



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ПЯТАКОВ  
АЛЕКСАНДР ПАВЛОВИЧ

---

ФИЗФАК МГУ

---

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**БЕЛОВА МИХАИЛА АНАТОЛЬЕВИЧА**



## Содержание

<b>Лекция 1. Основные определения</b> .....	6
Главные понятия.....	6
Предмет теории колебаний.....	6
Модель Вольтерра-Лотки.....	7
Реакция Белоусова-Жаботинского.....	9
История теории колебаний.....	10
Фазовое пространство. Фазовый портрет.....	10
Особые точки фазового пространства.....	11
<b>Лекция 2. Типы особых точек на фазовых портретах консервативных и диссипативных систем</b> .....	13
Консервативные системы.....	13
Роль начальных условий.....	14
Диссипативные системы.....	18
<b>Лекция 3. Метод гармонического баланса</b> .....	21
Диссипативные системы и типы особых точек. Продолжение.....	21
Неизохронность колебаний нелинейных систем. Метод гармонического баланса.....	22
Метод последовательных приближений.....	23
Построение фазовых траекторий методом изоклин.....	24
Метод поэтапного построения.....	25
<b>Лекция 4. Резонанс при вынужденных колебаниях в нелинейных системах</b> .....	27
Системы под внешним воздействием.....	27
Вынужденные колебания в нелинейных системах.....	28
<b>Лекция 5. Адиабатические инварианты</b> .....	32
Адиабатически медленное изменение параметров.....	32
Адиабатический инвариант математического маятника.....	32
Адиабатический инвариант струны.....	34
Инварианты и земная орбита.....	35
Движение заряженных частиц в неоднородном магнитном поле Земли.....	36
Оптический микрорезонатор.....	37
<b>Лекция 6. Колебания в системах с быстро меняющимися параметрами</b> .....	38
Движение систем с быстро меняющимися параметрами.....	38

Движение заряженных частиц в быстро осциллирующем поле.....	40
Фигуры Хладни.....	40
Лазер на свободных электронах.....	41
Удержание магнитных наночастиц.....	42
<b>Лекция 7. Параметрический резонанс.....</b>	<b>43</b>
Параметрическое воздействие с частотами, соизмеримыми с частотой колебания системы.....	43
Параметрический резонанс в линейной системе.....	45
Система с малой нелинейностью.....	47
Вынужденные колебания в параметрически регенерируемой системе.....	47
<b>Лекция 8. Метод медленно меняющихся амплитуд.....</b>	<b>49</b>
Одноконтурный параметрический усилитель.....	49
Метод медленного меняющихся амплитуд (ММА).....	50
ММА: рассмотрение устойчивости стационарных состояний.....	51
Применение метода ММА.....	51
<b>Лекция 9. Элементы теории автоколебаний.....</b>	<b>53</b>
Метод ММА с медленно меняющейся амплитудой и фазой.....	53
Автоколебания. Общие определения.....	53
Применение ММА в случае автоколебательных систем томсоновского типа.....	55
<b>Лекция 10. Автоколебания: мягкий и жесткий режим в томсоновских системах. Системы релаксационного типа.....</b>	<b>58</b>
Мягкий и жесткий режимы возбуждения колебаний.....	58
Автоколебательные системы релаксационного типа.....	60
<b>Лекция 11. Внешнее воздействие на автоколебательные системы. Синхронизация автоколебаний.....</b>	<b>63</b>
Качественное рассмотрение релаксационных автоколебаний методом фазовой плоскости.....	63
Воздействие внешней гармонической силы на автоколебательную систему с одной степенью свободы.....	63
Квадратичная расстройка.....	64
Тушение автоколебаний.....	65
Динамическая система. Фазовое пространство динамической системы.....	66
Динамический хаос.....	66

---

<b>Лекция 12. Динамические системы</b> .....	67
Динамическая система. Фазовое пространство .....	67
Устойчивость движения .....	67
Простые и странные аттракторы .....	68
Примеры систем с динамическим хаосом .....	69
Зависимость движения систем с регулярной и стохастической динамикой от начальных условий .....	70
Отображение Пуанкаре.....	71
Признаки стохастической динамики.....	71

## Лекция 1. Основные определения

### Главные понятия

Для начала обратимся к «Википедии», чтобы узнать, как определяется понятие колебаний.

**Колебания** – повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия.

Выражение «в той или иной степени» немного обескураживает. И теперь если обратиться к более достоверному источнику, Физической энциклопедии, то можно найти там следующее определение.

**Колебания** – движения или состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Наблюдается закономерность в использовании фразы «той или иной степени», что, вероятно, неспроста. И если проводить опыт с маятником, то будет видно, что его движения будут не точно повторяться во времени. Более того, нам известно, что у классического маятника колебания затухают со временем (Рис.1.1).

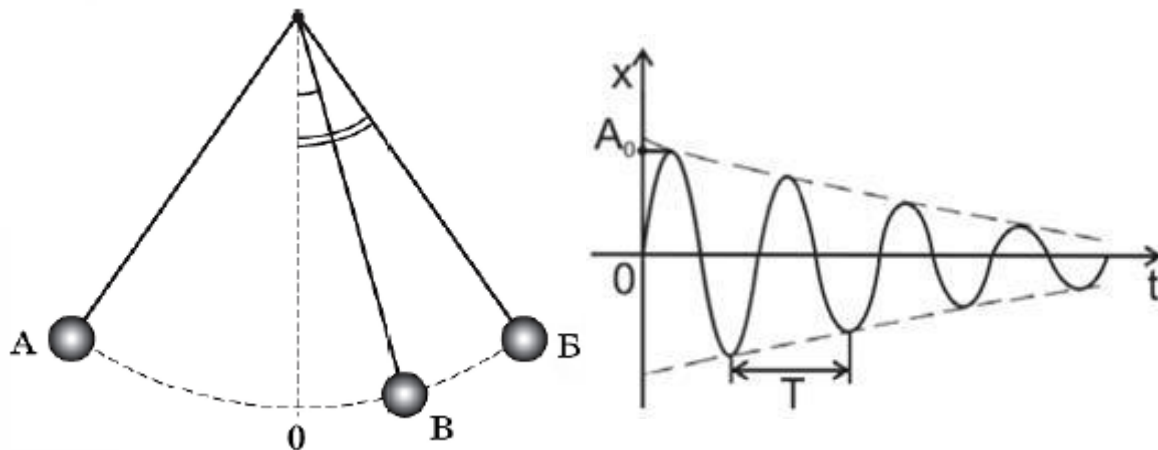


Рис.1.1. Колебания маятника. Периоды колебаний.

То есть эти процессы повторяются действительно в той или иной степени. Так что более строгого определения дать не получается.

### Предмет теории колебаний

Понятно, что математический маятник не исчерпывает всего разнообразия колебательных явлений. Они могут быть разной природы и наблюдаться в разных областях. Например, колебания курсов валют на бирже. Что касается экономики, то здесь можно вспомнить о цикличности её развития. Периоды быстрого развития сменяются кризисом, потом стагнацией. Такие кризисы в среднем происходят каждые 100-120 месяцев.

В случае более глобального рассмотрения (периоды в 45-60 лет) выделяют циклы российского экономиста Николая Кондратьева, которые связаны с развитием технологий (Рис.1.2).



Рис.1.2. Циклы Николая Кондратьева.

В данный момент (2021 год) мы находимся на излете электронной эволюции. Кажется, что это печально, так как мы оказались в яме, но на самом деле это означает, что должна рождаться новая технология, то есть минимум цикла является самой интересной фазой.

Теперь можно рассмотреть LC-контур (Рис.1.3). Примечательно, что мы сталкиваемся с таким контуром каждый день.

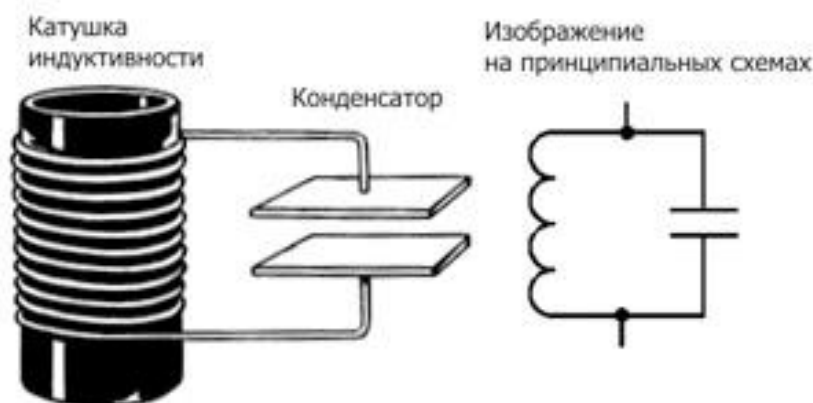


Рис.1.3. LC-контур.

Так, например, RFID метка как раз и состоит из LC-контура. Кроме того контур можно встретить в планшетах, телефонах и т.д. Для работы гироскопа в корпус устройства встроены миниатюрные маятники, сделанные из кремния.

То есть маятники и другие колебательные системы практически везде, что дает нам возможность рассматривать их с общей закономерностью.

### Модель Вольтерра-Лотки

Колебательные процессы происходят также и в экологических системах. Это заметил итальянский математик В.Вольтерра в беседе со своим коллегой зоологом. Он сообщил ему интересный факт. Из-за Перовой мировой войны вылов рыб резко

снизился, но когда война была закончена, то в вылове было необычно много хищных рыб, что является несколько парадоксальным фактом. Вольтерра построил модель, в результате которой получалось, что популяция хищников и жертв осциллируют, причем с некоторой фазовой задержкой относительно друг друга.

Давайте рассмотрим данную модель на примере зайцев и рысей. Первое уравнение отображает скорость изменения количества зайцев. Первое его слагаемое отвечает за положительную обратную связь между количеством зайцев. Второе отвечает за убыль популяции, которое будет пропорционально количеству рысей, помноженное на количество зайцев (то есть вероятность их встречи). Теперь обратимся ко второму уравнению системы для рысей. Здесь обратная закономерность, так как рыси являются конкурентами друг другу. И второе слагаемое подобно слагаемому для зайцев, но с другим знаком. Вид такой системы приведен ниже:

$$\begin{cases} \frac{dN_3}{dt} = \alpha_1 N_3 - \beta_1 N_p N_3 \\ \frac{dN_p}{dt} = -\alpha_2 N_p + \beta_2 N_p N_3 \end{cases}$$

Условия равновесия заключаются в равенстве нулю производных. Первое уравнение приводит к значению равновесного количества рысей:

$$N_p^0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

И аналогичное для зайцев:

$$N_3^0 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

Теперь общее количество рысей и зайцев будем представлять в виде равновесного значения и малого отклонения от положения равновесия:

$$\begin{aligned} N_p &= N_p^0 + n_p \\ N_3 &= N_3^0 + n_3 \end{aligned}$$

Подставляем наши значения в систему и получаем:

$$\begin{cases} \frac{dn_3}{dt} = -\frac{\beta_1 \alpha_2}{\beta_2} n_p \\ \frac{dn_p}{dt} = \frac{\beta_2 \alpha_1}{\beta_1} n_3 \end{cases}$$

Давайте возьмем производную от первого уравнения, то есть найдем решение относительно отклонения популяции зайцев.

$$\frac{d^2 n_3}{dt^2} = -\frac{\beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1}{\beta_2 \beta_1} n_3 = -\alpha_2 \alpha_1 n_3$$

То есть мы приходим к уравнению колебаний, где в роли частоты выступает значение

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha_2 \alpha_1}$$

Среднее геометрическое дает нам частоту изменения данной популяции.



## Реакция Белоусова-Жаботинского

Казалось бы, что химия далека от теории колебаний, но существует реакция Белоусова-Жаботинского, в которой происходит циклический процесс изменения параметров реакции с образованием сложной пространственно-временной структурой (Рис.1.4).

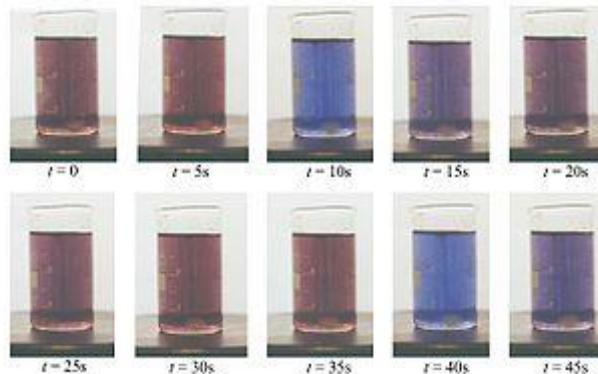


Рис.1.4. Изменение цвета реакционной смеси в реакции Белоусова – Жаботинского с ферроином.

Пусть у нас есть вещество  $A$ , которое превращается в вещество  $B$ . Причем промежуточные стадии данной реакции заключаются в образовании веществ  $X$  и  $Y$ . Именно они являются основой колебаний. Запишем уравнения скоростей образования промежуточных веществ:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = k_1A - k_2XY \\ \frac{dY}{dt} = k_2XY - k_3Y \end{cases}$$

Введем равновесные концентрации и представиме самих концентраций с учетом их приращения:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{k_3}{k_2}, & X &= X_0 + x \\ Y_0 &= \frac{k_1}{k_3}A, & Y &= Y_0 + y \end{aligned}$$

Тогда изменение малых  $x$  и  $y$  будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{k_1k_2}{k_3}Ax - k_3y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{k_1k_2}{k_3}Ax \end{cases}$$

И для второй производной по  $x$  получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_1k_2}{k_3}A \frac{dx}{dt} - k_3 \frac{k_1k_2}{k_3}Ax = -\frac{k_1k_2}{k_3}A \frac{dx}{dt} - k_1k_2Ax$$

То есть получили уравнение колебаний с учетом затухания, где

$$2\delta = \frac{k_1 k_2}{k_3} A, \quad \omega_0^2 = k_1 k_2 A$$

## История теории колебаний

Условно разделим историю колебаний на два потока: линейных и нелинейных колебаний.

Историю линейных колебаний можно начать с эпизода, который произошел с Галилеем. Он скучал на мессе и наблюдал за медленно качавшейся лампадой. После чего заметил, что амплитуда колебаний лампады постепенно уменьшается, но период остается примерно постоянным. Галилей решил, что на этой основе можно сделать часы, но из-за прогрессирующей слепоты до ума свое изобретение он не довел. Это смог сделать Христиан Гюйгенс. Возникает вопрос, почему постоянство периода связано именно с линейными колебаниями? За это отвечает свойство изохронности, про которое мы будем говорить позже.

Следующий шаг был сделан Робертом Гуком. Он изобрел пружину, которая смогла заменить громоздкий маятник на компактный балансир и решить задачу навигации, то есть определения долготы по хронометру.

Разработкой и формализацией теории линейных колебаний занимался Ж.Л.Лагранж. А первый учебник написал Лорд Рэлей. Он включил туда не только механические и акустические колебания, но посвятил отдельную главу электромагнитным колебаниям в LC-контуре.

Теперь обратимся к истории нелинейных колебаний. Кеплер в своем третьем законе описывает отношение периодов обращения планет и их связь с расстоянием до Солнца.

Формализацией и разработкой теории нелинейных колебаний занимались А.М.Ляпунов и Анри Пуанкаре.

Следующей важной вехой является конструирование генератора Ван-дер-Поля. Он был сотрудником фирмы “Phillips”, который смастерил устройство, где могли совершаться стохастические колебания.

Учебник по нелинейным колебаниям был написан основателем кафедры физики колебаний Л.И.Мандельштамом, который первый и читал данный курс.

А.А.Андронов ввел понятие **автоколебаний** – то есть колебаний, которые происходят за счет существования источника энергии в колебательной системе.

## Фазовое пространство. Фазовый портрет

Понятие о фазовом пространстве появилось из прикладной задачи об изображении колебаний.

Давайте представим себе ситуацию, когда график колебаний строится в координатах  $x(t)$ . На первый взгляд это достаточно легко и просто, но проблема возникает тогда, когда при повторении эксперимента появляется новая траектория колебаний. То есть получается, что линии на графике будут пересекаться, что приводит к большим неудобствам.

Тогда придумали следующий трюк. Откладывая по одной координате  $x$ , а по другой ее производную  $\dot{x}$ . Тогда изображение колебаний в таком пространстве показано на Рис.1.5.

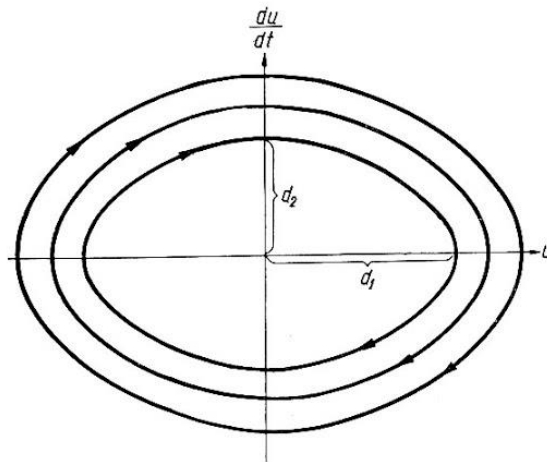


Рис.1.5. Фазовое пространство.

У нас в системе две основные переменные: положение тела и его скорость. Любое состояние системы изображается точкой. При эволюции системы происходит переход от одной точки фазового пространства к другой и получается фазовая траектория.

Если мы хотим рассмотреть системы в целом, то нужно нарисовать много траекторий. Эти картины будут называться **фазовыми портретами**, то есть это все возможные траектории в системе.

Также стоит отметить, что траектория изображается по часовой стрелке, так как в начале производная положительна и координата увеличивается.

Но есть и исключения, когда отображение траектории происходит против часовой стрелки. Вообще, конечно, это зависит от координат системы.

### Особые точки фазового пространства

Пусть у нас есть координаты  $x$  и  $y$  фазового пространства, которые меняются во времени и описываются функциями  $P$  и  $Q$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} P(x^*, y^*) = 0 \\ Q(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

Всякая точка на фазовой плоскости характеризуется двумя координатами, который мы и найдем, приравняв к нулю левые части.

На следующем этапе проведем **линеаризацию**:

$$\begin{cases} x = x^* + \xi \\ y = y^* + \eta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta \end{cases}$$

И теперь ищем решения в виде

$$\xi = C e^{\lambda t}, \quad \eta = B e^{\lambda t}$$

Тогда для производных имеем

$$\begin{cases} 0 = (\lambda - a_{11})C - a_{12}B \\ 0 = (\lambda - a_{22})B - a_{21}C \end{cases}$$

Система будет иметь решение, если ее детерминант равен нулю.

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0$$

Это стандартное квадратное уравнение с двумя решениями, причем в зависимости от значений  $\lambda$  происходит классификация особых точек (Рис.1.6).

Тип корней	Кривая переходного процесса	Фазовый портрет	Тип особой точки
Чисто мнимые			Центр
Комплексные с отрицательной действительной частью			Устойчивый фокус
Комплексные с положительной действительной частью			Неустойчивый фокус
Действительные отрицательные			Устойчивый узел
Действительные положительные			Неустойчивый узел
Действительные разных знаков			Седло

Рис.1.6. Классификация особых точек.

## Лекция 2. Типы особых точек на фазовых портретах консервативных и диссипативных систем

### Консервативные системы

Мы продолжаем рассмотрение колебательных систем с одной степенью свободы. И вводим понятие **консервативных систем** – такие механические системы, при движении в которых сумма их кинетических и потенциальных энергий остаётся постоянной (механическая энергия сохраняется).

Существует важная связь между средней кинетической и потенциальной энергиями при колебательном движении. Она вытекает из теоремы вириала, которую доказал Р.Клаузиус. И вириалом он называл следующую сумму  $\sum_k^N (\vec{F}_k \vec{r}_k)$ , которая равна произведению степени  $n$  на среднюю потенциальную энергию  $U$  с обратным знаком.

$$\sum_k^N (\vec{F}_k \vec{r}_k) = -n \langle U \rangle$$

Здесь под степенью имеется в виду координатная зависимость для потенциальной энергии

$$U \sim x^2$$

Тогда по теореме вириала получаем, что

$$2 \langle T \rangle = n \langle U \rangle$$

А при колебательном движении  $n = 2$ , тогда получается следующее выражение

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle$$

Следствием этой теоремы является закон Дюлонга-Пти. Если мы представим молекулу как шарик, который связан с другими молекулами с помощью пружинок, то у данного шарика наблюдается три степени свободы. Тогда для такой системы средняя кинетическая энергия будет равна

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} kT$$

И с помощью теоремы вириала полную энергию можно найти как

$$\langle W \rangle = \langle T \rangle + \langle U \rangle = 3kT$$

Это в расчете на одну молекулу. А если мы возьмем количество молекул в молях, то получим ровно закон Дюлонга-Пти

$$\langle W \rangle = 3kTN_a = CT$$

$$C = 3kN_a = 3R$$

Напомним еще раз о понятии фазовой плоскости, в которой используются две координаты, описывающие нашу систему. Примером может служить динамика свертывания крови (Рис.2.1), где с помощью двух координат изображена эволюция системы на фазовой плоскости. Можно увидеть особые точки, где есть регулярность и траектории сходятся.

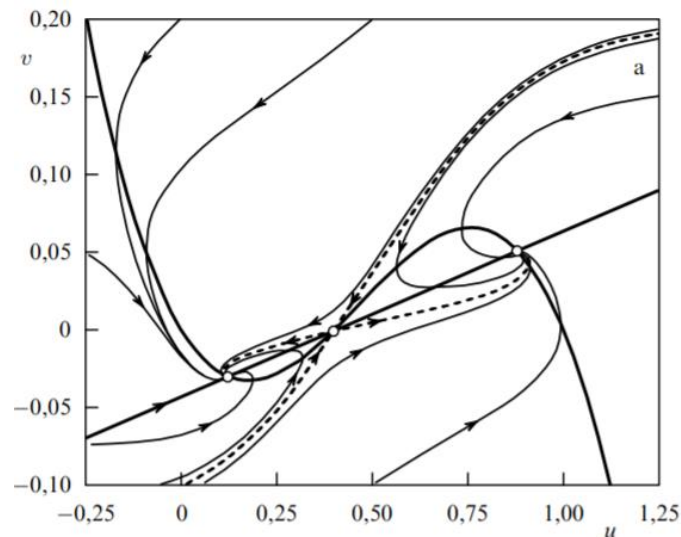


Рис.2.1. Фазовый портрет системы в случае бистабильности. Ф.И.Атауллаханов и др. УФН,172, 671 (2002)

### Роль начальных условий

В случае математического маятника будем описывать его положение с помощью координаты  $\varphi$ , так как в системе присутствует жесткая связь – длина подвеса  $l$  (Рис.2.2).

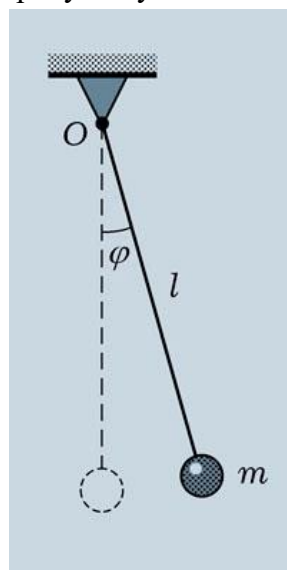


Рис.2.2.  
Математический маятник.

В таком случае основное уравнение динамики для вращательного движения представляется как

$$J\ddot{\varphi} = \sum_i M_i$$

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad \frac{g}{l} = \omega_0^2$$

Для работы на фазовой плоскости перепишем полученное уравнение в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin \varphi \end{cases}$$

Теперь найдем особые точки, то есть приравняем производные к нулю

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 = y^* \\ \dot{y} = 0 = -\omega_0^2 \sin \varphi \end{cases}$$

Решение второго уравнение разделим на два семейства: четные  $\varphi^*$  и нечетные  $\varphi$

$$\varphi^* = 0, \pm 2\pi, \dots \quad \varphi = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$$

Далее проведем линеаризацию

$$\begin{cases} x = 0 + \xi \\ y = 0 + \eta' \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x' \end{cases} \quad \begin{cases} x = C e^{\lambda t} \\ y = B e^{\lambda t} \end{cases}$$

Подставляем все в систему и получаем

$$\begin{cases} C\lambda = B \\ B\lambda = -\omega_0^2 C \end{cases}$$

И решения относительно  $\lambda$  будут иметь вид

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

Что по классификации является особой точкой типа **центр** (Рис.2.3).



Рис.2.3. Особая точка типа центр.

В общем случае решение относительно  $x$  запишем следующим образом

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ C_{1,2} = D e^{(\pm i\psi_0)}$$

Последнее выражение означает, что мы можем представлять колебания как амплитуду, умноженную на тригонометрическую функцию с определенной фазой. Тогда выражения для координаты преобразуются в

$$x = D [\exp(i\omega_0 t + i\psi_0) + \exp(-i\omega_0 t - i\psi_0)]$$

И эта сумма в скобках легко преобразуется в косинус

$$x = 2D \cos(\omega_0 t + \psi_0)$$

Давайте сделаем тоже самое с  $y$

$$y = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y = D\omega_0[i\exp(i\omega_0 t + i\psi_0) - i\exp(-i\omega_0 t - i\psi_0)]$$

Тогда получим синус, соответственно

$$y = -2D\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi_0)$$

Используя основное тригонометрическое тождество ( $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ), запишем

$$\left(\frac{y}{2D\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{2D}\right)^2 = 1$$

Получили уравнение эллипса. То есть на нашем фазовом пространстве движение будет происходить по эллипсу.

Теперь сфокусируемся на втором семействе особых точек, где значения  $\varphi$  будут нечетными.

Разница появится на этапе линеаризации уравнений

$$\begin{cases} x = \pi + \xi \\ y = 0 + \eta' \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = \omega_0^2 \xi' \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = C e^{\lambda t} \\ \eta = B e^{\lambda t} \end{cases}$$

И решения для начальной координаты  $x$  будет выглядеть следующим образом

$$x = \pi + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Здесь для нахождения  $\lambda_{1,2}$  проделаем тот же алгоритм

$$\begin{cases} C\lambda = B \\ B\lambda = \omega_0^2 C \end{cases} \\ \lambda_{1,2} = \pm \omega_0$$

Это особая точка типа **седло** (Рис.2.4).

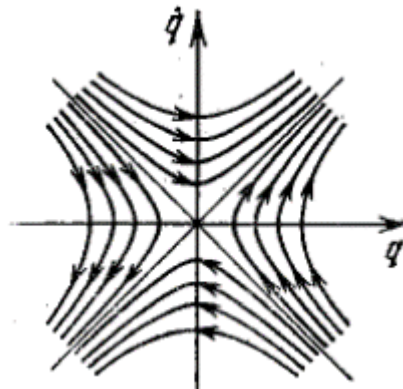


Рис.2.4. Особая точка типа седло.

Пусть у нас начальные условия заданы в виде

$$\begin{aligned} x_0 &= A + \pi \\ y_0 &= A\omega_0 \end{aligned}$$

В нулевой момент времени получаем

$$\begin{cases} x_0 = \pi + C_1 + C_2 \\ y_0 = \omega_0 C_1 - \omega_0 C_2' \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = A \\ C_1 - C_2 = A \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = A \end{cases}$$

А координаты будут равны

$$x = \pi + A e^{\omega_0 t}$$



$$y = A\omega_0 e^{\omega_0 t}$$

Траектория будет **инфинитной**, так как координаты бесконечно возрастают.

Разделим  $\dot{\eta}$  на  $\dot{\xi}$  и получим

$$\begin{aligned} \eta d\eta &= \omega_0^2 \xi d\xi \\ \int \eta d\eta &= \omega_0^2 \int \xi d\xi \\ \frac{\eta^2}{2} &= \omega_0^2 \frac{\xi^2}{2} + const \rightarrow \eta^2 - \omega_0^2 \xi^2 = const \end{aligned}$$

То есть фазовая траектория представляется в виде гипербол. Причем прямые на фазовом портрете являются асимптотами гиперболы.

Теперь возьмем следующие начальные условия

$$\begin{aligned} x_0 &= A + \pi \\ y_0 &= -A\omega_0 \end{aligned}$$

Тогда для этого случая будем иметь следующий вид систем

$$\begin{cases} x_0 = \pi + C_1 + C_2 \\ y_0 = \omega_0 C_2 - \omega_0 C_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = A \\ C_2 - C_1 = A \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = A \end{cases}$$

И решения соответственно будут бесконечно убывающими, то есть стремиться к нулю

$$\begin{aligned} x &= \pi + Ae^{-\omega_0 t} \\ y &= A\omega_0 e^{-\omega_0 t} \end{aligned}$$

Такие особые траектории называются сепаратрисами. Введем данное понятие более точно. **Сепаратриса** – траектория динамической системы, стремящаяся к седловому состоянию равновесия при времени, стремящемся к бесконечности. Разделяет фазовое пространство на области с различным типом траекторий (Рис.2.5).

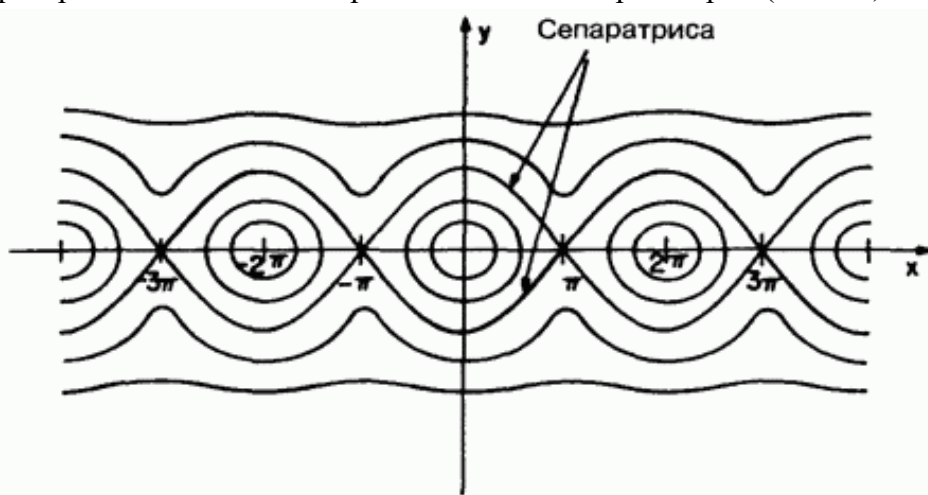


Рис.2.5. Фазовый портрет математического маятника.

Название у данной траектории действительно несет в себе смысл деления финитных (вокруг центров) и инфинитных (движение с бесконечным наращиванием угла) траекторий. Физически финитное движение представляет собой обычные

колебания маятника, но если мы очень сильно раскачаем, то можно сделать «солнышко», то есть провернуться, что и отражает инфинитное движение.

### Диссипативные системы

Будем рассматривать более реальные системы с наличием сил трений.

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - h(l\dot{\varphi})l$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{h}{m}\dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad \frac{g}{l} = \omega_0^2, \quad \frac{h}{m} = 2\delta$$

Посмотрим как изменятся уравнения движения на фазовой плоскости

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin \varphi - 2\delta y \end{cases}$$

А для особых точек выражения сохраняются

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 = y^* \\ \dot{y} = 0 = -\omega_0^2 \sin \varphi \end{cases}$$

Рассмотрим сначала четное семейство решений  $\varphi$

$$\begin{cases} x = 0 + \xi \\ y = 0 + \eta' \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\delta y' \end{cases}, \quad \begin{cases} x = Ce^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases}$$

Тогда по стандартному механизму получаем

$$\begin{cases} C\lambda = B \\ B\lambda = -\omega_0^2 C - 2\delta B \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega, \quad \omega = \omega_0^2 - \delta^2$$

Это особая точка типа **устойчивого фокуса** (Рис.2.6).

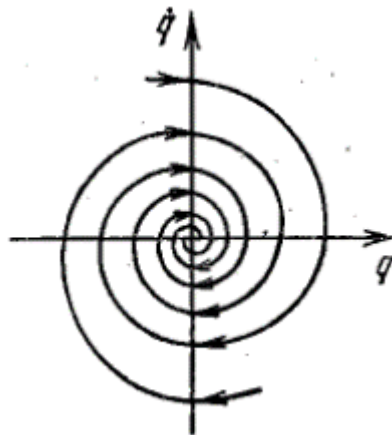


Рис.2.6. Особая точка типа устойчивого фокуса.

И вид решений остается прежний, но с новыми значениями  $\lambda_{1,2}$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$C_{1,2} = D e^{\pm i\psi_0}$$

$$x = D e^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi_0)$$

Для координаты  $y$  все будет несколько сложнее, из-за производной

$$y = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}$$

В случае, если  $\delta^2 \ll \omega_0^2$  будем иметь

$$\lambda_{1,2} = \kappa e^{\pm i\Phi}, \quad \kappa = |\lambda| = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} \approx \omega, \quad \Phi = \arctg\left(\frac{\omega}{\delta}\right) \approx \frac{\pi}{2}$$

Тогда если все это подставить, то можно получить для  $y$  следующее

$$y = D\kappa[\exp(i\psi_0 + i\Phi) * \exp((- \delta + i\omega)t) + \exp(-i\psi_0 - i\Phi) * \exp((- \delta - i\omega)t)]$$

$$= D\kappa e^{-\delta t} \cos(\psi_0 + \Phi + \omega t) = D\kappa e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi_0)$$

Далее составим тригонометрическое тождество

$$\left(\frac{x}{De^{-\delta t}}\right)^2 + \left(\frac{y}{D\kappa e^{-\delta t}}\right)^2 = 1$$

То есть мы получаем так называемые **логарифмические спирали**. Такого рода отношения, а именно логарифмические, встречаются в природе, например, у раковин моллюсков, а также музыкальный строй состоит из полутонов, частоты которых отличаются в  $q = \sqrt[12]{2} \approx 1,0594 \dots$  раз (Рис.2.7).

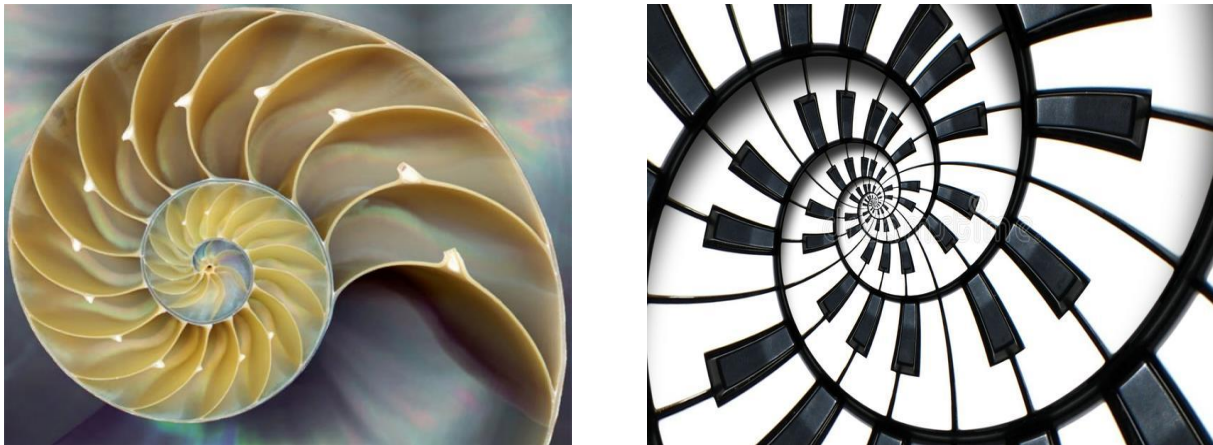


Рис.2.7. Изображение раковины моллюска и абстрактной спирали музыкальных клавиш.

Если у нас случай, когда  $\delta < 0$ , то спираль будет расходиться, а не сходить, что соответствует **неустойчивому фокусу (выкладки аналогичные)** (Рис.2.8).

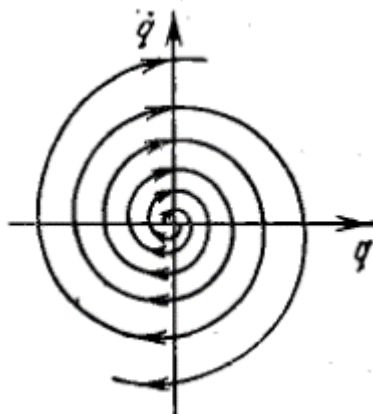


Рис.2.8. Особая точка типа неустойчивого фокуса.

Интересный случай, когда  $\delta^2 > \omega_0^2$ . И корни  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  являются действительными. То есть как такового колебания нет. Движение по спирали вырождается в стремление к асимптоте. Особая точка будет типа узел (Рис.2.9).

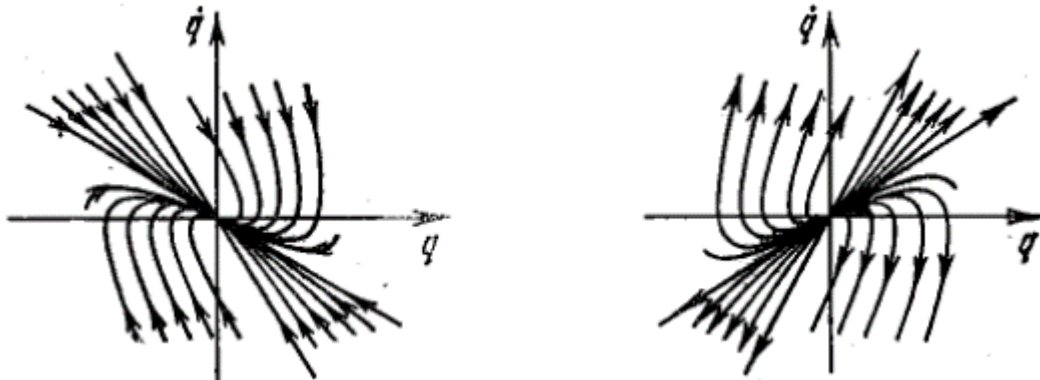


Рис.2.9. Особые точки типа узел. Устойчивый (слева) и неустойчивый (справа).

Трение в системе будет очень сильным (Рис.2.10).



Рис.2.10. Вид траектории маятника в случае сильного трения в системе.

Приведенный выше случай соответствует апериодическому движению маятника. Не будет сделано ни одного колебания и система придет сразу в положение равновесия.

## Лекция 3. Метод гармонического баланса

### Диссипативные системы и типы особых точек. Продолжение

Давайте продолжим исследование математического маятника в случае системы с трением.

Рассмотрим решение уравнений с нечетными значениями  $\varphi$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin \varphi - 2\delta y' \end{cases}$$

Для особых точек имеем

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -2\delta\eta + \omega_0^2\xi' \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = Ce^{\lambda t} \\ \eta = Be^{\lambda t} \end{cases}$$

После взятия производной получаем

$$\begin{cases} C\lambda = B \\ B\lambda = \omega_0^2 C - 2\delta B \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$$

То есть в системе колебаний не происходит. Это особая точка типа **седло**.

Для частного случая рассмотрим такие уравнения

$$\begin{aligned} \xi &= C_0 e^{\lambda t} \\ \eta &= \lambda_{1,2} \xi \end{aligned}$$

В первом случае получаем  $\lambda_1 > 0$ . Это соответствует прямой с положительным наклоном, уходящей на бесконечность.

Во втором случае  $\lambda_2 < 0$ . Прямая проходит через начало координат с отрицательным наклоном.

Эти две прямые будут асимптотами остальных траекторий.

Теперь найдем **изоклины**, которые являются линиями равных наклонов.

$$0 = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-2\delta\eta + \omega_0^2\xi}{\eta}$$

$$\eta = \frac{\omega_0^2}{2\delta}\xi$$

В результате мы получаем следующую ситуацию (Рис.3.1).

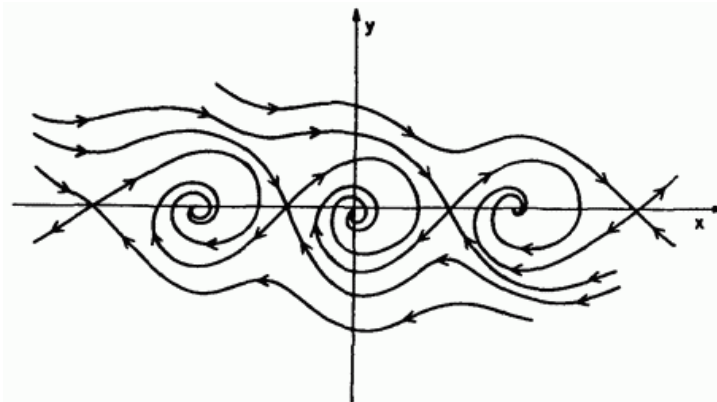


Рис.3.1. Фазовая плоскость затухающего маятника.

В случае затухания любая траектория будет поймана каким-нибудь фокусом. То есть здесь вообще нет инфинитных траекторий. Тогда как быть с определением сепаратрисы? Здесь можно провести аналогию с границей Европы и Азии. Под Екатеринбургом есть обелиск, который является линией границы. Это связано с тем, что русский историк и географ **В.Н.Татищев** обосновал естественность данной границы наличием водораздела. То есть Европейская часть имеет направление стока рек на юг, а уже Сибирь и Дальневосточные регионы на север, к Северному Ледовитому океану.

На фазовом портрете возьмем любую траекторию и рано или поздно мы попадем в один из фокусов, так называемый **аттрактор** – множество точек на фазовой плоскости, к которым асимптотически сходятся все траектории из некоторой области, которая называется **бассейном аттрактора**. И в данном случае сепаратриса будет линией, которая разделяет бассейны различных аттракторов.

### Неизохронность колебаний нелинейных систем. Метод гармонического баланса

Пусть у нас уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + f(x, t) = 0$$

Такого рода задачи будем рассматривать **методом гармонического баланса**, который был разработан **Н.М.Крыловым** и **Н.Н.Боголюбовым**.

Суть метода состоит в том, что решение мы ищем в виде первых гармоник

$$x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

Данное выражение можно эквивалентно заменить на

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Необходимо будет разложить силу в ряд Фурье

$$f(t) = \alpha_1 \cos(\omega t) + \beta_1 \sin(\omega t)$$

Все подставляем в начальное уравнение

$$-m\alpha\omega^2 \cos(\omega t) - m\beta\omega^2 \sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t) + \beta_1 \sin(\omega t) = 0$$

Почему метод назван гармоническим балансом? Потому что по сути мы занимаемся сведением баланса. Рассматриваем однородные слагаемые так, что их сумма должна быть равна нулю.

$$\begin{cases} \alpha_1 = am\omega^2 \\ \beta_1 = bm\omega^2 \end{cases}, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = (a^2 + b^2)m^2\omega^4$$

Извлекаем корень из обеих частей

$$m\omega^2 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{A}$$

Теперь используем это в нашей системе

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{A} \\ \beta_1 = b \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{A} \end{cases}$$

Вернемся к силе. Можно увидеть, что ее можно представить в виде

$$f(t) = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{A} x = k(A)x$$

Получился как бы закон Гука. В качестве коэффициента жесткости получается такой дробный коэффициент. Но здесь есть хитрость, а именно, коэффициент зависит от амплитуды колебаний.

**Мы от нелинейной функции  $x$  перешли как бы к линейной функции. Вся нелинейность теперь «сидит» в жесткости.**

Теперь рассмотрим этот подход на конкретном примере.

Случай кубической нелинейности

$$m\ddot{x} + k_0x + \gamma x^3 = 0$$

Решение ищем в виде

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$-mA\omega^2 \cos(\omega t) + k_0A \cos(\omega t) + \gamma(A \cos(\omega t))^3 = 0$$

Помним, что

$$\cos^3(\omega t) = \frac{3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)}{4} = \frac{3}{4} \cos(\omega t)$$

Приравниваем все коэффициенты

$$-m\omega^2 + k_0 + \frac{3}{4}A^2\gamma = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k_0}{m} + \frac{3}{4m}A^2\gamma = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4k_0}A^2\gamma\right)$$

Мы получили эффект **неизохронности**. То есть частота, а значит и период колебаний, зависят от амплитуды.

**Метод последовательных приближений**

Более точным методом является **метод последовательных приближений**. Также рассмотрим прошлый пример.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\gamma}{m} x^3 = 0$$

Введем малый параметр и сделаем его безразмерным.

$$\mu = \frac{\gamma}{m\omega_0^2} \ll 1$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu\omega_0^2 x^3 = 0$$

Решение будем находить в виде

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

Частота тоже будет меняться, чтобы это учесть, запишем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu\varepsilon_1 + \mu^2\varepsilon_2 + \dots$$

Далее ограничимся рассмотрением только первого приближения

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \mu\varepsilon_1$$

Теперь вернемся к исходному уравнению с учетом приближений

$$\ddot{x}_0 + \mu\ddot{x}_1 + (\omega^2 - \mu\varepsilon_1)(x_0 + \mu x_1) + \mu\omega^2 x_0^3 = 0$$

Распишем уравнение в приближениях по  $\mu$

$$\mu^0: \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0, \quad x_0 = A \cos(\omega t)$$

$$\mu^1: \ddot{x}_1 - \varepsilon_1 x_0 + \omega^2 x_1 + \omega^2 x_0^3 = 0$$

И если переписать это уравнение

$$\ddot{x}_1 - \varepsilon_1 A \cos(\omega t) + \omega^2 A^3 \left( \frac{3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)}{4} \right) = 0$$

Для того чтобы на первой гармонике были стационарные колебания, которые бесконечно усиливаются, необходимо сделать так, чтобы второе и третье слагаемые друг друга погасили.

Тогда получим

$$\varepsilon_1 = \omega^2 A^2 \frac{3}{4}$$

Вернемся к исходному значению

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{m \omega_0^2} \omega^2 A^2 \approx \omega_0^2 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{m} A^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{k_0} A^2 \right)$$

### Построение фазовых траекторий методом изоклин

Если смотреть на нашу систему в общем виде, то она выглядит так

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

А для предыдущего примера, соответственно

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - \frac{\gamma}{m} x^3 \end{cases}$$

Делим второе уравнение на первое и получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2 x - \frac{\gamma}{m} x^3}{y}$$

Теперь найдем уравнение изоклин. Нужно понимать, что всякая изоклина – линия равных наклонов, то есть

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \kappa \\ \kappa &= \frac{-\omega_0^2 x - \frac{\gamma}{m} x^3}{y} \end{aligned}$$

Отсюда выражаем  $y$  в явном виде

$$y = \frac{-\omega_0^2 x - \frac{\gamma}{m} x^3}{\kappa}$$

Это уже кубическая парабола. Причем в зависимости от знака и модуля  $\kappa$ , получается семейство этих парабол.

Эллипсы (траектории) искажаются из-за формы изоклин. Это случай  $\gamma > 0$ .

Очевидно, что для  $\gamma < 0$  изоклины перевернутся на 90 градусов, и такой случай уже был рассмотрен нами раньше при нелинейности  $\sin \varphi$ .



## Метод поэтапного построения

Давайте рассмотрим случай сухого трения. Для этого имеем следующий вид уравнения

$$m\ddot{x} + kx = F_{\text{тр}}$$

$$\dot{x} > 0, \quad F_{\text{тр}} = -a$$

$$\dot{x} < 0, \quad F_{\text{тр}} = a$$

То есть наша фазовая плоскость поделилась на две полуплоскости. В случае верхней половины будет иметь

$$m\ddot{x} + kx + a = 0$$

И для нижней

$$m\ddot{x} + kx - a = 0$$

То есть фазовый портрет будет выглядеть так (Рис.3.2).

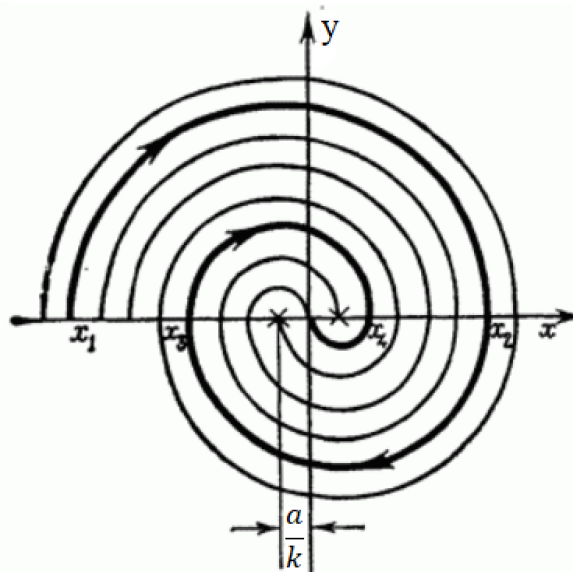


Рис.3.2. Фазовый портрет в случае сухого трения.

Характерно, что нет выделенного положения равновесия, а есть зона застоя, которая простирается от  $-\frac{a}{k}$  до  $\frac{a}{k}$ . Здесь притягивающее множество – целый отрезок.

Теперь рассмотрим еще одну ситуацию. Пусть у нас есть маятник, который зажат среди пружин различной жесткости. Тогда соответственно система эллипсов будет более вытянута в горизонтальном направлении. То есть происходит сшивка решений, что дает асимметричность картины траекторий.

По мере увеличения амплитуды смещается точка равновесия.

Такое рассмотрение широко используется в молекулярно-кинетической теории. Мы считаем, что каждый атом взаимодействует с другими атомами посредством пружинок, потенциалы которых описаны с помощью потенциала Леннарда-Джонса (Рис.3.3).

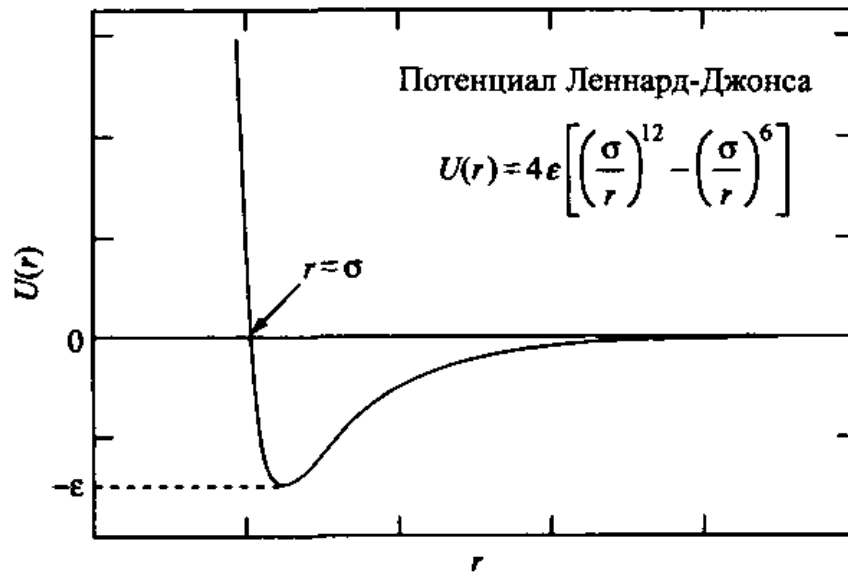


Рис.3.3. Потенциал Леннарда-Джонса.

Данный потенциал можно записать в упрощенном виде

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2 - \frac{\gamma}{3}r^3$$

$$F = -gradU = -kr + \gamma r^2$$

Здесь необходимо искать решение в виде

$$r = A \cos(\omega t + \varphi) + a_0$$

Давайте найдем это решение

$$m\ddot{r} + kr - \gamma r^2 = 0$$

$$r = A \cos(\omega t + \varphi) + a_0$$

$$-\omega^2 mA \cos(\omega t) + ka_0 + kA \cos(\omega t) - \gamma(A \cos(\omega t + \varphi) + a_0)^2 = 0$$

$$\cos(0t): \quad ka_0 - \gamma \frac{A^2}{2} = 0$$

$$a_0 = \frac{\gamma A^2}{2k}$$

То есть мы получили, что расстояние между атомами меняется по гармоническому закону. И по мере того, как амплитуда нарастает, расстояние увеличивается. Так расширяется твердое тело.

## Лекция 4. Резонанс при вынужденных колебаниях в нелинейных системах

### Системы под внешним воздействием

В данной лекции рассмотрим такие системы, на которые оказывается внешнее воздействие. Причем выделяют два вида воздействия: **силовое (прямое)** и **параметрическое**.

Силовое воздействие нам привычно. Для примера можно привести генератор, который задает некоторые колебания на заданной частоте, в следствии чего возникают вынужденные колебания в  $LC$ -контуре (Рис.4.1).

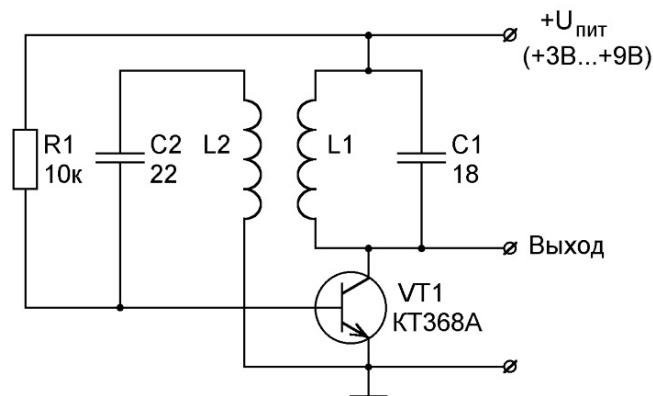


Рис.4.1.  $LC$ -генератор с индуктивной связью.

Также существует более хитрое воздействие – параметрическое, когда можно менять периодические параметры системы, например, изменять расстояние между обкладками конденсатора.

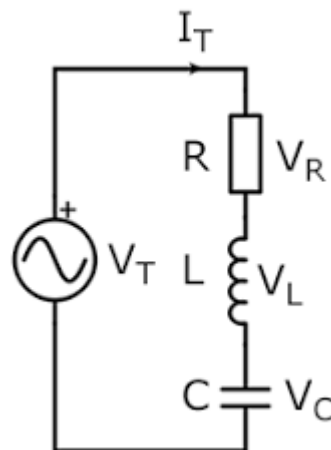


Рис.4.2.  $RLC$ -контур.  
Изменение емкости конденсатора.

Кроме того, можно менять длину математического маятника. Наверное, такое проходили почти все во время самостоятельной раскачки на качелях.

Характерной чертой **параметрического** воздействия является то, что наиболее эффективно можно раскачать систему на **двойной частоте собственных колебаний**.

Для нелинейных систем не применим принцип суперпозиции.

Давайте рассмотрим следующий пример.

На входе в систему у нас есть сигнал на частоте  $\omega_1$  и  $\omega_2$

$$U_{\text{вх}} = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$$

Отклик **линейной системы** будет иметь вид

$$U_{\text{вых}} = C \cos(\omega_1 t + \varphi) + D \cos(\omega_2 t + \psi)$$

А вот в случае **нелинейной системы** будет гораздо больше частот

$$U_{\text{вых}} = \sum_{m,n} U_{m,n} \cos(n\omega_1 + m\omega_2 + \varphi_{mn})$$

В таком случае возникают **комбинационные частоты**.

### Вынужденные колебания в нелинейных системах

Пусть у нас есть  $LC$ -контур. Мы будем рассматривать его в следующих приближениях:

- Малая нелинейность
- Малая диссипация
- Малая амплитуда
- Гармоническая внешняя сила

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -F(x, \dot{x}) + P_0 \cos(pt)$$

Нелинейный элемент контура – емкость.

Общее напряжение это сумма напряжений

$$U_L + U_R + U_C = U_0 \cos pt$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + U_C = U_0 \cos pt$$

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q + \gamma q^3 = P_0 \cos pt, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}$$

Решение ищем методом **гармонического баланса**

$$q = a \cos(pt) + b \sin(pt)$$

$$q^3 = [a \cos(pt) + b \sin(pt)]^3$$

$$= a^3 \cos^3(pt) + 3a^2 b \cos^2(pt) \sin(pt) + 3b^2 a \sin^2(pt) \cos(pt) + b^3 \sin^3(pt)$$

$$= a^3 \frac{3}{4} \cos(pt) + 3a^2 b \frac{1}{4} \sin(pt) + 3b^2 a \frac{1}{4} \cos(pt) + \frac{3}{4} b^3 \sin(pt)$$

И теперь запишем это выражение в более наглядном виде

$$q^3 = a^3 \frac{3}{4} \cos(pt) + a^2 b \frac{3}{4} \sin(pt) + b^2 a \frac{3}{4} \cos(pt) + \frac{3}{4} b^3 \sin(pt)$$

Далее подставим все в уравнение колебаний

$$-ap^2 \cos(pt) - bp^2 \sin(pt) - 2\delta ap \sin(pt) + 2\delta bp \cos(pt) + \omega_0^2 a \cos(pt) + \omega_0^2 b \sin(pt) + \frac{3}{4}\gamma a[a^2 + b^2] \cos(pt) + \frac{3}{4}\gamma b[a^2 + b^2] \sin(pt) = P_0 \cos pt$$

Приступаем к процедуре сведения баланса

$$\cos pt: \left(\omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 - p^2\right)a + 2\delta pb = P_0$$

$$\sin pt: \left(\omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 - p^2\right)b - 2\delta pa = 0$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad P_0 = \frac{U_0}{L}$$

Запишем эту систему в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 - p^2 & 2\delta p \\ -2\delta p & \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 - p^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det|\dots| = \left(\omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 - p^2\right)^2 + 4\delta^2 p^2$$

$$a = \frac{\det \begin{bmatrix} P_0 & 2\delta p \\ 0 & \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 - p^2 \end{bmatrix}}{\det|\dots|} = \frac{P_0 \left(\omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 - p^2\right)}{\det|\dots|}$$

$$b = \frac{\det \begin{bmatrix} \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 - p^2 & P_0 \\ -2\delta p & 0 \end{bmatrix}}{\det|\dots|} = \frac{P_0 2\delta p}{\det|\dots|}$$

$$A^2 = a^2 + b^2 = \frac{P_0^2}{\det|\dots|}$$

В резонансе мы будем иметь

$$A^2 = \frac{P_0^2}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2$$

Амплитудно-частотная характеристика для такого случая приведена на Рис.4.3.

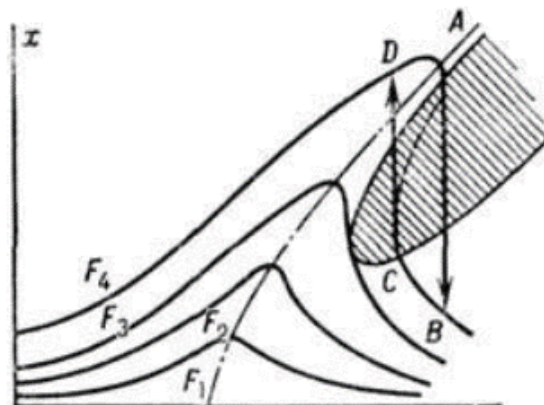


Рис.4.3. АЧХ в случае вынужденных нелинейных колебаний.

Мы получаем, что при увеличении начальной амплитуды качественно изменяется вид кривой. Из однозначной зависимости мы приходим к неоднозначной.

Но на самом деле при каждой частоте у нас будет ровно одна амплитуда, которая зависит от предыстории. Причем образуется **петля гистерезиса**.

Давайте теперь избавимся от трения. Тогда у нас будет

$$A^2 = \frac{P_0^2}{(\omega^2 - p^2)^2}$$

Даже в отсутствии трения амплитуда не будет бесконечной. Так как каждой конечной частоте соответствует конечная амплитуда.

Теперь рассмотрим случай, когда **нелинейным** становится **сопротивление**.

$$\begin{aligned} U_L + U_R + U_C &= U_0 \cos pt \\ L \frac{d^2 q}{dt^2} + U_R + \frac{q}{C} &= U_0 \cos pt \\ \ddot{q} + 2\delta(\dot{q} + \beta\dot{q}^2 + \gamma\dot{q}^3) + \omega_0^2 q &= P_0 \cos pt \end{aligned}$$

И решение уже будем искать в более сложном виде

$$q = a \cos(pt) + b \sin(pt) + a_0$$

Отдельно рассмотрим скобку при нелинейном сопротивлении

$$\begin{aligned} & -ap \sin(pt) + bp \cos(pt) + \beta(-ap \sin(pt) + bp \cos(pt))^2 \\ & + \gamma(-ap \sin(pt) + bp \cos(pt))^3 \\ & = -ap \sin(pt) + bp \cos(pt) + \beta a^2 p^2 \sin^2(pt) - 2\beta ab p^2 \sin(pt) \cos(pt) \\ & + \beta p^2 b^2 \cos^2(pt) \\ & + \gamma(-a^3 p^3 \sin^3 pt + 3ba^2 p^3 \sin^2 pt \cos pt - 3ab^2 p^3 \sin pt \cos^2 pt \\ & + b^3 p^3 \cos^3 pt) \end{aligned}$$

Начнем сводить баланс

$$\begin{aligned} \text{const: } & \frac{2\delta\beta a^2 p^2}{2} + \frac{2\delta\beta b^2 p^2}{2} + a_0 \omega_0^2 = 0 \\ & a_0 = -\frac{\delta\beta p^2 A^2}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

Эта величина малая, так как составлена из малых же поправок.

Теперь сводим баланс по косинусу и синусу

$$\begin{aligned} \cos pt: & (\omega_0^2 - p^2)a + 2\delta pb \left(1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2\right) = P_0 \\ \sin pt: & (\omega_0^2 - p^2)b - 2\delta pa \left(1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Запишем вид матрицы

$$\begin{bmatrix} (\omega_0^2 - p^2) & 2\delta p \left(1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2\right) \\ -2\delta p \left(1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2\right) & (\omega_0^2 - p^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{\begin{bmatrix} P_0 & 2\delta p \left(1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2\right) \\ 0 & (\omega_0^2 - p^2) \end{bmatrix}}{\det|\dots|} = \frac{P_0(\omega_0^2 - p^2)}{\det|\dots|}$$
$$b = \frac{\begin{bmatrix} (\omega_0^2 - p^2) & P_0 \\ -2\delta p \left(1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2\right) & 0 \end{bmatrix}}{\det|\dots|} = \frac{P_0 2\delta p \left(1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2\right)}{\det|\dots|}$$
$$A^2 = \frac{P_0^2}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2 \left(1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2\right)^2}$$

Резонансные кривые будут иметь максимум, не зависящий от амплитуды колебаний. Единственное, что добавляет нелинейность (кубическая) это изменение формы кривой. То есть сама кривая становится полой и широкой.

## Лекция 5. Адиабатические инварианты

### Адиабатически медленное изменение параметров

В нашем случае для определения адиабатических процессов введем некоторый параметр  $\Lambda$ , который при изменении должен соответствовать следующему выражению

$$\frac{\Delta\Lambda}{\Delta t} \ll \frac{\Lambda}{T}$$

$$\xi = \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} \frac{T}{\Delta t} \ll 1$$

То есть **адиабатически медленно изменяющийся параметр** – это параметр, относительное изменение которого за время равно периоду много меньше единицы.

Для **инварианта** будет похожая формула

$$\left| \frac{dI}{dt} \right| \frac{T}{I} \ll \xi$$

В курсе теоретической механики доказано, что

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq$$

является адиабатическим инвариантом.

Получается, что в фазовом пространстве у адиабатического инварианта геометрический смысл есть площадь эллипса, деленная на  $2\pi$ . Это для процесса, изображенного на фазовой плоскости в координатах  $P, Q$ .

Рассмотрим на конкретном примере пружинного маятника и  $LC$ -контур.

Для маятника запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E$$

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{kx^2}{2E} = 1$$

$$S = \pi ab$$

Тогда адиабатический инвариант равен

$$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{\pi\sqrt{2mE}\sqrt{2E}}{\sqrt{k}2\pi} = E\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{E}{\omega}$$

И в случае контура сделаем ту же процедуру

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = E$$

$$\frac{(LI)^2}{2LE} + \frac{q^2}{2CE} = 1$$

И адиабатический инвариант

$$I = \frac{S}{2\pi} = E\sqrt{LC} = \frac{E}{\omega}$$

### Адиабатический инвариант математического маятника

Будет меняться медленно длина подвеса с помощью некоторой внешней силы.

В случае уменьшения длины подвеса частота колебаний маятника увеличивается.



Такой случай изображен на Рис.5.1. Здесь есть кольцо, которое регулирует длину нити.

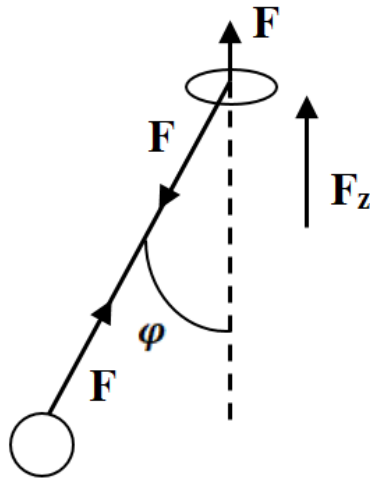


Рис.5.1. Математический маятник с переменной длиной нити.

Найдем силу в направлении  $z$

$$F_z = F - F \cos \varphi = F 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx \frac{mg\varphi^2}{2}$$

$$\varphi = A \sin(\omega t)$$

Тогда для средней за период силы имеем

$$\langle F_z \rangle = \frac{mgA^2}{4}$$

Работа, которую мы совершим над системой есть

$$\Delta E = A = -\langle F_z \rangle \Delta l$$

Теперь нужно сравнить с полной энергией.

Для этого сначала найдем кинетическую энергию

$$\langle E_{\text{кин}} \rangle = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle (l\dot{\varphi})^2 \rangle}{2} = \frac{ml^2}{2} A^2 \omega^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

И тогда относительное изменение энергии равно

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{\Delta l}{2l}$$

$$\int \frac{dE}{E} = -\int \frac{dl}{2l}$$

$$\ln E = -\ln \sqrt{l} + C$$

$$\ln(E\sqrt{l}) = C$$

Получили следующий инвариант

$$I = \frac{E}{\omega} = \text{Const}$$

### Адиабатический инвариант струны

В этот раз будем менять длину струны. Пусть струна закреплена, но можно с помощью передвижения кольца по струне менять ее длину.

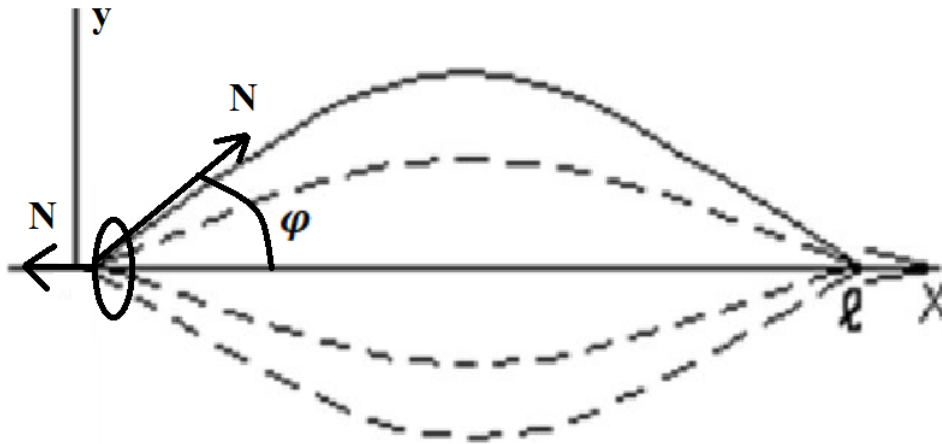


Рис.5.2. Колебания струны переменной длины.

В начальный момент длина равна  $l$ . Снова рассмотрим силы, действующие на кольцо (Рис.5.2).

Давайте найдем модуль этой силы.

$$F_x = N(1 - \cos \varphi) = 2N \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

Где сила  $F$  это результирующая двух сил.

$$\Delta E = -\langle F_x \rangle \Delta l$$

$$y = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin(\omega t)$$

$$\varphi = \arctg \frac{dy}{dx} \approx \frac{dy}{dx} = A \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin(\omega t)$$

При  $x = 0$

$$\varphi = A \frac{\pi}{l} \sin(\omega t)$$

Для среднего значения

$$\Delta E = -\langle F_x \rangle \Delta l = -N \frac{A^2 \pi^2}{2l^2} \Delta l \langle \sin^2 \omega t \rangle$$

$$\Delta E = -N \frac{A^2 \pi^2}{4l^2} \Delta l$$

Теперь вычислим кинетическую энергию

$$E_{\text{кин}} = \int_0^l \frac{\rho dx}{2} \dot{y}^2 = \frac{\rho}{2} \omega^2 A^2 \cos^2 \omega t \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{\rho l}{4} \omega^2 A^2 \cos^2 \omega t$$

$$\langle E_{\text{кин}} \rangle = \frac{\rho l}{8} \omega^2 A^2$$

Полная энергия равна

$$E = 2 \langle E_{\text{кин}} \rangle = \frac{\rho l}{4} \omega^2 A^2$$

Колебательный процесс будем рассматривать как стоячую волну. Её скорость будет равна

$$c = \sqrt{\frac{N}{\rho}} = \lambda v = \frac{\omega l}{\pi}$$

Тогда выражаем  $N$  через  $c$  и получаем

$$\Delta E = -\rho c^2 \frac{A^2 \pi^2}{4l^2} \Delta l = -\frac{\rho \omega^2 A^2}{4} \Delta l$$

И относительное изменение равно

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= -\frac{\Delta l}{l} \\ \int \frac{dE}{E} &= -\int \frac{dl}{l} \\ \ln E &= -\ln l + C \\ \ln(El) &= \text{Const} \end{aligned}$$

В этом случае инвариант не пострадал, так как

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\pi c}{l} \\ I &= \frac{E}{\omega} = \text{Const} \end{aligned}$$

### Инварианты и земная орбита

Считается, что масса Земли величина постоянная. Но на самом деле она очень медленно изменяется. Масса постепенно растет из-за постоянных метеоритных падений.

Орбита Земли имеет форму эллипса и описывается законами Кеплера (Рис.5.3).

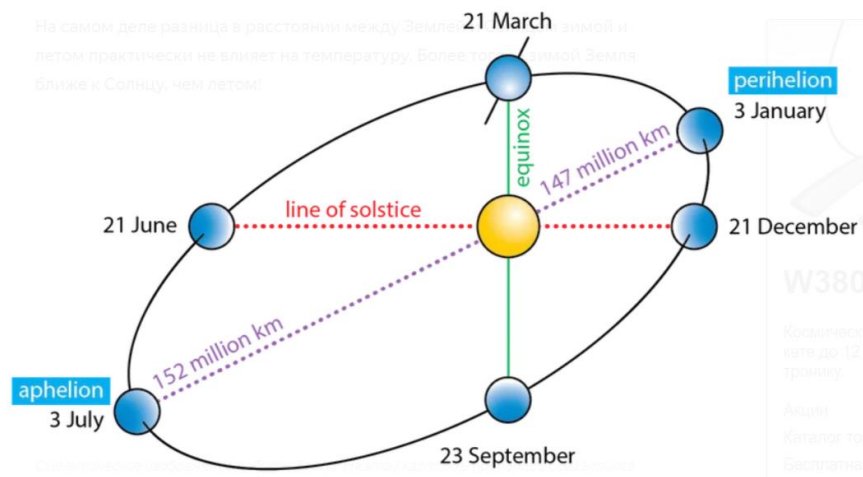


Рис.5.3. Эллипсоидная орбита Земли.

Смена времен года не зависит от расстояния Земли от Солнца, а зависит от угла падения солнечных лучей на поверхность планеты.

Рассмотрим такую характеристику как **эксцентриситет**, которая показывает степень отклонения от окружности.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Движение по эллипсу можно записать как совокупность двух колебаний

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = b \sin \omega t$$

Кинетическая энергия на орбите будет равна

$$E_x = \frac{Mv_x^2}{2} = \frac{M\omega^2 a^2}{2}$$

$$E_y = \frac{Mv_y^2}{2} = \frac{M\omega^2 b^2}{2}$$

Инварианты тогда будут равны

$$I_x = \frac{M\omega a^2}{2}, \quad I_y = \frac{M\omega b^2}{2}$$

$$\frac{I_y}{I_x} = \frac{b^2}{a^2}$$

А это есть

$$\frac{I_y}{I_x} = 1 - \varepsilon^2$$

То есть сохранение инварианта означает сохранение формы земной орбиты.

### Движение заряженных частиц в неоднородном магнитном поле Земли

Магнитное поле Земли создается за счет энергии электрического поля Земли, созданного, в свою очередь, электрическим зарядом электронов (Рис.5.4).

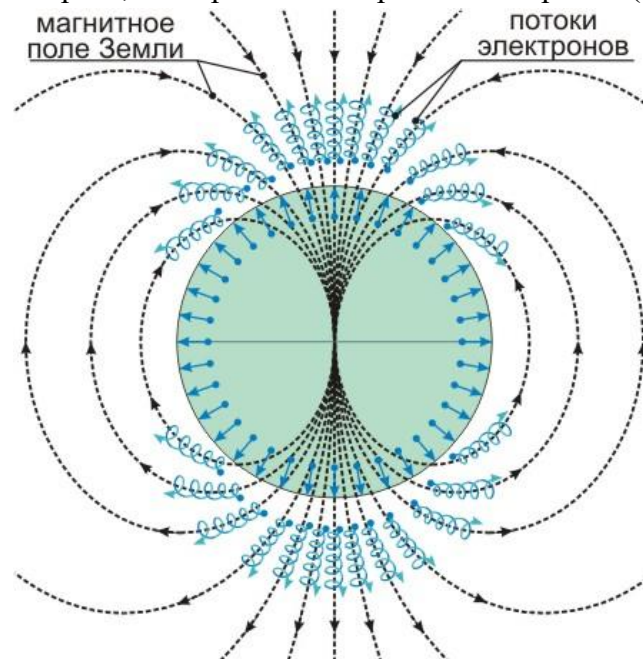


Рис.5.4. Магнитное поле Земли.

Давайте рассмотрим движение в поле  $B$

$$\frac{mv^2}{R} = evB$$
$$m\omega^2 R = e\omega RB$$
$$\omega = \frac{eB}{m}$$

То есть чем гуще линии магнитного поля, тем выше частота.

Значит энергия тоже должна увеличиваться.

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$$
$$I = \frac{E}{\omega} \sim \frac{v^2}{B}$$

То есть и перпендикулярная составляющая скорости возрастает по мере увеличения частоты. Это происходит за счет того, что продольная скорость уменьшается.

### Оптический микрорезонатор

В случае, если мы сдвигаем стенки в микрорезонаторе, то будет изменяться частота.

Энергия, заключенная между стенками равна

$$E = N\hbar\omega$$

А инвариант есть

$$I = \frac{E}{\omega} = N\hbar$$

То есть инвариант это по сути сохранение числа фотонов. Мы сдвигаем стенки, частота возрастает, количество не изменяется и интенсивность при этом растет.

## Лекция 6. Колебания в системах с быстро меняющимися параметрами

### Движение систем с быстро меняющимися параметрами

Для начала рассмотрим маятник Капицы, который был установлен Петром Леонидовичем в коридоре Института физических проблем (Рис.6.1).

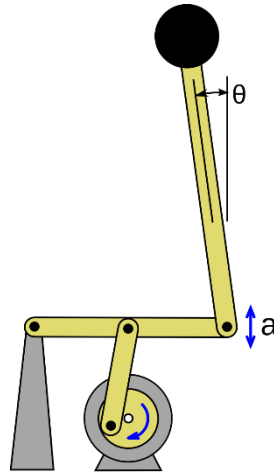


Рис.6.1. Маятник Капицы.

Секрет такого маятника был в том, что подвес маятника колебался с высокой частотой.

Пусть время изменение параметра много меньше периода колебаний

$$\tau \ll T$$

Амплитуда колебания вала равна  $d$ .

$$y = d \cos \Omega t, \quad \Omega \gg \omega_0$$

Запишем уравнение моментов

$$J\ddot{\varphi} = -mg_{\text{эфф}}l \sin \varphi, \quad a = -\Omega^2 d \cos \Omega t$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mg \left(1 + \frac{a}{g}\right) \sin \varphi = 0$$

Разложим  $\varphi$  на две составляющие: быструю и медленную

$$\varphi = R(t) + \rho(t), \quad \rho \ll R$$

А само уравнение преобразуем к каноническому виду

$$\ddot{R} + \ddot{\rho} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{\Omega^2 d}{g} \cos \Omega t\right) \sin \varphi = 0$$

$$\sin(R + \rho) = \sin R \cos \rho + \cos R \sin \rho = \sin R + \rho \cos R$$

Раскроем скобку и выделим быстроменяющуюся и медленноменяющуюся части

$$\ddot{R} + \ddot{\rho} + \omega_0^2 \sin R + \omega_0^2 \rho \cos R - \omega_0^2 \frac{\Omega^2 d}{g} \cos \Omega t \sin R - \omega_0^2 \frac{\Omega^2 d}{g} \cos \Omega t \rho \cos R = 0$$

Тогда получим систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \ddot{R} + \omega_0^2 \left( \sin R - \frac{\Omega^2 d}{g} \cos \Omega t \rho \cos R \right) = 0 \\ \ddot{\rho} - \omega_0^2 \frac{\Omega^2 d}{g} \cos \Omega t \sin R + \omega_0^2 \rho \cos R = 0 \end{cases}$$

Кроме того, если мы распишем некоторые величины

$$\ddot{\rho} = -\Omega^2 \rho$$

Тогда для второго уравнение имеем

$$\ddot{\rho} = \frac{\omega_0^2 \Omega^2 d}{g} \cos \Omega t \sin R$$

$$\iint \ddot{\rho} dt dt = -\frac{\omega_0^2 d}{g} \cos \Omega t \sin R$$

Возвращаемся к первому уравнению системы

$$\ddot{R} + \omega_0^2 \sin R + \omega_0^4 \frac{\Omega^2 d^2}{2g^2} \sin R \cos R = 0$$

Рассматриваем положение равновесия

$$\ddot{R} = 0$$

$$\omega_0^2 \sin R \left( 1 + \omega_0^2 \frac{\Omega^2 d^2}{2g^2} \cos R \right) = 0$$

Решения есть

$$\sin R = 0, \quad R = 0, \pi$$

$$1 + \omega_0^2 \frac{\Omega^2 d^2}{2g^2} \cos R = 0$$

$$R = \pi, \quad \frac{\Omega^2 d^2}{2gl} > 1$$

То есть в этом случае верхнее положение равновесия из неустойчивого превращается в устойчивое.

Теперь перейдем к энергетическому представлению.

$$J\ddot{R} + \omega_0^2 ml^2 \sin R + J\omega_0^4 \frac{\Omega^2 d^2}{2g^2} \sin R \cos R = 0$$

Еще все слагаемые умножим на  $\dot{R}$  и проинтегрируем

$$\frac{J\dot{R}^2}{2} - mgl \cos R + J\omega_0^4 \frac{\Omega^2 d^2}{2g^2} \frac{\sin^2 R}{2} = E$$

$$\langle \dot{\rho}^2 \rangle = \frac{\omega_0^4 \Omega^2 d^2}{2g^2} \sin^2 R$$

Это третье слагаемое по виду является усредненной кинетической энергией, но ведет себя как разновидность потенциальной.

$$\frac{J\dot{R}^2}{2} - mgl \cos R + \frac{J \langle \dot{\rho}^2 \rangle}{2} = E$$

То есть такой вид маятника приводит к тому, что колебания могут существовать в некой потенциальной яме, которая задается выше описанным условием.

## Движение заряженных частиц в быстро осциллирующем поле.

Пусть у нас есть осциллирующее электрическое поле.

$$E = E(r) \cos \Omega t$$

$$\Omega \gg \frac{1}{T}$$

Запишем уравнение движения в этом поле

$$m\ddot{r} = eE(r) \cos \Omega t$$

Также представим наше решение для  $r$  в виде суммы медленно меняющийся части  $R(t)$  и быстро осциллирующей части  $\rho(t)$

$$r = R(t) + \rho(t), \quad \rho \ll R$$

$$E(r) = E(R) + \frac{\partial E}{\partial r} \rho$$

$$\ddot{R} - \frac{e}{m} \frac{\partial E}{\partial R} \langle \rho \cos \Omega t \rangle = 0$$

$$\ddot{\rho} = \frac{e}{m} E(R) \cos \Omega t$$

Восстановим исходное  $\rho$

$$\rho = -\frac{e}{m\Omega^2} E(R) \cos \Omega t$$

Тогда в первом уравнении имеем

$$\ddot{R} + \frac{e}{2m} \frac{\partial E}{\partial R} \frac{e}{m\Omega^2} E(R) = 0$$

Теперь умножим это выражение на  $\dot{R}$  и проинтегрируем

$$\frac{m\dot{R}^2}{2} + \frac{e^2}{2m\Omega^2} \frac{E^2(R)}{2} = \text{Const} = W$$

$$\langle \dot{\rho}^2 \rangle = \left( \frac{e}{m\Omega} E(R) \right)^2 \frac{1}{2}$$

Получается, что вибрация электрического поля действует как эффективный потенциал. То есть где  $\dot{\rho}$  мало, там минимум энергии, где  $\dot{\rho}$  побольше, электроны уходят оттуда.

## Фигуры Хладни

Существуют особые фигуры, которые образуются за счет скопления мелких частиц вблизи пучностей или узловых линий на поверхности упругой колеблющейся пластинки (Рис.6.2-6.3).

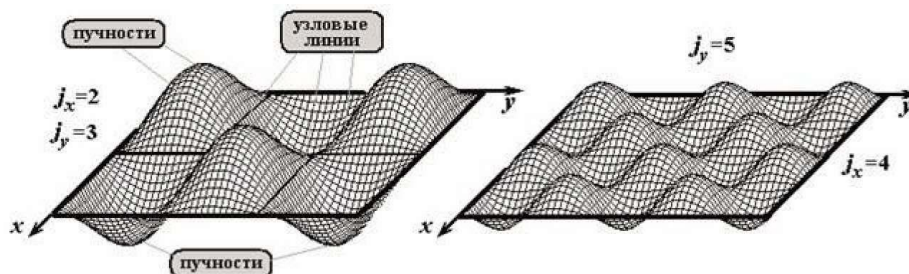


Рис.6.2. Ландшафт стоячих волн на фигурах Хладни.



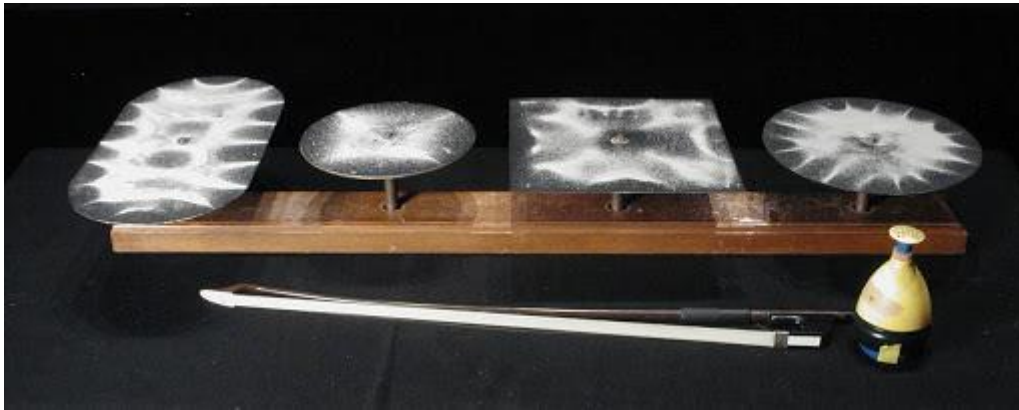


Рис.6.3. Фигуры Хладни.

### Лазер на свободных электронах

Из электронно пушки вылетают электроны. Для того чтобы они излучали нужна система из магнитов с чередующимися полюсами. В результате этого электрон движется по криволинейной траектории (Рис.6.4).

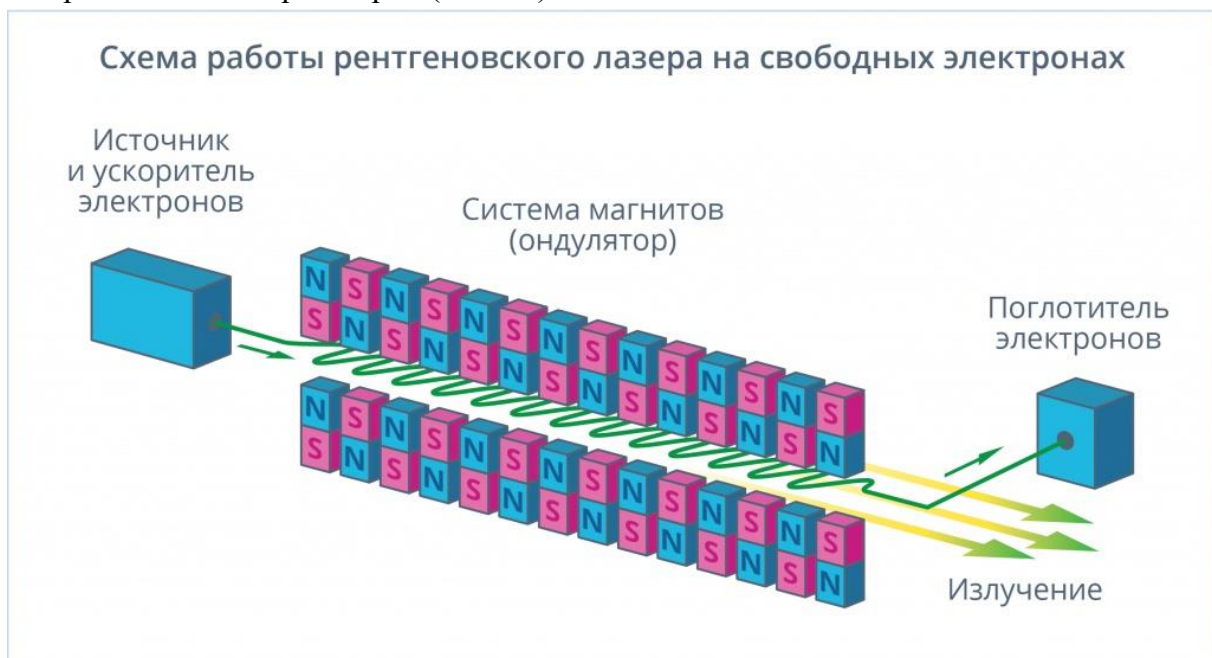


Рис.6.4. Лазер на свободных электронах.

Такое движение электронов приводит к излучению в рентгеновской области, так как

$$v = \frac{v}{d} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Если записать поправку в виде энергии

$$v = \frac{v}{d} \left( \frac{W}{mc^2} \right)^2$$

## Удержание магнитных наночастиц

Наночастицы очень широко применяются в медицине. Они могут работать как контрастный агент в МРТ, в процессе доставки лекарств и в магнитной гипертермии.

Проблема заключается в создании такого магнитного поля, которое бы действовало в том числе и на глубоко залегающие образования организма.

Решение может быть в том, что при правильной конфигурации расположения магнитов начать вращать их и таким образом добиться минимума по энергии (Рис.6.5).

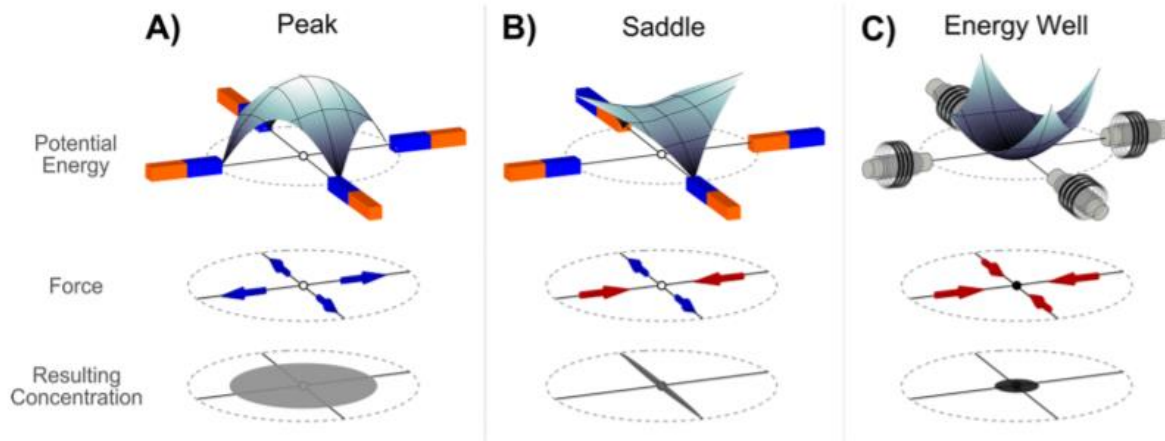


Рис.6.5. Расположение магнитов и ландшафты потенциальной энергии.  
Работа A.Nacev et al. *Dynamic Inversion Enables External Magnets To Concentrate Ferromagnetic Rods to a Central Target. Nano letters, 2015*

## Лекция 7. Параметрический резонанс

### Параметрическое воздействие с частотами, соизмеримыми с частотой колебания системы

В этой лекции будет рассматривать такие системы, которые подвергаются воздействию на частоте колебания системы или удвоенной частоте собственных колебаний системы.

Параметрические воздействия хорошо знакомы нам с детства. В случае, когда мы производим самостоятельное раскачивание на качелях, происходит изменение длины подвеса (Рис.7.1).

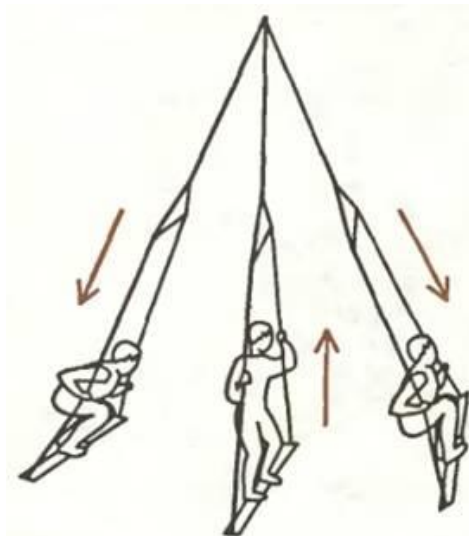


Рис.7.1. Раскачивание на качелях.  
Случай параметрического воздействия.

Еще одним примером могут служить колебания в трубе сноубордистов или хафпайп (Рис.7.2).

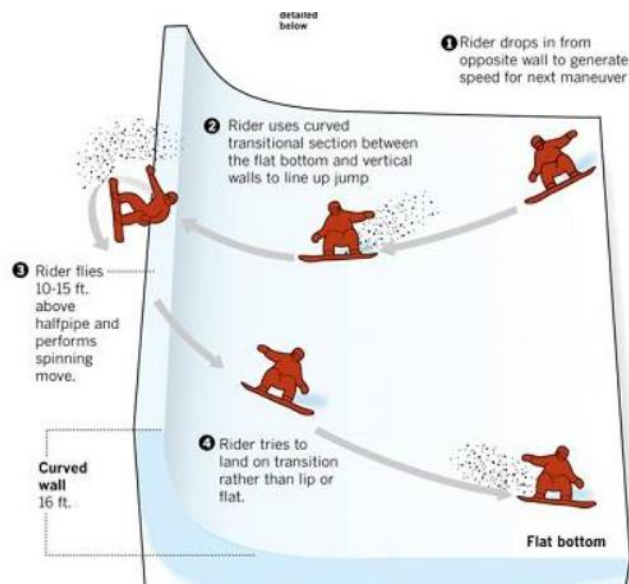


Рис.7.2. Хафпайп.

Также в 1860 году Мельде провел опыт, в котором колеблющийся камертон достаточно эффективно возбуждает колебания в струне (Рис.7.3). Причем интервал между камертоном и струной должен быть равен октаве.

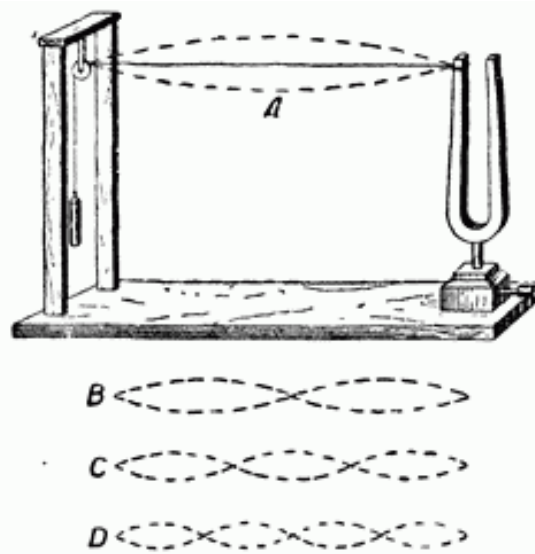


Рис.7.3. Опыт Мельде

При силовом воздействии на струну это будет резонанс, а в опыте Мельде камертон колеблется в два раза чаще.

Примером из электричества снова выступает LC-контур. Мы можем менять расстояние между обкладками конденсатора, что влияет на амплитуду колебаний.

Такого рода опыт был проделан Мандельштамом и Папалекси, которые соорудили параметрическую машину (Рис.7.4).

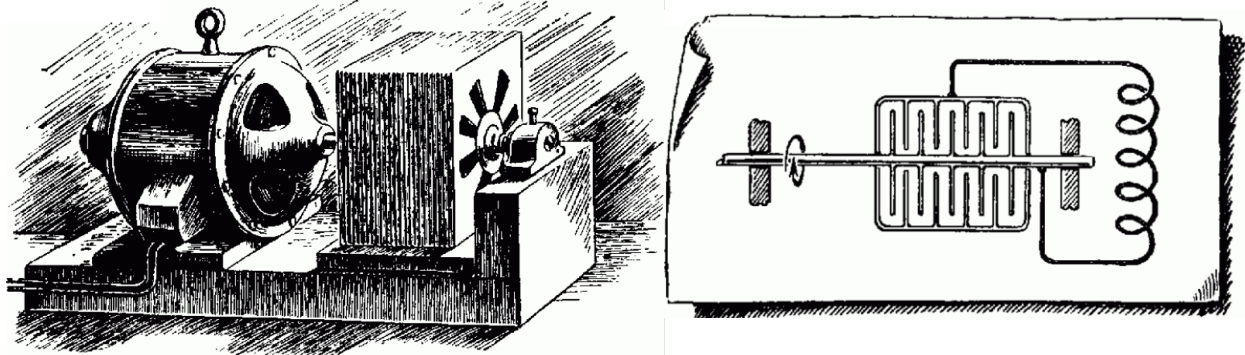


Рис.7.4. Параметрическая машина Мандельштама-Папалекси.

Лопасты вентилятора являлись обкладками. Когда ротор крутился относительно обкладок статора – емкость периодически изменялась. 4000 оборот в минуту совершал двигатель.

Разберем теперь как происходит накачка колебаний

Энергия конденсатора

$$\Delta W = \frac{q^2}{2(C_0 - \Delta C)} - \frac{q^2}{2(C_0 + \Delta C)} = \frac{q^2}{2} \frac{2\Delta C}{(C_0^2 - \Delta C^2)} = \frac{q^2}{2C_0} 2 \frac{\Delta C}{C_0}$$

Это вкаченная энергия за половину периода.

$$\Delta W_T = 2W_0 2 \frac{\Delta C}{C_0} = 4W_0 m, \quad m = \frac{\Delta C}{C_0}$$

Энергия расходуется на потери. Мы их оценим с помощью добротности

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{зап}}}{\Delta W_{\text{пот}}}$$

Тогда оценим потери как

$$\Delta W_{\text{пот}} = 2\pi \frac{W_0}{Q}$$

И условие параметрического возбуждения есть

$$m \geq \frac{\pi}{2Q}$$

Теперь рассмотрим более физический случай, когда емкость изменяется по гармоническому закону

$$C(t) = C_0(1 + m \cos 2\omega t)$$

$$U(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

И энергия за период будет равна

$$\Delta W_T = \int_{q(0)}^{q(T)} U dq = \int_{c(0)}^{c(T)} U^2 dC$$

$$\begin{aligned} \Delta W_T &= \int_0^T -2\omega A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) C_0 m \sin 2\omega t dt \\ &= -\omega C_0 A^2 m \int_0^T (\sin 2\omega t dt + \cos(2\omega t + 2\varphi) \sin 2\omega t dt) \\ &= + \frac{\omega C_0 A^2 m}{2} \int_0^T \sin(2\varphi) dt = \frac{\omega T C_0 A^2}{2} m \sin(2\varphi) \\ \Delta W_T &= \pi m W_0 \sin(2\varphi) = \pi m W_0 = 2\pi \frac{W_0}{Q} \rightarrow m \geq \frac{2}{Q} \end{aligned}$$

Таким образом, воздействуя на систему на частоте  $2\omega$ , можно возбудить колебания системы. Это явление называется **параметрическим резонансом**. То есть возбуждение колебаний за счет периодического изменения энергоемкого параметра системы.

### Параметрический резонанс в линейной системе

Запишем уравнение для  $LC$ -контура

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c} = 0$$

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2[1 + m \cos(pt)]q = 0$$

Мы точно не сможем установиться на двойную частоту. Всегда будет погрешность. То есть должен быть интервал частот, в котором происходит накачка.

А вид зависимости коэффициента модуляции от частот показан на Рис.7.5.

Наше уравнение, получившееся сверху, имеет название уравнения Матъё.

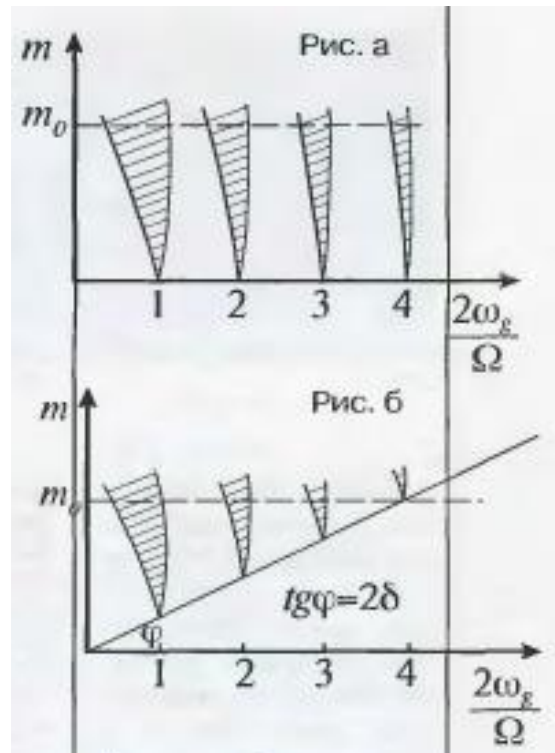


Рис.7.5. График зависимости коэффициента модуляции от отношения частоты накачки и собственной частоты. Здесь  $\Omega = p$ .

А амплитудная характеристика имеет интересный вид, так как она уходит на бесконечность как в случае силового резонанса в отсутствие трения.

Давайте рассмотрим как осуществляется накачка при силовом резонансе

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{накач}} &= \int_{q(0)}^{q(T)} U_0 \cos(pt) dq = U_0 A \omega \int_0^T \cos(pt) \cos(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{U_0 A \omega}{2} \left[ \int_0^T \cos(pt + \omega t + \varphi) dt + \int_0^T \cos(pt - \omega t - \varphi) dt \right] = \frac{U_0 A \omega T}{2} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\Delta W_{\text{накач}} = \pi U_0 A \sim q_0$$

При параметрической накачке имеем

$$\Delta W = \pi W_0 \sim q_0^2$$

Но здесь важно учитывать не только наличие трения, но и нелинейность сопротивления. Тогда амплитуда при параметрической накачке будет расти быстрее, чем  $q_0^2$  и становится ограниченной.

### Система с малой нелинейностью

Теперь рассмотрим приближенный расчет параметрического возбуждения колебаний в системе с малой нелинейностью. Учитывать мы ее будет следующим образом

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2[1 + m \cos(2\omega t)]q + \gamma q^3 = 0$$

Решаем в виде

$$q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

Пусть  $\delta = 0$ , тогда

$$-a\omega^2 \cos(\omega t) - b\omega^2 \sin(\omega t) - \omega_0^2[1 + m \cos(2\omega t)](a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) + \gamma q^3 = 0$$

$$m\omega_0^2 \cos(2\omega t)(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

$$= m\omega_0^2 \left[ \frac{a}{2} (\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)) + \frac{b}{2} (\sin(3\omega t) + \sin(-\omega t)) \right]$$

$$= m\omega_0^2 \left[ \frac{a}{2} \cos(\omega t) - \frac{b}{2} \sin(\omega t) \right]$$

Теперь сводим баланс

$$\cos(\omega t): -a\omega^2 + \omega_0^2 a + m\omega_0^2 \frac{a}{2} + \gamma A^2 a \frac{3}{4} = 0$$

$$a \neq 0, \quad A^2 = \frac{4 \left( \omega^2 - \omega_0^2 \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \right)}{3\gamma}$$

Тогда зависимость квадрата амплитуды от квадрата частоты есть прямая.

Для синуса имеем похожее уравнение

$$\sin(\omega t): -b\omega^2 + \omega_0^2 b - m\omega_0^2 \frac{b}{2} + \gamma A^2 b \frac{3}{4} = 0$$

$$b \neq 0, \quad A^2 = \frac{4 \left( \omega^2 - \omega_0^2 \left( 1 - \frac{m}{2} \right) \right)}{3\gamma}$$

Имеем прямую с тем же наклоном, но теперь она выходит из другой точки.

Таким образом, у нас два вида решений: устойчивые и неустойчивые. Причем ветка, которая возникает в случае с синусом является устойчивой, а в случае с косинусом – неустойчивой (то есть это касается типа решений на ветке).

### Вынужденные колебания в параметрически регенерируемой системе

В уравнение Матьё теперь добавится правая часть

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2[1 + m \cos(2\omega t)]q = \frac{U_0}{L} \cos(pt + \varphi_0)$$

**Параметрически регенерируемая система** – это колебательная система, в которой энергетические потери частично или полностью скомпенсированы за счет параметрического воздействия.

Для решения таких систем будет использовать метод перехода к безразмерному времени

$$q(t) = a \cos \tau + b \sin \tau, \quad \tau = \omega t$$

Тогда вид производных будет

$$\dot{q} = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{d(\omega t)} = \frac{dq}{dt} \frac{1}{\omega}$$

И запишем следующее

$$\omega^2 q'' + 2\delta q' \omega + \omega_0^2 [1 + m \cos(2\tau)] q = \frac{U_0}{L} \cos(pt + \varphi_0)$$

$$q'' + \frac{2\delta}{\omega} q' + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} [1 + m \cos(2\tau)] q = E \cos(pt + \varphi_0)$$

Переход к безразмерному времени нужен для того чтобы упростить уравнение, а также выделить наиболее интересные слагаемые в рассматриваемых уравнениях.



## Лекция 8. Метод медленно меняющихся амплитуд

### Одноконтурный параметрический усилитель

Продолжим решение задачи в случае наличия внешней силы. Как мы помним, произошел переход к безразмерному времени

$$q'' + 2\theta q' + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} [1 + m \cos(2\tau)]q = E \sin(\tau + \varphi)$$

$$\varphi = \xi\tau + \varphi_0, \quad \xi = \frac{p - \omega}{\omega}, \quad \omega = \omega_0$$

Решаем методом гармонического баланса

$$q = u \cos \tau + v \sin \tau$$

Теперь распишем для удобства некоторые слагаемые

$$m \cos 2\tau (u \cos \tau + v \sin \tau) = mu \frac{1}{2} \cos \tau - mv \frac{1}{2} \sin \tau$$

$$E \sin(\tau + \varphi) = E \sin \tau \cos \varphi + E \cos \tau \sin \varphi, \quad Q = E \cos \varphi, \quad P = E \sin \varphi$$

$$\cos \tau: 2\theta v + mu \frac{1}{2} = P$$

$$\sin \tau: -2\theta u - mv \frac{1}{2} = Q$$

Представляем систему в виде матрицы

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 2\theta \\ -2\theta & -\frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

Тогда для  $u$  и  $v$  имеем

$$u = \frac{\begin{bmatrix} P & 2\theta \\ Q & -\frac{m}{2} \end{bmatrix}}{\det}, \quad v = \frac{\begin{bmatrix} \frac{m}{2} & P \\ -2\theta & Q \end{bmatrix}}{\det}$$

Тогда для квадрата амплитуды получим

$$A^2 = u^2 + v^2 = \frac{\left(P \frac{m}{2} + 2\theta Q\right)^2 + \left(\frac{m}{2} Q + 2\theta P\right)^2}{\det^2}$$

$$= \frac{P^2 \frac{m^2}{4} + 2\theta m P Q + 4\theta^2 Q^2 + Q^2 \frac{m^2}{4} + 2\theta m P Q + 4\theta^2 P^2}{\det^2}$$

$$= \frac{E^2 \frac{m^2}{4} + E^2 2\theta m \sin 2\varphi + 4\theta^2 E^2}{\det^2}$$

$$A^2 = E^2 \frac{\frac{m^2}{4} + 2\theta m \sin 2\varphi + 4\theta^2}{\left(-\frac{m^2}{4} + 4Q^2\right)^2}$$

Рассмотрим случай, когда расстройки по частоте нет  $\xi = 0$ ,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

$$A^2 = \frac{\left(\frac{m}{2} + 2\theta\right)^2}{\left(\frac{m}{2} + 2\theta\right)^2 \left(-\frac{m}{2} + 2\theta\right)^2} E^2 = \frac{E^2}{\left(-\frac{m}{2} + 2\theta\right)^2}$$

Вспомним как логарифмический декремент затухания связан с добротностью

$$Q = \frac{1}{2\theta}$$

В случае, если  $m \neq 0$  может амплитуда уйти на бесконечность. Это явление сильного резонанса.

Теперь рассмотрим случай  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$

$$A^2 = \frac{\left(\frac{m}{2} - 2\theta\right)^2}{\left(\frac{m}{2} + 2\theta\right)^2 \left(-\frac{m}{2} + 2\theta\right)^2} E^2 = \frac{E^2}{\left(\frac{m}{2} + 2\theta\right)^2}$$

Это случай слабого резонанса.

Теперь пусть расстройка не равна нулю. В этом случае происходят осцилляции между двумя крайними положениями, то есть наблюдаются биения.

### Метод медленного меняющихся амплитуд (ММА)

В данном методе также вводится безразмерное время. Давайте запишем уравнение колебаний в общем виде

$$x'' + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} x = \text{Затух}(x'), \text{нелин.}(x), \text{парам}(m)$$

$$x'' + x = \mu(x', x, \tau)$$

Решения ищем в виде

$$x = u(\tau) \cos \tau + v(\tau) \sin \tau$$

То есть сейчас обе амплитуды будут меняться. Для производной имеем

$$x' = u' \cos \tau - u \sin \tau + v' \sin \tau + v \cos \tau$$

Введем дополнительное условие:

$$u' \cos \tau + v' \sin \tau = 0$$

Тогда матрица перехода выглядит следующим образом

$$\begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл данной матрицы в повороте системы координат на угол  $\tau$ .

Смысл перехода к новой системе координат заключается в том, что мы можем рассматривать исключительно медленное изменение амплитуд

$$x'' + x = -u' \sin \tau - u \cos \tau + v' \cos \tau - v \sin \tau + u \cos \tau + v \sin \tau = \mu$$

$$\begin{cases} u' = -\mu \sin \tau \\ v' = \mu \cos \tau \end{cases}$$

Теперь давайте проведем усреднение по периоду

$$\begin{cases} u' \approx -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \sin \tau d\tau = \varphi(u, v) \\ v' \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \cos \tau d\tau = \psi(u, v) \end{cases}$$

Получились укороченные уравнения. Простота таких уравнений в том, что мы избавляемся от  $\tau$ .

### ММА: рассмотрение устойчивости стационарных состояний

Пусть колебания приходят к стационарному режиму. То есть функции  $\varphi$  и  $\psi$  должны равняться нулю

$$\begin{cases} \varphi(u_0, v_0) = 0 \\ \psi(u_0, v_0) = 0 \end{cases}$$

Тогда можно представить

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \xi \\ v &= v_0 + \eta \end{aligned}$$

И исходное уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \xi' &= \varphi(u_0 + \xi, v_0 + \eta) = \varphi(u_0, v_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \eta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= a_{11}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = a_{12} \\ &\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

А решение ищем в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \exp(\lambda \tau) \\ \eta &= \eta_0 \exp(\lambda \tau) \end{aligned}$$

Тогда получаем однородные уравнения в измененной матрице

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$$

В случае, если  $\lambda < 0$  небольшие добавки  $\xi$  и  $\eta$  стремятся к нулю. Это состояние будет устойчиво.

### Применение метода ММА

Теперь в случае параметрического возбуждения применим метод ММА.

$$q'' + q = -2\theta q' - qm \cos 2\tau$$

Решение ищем в виде

$$q = u(\tau) \cos \tau + v(\tau) \sin \tau$$

Сразу же перейдем к укороченным уравнениям

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-2\theta q' - qm \cos 2\tau] \sin \tau d\tau \\ v' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-2\theta q' - qm \cos 2\tau] \cos \tau d\tau \end{cases}$$

$$u' = -\frac{1}{2\pi} \left[ -2\theta \int_0^{2\pi} (-u \sin \tau + v \cos \tau) \sin \tau d\tau - m \int_0^{2\pi} (u \cos \tau + v \sin \tau) \cos 2\tau \sin \tau d\tau \right]$$

$$= -\frac{2\theta u}{2} - \frac{m}{4}v = -\theta u - \frac{m}{4}v$$

$$v' = -\theta v - \frac{m}{4}u$$

Тогда вид матрицы следующий

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta & -\frac{m}{4} \\ \frac{m}{4} & -\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

В случае покоя  $u = v = 0$

$$u = \xi$$

$$v = \eta$$

Тогда для уравнения получим

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta & -\frac{m}{4} \\ \frac{m}{4} & -\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Далее получаем однородное уравнение

$$(\theta + \lambda)^2 - \left(\frac{m}{4}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = -\theta \pm \frac{m}{4}$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда  $\lambda > 0$ . В этом случае происходит возбуждение колебаний, то есть состояние будет неустойчивым.

Тогда можно снова получить знакомое нам условие возбуждения при параметрическом резонансе

$$m \geq \frac{2}{Q}$$

## Лекция 9. Элементы теории автоколебаний

### Метод ММА с медленно меняющейся амплитудой и фазой

Постановка данной задачи похожа на предыдущие.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \text{трение, нелин. , расстройка, ...}$$

Снова переходим к безразмерному времени

$$\tau = \omega t$$

$$x'' + x = \mu(x', x, \tau)$$

Теперь уже решение ищем в виде

$$x = A(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau))$$

То есть две медленно меняющиеся величины: амплитуда и фаза, которые обе зависят от времени  $\tau$ .

Найдем первую производную

$$x' = A' \cos(\tau + \varphi) - A \sin(\tau + \varphi) (1 + \varphi')$$

Введем дополнительное условие:

$$A' \cos(\tau + \varphi) - A \sin(\tau + \varphi) \varphi' = 0$$

Тогда останется только

$$x' = A' \cos(\tau + \varphi) - A \sin(\tau + \varphi)$$

Берем вторую производную

$$x'' = -A' \sin(\tau + \varphi) - A \cos(\tau + \varphi) - A \cos(\tau + \varphi) \varphi'$$

Далее перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} A' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \sin(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi) \\ A\varphi' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \cos(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi) \end{cases}$$

Получили укороченные уравнения.

Геометрический смысл этих операций заключается в том, что мы можем наблюдать медленно изменяющийся параметр.

То есть была выбрана другая система координат, но тоже в движущейся системе отчета. Смысл фазы в том, на сколько она отстает или опережает общее движение с частотой  $\omega_0$ .

### Автоколебания. Общие определения

**Автоколебания** – незатухающие колебания в диссипативной динамической системе с нелинейной обратной связью, поддерживающейся за счет энергии постоянного внешнего воздействия (По Википедии).

Первые часы с ходиками были созданы Х. Гюйгенсом. Маятник колебался за счет наличия специального устройства – анкера.

Потом Роберт Гук предложил вместо маятника использовать пружины. Причем не только в качестве колебательной системы, но и в качестве источника энергии.

В начале XX века А.А.Андронов осмыслил эти явления и объединил их термином автоколебания. Он также подчеркнул, что автоколебания происходят в нелинейных, неконсервативных активных системах.

**Активная система** – это система, в которой незатухающие колебания поддерживаются за счет постоянно действующего источника энергии, включенного в саму систему.

Между источником энергии и накопителем энергии существует обратная связь, которая связывается с управляющим устройством.

Кроме того, существует другой класс автоколебательных систем. Для примера рассмотрим вазу Тантала (Рис.9.1).

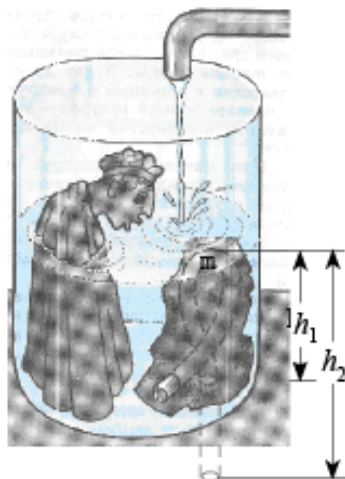


Рис.9.1. Ваза Тантала.

Кроме фигуры Тантала на Рис.9.1 можно наблюдать скалу, которая маскирует U-образную трубку. У нее есть два колена разной длины. При наполнении воды происходит быстрый слив воды при достижении уровня  $h_1$ , что не дает Танталу выпить воды.

Тогда вопрос, где здесь вообще колебательная система? Текущая вода будет источником энергии, а колебательной системы – столб воды, а регулирующей обратной связью будет сифонная трубка.

Еще можно рассмотреть принцип работы электрического звонка (Рис.9.2).

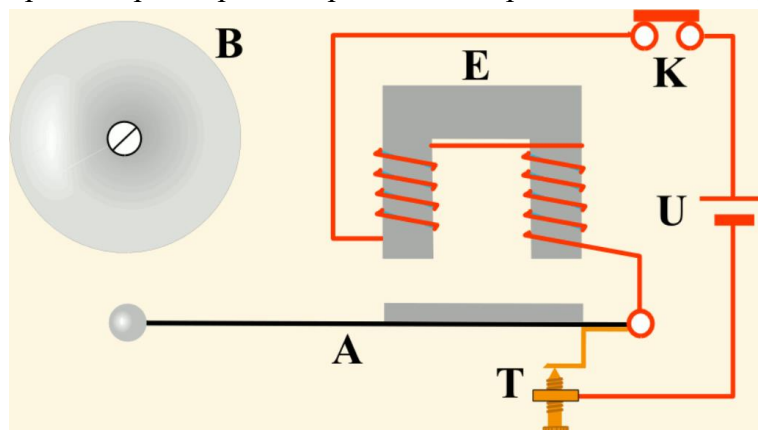


Рис.9.2. Схема электрического звонка.

Если мы замкнем ключ, то по цепи потечет ток, ферромагнит сработает и притянет металлическую пластинку и она ударяет по звонку и получается характерный звук. При этом он размыкает цепь и падает обратно.

То есть колебания не гармонические, а имеют пилообразную форму.

Электрическим аналогом является  $RC$ -цепочка с постепенно заряжающимся конденсатором (Рис 9.3).

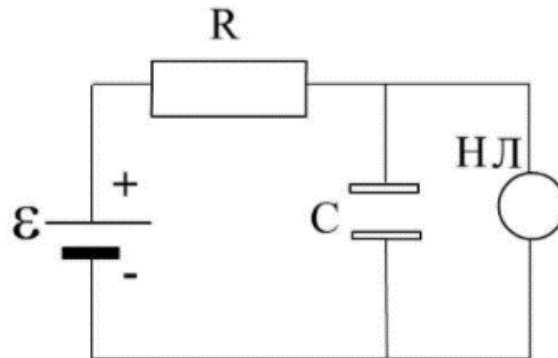


Рис.9.3.  $RC$ -цепь.

Когда напряжение на конденсаторе превысит некоторое критическое, то срабатывает шунт через газоразрядную лампу и конденсатор быстро разряжается.

То есть автоколебательные системы делятся на два больших типа: **томсоновские** и **релаксационные**.

В первом типе колебания происходят по **гармоническому закону**. А во втором типе они **негармонические**.

Еще одна важная вещь, в отсутствие питания в томсоновских системах наблюдаются затухающие колебания, а в релаксационных системах произойдет остановка движения прямо в том же периоде.

### Применение ММА в случае автоколебательных систем томсоновского типа

Пусть у нас есть  $RLC$ -контур, в котором в качестве внешнего источника энергии выступает связанная с катушкой вторая катушка. Их коэффициент взаимной индукции равен  $M$ .

Найдем сумму напряжений контура

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = M \frac{di_{C-и}}{dt}$$

Здесь  $i$  – есть ток стока истока, который течет через полевой транзистор, подключенный ко второй катушке.

$$LC \frac{d^2U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = M \frac{di_{C-и}}{dU} \frac{dU}{dt} = MS \frac{dU}{dt}$$

А транзистор свою очередь характеризует его крутизна, которая показывает отношение изменения тока стока истока к изменению напряжения на затворе.

$$\frac{\Delta i_{C-и}}{\Delta U_3} = S$$

То есть приходим к уравнению

$$U'' + U = (MS(U) - RC)\omega_0 U'$$

$$U'' + U = \left( M\omega_0 S(U) - RC \frac{\omega_0^2}{\omega_0} \right) U'$$

Или после преобразований

$$\mu = [M\omega_0 S(U) - 2\theta] U'$$

Теперь распишем ток стока-истока

$$i_{c-и} = i_0 + S_0 U + S_1 U^2 + S_2 U^3$$

С условием того, что нам будет интересно рассчитывать, получим

$$i_{c-и} = S_0 U + S_2 U^3 + S_4 U^5$$

И для крутизны получим

$$S(U) = S_0 + 3S_2 U^2 + 5S_4 U^4$$

Начнем писать укороченные уравнения

$$A' = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} [M\omega_0 S(U) - 2\theta] \sin^2(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi)$$

$$= \frac{A}{2\pi} [M\omega_0 S_0 - 2\theta] \int_0^{2\pi} \sin^2(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi)$$

$$+ \frac{3A}{\pi} [M\omega_0 S_2] \int_0^{2\pi} U^2 \sin^2(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi)$$

$$+ \frac{5A}{\pi} [M\omega_0 S_4] \int_0^{2\pi} U^4 \sin^2(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi)$$

$$= A \left[ \frac{M\omega_0 S_0}{2} - \theta \right] + \frac{3A^3}{8} M\omega_0 S_2 + \frac{5}{16} A^5 M\omega_0 S_4$$

Окончательно имеем

$$A' \approx -\theta A + \frac{M\omega_0}{2} A \left( S_0 + \frac{3}{4} A^2 S_2 + \frac{5}{8} A^4 S_4 \right)$$

Теперь можно проделать аналогичные вычисления для второго укороченного уравнения, но там все удачно обнуляется

$$A\varphi' = 0$$

Баланс энергии в данном случае будет положительный в том случае, когда

$$\left( S_0 + \frac{3}{4} A^2 S_2 + \frac{5}{8} A^4 S_4 \right) \frac{M\omega_0}{2} > \theta = \frac{\delta}{\omega_0}$$

$$\left( S_0 + \frac{3}{4} A^2 S_2 + \frac{5}{8} A^4 S_4 \right) > \frac{2\delta}{M\omega_0^2} = \frac{RC}{M}$$

$$\left( S_0 + \frac{3}{4} A^2 S_2 + \frac{5}{8} A^4 S_4 \right) = \langle S \rangle$$

Отсюда вытекают два режима: мягкий и жесткий.



В случае, когда  $S_2 < 0$  наблюдается мягкий режим колебаний, а если  $S_2 > 0$  и при этом  $S_4 < 0$ , то будет жесткий режим (Рис.9.4).

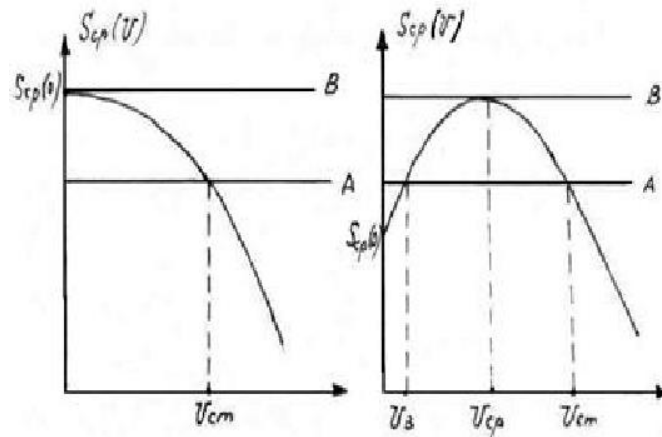


Рис.9.4. Два случая колебаний: слева – мягкий режим, справа – жесткий.

## Лекция 10. Автоколебания: мягкий и жесткий режим в томсоновских системах. Системы релаксационного типа

### Мягкий и жесткий режимы возбуждения колебаний

Мы помним, что на прошлой лекции было введено понятие средней крутизны

$$\langle S \rangle = S_0 + \frac{3}{4}A^2S_2 + \frac{5}{8}A^4S_4 + \dots$$

$$S_4 < 0$$

Причем в зависимости от знака  $S_2$  различают мягкий и жесткий режимы.

Сначала рассмотрим **мягкий режим**

$$A' \approx -\theta A + \frac{M\omega_0}{2}A \langle S \rangle$$

$$\langle S \rangle = \frac{2\theta}{M\omega_0} = \frac{2\delta}{M\omega_0^2} = \frac{RC}{M}$$

И условие возбуждения колебаний есть

$$\langle S \rangle \geq \frac{RC}{M}$$

Как мы помним,  $S_2 < 0$

Тогда для укороченного уравнения получим

$$A' \approx -\theta A + \frac{M\omega_0}{2}AS_0 + \frac{M\omega_0}{2}\frac{3}{4}A^3S_2 + \frac{M\omega_0}{2}\frac{5}{8}A^5S_4$$

А в случае **жесткого режима**  $S_2 > 0$

Для упрощения записи, объединим первые слагаемые в  $\theta_{эфф}$

$$\theta_{эфф} = \theta - \frac{M\omega_0}{2}S_0$$

А также введем  $\gamma$  и  $\varepsilon$

$$\gamma = \frac{3}{8}M\omega_0S_2$$

$$\varepsilon = \frac{5}{16}M\omega_0S_4$$

И получаем

$$A' \approx (-\theta_{эфф} + \gamma A^2 + \varepsilon A^4)A, \quad A = A_0 + \xi$$

Для мягкого режима  $\gamma < 0$ ,  $\varepsilon < 0$

Стационарное решение, когда  $A' = 0$

$$A_0 = 0$$

Тогда для  $A'$  получим

$$A' = -\theta_{эфф}\xi + \dots$$

$$\xi = \xi_0 \exp(\lambda t)$$

$$\lambda \xi_0 \exp(\lambda t) = -\theta_{эфф}\xi_0 \exp(\lambda t)$$

Таким образом, устойчивые колебания будут при условии

$$\lambda < 0 \rightarrow \theta_{эфф} > 0$$

Пусть теперь  $A_0 \neq 0$

В этом случае

$$A_0^2 = \frac{\theta_{\text{эфф}}}{\gamma}$$

Теперь проведем исследование на устойчивость.

$$A' = -\theta_{\text{эфф}}(A_0 + \xi) + \gamma(A_0 + \xi)^3 + \dots = -\theta_{\text{эфф}}A_0 - \theta_{\text{эфф}}\xi + \gamma A_0^3 + 3\gamma A_0^2 \xi$$

В этом уравнении мы не продолжаем запись слагаемых в виду их малости.

И с учетом предыдущего равенства получаем

$$\lambda = 2\theta_{\text{эфф}}$$

Устойчивость возникает тогда, когда

$$\theta_{\text{эфф}} < 0$$

Далее обратимся к жесткому режиму, когда  $\gamma > 0$  и  $\varepsilon < 0$

Разница в том, что в случае, когда  $\theta_{\text{эфф}} < 0$  нельзя будет пренебрегать старшими членами разложения (так как большая скобка обнуляться не будет).

$$A' = 0, \quad A = 0 - \text{покой}$$

$$A \neq 0 - \text{стац. колебания}$$

$$A' = -\theta_{\text{эфф}} - \gamma A^2 + |\varepsilon| A^4 = 0$$

$$A_{1,2}^2 = \frac{\gamma}{2|\varepsilon|} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4\varepsilon^2} - \frac{\theta_{\text{эфф}}}{|\varepsilon|}}$$

В данном случае возникает область с несколькими решениями.

Анализ на устойчивость проведем с предположением, что

$$A' = -(A^2 - A_1^2)(A^2 - A_2^2)A$$

Решение также ищем в виде

$$A = A_{1,2} + \xi$$

Подставить это значение и найти решения предлагается самостоятельно.

Посмотрим теперь на фазовые плоскости таких колебаний (Рис.10.1).

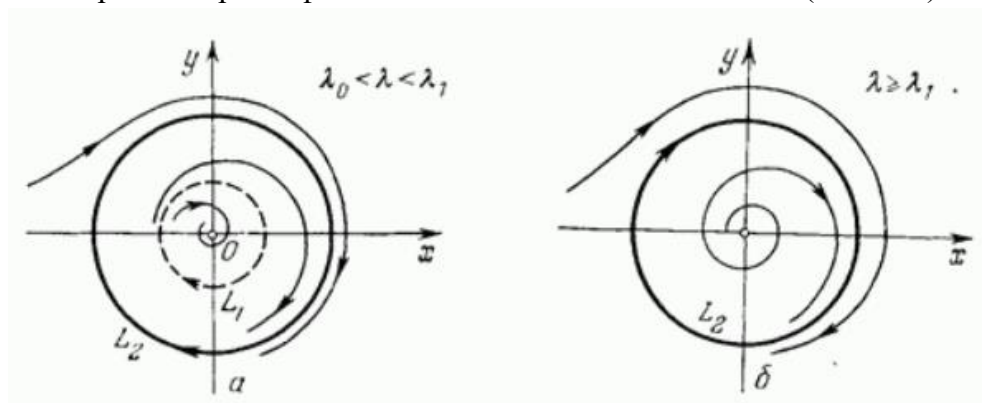


Рис.10.1. Мягкий режим –слева, жесткий режим – справа.

В случае мягкого режима малое отклонение от положения равновесия приводит к раскачке колебаний. И мы выходим на некоторый предельный цикл, на стационарный режим.

В жестком режиме есть два решения. По одной траектории движение неустойчивое. При отклонении мы приходим к устойчивому предельному циклу.

### Автоколебательные системы релаксационного типа

В природе системой релаксационного типа является гейзер (Рис.10.2). Происходит медленное накопление воды в поверхностном слое земли и резкое очень быстрое извержение горячей воды.

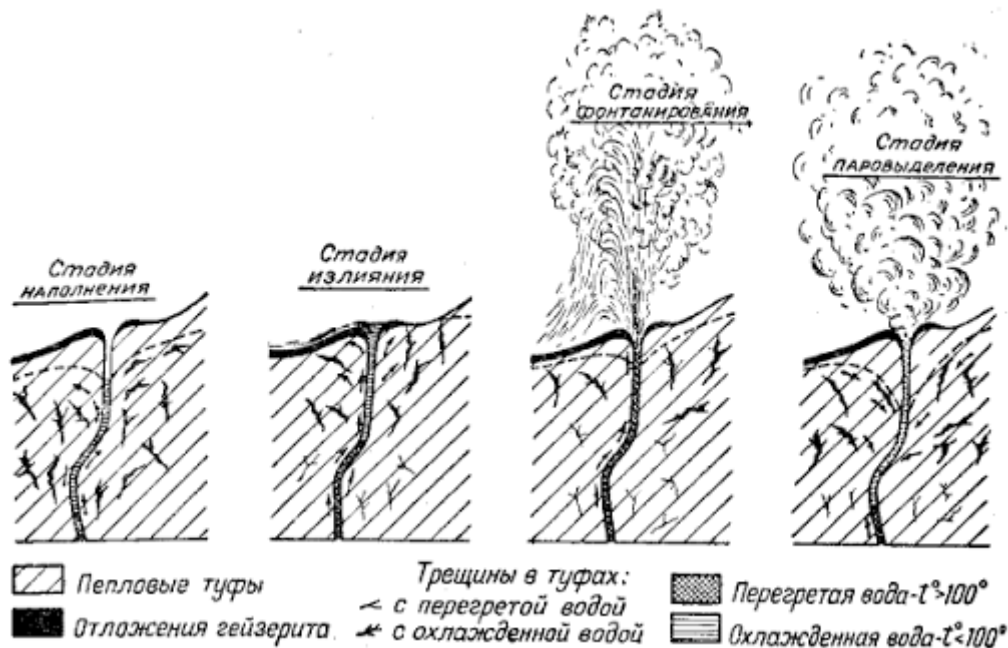


Рис.10.2. Стадии образования и извержения гейзера.

Также интересно рассматривать фрикционные автоколебания. Одним из примером которых будет возбуждение колебаний когда мы водим пальцем по краю резонатора – краю бокала. Они происходят из-за того, что подушка пальца срывается с этого края.

Теперь будем рассматривать релаксационные колебания в RC-цепочке (Рис.10.3).

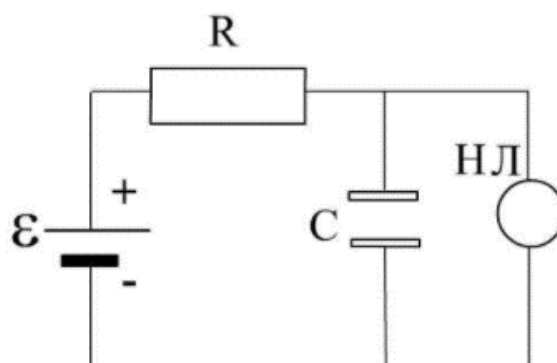


Рис.10.3. RC-цепь.

Запишем уравнение Кирхгофа

$$E = (I_C + \varphi(U))R + U$$

$$RC \frac{dU}{dt} = E - U - R\varphi(U)$$

Понятно, что стационарное состояние когда

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

Такие уравнения решают графически с помощью метода нагрузочной кривой.

$$\frac{E - U_0}{R} = \varphi(U_0), \quad U = U_0 + \eta$$

Здесь может быть до трех решений.

$$RC \frac{d\eta}{dt} = E - U_0 - \eta - R\varphi(U_0) - R \left. \frac{\partial \varphi}{\partial U} \right|_{U=U_0} * \eta = - \left( 1 + R \frac{\partial \varphi}{\partial U} \right) \eta$$

Состояние будет устойчивым, когда

$$\left( 1 + R \frac{\partial \varphi}{\partial U} \right) > 0$$

И соответственно неустойчивое положение в случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial U} < 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial U} > \frac{1}{R}$$

Подробнее про устойчивые и неустойчивые положения можно посмотреть на графике на Рис.10.3.

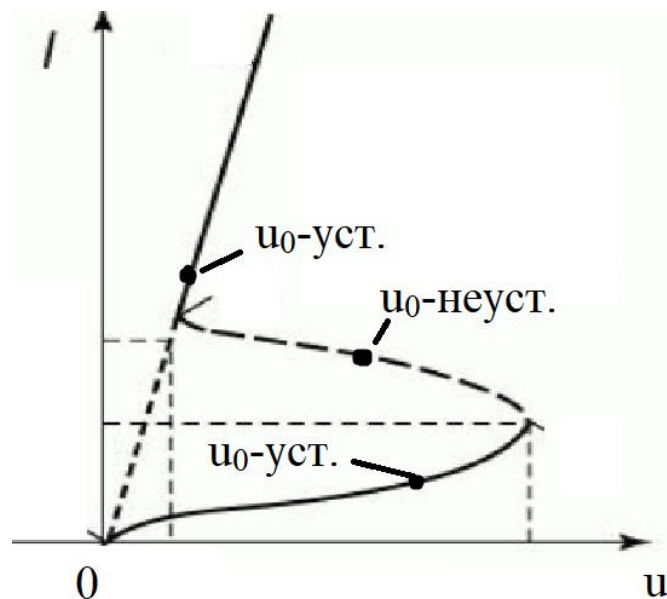


Рис.10.4. ВАХ бистабильного элемента.

Стоит отметить, что в контуре присутствует некая паразитная индуктивность  $L$ .

$$E = (I_C + \varphi(U))R + U + L_{\text{паразит}} C \frac{d^2 U}{dt^2}$$

Это аккуратное рассмотрение с учетом емкости проводов.

А случай пренебрежения  $L$  называется разрывной трактовкой. При этом возникают скачки тока через конденсатор, газоразрядный прибор. Но общая сумма тока на самом деле скачков не претерпевает.

Тогда можно записать условие скачка при разрыве трактовки колебания

$$U|_{t+0} = U|_{t-0} = U_C = U$$



## Лекция 11. Внешнее воздействие на автоколебательные системы. Синхронизация автоколебаний

### Качественное рассмотрение релаксационных автоколебаний методом фазовой плоскости

Снова вернемся к контуру  $RC$ , в котором присутствует газоразрядный элемент.

$$RC \frac{dU}{dt} = E - U - R\varphi(U) - LC \frac{d^2U}{dt^2}, \quad y = I_c = C \frac{dU}{dt}$$

Теперь давайте убедимся что будет, если мы устремим  $L \rightarrow 0$

$$Ry = E - U - R\varphi(U) - L \frac{d}{dt} C \frac{dU}{dt}$$

Проведем небольшие перестановки

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dy}{du} y$$

И после выражения производной, получим

$$\frac{dy}{du} = \frac{E - U - R\varphi(U) - Ry}{Ly} C$$

Стационарное решение выражается как

$$y = \frac{E - U}{R} - \varphi(U)$$

То есть в координатах  $(U, y)$  это снова S-образная кривая, которая обращается в ноль, когда слагаемые будут равны.

Пока мы остаемся на кривой числитель этой кривой будет равен нулю. В случае, когда мы от нее отходим, числитель – конечное число.

При стремлении знаменателя к нулю, производная при конечном числителе стремится к бесконечности.

Таким образом, верхняя ветвь устойчивая. Далее происходит скачок к нижней ветви. Это является петлей гистерезиса.

### Воздействие внешней гармонической силы на автоколебательную систему с одной степенью свободы.

Пусть теперь в нашей системе возникает внешняя гармоническая сила. То есть посмотрим как происходит резонанс в таких системах. Здесь стоит ввести понятие синхронизации.

**Синхронизация** – это явление, при котором колебательная система переходит и остается в состоянии колебаний, когда частота вынуждающей силы и частота колебаний системы равны друг другу или относятся как небольшие целые числа.

Наиболее яркий пример синхронизации – кардиостимулятор. Он «навязывает» свою частоту автоколебательной системе, то есть сердцу.

Именно Пифагор утверждал, что звуки образуют гармонические созвучия тогда, когда длины струн своими отношениями образуют небольшие целые числа.

Один из явных примеров масштабной планетарной синхронизации это явление синхронизации планеты Земля и Луны. Мы все время видим одну часть Луны из-за того, что движения этих небесных тел синхронизированы 1:1.

Более сложные случаи обращения планет вокруг Солнца можно встретить у Меркурия. Сутки на нем очень длинные, они составляют два меркурианских года. А частота вращения относится к частоте обращения как

$$\frac{\omega_{\text{вращ}}}{\omega_{\text{обращ}}} = \frac{3}{2}$$

То есть и получается одни сутки за два года.

Для Венеры выражение значительно сложнее

$$4\omega_{\text{обращ.Вен}} - 5\omega_{\text{обращ.Земли}} = \Omega_{\text{вращ}}$$

### Квадратичная расстройка

Теперь давайте определим **квадратичную расстройку**.

$$\xi = \frac{p^2 - \omega_0^2}{p^2},$$

где  $p$  – частота вынуждающей силы.

Вблизи собственной частоты происходит синхронизация частот. Имеет место так называемое явление **захватывания частоты**, которое происходит под действием периодической внешней силы на автоколебательную систему. Суть которого в том, что частота автоколебаний становится равной частоте внешнего воздействия.

Рассмотрим на примере  $LC$ -контура.

$$LC \frac{d^2U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = M \frac{di_{C-и}}{dt} + \varepsilon_0 \sin pt$$

Будем решать методом ММА:

$$\begin{aligned} \tau &= pt \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{pdU}{d(pt)} = p \frac{dU}{d\tau} = pU' \\ \ddot{U} &= p^2 U'' \end{aligned}$$

Тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{p^2}{\omega_0^2} U'' + \frac{R}{L\omega_0^2} pU' + U = MS(U)pU' + \varepsilon_0 \sin \tau$$

А канонический вид запишем следующим образом

$$\begin{aligned} U'' + \frac{2\delta}{p} U' + \frac{\omega_0^2}{p^2} U &= \frac{MS(U)p\omega_0^2 U'}{p^2} + \frac{\varepsilon_0 \omega_0^2}{p^2} \sin \tau \\ U'' + (1 - \xi)U &= \left( \frac{MS(U)\omega_0^2}{p} - \frac{2\delta}{p} \right) U' + \varepsilon_0 (1 - \xi) \sin \tau \\ U'' + U &= -2\theta_{\text{эфф}} U' + \xi U + \varepsilon_0 \sin \tau \end{aligned}$$

Также мы считаем, что наша расстройка

$$\xi \ll 1$$

Решение ищем в виде



$$U = A(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau))$$

И общий вид для укороченных уравнений следующий

$$A' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-2\theta_{\text{эфф}} U' + \xi U + \varepsilon_0 \sin \tau) \sin(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi)$$

$$A\varphi' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-2\theta_{\text{эфф}} U' + \xi U + \varepsilon_0 \sin \tau) \cos(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi)$$

После преобразования имеем

$$A' = -\theta_{\text{эфф}} A - \frac{\varepsilon_0}{2} \cos \varphi(\tau)$$

$$A\varphi' = -\frac{A}{2} \xi + \frac{\varepsilon_0}{2} \sin \varphi(\tau)$$

Первое уравнение даст условие возникновения колебаний, когда

$$A' = 0$$

Но в данном случае нам интереснее второе уравнение, откуда можно узнать насколько синхронизовалась система с частотой вынуждающей силы

$$\varphi' = 0$$

$$\left| \frac{A}{2} \xi \right| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$-\frac{\varepsilon_0}{2A} < \frac{p - \omega_0}{p} < \frac{\varepsilon_0}{2A}$$

### Тушение автоколебаний

Сейчас рассмотрим механизм гашения колебаний с собственной частотой.

$$LC \frac{d^2 U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = M \frac{di_{C-И}}{dt} + \varepsilon_0 \sin pt$$

За пределами зоны синхронизации уравнение колебания эффективно разбивается на два уравнения, причем для  $U$  будем иметь представление как суммы вынужденных колебаний и автоколебаний

$$U = x + z = X_m \cos(pt + \varphi) + Z_m \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} LC\ddot{x} + RC\dot{x} + x = \varepsilon_0 \sin pt \\ LC\ddot{z} + RC\dot{z} + z = MS(U)\dot{z} \end{cases}$$

Рассмотрим стационарное состояние

$$MS(U) - RC = 0$$

$$S_0 + \frac{3}{4}(X_m^2 + Z_m^2)S_2 = \frac{RC}{M}$$

$$Z_m^2 = \frac{-\frac{RC}{M} + S_0 - \frac{3}{4}S_2 X_m^2}{\frac{3}{4}S_2}$$

То есть собственные колебания гасят слагаемые потерь и вынужденных колебаний и поддерживаются крутизной.

### **Динамическая система. Фазовое пространство динамической системы.**

Введем основные понятия, которые мы и так знали с вами раньше.

**Динамическая система** – объект, математическая модель, для которой задана функциональная зависимость между временем и положением в фазовом пространстве.

**Фазовое пространство** – совокупность всех допустимых состояний динамической системы.

### **Динамический хаос**

**Динамический хаос (детерминированный хаос)** – поведение нелинейной системы выглядит случайным, но определяется детерминистическими законами.

На примере особой точки седла можно проиллюстрировать это понятие. При малых отклонениях происходит уход системы на бесконечность.

## Лекция 12. Динамические системы

### Динамическая система. Фазовое пространство

Продолжаем рассмотрение динамических систем. В таких системах возможно существование такого интересного объекта как седло-фокус (Рис.12.1), который существует в трехмерном пространстве.



Рис.12.1. Седло-фокус в трехмерном пространстве.

То есть здесь наблюдается в двух измерениях притяжение, а в третьем точка оказывается неустойчивой.

### Устойчивость движения

Типов устойчивостей существует больше множество. В наших исследованиях мы понимали устойчивость по Ляпунову (Рис.12.2).

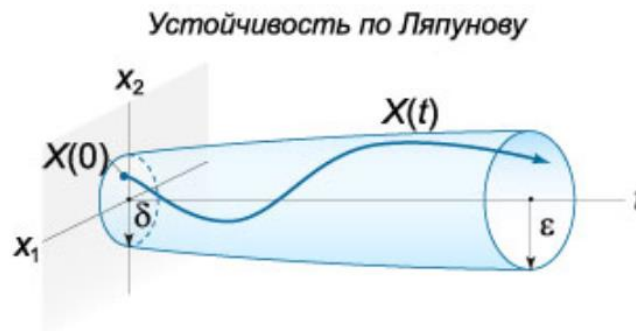


Рис.12.2. Устойчивость по Ляпунову.

Приведем запись на математическом языке. Фазовая траектория называется **устойчивой по Ляпунову**, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): \\ \rho(x^*(t_0), x(t_0)) < \delta \rightarrow \\ \rightarrow \rho(x^*(t), x(t)) < \varepsilon \end{aligned}$$

Теперь введем определение для **орбитной устойчивости**. Фазовая траектория называется орбитально устойчивой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): \\ \rho(x^*(t_0), \gamma(t_0)) < \delta \rightarrow \\ \rightarrow \rho(x^*(t), \gamma(t)) < \varepsilon$$

То есть разница в том, что теперь требуется близость одной траектории к другой траектории  $\gamma$ .

Также бывает еще **асимптотическая устойчивость** (Рис.12.3) и **по Пуассону**.

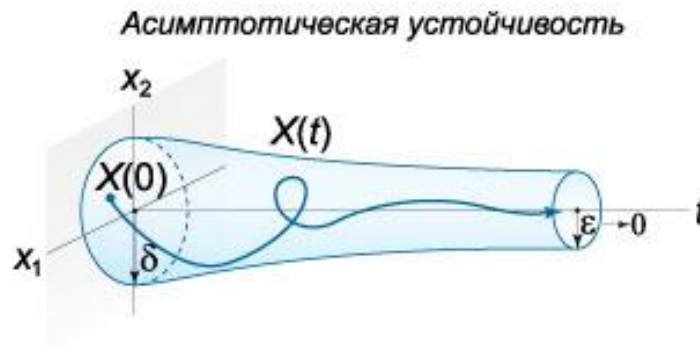


Рис.12.3. Асимптотическая устойчивость.

Так, например, устойчивая точка типа фокус устойчива по Ляпунову, так как траектории сходятся к этому фокусу. Будет также асимптотической, так как траектории сходятся в одну точку. А по Пуассону не получается.

А что касается центра, то устойчивость по Ляпунова работает. Асимптотической устойчивости нет, так как сходимости здесь нет. При правильном выборе орбиты есть и орбитная устойчивость. Также и с устойчивостью по Пуассону.

### Простые и странные аттракторы

Если описывать движение системы как

$$x(t) = A \exp(\lambda t)$$

Здесь  $\lambda$  – характеристические или Ляпуновские параметры, причем при  $\lambda > 0$  наша точка будет не устойчивой.

На фазовой плоскости в общем случае две  $\lambda$ .

Для того чтобы движения в фазовом пространстве походило на колебания, нужна та или иная степень повторяемости.

И на фазовой плоскости невозможно сразу удовлетворить требованиям возвращаемости и неустойчивости. А в фазовом пространстве уже такое возможно.

Существуют следующие виды аттракторов: простой аттрактор, репеллер и странный аттрактор.

**Странный аттрактор** – замкнутое ограниченное притягивающее множество в фазовом пространстве со следующими свойствами: все окружающие аттрактор траектории при  $t \rightarrow \infty$  втягиваются в него, а внутри него почти все соседние траектории экспоненциально разбегаются (Рис.12.4).

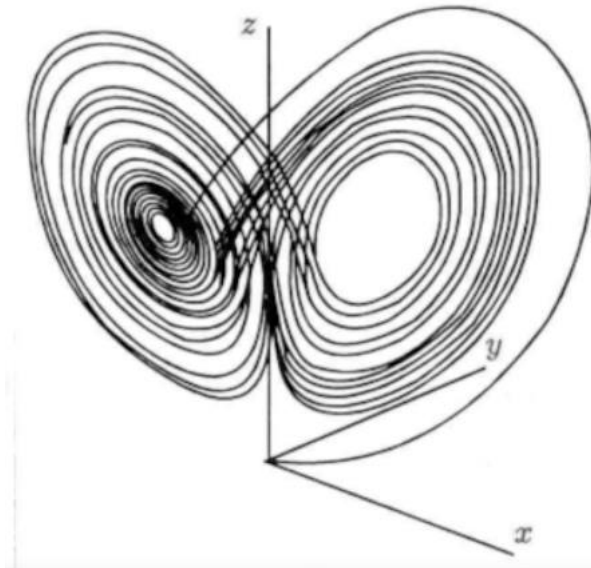


Рис.12.4. Странный аттрактор.

### Примеры систем с динамическим хаосом

Рассмотрим  $LC$ -контур с нелинейным элементом (диодом) и системой обратной связи.

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} + V_d = M \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di}{dU} \frac{dU}{dt}$$

$$L\ddot{q} + \left( R - \frac{MS(U)}{C} \right) \dot{q} + \frac{q}{C} + V = 0$$

Важно также заметить, что

$$\dot{q} = I + C_1 \frac{dV}{dt}$$

Пусть сначала подпитка победила сопротивление. В этом случае мы свалимся вниз по фазовой траектории и затем обратно возвращаемся назад.

Хаос здесь в том, что близкие друг к другу траектории могут сильно расходиться в процессе эволюции системы в зависимости от случайной составляющей.

Так как у нас нет периодичности, то мы не можем выделить дискретные линии на спектре, то есть он сплошной.

Можно ввести еще один параметр системы

$$\frac{I_{max}}{V_1} \rho, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Здесь  $V_1$  соответствует  $I_{max}$ .

Если амплитуда

$$U_m < \frac{I_{max}}{V_1} \rho,$$

то хаоса не будет, а в случае

$$U_m \geq \frac{I_{max}}{V_1} \rho$$

реализуется случай хаоса. Однако в случае очень высокой амплитуды хаос снова исчезает и траектория приобретает свойство повторяемости.

Другой характерный пример – аттрактор Лоренца.

Лоренц написал систему уравнений для конвекции, которая оказалась довольно универсальной

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases}$$

Координата  $x$  описывает скорость вращающихся воздушных валов. Координата  $y$  – распределение температуры в поперечном направлении, а  $z$  описывает перепады температуры по высоте.

Эта же система уравнений может быть применена и к лазерам.  $x$  – интенсивность амплитуды поля,  $y$  – поляризация излучения, а  $z$  – инверсная населенность.

Фазовый портрет такой системы является аттрактор Лоренца (Рис.12.4).

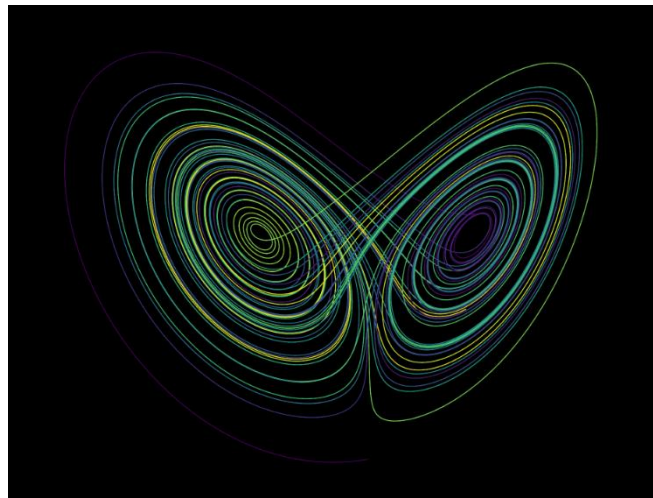


Рис.12.4. Аттрактор Лоренца.

Это странный аттрактор с двумя неустойчивыми состояниями.

### **Зависимость движения систем с регулярной и стохастической динамикой от начальных условий**

Лоренц при моделировании погоды утверждал, что малые отклонения влияют на сильное расхождение траектории.

Из-за этого и происходят такие колоссальные сложности с прогнозом погоды.

Существуют так называемые точки бифуркаций, когда система переходит в совершенно новое состояние (Рис.12.5).

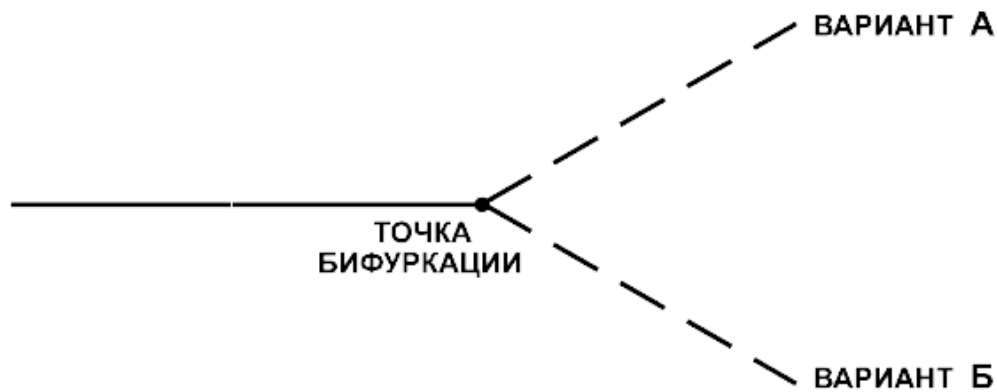


Рис.12.5. Точка бифуркации. Разветвление вариантов.

По оси абсцисс обычно отображают управляющий параметр, а по оси ординат рассматриваемые переменные.

### Отображение Пуанкаре

Для исследования фазового пространства используют метод отображения Пуанкаре.

Проводится поверхность, в которую входят траектории (Рис.12.6).

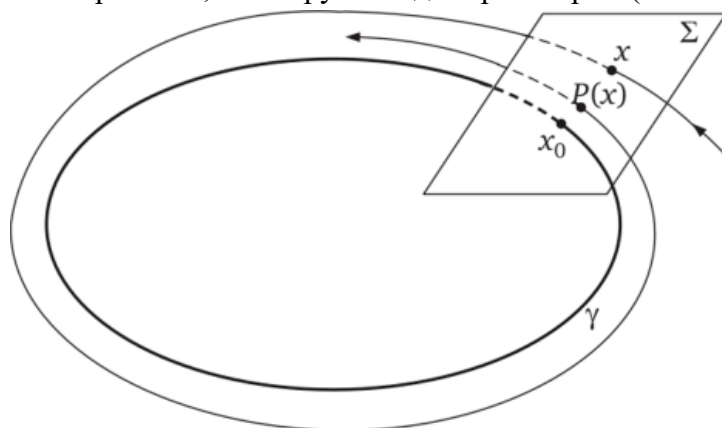


Рис.12.6. Отображение Пуанкаре.

То есть отображение Пуанкаре – закон соответствия между предыдущим положением точек пересечения траектории и секущей поверхностью и последующим.

Размерность пространства понижается на единицу, что помогает в изображении.

### Признаки стохастической динамики

Мы готовы обобщить признаки хаоса.

- Не повторяемость самой траектории. Это описывается с помощью спадающей автокорреляционной функции.
- Сплошной спектр.
- Расходимость траекторий.
- Расплывание точек на поверхности Пуанкаре.



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ