ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

МИТИН
ИГОРЬ ВЛАДИМИРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
АЛЬ-САРХАНИ КРИСТИНУ БАСЕЛЬ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. Измерение и погрешность измерений 5
Введение. Физические величины и их измерение 5
Классификация измерений. Погрешность 5
Оценка истинного значения. Классификация погрешностей 6
Оценка случайной погрешности прямо измеряемой величины 7
Правила округления 9
ЛЕКЦИЯ 2. Погрешности измерений 10
Виды погрешностей 10
Погрешности простых приборов 10
Случайная погрешность косвенно измеряемой величины 12
Погрешность косвенных измерений в случае функции многих переменных 14
ЛЕКЦИЯ 3. Метод наименьших квадратов. Часть 1 19
Вывод формул МНК для a и b 21
Формулы МНК для погрешностей a и b 23
Достоверность МНК. Коэффициент корреляции 24
ЛЕКЦИЯ 4. Метод наименьших квадратов. Часть 2 26
МНК с постоянной погрешностью величин y. Хи-квадрат 26
МНК с весами 28
ЛЕКЦИЯ 5. Метод наименьших квадратов. Часть 3 31
Обобщение понятий МНК. Погрешность x_0 и y_0 31
Применение МНК к нелинейным моделям. Линеаризация 32
Модель y=ax. Одновременный учёт погрешностей x и y 35
ЛЕКЦИЯ 6. Теория вероятностей 41
Теория вероятностей. Основные определения 42
Сумма, произведение событий и их вероятности 43
ЛЕКЦИЯ № 7. Функции распределения случайной величины 48
Функция распределения случайной величины. Плотность распределения 50
Расчёт погрешности округления 53
Распределение Гаусса. Центральная предельная теорема 56
ЛЕКЦИЯ 8. Распределение Стьюдента 61

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Распределение Стьюдента 61
Коэффициент Чебышёва 64
Распределение хи-квадрат 64
Критерии наилучшей оценки и её нахождение 66
Поиск наилучшей оценки в виде линейной комбинации 68
ЛЕКЦИЯ 9. Оценка дисперсии 71
Поиск наилучшей оценки в виде линейной комбинации. Проверка состоятельности 72
Несмещенная оценка дисперсии 73
Наилучшая оценка и дисперсия косвенно измеряемой величины 75
Измерение масс двух тел идеальными весами 76
Расчёт погрешности ускорения шарика, скатывающегося по наклонной плоскости 77

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ЛЕКЦИЯ 1. Измерение и погрешность измерений

Рекомендуемая литература:

1. Дж. Тейлор «Введение в теорию ошибок»
2. И. В. Митин, В. С. Русаков «Анализ обработки экспериментальных данных»

Введение. Физические величины и их измерение

Физика – наука экспериментальная. В эксперименте измеряются физические величины. Измерениями занимается наука метрология. В ГОСТах прописано много положений и в том числе есть определение физической величины:

Физическая величина – это свойство общее в качественном выражении многим физическим объектам, но в количественном выражении индивидуальное для каждого объекта. Другими словами, физическая величина – это количественная характеристика объекта или явления. Измерить физическую величину – означает определить сколько раз содержится в этой величине единица этой величины.

Чтобы измерить какую-либо величину, необходимо сравнить ее с единицей этой величины, т. е. определить, какое число раз в измеряемой величине содержится эта единица. Измерение – это не только сам эксперимент, но и последующие вычисления.

Классификация измерений. Погрешность

Все измерения можно разделить на два вида:

1. Прямое измерение – измерение, при котором искомое значение определяется непосредственно по шкале измерительного прибора.

2. Косвенное измерение – измерение, при котором искомое значение определяется путем вычислений по известной формуле. Любому косвенному измерению должны предшествовать прямые измерения (т.е. вначале мы что-то измерили, потом подставили в формулу, рассчитали и получили результат).

Получим оценку погрешности на простом примере:

Рассмотрим измерение высоты Главного здания МГУ. Предположим, что кто-то поднялся на шпиль, взял камень и бросил его вниз. А мы с помощью секундомера будем измерять время падения камня (это есть прямое измерение). Высоту здания можем найти, воспользовавшись формулой:

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

Таким образом, получим значение высоты. Но это значение будет не точным т.к. присутствует сопротивление воздуха, поэтому реальное ускорение будет несколько

меньше рассчитанного, а значит, и время падения будет больше, и рассчитанное по представленной выше формуле значение высоты Главного здания будет тоже больше.

Вывод: практически любое измерение имеет погрешность.

Оценка истинного значения. Классификация погрешностей

В теории предполагается, что для каждой физической величины есть некоторое истинное значение.

Истинное значение физической величины – это значение, которое идеальным образом отражало бы в количественном и качественном отношении соответствующую физическую величину.

Существует абсолютная погрешность, которая измеряется в тех же величинах, что и сама физическая величина:

$$\Delta X = X - X_{\text{ист}} \tag{1.1}$$

Здесь X – значение физической величины, полученное в результате измерения; $X_{\text{ист}}$ – истинное значений физической величины.

Кроме абсолютной, существует относительная погрешность:

$$\delta X = \frac{\Delta X}{X_{\text{ист}}} \tag{1.2}$$

По приведенным выше формулам погрешность мы точно не определим. Поэтому в математической статистике и теории вероятности говорят, что погрешность будем не определять, а оценивать.

Таким образом, мы будем получать оценку истинного значения физической величины и оценку погрешности.

Классификация погрешностей:

1. Случайная погрешность – это составляющая погрешности, которая изменяется случайным образом, при проведении серии измерений в одинаковых условиях.

Пример: измерение периода колебаний маятника. Каждый раз, измеряя время 10 колебаний, получаем разные значения. Значение физической величины здесь отклоняется от истинного за счет случайных факторов.

Таким образом, случайная погрешность – это такая погрешность, которая присутствует всегда. Ее невозможно предсказать, но можно оценить.

2. Систематическая погрешность – это составляющая погрешности, которая остается неизменной при проведении серии измерений в одинаковых условиях.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Пример: при измерении периода колебаний маятника часы спешат или отстают. Значение периода колебаний будет отклоняться от истинного на некоторую фиксированную величину при каждом измерении.

Виды систематических погрешностей:

1. Приборная погрешность, которая обусловлена неидеальностью прибора измерения. Она присутствует у любого прибора. Каждая серия промышленно выпускаемых приборов имеет паспорт, в котором указана погрешность. Это – средняя погрешность данных приборов.
2. Погрешность округления. Данная погрешность связана с ценой деления измерительного прибора.
3. Методическая погрешность (модельная). Она связана с тем, что зачастую при обработке принимается какая-то определенная модель расчета.
4. Субъективная погрешность. Связана с тем, что человек, который проводит измерения, всегда склонен к каким-либо ошибкам. В условиях общего физического практика обычно выделяют только одну субъективную погрешность – это погрешность при измерении ручным секундомером. Ее принято считать:

$$\sigma_{\text{суб}} \approx 0.3 \text{ с} \tag{1.3}$$

Оценка случайной погрешности прямо измеряемой величины

Вернемся к примеру с измерением высоты здания. Будем обозначать прямые измерения как X, Y, Z ; а косвенные измерения – U, V, W.

Пусть для времени будем использовать обозначение X. Проведем серию прямых измерений в одинаковых условиях, и получим:

$$X_1 = 7.38 \text{ с};\ X_2 = 7.40 \text{ с};\ X_3 = 7.34 \text{ с};\ X_4 = 7.33 \text{ с};\ X_5 = 7.35 \text{ с};$$

Нам нужно получить оценку истинного значения измеряемой физической величины. В математической статистике требуется в качестве лучшей оценки брать среднее арифметическое.

$$\hat{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \bar{X}, \tag{1.4}$$

Здесь N – число измерений; $\hat{X}$ – оценка истинного значения; $\bar{X}$ – среднее арифметическое;

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Не всегда среднее арифметическое является наилучшей оценкой. Так, в случае с серией измерений, проведенных в разных условиях, среднее арифметическое не является наилучшей оценкой. Про методы обработки таких результатов мы будем говорить позже.

В данном случае (когда измерения проводятся в одинаковых условиях) в качестве лучшей оценки получаем среднее арифметическое:

$$\hat{X} = 7.36 \text{ с}$$

По результатам измерений необходимо оценить погрешность.

$$\frac{\sum_{i-1}^{N}(X_i - \bar{X})}{N} = \frac{\sum X_i - \sum \bar{X}}{N} = \bar{X} - \frac{N\bar{X}}{N} = 0$$

Но так нельзя оценивать погрешность, потому что по свойству среднего арифметического, сумма отклонения от среднего арифметического всегда тождественно равна 0. Это возникло из-за того, что есть отклонения как в положительную сторону, так и в отрицательную. Случайная погрешность разбросана относительно истинного значения обычно более-менее симметрично. Чтобы решить эту проблему, опираемся на математическую статистику, где разработана теория о том, что наиболее целесообразно для оценивания таких величин брать среднее значение квадрата отклонения и погрешность в этом случае называется *среднеквадратичной*.

Таким образом, оценка случайной погрешности прямо измеряемой величины, вычисленной по серии измерений, проведенных в одинаковых условиях, выглядит так:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{N-1}} \tag{1.5}$$

Возникает вопрос: почему в знаменателе дроби именно $N-1$?

Во-первых, так велит математика: так производится несмещенная оценка дисперсии.

Во-вторых, обратимся к понятию степеней свободы. Мы провели N независимых измерений и по ним вывели среднее арифметическое, т.е. установили одну связь между этими величинами. Теперь мы хотим получить оценку погрешности. Среднее арифметическое связано со всеми остальными величинами, поэтому число степеней свободы при использовании формулы уменьшается на единицу.

Оценка погрешности среднего арифметического записывается так:

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{N(N-1)}} = \frac{S_X}{\sqrt{N}} \tag{1.6}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поясним: есть некоторая серия измерений, где в каждом измерении совершается какая-то ошибка. Мы вычисляем среднеквадратичную погрешность, т. е. в среднем в каждом эксперименте ошибаемся на какую-то величину. Формула (1.5) позволяет оценить среднеквадратичную погрешность каждого отдельного измерения, где в качестве оценки истинного значения берется не результат отдельных измерений, а среднее арифметическое.

Математическая статистика доказывает, что погрешность среднего арифметического (1.6) в $\sqrt{N}$ раз меньше, чем погрешность результата отдельного измерения.

Таким образом, в качестве ответа мы должны записать:

$$X = 7.36 \pm 0.0132685 \text{ с}$$

Но такая запись не является корректной, поэтому далее пойдет речь о правилах округления.

Правила округления

Как видим, у нас в ответе есть две составляющие: среднее арифметическое и оценка погрешности. Округление всегда начинается с округления погрешности и для этого нам нужно найти значащие цифры.

Значащими цифрами называются все цифры числа, начиная слева с первой отличной от нуля и заканчивая последней цифрой справа.

Округляем погрешность до одной, либо двух значащих цифр. Если первая значащая цифра 1 или 2, то округляем до двух значащих цифр. Если первая значащая цифра 3 и более, то округляем до одной значащей цифры.

(Надо отметить, что, округляя погрешность, вы вносите в нее теперь уже погрешность округления, и у вас в итоге получается «погрешность погрешности».)

Теперь приступаем к округлению самой величины. После того, как мы округлили погрешность, в записи среднего арифметического должно остаться столько же чисел после запятой, сколько их в погрешности.

Таким образом, получаем:

$$X = 7.360 \pm 0.013 \text{ с}$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ЛЕКЦИЯ 2. Погрешности измерений

Виды погрешностей

1. Приборная – определяется классом точности прибора. Сейчас большая часть приборов – цифровые. Для них указывают предельную погрешность т.е. погрешность, максимально допустимую для этого прибора.

Среднеквадратичная приборная погрешность в 3 раза меньше, чем предельная:

$$\sigma_{\text{приб}} = \frac{\Delta_{\text{пред}}}{3} \tag{2.1}$$

2. Методическая (модельная) погрешность.
3. Субъективная погрешность.
4. Погрешность округления. Формула для оценки погрешности округления:

$$\sigma_{\text{окр}} = \frac{\omega}{\sqrt{12}} \tag{2.2}$$

где ω – цена деления прибора.

Погрешности простых приборов

Предельная погрешность штангенциркуля непосредственно связана с ценой деления. Например, предельная погрешность штангенциркуля с 10 делениями на нониусе: $\Delta_{\text{пред}} = 0.1$ мм. Значит, цена деления такая же ($\omega = 0.1$мм).

Предельная погрешность линейки, как правило, равна цене деления: $\Delta_{\text{пред}} = 1$ мм $= \omega$.

Если при измерениях линейкой присутствует две погрешности, приборная и округления, то правило нахождения суммарной погрешности будет:

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{\sigma_{\text{приб}}^2 + \sigma_{\text{окр}}^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{3}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\sqrt{12}}\right)^2} = \omega\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{12}} \approx 0.44\,\omega \approx \frac{\omega}{2} \tag{2.3}$$

Таким образом, при оценке суммарной погрешности линейки (или других простейших приборов), можно сказать, что она равна половине цены деления.

Рассмотрим случайную погрешность в случае, когда проведена серия прямых измерений в одинаковых условиях. Пусть проведено $X_1, X_2, X_3 \ldots X_N$ измерений. В качестве оценки исходим из той модели, что истинное значение существует.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В качестве наилучшей оценки истинного значения берем среднее арифметическое:

$$\hat{X} = \bar{X}$$

Мы провели серию измерений в одинаковых условиях и необходимо получить оценку погрешности (при проведении измерений погрешность присутствует в каждом измерении), но у нас нет возможности найти погрешность в каждом измерении, мы получаем общую оценку по серии измерений.

Формула (1.5) позволяет оценить среднеквадратичную погрешность каждого отдельного измерения. Если число измерений устремить к бесконечности, то получим:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{N-1}} \to const \text{ при } N \to \infty \tag{2.4}$$

Отметим, что квадрат величины S_X называют *дисперсией*.

Погрешность среднего арифметического вычисляется по формуле (1.6). В пределе при $N \to \infty$ получим:

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{N(N-1)}} = \frac{S_X}{\sqrt{N}} \to 0 \text{ при } N \to \infty \tag{2.5}$$

Поэтому для того, чтобы добиться как можно меньшей погрешности, необходимо проводить всё большее и большее количество измерений. Возникает вопрос: как много измерений надо проводить?

Ответ: увеличиваем количество измерений до тех пор, пока у нас не возникнет систематическая погрешность. Поясним это:

Запишем суммарную систематическую погрешность:

$$\sigma_{\text{сумм,сист}} = \sqrt{\sigma_{\text{приб}}^2 + \sigma_{\text{окр}}^2} \approx \frac{\omega}{2} \tag{2.6}$$

Общая погрешность (и случайная, и систематическая) будет определяться так:

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_{\bar{X}}^2 + \sigma_{\text{сумм,сист}}^2} \tag{2.7}$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Значит, нужно остановить измерения тогда, когда случайная погрешность станет сравнима с систематической (или в 2-3 раза меньше). После этого проводить дальнейшие измерения абсолютно бессмысленно. Ведь мы будем с каждым разом уменьшать $S_{\bar{X}}$, но $\sigma_{\text{сумм,сист}}$ останется, и общая погрешность $\sigma_{\text{сумм}}$ не уменьшится.

Результат для серии прямых измерений будем записывать следующим образом:

$$X = \bar{X} \pm \sigma_{\text{сумм}} \tag{2.8}$$

Пример:

$$8543{,}28 \pm 432{,}650$$

$$(8{,}5 \pm 0{,}4) \cdot 10^3$$

Здесь целесообразнее вынести множитель 10^3, соблюдая правило: какой порядок выносим в погрешности, такой же порядок выносим в самой величине.

Случайная погрешность косвенно измеряемой величины

Измеряя на прошлой лекции время падения камня, получили оценку для времени падения предмета:

$$\hat{X} = \bar{X} = 7{,}360 \pm 0{,}013\ c$$

Высоту здания находили из:

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

Перепишем с учетом введенных на прошлой лекции обозначений:

$$U = \frac{gX^2}{2}$$

Здесь X – прямо измеряемая величина, U – косвенно измеряемая величина, g – постоянная.

Оценка косвенно измеряемой величины будет равна:

$$\widehat{U} = \frac{g\hat{X}^2}{2}$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Получили коридор погрешности. Как правило, коридор погрешности достаточно малый, поэтому можем считать, что этот участок не часть параболы, а прямая линия (или касательная к графику, проведенная в точке $X = \bar{X}$, см. рис. 2.1). Поэтому найдем производную:

$$\frac{dU}{dX} = \frac{2gX}{2} = gX$$

В результате получили некая функция, но производную мы берем в конкретной точке, где $X = \bar{X}$. Тогда:

$$\frac{dU}{dX}\Big|_{X=\bar{X}} = \frac{2g\bar{X}}{2} = g\bar{X}$$

Получили число.

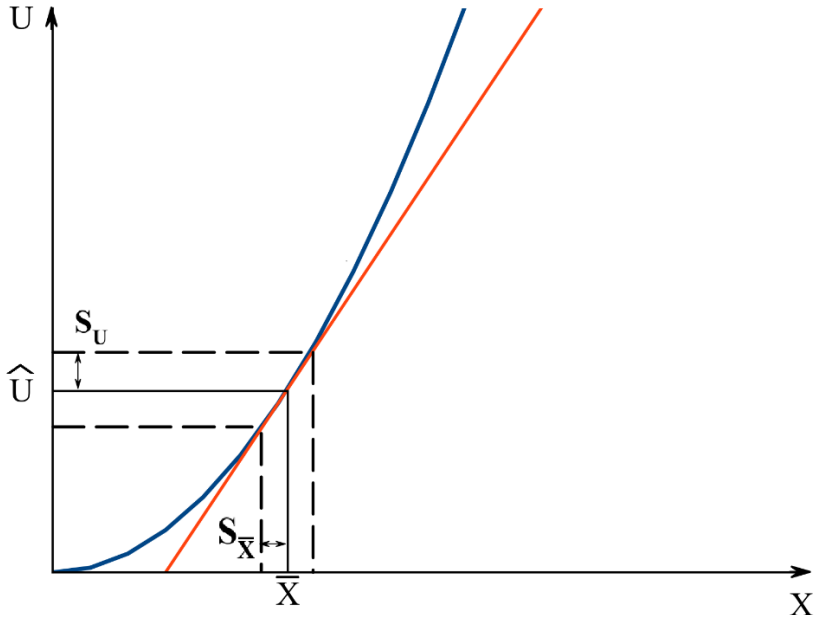

Рис. 2.1. Коридор погрешности.

Мы взяли производную в конкретной точке. Найдем для нее среднеквадратичную погрешность:

$$S_U = \frac{dU}{dX}\Big|_{X=\bar{X}} \cdot S_{\bar{X}} = g\bar{X} \cdot S_{\bar{X}}$$

Полученная функция может иметь также и отрицательную производную, но оценка погрешности – это всегда положительное значение. Следовательно, в формуле должен быть знак модуля:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$S_U = \left|\frac{dU}{dX}\Big|_{X=\bar{X}}\right| \cdot S_{\bar{X}} = g\bar{X} \cdot S_{\bar{X}} \tag{2.9}$$

Таким образом, S_U – среднеквадратичная погрешность косвенно измеряемой величины, зависящей от одной прямо измеряемой величины.

Погрешность косвенных измерений в случае функции многих переменных

Чаще всего встречаются функции не одной переменной, а нескольких:

$$U = U(X, Y, \dots, Z)$$

В этом случае формула для оценивания погрешности косвенных измерений имеет следующий вид:

$$S_U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\Big|_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}} \cdot S_{\bar{X}}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\Big|_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}} \cdot S_{\bar{Y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\Big|_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}} \cdot S_{\bar{Z}}\right)^2} \tag{2.10}$$

Здесь ∂ – частная производная. Что это значит?

Пример. Предположим, есть такая формула:

$$U = X^2Y + \frac{Z}{X},$$

где U является функцией X, Y и Z. Возьмем частную производную по X. Это означает, что в данном случаем переменные Y и Z считаем константами. Частная производная предполагает, что мы меняем X, а Y и Z постоянны. Поэтому получим:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 2XY - \frac{Z}{X^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = X^2 + 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{1}{X^2}$$

После взятия частной производной получаем также функцию трех переменных, но нам нужно взять производную в конкретной точке. Вертикальная черта с условиями справа означает, что мы берем производную в конкретной точке с определенными

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

значениями $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. В производную подставим средние арифметические от X, Y, Z (числа) и в итоге получим конкретное число (а не функцию):

$$\frac{\partial U}{\partial X}\Big|_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}} = 2\bar{X}\bar{Y} - \frac{\bar{Z}}{\bar{X}^2}$$

Есть случаи, в которых расчеты можно проводить несколько проще. Рассмотрим простые случаи для косвенно измеряемых величин:

1) $U = X + Y$

Есть две косвенно измеряемые величины – X и Y. Для X провели серию измерений, получили оценку (среднее арифметическое) – $\bar{X}$, и оценку погрешности $S_{\bar{X}}$. Аналогичные результаты получили и для Y.

Сложив их, получим оценку $\widehat{U}$:

$$\widehat{U} = \bar{X} + \bar{Y}$$

Для того, чтобы получить погрешность S_U, воспользуемся формулой (2.10):

$$S_U = \sqrt{(1 \cdot S_{\bar{X}})^2 + (1 \cdot S_{\bar{Y}})^2} = \sqrt{S_{\bar{X}}^2 + S_{\bar{Y}}^2} \qquad (2.11)$$

2) $U = X - Y$

Для данного случая формула для оценки погрешности косвенных измерений имеет такой же вид, как и в случае 1, т. к. квадрат «съедает» знак минус:

$$S_U = \sqrt{S_{\bar{X}}^2 + S_{\bar{Y}}^2}$$

Пусть имеется некоторая функция двух переменных. Проведены достаточно точные измерения – одну величину измерили с относительной погрешностью, например, 10 %, и вторую величину с относительной погрешностью 10 %. Тогда их комбинация вряд ли будет иметь погрешность, сильно отличающуюся от 10 %.

Задача. Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Цель – определение момента инерции платформы с грузами и момент инерции платформы. И тогда момент инерции грузов равен:

$$J_{\Gamma} = J_{\Pi+\Gamma} - J_{\Pi}$$

Предположим, что получены следующие результаты:

$$\bar{X} = 10 \pm 1$$

$$\bar{Y} = 9 \pm 1$$

$$U = X - Y = 1 + \sqrt{2}$$

Вывод: когда речь идет о разности, надо быть аккуратным. Нельзя проводить эксперименты так, чтобы у вас две измеряемые величины были примерно одинаковыми. В этом случае никогда не получите хорошего точного результата.

3) $U = X \cdot Y$

Проведем подобные вычисления и получим:

$$S_U = \sqrt{\left(Y|_{\bar{X},\bar{Y}} \cdot S_{\bar{X}}\right)^2 + \left(X|_{\bar{X},\bar{Y}} \cdot S_{\bar{Y}}\right)^2} \tag{2.12}$$

Преобразуем результат. Разделим левую и правую части (2.12) на $\widehat{U} = \bar{X}\bar{Y}$:

$$\frac{S_U}{\widehat{U}} = \frac{\sqrt{\left(Y|_{\bar{X},\bar{Y}} \cdot S_{\bar{X}}\right)^2 + \left(X|_{\bar{X},\bar{Y}} \cdot S_{\bar{Y}}\right)^2}}{\bar{X}\bar{Y}}$$

$$\widehat{\delta U} = \sqrt{\left(\frac{S_{\bar{X}}}{\bar{X}}\right)^2 + \left(\frac{S_{\bar{Y}}}{\bar{Y}}\right)^2}$$

$$\widehat{\delta U} = \sqrt{(\delta X)^2 + (\delta Y)^2} \tag{2.13}$$

где $\delta X = \frac{S_{\bar{X}}}{\bar{X}}$ – относительная погрешность X, $\delta Y = \frac{S_{\bar{Y}}}{\bar{Y}}$ – относительная погрешность Y, $\widehat{\delta U}$ – относительная погрешность косвенно измеряемой величины. Равняется корню квадратному из суммы квадратов относительных погрешностей.

Т.е. если говорят, что нужно перемножить две величины, причем одну величину измерили с погрешностью 10 %, а другую с относительной погрешностью 2 %, то из (2.13) следует, что погрешность в 2 % пренебрежимо мала.

Вывод: основной вклад в погрешность дает именно та величина, у которой максимальная погрешность.

4) $U = \frac{X}{Y}$

Нетрудно показать, что в этом случае мы придем к той же самой формуле.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

5) $U = XY^3$

Проведем вычисления, аналогичные вычислениям выше:

$$\frac{S_U}{\widehat{U}} = \frac{\sqrt{\left(Y^3|_{\bar{X},\bar{Y}} \cdot S_{\bar{X}}\right)^2 + \left(3XY^2|_{\bar{X},\bar{Y}} \cdot S_{\bar{Y}}\right)^2}}{\bar{X}\bar{Y}^3}$$

$$\frac{S_U}{\widehat{U}} = \frac{\sqrt{\left(\bar{Y}^3|_{\bar{X},\bar{Y}} \cdot S_{\bar{X}}\right)^2 + \left(3\bar{X}\bar{Y}^2|_{\bar{X},\bar{Y}} \cdot S_{\bar{Y}}\right)^2}}{\bar{X}\bar{Y}^3}$$

$$\widehat{\delta U} = \sqrt{\left(\frac{S_{\bar{X}}}{\bar{X}}\right)^2 + \left(\frac{3S_{\bar{Y}}}{\bar{Y}}\right)^2}$$

Из данного примера можно сделать вывод: если в формуле косвенных измерений есть знаки умножения, деления и возведения в степень, то для оценивания погрешности удобно пользоваться формулой через относительные погрешности:

$$U = X^{N_1}Y^{N_2}Z^{N_3}$$

$$\widehat{\delta U} = \sqrt{(N_1 \cdot \delta X)^2 + (N_2 \cdot \delta Y)^2 + (N_3 \cdot \delta Z)^2} \qquad (2.14)$$

Как только появляется сложение или вычитание, пользоваться этой формулой нельзя, нужно брать частные производные.

Пример. Рассмотрим формулу

$$V = \frac{M+m}{m}\sqrt{l \cdot g} \cdot 2\frac{S}{R}$$

Здесь M, m, l, S, R – прямо измеряемые величины

Воспользоваться формулой (2.14) нельзя, так как есть сложение. Тогда обозначим:

$$U = \frac{M+m}{m}$$

и скажем, что U – это косвенно измеряемая величина. Для нее можем найти $\widehat{U}, S_U$. И тогда функция будет зависеть не только от прямо измеряемых величин, но и от косвенно

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

измеряемой. Но если данная косвенно измеряемая величина U зависит от прямо измеряемых, которых нет в V, то можно считать V прямо измеряемой:

$$V = V(l, S, R, U)$$

$$U = U(M, m)$$

Но если же в U входит какая-либо из прямо измеряемых (l, S или R), то так уже поступать нельзя.

Таким образом, формула (2.14) позволяет оценить, какая из погрешностей вносит основной вклад в суммарную погрешность.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ЛЕКЦИЯ 3. Метод наименьших квадратов. Часть 1

Задача. Измерение жесткости пружины.

Имеется пружина и набор грузиков с различными массами. Цель – определить ее жесткость. В недеформированном состоянии пружина имеет длину l_0. При подвешивании к ней груза массой m_1 ее длина становится равной l_1, при подвешивании груза с другой массой m_2, длина равняется l_2 и т. д. Всего проводится N измерений.

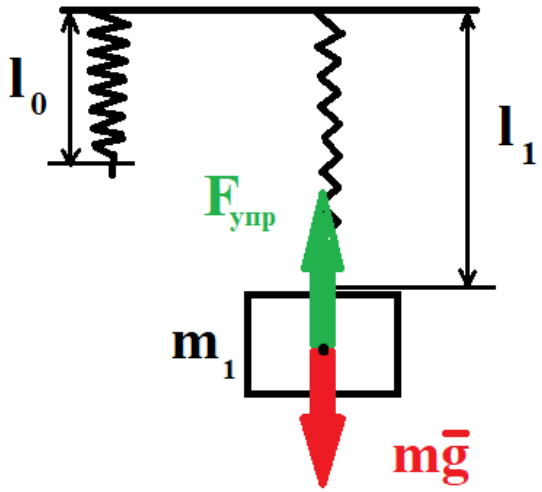

Рис. 3.1. Схема эксперимента по измерению жесткости пружины.

Жесткость пружины можно найти из закона Гука:

$$k_i = \frac{m_i g}{l_i - l_0} \tag{3.1}$$

Коэффициент жесткости k определяется с помощью расчета, значит, это косвенное измерение. В итоге мы получаем наборы значений $m_1, m_2, \dots, m_N$; $l_1, l_2, \dots, l_N$; $k_1, k_2, \dots, k_N$.

Для k среднее арифметическое не является наилучшей оценкой, так как измерения косвенные, и проводятся они в разных условиях (разные массы грузов и разные длины).

Введем понятие *совместного измерения*. Оно означает, что в процессе измерения определяется не одна, а несколько величин, причем меняется одна величина, а остальные связаны с ней какой-либо функциональной зависимостью. В данном случае изменяется масса, а длина меняется пропорционально массе.

В нашем примере есть и неизвестная величина – это k. Так как жесткость – это свойство пружины, то она не должна зависеть от массы грузов. По результатам серии совместных измерений нам надо найти способ, как по данной серии найти значение k. Нарисуем график, связывающий величины m и l (рис. 3.2):

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

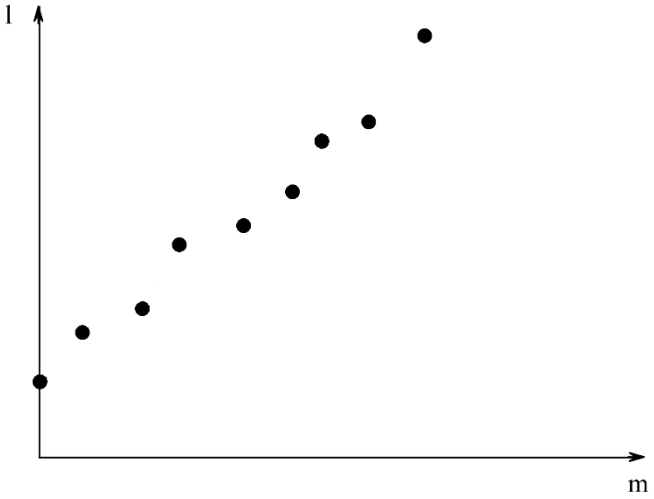

Рис. 3.2. Экспериментальный график.

Точки лежат на некоторой прямой. Перепишем формулу (3.1), выразив l:

$$l_i = \frac{g}{k}\, m_i + l_0. \tag{3.2}$$

Видно, что данная зависимость является линейной. Если бы в измерениях не было погрешностей, то точки на графике точно бы легли на прямую. Определив угол наклона прямой, можно оценить значение k. Но точки не лежат на одной прямой. Добавим на график погрешности. Каким же образом нужно провести прямую, ведь их можно провести множеством способов?

Необходимо применить *метод наименьших квадратов* (МНК). Идея МНК состоит в том, чтобы для каждой прямой найти расстояния от точки до прямой, возвести в квадрат, просуммировать их и найти минимум: $\sum d_i^2 - \min$

Каким же образом находится расстояние от экспериментальной точки до прямой? Здесь необходимо помнить, что, в зависимости от того, с каким масштабом мы построили этот график, у нас перпендикуляры к одной и той же прямой (расстояния), описываемой одним и тем же уравнением, будут попадать в разные точки. Получается, что результат обработки зависит от масштаба графика.

Казалось бы, расстояние от точки (x_i, y_i) до точки пересечения перпендикуляра и прямой (x_0, y_0) можно найти по формуле:

$$d = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$$

Но так в МНК расстояние не определяется, так как x и y имеют разные размерности (например, в рассмотренной задаче это длина и масса).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Существенное ограничение метода наименьших квадратов заключается в следующем: здесь считается, что все x_i известны абсолютно *точно*, и нет погрешности при измерении x_i.

Вывод формул МНК для a и b

Предположим, что x_i известны абсолютно точно и будем решать классическую задачу методом наименьших квадратов.

Возьмем какую-либо экспериментальную точку, пусть у неё коридор погрешности есть только по y, по x ее значение известно абсолютно точно. Проведем произвольную прямую, эта прямая описывается уравнением:

$$y = ax + b$$

Расстояние в методе наименьших квадратов между прямой и экспериментальной точкой, у которой есть погрешность только по y – это есть *длина вертикального отрезка* (рис. 3.3):

$$d = y_i - (ax_i + b) \tag{3.3}$$

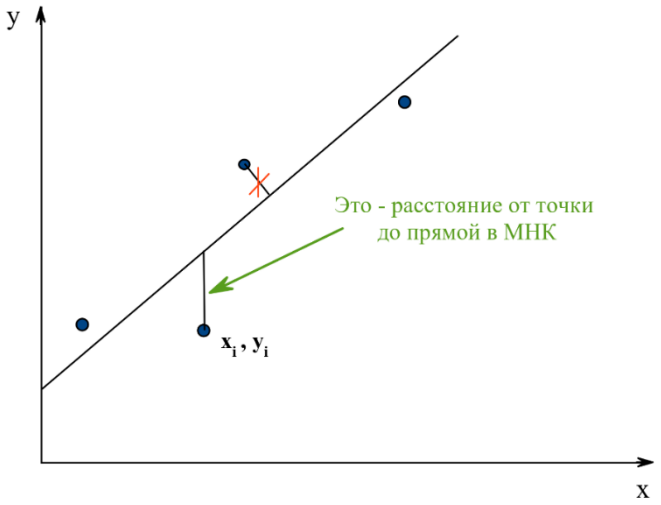

Рис. 3.3. Определение расстояния от точки до прямой в МНК.

Классическая постановка задачи в методе наименьших квадратов записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2 = f(a, b) \tag{3.4}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\min a, b$$

Необходимо найти минимум функции f по переменным a и b. Найдем производные:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum 2(y_i - (ax_i + b))(-x_i) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial b} = \sum 2(y_i - (ax_i + b))(-1) = 0$$

Проведем преобразования:

$$\sum x_i y_i - a\sum x_i^2 + b\sum x_i = 0$$
$$\sum y_i - a\sum x_i + Nb = 0 \qquad (3.5)$$

Получили систему двух уравнений (3.5) с двумя неизвестными. Преобразуем второе уравнение системы:

$$\frac{\sum y_i}{N} = a\frac{\sum x_i}{N} + b$$

Видно, что $\frac{\sum y_i}{N} = , \frac{\sum x_i}{N} = \overline{x}$, тогда получаем уравнение:

$$\overline{y} = a\overline{x} + b \qquad (3.6)$$

Это означает, что прямая, построенная по МНК, должна проходить через точку с координатами $(\overline{x}, \overline{y})$. Нужно отметить, что среднее арифметическое от x и y здесь не несет какого-то физического смысла.

Решаем систему (3.5). Выразим b из второго уравнения

$$b = \frac{\sum y_i - a\sum x_i}{N}$$

и подставим в первое:

$$\sum x_i y_i - a\sum x_i^2 + \frac{\sum y_i - a\sum x_i}{N} \cdot \sum x_i = 0$$

$$N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i = a\left(N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Получим выражение для оценки a:

$$\hat{a} = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{3.7}$$

Обозначим $\Delta = N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$. Запишем конечное выражение для оценки b:

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta} \tag{3.8}$$

Получили оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$.

Формулы МНК для погрешностей a и b

Найдем теперь оценки погрешностей a, b, y_i (погрешности x_i равны 0, так как они определены точно). Для простоты будем считать, что оценки погрешностей y_i одинаковы и равны:

$$S_{y_i} = S_0$$

Величина a – косвенно измеряемая, значит $a = a(y_1,\ y_2, \dots, y_N)$. Ее оценка погрешности:

$$S_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial y_1}\Big|_{y_1,\dots,y_N} \cdot S_{y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y_2}\Big|_{y_1,\dots,y_N} \cdot S_{y_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial a}{\partial y_N}\Big|_{y_1,\dots,y_N} \cdot S_{y_N}\right)^2}$$

Распишем производные подробнее. Из (3.7) имеем:

$$\frac{\partial a}{\partial y_1} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial a}{\partial y_1}\left[N(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots) - \sum x_i\,(y_1 + y_2 + \dots)\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[N x_1 - \sum x_i\right]$$

Остальные производные запишутся аналогично (будут меняться только индексы). Для оценки погрешности коэффициента a S_a получим:

$$S_a = \frac{S_0}{\Delta}\sqrt{\left(N x_1 - \sum x_i\right)^2 + \left(N x_2 - \sum x_i\right)^2 + \dots} =$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$= \frac{S_0}{\Delta}\sqrt{N^2x_1^2 - 2Nx_1\sum x_i + \left(\sum x_i\right)^2 + N^2x_2^2 - 2Nx_2\sum x_i + \left(\sum x_i\right)^2 \ldots} =$$

$$= \frac{S_0}{\Delta}\sqrt{N^2\sum x_i^2 - 2N\sum x_i\sum x_i + N\left(\sum x_i\right)^2} =$$

$$= \frac{S_0}{\Delta}\sqrt{N}\sqrt{N\sum x_i^2 - N\left(\sum x_i\right)^2} = \frac{S_0}{\Delta}\sqrt{N\Delta} = \sqrt{\frac{N}{\Delta}}S_0 \qquad (3.9)$$

Для оценки погрешности коэффициента b проводятся те же самые операции, и в итоге получим:

$$S_b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}}\,S_0 \qquad (3.10)$$

Видно, что погрешности S_a и S_b пропорциональны S_0.

Достоверность МНК. Коэффициент корреляции

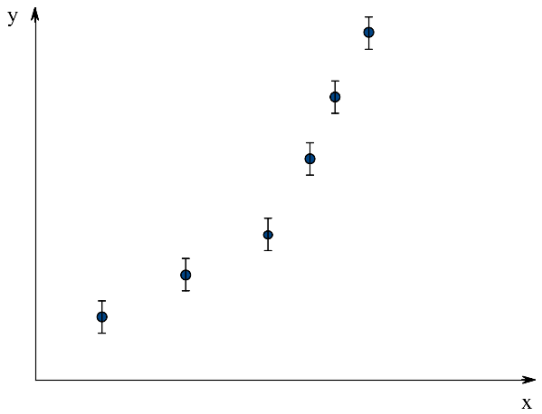

Рис. 3.4. Набор экспериментальных точек.

Пусть мы провели эксперимент и получили набор экспериментальных точек (рис. 3.4). МНК позволит найти наилучшую прямую.

Важная особенность МНК заключается в том, что при его использовании можно проверить, насколько теоретическая модель и полученные экспериментальные точки

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

соответствуют друг другу. Для этого при проведении эксперимента в физическом практикуме обязательно строить график.

При построении графиков с помощью прикладных программ часто встречается такая величина как *коэффициент корреляции*:

$$r = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2 \sum(y_i - \overline{y})^2}} \tag{3.11}$$

Этот коэффициент безразмерный, и принимает значения $-1 \leq r \leq 1$.

$|r| = 1$ при условии, если все точки идеально лежат на прямой, т. е. между ними строго линейная связь. Знак у r может различаться из-за разного направления прямой (рис. 3.5)

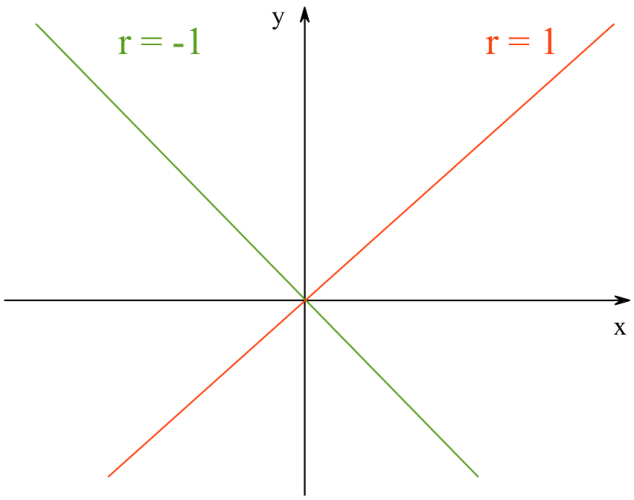

Рис. 3.5. К определению знака у коэффициента корреляции.

Если экспериментальные точки достаточно хорошо лежат на прямой, то $r \cong 0{,}99$. Чем хуже точки попадают на прямую, тем ниже r.

Хорошими в условиях общего физического практикума являются значения $r = 0{,}99 \div 0{,}96$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ЛЕКЦИЯ 4. Метод наименьших квадратов. Часть 2

МНК с постоянной погрешностью величин y. Хи-квадрат

На прошлой лекции для МНК мы делали предположение, что погрешности S_{y_i} одинаковы и равны S_0. Как оценить S_0?

Пусть мы провели серию измерений $x_1, x_2, \dots, x_N$ и вычислили среднее арифметическое $\overline{x}$. Оценка погрешности каждого измерения выражается формулой (1.6):

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{N-1}}$$

Проиллюстрируем на графике (рис. 4.2, 3):

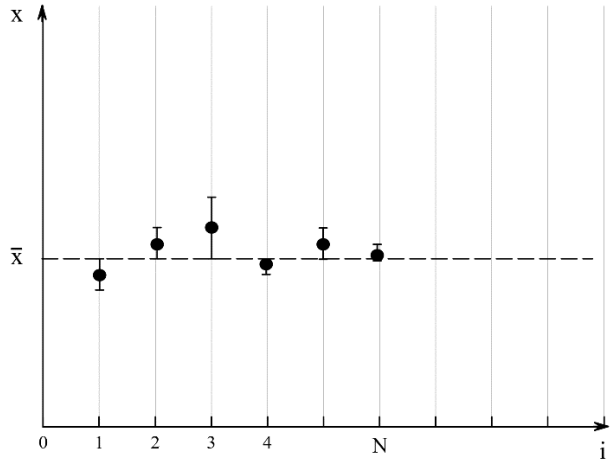

Рис. 4.1. Определение среднего арифметического.

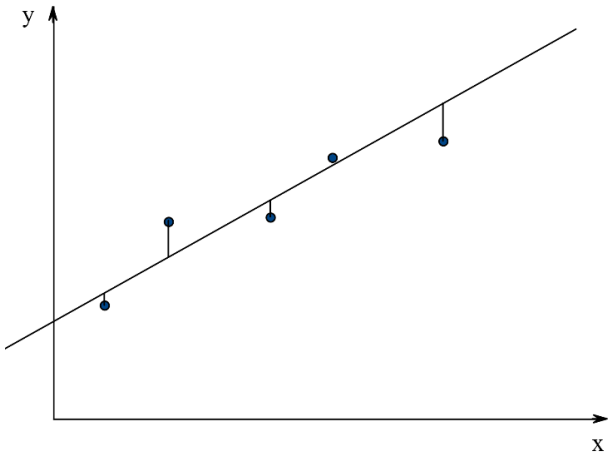

Рис. 4.2. Применение МНК.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Минимизируем сумму квадратов отклонений от «наилучшей» прямой:

$$S_0 = \sqrt{\frac{\sum\left(y_i - (\hat{a}x_i + \hat{b})\right)^2}{N-2}} \tag{4.1}$$

В формуле (1.6) было N независимых результатов измерений, мы вычислили среднее арифметическое, т. е. связали эти величины одной связью, уменьшив тем самым количество степеней свободы на 1. В знаменателе появилось $N-1$. В выражении (4.1) вычисляется уже две величины $\hat{a}$ и $\hat{b}$, поэтому количество степеней свободы уменьшается уже на 2, в знаменателе будет $N-2$.

Предположим, что S_0 по результатам измерений получились одинаковыми (рис. 4.3).

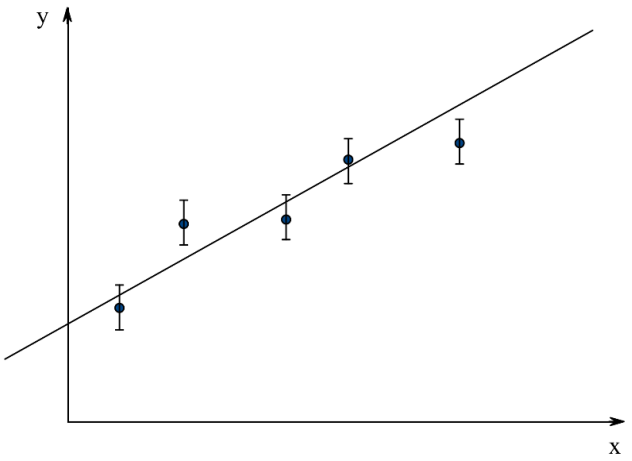

Рис. 4.3. Измерения с одинаковыми погрешностями.

Будем измерять отклонения экспериментальной точки от прямой в относительных значениях, разделив их на S_0.

$$\chi^2 \sim \sum\left(\frac{y_i - \left(\hat{a}x_i + \hat{b}\right)}{S_0}\right)^2 \tag{4.2}$$

Смысл такой нормировки – сколько коридоров погрешности укладывается в расстоянии между экспериментальной точкой и прямой по МНК. Полученное в результате число характеризует степень отклонения теоретической модели от экспериментальных данных. Эту величину называют коэффициентом «хи-квадрат».

Чем меньше значения χ^2 , тем лучше лежат точки на прямой. Некоторое среднее значение χ^2 находится в сравнении с величиной $N-2$:

1. Если $\chi^2 \gg N-2$, то скорее всего модель неверна.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2. Если $\chi^2 \approx N - 2$, то нет оснований считать модель плохой.
3. Если $\chi^2 \ll N - 2$, то это означает, что все значения практически идеально легли на прямую. Но здесь необходимо помнить, что так может получиться, если мы выбрали слишком большой коридор погрешности (рис. 4.4).

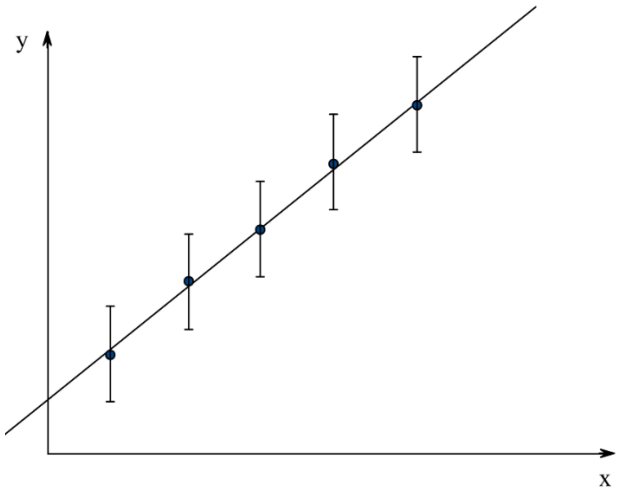

Рис. 4.4. МНК с большим коридором погрешности

Коэффициент «хи-квадрат» может служить средством проверки адекватности измерений, если погрешности примерно одинаковые во всех измерениях.

Проблемы электронных таблиц. Описание программы МНК

Рассмотрим метод МНК в Excel. Выберем модель $y = ax + b$. В качестве входных данных программа потребует значения только x и y, но не потребует S_0. В результате расчета программа выдаст значения $\hat{a},\ \hat{b}$, и еще погрешности S_a, S_b, хотя S_0 не задано.

Как мы можем видеть, в формулах для оценок $\hat{a},\ \hat{b}$ (3.7, 3.8) S_0 не присутствует. S_0 есть только в оценках погрешностей: $S_a, S_b \sim S_0$.

Зачастую в электронных таблицах используют формулу (4.1), без проверки адекватности через коэффициент хи-квадрат. x_i считаются заданными точно. То есть, в (4.1) подставляются эти точные значения x_i, затем y_i, далее вычисляется S_0, и потом вычисляются по формуле (). Это не совсем корректно. Поэтому лучше использовать те таблицы, где в качестве входного параметра присутствует S_0. (на сайте genphys.msu.ru выложена программа для расчета МНК).

МНК с весами

Ранее мы говорили об одной модели, где все S_0 были одинаковые. Теперь рассмотрим случай, когда S_{y_i} различны, но x_i будем по-прежнему считать абсолютно точными (рис. 4.5).

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

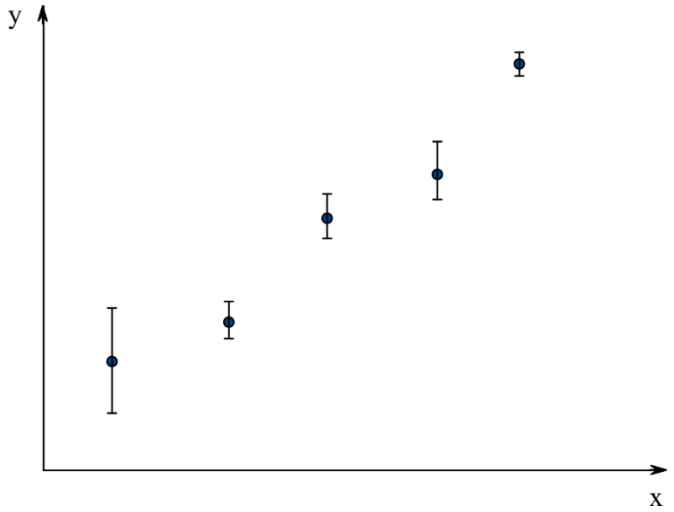

Рис. 4.5. *Измерения с различными погрешностями*

Необходимо ввести веса для каждой погрешности по y, чтобы провести прямую $y = ax + b$. Интуитивно можно догадаться, что прямая должна проходить ближе к точкам с меньшей погрешностью и дальше – от точек с большей погрешностью. Запишем это математически.

$$f(a,b) = \sum \left(\frac{y - (ax + b)}{S_{y_i}} \right)^2 \tag{4.3}$$

Таким образом, мы нормируем отклонение на коридор погрешности. Перед каждым слагаемым в (4.3) появляется множитель $\frac{1}{S_{y_i}^2} = w_i - вес\ i$-го измерения.

Если S_{y_i} мало, то вес получается большим, поэтому важно, чтобы к этим точкам с малым S_{y_i} прямая прошла как можно ближе.

Перепишем (4.3) с учетом введенного обозначения:

$$f(a,b) = \sum \left[w_i \big(y - (ax + b) \big)^2 \right] \tag{4.4}$$

Именно величину (4.4) мы будем минимизировать в МНК с весами. Формулы для оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$ можно получить аналогично тому, что мы делали на прошлых лекциях (предлагается сделать это самостоятельно):

$$\hat{a} = \frac{\sum w_i \sum w_i\, x_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i\, y_i}{\sum w_i \sum w_i\, x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2} \tag{4.5}$$

Обозначим знаменатель в (4.5) как Δ_w. Для $\hat{b}$ получим:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\hat{b} = \frac{\sum w_i x_i^2 \sum w_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\Delta_w} \tag{4.6}$$

Сравним полученные выражения с формулами (3.7, 3.8) для МНК без весов:

$$\hat{a} = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta}$$

Формулы (4.5, 4.6) редко приводятся в литературе, но их можно легко запомнить на основе формул для МНК без весов: к каждому x_i, y_i добавляется вес w_i, а N заменяется на $\sum w_i$.

Запишем формулы для оценок погрешностей S_a и S_b:

$$S_a^2 = \frac{\sum w_i}{\Delta_w} \tag{4.7}$$

$$S_b^2 = \frac{\sum w_i x_i^2}{\Delta_w} \tag{4.8}$$

Проверить соответствие модели можно, как и в прошлом случае, по графику, и с помощью коэффициента хи-квадрат, в который теперь добавятся погрешности:

$$\chi^2 \sim \sum \left(\frac{y_i - (\hat{a} x_i + \hat{b})}{S_{y_i}} \right)^2 \tag{4.9}$$

Корреляция при больших разбросах погрешностей адекватно работать не будет.

Таким образом, если мы получили значения y_i , и для каждого из них оценили погрешности, то можем пользоваться МНК с весами. Однако, если погрешности y_i отличаются не сильно (даже в 2-3 раза – это не много для погрешности), то тогда лучше пользоваться МНК без весов, взяв некоторое S_0.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ЛЕКЦИЯ 5. Метод наименьших квадратов. Часть 3

Обобщение понятий МНК. Погрешность x_0 и y_0

После того, как мы построили прямую по МНК $y = ax + b$, найдем ее точки пересечения x_0, y_0 с осями координат (рис.).

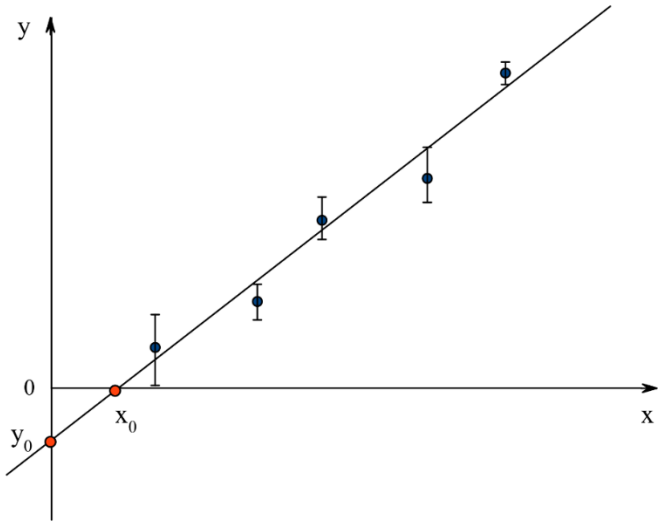

Рис. 5.1. Точки пересечения прямой в МНК с осями координат.

Найти их при вычисленных значениях $\hat{a}$ и $\hat{b}$ легко (с помощью подстановки в уравнение прямой):

$$y_0 = \hat{b}$$
$$x_0 = -\frac{\hat{b}}{\hat{a}} \tag{5.1}$$

Погрешность y_0 будет равна погрешности $\hat{b}$:

$$S_{y_0} = S_b \tag{5.2}$$

Оценим теперь погрешность x_0. Вспомним формулы относительных погрешностей (2.13):

$$\frac{S_{x_0}}{x_0} = \sqrt{\left(\frac{S_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{S_b}{b}\right)^2} \tag{5.3}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Но b и a – косвенно измеряемые величины, но они не являются независимыми, т. к. зависят от одного и того же набора величин $y_1, y_2, \dots, y_N$. Поэтому, строго говоря, надо пользоваться формулой (2.10) и считать частные производные. Если не требуются строгие вычисления, то можно пользоваться формулой (5.3).

Применение МНК к нелинейным моделям. Линеаризация

Моделей в МНК можно придумать много. До этого мы говорили про единственную модель $y = ax + b$.

Пусть есть функциональная зависимость, связывающая величины x и y, и при этом в нее входят какие-либо коэффициенты:

$$y = f(x, a, b, \dots, c) \tag{5.1}$$

Проведена серия измерений. Задача – найти оценки всех коэффициентов. Действуем так же, как и на прошлых лекциях, минимизируя сумму квадратов отклонений:

$$\sum \left(\frac{y_i - f(x, a, b, \dots, c)}{S_{y_i}} \right)^2$$

Если зависимость (5.1) сложная (нелинейная), то аналитически найти минимум бывает сложно. Можно найти его численно на ЭВМ, но с помощью некоторых упрощений эта задача решается аналитически.

Такое упрощение – это *линеаризация*. Она заключается в сведении некоторой нелинейной функции к линейной. Рассмотрим некоторые случаи линеаризации.

1. $y = a \sin x + b$

Делаем замену $\tilde{x} = \sin x$, тогда приходим к линейной модели $y = a\,\tilde{x} + b$.

2. $y = k^2 \sin x + \ln d$

Делаем замену $a = k^2$, $b = \ln d$. Находим $\hat{a}, \hat{b}, S_a, S_b$. Как найти теперь $\hat{k}, S_k$?

$$k = \sqrt{a}$$

S_k можем найти через погрешность относительных измерений, зная, что a стоит в степени $\frac{1}{2}$, значит относительная погрешность k в два раза меньше, чем относительная погрешность a. Для d:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$d = e^b$$

S_d найдем через погрешность косвенных измерений, взяв частные производные.

3. Рассмотрим нелинейность по y. Она присутствует в задаче изучения заряда-разряда конденсатора (схема на рис. 5.2, график зависимости напряжения на конденсаторе от времени на рис. 5.3).

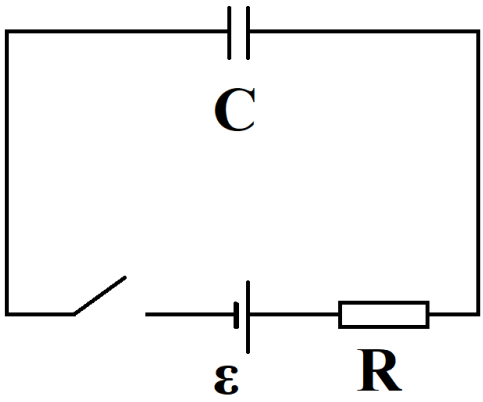

Рис. 5.2. Схема эксперимента по изучению заряда -разряда конденсатора.

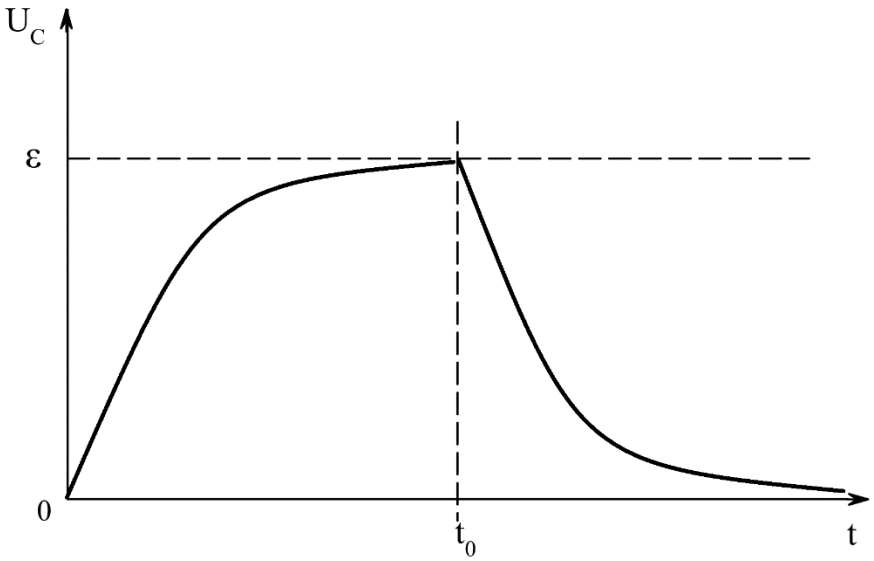

Рис. 5.3. *График зависимости напряжения на конденсаторе от времени.*

Напряжение на конденсаторе после размыкания ключа t_0 будет описываться формулой:

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \tag{5.2}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

где $\tau = RC$ – постоянная времени. График измерений (рис. 5.4):

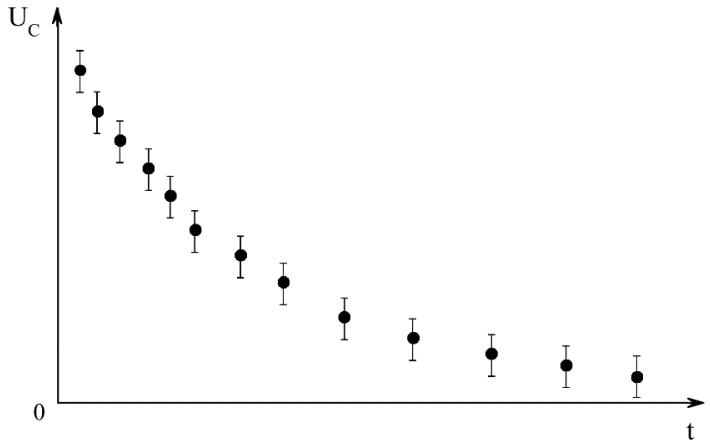

Рис. 5.4. Экспериментальные точки зависимости $U_c(t)$.

Задача – по результатам измерений $U(t)$ найти оценку $\hat{\tau}$. Прологарифмируем (5.2):

$$\ln U = \ln U_0 - \frac{t}{\tau} \tag{5.3}$$

Обозначим $y = \ln U$, $b = \ln U_0$, $x = t$, $a = -\frac{1}{\tau}$, и из (5.3) получим:

$$y = b + ax$$

Мы знаем x, можем выразить $y_i = \ln U_i$ и найти S_{U_i}. S_{y_i} найдем по формуле косвенных измерений.

Так как мы используем один вольтметр, то пусть у нас $S_{U_i} = S_0$. Так как $y = \ln U$, то:

$$S_{y_i} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{U_i} \cdot S_{u_i} = \frac{S_0}{U_i} \tag{5.4}$$

Получим линейную зависимость (рис. 5.5). Коридор погрешности с ростом t, согласно формуле (5.4), увеличивается. Поэтому здесь необходимо использовать МНК с весами.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

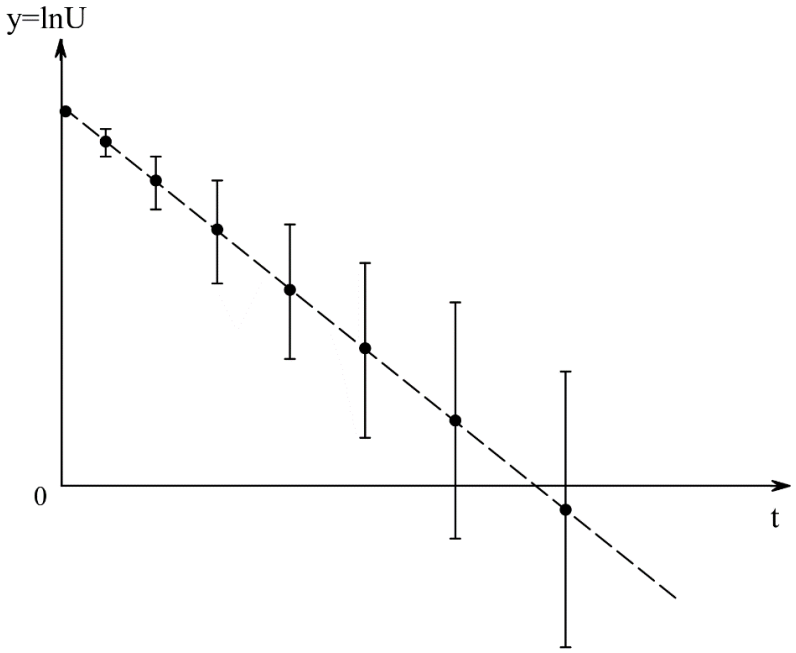

Рис. 5.5. График экспоненциальной зависимости в координатах $y = ln\,U$.

Модель y=ax. Одновременный учёт погрешностей x и y

Вспомним задачу из лекции 3, где мы искали жесткость пружины, подвешивая к ней различные грузики. Мы вывели формулу (3.2):

$$l_i = \frac{g}{k}\, m_i + l_0\,,$$

которая сводится к $y = ax + b$. Если мы бы сразу обозначили $l - l_0 = \Delta l$, то пришли бы к модели:

$$\Delta l = \frac{y}{k} m,$$

которая сводится к $y = ax$, т. е. к прямой, проходящей через начало координат (рис. 5.6):

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

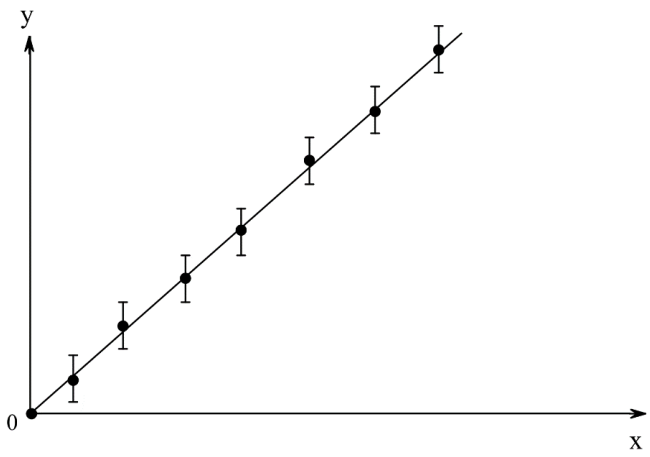

Рис. 5.6. Модель $y = ax$ в МНК.

Но здесь точка $y_i = 0$ проходит строго через 0, т. е. не имеет погрешности, тогда как в модели $y = ax + b$, эта точка имеет погрешность, причем наибольшую. Поэтому, если есть такая возможность, лучше пользоваться моделью $y = ax + b$.

Задача № 125 практикума. Шар, скатывающийся с наклонного желоба (рис. 5.7). Найти его ускорение.

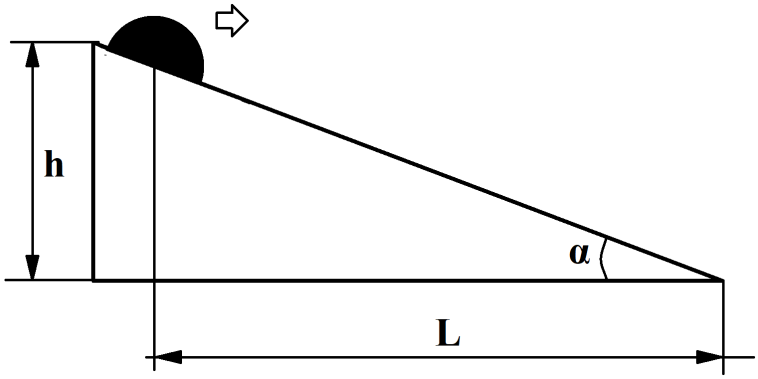

Рис. 5.7. Схема задачи № 125 практикума.

Здесь мы меняем высоту опоры h, а значит и угол наклона α, который находится из:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{L}$$

Ускорение находится по формуле:

$$a = \beta g \sin\alpha, \tag{5.5}$$

где β – коэффициент, зависящий от степени погружения шара в желоб.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Углы здесь малы, поэтому $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$, и (5.5) можем переписать в виде:

$$a = \beta g \frac{h}{L} \tag{5.6}$$

В этой задаче надо учесть, что изначально желоб не лежит идеально ровно, поэтому существует некоторая добавка h_0:

$$a = \beta g \frac{h + h_0}{L} \tag{5.7}$$

Это выражение представляет собой модель $y = ax + b$, здесь в роли y у нас ускорение, в качестве коэффициента a выступает $\frac{\beta g}{L}$, в роли b – h_0, а x это h. Таким образом, с помощью этой модели можно найти еще и дополнительную величину h_0, которая в данной задаче составляет порядка 0,5 мм при $L = 1$ м.

Перейдем теперь к тому моменту, что x у нас определялся абсолютно точно, т. е. $S_{x_i} = 0$. В модели $y = ax + b$ теперь выразим x через y (рис. 5.8):

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \tag{5.8}$$

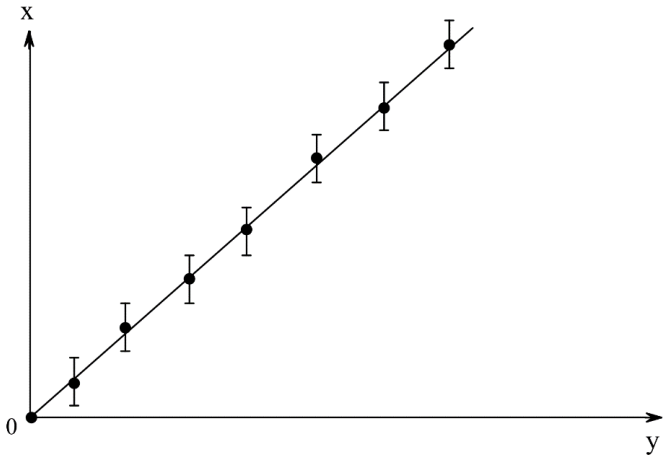

Рис. 5.8. Модель $y = ax$ с одинаковыми погрешностями.

Пользуемся по-прежнему МНК, но зануляем теперь S_{y_i}. Найдем оценки коэффициентов $\frac{1}{a}$ и $-\frac{b}{a}$, а также их погрешности. Отсюда можно перейти к оценкам $\hat{a}$ и $\hat{b}$. Если эти оценки по двум методам совпадают, то значит измерения произведены правильно.

Если построить эти модели (без весов) на одном графике, то они пересекутся в точке $(\overline{x}, \overline{y})$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Рассмотрим более сложный пример. Есть экспериментальная точка с разными коридорами погрешности по осям и прямая (рис. 5.9). Задача – найти алгоритм оценки по имеющимся погрешностям расстояние от данной точки до прямой.

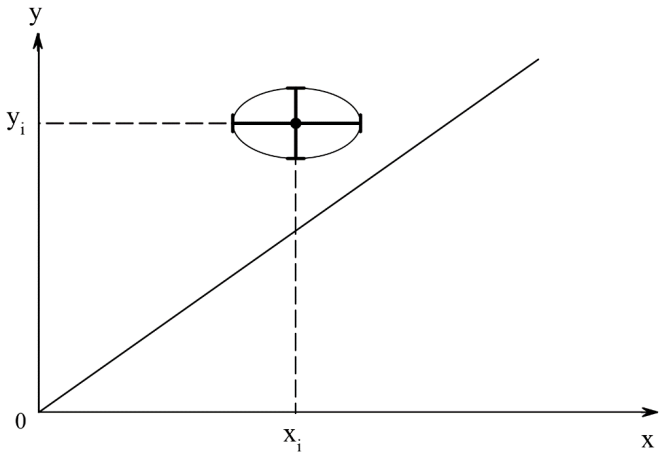

Рис. 5.9. К задаче оценки расстояния от точки до прямой по имеющимся погрешностям

Относительные погрешности равноудалены внутри эллипса. Пусть точка имеет координаты $(x_i,\ y_i)$, тогда уравнение эллипса запишем так:

$$\left(\frac{x-x_i}{S_{x_i}}\right)^2+\left(\frac{y-y_i}{S_{y_i}}\right)^2=1 \tag{5.9}$$

Необходимо найти такой коэффициент в правой части, чтобы эллипс коснулся прямой. Пусть у нас имеется множество точек, для них мы будем минимизировать сумму правых частей уравнения типа (5.9). (Правая часть этого уравнения представляет собой квадрат расстояния от центра до эллипса)

Предложенную идею можно использовать для одновременной оценки погрешностей по x и y.

Нахождение наилучшей оценки при помощи МНК с весами

Допустим, мы измерили одну и ту же величину разными способами. Необходимо найти наилучшую оценку.

Берем модель $y=b$. У нас есть $y_1, y_2, \dots, y_N$ и $S_{y_1}, S_{y_2}, \dots, S_{y_N}$. Используем МНК с весами.

$$\varphi(b)=\sum\left(\frac{y_i-b}{S_{y_i}}\right)^2 = \sum w_i(y_i-b)^2 \tag{5.10}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Здесь вес $w_i = \frac{1}{S_{y_i}^2}$

Минимизируем величину $\varphi(b)$ по b. Берем производную по b:

$$\frac{d\varphi}{db} = \sum w_i 2(y_i - b)(-1) \ = 0$$

$$\sum w_i y_i - b \sum w_i = 0$$

$$b = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i} \tag{5.11}$$

Найдем погрешность S_b, b зависит от $y_1, y_2, \dots, y_N$, значит находим частные производные:

$$\frac{\partial b}{\partial y_1} = \frac{w_1}{\sum w_i}$$
$$\frac{\partial b}{\partial y_2} = \frac{w_2}{\sum w_i}, \dots$$

и так далее.

$$S_b = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial y_1}\Big|_{y_1 \dots} S_{y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_2}\Big|_{y_1 \dots} S_{y_2}\right) + \cdots} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{w_1}{\sum w_i} S_{y_1}\right)^2 + \left(\frac{w_2}{\sum w_i} S_{y_2}\right)^2 + \cdots} =$$

Упростим $\left(w_1 S_{y_1}\right)^2 = w_1^2 S_{y_1}^2 = w_1$

$$= \sqrt{\frac{w_1 + w_2 + \cdots}{(\sum w_i)^2}} = \sqrt{\frac{\sum w_i}{(\sum w_i)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} \tag{5.12}$$

Далее мы минимизируем величину:

$$\sum w_i \left(y_1 - \hat{b}\right)^2$$

и сравниваем ее с $N - 1$ (у нас уже один коэффициент b, а не два).

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Рассмотрим квадрат S_b:

$$S_b^2 = \frac{1}{w_1 + w_2 + \cdots + w_N}$$

Пусть проведены N измерений, и из них выбираем самое точное y_j, с наименьшим коридором погрешности S_{y_j}. У этого измерения будет наибольший вес, т.е.:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_N > w_j$$

Тогда

$$S_b^2 < \frac{1}{w_j} \tag{5.13}$$

Получается, что погрешность найденным таким образом оценки b будет всегда меньше, чем погрешность самого точного измерения.

Если измерения проводятся в одинаковых условиях, то $S_{y_j} = S_0$, веса будут равны $w_i = w_0 = \frac{1}{S_0^2}$. По аналогии с (5.11) найдем b:

$$b = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i} = \frac{w_0 \sum y_i}{N w_0} = \frac{\sum y_i}{N} \tag{5.14}$$

Из (5.14) видно, что наилучшей оценкой с точки зрения МНК является среднее арифметическое. Найдем S_b по формуле (5.12):

$$S_b = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = \frac{1}{\sqrt{N w_0}} = \frac{S_0}{\sqrt{N}} \tag{5.15}$$

Оценка погрешности среднего арифметического равна оценке погрешности каждого измерения, деленной на корень из N. Другими словами, среднее арифметическое в $\sqrt{N}$ раз точнее, чем погрешность каждого измерения.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ЛЕКЦИЯ 6. Теория вероятностей

Мы уже знаем модель $y = ax + b$. И была модель $y = b$. Раскроем неожиданный момент для последней модели.

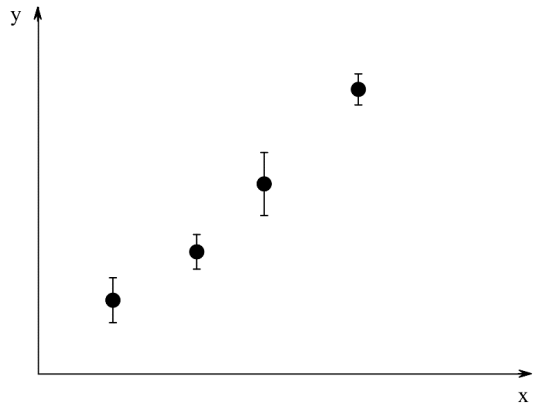

Рис. 6.1. Модель $y = b$ с разными коридорами погрешностей.

Мы знаем, что погрешности надо брать по одной оси. И исходя и того, что изображены разные коридоры погрешностей (рис. 6.1), здесь надо применять метод наименьших квадратов с весами. А какие погрешности здесь берем? Если мы провели одно измерение, то берем систематическое. Если много – то оцениваем случайные, а потом добавляем систематическую. На самом деле это неверно.

Речь пойдет о случайных величинах, у которых нет систематических погрешностей. И поэтому добавление сюда (в вертикальную линию на графике – на погрешность) систематических погрешностей может привести к нехорошим последствиям. Но часто ситуация безвыходная, если мы провели всего одно измерение.

Главное отличие систематических погрешностей от случайных: случайную погрешность можем уменьшить, увеличивая число измерений. А систематическую погрешность, повторяя многократно измерения, нельзя уменьшить.

Но есть другой способ уменьшения систематической погрешности. Вот о чем речь: например, нужно ручным секундомером измерить период колебаний. Допустим, провели измерение 10 раз по одному колебанию. Далее посчитаем случайную погрешность, получим оценку, и потом к случайной добавим систематическую, равную $\sigma_{\text{сист}} = 0{,}3$ с. Но в итоге ситуация не улучшится, особенно если период колебаний порядка 1 с.

Если измерить время 50 колебаний, получим $t_1 = t_{50}$, а погрешность при измерении ручным секундомером 0,3 с. Провели 5-10 раз измерения времени 50 колебаний. Оценили случайную погрешность среднего арифметического этого времени $S_{\bar{t}}$. Для того, чтобы найти период колебаний:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$T = \frac{t}{50}$$

Это уже формула косвенных измерений и поэтому для косвенно измеряемой величины должны взять частную производную. И тогда:

$$S_T = \frac{S_{\bar{t}}}{50}$$

Систематическая погрешность также уменьшится в 50 раз, в этом и заключается способ уменьшения систематической погрешности. Поэтому, проведя многократные измерения, систематическую погрешность уменьшить не можем.

Пример. МНК_модель $y = b$

Когда мы на прошлых лекциях рассматривали модель $y = b$, мы говорили, что есть результаты измерений $y_1, y_2, \dots, y_n$, погрешность $S_{y1}, S_{y2}, \dots, S_{yn}$.

МНК, применяемый для модели $y = b$, позволяет получить оценку, которая точнее, чем самое точное измерение.

Оценка, полученная в результате применения МНК, всегда точнее, чем самый точный эксперимент.

Пример. Измерение длины листа бумаги.

Теория вероятностей. Основные определения

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий случайные события, которые нельзя однозначно предсказать, произойдут они или нет.

Пример с игральным кубиком.

Производим испытание, бросаем кубик. У этого испытания есть какой-то исход либо говорят по-другому реализация. Сколько разных событий может произойти при бросании кубика?

2 игрока по очереди подбрасывают кубик, у кого выпадает большее число, тот выигрывает. Допустим первый выбросил число 3, в каком случае выиграет второй игрок? Таким образом, события выбираем сами.

Пространство элементарных событий (ПЭС) – множество всех событий, про которые можно сказать, что при проведении испытаний всегда происходит одно и только одно событие.

Разберемся из какого количества событий будет состоять пространство элементарных событий у подброшенного один раз кубика. При бросании кубика произойдет одно и только одно из них (либо больше 3, либо меньше 3, либо равно 3). Данное пространство элементарных событий состоит из трех элементов.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Может ли пространство элементарных событий состоять из бесконечного числа элементов? Пространство элементарных событий даже будучи дискретным, может состоять из бесконечного числа элементов.

Пусть есть пространство элементарных событий $A_1, A_2, \dots, A_N$, состоящее из N – элементов. Теория вероятностей каждому из этих событий приписывает некоторое число, которое называется вероятностью этого события. Обозначается так: $p_1, p_2, \dots, p_N$.

Вероятность – отношение числа благоприятных исходов (т.е. исходов, при которых данное событие произошло) к общему числу испытаний при $N \to \infty$.

Вернемся к примеру с кубиком. Есть пространство элементарных событий (либо больше 3, либо меньше 3, либо = 3) – три разных события. Вероятность того, что выпадет число больше трех $\to \frac{3}{6}$; число меньше трех $\to \frac{2}{6}$; число равное 3 $\to \frac{1}{6}$. Если сложить вероятности данных событий, то в сумме получим единицу.

Определение вероятности:

$$p_i = \frac{N_i}{N} \text{ при } N \to \infty \tag{6.1}$$

где N – число испытаний; N_i – число благоприятных исходов.

Свойства вероятности:

1) $0 \leq \mathrm{p_i} \leq 1$

2) Если просуммировать все $\mathrm{p_i}$ по пространству элементарных событий, то получим единицу:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{p_i} = 1 \tag{6.2}$$

Невозможное событие – это событие, которое не может произойти ни при каких условиях.

Невероятное событие – это событие, вероятность которого равна нулю.

Достоверное событие – событие, которое происходит всегда. А вот событие, вероятность которого равна единице, не имеет названия.

Несовместные события – события, которые не могут произойти одновременно. Поэтому пространство элементарных событий состоит из несовместных событий.

Сумма, произведение событий и их вероятности

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Представим, что пространство элементарных событий это доска. Как проводятся испытания? Бросаем в доску предметы и тем самым обозначаем это место точкой. Точки равномерно заполняют всю доску (равновероятно). Чему равна вероятность события A, которое заключается в том, что на доске нарисована какая-то область. A. Какова вероятность того, что попадем в область A?

Возьмем отношение площадей:

$$p_A = \frac{S_A}{S}$$

Нарисуем событие B. Для него будет то же самое (рис. 6.2).

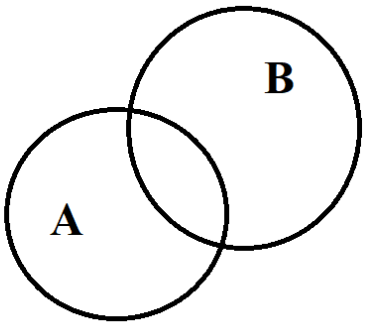

Рис. 6.2. Пересечение событий A и B.

1) Сумма событий

$$C = A + B$$

Событие C называется *суммой* двух событий, если при проведении испытаний произошло или первое событие или второе событие или оба события.

2) Произведение событий

$$D = A * B$$

Событие D называется *произведением* двух событий, если при проведении испытаний происходит и первое событие и второе событие.

Сравним вероятность суммы C p_c с суммой вероятностей $p_A + p_B$.

$$p_c \leq p_A + p_B$$

Мы видим, что площадь события C (площадка, которая совпадает граница с A и граница с B) меньше либо равно, чем сумма площадей события A и события B, при

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

условии, что у них есть область наложения друг на друга. В случае, когда области не пересекаются:

$$p_c = p_A + p_B \tag{6.3}$$

Таким образом, вероятность суммы равна сумме вероятностей при условии, что это событие несовместное.

Сравним вероятность произведения двух событий p_D с вероятностью p_A:

$$p_D \leq p_A, p_B \tag{6.4}$$

Когда одно событие будет внутри другого (рис. 6.3), тогда пишется знак равенства.

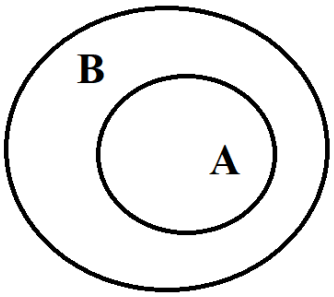

Рис. 6.3. Событие A является подмножеством другого (B).

Произведение событий используется также в другой интерпретации. Рассмотрим пример: пусть бросаем одновременно два кубика.

Вероятность того, что на первом кубике выпадет число 6 и на втором такое же число, равна $\frac{1}{36}$. Вероятность того, что на первом выпадет 3, а на втором 2 будет также равна $\frac{1}{36}$.

А вероятность того, что выпадут числа 3 и 2, вне зависимости от того, на каком кубике, равна: $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Результат на первом кубике не связан с результатом второго испытания (т.е. независимые события).

Свойство независимых событий: для независимых событий вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей:

$$p_D = p_A * p_B \tag{6.5}$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Пусть у нас есть пространство элементарных событий $A_1, A_2, \dots, A_N$, с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_N$. Теперь введем случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_N$, т. е. каждому событию приписываем какое-то значение.

Пример. Берем колоду из 36 карт и вытягиваем короля, за него дается 4 балла, за даму – 3, за валета – 2 балла, за 10, 9,8,7,6 – 0, за туза – 2. Таким образом, получили набор случайных величин (см. табл. 6.1).

Табл. 6.1

A_1	A_2	…	A_N
p_1	p_2	…	p_N
X_1	X_2	…	X_N

Мы можем найти среднее значение случайной величины. Допустим, провели N испытаний. Подсчитаем общее количество очков, которое выпало и поделим на N, стремящееся к бесконечности.

$$p_1X_1 + p_2X_2 + \cdots + p_NX_N \rightarrow \text{среднее значение случайной величины}$$

Т.е. мы получили *математическое ожидание* случайной величины:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} p_iX_i \tag{6.6}$$

Теперь нас интересуют отклонения значений случайной величины от среднего значения (дисперсия случайной величины):

$$D[X] = E[(X - EX)^2] \tag{6.7}$$

Рассчитаем дисперсию:

Предположим, нужно найти математическое ожидание не от случайной величины, а от функции от нее, например математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{N} p_iX_i^2$$

$$D[X] = E\left[\left(X^2 - 2XE[X] + E^2[X]\right]\right] = E[X^2] - E\left[2XE[X]\right] + E\left[E^2[X]\right] =$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$= E[X^2] - 2E[X] * E[X] + E^2[X] = E[X^2] - E^2[X] \quad (6.8)$$

Дисперсия – это сумма среднего значения случайной величины в квадрате, и квадрата среднего значения случайной величины. Это есть способ вычисления дисперсии случайной величины. Она характеризует среднее значения квадрата разброса.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ЛЕКЦИЯ № 7. Функции распределения случайной величины

Вспомним основные моменты теории вероятности, которые обсуждались на прошлой лекции.

Теория вероятностей – наука, изучающая случайные события, про которые заранее нельзя предсказать это событие или нет.

Можно сформировать пространство элементарных событий $A_1, A_2, \dots, A_N$ (несовместные события).

Пространство элементарных событий – пространство событий, про которые можно сказать, что в результате испытаний происходит одно и только одно событие.

Можно сформировать пространство элементарных событий $A_1, A_2, \dots, A_N$ (несовместные события). Каждому из этих событий приписывается вероятность этого события $p_1, p_2, \dots, p_N$.

Определение вероятности (отношение благоприятных исходов к общему числу испытаний):

$$p_i = \frac{N_i}{N} \text{ при } N \to \infty$$

Это частотное определение и данную величину в теории вероятностей называют частотой. Но не совсем корректно говорить, что вероятность есть частота. Почему?

Пример. Взяли кубик и знаем что вероятность того, что выпадет число 6 равно $\frac{1}{6}$. Т.к. считаем, что кубик ровный и симметричный, следовательно, будет равновероятное выпадение любого числа. Поэтому вероятность для кубика вычислять таким образом не нужно. В большинстве случаев вероятность вычисляется из каких-либо соображений, т.е. вероятность строится теоретически.

Предположим, имеем кубик со смещенным центром тяжести. И есть сомнения, смещен он либо нет. Вот в таком случаем, имеет смысл провести испытание и выяснить например, что одно число выпадает с вероятностью $\frac{1}{4}$, а остальные с другой вероятностью.

Также мы ввели случайные величины, т.е. каждому событию приписали какое-то значение $X_1, X_2, \dots, X_N$.

Пример. Взяли колоду карт и сказали сколько очков приписываем королю (4), даме (3), валету (2) и т.д. Представим для данной колоды вероятности $p_1, p_2, \dots, p_N$ и значения случайной величины $X_1, X_2, \dots, X_N$ в виде графика (рис. 7.1)

Вероятность выбрать туза $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, а очков за это получим 11. За карту «десятка» получим 10 очков, а вероятность того, что выпадет «десятка» также равна $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ и т.д. для других карт. С вероятностью $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ получим 0 очков (т.к. 0 очков приписывается при выпадении карт 6,7,8 или 9).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

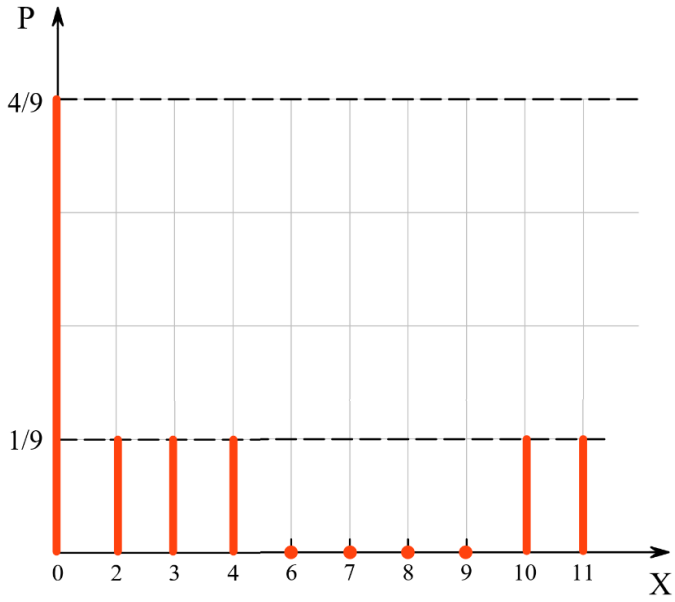

Рис. 7.1. Распределение вероятностей по картам в игре «двадцать одно».

Видим, что в сумме получается единица ($\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=\frac{9}{9}=1$). Следовательно, выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

$$0 \le p_i \le 1$$

Математическое ожидание случайной величины:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i X_i = E[X]$$

Вычислим среднее значение случайной величины, у которой распределение задано вышеуказанным образом:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} p_i X_i = \frac{1}{9}\cdot 11 + \frac{1}{9}\cdot 10 + \frac{1}{9}\cdot 4 + \frac{1}{9}\cdot 3 + \frac{1}{9}\cdot 2 + \frac{4}{9}\cdot 0 = \frac{10}{3}$$

Дисперсия случайной величины (среднее значение квадрата отклонения от среднего значения):

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$D[X] = E[(X - EX)^2] = E[X^2] - E^2[X]$$

Данные формулы используются для дискретных величин. Но существуют величины, имеющие непрерывный характер, поэтому обобщим данные формулы для случайных величин, имеющих непрерывный характер.

Функция распределения случайной величины. Плотность распределения

Пример. Найдем распределение арбузов по массе. Масса арбузов – это случайная величина. По оси абсцисс задаем массу и разобьем ось на большие ячейки по одному кг. По оси ординат задаем N_i. Взвесив первый арбуз, узнаем, что его масса равна 3,3 кг, следовательно его масса будет лежать в интервале от 3 до 4 кг, поэтому ставим там черту (один арбуз с такой массой). Берем следующий с массой 5,7 кг, аналогичным образом ставим черту и т.д. Тем самым столбики растут и рано или поздно, когда проведем измерения, например, тысячи арбузов получим гистограмму (рис. 7.2):

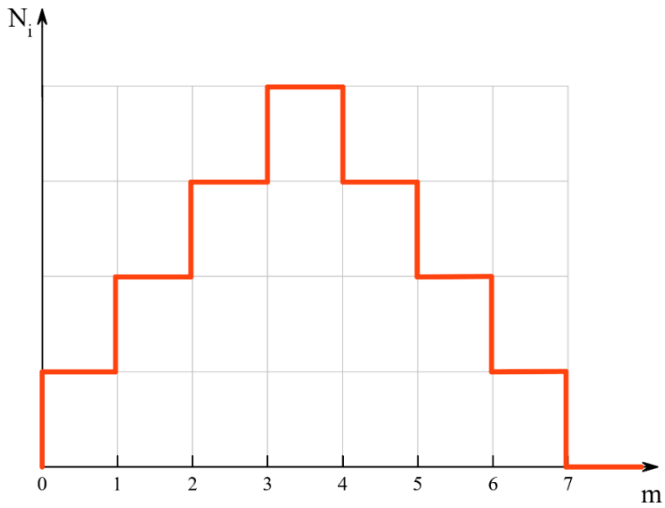

Рис. 7.2. Гистограмма распределения массы арбузов в примере.

$\frac{N_i}{N} = p_i$ – чтобы не был высоким график, при увеличении количества арбузов.

Для того, чтобы график стал гладким, разделим интервалы по оси x, например пополам. Поэтому число ступенек увеличится вдвое, и уменьшится по высоте вдвое. А если интервал разделить на 100, а лучше на 1000, тогда график «просядет» в 1000 раз и ничего не будет видно. Для того, чтобы это не случилось, нужно вероятность поделить на величину интервала. Отношение вероятности к величине интервала называется плотностью вероятности:

$$f(X) = \frac{p_i}{\Delta X} \text{ при } \Delta X \to 0 \qquad (7.1)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

где ΔX – величина интервала, на которую разбиваем случайную величину.

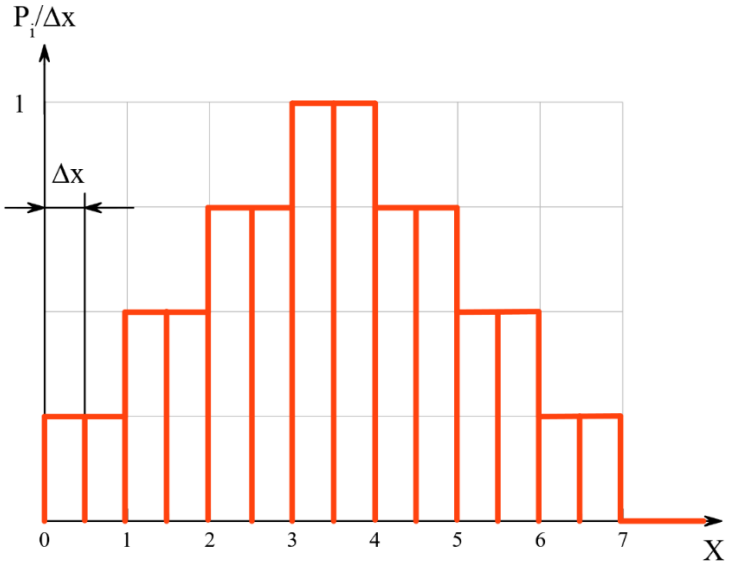

Рис. 7.3. Разбиение гистограммы на более мелкие интервалы.

Нетрудно сообразить, что при X, пробегающем все значения, график будет иметь более гладкий вид.

Теперь разобьем ось X на много маленьких интервалов и возникает вопрос: а можем ли найти вероятность того, что масса арбуза попала в данный интервал δX?

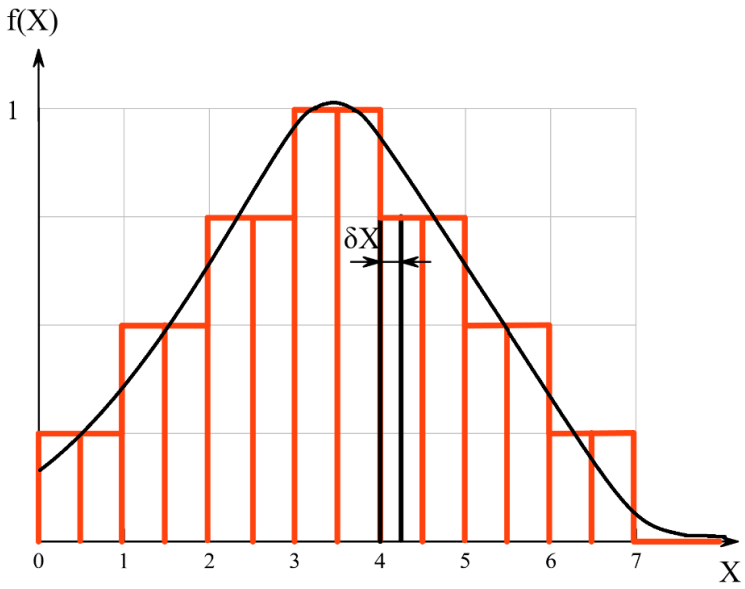

Рис. 7.4. Дальнейшее уменьшение шага гистограммы приводит к более гладкому распределению.

Вероятность попадания в данный интервал будет:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$p = f(X_i)\delta X$$

где $f(X_i)$ – значение функции плотности вероятности в рассматриваемой точке; δX – величина интервала.

Пример. Пусть возьмем два случайных значения X_1 и X_2, тогда вероятность того, что случайная величина X лежит в интервале $X_1 \leq X \leq X_2$ будет:

$$p(X_1 \leq X \leq X_2) = \int_{X_1}^{X_2} f(X)dX \tag{7.2}$$

Таким образом, плотность вероятности позволяет найти любую вероятность для данной случайной величины.

Условие нормировки функции плотности вероятности:

$$\int_0^{\infty} f(X)dX = 1 \tag{7.3}$$

Т.е. на примере с арбузами можно сказать, что вероятность того, что масса арбуза лежит от нуля до бесконечности равна единице. Зная функцию плотности вероятности $f(X)$, можно найти вероятность p.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей непрерывное распределение, которое описывается функцией плотности вероятности будет выражаться через интеграл:

$$E[X] = \int_0^{\infty} X \cdot f(X)dX \tag{7.4}$$

Вычислив $E[X]$, получим какое-то число. Пусть полученное число это X_0:

$$E[X] = \int_0^{\infty} X \cdot f(X)dX = X_0$$

Дисперсия непрерывной случайной величины:

$$D[X] = E[(X - EX)^2] = \int_0^{\infty} (X - X_0)^2 \, f(X)dX$$

$$D[X] = \int_0^{\infty} (X - X_0)^2 \, f(X)dX \tag{7.5}$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Расчёт погрешности округления

Пример. Имеется шкала прибора с делениями (рис. 7.5). Стрелка может принять самые разные положения. При каких показаниях стрелки (показания – это случайная величина X) будем округлять значения, например, до 4?

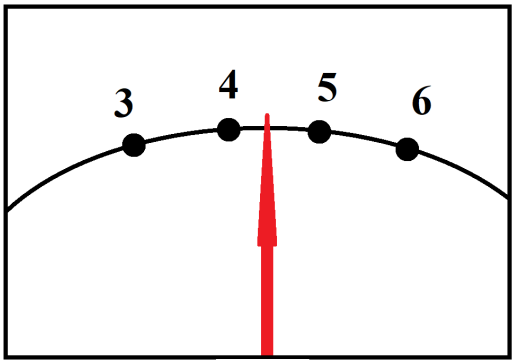

Рис. 7.5. Показания прибора с ценой деления 0,5.

Построим функцию плотности вероятности для такой процедуры. Попытаемся понять при каких значениях X будем округлять до 4.

Если стрелка стоит меньше чем на трех делениях, то округлить до четырех не сможем, поэтому на графике покажем чертой, что значение $f(X) = 0$. Аналогично, если стрелка будет на пяти или больше. Таким образом, функция плотности вероятности до округления имеет вид (рис. 7.6):

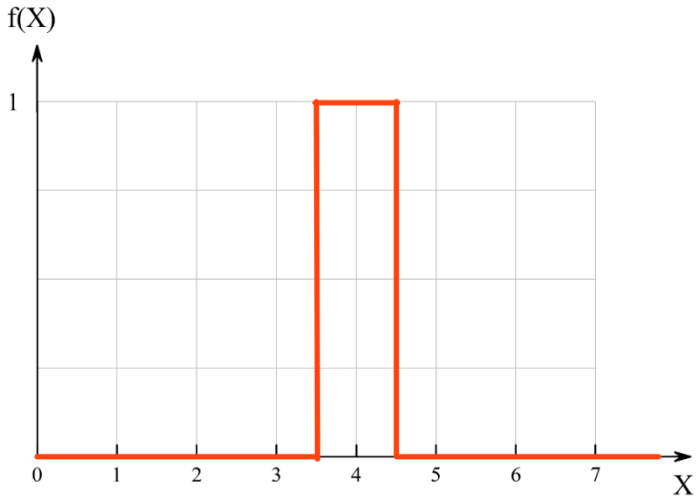

Рис. 7.6. График плотности вероятности для случая с прибором 1.

Рассмотрим случай, когда шкала прибора имеет шаг 0,1 (рис. 7.7):

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

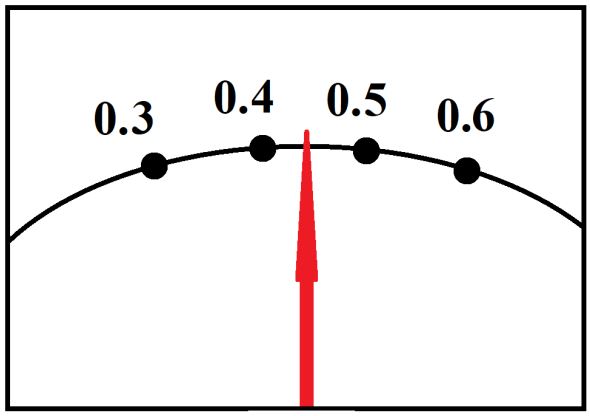

Рис. 7.7. Показания прибора с ценой деления 0,05.

Тогда график будет выглядеть следующим образом (рис. 7.8):

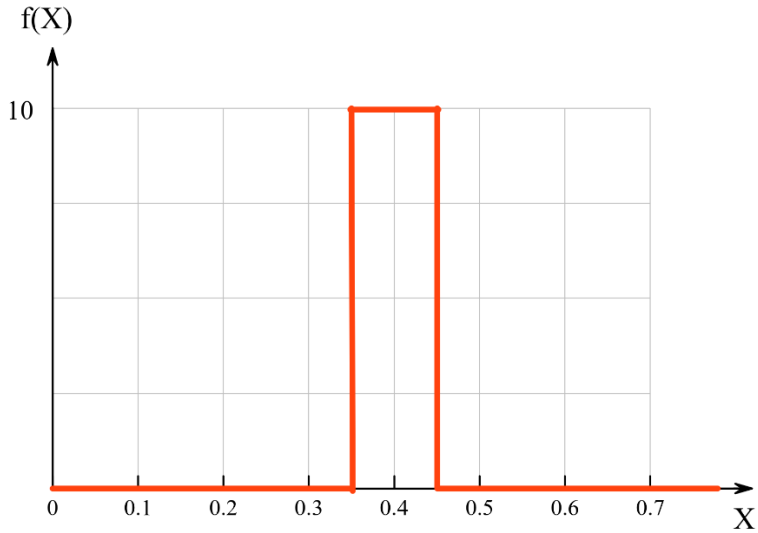

Рис. 7.8. График плотности вероятности для случая с прибором 2.

Т.е. $f(X)$ будет принимать значение 10, т.к. площадь под этой функцией должна быть равна единице. Следовательно, 0.1 должны домножить на 10 чтобы получить единицу.

Функция $f(X)$ может принимать любые неотрицательные значения, главное, чтобы интеграл под данной функций был равен единице во всех пределах.

Возьмем какое-то значение X_0, которое будем округлять; ω – цена деления прибора. И тогда функция плотности вероятности для процедуры округления будет лежать в интервале от $X_0 - \frac{\omega}{2}$ до $X_0 + \frac{\omega}{2}$ и выглядит таким образом (рис. 7.9):

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

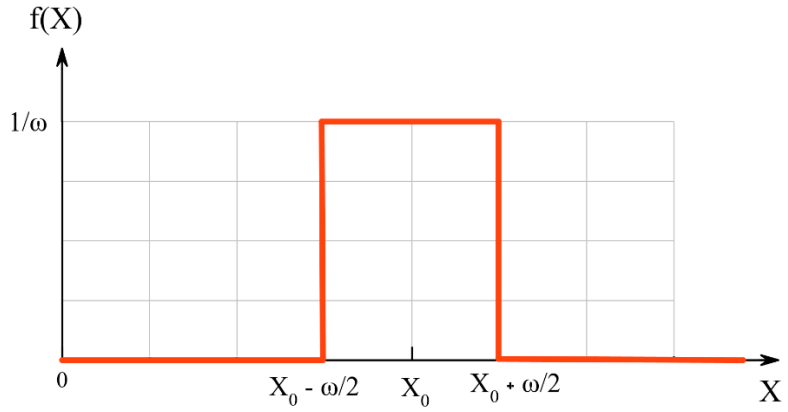

Рис. 7.9. Функция плотности вероятности для процедуры округления.

Если случайная величина попала в интервал от $X_0 - \frac{\omega}{2}$ до $X_0 + \frac{\omega}{2}$, тогда округляем до X_0.

Найдем для данной случайной величины математическое ожидание и дисперсию.

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}|X - X_0| \text{ при } X_0 \in \left[X_0 - \frac{\omega}{2}\ ;\ X_0 + \frac{\omega}{2}\right] \\ 0 \text{ при } X_0 \notin \left[X_0 - \frac{\omega}{2}\ ;\ X_0 + \frac{\omega}{2}\right] \end{cases} \tag{7.6}$$

При нахождении математического ожидания и дисперсии, интеграл можем брать не в бесконечных пределах, а в тех, где $f(X)$ принимает ненулевые значения.

$$E[X] = \int_{X_0-\frac{\omega}{2}}^{X_0+\frac{\omega}{2}} X \cdot \frac{1}{\omega} dX = \frac{X^2}{2\omega}\Big|_{X_0-\frac{\omega}{2}}^{X_0+\frac{\omega}{2}} = \frac{\left(X_0 + \frac{\omega}{2}\right)^2 - \left(X_0 - \frac{\omega}{2}\right)^2}{2\omega} =$$

$$= \frac{\omega 2X_0}{2\omega} = X_0 \tag{7.7}$$

$$D[X] = \int_{X_0-\frac{\omega}{2}}^{X_0+\frac{\omega}{2}} (X - X_0)^2 \cdot f(X) dX = \int_{X_0-\frac{\omega}{2}}^{X_0+\frac{\omega}{2}} (X - X_0)^2 \cdot \frac{1}{\omega} dX =$$

Сделаем замену переменных: $Y = X - X_0$

$$= \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} Y^2 \cdot \frac{1}{\omega} dY = \frac{Y^3}{3\omega}\Big|_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} = \frac{\frac{\omega^3}{8}}{3\omega} 2 = \frac{\omega^2}{12} \tag{7.8}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Среднеквадратичное отклонение:

$$\sqrt{D[X]} = \frac{\omega}{\sqrt{12}} \tag{7.9}$$

Именно из этих соображений систематическая погрешность при округлениях равна $\sigma_{\text{окр}} = \frac{\omega}{\sqrt{12}}$.

Распределение Гаусса. Центральная предельная теорема

Распределение, которое мы рассмотрели называется равномерным распределением на каком-то интервале (т.е. равновероятно величина принимает какие-то значения):

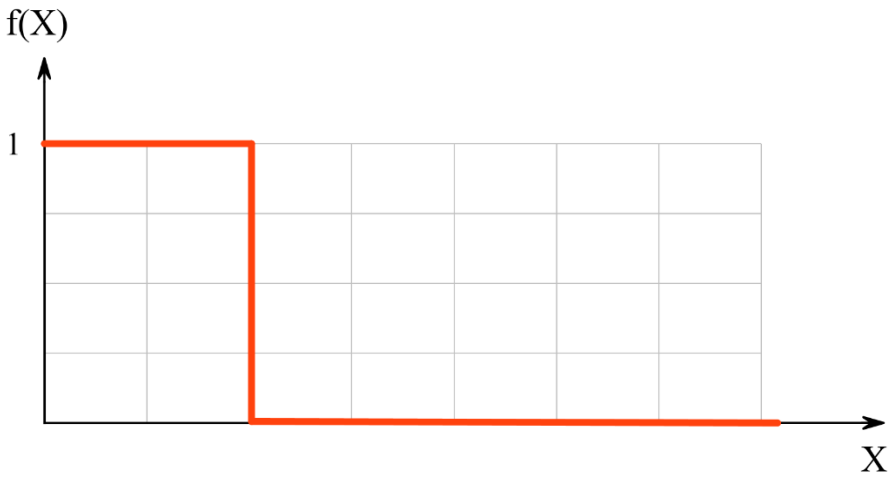

Рис. 7.10. Плотность вероятности для равномерного распределения.

Рассмотрим *распределение Гаусса* (нормальное распределение). Это наиболее широко используемое распределение, к которому в физике прибегают всегда, если распределение неизвестно.

У нормального распределения есть два параметра X_0 и σ.

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-X_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{7.10}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

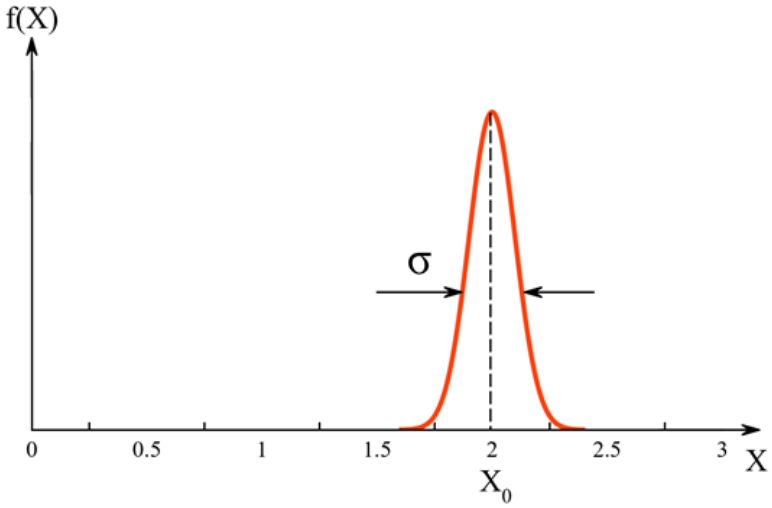

Рис. 7.11. Плотность вероятности для нормального распределения.

Распределение принимает значения на интервале $(-\infty;\infty)$. У нормального распределения есть два параметра X_0 и σ. За ширину на определенной высоте отвечает параметр σ.

Математическое ожидание и дисперсия нормально распределенной случайной величины:

$$E[X] = X_0 \tag{7.11}$$

$$D[X] = \sigma^2 \tag{7.12}$$

Краткая запись нормального распределения с параметрами – математическим ожиданием X_0 и с дисперсией σ^2:

$$\mathcal{N}(X_0, \sigma^2)$$

Теперь возьмем интервал $X_0 \pm \sigma$, тогда можем найти вероятность того, что случайная величина попадет в данный интервал равна 68%.

$$p(X \in (X_0 \pm \sigma)) = 68\%$$

Пусть проведены измерения и проведена оценка среднего арифметического и среднеквадратической погрешности:

$$\bar{X} \pm S_{\bar{X}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Истинное значение лежит в этом интервале с вероятностью 68% при нормальном распределении.

Если возьмем больший интервал:

$$p(X \in (X_0 \pm 2\sigma)) \to 95\%$$

При еще большем интервале:

$$p(X \in (X_0 \pm 3\sigma)) \to 99{,}7\% \tag{7.13}$$

Видно, что величина с интервалом в три раза больше, чем σ попадает в него с вероятностью практически 100%. Вспомним термин «предельная погрешность» ($\Delta_{\text{пред}}$) – максимально возможная погрешность прибора. Теперь перейдем к $\sigma_{\text{приб}}$:

$$\sigma_{\text{приб}} = \frac{\Delta_{\text{пред}}}{3}$$

Именно из следствия формулы (7.13) следует выражение для $\sigma_{\text{приб}}$.

Почему нормальное распределение такое распространенное? Возьмем случайную величину X, у которой есть какое-то распределение. Распределение неизвестно, но знаем математическое ожидание (7.11) и дисперсию (7.12) случайной величины.

Теперь возьмем реализации этой величины т.е. измерим $X_1, X_2, \dots, X_N$ и будем искать распределение такой величины:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ \dots + \ X_N}{N}$$

Это – среднее арифметическое.

Существует центральная предельная теорема, которая гласит: распределение случайной величины с известными математическим ожиданием и дисперсией, которая представляет собой сумму некоторых величин, то среднее арифметическое из комбинаций этих величин при $N \to \infty$ будет стремиться к нормальному распределению.

$$\frac{X_1 + X_2 + \ \dots + \ X_N}{N} \to \mathcal{N}\left(X_0, \frac{\sigma^2}{N}\right) \text{ при } N \to \infty$$

Пример. Возьмем случайную величину, которая принимает три возможных значения: $-1;\ 0;\ 1$, причем равновероятно. Т.е. мы рассматриваем дискретные величины. Изобразим распределение случайной величины (рис. 7.12):

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

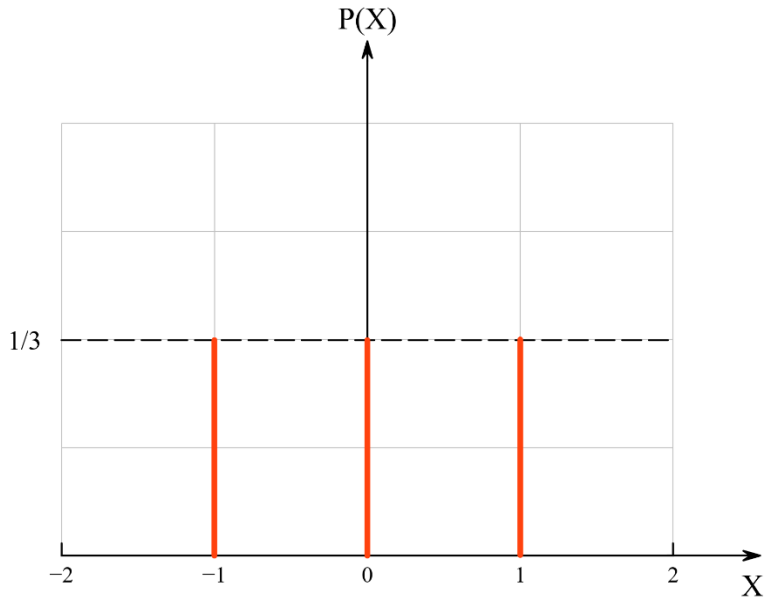

Рис. 7.12. Распределение случайной величины X, принимающей 3 возможных значения.

Теперь возьмем сумму случайных величин, которые распределены таким образом и найдем распределение $X_1 + X_2$.

$X_1 + X_2$ может принимать значения: -2, -1, 0, 1, 2. Общее число комбинаций равно 9, т.к. X_1 и X_2 имеют по 3 возможных значения.

В единственном случае сумма будет равна -2, следовательно вероятность равна $\frac{1}{9}$. Когда сумма равна -1, тогда вероятность $\frac{2}{9}$. В случае, когда сумма равна 0 вероятность будет $\frac{3}{9}$ и т.д. Графически это можно изобразить так (рис. 7.13):

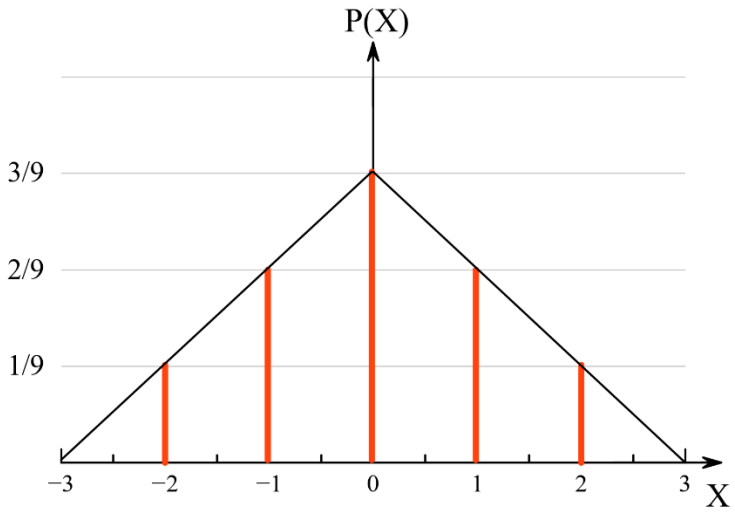

Рис. 7.13. Распределение суммы случайных величин $X_1 + X_2$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Теперь найдем распределение $X_1 + X_2 + X_3$. В данном случае будет 27 возможных комбинаций, тогда получим (рис. 7.14):

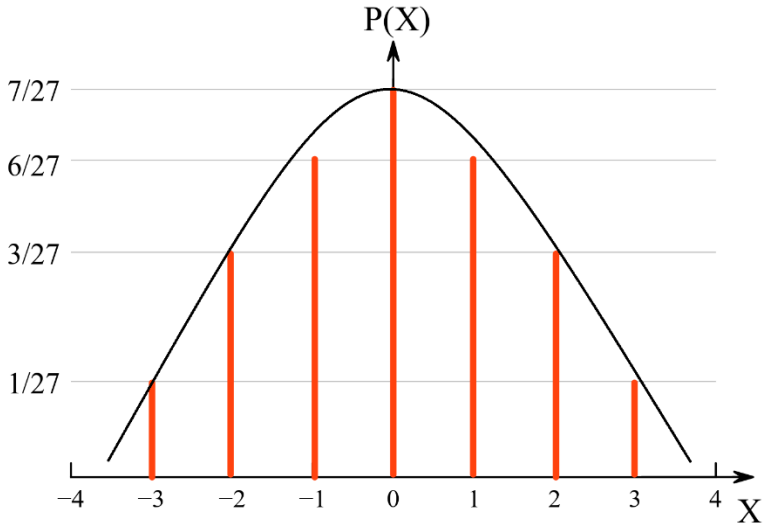

Рис. 7.14.

Таким образом, независимо от того, какое распределение у величины X, ее среднее арифметическое с ростом N всегда будет стремиться к нормальному распределению.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ЛЕКЦИЯ 8. Распределение Стьюдента

Пример. Пусть измеряем время пятидесяти колебаний. Если бы мы проводили измерение множество раз (например, миллион), то нашли бы функцию плотности вероятности для случайной величины и получили бы распределение. Допустим, мы не хотим проводить много измерений, поэтому проведем 3-5 измерений. И должны найти истинное значение случайной величины – это есть точечная оценка.

Кроме точечных оценок существуют интервальные оценки (т.е. в каком-либо интервале лежит истинное значение). Функция плотности вероятности как раз позволяет находить эти интервалы. Для любого интервала можем найти вероятность через функцию плотности вероятности:

$$p(X_1 \le X \le X_2) = \int_{X_1}^{X_2} f(X)dX$$

Распределение Стьюдента

Распределение Стьюдента – это распределение среднего арифметического по результатам N – измерений, если известно, что измеряемая величина имеет нормальное распределение.

Проводя измерения, мы заранее не можем знать, что случайная величина распределена нормально, но как обсуждалось на прошлой лекции, если распределение неизвестно, то считаем его нормальным.

Пусть проведена серия прямых измерений в одинаковых условиях. Как известно, в таком случае наилучшей оценкой является среднее арифметическое и в качестве оценки погрешности берем погрешность среднего арифметического:

$$X = \bar{X} \pm S_{\bar{X}}$$

Получили, например: 234 ± 5. Но нет гарантий, что именно в данном пределе лежит измеряемая величина. На самом деле измеряемая величина имеет какое-то распределение, которое нам неизвестно. Уильям Сили Госсет (тот, кто придумал распределение Стьюдента) предложил считать, что величина имеет нормальное распределение и вывел распределение Стьюдента.

Чем больше число измерений, тем больше распределение Стьюдента похоже на нормальное распределение. Если же число измерений мало, то оно отличается от нормального распределения тем, что оно более «широкое».

Пример. Рассмотрим распределение Стьюдента, у которого есть математическое ожидание и дисперсия (рис. 8.1).

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

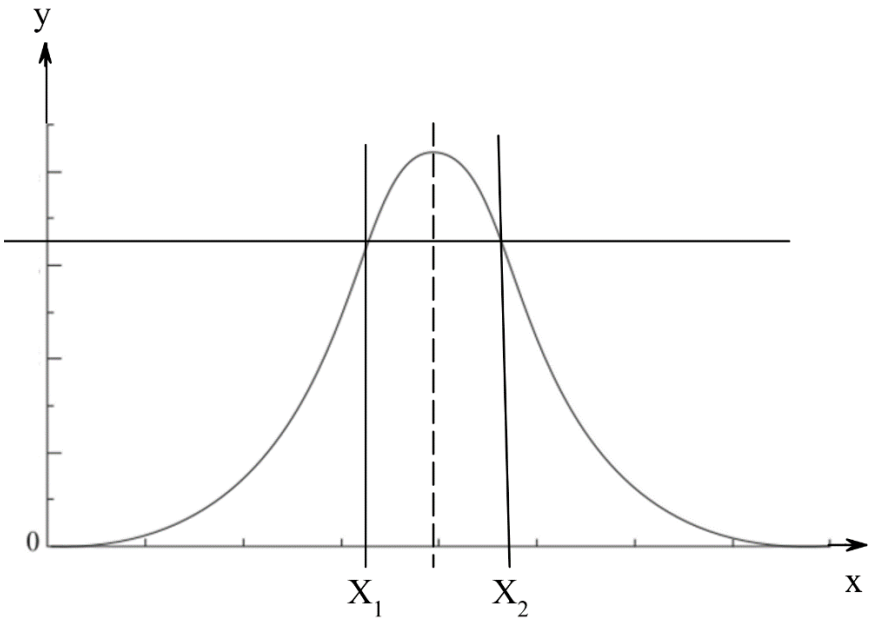

Рис. 8.1. Распределение Стьюдента.

Проведем горизонтальную линию, произвольно найдем две точки пересечения (рис. 8.1), тем самым находим точки X_1 и X_2 и, зная формулу для распределения Стьюдента, можем посчитать с какой вероятностью случайная величина попадает в этот интервал.

Таким образом, проводя множество горизонтальных линий (рис. 8.2), составим некоторую таблицу, которая связывает величину интервала с вероятностью попаданий в этот интервал.

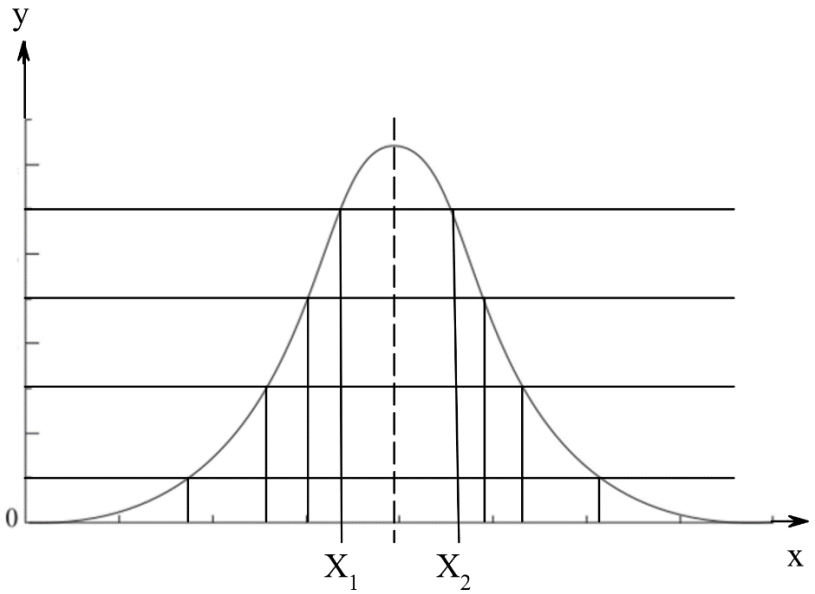

Рис. 8.2. Распределение Стьюдента с большим числом интервалов.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Все вероятности в распределении Стьюдента находятся по таблицам. Это приводит к такой записи, что появляется коэффициент $t_{\alpha,n-1}$:

$$X = \bar{X} \pm t_{\alpha,n-1}\, S_{\bar{X}} \tag{8.1}$$

Коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n-1}$ имеет два параметра: α и $n-1$.

$t_{\alpha,n-1}$ – это нормировочный множитель, который показывает, что если выбрали какую-то вероятность, с которой истинное значение попадает в интервал и знаем число измерений серии прямых измерений одной и той же величины, проведенных в одинаковых условиях, то запись (8.1) дополняется словами: с вероятностью α.

Рассмотрим таблицу:

$n-1$	$\alpha = 0{,}4$	…	$\alpha = 0{,}95$	$\alpha = 0{,}99$
1	0,33			
2				
3				
4			2,78	4,6

Вероятность выбираем исходя из «соображений здравого смысла».

Например, провели два измерения, $n-1=1$. По ним измерениям рассчитали среднее арифметическое и среднеквадратичную погрешность и говорим, что по двум измерениям коэффициент $t_{\alpha,n-1}$ нужно взять как можно меньше, чтобы было точнее. И подставлям 0,33 в формулу и записываем «красивый» результат, например:

$$234{,}38 \pm 0{,}05$$

Но результат получаем с вероятностью 40%. Тогда получается, что с вероятность 60% в интервал не попадет.

Выбор малой вероятности, который делают для того, чтобы уменьшить коэффициент и уменьшить коридор бессмыслен, потому что получится так, что примерно 50 % попадает в интервал, а еще 50% не попадает.

Поэтому нужно выбирать интервал либо 95%, либо 99%. Тогда уже будут большие коэффициенты 2,78 и 4,6 соответственно для проведенных пяти измерений (см. табл.). Тогда получим результат:

$$234 \pm 5$$

Коэффициенты Стьюдента находятся по таблицам.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Коэффициент Чебышёва

Распределения Стьюдента работает только для серии прямых измерений в одинаковых условиях и только для оценки случайной погрешности. Как только добавляется систематическая погрешность, мы переходим к суммарной погрешности (2.7):

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_{\bar{X}}^2 + \sigma_{\text{сумм,сист}}^2}$$

Ответ записываем уже с учетом суммарной погрешности:

$$X = \hat{X} \pm \gamma_\alpha \, \sigma_{\text{сумм}} \, , \tag{8.2}$$

где γ_α – коэффициент Чебышева:

$$\gamma_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \tag{8.3}$$

(т.е. неважно проводились ли серии прямых или косвенных измерений)

Сначала мы оцениваем суммарную погрешность и подставляем в (8.2), далее самостоятельно выбираем α и исходя из этого находим интервал.

Если возьмем $\alpha = 0$, тогда коэффициент $\gamma_\alpha = 1$ и тогда получим ответ в таком же виде, что получали ранее (8.2):

$$X = \hat{X} \pm \sigma_{\text{сумм}} \tag{8.4}$$

Что тогда делать? Нам неизвестно распределение случайной величины, Чебышев доказал, что для самого плохого распределения, которое может быть, получены эти выражения, но с оговоркой, что вероятность не равняется этой величине, а вероятность не меньше, чем эта величина. Т.е. ответ (8.4) справедлив с вероятностью не меньше нуля.

Нужно выбирать $\alpha = 0{,}90$ или $\alpha = 0{,}95$ и тогда с вероятностью не менее чем 90% величина попадает в этот интервал с учетом коэффициента γ_α.

Распределение хи-квадрат

Пусть есть какая-либо величина ξ, которая имеет нормальное распределение с нулевым средним и с единичной дисперсией:

$$\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Если возьмем величину ξ^2, то она будет иметь другое распределение. Возьмем несколько реализаций величины ξ и найдем такую величину:

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \tag{8.5}$$

Распределение такой суммы, при условии, что каждая из величин имеет нормальное распределение, называется распределением хи-квадрат с n степенями свободы. Мы уже говорили про хи-квадрат в случае, когда применяли МНК для проверки адекватности.

Нетрудно показать, что величина η имеет распределение хи-квадрат, у которого есть математическое ожидание и дисперсия:

$$E[\eta] = N - m\,, \tag{8.6}$$

где m – число параметров, которое находим.

Достаточно часто в измерениях есть следующая процедура: измерили одну и ту же величину разными способами и нужно их сравнить.

Пример. Случай 1. Есть шкала, получено первое значение с интервалом, и второе. Если есть пересечение интервалов, значит все нормально.

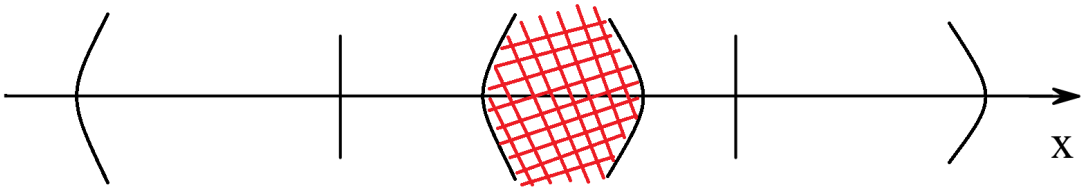

Рис. 8.3. Пересечение доверительных интервалов.

Случай 2. Достаточно часто бывают ситуации, когда интервалы не перекрываются:

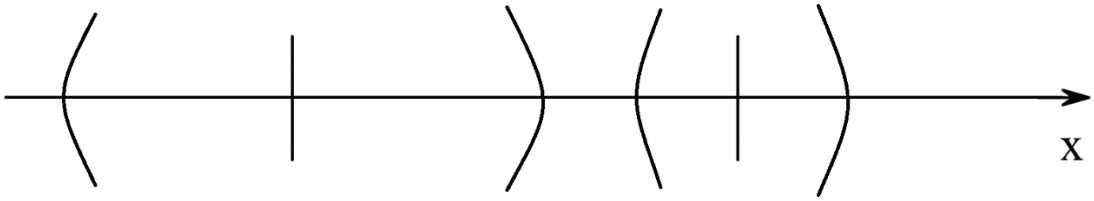

Рис. 8.4. Доверительные интервалы не пересекаются.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

На прошлых лекциях мы писали $\pm\sigma$, а теперь можем воспользоваться коэффициентами Стьюдента и Чебышева.

Есть способ проверить насколько теория соответствует эксперименту без использования доверительных интервалов. Нужно применить МНК с весами для модели $y = b$, и рассчитать коэффициент хи-квадрат для этих двух измерений.

Критерии наилучшей оценки и её нахождение

Пусть есть серия N измерений одной и той же величины, проведенных в разных условиях. Задача – найти наиболее точную оценку истинного значения $X_{\text{ист}}$ этой величины. Результат представим в виде:

$$X_i = X_{\text{ист}} + \nu_i \tag{8.7}$$

где ν_i – это погрешность i-го измерения. Видно, что $X_{\text{ист}}$ не меняется, а меняется погрешность в каждом измерении (вся случайность «сидит» в ν_i).

Для наилучшей оценки $\hat{X}$ существуют три критерия:

1. Несмещенность.

X_i является случайной величиной, значит и $\hat{X} = \hat{X}(X_1, X_2, \dots, X_N)$ – тоже случайная величина с некоторым математическим ожиданием и дисперсией.

Оценка называется несмещенной, если ее мат. ожидание в точности равно истинному значению:

$$E\left[\hat{X}\right] = X_{\text{ист}} \tag{8.8}$$

2. Состоятельность.

Оценка называется состоятельной, если ее дисперсия стремится к 0 при N, стремящемуся к бесконечности:

$$D\left[\hat{X}\right] \to 0 \quad \text{при } N \to \infty \tag{8.8}$$

3. Эффективность.

Дисперсия $\hat{X}$ при фиксированном N должна быть минимальной:

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$D\left[\hat{X}\right] \to \min \quad \text{при } N - \text{фиксир.} \tag{8.9}$$

Будем считать, что математическое ожидание всех погрешностей нулевое:

$$E[\nu_i] = 0$$

Дисперсия будет ненулевой:

$$D[\nu_i] = \sigma_i^2$$

Таким образом, для каждой случайной величины нам известны ее E и D.

Примеры.

1. Возьмем в качестве оценки результат первого измерения и проверим его на несмещенность, эффективность и состоятельность.

$$\hat{X} = X_1 = X_{\text{ист}} + \nu_1$$

Найдем математическое ожидание:

$$E\left[\hat{X}\right] = E[X_{\text{ист}} + \nu_1] = X_{\text{ист}} + E[\nu_1] = X_{\text{ист}}$$

Найдем дисперсию:

$$D\left[\hat{X}\right] = E\left[\left(\hat{X} - E\left[\hat{X}\right]\right)^2\right] = E[(X_{\text{ист}} + \nu_1 - X_{\text{ист}})^2] = E[\nu_1^2] = \sigma_1^2$$

При $N \to \infty$ дисперсия останется такой же, значит оценка несостоятельна. Данная оценка не будет и эффективной, так как мы не знаем остальные значения D.

2. Возьмем в качестве оценки среднее арифметическое первых двух измерений:

$$\hat{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$E\left[\hat{X}\right] = E\left[\frac{X_{\text{ист}} + \nu_1 + X_{\text{ист}} + \nu_2}{2}\right] = X_{\text{ист}} + E\left[\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right] = X_{\text{ист}}$$

Оценка несмещенная.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$D[\hat{X}] = E\left[\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E[\nu_1^2 + \nu_2^2 + 2\nu_1\nu_2] = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 0}{4}$$

Оценка несостоятельна, про эффективность мы ничего сказать не можем, как и в предыдущем случае.

Поиск наилучшей оценки в виде линейной комбинации

Будем искать наилучшую оценку, как линейную комбинацию результатов измерений:

$$\hat{X} = \hat{X}(X_1, X_2, \dots, X_N) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_N X_N \tag{8.10}$$

Необходимо найти весь набор коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, чтобы оценка была несмещенной, эффективной и состоятельной.

Перепишем (8.10) с учетом (8.7):

$$\hat{X} = \alpha_1(X_{\text{ист}} + \nu_1) + \alpha_2(X_{\text{ист}} + \nu_2) + \cdots + \alpha_N(X_{\text{ист}} + \nu_N) =$$

$$= X_{\text{ист}}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N) + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \cdots \tag{8.11}$$

Найдем математическое ожидание:

$$E[\hat{X}] = X_{\text{ист}} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i + 0 \tag{8.12}$$

Нам нужно, чтобы оценка была несмещенной, т. е. чтобы сумма коэффициентов в (8.12) была равна 1. Получим первое условие:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \tag{8.13}$$

Считая, что оно выполнено, перейдем к дисперсии:

$$D[\hat{X}] = E\left[\left(\hat{X} - E[\hat{X}]\right)^2\right] = E\left[\left(X_{\text{ист}} + \sum_{1}^{N} \alpha_i\, \nu_i - X_{\text{ист}}\right)^2\right] =$$

$$= E[\alpha_1^2\nu_1^2 + \alpha_2^2\nu_2^2 + \cdots + \alpha_1\nu_1\alpha_2\nu_2 + \cdots] =$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \, \sigma_i^2 \tag{8.14}$$

Найдем α, при которых оценка будет эффективной, т.е. будет минимум величины (8.14). Выразим для начала α_N из (8.13):

$$\alpha_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i$$

$$D\left[\hat{X}\right] = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i^2 \, \sigma_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i\right)^2 \sigma_N^2$$

Вычисляем производные для поиска min :

$$\frac{\partial D\left[\hat{X}\right]}{\partial \alpha_1} = 2\alpha_1 \sigma_1^2 + 2\left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i\right)(-1)\sigma_N^2 = 0$$

$$\frac{\partial D\left[\hat{X}\right]}{\partial \alpha_2} = 2\alpha_2 \sigma_2^2 + 2\left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i\right)(-1)\sigma_N^2 = 0$$

...

Получили $N-1$ уравнение с $N-1$ неизвестными. Перенесем второе слагаемое во всех уравнениях в правую часть:

$$\alpha_1 \sigma_1^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i\right)\sigma_N^2$$

$$\alpha_2 \sigma_2^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i\right)\sigma_N^2$$

...

Т. к. правые части уравнений равны, то равны и левые:

$$\alpha_i \sigma_i^2 = const$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\alpha_i = \frac{const}{\sigma_i^2}$$

Возьмем сумму и применим условие (8.13):

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = const\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_N^2}\right) = 1$$

$$const = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Осталось только выразить коэффициенты:

$$\alpha_j = \frac{\frac{1}{\sigma_j^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{8.15}$$

Проведем замену: $\frac{1}{\sigma_i^2} = w_i$, тогда (8.15) перепишем как:

$$\alpha_j = \frac{w_j}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

Оценку мы ищем в виде (8.10):

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = \frac{\sum w_j x_j}{\sum w_i} \tag{8.16}$$

Мы получили эффективную оценку. Этот результат аналогичен МНК с весами для модели $y = b$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

ЛЕКЦИЯ 9. Оценка дисперсии

Пусть имеется серия измерений $X_1, X_2, \dots, X_N$ случайной величины, у которой есть истинное значение $X_{\text{ист}}$. Результаты измерений отклоняются от величины $X_{\text{ист}}$. Представим результат измерения таким образом:

$$X_i = X_{\text{ист}} + \nu_i$$

Т.е. всю случайность, которая есть в X_i учитываем в ν_i (вся случайность «сидит» в ν_i). Поэтому будем говорить о распределении величины ν_i. Ее математическое ожидание будет:

$$E[\nu_i] = 0$$

Из этого следует, что речь идет о случайной погрешности. Дисперсия величины ν_i:

$$D[\nu_i] = \sigma_i^2$$

Задача заключается в том, чтобы найти оценку истинного значения как функцию от результатов измерений:

$$\hat{X}(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Оценка, как функция от случайной величины, тоже является случайной величиной. Мы хотим найти два первых момента этой величины. А именно, математическое ожидание $E[\hat{X}]$ и дисперсию $D[\hat{X}]$. Задача – найти наилучшую оценку истинного значения. Критерии наилучшей оценки:

1. Несмещенность (Оценка является несмещенной если ее математическое ожидание равно истинному значению):

$$E\left[\hat{X}\right] = X_{\text{ист}}$$

2. Состоятельность (Дисперсия оценки должна стремиться к 0 при $N \to \infty$):

$$D\left[\hat{X}\right] \to 0 \text{ при } N \to \infty):$$

3. Эффективность (Дисперсия оценки при фиксированном N минимальна):

$$D\left[\hat{X}\right] \to \min \quad \textit{при } N - \textit{фикс.}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поиск наилучшей оценки в виде линейной комбинации. Проверка состоятельности

Будем искать наилучшую оценку, как линейную комбинацию результатов измерений:

$$\hat{X} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_N X_N$$

На прошлой лекции мы получили эффективную оценку (8.16):

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{N} \frac{w_i x_i}{\sum w_i}$$

Проверим является ли она состоятельной, для этого найдем дисперсию:

$$\frac{1}{\sigma_i^2} = w_i$$

$$D[\hat{X}] = \sum \left(\frac{w_i}{\sum w_j}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum \frac{w_i^2}{\left(\sum w_j\right)^2} \frac{1}{w_i} = \frac{\sum w_i}{\left(\sum w_j\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{w_1 + w_2 + \cdots + w_N} \tag{9.1}$$

Теперь устремим число измерений к бесконечности, тогда:

$$D[\hat{X}] = \frac{1}{w_1 + w_2 + \cdots + w_N} \to 0 \text{ при } N \to \infty$$

Таким образом, получили оценку, которая является несмещенной, эффективной и состоятельной.

Рассмотрим случай, когда все измерения проведены в одинаковых условиях. Это значит, что все σ_i одинаковые:

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2$$

$$w_i = w_0 = \frac{1}{\sigma_0^2}$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Исходя из формулы (8.16), запишем наилучшую оценку (это есть среднее арифметическое):

$$\hat{X} = \sum \frac{w_0 X_i}{N w_0} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} \tag{9.2}$$

Таким образом, мы доказали, что наилучшей оценкой для серии измерений, проведенных в одинаковых условиях, является среднее арифметическое.

Найдем оценку дисперсии среднего арифметического из (9.2):

$$D\left[\hat{X}\right] = \frac{1}{N w_0} = \frac{\sigma_0^2}{N} \tag{9.3}$$

где σ_0^2 – дисперсия каждого отдельного измерения.

Отсюда видно, что погрешность среднего арифметического в $\sqrt{N}$ раз меньше, чем погрешность результата отдельного измерения.

Несмещенная оценка дисперсии

Предположим, мы провели эксперимент в одинаковых условиях, следовательно снова считаем, что $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$, но теперь эта величина нам неизвестна. Поэтому получим оценку $\hat{\sigma}_0^2$, как комбинацию результатов измерений:

$$\hat{\sigma}_0^2(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Найдем несмещенную оценку дисперсии. Рассмотрим комбинацию:

$$Z = \sum (X_i - \bar{X})^2 \tag{9.4}$$

Вспомним, что:

$$X_i = X_{\text{ист}} + \nu_i \tag{9.5}$$

$$\bar{X} = X_{\text{ист}} + \frac{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N}{N} \tag{9.6}$$

Подставим (9.5), (9.6) в (9.4), получим:

$$(X_i - \bar{X})^2 = \left(X_{\text{ист}} + \nu_1 - X_{\text{ист}} - \frac{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N}{N}\right)^2 =$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$= \left(\frac{(N-1)\nu_1 - \nu_2 - \ldots - \nu_N}{N} \right)^2$$

Получили случайную величину, найдем ее математическое ожидание:

$$E[(X_i - \bar{X})^2] = E\left[\frac{(N-1)^2\nu_1^2 + \nu_2^2 + \cdots + \nu_N^2 - 2(N-1)\nu_1\nu_2 + \cdots}{N^2} \right] =$$

$$E[\nu_1^2] = \sigma_i^2 = \sigma_0^2$$

$$E[\nu_2^2] = \sigma_i^2 = \sigma_0^2$$

$\nu_{1,}\nu_2$ – две независимые случайные величины. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий. Поэтому все перекрестные члены обнулятся: $E[\nu_1\nu_2] = 0$ и т. д.

$$= \frac{(N-1)^2\sigma_0^2 + (N-1)\sigma_0^2}{N^2} = \frac{(N-1)^2\sigma_0^2[N-1+1]}{N^2} = \frac{N-1}{N}\sigma_0^2 \qquad (9.7)$$

Таким образом, получили:

$$E[(X_i - \bar{X})^2] = \frac{N-1}{N}\sigma_0^2 \qquad (9.8)$$

Тогда посчитаем математическое ожидание для случайной величины Z:

$$E[Z] = \frac{N-1}{N}\sigma_0^2 \cdot N = (N-1)\sigma_0^2 \qquad (9.9)$$

Математическое ожидание величины $\frac{Z}{N-1}$:

$$E\left[\frac{Z}{N-1}\right] = \sigma_0^2 \qquad (9.10)$$

Вспомним формулу погрешности каждого отдельного измерения (1.5):

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{N-1}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Мы провели серию измерений в одинаковых условиях, это позволяет сказать, что дисперсия всех погрешностей абсолютно одинаковая. Т.е. мы доказали, что данная величина (1.5) является несмещенной оценкой дисперсии.

Наилучшая оценка и дисперсия косвенно измеряемой величины

$$U = f(X, Y, \dots, Z)$$

Пусть $X, Y, \dots, Z$ прямо измеренные величины в одинаковых условиях. По результатам прямых измерений нашли наилучшую оценку $\hat{X}$ и оценку погрешности σ_X^2. Найдем наилучшую оценку $\widehat{U}$. Предположим, что:

$$\widehat{U} = f(\hat{X}, \hat{Y}, \dots, \hat{Z})$$

Пусть будем утверждать, что оценки $\hat{X}, \hat{Y}, \dots, \hat{Z}$ близки к истинным значениям $X_{\text{ист}}, Y_{\text{ист}}, \dots, Z_{\text{ист}}$:

$$U_{\text{ист}} = f(X_{\text{ист}}, Y_{\text{ист}}, \dots, Z_{\text{ист}}) \approx f\left(\hat{X}, \hat{Y}, \dots, \hat{Z}\right) \tag{9.11}$$

и воспользуемся разложением функции в ряд:

$$\varphi(X) = \varphi(X_0) + \frac{d\varphi}{dX}(X - X_0) \tag{9.12}$$

$$U_{\text{ист}} = f(X_{\text{ист}}, Y_{\text{ист}}, \dots, Z_{\text{ист}}) = f\left(\hat{X}, \hat{Y}, \dots, \hat{Z}\right) + \frac{\partial f}{\partial X}\Big|_{\hat{X},\hat{Y},\dots,\hat{Z}} \left(X_{\text{ист}} - \hat{X}\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial Y}\Big|_{\hat{X},\hat{Y},\dots,\hat{Z}} \left(Y_{\text{ист}} - \hat{Y}\right) + \cdots$$

Найдем математическое ожидание для данного выражения, получим:

$$U_{\text{ист}} = E[f(X_{\text{ист}}, Y_{\text{ист}}, \dots, Z_{\text{ист}})]$$

$$E\left[\widehat{U}\right] = U_{\text{ист}} \tag{9.13}$$

Таким образом, получили несмещенную оценку. Найдем теперь дисперсию данной оценки:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$D\left[\widehat{U}\right] = E\left[\widehat{U} - E\left[\widehat{U}\right]\right]^2 = E\left[\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\hat{X}} (X_{\text{ист}} - \hat{X}) + \cdots\right]^2 =$$

$$= E\left[\left(\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\hat{X}}\right)^2 (X_{\text{ист}} - \hat{X})^2\right] + \cdots = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\hat{X},\hat{Y},\ldots,\hat{Z}}\right)^2 \sigma_X^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{\hat{X},\hat{Y},\ldots,\hat{Z}}\right)^2 \sigma_Y^2 + \cdots$$

Если разложение в ряд справедливо, то в погрешности косвенных измерений мы получаем выражение для дисперсии.

Измерение масс двух тел идеальными весами

Пусть мы провели некоторые измерения, например, мы взвесили два тела:

$$X = X_{\text{ист}} + \nu_1$$

$$y = y_{\text{ист}} + \nu_2$$

Для этих величин:

$$E[\nu_1] = E[\nu_2] = 0$$

$$D[\nu_1] = D[\nu_2] = \sigma_0^2$$

Найдем оценки:

$$\hat{X} = X, \qquad D\left[\hat{X}\right] = \sigma_0^2$$

Теперь взвесим два тела вместе:

$$Z_1 = X_{\text{ист}} + y_{\text{ист}} + \nu_3$$

Для ν_3 E и D будут такими же.

Четвертое измерение – мы положили два тела на разные чашки весов:

$$Z_2 = X_{\text{ист}} - y_{\text{ист}} + \nu_4$$

Запишем:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\frac{Z_1 + Z_2}{2} = X_{\text{ист}} + \frac{\nu_3 + \nu_4}{2}$$

Найдем дисперсию:

$$D\left[\frac{Z_1 + Z_2}{2}\right] = E\left[\left(X_{\text{ист}} + \frac{\nu_3 + \nu_4}{2} - X_{\text{ист}}\right)^2\right] = E\left[\frac{\nu_3^2 + \nu_4^2 + 2\nu_3\nu_4}{4}\right] = \frac{2\sigma_0^2}{4} =$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{2}. \qquad (9.14)$$

Расчёт погрешности ускорения шарика, скатывающегося по наклонной плоскости

Дана наклонная плоскость, по которой катится шарик, ставятся световые ворота для регистрации времени, и нужно найти ускорение тела при равноускоренном движении (рис. 9.1).

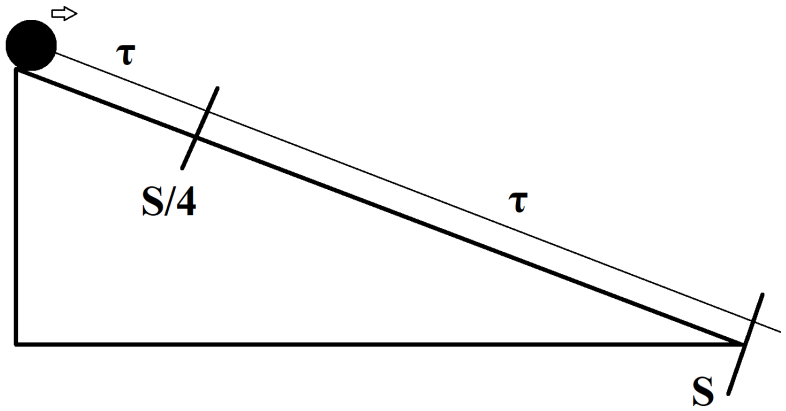

Рис. 9.1. Схема эксперимента по определению ускорения шарика.

Здесь τ – время движения между датчиками. Расположим первый датчик на расстоянии S, а второй на $\frac{S}{4}$.

Из формулы $S = \frac{at^2}{2}$ легко заметить, что до $\frac{S}{4}$ время уменьшится в 2 раза. Следовательно, общее время движения $t = 2\tau$. Тогда:

$$a = \frac{2S}{t^2} = \frac{S}{2\tau^2} \qquad (9.15)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

В этой формуле не учитывается $\frac{S}{4}$. Оценим погрешность ускорения. Обозначим $S_1 = \frac{S}{4}$.

$$S_1 = \frac{at_1^2}{2}; \quad S = \frac{at_2^2}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{a}}; \quad t_2 = \sqrt{\frac{2S}{a}}$$

$$\tau = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(\sqrt{S} - \sqrt{S_1}\right)$$

$$a = \frac{2\left(\sqrt{S} - \sqrt{S_1}\right)^2}{\tau^2}$$

Теперь если в полученную формулу для ускорения подставим $S_1 = \frac{S}{4}$, то получим:

$$a = \frac{2\left(\sqrt{S} - \sqrt{\frac{S}{4}}\right)^2}{\tau^2} = \frac{2\left(\sqrt{\frac{S}{2}}\right)^2}{\tau^2} = \frac{S}{2\tau^2} \qquad (9.16)$$

Видим, что полученное (9.16) совпало с (9.15).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ