right] \quad (14.53)$$

Если у квантового действия будет такая вариация, то на уравнениях движения эта добавка должна обращаться в ноль. Поскольку это должно выполняться для любых α , мы получаем уравнение для аномалии.

Это означает, что даже при постоянных α действие преобразуется нетривиально. При $\alpha = \text{const}$

$$S^{\text{квант}} \rightarrow S^{\text{квант}} + \alpha \int d^4x \frac{e^2 N_c}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \quad (14.54)$$

Итак, мы выяснили, как преобразуется действие при бесконечно малых киральных преобразованиях (14.47). Перейдем в теорию голдстоуновских бозонов. Потребуем, чтобы в этом случае действие получало такую же добавку при преобразовании. Нам известно, как преобразуется поле

$$U \rightarrow \omega_L U \omega_R^\dagger \quad (14.55)$$

Из (14.47) видно, что

$$q_L \rightarrow e^{-i\alpha t^3} q_L \quad (14.56)$$

$$q_R \rightarrow e^{i\alpha t^3} q_R \quad (14.57)$$

так как

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.58)$$

Поэтому

$$\omega_L = e^{-i\alpha t^3} \quad (14.59)$$

$$\omega_R = e^{i\alpha t^3} \quad (14.60)$$

Как мы показали ранее, генератор t^3 отвечает за π^0 . Поэтому указанное преобразование приведет к изменению поля π^0 .

Напомним

$$U = \exp \left[\frac{2i}{F_\pi} \varphi^a t^a \right] \quad (14.61)$$

где

$$\varphi^a t^a = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi^0}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.62)$$

Поэтому закон преобразования поля π^0 имеет вид

$$\exp \left(\frac{i}{F_\pi} \begin{pmatrix} \pi^0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \exp \left(-\frac{i\alpha}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \exp \left(\frac{i}{F_\pi} \begin{pmatrix} \pi^0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{i\alpha}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (14.63)$$

Таким образом, π^0 преобразуется сдвигом, как и положено голдстоуновским полям

$$\pi^0 \rightarrow \pi^0 - \alpha F_\pi \quad (14.64)$$

Нам известно, что при таком преобразовании действие должно приобретать добавку типа (14.54). Таким образом, к действию, описывающему голдстоуновские поля, нужно добавить следующее слагаемое

$$\Delta S = - \int d^4x \frac{e^2 N_c}{96\pi^2 F_\pi} \pi^0 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \quad (14.65)$$

Таким образом, мы получили эффективное взаимодействие нейтрального пиона с электромагнитным полем, к которому приводит аномалия. Это и есть тот самый лагранжиан

взаимодействия, который описывает распад

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma \quad (14.66)$$

Заметим, что ширина этого распада явным образом зависит от числа цветов N_c . Таким образом, время жизни напрямую зависит от числа цветов.

Заметим, что F_π можно получить экспериментально из распада

$$F_\pi : \quad \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad (14.67)$$

Во всем описанном можно углядеть проблему, связанную с киральной теорией возмущений. Вообще говоря, когда мы строили киральную теорию возмущений, мы не получали слагаемое типа (14.65). Рассмотрим преобразования, соответствующие закону сохранения заряда. Введем матрицу из зарядов кварков

$$Q = \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (14.68)$$

Тогда преобразование

$$q \rightarrow e^{i\alpha Q} q \quad (14.69)$$

есть преобразование из группы $U(1)$; оно соответствует закону сохранения заряда.

Заметим, что след матрицы (14.68) равен нулю. Значит, это подгруппа преобразований $SU(3)_v$.

Перейдем в теорию голдстоуновских бозонов. Мы наивно ожидаем, что U преобразуется следующим образом

$$U \rightarrow U + i\alpha [Q, U] \quad (14.70)$$

Чтобы сделать эти преобразования ковариантными, нужно обычные производные заменить на ковариантные

$$\partial_\mu U \rightarrow D_\mu U = \partial_\mu U + e [Q, U] A_\mu \quad (14.71)$$

Понятно, что здесь нет полностью антисимметричного тензора $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$.

Вернемся к киральной теории в низшем порядке по импульсам

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi}{4} Tr [\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U] + \dots \quad (14.72)$$

Какие симметрии есть у этого лагранжиана? Мы строили этот лагранжиан, потребовав выполнения некоторых симметрий. Однако, нужно проверить, какие симметрии оказались у этого лагранжиана.

1. Имеет место симметрия

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \quad (14.73)$$

так как ее выполнения мы потребовали явно при построении.

$$U \rightarrow \omega_L U \omega_R^\dagger \quad (14.74)$$

2. Понятно, что имеет место симметрия

$$U \rightarrow U^T \quad (14.75)$$

Если внимательно приглядеться к виду U и ее выражению через физические поля, можно понять, что эта симметрия соответствует

$$\pi^+ \leftrightarrow \pi^- \quad (14.76)$$

$$K^+ \leftrightarrow K^- \quad (14.77)$$

$$K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0 \quad (14.78)$$

Таким образом, это C -четность.

3. Имеет место симметрия типа

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \quad (14.79)$$

В этом случае

$$U \rightarrow U \quad (14.80)$$

Это симметрия типа четности. Назовем ее симметрией P_0 .

4. Имеет место симметрия

$$U \rightarrow U^{-1} \quad (14.81)$$

Она отвечает

$$\phi \rightarrow -\phi \quad (14.82)$$

Таким образом, это четность на языке полей. Сохраняющейся величиной здесь является $(-1)^{N_B}$.

5. Известно, что голдстоуновские бозоны являются псевдоскалярами. Таким образом, истинной симметрией являются не симметрии типа 3-4, а их комбинация. Таким образом, имеет место симметрия, при которой

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \quad (14.83)$$

одновременно с

$$\phi \rightarrow -\phi \quad (14.84)$$

Это и есть истинная P -четность. Таким образом,

$$P = P_0 (-1)^{N_B} \quad (14.85)$$

Получается, что мы построили теорию, в которой есть лишняя симметрия (лишний закон сохранения). Мы показали это с теоретической точки зрения. Также этот факт можно показать с феноменологической точки зрения. Например, векторный мезон ϕ (нейтральная частица со спином $J = 1$) может распадаться на два каона

$$\phi^0 \rightarrow K^+ K^- \quad (14.86)$$

и, одновременно с этим может происходить распад на три π -мезона

$$\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad (14.87)$$

причем оба распада происходят за счет сильных взаимодействий.

Другими словами, сильное взаимодействие допускает переход четное в нечетное в голдстоуновских бозонах. Значит, закона сохранения типа 4 быть не может.

Итак, мы построили теорию, в которой есть лишний закон сохранения. Попробуем понять, что нужно сделать, чтобы построить правильную теорию. Напишем уравнение движения для данной теории

$$\frac{F_\pi^2}{2} \partial_\mu (U^+ \partial_\mu U) = 0 \quad (14.88)$$

Эти уравнения можно вывести, добавив соответствующий множитель Лагранжа (так как мы работаем с системой со связью).

Что нужно сделать, чтобы только комбинация четностей типа

$$P = P_0 (-1)^{N_B} \quad (14.89)$$

являлась истинной симметрией? Что нужно добавить в лагранжиан или уравнение движения, чтобы нарушить, например, P_0 -четность? Понятно, что нужно добавить что-то, пропорциональное полностью антисимметричному тензору, так как он и нарушает эту "наивную" P_0 -четность. На уровне уравнения движения можно поступить следующим образом. Модифицируем уравнения, добавив некоторую константу

$$\frac{F_\pi^2}{2} \partial_\mu (U^+ \partial_\mu U) + \lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (U^+ \partial_\mu U) (U^+ \partial_\nu U) (U^+ \partial_\lambda U) (U^+ \partial_\rho U) = 0 \quad (14.90)$$

Здесь мы учитываем, что должен получиться скаляр, причем он должен ковариантно

преобразовываться относительно группы симметрий (14.73). Поэтому во втором слагаемом появляются множители типа $(U^+ \partial U)$.

Получили единственный скаляр, который содержит ϵ -символ, причем все уравнение ковариантно относительно преобразований (14.73).

Утверждение

Не существует действия вида

$$\int d^4x \mathcal{L} \quad (14.91)$$

которое приводило бы к вкладу в уравнения движения типа (14.90).

Лекция 15. Проблема лишней симметрии в киральной теории возмущений

Киральная теория возмущений (продолжение)

На прошлой лекции мы установили, что существует лишняя симметрия. Лагранжиан киральной теории возмущений в низшем порядке по импульсам

$$\mathcal{L}_{ChPT} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} [\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U] + \dots \quad (15.1)$$

Согласно наивному рассуждению, существует две сохраняющиеся величины: $(-1)^{N_B}$ и P_0 – наивная четность:

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \quad (15.2)$$

$$\phi \rightarrow \phi \quad (15.3)$$

Как мы показали, нам нужно, сохранялось произведение этих величин. Однако, в лагранжиан такого типа нельзя добавить слагаемое, которое бы решило проблему.

С другой стороны, на уровне уравнений движения проблема решается: в старших порядках по импульсам можно добавить слагаемое, содержащее полностью антисимметричный тензор ϵ

$$0 = \frac{F_\pi^2}{2} \partial_\mu (U^\dagger \partial_\mu U) + \lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} U^\dagger \partial_\mu U \partial_\nu U U^\dagger \partial_\lambda U U^\dagger \partial_\rho U \quad (15.4)$$

Такая модификация уравнений движения приводит к тому, что сохраняется произведение указанных величин, при этом по отдельности они уже не будут сохраняться.

Вспомогательная задача

Рассмотрим пример, иллюстрирующий указанную проблему. Рассмотрим частицу, движущуюся на сфере единичного радиуса. Рассмотрим действие

$$S = \int dt \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - \lambda \int dt (x_i x_i - 1) \quad (15.5)$$

Сфера задается уравнением

$$x_i x_i = 1 \quad (15.6)$$

Отсюда получаем уравнения движения

$$-m\ddot{x}_i - \lambda x_i = 0 \quad (15.7)$$

Найдем отсюда λ . Для этого свернем указанное уравнение с x_i . Получим

$$-mx_i\ddot{x}_i - \lambda = 0 \quad (15.8)$$

Продифференцируем (15.6) по времени

$$x_i\dot{x}_i = 0 \quad (15.9)$$

Полученное равенство (15.9) продифференцируем по времени еще раз

$$x_i\ddot{x}_i + \dot{x}_i^2 = 0 \quad (15.10)$$

Учитывая (15.10) и (15.8), получаем

$$\lambda = m\dot{x}_i^2 \quad (15.11)$$

Таким образом, на самом деле уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x}_i + m(\dot{x}_k^2)x_i = 0 \quad (15.12)$$

Какие симметрии есть у этого уравнения движения?

1. Очевидно, имеют место симметрии вида

$$t \rightarrow -t \quad (15.13)$$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} \quad (15.14)$$

2. С другой стороны,

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \quad (15.15)$$

$$t \rightarrow t \quad (15.16)$$

Решим следующую задачу. Построим такую теорию, в которой сохраняется только комбинация этих симметрий, но не каждая из них по отдельности. Потребуем, чтобы на самом деле имело место только одна симметрия вида

$$t \rightarrow -t \quad (15.17)$$

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \quad (15.18)$$

Заметим, что этого эффекта можно легко добиться, если модифицировать уравнение следующим образом. В правую часть равенства (15.12) добавим слагаемое с ϵ_{ijk}

$$m\ddot{x}_i + m\dot{x}_k^2 x_i = \epsilon_{ijk}\dot{x}_j x_k \quad (15.19)$$

Понятно, что это слагаемое будет нарушать каждую из симметрий по отдельности, причем комбинация из указанных симметрий будет сохраняться. Однако, в действии нельзя указать такое слагаемое, которое сгенерирует новое слагаемое в уравнении движения (15.19). Наивно можно попытаться добавить в действие слагаемое типа

$$\epsilon_{ijk} x_i \dot{x}_j x_k \quad (15.20)$$

Однако оно будет равно нулю после свертки с ϵ_{ijk} .

Вообще говоря, указанные действия соответствуют добавлению в уравнение движения силы Лоренца, которая действует на заряд:

$$[\vec{v}, \vec{B}] \quad (15.21)$$

где магнитное поле

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (15.22)$$

А это не что иное, как поле монополя. Таким образом, добавив слагаемое в (15.19), мы поместили в центр сферы монополь.

Способы решения проблемы

Вернемся к исходной задаче. Попробуем составить такое действие, которое после вариации дает нужное уравнение движения (15.4).

1. Для удобства рассуждения будем работать в евклидовом пространстве. Будем рассматривать поля, которые на бесконечности стремятся к единичным (к вакууму)

$$U(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \mathbb{1} \quad (15.23)$$

Другими словами, всю пространственную бесконечность можно отождествить. Таким образом, мы работаем с пространством \mathbb{R}^4 с отождествленной бесконечностью. Это эквивалентно $\sim S^4$.

Рассмотренные поля реализуют отображения

$$U(x) : S^4 \rightarrow SU(3) \quad (15.24)$$

Поэтому

$$\pi_4(SU(3)) = 0 \quad (15.25)$$

Это означает, что все эти отображения непрерывным образом связаны друг с другом.

Также имеет место свойство

$$\pi_5(SU(3)) = \mathbb{Z} \quad (15.26)$$

Итак, свойство типа (15.25) означает, что существует функция $U(x, s)$, где $x \in \mathbb{R}^4$, s – некоторый параметр $s \in [0, 1]$, описывающий непрерывную деформацию. Причем параметр обладает свойствами

$$U(x, s = 0) = U(x) \quad (15.27)$$

$$U(x, s = 1) = \mathbb{1} \quad (15.28)$$

Итак, вместо функции четырех переменных мы образовали функцию пяти переменных. Значит, эта функция определена на некотором пятимерном многообразии. Элемент этого пятимерного многообразия обозначим через

$$y = (x, s) \quad (15.29)$$

После такого продолжения получаем функцию $U(y)$.

Также будем учитывать, что утверждение типа (15.25) эквивалентно тому, что выражение $U(x)$, определенное на сфере, можно непрерывно продолжить внутрь этой сферы при условии тривиальности этого выражения. Таким образом, можно $U(x)$ непрерывно продолжить на диск B^5 . Здесь мы ввели обозначение

$$\partial B^5 = S^4 \quad (15.30)$$

2. Рассмотрим следующую конструкцию

$$\omega(y) = -\frac{i}{240\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\delta} \text{Tr} [U^+ \partial_\mu U \dots U^+ \partial_\delta U] \quad (15.31)$$

Это плотность, определенная на указанном пятимерном многообразии. У этой плотности есть следующие свойства

- (a) Она инвариантна относительно симметрий

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \quad (15.32)$$

- (b) Интеграл

$$\int_{B^5} d^5 y \omega(y) \quad (15.33)$$

есть функционал от $U(y)$. Рассмотрим его как формальное пятимерное действие. Его вариация будет зависеть только от полей на границе. Это важное свойство и позволяет добавить $\omega(y)$ в действие нашей эффективной теории возмущений.

Таким образом, действие киральной теории возмущений может содержать слагаемое

типа

$$S_{ChPT} \ni n \int d^5 y \omega(y) = S_{WZW} \quad (15.34)$$

3. Распишем это слагаемое, расписав ω в первом нетривиальном порядке по полям. Учтем

$$U = \exp\left(\frac{2i}{F_\pi} \varphi\right) \quad (15.35)$$

где

$$\varphi = \varphi^a t^a \quad (15.36)$$

Соответственно, в низшем порядке по полям

$$U^+ \partial_\mu U = \frac{2i}{F_\pi} \partial_\mu \varphi + O(\varphi^2) \quad (15.37)$$

Подставим указанные выражения в (15.31)

$$\begin{aligned} \omega(y) &= -\frac{i}{240\pi^2} \left(\frac{2i}{F_\pi}\right)^5 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\delta} \text{Tr} [\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \partial_\lambda \varphi \partial_\rho \varphi \partial_\delta \varphi] = \\ &= \frac{2}{15\pi^2 F_\pi^5} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\delta} \partial_\mu \text{Tr} [\varphi \partial_\nu \varphi \partial_\lambda \varphi \partial_\rho \varphi \partial_\delta \varphi] \end{aligned} \quad (15.38)$$

Подставим полученное выражение в (15.34)

$$\begin{aligned} S_{WZW} &= \int d^5 y \frac{2}{15\pi^2 F_\pi^5} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\delta} \partial_\mu \text{Tr} [\dots] \stackrel{1}{=} \\ &= \int d^4 x \frac{2}{15\pi^2 F_\pi^5} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} [\varphi \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \partial_\rho \varphi \partial_\lambda \varphi] \end{aligned} \quad (15.39)$$

$\stackrel{1}{=}$ – интегрируем по частям.

Видно, что полученное выражение удовлетворяет поставленным нами требованиям: оно содержит ϵ -символ и пять голдстоуновских полей. Таким образом, оно не сохраняет четность.

Отметим, что в действие это слагаемое добавляется с некоторой константой n :

$$S_{ChPT} = n \int d^5 y \omega(y) \quad (15.40)$$

Проблематика неоднозначности построения $\omega(y)$

Отметим, что в наших рассуждениях было сделано продолжение многообразия S^4 на B^5 . Понятно, что это можно сделать разными способами. Дают ли эти разные способы разную квантовую теорию? Чтобы убедиться, что мы будем получать ту же самую теорию, нужно проверять равенства функциональных интегралов

$$\int D[U(x)] e^{iS+in \int_{B^5} d^5y \omega[U(y)]} \quad (15.41)$$

В случае другого продолжения полей на B^5 подфункциональное выражение будет иметь вид

$$e^{iS+in \int d^5y \omega[U'(y)]} \quad (15.42)$$

Отметим, что в функциональном интеграле мы интегрируем только по физическим полям. Таким образом, нужно проверить

$$e^{i \int_{B^5} d^5y \omega[U(y)] - in \int_{B^5} d^5y \omega[U'(y)]} = e^{i \int_{B^5 \cup B'^5} dy \omega[U(y)]} = e^{2\pi i n k} \stackrel{!}{=} 1 \quad (15.43)$$

где

$$S^5 = B^5 \cup B'^5 \quad (15.44)$$

Отметим, что

$$U(y) : S^5 \rightarrow SU(3) \quad (15.45)$$

Эта гомотопическая группа нетривиальна, поэтому

$$\pi_5(SU(3)) = \mathbb{Z} \quad (15.46)$$

Более того, соответствующее топологическое число есть не что иное, как интеграл

$$k = \int_{B^5 \cup B'^5} dy \omega[U(y)] \quad (15.47)$$

$\stackrel{!}{=}$ – накладываем требование равенства единице, чтобы функциональные интегралы были равны. Отметим, что это равенство должно выполняться для любых k . Как следствие, n должно быть целым числом. Только в этом случае соответствующие квантовые теории будут самосогласованными (не будут зависеть от того, как поле продолжено на диск).

Теперь осталось понять, чему равно число n . Итак, у нас есть действие

$$S_{WZW} = in \int_{B^5} d^5y \omega [U(y)], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (15.48)$$

Схема определения n

1. Калибруем S_{WZW} относительно $U(1)_{э/м}$. Указанная симметрия отвечает преобразованию

$$U \rightarrow U + i\epsilon [Q, U] \quad (15.49)$$

с генератором

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (15.50)$$

Пока что такое преобразование является глобальным преобразованием в указанной симметрии. Нам хочется сделать это преобразование локальным и добавить взаимодействие с электромагнитным полем.

Наивно можно добавить ковариантных производных. Однако это не сработает, так как в низшем порядке по полям действие имеет вид

$$S_{WZW} \propto \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} Tr [\varphi \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \partial_\lambda \varphi \partial_\rho \varphi] \quad (15.51)$$

При этом преобразования типа (15.49) являются сдвигами. То есть они эквивалентны

$$\varphi \rightarrow \varphi + \# \epsilon \quad (15.52)$$

Но в (15.51) есть кусок без производной, который не является инвариантным относительно сдвигов.

2. Вспомним обычную теорию с одним фермионом

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (15.53)$$

Мы хотим добавить калибровочно-инвариантное взаимодействие относительно преобразования

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi \quad (15.54)$$

Понятно, что вариация лагранжиана имеет вид

$$\delta \mathcal{L} = -\partial_\mu \alpha \underbrace{\bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{j^\mu} \quad (15.55)$$

Отсюда получаем ток. Далее добавляем в (15.53) взаимодействие с током

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + j^\mu A_\mu \quad (15.56)$$

причем A_μ должно преобразовываться так, чтобы слагаемое (15.55) сокращалось

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad (15.57)$$

Применим указанную схему. На первом шаге преобразуем поле

$$U \rightarrow U + \alpha(x) [Q, U] \quad (15.58)$$

Подставляем его в действие. Вариация этого действия имеет следующую структуру

$$\delta S_{WZW} = \int d^4x \partial_\mu \alpha J_{WZW}^\mu \quad (15.59)$$

где ток имеет вид

$$J_{WZW}^\mu = \frac{1}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} [Q \partial_\nu U U^\dagger \partial_\lambda U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger + Q U^\dagger \partial_\nu U U^\dagger \partial_\lambda U U^\dagger \partial_\rho U] \quad (15.60)$$

3. Далее добавляем взаимодействие с током, чтобы устранить вариацию

$$\Delta S = \int d^4x e A_\mu J_{WZW}^\mu \quad (15.61)$$

На самом деле, этого оказывается недостаточно, так как ток (15.60) не является калибровочно инвариантным.

4. Варьируем добавку

$$\int d^4x e A_\mu J_{WZW}^\mu \quad (15.62)$$

и получаем новую добавку.

В результате полной действие приобретает вид

$$S = \int d^4x \left[neA_\mu J_{WZW}^\mu + i \frac{ne^2}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\nu A - \lambda \cdot A_\rho \times \right. \\ \left. \times Tr \left(2Q^2 (U\partial_\mu U^+ - U^+\partial_\mu U) - QU^+Q\partial_\mu U + QUQ\partial_\mu U^+ \right) \right] \quad (15.63)$$

Отсюда можно найти член взаимодействия пиона с фотонами

$$\pi^0 \epsilon FF \quad (15.64)$$

Отсюда и получаем константу $n = 3$.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ