ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ОПТИКА

РУСАКОВ
ВЯЧЕСЛАВ СЕРАФИМОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ЧЕРЕМНОВУ МАРИЮ АЛЕКСАНДРОВНУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Содержание

1 Лекция 1. Волновое уравнение. Плоские и сферические волны. 6
Введение. Предмет изучения и разделы оптики. 6
Глава 1. Электромагнитная теория света. 7
§1. Уравнения Максвелла и материальные уравнения 7
§2. Волновое уравнение, световое возмущение, принцип суперпозиции. 9
§3. Бегущие электромагнитные волны. Скорость света. Формула Максвелла. 11

2 Лекция 2. Модели реальных световых волн. Поляризация 14
§4. Световые пучки и импульсы. Модели реальных световых волн. 15
§5. Свойства плоских волн. 19
§6. Поток и плотность потока энергии электромагнитной волны. 21

3 Лекция 3. Перенос энергии световой волной. Спектральное описание волновых полей 24
§7. Давление и плотность импульса электромагнитной волны. Импульс фотона. 26
§8. Давление световой волны на поверхность тела. 28
Глава 2. Метод спектрального описания волновых полей. 29
§1. Суть и основы метода. 29
§2. Преобразования Фурье. 30

4 Лекция 4. Преобразование Фурье. Спектральная плотность излучения 33
§3. Свойства преобразований Фурье. 33
§4. Примеры преобразования Фурье. 38
§5. Спектральная плотность интенсивности. 41

5 Лекция 5. Интерференция света. Когерентность 45
Глава 3. Интерференция света. 45
§1. Интерференция и когерентность. 45
§2. Интерференция монохроматических волн. 47
§3. Интерференция квазимонохроматических волн. 50

6 Лекция 6. Функция временной корреляции. Пространственная когерентность 51
§4. Пространственная когерентность. 58

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

7 Лекция 7. Комплексные функции корреляции. Схемы двухволновой интерференции. 62
§5. Основные схемы двухволновой интерференции. 67

8 Лекция 8. Многоволновая интерференция 71
§6. Многоволновая интерференция. 73

9 Лекция 9. Дифракция света. Метод зон Френеля. Спираль Френеля 80
§1. Дифракционный интеграл Френеля. 80
§2. Метод зон Френеля. 83
§3. Метод векторных диаграмм. 87

10 Лекция 10. Простейшие дифракционные задачи. Ближняя и дальняя зоны дифракции 90
§4. Простейшие дифракционные задачи. 93
§5. Ближняя и дальняя зоны дифракции. 97

11 Лекция 11. Теория дифракции Кирхгофа. Приближения Френеля и Фраунгофера 101
§6. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. 101

12 Лекция 12. Дифракция Фраунгофера на пространственных структурах 112
§7. Дифракция Фраунгофера на пространственных структурах. 112

13 Лекция 13. Анализ, преобразование и синтез световых полей. 124
§8. Анализ, преобразование и синтез световых полей. 125

14 Лекция 14. Дифракционные приборы, голография. Распространение света в веществе. 137
Глава 5. Распространение света в веществе. 143
§1. Дисперсия и поглощение света. 143

15 Лекция 15. Дисперсия и поглощение света. 146

16 Лекция 16. Оптические явления на границе двух сред. Анизотропные среды. 156
§2. Оптические явления на границе раздела изотропных немагнитных диэлектриков. 156

§3. Распространение света в анизотропных средах. 161

17 Лекция 17. Распространение света в анизотропных средах. Поляризационные приборы. 170

18 Лекция 18. Рассеяние света. Закон Рэлея. 180

§4. Рассеяние света. 185

19 Лекция 19. Молекулярное рассеяние света. Излучение света. 191

Глава 6. Излучение света. 200

§1. Излучение атома. 201

20 Лекция 20. Ансамбль независимых осцилляторов. Квантовые свойства света. 203

§2. Излучение ансамбля статистически независимых осцилляторов. 203

§4. Основные представления о квантовой теории излучения света атомами и молекулами. 207

21 Лекция 21. Многоуровневые системы. Люминесценция и резонансное усиление света. 214

§5. Многоуровневые системы. 215

22 Лекция 22. Лазеры - принцип работы. Нелинейные оптические явления. 224

§6. Лазеры – устройство и принцип работы. 224

§7. Нелинейные оптические явления. 231

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 1. Волновое уравнение. Плоские и сферические волны.

Введение. Предмет изучения и разделы оптики.

Перед тем, как перейти к изложению материала, надо попытаться понять, что является предметом изучения курса.

Предметом изучения данного курса являются процессы излучения, распространения и взаимодействия света с веществом.

Вопрос: что такое свет?

Известно, что свет – электромагнитное колебание. Однако не всякое электромагнитное колебание является светом. Поэтому требуется уточнить, какой диапазон частот (длин волн) электромагнитных колебаний относится к свету.

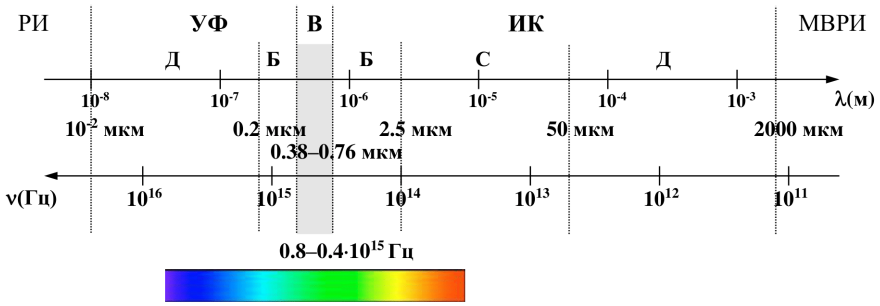


Рис. 1.1. Оптический диапазон волн и частот электромагнитных колебаний.

Уточним как показано на (Рис. 1.1). К свету относится диапазон частот, который имеет довольно условные границы: тот самый диапазон, в котором человечеству удалось формировать изображения, то есть создавать четко направленные пучки электромагнитных волн (примерно от 10^{-2} мкм до 2000 мкм). Вне этого диапазона – микроволновое радиоизлучение (при длинах волн, заметно больших, чем 2 мм) или мягкое рентгеновское излучение (с длинами волн, меньшими, чем 10^{-8} м).

Диапазон света можно разделить на несколько областей (Рис. 1.1), которые объединяются общностью технических средств и методов формирования изображения (понятно, что границы областей являются достаточно условными):

УФ ультрафиолетовая область

В видимая область

ИК инфракрасная область

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Ультрафиолетовая и инфракрасная области, в зависимости от расположения по отношению к видимой области, называются дальней, ближней или средней.

При сравнении каких-либо характеристик электромагнитных волн диапазона света мы будем ориентироваться на видимый диапазон (длина волны: $\lambda \sim 500-600$ нм, частота: $\nu \sim 0.5 \cdot 10^{15}$ Гц, период колебаний: $T \sim 2 \cdot 10^{-15}$ с).

Глава 1. Электромагнитная теория света.

§1. Уравнения Максвелла и материальные уравнения

Уравнения Максвелла – система основных уравнений классической электродинамики:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ &\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ &\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\vec{D}$ – электрическая индукция, ρ – объемная плотность свободных зарядов, $\vec{B}$ – магнитная индукция, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, $\vec{j}$ – плотность объемных токов проводимости.

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \tag{1.2}$$

где ε_0 – электрическая постоянная, $\vec{P}$ – вектор поляризации (поляризация – электрический дипольный момент единицы объема вещества).

Данное соотношение является определением, а не материальным уравнением, как его часто неправильно интерпретируют в учебниках.

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \tag{1.3}$$

где μ_0 – магнитная постоянная, $\vec{J}$ – намагниченность (магнитный дипольный момент единицы объема вещества) вещества.

Если воспользоваться уравнениями (1.1), (1.2) и (1.3), то при заданных токах и распределении заряда не получится найти все характеристики поля.

Характеристики поля можно разделить на три части:

1) Силовые характеристики поля: $\vec{E}$, $\vec{B}$ (они определяют силовое взаимодействие электрического и магнитного полей с веществом). Данные векторы называются *полевыми*.

2) $\vec{P}$, $\vec{J}$ – величины, которые определяют отклик вещества на воздействие электрическим и магнитным полем. Этот отклик зависит от характеристик вещества. Данные векторы называются *материальными*.

3) $\vec{D}$, $\vec{H}$ – *материально-полевые* (вспомогательные) векторы.

Условие использования уравнений Максвелла – неподвижность среды.

Необходима еще одна система материальных уравнений, связывающих между собой полевые и материальные векторы.

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{E}) &= \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \\ \vec{B}(\vec{H}) &= \mu\mu_0\vec{H}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где ε_0 – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость.

Данные соотношения возникают из рассмотрения механизмов взаимодействия электрического и магнитного полей со средой.

Требуется еще одно материальное уравнение, описывающее отклик среды на воздействие электрического поля с точки зрения направленного движения зарядов:

$$\vec{j}(\vec{E}) = \lambda\vec{E}, \tag{1.5}$$

где λ – удельная проводимость.

Для того, чтобы можно было воспользоваться материальными уравнениями (1.4), (1.5) среда должна быть:

1) Линейная, т.е. напряженность электрического поля достаточно слабая по сравнению с напряженностью электрического поля, в которой находятся электроны в атоме. То же и для магнитной индукции. (Сохраняется линейная зависимость $\vec{D}(\vec{E})$ и $\vec{B}(\vec{H})$.)

2) Изотропная, т.е. силовое воздействие со стороны электрического и магнитного полей не зависит от направления напряженности поля и магнитной индукции в пространстве по отношению к среде. (Магнитная и диэлектрическая проницаемости являются скалярными величинами.)

3) Безинерционная, т.е. в выражении $\vec{D}(t,\vec{r}) = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}(t,\vec{r})$ напряженность электрического поля в данный момент времени t определяет электрическую индукцию в тот же самый момент времени t. (Аналогично и в случае уравнения $\vec{B}(t,\vec{r}) = \mu\mu_0\vec{H}(t,\vec{r})$)

4) Локальная, т.е. в выражении $\vec{D}(t,\vec{r}) = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}(t,\vec{r})$ напряженность электрического поля в точке наблюдения $\vec{r}$ определяет электрическую индукцию в той же точке наблюдения $\vec{r}$, а не в некоторой ее окретности. (Аналогично и в случае уравнения $\vec{B}(t,\vec{r}) = \mu\mu_0\vec{H}(t,\vec{r})$)

5) Однородная, т.е. ε и μ как характеристики среды не зависят от радиус-вектора точки наблюдения $\vec{r}$.

6) Стационарная, т.е. ε и μ являются постоянными величинами по отношению к изменению времени t.

7) Безграничная, т.е. рассматриваем достаточно большую область пространства.

8) $\rho = 0$, т.е. нет объемной плотности свободных зарядов (важно, что при этом сами свободные заряды могут присутствовать).

9) $\vec{j} = 0$ (в общем случае данный пункт вообще не следует из предыдущего).

§2. Волновое уравнение, световое возмущение, принцип суперпозиции.

Воспользуемся требованиями к среде и запишем уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{D} = 0, \\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ &\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ &\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Воздействуем дифференциальным оператором rot на левую и правую части 3-го уравнения из (1.6):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) &= \left[\nabla\left[\nabla\vec{E}\right]\right] = \nabla\left(\nabla\vec{E}\right) - (\nabla\nabla)\vec{E} = \nabla\left(\nabla\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = \\ &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{E})\right) - \Delta\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{D}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{1.7}$$

Получаем волновое уравнение для напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E} \tag{1.8}$$

Вспомним материальное уравнение для электрической индукции. Если домножить правую и левую части уравнения (1.8) на $\varepsilon\varepsilon_0$, то получим аналогичное уравнение для $\vec{D}$.

Если воздействовать дифференциальным оператором rot на левую и правую части 4-го уравнения из (1.6), то, проделав аналогичные преобразования, можно получить уравнение (1.8) для $\vec{H}$. А воспользовавшись материальным уравнением, можно получить то же самое для $\vec{B}$.

Введем понятие *световое (электромагнитное) возмущение* $\vec{f}$. Под ним будем понимать любой из полевых или материально-полевых векторов: $\vec{f} \in \vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$.

Вспомним, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} &\cong 9\cdot 10^9 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2} \\ \frac{\mu_0}{4\pi} &= 10^{-17}\frac{\text{Н}}{\text{А}^2}\end{aligned} \tag{1.9}$$

Значит

$$\left[\frac{1}{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}\right] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \tag{1.10}$$

Тогда обозначим, без уточнения физического смысла величины v:

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0} \tag{1.11}$$

Тогда получим волновое уравнение для светового возмущения:

$$\frac{\partial^2\vec{f}(t,\vec{r})}{\partial t^2} = v^2\Delta\vec{f}(t,\vec{r}) \tag{1.12}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Уравнение (1.12) является линейным и однородным. Значит из векторного уравнения можно получить три скалярных уравнения:

$$\frac{\partial^2 f(t,\vec{r})}{\partial t^2} = v^2 \Delta f(t,\vec{r}), \tag{1.13}$$

где $f(t,\vec{r}) \in E_\alpha, D_\alpha, H_\alpha, B_\alpha$ – проекции на любую из осей декартовой системы координат $\alpha = x,y,z$.

§3. Бегущие электромагнитные волны. Скорость света. Формула Максвелла.

Предположим, что введенная выше величина v – скорость света в среде. Тогда показатель преломления:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{1.14}$$

Соотношение (1.14) между показателем преломления и электрической и магнитной проницаемости – *формула Максвелла.*

Опр. Фронт возмущений – поверхность, образованная точками в пространстве, в каждой из которых возмущение одинаково.

3.1. Плоские волны.

Будем считать, что световое возмущение зависит только от одной координаты z и не зависит от остальных, т.е. оно одинаково вдоль плоскости (x,y):

$$f(t,\vec{r}) = f(t,z) \tag{1.15}$$

В данном случае фронт возмущений – плоскость, перпендикулярная направлению оси z. Поэтому такие волны называются *плоскими.*

Тогда волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial z^2}, \tag{1.16}$$

Общее решение волнового уравнения (1.16) будет иметь вид:

$$f(t,z) = f(t \mp \frac{z}{v}), \tag{1.17}$$

где f – произвольная дважды дифференцируемая по своему аргументуфункция.

Уравнение (1.17) – *уравнение плоской волны.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Опр. Форма волны – зависимость светового возмущения от координаты в данный момент времени.

Вопрос: с какой скоростью нужно перемещаться рядом с фронтом возмущений, чтобы он покоился относительно наблюдателя? Возмущение одно и то же, если:

$$t \mp \frac{z}{v} = const \tag{1.18}$$

Возьмем производную по времени от этого выражения:

$$\mathrm{d}t \mp \frac{\mathrm{d}z}{v} = 0 \tag{1.19}$$

То есть

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \pm v \tag{1.20}$$

То есть v – скорость перемещения фронта возмущений. При этом он распространяется вдоль оси z или в противоположном направлении.

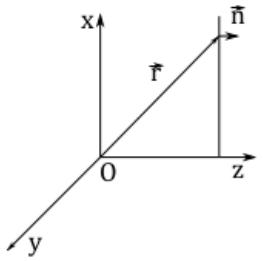


Рис. 1.2. Перемещение фронта возмущений.

Рассмотрим перемещение фронта возмущений вдоль оси Z (Рис. 1.2). Введем единичный вектор $\vec{n}$, задающий направление распространения волны. Тогда $z = \pm\vec{n}\cdot\vec{r}$. Получим:

$$f(t,\vec{r}) = f(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v}) \tag{1.21}$$

Мы получили решение волнового уравнения в виде плоских волн в общем виде.

Чтобы определить форму волны, нужно задать граничные условия.

$$f(t, z=0) = a\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{1.22}$$

где a – амплитуда, ω – циклическая частота, φ_0 – начальная фаза колебаний.

В этом случае

$$f(t,z) = a\cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi_0\right) = a\cos\left(\omega t - kz + \varphi_0\right), \tag{1.23}$$

где $k = \frac{\omega}{v}$ – волновое число.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Опр. $-kz$ *– набег фазы, то есть изменение фазы за счет перемещения вдоль направления распространения волны.*

Опр. $\varphi(z) \equiv -kz + \varphi_0$ *– начальная фаза в произвольной точке вдоль оси, задающей направление распространения волны.*

Уравнение плоской гармонической волны:

$$\boxed{f(t,\vec{r}) = a\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)} \tag{1.24}$$

где $\vec{k} = k\vec{n}$ – волновой вектор, $-\vec{k}\cdot\vec{r}$ – набег фазы, $\varphi(\vec{r}) = -\cdot\vec{r} + \varphi_0$ – начальная фаза.

Вспомним формулу Эйлера:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{1.25}$$

То есть

$$\cos\alpha = \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \tag{1.26}$$

Воспользуемся этим выражением:

$$f(t,\vec{r}) = a\,\mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)}\right) = \mathrm{Re}\left(ae^{i(-\vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)}e^{i\omega t}\right) \tag{1.27}$$

Получили комплексное представление уравнения плоской гармонической волны:

$$\hat{f}(t,\vec{r}) = ae^{i(-\vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)}e^{i\omega t} \tag{1.28}$$

$$\hat{f}(t,\vec{r}) = A(\vec{r})e^{i\omega t}, \tag{1.29}$$

где комплексная амплитуда:

$$A(\vec{r}) = ae^{i\varphi(\vec{r})} \tag{1.30}$$

3.2. Сферические волны.

Пусть теперь световое возмущение зависит от расстояния до фиксированной точки в пространстве:

$$f(t,\vec{r}) = f(t,r) \tag{1.31}$$

Тогда фронт возмущений – сфера, а такие волны – *сферические*. Волновое уравнение в данном случае:

$$\frac{\partial^2 f(t,r)}{\partial t^2} = v^2\Delta f(t,r) \tag{1.32}$$

Можно показать, что общее решение волнового уравнения в случае сферических волн имеет вид:

$$f(t,r) = \frac{f\left(t - r/v\right)}{r} \tag{1.33}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2. Модели реальных световых волн. Поляризация

На прошлой лекции мы получили волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(r,\vec{r})}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{f}(t,\vec{r}) \tag{2.1}$$

Оно является линейным и однородным, т.е. если $\vec{f}_i(t,\vec{r})$ являются решениями этого уравнения и описывают реальные световые волны, то любая линейная комбинация этих решений также является решением этого уравнения:

$$\vec{f}(t,\vec{r}) = \sum_i \vec{f}_i(t,\vec{r}) \tag{2.2}$$

Отсюда сразу следует *принцип суперпозиции световых возмущений*: световое возмущение совокупности световых волн равно сумме световых возмущений каждой из волн в отдельности.

На прошлой лекции было введено понятие фронта возмущения. Для гармонических волн можно ввести еще одно понятие. Вспомним, что аргумент гармонической функции для плоской волны: $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0 = \Phi(t,\vec{r})$.

Опр. Фазовый (волновой) фронт – поверхность одинаковой фазы.

§3. Бегущие электромагнитные волны. Продолжение

3.2. Сферические волны. Продолжение.

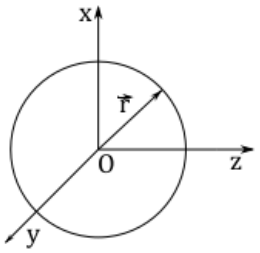


Рис. 2.1. Фронт возмущения сферической волны.

В данном случае волновое возмущение:

$$\vec{f}(t,\vec{r}) = \vec{f}(t,r), \tag{2.3}$$

где r – расстояние от некоторой точки наблюдения S до некоторой точки. Тогда фронт возмущения – сфера (Рис. 2.1).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Общее решение волнового уравнения в случае сферических волн имеет вид:

$$f(t,\vec{r}) = f(t,r) = \frac{f(t \mp r/v)}{r}, \tag{2.4}$$

где $f(t \mp r/v)$ – произволная достаточно число раз дифференцируемая скалярная функция (любая проекция любого полевого или материально-полевого вектора).

Данное утверждение (2.4) просто показать прямым дифференцированием.

Действительно,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{f(t \mp r/v)}{r}\right) = \frac{f''}{r} \tag{2.5}$$

В то же время, учитывая, что $\frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = \frac{x_\alpha}{r}$, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(t \mp r/v)}{r}\right) = \frac{f' \frac{\mp x}{vr} r - f\frac{x}{r}}{r^2} = \frac{\left(\mp \frac{1}{v} f' r - f\right) x}{r^3}, \\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{f(t \mp r/v)}{r}\right) = \frac{\frac{1}{v^2} f'' r^2 x^2 \mp \frac{1}{v} f' r^3 - f r^2 \pm \frac{1}{v} f' x^2 3r + 3 f x^2}{r^5}, \\
&\Delta f(t \mp r/v) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + [2] f y + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = \frac{\frac{1}{v^2} f'' r^4}{r^5} = \frac{1}{v^2}\frac{f''}{r} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{f(t \mp r/v)}{r}\right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Данное решение волнового уравнения (2.4) описывает две волны. Первую из них (со знаком "–"в аргументе функции) – расходящуюся от начала координат, а вторую (со знаком "+"в аргументе функции) – сходящуюся к началу координат сферические волны с модулем скорости волнового фронта v.

Запишем уравнение сферической гармонической волны. Для этого достаточно задать граничные условия. На расстоянии r_0 от начала координат задать закон светового возмущения:

$$f(t,r_0) = \frac{a}{r_0}\cos(\omega t - k r_0 + \varphi_0) \tag{2.7}$$

Тогда в соответствии с общим решением можно записать:

$$f(t,r) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - k r + \varphi_0) \tag{2.8}$$

Данное уравнение (2.8) сферической гармонической волны, распространяющейся от центра, можно записать в комплексной форме:

$$f(t,r) = \frac{a}{r}\mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t - kr + \varphi_0)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{a}{r}e^{i(-kr+\varphi_0)}e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(A(r)e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}(\hat{f}(t,r)), \tag{2.9}$$

где $A(r) = \frac{a}{r}e^{i(-kr+\varphi_0)}$ – комплексная амплитуда, а $\hat{f}(t,r) = A(r)e^{i\omega t}$ – комплексная форма представления сферической гармонической волны.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

§4. Световые пучки и импульсы. Модели реальных световых волн.

Реальные световые и электромагнитны волны по своей пространственно-временной структуре как правило достаточно далеки от эталонных (плоских, сферических, гармонических) волн. Существует целый набор моделей, с помощью которых можно с достаточно хорошим приближением описать реальные волны.

Реальные электромагнитные волны модулированы в пространстве и во времени, т.е. их характеристики меняются в пространстве и во времени.

Световой пучок – волна, пространственно модулированная с масштабом $d \gg \lambda$ много большим, чем характерная длина волны для этого пучка.

Световой импульс – волна, модулированная во времени с масштабом $\tau \gg T$, где T – характерный период колебаний. ($\lambda \sim 0.5 \cdot 10^{-6}$ м, $T \sim 2 \cdot 10^{-15}$ с)

4.1. Квазиплоская и квазисферическая гармонические волны.

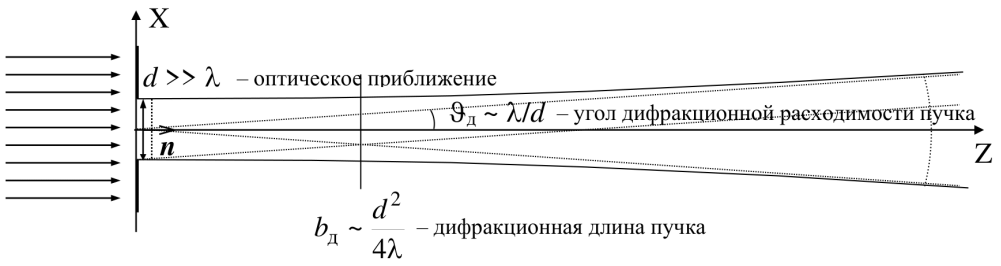


Рис. 2.2. Поведение светового пучка при падении на отверстие достаточно плоской гармонической волны.

Будем считать, что достаточно плоская гармоническая волна падает на отверстие с характерным размером d (Рис. 2.2).

Дифракционная длина пучка $b_{\text{Д}}$ – характерное расстояние от плоского сечения пучка до некоторой точки в пространстве вдоль направления распространения пучка.

В направлении распространения пучка при углах, больших чем *угол дифракционной расходимости пучка* $\theta_{\text{Д}}$, интенсивность можно считать равной 0.

В различных областях пучка его структуру можно описать с помощью различных гармонических волн.

Гармонические волны:

– **Квазиплоская:** $0 \leqslant z \ll b_{\text{Д}}$ (зона геометрической оптики)

$$f(t,x,y,z) = a(x,y)\cos(\omega t - kz + \varphi_0) \tag{2.10}$$

– **Плоская:** $0 \leqslant z \ll b_{\text{Д}}$, $R = \sqrt{x^2+y^2} \ll d$

$$f(t,z) = a\cos(\omega t - kz + \varphi_0) \tag{2.11}$$

– **Квазисферическая:** $z \gg b_{\text{Д}}$ (дальняя зона дифракции)

$$f(t,k_x,k_y,r) = \frac{a(k_x,k_y)}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0) \tag{2.12}$$

– **Сферическая:** $z \gg b_{\text{Д}}$, $R \ll \theta_{\text{Д}} r \sim \frac{\lambda r}{d}$

$$f(t,r) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0) \tag{2.13}$$

– **Плоская с убывающей амплитудой:** $z \gg b_{\text{Д}}$

При этом разность хода должна быть $\sqrt{r^2+R^2} - r \ll \frac{\lambda}{2}$ или

$$r\sqrt{1+\frac{R^2}{r^2}} - r \cong r\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\frac{1}{2}\right) - r = \frac{R^2}{2r} \ll \frac{\lambda}{2} \tag{2.14}$$

Получаем еще одно условие на облать пучка: $R \ll \sqrt{r\lambda}$

$$f(t,z) = \frac{a}{z}\cos(\omega t - kz + \varphi_0) \tag{2.15}$$

– **Плоская:** $z \gg b_{\text{Д}}$, $R \ll \sqrt{r\lambda}$, $\Delta z \ll z$

$$f(t,z) = a\cos(\omega t - kz + \varphi_0) \tag{2.16}$$

Оценки для лазера с $\lambda \sim 0.5$ мкм и диаметром пучка $d = 5$ мм при $r = 200$ м: $b_{\text{Д}} \cong 12.5$ м, $\lambda r/d \cong 2$ см, $\sqrt{r\lambda} \cong 1$ см.

4.2. Квазигармонические волны (импульсы).

Будем считать, что достаточно плоская квазигармоническая волна падает на отверстие с характерным размером d при граничных условиях на (Рис. 2.3).

В различных областях пучка его структуру можно описать с помощью различных волн. Отличие от случая гармонических волн: в амплитуде a и начальной фазе φ_0 добавить зависимости от $t - z/v$ или $t - r/v$.

– **Квазиплоская:** $0 \leqslant z \ll b_{\text{Д}}$

$$f(t,x,y,z) = a(t - z/v, x, y)\cos(\omega t - kz + \varphi_0(t - z/v)) \tag{2.17}$$

Граничное условие: $f(t,x,y,0) = a(t,x,y)\cdot\cos\left(\omega t + \varphi_0(t)\right)$, **время модуляции** $\tau >> T \sim 2\cdot10^{-15}$ с.

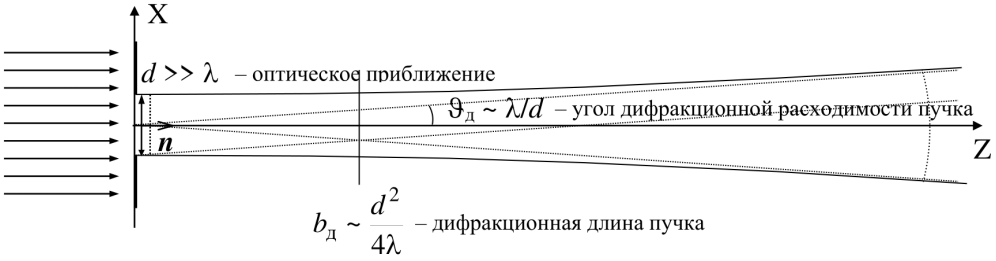


Рис. 2.3. Поведение светового пучка при падении на отверстие достаточно плоской гармонической волны.

– **Плоская:** $0 \leqslant z \ll b_Д$, $R = \sqrt{x^2+y^2} \ll d$

$$f(t,z) = a(t-z/v)\cos(\omega t - kz + \varphi_0(t-z/v)) \tag{2.18}$$

– **Квазисферическая:** $z \gg b_Д$

$$f(t,k_x,k_y,r) = \frac{a(t-r/v,k_x,k_y)}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0(t-r/v)) \tag{2.19}$$

– **Сферическая:** $z \gg b_Д$, $R \ll \theta_Д r \sim \frac{\lambda r}{d}$

$$f(t,r) = \frac{a(t-r/v)}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0(t-r/v)) \tag{2.20}$$

– **Плоская с убывающей амплитудой:** $z \gg b_Д$, $R \ll \sqrt{r\lambda}$

$$f(t,z) = \frac{a(t-z/v)}{z}\cos(\omega t - kz + \varphi_0(t-z/v)) \tag{2.21}$$

– **Плоская:** $z \gg b_Д$, $R \ll \sqrt{r\lambda}$, $\Delta z \ll z$

$$f(t,z) = a(t-z/v)\cos(\omega t - kz + \varphi_0(t-z/v)) \tag{2.22}$$

4.3. Случайно модулированные волны.

Источник (с линейными размерами $D \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ м) – совокупность большого числа ($10^{19} - 10^{22}$ см$^{-3}$) одинаковых независимых элементарных (с размерами $d \sim 10^{-10}$ м) квазигармонических ($\tau \sim 10^{-11} - 10^{-8}$ с $\gg T \sim 2\cdot10^{-15}$ с) излучателей (Рис. 2.4). Будем пренебрегать взаимным влиянием излучения одного источника на другой.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

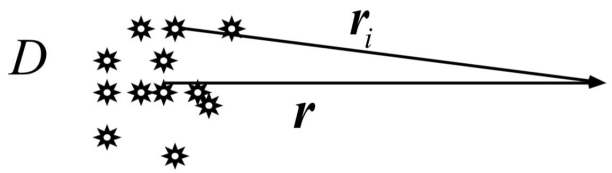


Рис. 2.4. Макроскопический источник волн.

– **Совокупность квазигармонических сферических** волн на расстояниях $r_i \gg d$

Из принципа суперпозиции:

$$f(t,r) = \sum_i \frac{a_i(t - r_i/v)}{r_i} \cos(\omega t - k r_i + \varphi_{0i}(t - r_i/v)) \tag{2.23}$$

– **Сферическая:** $r_i \gg D \gg d$.

Если ввести среднее значение $r = \langle r_i \rangle$, статистическое поведение $\{a_i\}$ и $\{\varphi_{0i}\}$ волн излучателей:

$$f(t,r) \cong \frac{1}{r} \sum_i a_i(t - r_i/v) \cos\left(\omega t - kr + \varphi_0^i(t - r_i/v)\right) \cong \frac{\tilde{a}}{r} \cos(\omega t - kr + \tilde{\varphi}_0) \tag{2.24}$$

– **Плоская с убывающей амплитудой:** $r_i \gg D \gg d$, $R \ll \sqrt{r\lambda}$

$$f(t,r) \cong \frac{\tilde{a}}{z} \cos(\omega t - kz + \tilde{\varphi}_0) \tag{2.25}$$

– **Плоская:** $r_i \gg D \gg d$, $R \ll \sqrt{r\lambda}$, $\Delta z \ll z$

$$f(t,r) \cong \tilde{a} \cos(\omega t - kz + \tilde{\varphi}_0) \tag{2.26}$$

Здесь $\tilde{a}$ и $\tilde{\varphi}_0$ – случайным образом меняющиеся амплитуда и фаза.

§5. Свойства плоских волн.

5.1. Ориентация и взаимосвязь полевых векторов.

При рассмотрении малой области пространства в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны, всегда можно с достаточной степенью точности считать эту волну плоской. Размеры этой области зависят от характеристик прибора.

Световое возмущение для плоской волны:

$$\vec{f}(r,\vec{r}) = \vec{f}\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v}\right) \tag{2.27}$$

Вспомним 3 и 4 уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\vec{B}t, \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{D}t \end{aligned} \tag{2.28}$$

В случае плоской волны из 3 уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{E}(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v}) = \left[\nabla\vec{E}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}\left[\vec{n}\vec{E}\right] = -\dot{\vec{B}} \tag{2.29}$$

Интегрируя левую и правую части, получаем:

$$\boxed{\left[\vec{n}\vec{E}\right] = v\vec{B}} \tag{2.30}$$

Аналогично из 4 уравнения Максвелла:

$$\boxed{\left[\vec{n}\vec{H}\right] = -v\vec{D}} \tag{2.31}$$

Умножим скалярно на $\vec{n}$ левые и правые части соотношений (2.30) и (2.31):

$$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{B} = 0} \tag{2.32}$$

$$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{D} = 0} \tag{2.33}$$

Из уравнений (2.30), (2.31), (2.32) и (2.33) можем получить свойства плоских электромагнитных волн.

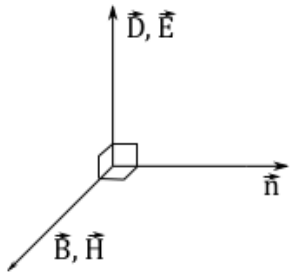


Рис. 2.5. Ориентация полевых векторов.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Электромагнитные волны поперечные, т.е. векторные характеристики волны всегда направлены перпендикулярно направлению распространения волны (Рис. 2.5). Векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{n}$ образуют правую тройку векторов.

Возьмем модуль левой и правой частей уравнения (2.30):

$$\boxed{E(t,\vec{r}) = vD(t,\vec{r})} \tag{2.34}$$

Это означает, что в данной точке пространства, если существует бегущая электромагнитная волна, то силовые характеристики электромагнитного поля меняются синхронно при любом законе изменения во времени и пространстве.

Из выражения для скорости и материального уравнения получаем:

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E(t,\vec{r}) = \sqrt{\mu_0\mu}H(t,\vec{r})} \tag{2.35}$$

5.2. Поляризация. Классификация состояний поляризации.

Опр. Плоскость поляризации волны – плоскость, заданная двумя векторами: $\vec{E}$, $\vec{n}$.

Если в процессе распространения волна не меняет ориентацию плоскости поляризации в пространстве, то такая волна – *линейно поляризованная.*

В результате суперпозиции двух гармонических волн, которые поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, не имеют сдвига по фазе и имеют одинаковые амплитуды, получается также линейно поляризованная волна. Ее плоскость поляризации будет повернута на $\pi/4$.

Если же у таких волн появится разность фаз, то результатом суперпозиции будет волна, конец вектора напряженности которой будет описывать эллепс – эллиптически поляризованная волна.

Если смотреть с конца вектора распространения волны, то, при изменении положения напряженности по часовой стрелке, то волна – эллиптически поляризованная правая, против часовой стрелки – левая.

При разности фаз $\Delta\phi = \pi/2$ – круговая (циркулярно поляризованная) волна.

Если разность фаз равна 0, но волны имеют разные амплитуды, то в результате суперпозиции получим линейно поляризованную волну, плоскость полярицазии которой будет повернута.

В случае, если напряженность электрического поля волны случайным образом меняет свое направление в пространстве, будет наблюдаться естесственная поляризация.

§6. Поток и плотность потока энергии электромагнитной волны.

6.1. Вектор Умова-Пойнтинга. Интенсивность света.

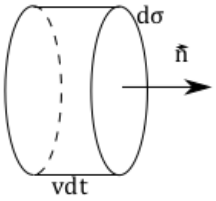


Рис. 2.6. Объем части пространства, в котором находится волна, проходящая через $\mathrm{d}\sigma$ за время $\mathrm{d}t$.

Зададим направление распространения волны с помощью единичного вектора $\vec{n}$ (Рис. 2.6). Рассмотрим энергию, которую переносит волна за интервал времени $\mathrm{d}t$ через элемент поверхности с площадью $\mathrm{d}\sigma$, ориентированный перпендикулярно $\vec{n}$:

$$\mathrm{d}W = wv\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma, \tag{2.36}$$

где w – объемная плотность энергии.

Опр. Плотность потока энергии S – энергия, переносимая через элемент поверхности единичной площади, ориентированных перпендикулярно направлению переноса энергии в волне, в единицу времени.

$$S = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma} = wv \tag{2.37}$$

Опр. Вектор умова $\vec{S}$ – вектор, модуль которого равен плотности потока энергии, а направление задается направлением переноса энергии.

$$\vec{S} = S\vec{n} = wv\vec{n} \tag{2.38}$$

Напомним,что объемная плотность энергии в электромагнитном поле:

$$w = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \varepsilon_0\varepsilon E^2 = \mu_0\mu H^2 = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E\sqrt{\mu_0\mu}H = \frac{1}{v}EH \tag{2.39}$$

Тогда *вектор Умова-Пойнтинга* – плотность потока энергии электромагнитной волны с указанием направления переноса этой энергии:

$$\boxed{\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]} \tag{2.40}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

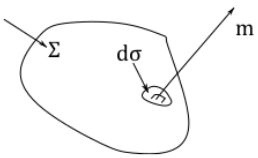


Рис. 2.7. К расчету потока энергии через поверхность Σ.

$$[S] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\text{с}} \tag{2.41}$$

Посчитаем поток энергии через двустороннюю поверхность Σ (Рис. 2.7).

Введем $\vec{\mathrm{d}\sigma} \equiv \mathrm{d}\sigma\vec{m}$, где $\vec{m}$ – единичный вектор, перпендикулярный поверхности в данной точке. Тогда поток энергии:

$$\mathrm{d}P = \vec{S} \cdot \vec{\mathrm{d}\sigma} \tag{2.42}$$

Поток энергии через всю поверхность:

$$P = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{\mathrm{d}\sigma} \tag{2.43}$$

Опр. Интенсивность света I – среднее значение плотности потока энергии за время разрешения прибора.

$$I \equiv \langle S \rangle_{\tau_p} \tag{2.44}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3. Перенос энергии световой волной. Спектральное описание волновых полей

На прошлой лекции была введена физическая величина – интенсивност света:

$$I = \langle S \rangle = \left\langle \varepsilon_0 \varepsilon v E^2 \right\rangle = \varepsilon_0 \varepsilon v \left\langle E^2 \right\rangle \sim \left\langle E^2 \right\rangle \tag{3.1}$$

С достаточной степенью точности в системе СИ в немагнитных и несегнетоэлектрических средах:

$$I \simeq \frac{1}{377} (\text{СИ}) \left\langle E^2 \right\rangle \tag{3.2}$$

§6. Поток и плотность потока энергии электромагнитной волны. Продолжение

6.2. Энергетика световых пучков и импульсов.

Опишем световой пучок с помощью квазиплоской волны.

$$E(t,x,y,z) = E_0(x,y)\cos(\omega t - kz + \varphi_0) \tag{3.3}$$

Тогда интенсивность пучка:

$$I(x,y) = \varepsilon_0 \varepsilon v \frac{E_0^2(x,y)}{2} \tag{3.4}$$

Физические величины, которыми характеризуется световой пучок: σ – площадь поперечного сечения пучка, P – мощность пучка.

$$P = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} I(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_{eff}\sigma \tag{3.5}$$

Значит эффективную интенсивность, если известна мощность как характеристика пучка, можно найти из:

$$\boxed{I_{eff} = \frac{P}{\sigma}} \tag{3.6}$$

Рассмотрим теперь световой импульс, т.е. световая волна модулирована не только в пространстве, но и во времени. Его можно описать с помощью квазиплоской квазигармонической волны.

$$E(t,x,y,z) = E_0(t - \frac{z}{v},x,y)\cos\left(\omega t - kz + \varphi_0\left(t - \frac{z}{vv}\right)\right) \tag{3.7}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Важно, что характерное время модуляции импульса: $\tau \gg T$, $T \ll \tau_p < \tau$, где T – период колебаний, τ_p – время разрешения прибора.

Тогда интенсивность светового импульса:

$$I\left(t-\frac{z}{v},x,y\right)=\varepsilon_0\varepsilon v\frac{E_0^2\left(t-\frac{z}{v},x,y\right)}{2} \tag{3.8}$$

Характеристики светового импульса: энергия светового импульса W – энергия световой волны, которую несет с собой световой импульс; площадь поперечного сечения импульса σ, длительность импульса τ.

$$W=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}I\left(t-\frac{z}{v},x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=\int\limits_{-\infty}^{\infty}P\left(t-\frac{z}{v}\right)\mathrm{d}t=I_{eff}\sigma\tau=P_{eff}\tau \tag{3.9}$$

Значит, зная характеристики светового импульса, можно найти его интенсивность и мощность:

$$\begin{aligned} I_{eff}&=\frac{W}{\sigma\tau}\\ P_{eff}&=\frac{W}{\tau}\end{aligned} \tag{3.10}$$

Тогда эффективное значение напряженности электрического поля:

$$E_{eff}=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0\varepsilon v}I_{eff}}\cong\sqrt{754I_{eff}} \tag{3.11}$$

6.3. Закон изменения энергии электромагнитного поля

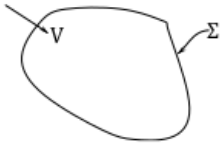


Рис. 3.1. Объем пространства V, который охватывается воерхностью Σ.

Рассмотрим некоторый объем V пространства, где существуют электромагнитные волны, который охватывается поверхностью Σ (Рис. 3.1).

Вспомним 3 и 4 уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{E}&=-\vec{B}t,\\ \mathrm{rot}\,\vec{H}&=\vec{j}+\vec{D}t\end{aligned} \tag{3.12}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Данные уравнения (3.12) "работают" , если среда, в которой существует электромагнитное поле, является неподвижной относительно наблюдателя.

Умножим скалярно слева 3 уравнение Максвелла (3.12) на напряженность магнитного поля, а 4 уравнение Максвелла (3.12) – на напряженность электрического поля, а затем вычтем одно из другого. Получим:

$$\vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}-\vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}=-\vec{j}\cdot\vec{E}-\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \tag{3.13}$$

Отсюда, используя закон Доуля-Ленца в дифференциальной форме, получаем:

$$\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]=-q-\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{3.14}$$

где q – количество теплоты, которая выделяется в единицу времени в единице объема. Докажем, что $\frac{\partial w}{\partial t}$ – скорость изменения объемной плотности энергии:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2}+\frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2}\right)=(\varepsilon_0\varepsilon)\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+(\mu_0\mu)\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{3.15}$$

При преобразованиях (3.15) мы воспользовались материальными уравнениями, условия применения которых: линейность, изотропность, стационарность среды.

Из (3.14), учитывая определение вектора Умова-Пойтинга, получаем:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{S}=-q\frac{\partial w}{\partial t}} \tag{3.16}$$

Мы получили закон изменения электромагнитной энергии в дифференциальной форме (3.16).

Проинтегрируем (3.16) по объему V:

$$\int_V\operatorname{div}\vec{S}\mathrm{d}V=-Q-\frac{\partial W}{\partial t}, \tag{3.17}$$

где Q – количество теплоты, которое выделяется внутри объема V, W – энергия электромагнитного поля внутри поверхности Σ. Воспользовавшись уравнением Остроградского-Гаусса, получим поток электромагнитной энергии через поверхность или поток вектора Умова-Пойтинга:

$$\int_V\operatorname{div}\vec{S}\mathrm{d}V=\oint_\Sigma\vec{S}\mathrm{d}\vec{\sigma}, \tag{3.18}$$

где $\mathrm{d}\vec{\sigma}\equiv\mathrm{d}\sigma\vec{m}$.

Тогда запишем закон сохранения электромагнитной энергии в интегральной форме.

$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t}=Q+\oint_\Sigma\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}} \tag{3.19}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

§7. Давление и плотность импульса электромагнитной волны. Импульс фотона.

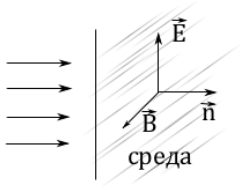


Рис. 3.2. Падение электромагнитной волны на поверхность тела.

Рассмотрим воздействие электромагнитной волны на поверхность тела, на которое падает эта волна. Пусть волна падает на тело нормально (Рис. 3.2). $\vec{n}$ – единичный вектор, указывающий направление распространения волны. Напряженность электрического поля $\vec{E}$ и магнитная индукция $\vec{B}$ направлены перпендикулярно $\vec{n}$.

Запишем силу, действующую на заряд q, находящийся внутри среды, из которой состоит тело. В общем случае заряд движется со скоростью $\vec{u}$, причем это движение хаотическое – тепловое и внутриатомное в замкнутой области пространства.

$$\begin{aligned}\vec{F}_q = \vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{u}\vec{B}] = q\vec{E} + q\left[\vec{u}[\vec{n}\vec{E}]\right]\frac{1}{v} = q\vec{E} + \frac{q}{v}\vec{n}\left(\vec{u}\cdot\vec{E}\right) - \frac{q}{v}\vec{E}\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right) = \\ = q\vec{E} + \frac{1}{v}\vec{n}P_q - \frac{q}{v}\vec{E}u_n\end{aligned} \tag{3.20}$$

При преобразованиях было использовано соотношение (2.30) и свойство двойного векторного произведения. P_q – работа, совершаемая электромагнитным полем по перемещению заряда q в единицу времени.

Усредним силу $\vec{F}_q$ по времени:

$$\left\langle \vec{F}_q \right\rangle = \underbrace{q\left\langle \vec{E} \right\rangle}_{=0} + \frac{1}{v}\left\langle P_q \right\rangle \vec{n} - \frac{q}{v}\underbrace{\left\langle \vec{E} \right\rangle}_{=0}\left\langle u_n \right\rangle \tag{3.21}$$

Отсюда получаем:

$$\left\langle \vec{F}_q \right\rangle = \frac{\left\langle P_q \right\rangle}{v}\vec{n} \tag{3.22}$$

Предположим, что вся электромагнитная волна, которая проходит через элемент поверхности $\mathrm{d}\sigma$, поглощается в среде в объеме $\mathrm{d}V$. Значит можно посчитать энергию, которая поглощается волной в единицу времени и которая проходит через $\mathrm{d}\sigma$:

$$I\mathrm{d}\sigma = \sum_{q(\mathrm{d}V)} \left\langle P_q \right\rangle \tag{3.23}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\sum_{q(\mathrm{d}V)} \left\langle \vec{F}_q \right\rangle = \frac{\vec{n}}{v} \sum_{q(\mathrm{d}V)} \langle P_q \rangle = \frac{I}{v}\vec{n}\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\vec{F} \tag{3.24}$$

Получили силу $\vec{F}$, действующую на объем $\mathrm{d}V$ за счет проникновения волны через элемент поверхности $\mathrm{d}\sigma$. Значит давление, то есть сила дейтсвующая на элемент поверхности единичной площади:

$$\vec{P} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{I}{v}\vec{n} = \frac{\langle w \rangle v}{v}\vec{n} = \langle w \rangle \vec{n} \tag{3.25}$$

$$\boxed{\vec{P} = \langle w \rangle \vec{n} = \frac{I}{v}\vec{n}} \tag{3.26}$$

Импульс силы:

$$\mathrm{d}\vec{F}\mathrm{d}t = \vec{g}v\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma, \tag{3.27}$$

где $\vec{g}$ – объемная плотность импульса, $v\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma$ – объем волны, которая проникла за время $\mathrm{d}t$ в тело через элемент поверхности $\mathrm{d}\sigma$. Тогда

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{v} = \frac{\langle w \rangle}{v}\vec{n} = \frac{I}{v^2}\vec{n} \tag{3.28}$$

Отсюда можно сделать вывод, что, действительно, волна переносит не только энергию, что описывается вектором Умова-Пойтинга, но и импульс, что описывается выражением (3.28).

Если рассматривать световой квант как волну, локализованную в пространстве и во времени, тогда импульс γ-кванта:

$$\vec{p}_\gamma = \vec{g}V = \frac{\langle w \rangle}{v}\vec{n}V = \frac{E_\gamma}{v}\vec{n} = \frac{\hbar\omega}{v}\vec{n} = \hbar k\vec{n} = \hbar\vec{k} \tag{3.29}$$

Здесь $\hbar \cong 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$,ω – частота колебания электромагнитного поля γ-кванта.

§8. Давление световой волны на поверхность тела.

Рассмотрим электромагнитную волну (свет), которая падает (incident wave) на поверхность тела под некоторым углом θ и частично от нее отражается (reflected wave) с коэффициентом отражения по интенсивности R .

В соответствии с законом сохранения импульса при поглощении или отражении света телом последнему сообщается некоторый импульс, равный разности импульсов пучка света до и после поглощения или отражения.

Импульс волны, "приносимый"на поверхность $\mathrm{d}\sigma$ за время $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\vec{G}_i = \vec{g}_i\mathrm{d}\sigma_i v\mathrm{d}t = \frac{\langle w_i \rangle}{v}\vec{n}_i\mathrm{d}\sigma_i v\mathrm{d}t = \langle w_i \rangle \vec{n}_i\mathrm{d}\sigma\cos\theta\mathrm{d}t \tag{3.30}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

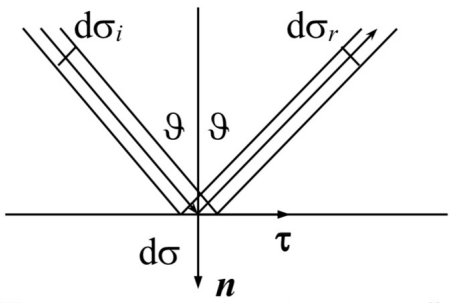


Рис. 3.3. Падение электромагнитной волна на поверхность тела под углом.

Импульс световой волны, "уносимый"с поверхности $\mathrm{d}\sigma$ за время $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\vec{G}_r = \vec{g}_r \mathrm{d}\sigma_r v \mathrm{d}t = \frac{\langle w_r \rangle}{v} \vec{n}_r \mathrm{d}\sigma_r v \mathrm{d}t = \langle w_r \rangle \vec{n}_r \mathrm{d}\sigma \cos\theta \mathrm{d}t \tag{3.31}$$

Давление световой волны на поверхность:

$$\vec{p} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{G}_i - \mathrm{d}\vec{G}_r}{\mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t} = \frac{\langle w_i \rangle \vec{n}_i \mathrm{d}\sigma \cos\theta \mathrm{d}t - \langle w_r \rangle \vec{n}_r \mathrm{d}\sigma \cos\theta \mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t} = (\langle w_i \rangle \vec{n}_i - \langle w_r \rangle \vec{n}_r) \cos\theta =$$
$$= \langle w_i \rangle (\vec{n}_i - R\vec{n}_r) \cos\theta = \frac{I}{v} (\vec{n}_i - R\vec{n}_r) \cos\theta \tag{3.32}$$

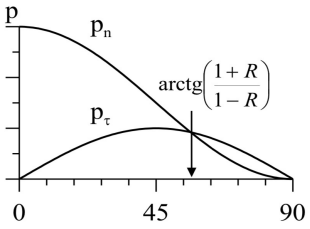


Рис. 3.4. Зависимости проекций давления световой волны на поверхность от угла падения.

В проекциях на оси, перпендикулярную n и параллельную τ плоскости падения:

$$\begin{aligned} p_n &= \langle w_i \rangle (1+R) \cos^2\theta = \frac{I}{v} (1+R) \cos^2\theta \\ p_\tau &= \langle w_i \rangle (1-R) \cos\theta \sin\theta = \frac{I}{v} (1-R) \cos\theta \sin\theta \end{aligned} \tag{3.33}$$

Глава 2. Метод спектрального описания волновых полей.

§1. Суть и основы метода.

Произвольное переменное во времени электромагнитное поле можно представить в виде суперпозиции некоторых эталонных плоских гармонических волн, которые

распространяются в разных направлениях с разными частотами.

То есть можно описать взаимодействие произвольной по пространственно-временной структуре волны с какой-то неоднородной средой с помощью данного метода. Исходную сложную волну представляют в виде совокупности плоских гармонических волн. Затем рассматривают взаимодействие уже плоской гармонической волны определенной частоты, распространяющейся в определенном направлении, с этой средой. Далее результаты такого взаимодействия складываются и получившееся возмущение – результат взаимодействия исходной волны со средой.

Важное требование к среде – она должна обладать линейным откликом на такое воздействие.

§2. Преобразования Фурье.

2.1. Интеграл и коэффициенты Фурье.

Если некоторая функция $f(t)$ абсолютно интегрируема в каждом конечном интервале времени и существует интеграл в бесконечных пределах $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$, то эта функция представима в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} (a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t))\,\mathrm{d}\omega, \tag{3.34}$$

где коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t, \\ b(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.35}$$

Коэффициенты Фурье обладают свойствами:

$$\begin{aligned} a(-\omega) &= a(\omega) \\ b(\omega) &= -b(\omega) \end{aligned} \tag{3.36}$$

2.2. Спектральные амплитуда, фаза и плотность, комплексная спектральная амплитуда и их свойства.

Введем *спектральную амплитуду*:

$$g(\omega) \equiv \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \tag{3.37}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При этом

$$g(-\omega) = g(\omega) > 0 \tag{3.38}$$

Тогда интегральное представление:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty g(\omega)\left(\frac{a(\omega)}{g(\omega)}\cos(\omega t) + \frac{b(\omega)}{g(\omega)}\sin(\omega t)\right)\mathrm{d}\omega \tag{3.39}$$

Тогда коэффициенты в выражении (3.39):

$$\begin{aligned}\cos(\varphi(\omega)) &\equiv \frac{a(\omega)}{g(\omega)},\\ \sin(\varphi(\omega)) &\equiv \frac{b(\omega)}{g(\omega)},\end{aligned} \tag{3.40}$$

где $\varphi(\omega)$ – *спектральная фаза*. Тогда:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty g(\omega)\cos\left(\omega t - \varphi(\omega)\right)\mathrm{d}\omega \tag{3.41}$$

Так как в (3.41) под интегралом стоит четная функция, то получаем:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty g(\omega)\cos\left(\omega t - \varphi(\omega)\right)\mathrm{d}\omega \tag{3.42}$$

Важно, что продление значений всех величин в (3.42) в отрицательную облать частон никакого физического смысла не имеет.

Ведем *комплексную спектральную амплитуду*:

$$f(i\omega) \equiv a(\omega) - ib(\omega) = g(\omega)\left(\cos\varphi(\omega) - i\sin\varphi(\omega)\right) \tag{3.43}$$

Воспользуемся формулой эйлера:

$$\boxed{f(i\omega) = g(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}} \tag{3.44}$$

Добавим к интегралу в (3.42) еще один равный нулю интеграл:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty g(\omega)e^{i\omega t - \varphi(\omega)}\mathrm{d}\omega \tag{3.45}$$

Получим *обратное преобразование Фурье* (представление в виде интеграла Фурье в комплексной форме):

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega} \tag{3.46}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда комплексная спектральная амплитуда (Фурье-образ):

$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t - i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \tag{3.47}$$

Получили *прямое преобразование Фурье*:

$$\boxed{f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t} \tag{3.48}$$

Легко понять, что

$$f^*(i\omega) = f(-i\omega) \tag{3.49}$$

Спектральная плотность:

$$|f(i\omega)|^2 = f^2(\omega) \tag{3.50}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4. Преобразование Фурье. Спектральная плотность излучения

На прошлой лекции были получены обратное и прямое преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega, \\ f(i\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.1}$$

Комплексная спектральная амплитуда:

$$f(i\omega) = a(\omega) - ib(\omega) = f(\omega)e^{-i\varphi(\omega)} \tag{4.2}$$

Спектральная амплитуда:

$$f(\omega) = |f(i\omega)| \tag{4.3}$$

Коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t, \\ b(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.4}$$

Спектральная фаза же введена с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} \cos\varphi(\omega) &= \frac{a(\omega)}{f(\omega)}, \\ \sin\varphi(\omega) &= \frac{b(\omega)}{f(\omega)} \end{aligned} \tag{4.5}$$

§3. Свойства преобразований Фурье.

1) $f^*(i\omega) = f(-i\omega)$

2) Пусть $f(t)$ – четная функция. Тогда $b(\omega) = 0$. Следовательно

$$f(i\omega) = a(\omega) \tag{4.6}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$f(\omega) = |f(i\omega)| = |a(\omega)| \tag{4.7}$$

$$|f(i\omega)|^2 = a^2(\omega) \tag{4.8}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & a(\omega) > 0 \\ \pi, & a(\omega) < 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

3) Пусть $f(t)$ – нечетная функция. Тогда $b(\omega) = 0$. Следовательно

$$\begin{aligned} &f(i\omega) = -ib(\omega) \\ &f(\omega) = |b(\omega)| \\ &|f(i\omega)|^2 = b^2(\omega) \\ &\varphi(\omega) = \begin{cases} +\pi/2, & b(\omega) > 0 \\ -\pi/2, & b(\omega) < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.10}$$

3.1. Суперпозиция импульсов.

Рассмотрим любую линейную комбинацию функций $\{f_j(t)\}$:

$$F(t) = \sum_j \alpha_j f_j(t), \tag{4.11}$$

где α_i – постоянные во времени величины.

В силу линейности преобразования Фурье получим:

$$F(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_j \alpha_j f_j(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \sum_j \alpha_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_j(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \sum_j \alpha_j f_j(i\omega) \tag{4.12}$$

Фурье-образ $F(i\omega)$ линейной комбинации $F(t)$ функций $\{f_j(t)\}$ равен той же линейной комбинации Фурье-образов этих функций.

3.2. Смещение импульса во времени.

Рассмотрим функцию $f(t)$, смещенную назад или вперед во времени на t_0: $F(t) = f(t \pm t_0)$

Воспользовавшись заменой переменных $\tau = t \pm t_0$ ($\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$), получим:

$$F(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t \pm t_0) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{\pm i\omega t_0} \mathrm{d}\tau = e^{\pm i\omega t_0} f(i\omega) = F(\omega) e^{-i(\varphi(\omega) \mp \omega t_0)} \tag{4.13}$$

Изменяется спектральная фаза $\Phi(\omega)$ на $\mp\omega t_0$, а спектральная амплитуда (амплитудный спектр) $F(\omega)$ и спектральная плотность (частотный спектр) $|F(i\omega)|^2$ остаются неизменными:

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega) \mp \omega t_0, \quad F(\omega) = |F(i\omega)| = |f(i\omega)| = f(\omega), \quad |F(i\omega)|^2 = |f(i\omega)|^2 \tag{4.14}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3.3. Изменение масштаба времени.

Рассмотрим функцию $f(t)$ с измененным масштабом времени, сжатую в $\alpha \geqslant 0$ или растянутую в $1/\alpha$ раз с возможной инверсией времени:

$$F(t) = f(\pm\alpha t) \tag{4.15}$$

Воспользовавшись заменой переменных $\tau = \pm\alpha t$ ($\mathrm{d}\tau = \pm\alpha \mathrm{d}t$), получим:

$$\begin{aligned} F(i\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\pm\alpha t) e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \pm\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\mp\infty}^{\pm\infty} f(\tau) e^{-i\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right)\tau}\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right)\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\alpha} f\left(\pm i\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right) e^{-i\varphi\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right)} \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} &F(\omega) = |F(i\omega)| = \frac{1}{\alpha} f\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \\ &|F(i\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2} f^2\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \\ &\Phi(\omega) = \varphi\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right) = \pm\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

Как видно, масштаб частот амплитудного спектра $F(\omega)$, спектр фаз $\Phi(\omega)$ и частотного спектра $|F(i\omega)|^2$ изменяется обратно пропорционально изменению временного масштаба. Характерная ширина спектров меняется обратно пропорционально изменению длительности импульса. При этом не меняется форма спектров. В частности, уменьшение (увеличение) длительности импульса в α раз приводит к увеличению (уменьшению) ширины спектров амплитуды, фазы и спектральной плотности (частотного спектра) также в α раз. В случае инверсии времени инвертируется (или, что то же самое, меняет знак) спектр фаз.

3.4. Соотношение между длительностью импульса и шириной спектра.

Длительность импульса Δt – интервал времени, в течение которого импульс (функция $f(t)$) существенно отличается от нуля.

Ширина спектра $\Delta\omega$ – интервал частот, на котором спектральная амплитуда $f(\omega)$ или спектральная плотность $|f(i\omega)|^2$ (амплитудный $f(\omega)$ или частотный $|f(i\omega)|^2$ спектр) существенно отличается от нуля.

В этих определениях имеется неопределенность. В зависимости от точного определения этих понятий соотношение между Δt и $\Delta\omega$ меняется, и универсального соотношения не существует. Однако, существует универсальная закономерность – *ширина*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

спектра $\Delta\omega$ *обратно пропорциональна длительности импульса* Δt:

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t} \tag{4.18}$$

Эта закономерность имеет общий характер и выражает одно из основных свойств преобразования Фурье. В частном случае неизменности формы импульса или формы его частотного спектра – свойство 3. Изменение масштаба времени, по существу, является доказательством данного свойства.

В общем случае, когда меняется форма импульса и частотного спектра, можно воспользовательсяся интегральными определениями длительности импульса Δt и ширины спектра$\Delta\omega$:

$$\begin{aligned} \Delta t &\equiv \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t}{f(t=0)}, \\ \Delta\omega &\equiv \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\mathrm{d}\omega}{f(i\omega)=0} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\omega)\mathrm{d}\omega}{a(0)} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Здесь учтено, что мнимая часто $b(\omega)$ комплексной спектральной амплитуды $f(i\omega)$ является нечетной функцией. Найдем произведение длительности импульса на ширину спектра, воспользовавшись преобразованиями Фурье:

$$\Delta t\Delta\omega = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t}{f(t=0)} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\mathrm{d}\omega}{f(i\omega)=0} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\mathrm{d}\omega}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t} = 2\pi \tag{4.20}$$

В результате использования интегральных определений получим точное соотношение:

$$\Delta t\Delta\omega = 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \tag{4.21}$$

3.5. Смещение спектра по частоте.

Рассмотрим импульс длительностью $\Delta t \gg T_0$ в виде квазигармонической (модулированной во времени) функции с несущей частотой ω_0 (периодом T_0):

$$F(t) = f(t)\cos(\omega_0 t) \tag{4.22}$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, получим:

$$F(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega_0 t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}\right)e^{-\omega t}\mathrm{d}t = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(e^{-i(\omega-\omega_0)t}+e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[f\left(i(\omega-\omega_0)\right)+f\left(i(\omega+\omega_0)\right)\right] \tag{4.23}$$

Поскольку длительность импульса $\Delta t \gg T_0$, то $\Delta\omega \sim 2\pi/\Delta t \ll 2\pi/T_0 = \omega_0$.

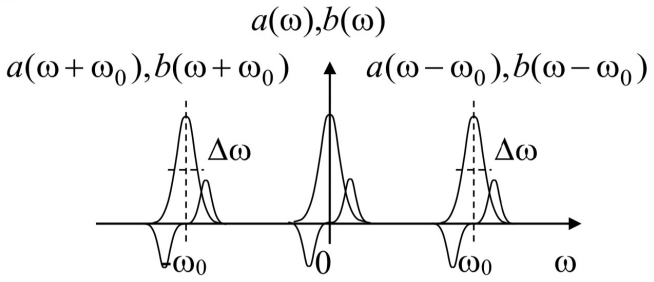


Рис. 4.1. Коэффициенты Фурье для функции $f(t)$: $a(\omega)$ и $b(\omega)$.

Для физически осмысленного интервала частот $\omega \geqslant 0$:

$$A(\omega) = \frac{1}{2}\left[a(\omega-\omega_0)+a(\omega+\omega_0)\right] \cong \frac{1}{2}a(\omega-\omega_0), \\ B(\omega) = \frac{1}{2}\left[b(\omega-\omega_0)+b(\omega+\omega_0)\right] \cong \frac{1}{2}a(\omega-\omega_0), \\ F(i\omega) = A(\omega) - iB(\omega) \cong \left[a(\omega-\omega_0)-ib(\omega-\omega_0)\right] = \frac{1}{2}f\left(i(\omega-\omega_0)\right) \tag{4.24}$$

Следовательно, при $\omega \geqslant 0$ комплексная спектральная амплитуда $F(i\omega)$, спектральные амплитуда $F(\omega)$, плотность $|F(i\omega)|^2$ и фаза $\Phi(\omega)$ квазигармонической волны по форме такие же, как у меняющейся со временем амплитуды $f(t)$, только смещены они на несущую частоту ω_0:

$$F(i\omega) \cong \frac{1}{2}f\left(i(\omega-\omega_0)\right), \tag{4.25}$$

$$F(\omega) \cong \frac{1}{2}f(\omega-\omega_0), \tag{4.26}$$

$$|F(i\omega)|^2 \cong \frac{1}{4}|f\left(i(\omega-\omega_0)\right)|^2, \tag{4.27}$$

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega-\omega_0) \tag{4.28}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3.6. Теорема Планшереля.

Интегральная теорема, связывающая квадрат модуля произвольной функции с ее спектральной плотностью:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega} \tag{4.29}$$

Для доказательства теоремы воспользуемся преобразованиями Фурье:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \right)^* \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(i\omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega) f^*(i\omega) \mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} |f(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} |f(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{4.30}$$

§4. Примеры преобразования Фурье.

4.1. Гармоническое колебание.

Рассмотрим гармоническую функцию $f(t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$, тогда:

$$\begin{aligned} f(i\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0 \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = f_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \\ &= \pi f_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}}{2\pi} \right) \mathrm{d}t = \pi f_0 \left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right) \end{aligned} \tag{4.31}$$

При $\omega \geqslant 0$ $f(i\omega) = \pi f_0 \delta(\omega - \omega_0)$, где $\delta(\omega)$ – *дельта-функция*:

$$\delta(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \cos(\omega t) \mathrm{d}t \tag{4.32}$$

Так как $f(t)$ – четная функция, то функция $f(i\omega)$ – вещественная.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойства дельта-функции:

$$\begin{aligned}
&\delta(\omega \to 0) \to \infty,\\
&\delta(\omega \neq 0) = 0,\\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\mathrm{d}\omega = 1,\\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\delta(\omega-\Omega)\mathrm{d}\omega = f(\Omega)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Заметим, что дельта-функция *размерная*: $[\delta(\omega)] = [1/\omega]$!

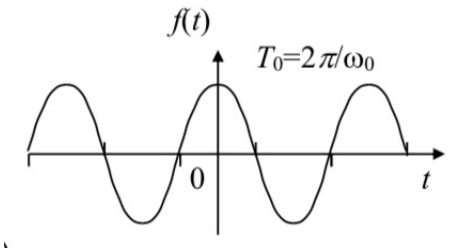


Рис. 4.2. График гармонической функции $f(t)$

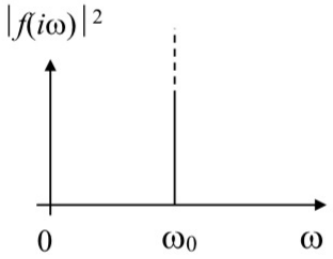


Рис. 4.3. График спектральной плотности гармонической функции $f(t)$

4.2. Прямоугольный импульс и цуг волн.

Рассмотрим функцию (прямоугольный импульс):

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{при } t \in [-\tau/2, \tau/2],\\ 0 & \text{при } t \notin [-\tau/2, \tau/2] \end{cases} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
f(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = f_0 \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = f_0\frac{e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}}{-i\omega} =\\
= f_0\tau\frac{-2i\sin(\omega\tau/2)}{-i\omega\tau} = f_0\tau sinc\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$|f(i\omega)|^2 = (f_0\tau)^2 sinc^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{4.36}$$

Свойства функции $sinc(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
&sinc(\alpha) \equiv \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}, \quad sinc(\alpha) = 0 \text{ при } \alpha = k\pi, k = 1,2,3,\ldots\\
&sinc(\alpha) \to 1 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0,\\
&sinc(\alpha) \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty
\end{aligned} \tag{4.37}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

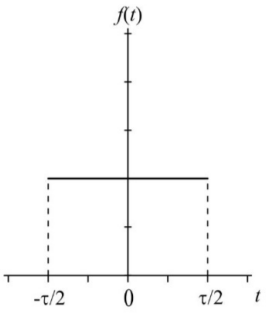


Рис. 4.4. График функции прямоугольного импульса $f(t)$

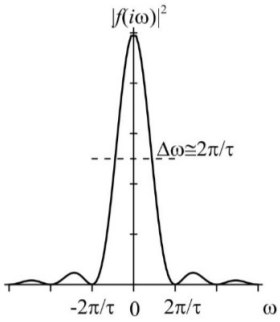


Рис. 4.5. График спектральной плотности прямоугольного импульса

Рассмотрим функцию (цуг волн):

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \cos(\omega_0 t) & \text{при } t \in [-\tau/2, \tau/2], \\ 0 & \text{при } t \notin [-\tau/2, \tau/2] \end{cases} \tag{4.38}$$

При $\tau \gg T_0$:

$$|f(i\omega)|^2 = \frac{(f_0\tau)^2}{4} sinc^2\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right) \tag{4.39}$$

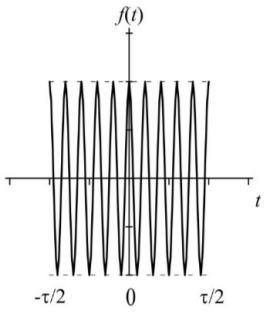


Рис. 4.6. График функции цуга волн $f(t)$

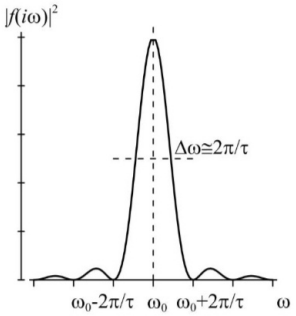


Рис. 4.7. График спектральной плотности цуга волн

4.3. Экспоненциальный импульс и слабозатухающая волна.

Рассмотрим экспоненциальный импульс:

$$f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = f_0 e^{-\delta t} \text{ при } t \geqslant 0 \tag{4.40}$$

В этом случае:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$f(i\omega) = \int_0^\infty f_0 e^{-\delta t} e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = f_0 \left. \frac{e^{-(\delta+i\omega)t}}{-(\delta+i\omega)} \right|_0^\infty = \\ = f_0 \frac{1}{\delta+i\omega} = f_0 \frac{\delta - i\omega}{\delta^2+\omega^2} \tag{4.41}$$

$$|f(i\omega)|^2 = \frac{f_0^2}{\delta^2} \frac{\delta^2}{\delta^2+\omega^2} = (f_0\tau)^2 L\left(\frac{\omega}{\delta}\right), \tag{4.42}$$

где $L(\omega) \equiv \frac{1}{1+x^2}$ – функция Лоренца.

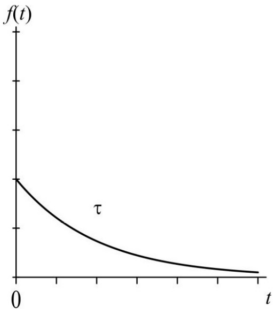


Рис. 4.8. График функции экспоненциального импульса $f(t)$

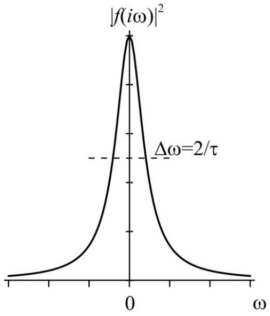


Рис. 4.9. График спектральной плотности экспоненциального импульса

Рассмотрим слабозатухающую волну:

$$f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega_0 t = f_0 e^{-\delta t} \cos\omega_0 t \tag{4.43}$$

при $t \geqslant 0$ и $\omega_0 \gg \delta$ $(\tau \gg T_0)$

В этом случае:

$$|f(i\omega)|^2 = \frac{f_0^2}{4} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\delta^2} = \frac{(f_0\tau)^2}{4} L\left(\frac{\omega-\omega_0}{\delta}\right) \tag{4.44}$$

§5. Спектральная плотность интенсивности.

Какой смысл будет иметь спектральная плотность $|E(i\omega)|^2$ при рассмотрении напряженности электрического поля $E(t)$?

5.1. Световой импульс.

Рассмотрим ограниченную во времени функцию $E(t)$ с длительностью импульса τ.

$$I = \langle S \rangle_{\tau_p} = \left\langle \varepsilon_0 \varepsilon v E^2(t) \right\rangle = \varepsilon_0 \varepsilon v \left\langle E^2(t) \right\rangle \sim \left\langle E^2(t) \right\rangle \tag{4.45}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

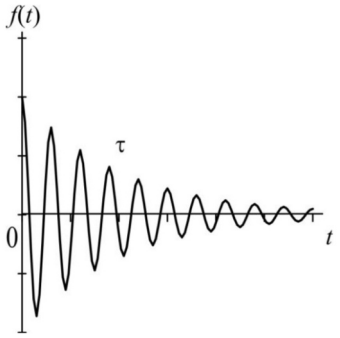


Рис. 4.10. График функции слабозатухающей волны $f(t)$

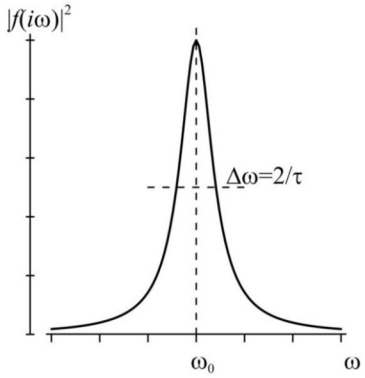


Рис. 4.11. График спектральной плотности слабозатухающей волны

при этом время разрешения прибора $\tau_p \gg T_0$.

$$I = \frac{1}{\tau} int_0^\tau E^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |E(t)|^2 \mathrm{d}t = \\ = \frac{1}{\tau}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |E(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = \int\limits_0^\infty S(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{4.46}$$

При преобразованиях была использована теорема Планшереля. $S(\omega)$ – спектральная плотность интенсивности:

$$\boxed{S(\omega) = \frac{|E(t)|^2}{\pi\tau}} \tag{4.47}$$

Интенсивность той части импульса, которой соответствует набор гармоник из интервала частот $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$:

$$\boxed{\mathrm{d}I = S(\omega)\mathrm{d}\omega} \tag{4.48}$$

5.2. Непрерывное стационарное излучение.

Время разрешения прибора $\tau_p \gg \tau \gg T_0$, где τ – время модуляции излучений. Рассмотрим время наблюдения $\tau_H > \tau_p$.

Квазимонохроматические волны с характерным временем τ следуют случайным образом друг относительно друга. То есть к ним нельзя применить Фурье-преобразования, т.к. соответствующие интегралы будут расходиться.

Пусть E_H – напряженность поля $E(t)$ в интервале времени наблюдения $[0, \tau_H]$. Вне этого интервала $E_H = 0$. Запишем интенсивность такой волны:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$I = \lim_{\tau_H\to\infty}\frac{1}{\tau_H}\int_0^{\tau_H} E_H^2(t)\mathrm{d}t = \lim_{\tau_H\to\infty}\frac{1}{\tau_H}\int_{-\infty}^{\infty} E_H^2(t)\mathrm{d}t = \\ = \lim_{\tau_H\to\infty}\frac{1}{\tau_H}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|E_H(i\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \int_0^{\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{4.49}$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность интенсивности:

$$\boxed{S(\omega) = \lim_{\tau_H\to\infty}\frac{|E_H(i\omega)|^2}{\pi\tau_H}} \tag{4.50}$$

5.3. Совокупность случайно разбросанных во времени одинаковых световых импульсов.

$$E(t) = \sum_j e(t-t_j), \tag{4.51}$$

где t_j – начало j-го импульса с длительностью $\tau \gg T_0$. Будем считать, что импульсы одинаковы.

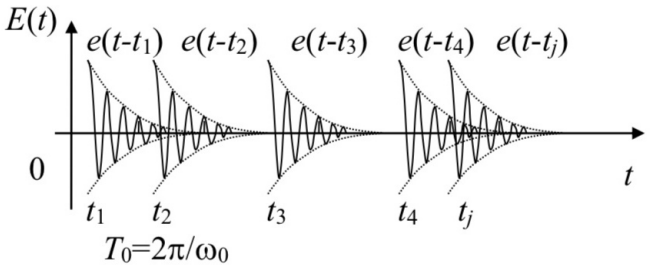


Рис. 4.12. График напряженности поля совокупности случайно разбросанных во времени одинаковых световых импульсов.

$$E_H(t) = \begin{cases} E(t) & \text{при } t\in[0,\tau_H] \\ 0 & \text{при } t\notin[0,\tau_H] \end{cases} \tag{4.52}$$

Фурье-образ напряженности $E_H(t)$ поля излучения за время наблюдения $\tau_H \gg \tau$:

$$E_H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_H(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{\tau_H} E(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{\tau_H}\sum_j e(t-t_j)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \\ = \sum_{j=1}^{N_H}\int_{-\infty}^{\infty} e(t-t_j)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{N_H} e^{-i\omega t_j}e(i\omega) = e(i\omega)\sum_{j=1}^{N_H} e^{-i\omega t_j}, \tag{4.53}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

где N_H – число зарегистрированных импульсов за время τ_H.

Спектральная плотность в этом случае:

$$|E_H(i\omega)|^2 = E_H(i\omega)E_H^*(i\omega) = |e(i\omega)|^2 \sum_{j,k=1}^{N_H} e^{-i\omega(t_j - t_k)} \tag{4.54}$$

При устремлении времени наблюдения τ_H к бесконечности ($\tau_H \gg \tau$) получим спектральную плотность интенсивности всего излучения:

$$\begin{aligned} S(\omega) = \lim_{\tau_H\to\infty} S_H(\omega) = \lim_{\tau_H\to\infty} \frac{|E_H(i\omega)|^2}{\pi\tau_H} = \lim_{\tau_H\to\infty} \frac{|e(i\omega)|^2 \sum_{j,k=1}^{N_H} e^{-i\omega(t_j-t_k)}}{\pi\tau_H} = \\ = \frac{|e(i\omega)|^2}{\pi} \lim_{\tau_H\to\infty} \frac{N_H + \sum_{j\neq k}^{N_H} e^{-i\omega(t_j-t_k)}}{\tau_H} = n\tau\frac{|e(i\omega)|^2}{\pi\tau} = n\tau s(\omega), \end{aligned} \tag{4.55}$$

где n – *средняя частота следования импульсов.*

Таким образом, спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ случайно разбросанных во времени одинаковых световых импульсов пропорциональна спектральной плотности $s(\omega)$ отдельного импульса.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5. Интерференция света. Когерентность

Глава 3. Интерференция света.

§1. Интерференция и когерентность.

Опр. Интерференция – пространственное перераспределение пространственной плотности энергии в световой волне при наложении световых волн.

Опр. Когерентность – способность световых волн к интерференции.

1.1. Методы деления фронта и амплитуды. Схема интерференции Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля.

Существует два основных способа получения когерентных пучков света: деление волнового фронта (получение когерентных пучков от разных областей одного и того же волнового фронта) и деление амплитуды (получение когерентных пучков от одной и той же малой области волновой поверхности световой волны).

Принцип Гюйгенса: каждая точка волнового фронта может рассматриваться как источник вторичных сферических волн той же частоты, а огибающая этих вторичных волн – фронт волны в последующие моменты времени.

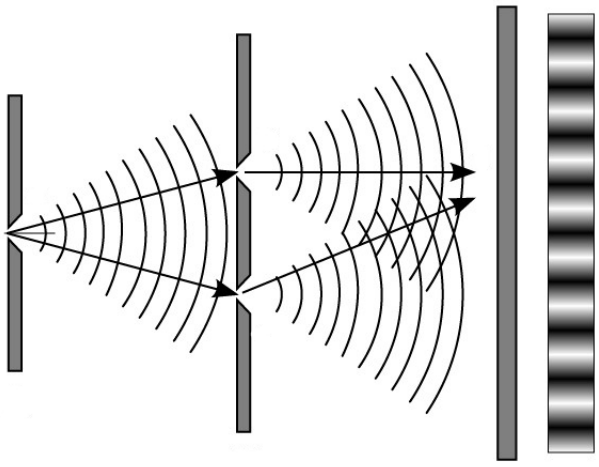


Рис. 5.1. Схема интерференции Юнга.

Рассмотрим схему интерференции Юнга. На пути распространения исходного пучка света располагается непрозрачный экран с узкой щелью (Рис. 5.1). Всоответствие с принципом Гюйгенса часть волнового фронта исходной волны, прошедшей

через щель, рассматривается как источник вторичных волн той же частоты. Далее устанавливается еще один экран с двумя щелями. Вторичные волны, возникающие в области расположения этих щелей, накладываются друг на друга. Интенсивность света при этом перераспределяется в пространстве – наблюдается явление интерференции.

Принцип Гюйгенса-Френеля:

1) Любая точка волнового фронта является источником вторичных сферических волн;

2) Спектральный состав этих волн такой же, как и спектральный состав исходной волны;

3) Все вторичные волны когерентны.

1.2. Общая схема и уравнение двухволновой интерференции.

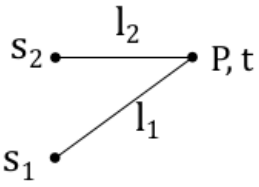


Рис. 5.2. Общая схема двухволновой интерференции.

Пусть есть два точечных вторичных источника света (Рис. 5.2). Какой будет напряженность электрического поля в точке наблюдения P в момент времени t?

В соответствие с принципом суперпозиции напряженность электрического поля равна сумме напряженностей полей волн, которые накладываются друг на друга, т.е.:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t) \tag{5.1}$$

Интенсивность света результирующей волны:

$$I = \left\langle (\vec{E}(t))^2 \right\rangle = I_1^2 + I_2^2 + 2\left\langle \vec{E}_1(t) \cdot \vec{E}_2(t) \right\rangle \tag{5.2}$$

Последнее слагаемое в (5.2) – интерференционный вклад в интенсивность результирующей волны. Интерференция наблюдается в том случае, когда это слагаемое ненулевое. Понятно, что при наложении волн с взаимно перпендикулярными направлениями поляризации интерференции не будет (из свойства скалярного произведения).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим случай, когда $\vec{E}_1(t)||\vec{E}_2(t)$. Тогда интенсивность можно представить в виде:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\langle E_1(t)E_2(t)\rangle} \tag{5.3}$$

Уравнение (5.3) – основное уравнение двухволновой интерференции.

§2. Интерференция монохроматических волн.

Так как волны монохроматические, то можно записать

$$E_{1,2}(t) = a_{1,2}\cos\left(\omega t - kl_{1,2} + \varphi_{0_{1,2}}\right) = a_{1,2}\cos\left(\omega t + \varphi_{1,2}\right), \tag{5.4}$$

где $a_{1,2}$ – постоянная во времени амплитуда, $\varphi_{0_{1,2}}$ – начальная фаза колебаний электромагнитного поля в месте расположения источников S_1 и S_2, $\varphi_{1,2}$ – начальная фаза колебаний в точке наблюдения.

Интенсивность электрического поля каждой из волн:

$$I_{1,2} = \left\langle E_{1,2}^2(t)\right\rangle = \left\langle a_{1,2}^2\cos^2(\omega t + \varphi_{1,2})\right\rangle = \frac{a_{1,2}^2}{2} \tag{5.5}$$

Отсюда можно получить выражение для амплитуды:

$$a_{1,2} = \sqrt{2I_{1,2}} \tag{5.6}$$

2.1. Уравнение интерференции и порядок интерференции.

Общее уравнение двухволновой интерференции:

$$I = I_1 + I_2 + 2\langle a_1 a_2\cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2)\rangle = I_1 + I_2 + 2\cdot 2\sqrt{I_1 I_2}\frac{\cos(\Delta\varphi)}{2} \tag{5.7}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_2 = k(l_1 - l_2) + \Delta\varphi_0 = k\Delta l + \Delta\varphi_0 = \omega\Delta\tau + \Delta\varphi_0 \tag{5.8}$$

Здесь $\Delta l \equiv l_1 - l_2$ – разность хода, $\Delta\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$, $\Delta\tau = \frac{\Delta l}{v}$ – время задержки.

$$\boxed{I(\Delta\varphi, \Delta l, \Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)} \tag{5.9}$$

Условие наблюдения максимальной интенсивности:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{max} &= m2\pi, \\ \Delta l_{max} &= m\lambda, \\ \Delta\tau_{max} &= mT \end{aligned} \tag{5.10}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

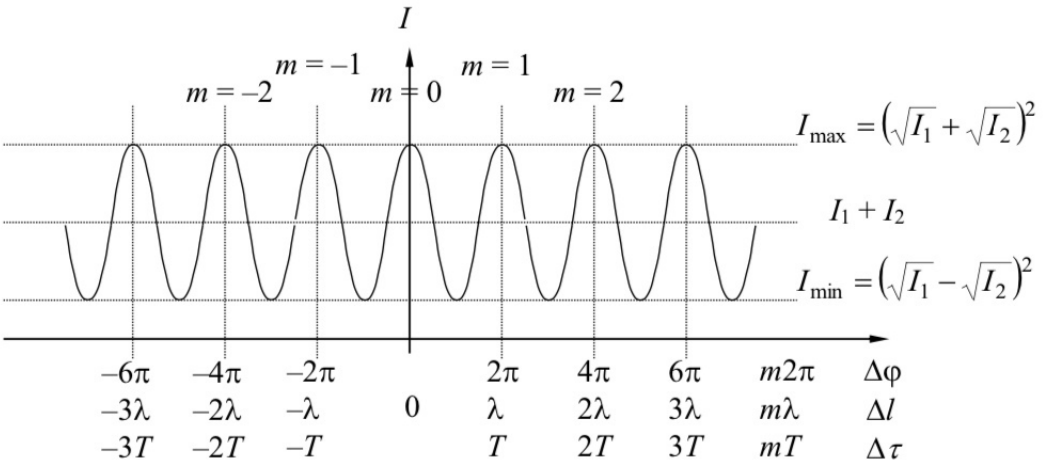


Рис. 5.3. Зависимость интенсивности света монохроматической волны от разности фаз $\Delta\varphi$, разности хода Δl и времени задержки $\Delta\tau$.

Условие наблюдения минимальной интенсивности:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{min} &= (m + 1/2)2\pi, \\ \Delta l_{min} &= (m + 1/2)\lambda, \\ \Delta\tau_{min} &= (m + 1/2)T \end{aligned} \tag{5.11}$$

Здесь $m = 0, \pm1, \pm2, \pm2, \ldots$ – *порядок интерференции.*

2.2. Интерференционная картина и функция видности.

Функция *видности интерференционной картины*:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{5.12}$$

Интервал изменения видности: $0 \leqslant V \leqslant 1$.

В случае монохроматических волн:

$$V = \frac{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 - (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 + (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \tag{5.13}$$

$$q = \frac{I_{1,2}}{I_1 + I_2}; \quad V(q) = 2\sqrt{q(1-q)} \tag{5.14}$$

Легко показать, что зависимость функции видности V от относительной интенсивности q одной из волн (Рис. 5.4) – уравнение полуокружности, сдвинутое вдоль оси на 1/2. Значение $V > 0.1$ – характерный предел наблюдения для человеческого глаза.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

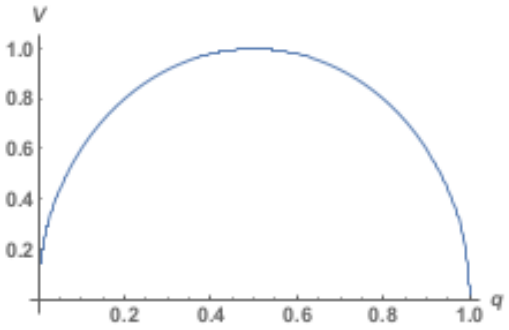


Рис. 5.4. Зависимость функции видности V от относительной интенсивности q одной из волн.

2.3. Линейная и угловая ширины интерференционных полос.

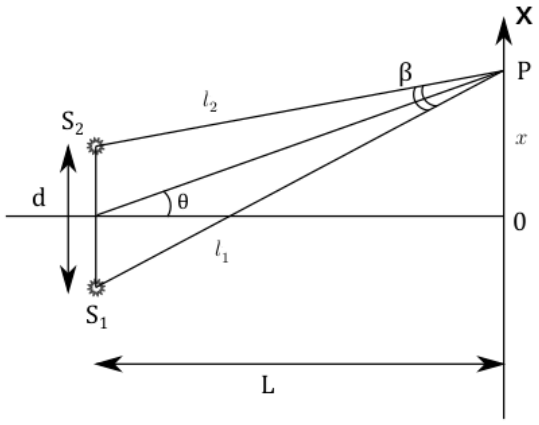


Рис. 5.5. Общая схема двухволновой интерференции.

Вернемся к общей схеме двухволновой интерференции (Рис. 5.5). β – угол схождения интерферирующих волн. Пусть расстояние между вторичными источниками много меньше, чем расстрояние от экрана до плоскости вторичных источников. И пусть мы наблюдаем интерференционную картину на расстояниях от ее центра, много меньших, чем расстояние от экрана до плоскости вторичных источников. Т.е. $L \gg d, x$.

$$\begin{aligned} l_1^2 &= L^2 + (x + d/2)^2 \\ l_2^2 &= L^2 + (x - d/2)^2 \\ l_1^2 - l_2^2 &= 2xd \\ l_1^2 - l_2^2 &= (l_1 - l_2)(l_1 + l_2) \cong \Delta l 2L \end{aligned} \tag{5.15}$$

Получаем:

$$\Delta l = x\frac{d}{L} \cong \beta x \tag{5.16}$$

Минимальное расстояние между соседними максимумами – Δx.

$$\Delta l_{max} = m\lambda = \frac{d}{L}x_{max} \tag{5.17}$$

Тогда Δx, которая соответствует изменению порядка интерференции на 1 ($\Delta m = 1$):

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} \tag{5.18}$$

Угловой размер интерференционной полосы:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{d} \tag{5.19}$$

§3. Интерференция квазимонохроматических волн.

$$E_{1,2}(t) = a_{1,2}(t)\cos\left(\omega_0 t - k_0 l_{1,2} + \varphi_{0_{1,2}}(t)\right) = a_{1,2}(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi_{1,2}(t)\right) \tag{5.20}$$

Интенсивность каждой из волн:

$$I_{1,2}(t) = \left\langle E_{1,2}^2(t)\right\rangle = \left\langle a_{1,2}^2(t)\frac{\cos(2\omega_0 t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t)) + \cos(\Delta\varphi(t))}{2}\right\rangle \cong \frac{\left\langle a_{1,2}^2(t)\cos\Delta\varphi(t)\right\rangle}{2} \tag{5.21}$$

При усреднении было использовано условие $\tau_p \gg T_0$.

3.1. Уравнение интерференции и условие интерференции.

Воспользуемся общим уравнением двухволновой интерференции:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\left\langle E_1(t)E_2(t)\right\rangle = I_1(t) + I_2(t) + 2\left\langle a_1(t)a_2(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1)\cos(\omega_0 t + \varphi_2)\right\rangle = \\ &= I_1(t) + I_2(t) + \left\langle a_1(t)a_2(t)\cos\Delta\varphi(t)\right\rangle \end{aligned} \tag{5.22}$$

Пусть время разрешения прибора меньше времени модуляции $\tau_p < \tau$. Тогда будет наблюдаться динамическая интерференция. Если же время разрешения прибора больше, чем время модуляции $\tau_p > \tau$, то результат усреднения в (5.22) будет ненулевым при $max\left(\delta\left(\Delta\varphi(t)\right)\right) < \pi$ за время разрешения прибора. При этом, чем меньше максимальное изменение разности фаз, тем четче будет интерференционная картина. Другое условие наблюдения интерфенции в этом случае – $\Delta\varphi \sim const$ за время разрешения прибора.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6. Функция временной корреляции. Пространственная когерентность

§3. Интерференция квазимонохроматических волн. Продолжение

3.2. Спектральное описание и уравнение интерференции в частотном представлении.

Пусть интерферируют две волны с одинаковыми по форме частотными спектрами $|E_H(i\omega)|^2$ (спектральными плотностями электрической напряженности светового поля), а значит и спектральными плотностями интенсивности

$$S(\omega) = \lim_{\tau_H \to \infty} \frac{|E_H(i\omega)|^2}{\pi \tau_H}, \tag{6.1}$$

но разными интенсивностями:

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \alpha_{1,2} I_0 = \alpha_{1,2} \int_0^\infty S(\omega) \mathrm{d}\omega, \\ \alpha_{1,2} &= \frac{I_{1,2}}{I_0}, \quad \mathrm{d}I_{1,2} = \alpha_{1,2} \mathrm{d}I_0, \quad \mathrm{d}I_0 = S(\omega)\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{6.2}$$

Такие волны получают обычно от одного точечного источника света, соответствующего, как правило, одной светящейся точке фрона исходной волны – вторичного источника, и до интерференции проходят в пространстве разные пути (метод деления амплитуды). При этом $\Delta\varphi_0 = 0$ и $\Delta\varphi = k\Delta l = \omega\Delta\tau$.

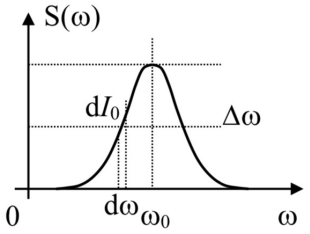


Рис. 6.1. График спектральной плотности интенсивности.

Пусть спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ одномодальна и характеризуется шириной $\Delta\omega$ и основной (несущей, средней) частотой ω_0 (Рис. 6.1). Воспользуемся уравнением двухволновой интерференции для волн, излучающих в одном очень

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

узком диапазоне (полосе) частот $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}I &= \mathrm{d}I_1 + \mathrm{d}I_2 + 2\sqrt{\mathrm{d}I_1 \mathrm{d}I_2}\cos(\Delta\varphi) = \mathrm{d}I_1 + \mathrm{d}I_2 + 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\mathrm{d}I_0\cos(\Delta\varphi) = \\ &= \mathrm{d}I_1 + \mathrm{d}I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\frac{1}{I_0}S(\omega)\cos(\omega\Delta\tau)\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{6.3}$$

Для всего диапазона частот интенсивность интерференционной картины будет результатом некогерентвного наложения картин, полученных от волн с различными узкими полосами частот.

В результате интегрирования левой и правой частей уравнения по частотам получим *уравнение двухволновой интерференции для квазимонохроматических волн при спектральном описании*:

$$I(\Delta\tau) = \int_{\omega} \mathrm{d}I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\frac{1}{I_0}\int_0^{\infty} S(\omega)\cos(\omega\Delta\tau)\mathrm{d}\omega \tag{6.4}$$

где $\Delta\tau$ – время задержки.

3.3. Функция видности, время и длина когерентности, максимальный порядок интерференции.

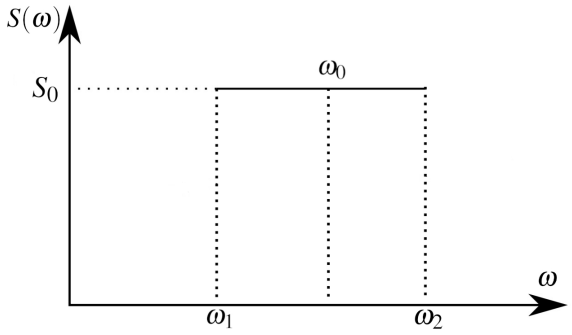


Рис. 6.2. Спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ прямоугольной формы.

Пусть спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ имеет прямоугольную форму (Рис. 6.2). В этом случае интенсивность волны в соответствие с определением спектральной плотности интенсивности:

$$I_0 = \int_0^{\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega = S_0\Delta\omega \tag{6.5}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Здесь $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ – разность граничных частот. Среднее значение частоты: $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 \cos(\omega\Delta\tau)\mathrm{d}\omega = \frac{I_0}{\Delta\omega}\frac{\sin(\omega_2\Delta\tau) - \sin(\omega_1\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \\ = I_0\frac{2\cos(\omega_0\Delta\tau)\sin\left(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}\right)}{\Delta\omega\Delta\tau} \tag{6.6}$$

Полученное выражение подставим в формулу для двухволновой интерференции в случае спектрального описания (6.4):

$$\boxed{I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}sinc(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2})\cos(\omega_0\Delta\tau)} \tag{6.7}$$

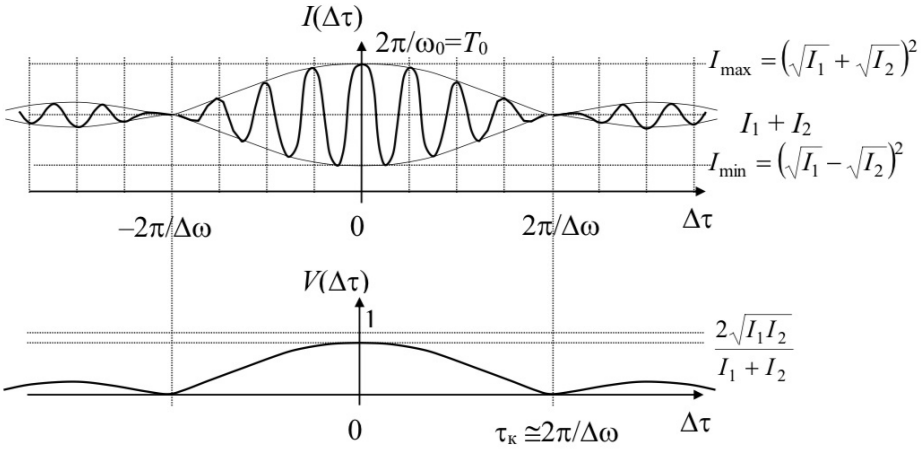


Рис. 6.3. Сверху: Интенсивность при двухволновой интерференции световых волн с прямоугольным частотным спектром;
Снизу: Видность интерференционной картины при двухволновой интерференции световых волн с прямоугольным частотным спектром.

Получили *уравнение двухволновой интерференции световых волн с прямоугольным частотным спектром* (6.7).

Можно заметить, что при $\Delta\omega\Delta\tau/2 \leqslant \pi$ наблюдается достаточно четкая интерференционная картина (Рис. 6.3). Если же $\Delta\omega\Delta\tau/2 > \pi$, то видность интерференционной картины будет падать.

Видность интерференционной картины в данном случае (Рис. 6.3):

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\left|sinc\left(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}\right)\right| \tag{6.8}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В отличие от интерференции монохроматических волн, в случае квазимонохроматических волн функция видности зависит от времени задержки $\Delta\tau$ (разности фаз $\Delta\varphi$, разности хода Δl, порядка интерференции m, координаты точки наблюдения x).

Если $\Delta\tau \leqslant 2\pi/\Delta\omega \cong \tau_K$, то интерференционная картина будет достаточно четкой.

Опр. Время когерентности τ_K – максимальное время задержки, при которой все еще наблюдается интерференционная картина.

Заметим, что $\tau_k = 2\pi/\Delta\omega \simeq \tau$, где τ – длительность светового импульса.

Напомним, что время задержки: $\Delta\tau = \Delta l/v$. Следовательно $\Delta l = v\Delta\tau$, значит, если есть максимальное время задержки, при которой наблюдается интерференционная картина, то есть и значение максимальной разности хода: $\Delta l \leqslant v\Delta\tau_K = L_K \simeq v\tau = l_{\text{цуг}}$.

Опр. Длина когерентности l_K – максимальное значение разности хода, при которой наблюдается интерференционная картина.

Оценка максимального порядка интерференции:

$$m_{max} \cong \frac{\tau_K}{T_0} = \frac{l_K}{\lambda_0} \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \cong \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{6.9}$$

Источник света	λ_0, мкм	$\lambda_0/\Delta\lambda$	m_{max}	$\tau_к$, с	$l_к$
Солнечный свет	~0.5	~1.7	~2	$3\cdot10^{-15}$	~1 мкм
Фильтр	~0.5	10	10	$2\cdot10^{-14}$	5 мкм
Ртутная лампа	~0.3	10^5	10^5	10^{-10}	3 см
He-Ne лазер (одномодовый режим)	~0.6	до 10^{13}	до 10^{13}	до $2\cdot10^{-2}$	до $6\cdot10^6$ м

Рис. 6.4. Оценка различных параметров когерентности для нескольких типов источников.

Оценка различных параметров когерентности для нескольких типов источников приведена на (Рис. 6.4).

3.4. Временное описание и уравнение интерференции. Функция корреляции и ее свойства.

Вернемся к общей схеме двухволновой интерференции (Рис. 5.2) . Вторичные источники света S_1 и S_2 – разные точки волновой поверхности исходной волны.

Напряженность электрического поля первого источника S_1 в точке его расположения:

$$E_1(t_1) = E_1(t - \frac{l_1}{v}) \tag{6.10}$$

Аналогично для второго источника:

$$E_2(t_2) = E_2(t - \frac{l_2}{v}) \tag{6.11}$$

Время задержки:

$$\begin{aligned} &\Delta\tau = t_2 - t_1 = \frac{l_1 - l_2}{v} = \frac{\Delta l}{v} \\ &t_2 = t_1 + \Delta\tau \end{aligned} \tag{6.12}$$

Общее уравнение двухволновой интерференции в этом случае:

$$I = I_1 + I_2 + 2\underbrace{\langle E_1(t_1)E_2(t_2)\rangle}_{B_{12}(t_1,t_2)}, \tag{6.13}$$

здесь $B_{12}(t_1,t_2)$ – *функция пространственно-временной корреляции* колебаний в точках S_1 и S_2 в моменты времени t_1 и t_2.

Если рассматривать стационарное световое поле, то функцию пространственно-временной корреляции можно записать в виде:

$$B_{12}(t_1,t_2) = \langle E_1(t_1)E_2(t_1+\Delta\tau)\rangle = \langle E_1(t)E_2(t+\Delta\tau)\rangle = B_{12}(\Delta\tau) \tag{6.14}$$

При преобразованиях было использовано условие стационарности. $B_{12}(\Delta\tau)$ – функция пространственно-временной корреляции в случае стационарных процессов.

Если интерферирующие волны порождены одной точкой светового поля (т.е. точки S_1 и S_2 совпадают), то вспомним, что их интенсивности:

$$I_{1,2} = \alpha_{1,2}I_0 \tag{6.15}$$

Тогда для напряженностей электрического поля будет справедливо:

$$E_{1,2}(t_1,t_2) = \sqrt{\alpha_{1,2}}E_0 t_1, t_2 \tag{6.16}$$

Подставим эти выражения в выражение для функции пространственно-временной корреляции в случае стационарного поля:

$$B_{12}(\Delta\tau) = \langle\sqrt{\alpha_1\alpha_2}E_0(t)E_0(t+\Delta\tau)\rangle = \frac{\sqrt{I_1I_2}}{I_0}\underbrace{\langle E_0(t)E_0(t+\Delta\tau)\rangle}_{B(\Delta\tau)} \tag{6.17}$$

Здесь $B(\Delta\tau)$ – *функция временной корреляции (функция автокорреляции).*

Тогда получим уравнение двухволновой интерференции непрерывных стационарных квазимонохроматических волн, записанное при временном подходе:

$$I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\frac{1}{I_0}B(\Delta\tau) \tag{6.18}$$

3.5. Функция временной корреляции совокупности случайно разбросанных во времени одинаковых световых импульсов

Если источник *непрерывной стационарной* ($\tau_p \gg \tau$) волны представляет собой множество одинаково и независимо, со случайными начальными фазами, излучающих атомов со временем жизни $\tau \gg T$ (длиной цуга волны $l_{\text{цуг}} \gg \lambda$), то напряженность электрического поля волны можно записать в виде:

$$E_0(t) = \sum_j e_0(t - t_j) \tag{6.19}$$

При усреднении по времени разрешения приемника $t_p \gg \tau$ функция временной (авто-) корреляции с учетом стационарности излучения будет равна:

$$\begin{aligned}
B(\Delta\tau) &= \langle E_0(t)E_0(t+\Delta\tau)\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{j,k} e_0(t-t_j)e_0(t-t_k+\Delta\tau) \right\rangle \overset{\text{стац.}}{=} \left\langle \sum_{j,k} e_0(t)e_0(t+\Delta\tau+t_j-t_k) \right\rangle = \\
&= \frac{1}{\tau_p}\int_0^{\tau_p} \sum_{j,k} e_0(t)e_0(t+\Delta\tau+t_j-t_k)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{\tau_p}\sum_{j,k=1}^{N_p}\int_0^{\tau} e_0(t)e_0(t+\Delta\tau+t_j-t_k)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{\tau_p}\sum_{j=k=1}^{N_p}\int_0^{\tau} e_0(t)e_0(t+\Delta\tau)\mathrm{d}t + \frac{1}{\tau_p}\sum_{j\neq k=1}^{N_p}\int_0^{\tau} e_0(t)e_0(t+\Delta\tau+t_j-t_k)\mathrm{d}t \overset{\tau_p\gg\tau}{\cong} \\
&\overset{\tau_p\gg\tau}{\cong} \frac{N_p}{\tau_p}\int_0^{\tau} e_0(t)e_0(t+\Delta\tau)\mathrm{d}t = n\tau\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} e_0(t)e_0(t+\Delta\tau)\mathrm{d}t = n\tau b(\Delta\tau)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Функция временной корреляции для цуга волны $b(\Delta\tau)$, как характеристика цуга, введена путем усреднения по длительности цуга τ.

Как видим, функция временной корреляции для всей волны и для цуга волны, соответствующего одному акту излучения, пропорциональны (аналогично спектральным плотностям интенсивности).

Все определяется перекрываением цуга для акта излучения одного из громадного ($10^{18} - 10^{23}$) числа атомов!!

3.6. Теорема Винера-Хинчина.

Обратим внимание на выражения (6.4) и (6.18). Получим:

$$B(\Delta\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega)\cos(\omega\Delta\tau)\mathrm{d}\omega \tag{6.21}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Получившееся интегральное соотношение (6.21) – одно из уравнений Винера-Хинчина в вещественной форме.

Свойства функции временной корреляции:

1) $B(\Delta\tau = 0) = I_0$

2) $B(\Delta\tau \gg \tau_K) = 0$

3) $B(-\Delta\tau) = B(\Delta\tau)$, если процесс стационарный.

4) $B(\Delta\tau)$ – быстро осциллирующая функция с характерным временем T_0 (период колебания с несущей частотой) и слабоубывающая с характерным временем τ (время модуляции).

Второе уравнение Винера-Хинчина в вещественной форме:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\Delta\tau) \cos(\omega\Delta\tau)\, \mathrm{d}(\Delta\tau) \tag{6.22}$$

Уравнения Винера-Хинчина в вещественной форме показывают, что функция временной корреляции и спектральная плотность интенсивноси связаны между собой интегральным образом. Найдем эту связь в комплексной форме. Воспользуемся четностью функции $S(\omega)$.

$$B(\Delta\tau) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\Delta\tau} \mathrm{d}\omega \tag{6.23}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\Delta\tau) e^{-i\omega\Delta\tau}\, \mathrm{d}(\Delta\tau) \tag{6.24}$$

Два интегральных соотношения (6.23) и (6.24) – уравнения Винера-Хинчина в комплексной форме.

3.7. Понятие о Фурье-спектроскопии. Разрешающая способность Фурье-спектрометра.

Фурье-спектрометр состоит из двух частей:

1) Интерферометр – оптический прибор, который может исходное световое возмущение I_0 разделить на две волны I_1 и I_2, внести заданную разность хода Δl или задержку по времени $\Delta\tau$, а затем свести их в какой-то области пространства.

В результате получается интенсивность интеренционной картины как функция времени задержки $I(\Delta\tau)$. Отсюда легко найти функцию временной корреляции, которая также называется *интерферограмма.*

$$B(\Delta\tau) = \frac{I(\Delta\tau) - I_1 - I_2}{2\sqrt{I_1 I_2}} I_0 \tag{6.25}$$

2) Компьютер, с помощью которого, пользуясь уравнениями Винера-Хинчина, можно найти спектральную плотность интенсивности $S(\omega)$.

Таким образом Фурье-спектрометр получает на вход некоторое световое возмущение, а на выход дает спектральную плотность интенсивности для этой волны.

Требуется, чтобы $\Delta\tau > \tau_k \cong 2\pi/\Delta\omega$. Тогда ширина спектра связана со временем задержки соотношением: $\Delta\omega > 2\pi/\Delta\tau$. Т.е.:

$$\Delta\omega_{min} \cong \frac{2\pi}{\Delta\tau_{max}} \tag{6.26}$$

Введем в рассмотрение физическую величину – *разрешающую способность* R:

$$R \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{min}} = \frac{2\pi}{T_0}\frac{\Delta\tau_{max}}{2\pi} = \frac{\Delta\tau_{max}}{T_0} = \frac{\Delta l_{max}}{\lambda}, \tag{6.27}$$

где ω_0 – характерная частота спектра анализируемого излучения, $\Delta\omega_{min}$ – минимальная ширина этого спектра.

Оценим R для интерферометра Майкельсона: $R \sim \frac{1}{0.5\cdot 10^{-6}} = 2\cdot 10^6$.

$$R \overset{\Delta\omega_{min} \ll \omega_0}{=} \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{min}} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_{min}} \tag{6.28}$$

§4. Пространственная когерентность.

4.1. Уравнение интерференции.

Рассмотрим схему Юнга (Рис. 1.1). Пусть источник света имеет конечный поперечный размер s. Нас интересует малая область источника Δy с координатой y.

Пусть источник – совокупность независимых друг от друга монохроматических источников с одинаковой частотой. Пусть излучение однородно в пространстве, т.е. интенсивность излучения любой одинаковой по величине части источника будет одинаково в соответствующей точке пространства.

Рассмотрим физически бесконечно малый элемент источника $\mathrm{d}y$. При этом пусть остальная часть источника закрыта. Тогда интенсивность интерференционной картины:

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}I_1 + \mathrm{d}I_2 + 2\sqrt{\mathrm{d}I_1 \mathrm{d}I_2}\cos\left(k(\alpha y + \beta x)\right), \tag{6.29}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

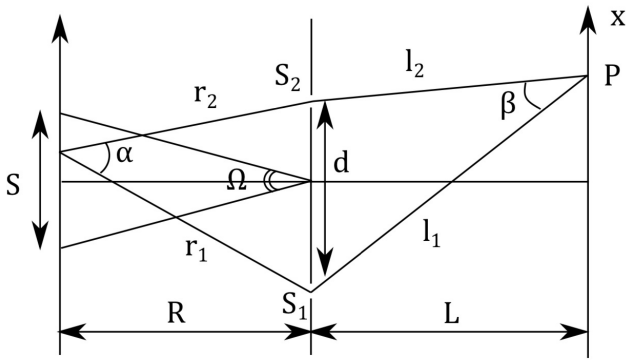


Рис. 6.5. Схема Юнга с источником света конечных размеров. β – угол сходимости интерферирующих волнб α – угол интерференции, Ω – угловая аппертура (угол, под которым виден источник из области расположения вторичных источников).

где разность фаз $\Delta\varphi = k(\alpha y + \beta x)$.

Если мы возьмем такой же элемент источника в другом месте этого источника, то он создаст такую же интерференционную картину, но в (6.33) изменится разность фаз.

Тогда интенсивность интерференционной картины, создаваемой всем источником:

$$\int_{-s/2}^{s/2} \mathrm{d}I = \int_{-s/2}^{s/2} \mathrm{d}I_1 + \mathrm{d}I_2 + 2\sqrt{\mathrm{d}I_1 \mathrm{d}I_2}\cos\left(k(\alpha y + \beta x)\right) \tag{6.30}$$

$$\mathrm{d}I_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{s}\mathrm{d}y \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\frac{\sqrt{I_1 I_2}}{s}\int_{-s/2}^{s/2}\cos\left(k(\alpha y + \beta x)\right)\mathrm{d}y = \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\frac{\sin\left(k(\alpha s/2 + \beta x)\right) - \sin\left(k(-\alpha s/2 + \beta x)\right)}{k\alpha s} = \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\frac{\cos(\omega\Delta\tau)\sin\left(k\alpha s/2\right)}{k\alpha s/2} \end{aligned} \tag{6.32}$$

Получаем уравнение двухволновой интерференции с участием протяженного источника с поперечными размерами s:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,sinc\left(\frac{k\alpha s}{2}\right)\cos(\omega\Delta\tau)} \tag{6.33}$$

4.2. Функция видности, угол и радиус когерентности.

По определению функция видности в случае двухволновой интерференции от одного светящегося протяженного источника монохроматического света с поперечными

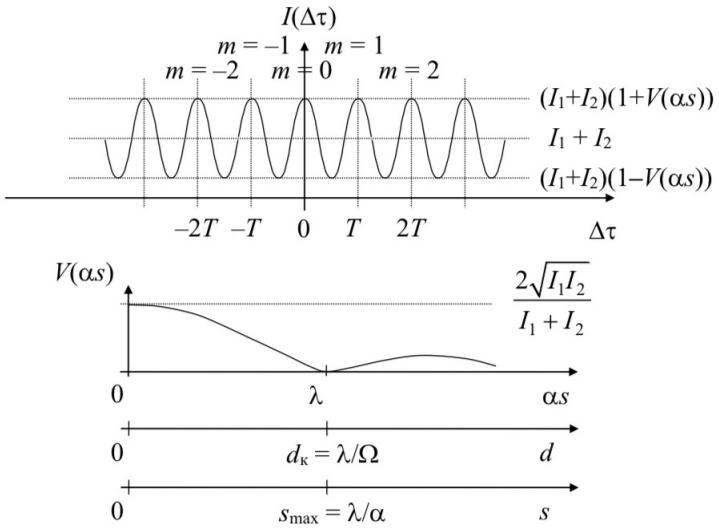


Рис. 6.6. Для двухволновой интерференции от одного светящегося протяженного источника монохроматического света с поперечными размерами s:
сверху: график функции интенсивности;
снизу: график функии видности.

размерами s:

$$V(\alpha s) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| sinc\left(\frac{k\alpha s}{2}\right)\right| \tag{6.34}$$

Интерференционная картина будет наблюдаться, если $k\alpha s/2 < \pi$ (Рис. 6.6). Отсюда:

$$\boxed{\frac{\alpha s}{\lambda} < 1} \tag{6.35}$$

Если $R \gg s, d$, то

$$\boxed{\frac{ds}{R\lambda} < 1} \tag{6.36}$$

Из условия (6.36) можем найти радиус (ширину) когерентности d_K:

$$d < \frac{R\lambda}{s} = \frac{\lambda}{\Omega} \equiv d_K \tag{6.37}$$

Вторичные источники (две точки поля волны) протяженного источника будут когерентны, если расстояние между ними будет меньше радиуса когерентности.

$$\Omega < \frac{\lambda}{d} \equiv \Omega_K \tag{6.38}$$

Ω_K – угол когерентности, т.е максимальный угол, под которым виден источник из места расположения вторичных источников.

$$s < \frac{\lambda R}{d} = \frac{\lambda}{\alpha} \equiv s_{max} \tag{6.39}$$

s_{max} – максимальный линейный размер источника, при котором при данном α будет наблюдаться интерференционная картина.

$$\alpha < \frac{\lambda}{s} \equiv \alpha_{max} \tag{6.40}$$

α_{max} – максимальный угол интерференции.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7. Комплексные функции корреляции. Схемы двухволновой интерференции.

§4. Пространственная когерентность. Продолжение

Источник света	s	R	$d_к$
Тепловой источник	$\sim R$	$\sim s$	~0.5 мкм
Солнце	$1.39\cdot10^9$ м	$1.49\cdot10^{11}$ м	~0.05 мм
Луна	$3.5\cdot10^6$ м	$3.8\cdot10^8$ м	~0.05 мм
Фонарь	1 мм	0.2 м	0.1 мм
Ртутная лампа	1 см	2 м	0.1 мм
Лазер $b_д = \frac{s^2}{4\lambda},\ d(b) \cong 2\frac{\lambda}{s}R$	2 мм	$<< b_д \cong 2$ м	2 мм
		100 м >> $b_д$	5 см
Звезда Бетельгейзе	$\Omega = \frac{s}{R} \cong 0.0047''$		22 м

Рис. 7.1. Оценка радиуса когерентности d_K для различных источников при $\lambda \sim 0.5$ мкм.

На (Рис. 7.1) привдена оценка радиуса (ширины) когерентности d_K для различных источников при $\lambda \sim 0.5$ мкм.

$$d_K = \frac{\lambda}{\Omega} = \frac{\lambda R}{s} \tag{7.1}$$

4.3. Звездный интерферометр Майкельсона.

Идея использования явления пространственной когерентности для измерения углового размера звезд – 1868г. Арман Ипполит Луи Физо. Реализация – 1920 г. Альберт Абрахам Майкельсон.

В интерферометре Майкельсона (Рис. 7.2) 2 зеркала M_1 и M_4, которые воспринимают пучок света, распространяющийся от звезды, разнесены на большое расстояние. Другие 2 зеркала M_2 и M_3 позволяют разнесенные пучки света соединить в одной области пространства, на бесконечности или в фокальной плоскости линзы L. Тогда на экране можно наблюдать интерференционную картину.

Для звезды с угловым размером Ω в центре интерференционной картины ($m = 0,\ \Delta\tau = 0,\ \Delta l = 0$) при максимальной временной когерентности функция видности

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

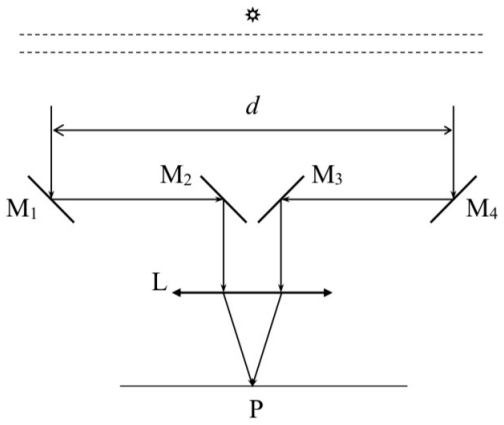


Рис. 7.2. Схема звездного интерферометра Майкельсона.

определяется только пространственной когерентностью и равна:

$$V(\alpha s) = V(\mathrm{d}\Omega) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\left|sinc\left(\frac{k\alpha s}{2}\right)\right| = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\left|sinc\left(\frac{kd}{2}\Omega\right)\right| \tag{7.2}$$

Пусть при базе прибора d_K функция видности $V(d_K) = 0$, тогда:

$$\frac{kd_K}{2}\Omega = \pi \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{kd_K} = \frac{\lambda}{d_K} \tag{7.3}$$

То есть при раздвигании зеркал можно определить радиус звезды.

Достоинство данного метода – d_{max} велико (до ~ 50 м), Ω_{min} – мал (до $\sim 0.002''$).

Для нахождения углового расстояния $\Delta\Omega$ между звездами: в центре интерференционной картины I_{min} при $k\Delta r = k\alpha\Delta s = k\frac{d}{R}\Delta s = \frac{2\pi d}{\lambda}\Delta\Omega = \pi \Rightarrow \Delta\Omega = \frac{\lambda}{2d}$

4.4. Комплексные функция корреляции и степень когерентности.

А. Пространственно-временные корреляция и когерентность.

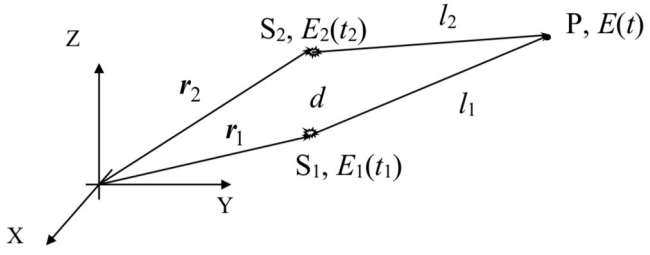


Рис. 7.3. Общая схема двухволновой интерференции волн от вторичных источников света.

Рассмотрим общую схему двухволновой интерференции волн от вторичных источников света (Рис. 7.3). Рассмотрим две пространственно-временные точки светового поля S_1 и S_2, определяемые радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ и моментами времени t_1 и t_2. Пусть световое поле в этих точках создается квазигармонической электромагнитной волной со случайной временной модуляцией ($\tau \gg T_0$), излучаемой протяженным источником:

$$\hat{E}_{1,2}(t_{1,2}) = a_{1,2}(t_{1,2})e^{i\left(\omega_0 t_{1,2}+\varphi_{0_{1,2}}(t_{1,2})\right)} = A_{1,2}(t_{1,2})e^{i\omega_0 t_{1,2}} \tag{7.4}$$

$$t_{1,2} = t - \frac{l_{1,2}}{v}, \quad t_2 = t_1 + \Delta\tau = t_1 + \frac{\Delta l}{v} = t_1 + \frac{l_1 - l_2}{v} \tag{7.5}$$

Уравнение двухволновой интерференции стационарного излучения $\hat{E}(t) = \hat{E}_1(t_1) + \hat{E}_2(t_2)$ в комплексной форме:

$$\begin{aligned} I = \left\langle E^2(t)\right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\hat{E}(t)+\hat{E}^*(t)}{2}\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \hat{E}(t)\hat{E}^*(t)\right\rangle = \\ &= I_1 + I_2 + \frac{1}{2}\left\langle \hat{E}_1(t_1)\hat{E}_2{}^*(t_2) + \hat{E}_1{}^*(t_1)\hat{E}_2(t_2)\right\rangle = I_1 + I_2 + \mathrm{Re}\left\langle \hat{E}_1(t_1)\hat{E}_2{}^*(t_2)\right\rangle = \\ &= I_1 + I_2 + \mathrm{Re}\left\langle \hat{E}_1(t)\hat{E}_2{}^*(t+\Delta\tau)\right\rangle = I_1 + I_2 + \mathrm{Re}\left\langle \hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)\right\rangle \end{aligned} \tag{7.6}$$

Комплексная функция пространственно-временной (взаимной) корреляции стационарных колебаний поля в разных точках пространства в моменты времени, отстоящие на время $\Delta\tau$:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau) &= \left\langle \hat{E}_1(t)\hat{E}_2{}^*(t+\Delta\tau)\right\rangle = \left\langle A_1(t)A_2^*(t+\Delta\tau)\right\rangle e^{-i\omega_0\Delta\tau} = \\ &= \left\langle a_1(t)a_2(t+\Delta\tau)e^{-i\Delta\varphi_{0_{12}}(t,\Delta\tau)}\right\rangle e^{-i\omega_0\Delta\tau} = \Gamma_{12}(\Delta\tau)e^{-i(\omega_0\Delta\tau+\psi_{12}(\Delta\tau))}, \end{aligned} \tag{7.7}$$

где $\Delta\varphi_{0_{12}}(t,\Delta t) = \varphi_{0_2}(t+\Delta t) - \varphi_{0_1}(t)$ и $\Gamma_{12}(\Delta\tau) \equiv \left|\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)\right| > 0$.

Комплексная степень пространственно-временной (взаимной) когерентности стационарных колебаний $\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau)$ в точках S_1 и S_2:

$$\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) \equiv \frac{\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)}{2\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{\Gamma_{12}(\Delta\tau)e^{-i(\omega_0\Delta\tau+\psi_{12}(\Delta\tau))}}{2\sqrt{I_1 I_2}} = \gamma_{12}(\Delta\tau)e^{-i(\omega_0\Delta\tau+\psi_{12}(\Delta\tau))} \tag{7.8}$$

Степень пространственно-временной (взаимной) когерентности стационарных колебаний в точках S_1 и S_2:

$$\gamma_{12}(\Delta\tau) \equiv |\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau)| \tag{7.9}$$

Примечание. Дополнительная фаза $\psi_{12}(\Delta\tau)$ возникает из-за разницы в начальных фазах колебаний интерферирующих волн $\Delta\varphi_{0_{12}}(t,\Delta\tau)$ в точках S_1 и S_2. Если пространственные точки S_1 и S_2 принадлежат одному фронту волны (а в случае

случайно модулированных волн интерферируют волны, полученные из одного цуга волны – $\Delta\tau < \tau_K = \tau$), то их начальные фазы совпадают $\Delta\varphi_{0_{12}}(t,\Delta t) = \Delta\varphi_0(t,\Delta t) = \varphi_0(t+\Delta t) - \varphi_0(t)$ и $\psi_{12}(\Delta\tau) = \psi(\Delta\tau)$. Если начальные фазы не меняются во времени, то $\psi_{12}(\Delta\tau) = \psi(\Delta\tau) = 0$!

Уравнение двухволновой интерференции принимает вид:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\gamma_{12}(\Delta\tau)\cos\left(\omega_0\Delta\tau + \psi_{12}(\Delta\tau)\right)} \tag{7.10}$$

В соответствии с определением функции видности:

$$V_{12}(\Delta\tau) \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\gamma_{12}(\Delta\tau) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\left|\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau)\right| \tag{7.11}$$

Вещественная функция пространственно-временной корреляции $B_{12}(\Delta\tau)$ в соответствии с уравнением двухволновой интерференции для сулчайных квазигармонических волн – $I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2B_{12}(\Delta\tau)$, равна:

$$B_{12}(\Delta\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)\right) = \sqrt{I_1 I_2}\gamma_{12}(\Delta\tau)\cos\left(\omega_0\Delta\tau + \psi_{12}(\Delta\tau)\right) \tag{7.12}$$

Б. Временные корреляция и когерентность.

Рассмотрим суперпозицию стационарных волн, полученных от одной точки волнового поля:

$$I_{1,2}(t_{1,2}) = \alpha_{1,2}I_0(t_{1,2}), \quad \hat{E}_{1,2}(t_{1,2}) = \sqrt{\alpha_{1,2}}\hat{E}_0(t_{1,2}) \tag{7.13}$$

В этом случае:

$$\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau) = \sqrt{I_1 I_2}\frac{1}{I_0}\left\langle \hat{E}_0(t)\hat{E}_0^*(t+\Delta\tau)\right\rangle = \sqrt{I_1 I_2}\frac{1}{I_0}\hat{\Gamma}(\Delta\tau), \tag{7.14}$$

где $\hat{\Gamma}(\Delta\tau) = \left\langle \hat{E}_0(t)\hat{E}_0{}^*(t+\Delta\tau)\right\rangle = \left\langle A_0(t)A_0^*(t+\Delta\tau)\right\rangle e^{-i\omega_0\Delta\tau}$ – *комплексная функция временной (авто-) корреляции* колебаний поля в данной точке в разные моменты времени.

Комплексная степень временной (авто-) когерентности стационарных колебаний:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) &\equiv \frac{\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)}{2\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{\hat{\Gamma}(\Delta\tau)}{2I_0} \equiv \hat{\gamma}(\Delta\tau) = \\ &= \frac{\left\langle A_0(t)A_0^*(t+\Delta\tau)\right\rangle e^{-i\omega_0\Delta\tau}}{2I_0} = \gamma(\Delta\tau)e^{-i(\omega_0\Delta\tau+\psi(\Delta\tau))},\end{aligned} \tag{7.15}$$

где $\gamma(\Delta\tau) \equiv |\hat{\gamma}(\Delta\tau)| > 0$ – *степень временной (авто-) когерентности стационарных колебаний.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Уравнение двухволновой интерференции в этом случае:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\gamma(\Delta\tau)\cos\left(\omega_0\Delta\tau + \psi(\Delta\tau)\right)} \tag{7.16}$$

Функция видности:

$$V(\Delta\tau) \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_2 I_2}}{I_1 + I_2}\gamma(\Delta\tau) = \frac{2\sqrt{I_2 I_2}}{I_1 + I_2}|\hat{\gamma}(\Delta\tau)| \tag{7.17}$$

Вещественная функция временной корреляции для случайных квазигармонических волн в соответствии с уравнениями двухволновой интерференции будет равна

$$B(\Delta\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\Gamma}(\Delta\tau)\right) = I_0\gamma(\Delta\tau)\cos\left(\omega_0\Delta\tau + \psi(\Delta\tau)\right) \tag{7.18}$$

В. Стационарное, однородное и изотропное световое поле.

Рассмотрим стационарное (во времени), однородное и изотропное (в пространстве) световое поле, когда расположение вторичных источников достаточно будет охарактеризовать только расстоянием между вторичными источниками вдоль фронта волны $d = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. В этом случае получим:

$$\begin{aligned}
&\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau) = \hat{\Gamma}(\Delta\tau, d) = \langle A(t)A^*(t+\Delta\tau, d)\rangle E^{-i\omega_0\Delta\tau} \\
&\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) = \hat{\gamma}(\Delta\tau, d) = \gamma(\Delta\tau, d)\cos\left(\omega_0\Delta\tau + \psi(\Delta\tau, d)\right) \\
&V(\Delta\tau, d) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\gamma(\Delta\tau, d)
\end{aligned} \tag{7.19}$$

При $d = 0$ получим комплексную функцию временной корреляции – $\hat{\Gamma}(\Delta\tau)$ и степень временной когерентности – $\gamma(\Delta\tau)$.

При $\Delta\tau = 0$ получим комплексную функцию пространственной корреляции – $\hat{\Gamma}(d)$ и степень пространственной когерентности – $\gamma(d)$.

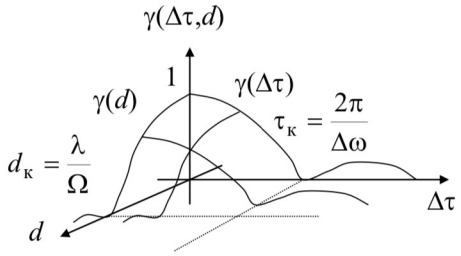


Рис. 7.4. Функция степени когерентности $\gamma(\Delta\tau, d)$.

Для определения степени временной когерентности (Рис. 7.4) надо осуществить двухволновую интерференцию путем *деления амплитуды* волны, то есть взять волны от одной точки волнового поля (при $d = 0$). Далее внести управляемое время

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

задержки $\Delta\tau$, измерить интенсивность интерференционной картины $I(\Delta\tau)$, получить функцию видности $V(\Delta\tau)$ (в частности определить время когерентности τ_K) и степень временной когерентности $\gamma(\Delta\tau)$.

Для определения степени пространственной когерентности (Рис. 7.4) надо осуществить двухволновую интерференцию путем *деления фронта* волны, то есть взять волны с разных точек фронта исходного волнового поля. Далее, управляя расстоянием между этими источниками d, измерить интенсивность интерференционной картины $I(d)$ в ее центре (для $\Delta\tau = 0$), получить функцию видности $V(d)$ (в частности определить радиус когерентности d_K) и степень пространственной когерентности $\gamma(d)$.

§5. Основные схемы двухволновой интерференции.

5.1. Метод деления волнового фронта.

Типичная схема метода деления волнового фронта – схема Юнга (Рис. 6.5).

№	Характеристика	Метод деления	
		волнового фронта	амплитуды
1	**Углы интерференции α и сходимости β**	$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ($d \neq 0$)	$\alpha \cong 0, \beta \cong 0$ ($d \cong 0$)
2	**Локализация интерференционной картины**	Не локализована	Локализована
3	**Образование интерф. картины**	Пучками от одной точки источника	Пучками от всех точек источника
4	**Интенсивность интерференционной картины**	Мала	Велика
5	**Увеличение размера источника** (s, Ω)	Ухудшает видимость, $\Omega < \Omega_к = \frac{\lambda}{d}$, $s < s_{max} = \frac{\lambda}{\alpha}$	Не ухудшает видимость
6	**Увеличение ширины спектра $\Delta\omega$ или $\Delta\tau$** (Δl, m)	Ухудшает видимость, $\Delta\tau < \tau_к \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, $\Delta l < l_к = \tau_к \upsilon$	Ухудшает видимость, $\Delta\tau < \tau_к \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, $\Delta l < l_к = \tau_к \upsilon$

Рис. 7.5. Основные характерные особенности методов реализации двухволновой интерференции.

На (Рис. 7.5) проведено сравнение основных характеристик методов реализации двухволновой интерференции.

На (Рис. 7.6) изображены конктерные реализации метода деления волнового фронта: бизеркало Френеля, бипризма Френеля, билинза Бийе и зеркало Ллойда.

В **бизеркале Френеля** для получения пространственно разделенных световых пучков используется явление отражения света. Два мнимых изображения S_1 и S_2

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

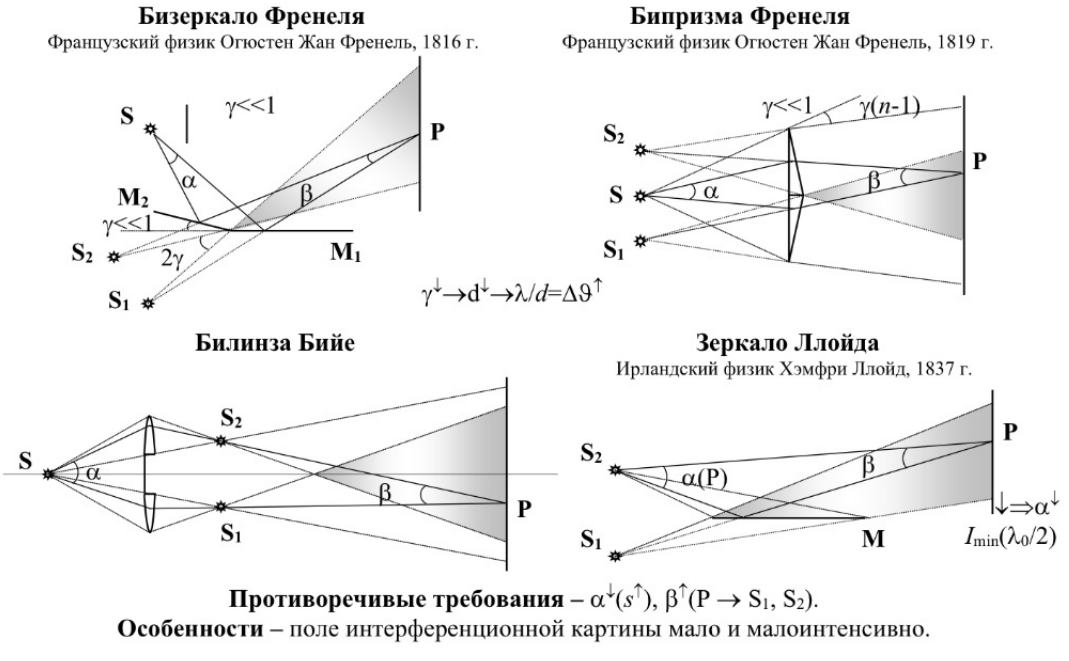


Рис. 7.6. Конктерные реализации метода деления волнового фронта.

щелевого источника S образуются при отражении исходной световой волны от двух плоских зеркал M_1 и M_2, расположенных под малым углом γ друг к другу, и являются мнимыми когерентными источниками. Источник берется в виде узкой щели, параллельной ребру, образованному зеркалами.

Волновой фронт света, идущего от источника S, с помощью этих зеркал разбивается на два. Встречаясь друг с другом, они дают в области взаимного перекрывания интерференционную картину, которая представляет собой прямые поломы, параллельные ребру. Заслонка не позволяет свету от источника прямо попадать на экран. Малое значение угла $\gamma \cong 0^\circ$ обеспечивает небольшое расстояние d между мнимыми источниками, что приводит к увеличению ширины интерференционных полос – $\Delta\theta = \lambda/d$.

Если r – расстояние от источника S до точки соприкосновения зеркал, а L_0 – рассточние от экрана до той же точки и L – расстояние от вторичных источников до экрана, тогда ширина Δx интерференционных полос равна:

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} \cong \frac{L_0 + r}{2\gamma r}\lambda \tag{7.20}$$

Для лучшей освещенности и четкости интерференционной картины необходима *большая апертура сходимости* β интерферирующих лучей (близость точки наблюдения к вторичным источникам) и *малая апертура интерференции* α (выше степень пространственной когерентности). Апертура сходимости не может превышать малый

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

угол 2γ, поэтому для бизеркала Френеля характерна относительно малая освещенность интерференционной картины. Особенностью интерферометра является малое поле интерференции, определяемое углом 2γ.

В **бипризме Френеля** для получения пространственно разделенных световых пучков используется явление преломления света. Две призмы с малыми преломляющими углами склеены друг с другом основаниями. Угол при вершине составной призмы $\sim 180^\circ$, а углы γ при ее основании малы – $\gamma \cong 0^\circ$.

Волновой фронт света, исходящего от источника S в виде параллельной ребру составной призмы светящейся узкой щели, с помощью призм разбивается на две части, и обе волны встречаются за призмами. Оба интерферирующих пучка света исходят из двух мнимых вторичных источников S_1 и S_2. Здесь нет линз и других оптических устройств. Особенность интерферометра – малое поле интерференции, определяемое углом γ.

Билинза Бийе. Выпуклая линза разрезается по диаметру, и половинки слегка разводятся (или сводятся). Прорезь закрывается экраном.

Роль когерентных источников выполняют два действительных изображения реального точечного источника. Такое устройство эквивалентно одной линзе, но с двумя источниками или двум маленьким призмам. Билинза Бийе, так же, как и предыдущие приборы, не обеспечивает достаточной освещенности на экране.

Зеркало Ллойда. Пучок света от точечного источника S_2 падает на плоское зеркало M под углом, близким к 90°. Одно мнимое изображение S_1 образуется при отражении от плоскости зеркала. Интерферируют пучки от источника S_2 и его изображения S_1.

Вследствие потери (приобретения) фазы π при отражении от поверхности зеркала оптическая разность хода в центре экрана становится равной $\lambda_0/2$, что приводит к возникновению минимума интенсивности интерференционной картины в центре экрана. Угол интерференции α уменьшается при приближении к центру экрана. Это позволяет при получении интерференционной картины в точках, близких к центру экрана, использовать протяженный источник, что приводит к заметному увеличению освещенности картины.

5.2. Метод деления амплитуды.

Рассмотрим прозрачную пластинку (Рис. 7.7). Пусть ее тощина d практически постоянна: $\delta d < 10^{-1}10^{-2}\lambda$. Пусть показатель преломления среды, в которой находится пластинка – n_1, показатель преломления вещества, из которого сделана пластина – n_2. На пластину падает волна под углом φ, θ – угол преломления, φ – угол, под

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

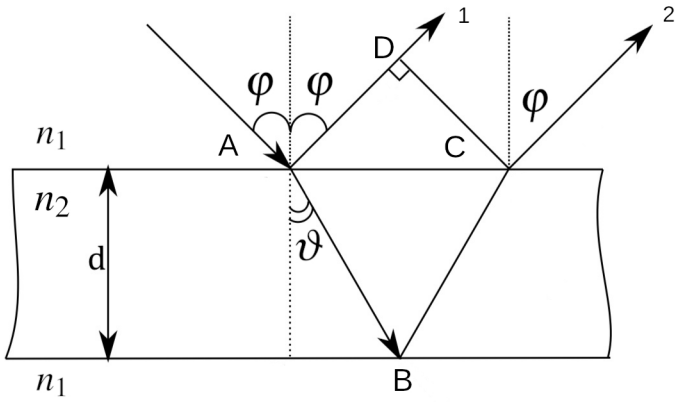


Рис. 7.7. Схема метода деления амплитуды в прозрачной пластинке.

которым выходит из пластины луч, отраженный от ее поверхности. Лучи падающей, преломленной, отраженной волн и нормаль к поверхности в точке падения лежат в одной плоскости.

Напомним закон Снелиуса:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \frac{n_2}{n_1} \tag{7.21}$$

Набег фазы при распространении волны в среде:

$$kl = \frac{\omega}{v}l = \frac{\omega}{c/n}l = k_0(nl), \tag{7.22}$$

где k_0 – волновое число в вакууме, nl – *оптическая длина пути*. $n\Delta l$ – *оптическая разность хода*.

Вычислим оптическую разность хода двух волн:

$$\Delta = 2\frac{dn_2}{\cos\theta} - n_1 \sin\varphi 2dtg\theta = 2n_2\frac{d}{\cos\theta}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\sin\theta\right) \tag{7.23}$$

Получаем:

$$\Delta = 2n_2 d\cos\theta \pm \frac{\lambda_0}{2} \tag{7.24}$$

Слагаемое $\lambda_0/2$ появляется из-за того, что при отражении от более плотной среды появляется дополнительная фаза π. Максимум будет наблюдаться при $\Delta = m\lambda_0$, где λ_0 – длина волны в вакууме.

Для наблюдения интерференции можно установить на пути пучков линзу или оптический прибор. Если $d = const$, то интерференция зависит от угла падения. Такие полосы интерференции называются *полосами равного наклона*.

Если же используется протяженный источник, то лучи будут иметь один угол падения и интенсивность интерференционной картины будет усиливаться.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 8. Многоволновая интерференция

§5. Основные схемы двухволновой интерференции. Продолжение

5.2. Метод деления амплитуды.

Пусть толщина d слабо меняется вдоль пластины. Причем изменения такие, что волны от протяженного источника, падая на поверхность этой пластины, оказываются в тех областях поверхности, которым соответствуют заметно разные толщины. Вариация толщины: $\delta d \gtrsim \lambda$. Интерференционная картина в этом случае будет локализована уже не на бесконечности, а в другой области пространства.

Оптическая разность хода при переходе от одного точечного источника к другому, составляющих протяженный источник:

$$\delta(\Delta) = 2n_2 \left(\cos\vartheta\,\delta d - d\sin\vartheta\,\delta\vartheta\right) \tag{8.1}$$

Чтобы вариация была минимальна, надо рассматривать такую область поверхности, чтобы вариация толщины δd была минимальной. Т.е. надо рассматривать волны, лучи которых попадают в одну и ту же область на поверхности клина (пластины). Чтобы в (8.1) второе слагаемое было минимальным, будем рассматривать лучи, которые падают практически перпендикулярно к поверхности.

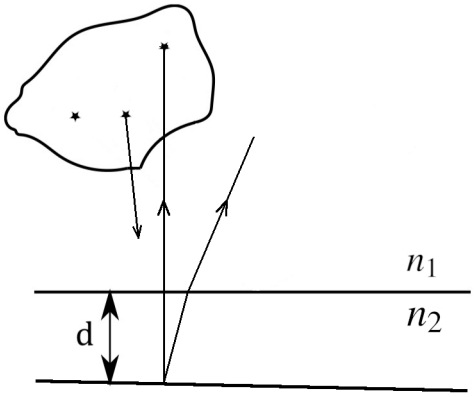


Рис. 8.1. Падение света протяженного источника на пластину со слабо меняющейся толщиной d.

На (Рис. 8.1) изображен случай падения луча перпендикулярно к поверхности пластины с меняющейся толщиной d. Проходя внутрь пластины перпендикулярно первой поверхности, волна отражается от второй поверхности под углом. На выходе

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

из пластины луч преломляется. Преломленный луч и луч, отраженный от первой поверхности, пересекаются в области расположения клина. Если эти две волны с помощью оптической системы собрать в одной области пространства, то в этой области пространства и будет происходить интерференция.

Рассмотрим на (Рис. 8.1) лучи, которые падают от другого точечного источника под малыми углами к нормали к поверхности клина. Легко убедиться, что и в этом случае лучи локализуются в той же области пространства (внутри клина), что и в случае первого источника. Для различных пар лучей вариация толщины δd будет мала. Второе слагаемое в (8.1) также будет мало.

Оптический прибор, регистрирующий интерференционную картину, имеет конечную угловую апертуру. Значит не все лучи будут зарегистрированы оптическим прибором. В этом случае резко уменьшается $\delta\vartheta$ в (8.1). Значит $\delta(\Delta) < \lambda_0/2$, т.е. точечные источники протяженного источника, дающие вклад в интерференционную картину, будут ее усиливать.

5.3. Интерференция при естественных условиях в тонких пленках.

Естесственным светом можно называть свет от источника, линейные поперечные размеры которого $s \sim R$, где R – расстояние от этого источника до той области пространства, где образуются вторичные волны. Еще одна характерная особенность таких источников – немонохроматические волны: $\Delta\omega \sim \omega_0$, где $\Delta\omega$ – характерная ширина спектра, ω_0 – несущая частота спектра.

Условие пространственной когерентности:

$$d < d_K = \frac{\lambda}{\Omega} = \frac{\lambda}{s}R$$

или (8.2)

$$\alpha < \alpha_{max} = \frac{\lambda}{s}$$

Если $s \sim R$, то расстояние между двумя вторичными источниками $d \sim \lambda$. Значит волны нужно получать методом деления амплитуды.

Условие временной когерентности:

$$\Delta\tau < \tau_K \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}T_0$$

или (8.3)

$$\Delta l < l_K \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\lambda_0$$

Получаем, что разность хода $\Delta l \sim \lambda_0$. Из значений длин волн видимого света

следует, что наблюдать интерференцию при естественных условиях можно только в тонких пленках, толщина которых $\lesssim 5$ мкм.

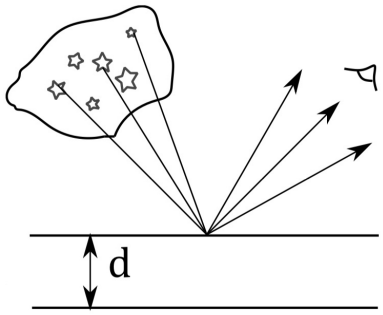


Рис. 8.2. Интерференция в тонкой пленке.

На (Рис. 8.2) изображена тонкая пленка в общем случае переменной толщины d. Оптическая система "глаз" адаптирована в область расположения пленки. Регистрируются только те волны от протяженного источника, падающие на данную область тонкой пленки и отраженные от ее поверхностей, которые попадают в угловую апертуру глаза.

Пусть расстояние от глаза до пленки $L \simeq 4$м, диаметр зрачка $d_{\text{зр}} \simeq 4 \cdot 10^{-3}$м.

Вариация оптической разности хода:

$$\delta(\Delta) = 2n_2 \left(\cos\vartheta \delta d - \sin\vartheta d \delta\vartheta\right) \tag{8.4}$$

В (8.4) первое слагаемое будет равно нулю, т.к. пленка практически не меняет свою толщину. Тогда

$$\begin{aligned} |\delta(\Delta)| = 2n_2 \sin\vartheta d| \underbrace{\delta\vartheta}_{\delta\varphi} | \lesssim 2n_2 d \frac{d_{\text{зр}}}{L} \cong \\ \cong 2 \cdot 1.5 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4} = 1.5 \cdot 10^{-8}\text{м} \ll \frac{\lambda_0}{2} \cong 0.25 \cdot 10^{-6}\text{м} \end{aligned} \tag{8.5}$$

§6. Многоволновая интерференция.

6.1. Уравнения многоволновой интерференции – формулы Эйри.

Рассмотрим многоволновую интерференцию на примере плоскопараллельной пластины (Рис. 8.3). В данном случае будут реализованы полосы равного наклона. Пусть пластина выдерживает свою толщину с точностью до долей длины волны. Рассмотрим плоскую монохроматическую волну $\hat{E}$, падающую на поверхность клина.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

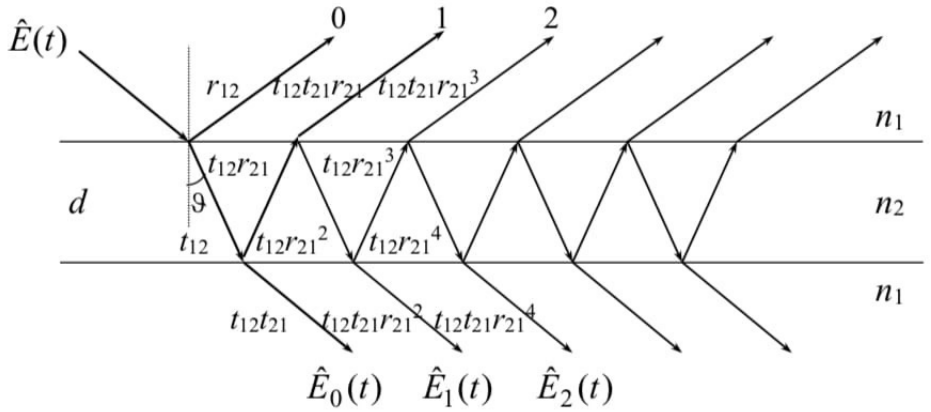


Рис. 8.3. Многоволновая интерференция в плоскопараллельной пластине.

Найдем напряженность электрического поля прошедшей волны. При проникновении волны в пластину до ее выхода из этой пластины возникает набег фазы:

$$\varphi = k_0 n_2 \frac{d}{\cos\vartheta} = \frac{2\pi d}{\lambda\cos\vartheta} \tag{8.6}$$

Введем физические величины: комплексные коэффициенты отражения и пропускания. r_{12} – комплексный коэффициент отражения при попадании волны из среды 1 на границу раздела со средой 2 и отражения в среду 1. Аналогично определяется комплексный коэффициент отражения r_{21} и комплексные коэффициенты пропускания t_{12} и t_{21}.

Кроме того введем коэффициенты отражения и пропускания по энергии:

$$\begin{aligned} R &= |r_{12}|^2 = |r_{21}|^2, \\ T &= |t_{12}t_{21}| \end{aligned} \tag{8.7}$$

Тогда:

$$\hat{E}_0 = \hat{E}t_{12}e^{-i\varphi}t_{21} = \hat{E}e^{-i\varphi}T \tag{8.8}$$

Оптическая разность хода Δ между двумя соседними вышедшими (отраженными от пластинки или прошедшими сквозь пластинку) лучами (волнами):

$$\Delta = 2n_2\cos\vartheta \tag{8.9}$$

и соответствующая ей разность фаз:

$$\Phi = k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}2n_2\cos\vartheta = \frac{4\pi d}{\lambda}\cos\vartheta \tag{8.10}$$

$$\hat{E}_1 = \hat{E}t_{12}e^{-i\varphi}r_{21}r_{21}t_{21}e^{-i\Phi} = \hat{E}_0 R e^{-i\Phi} \tag{8.11}$$

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_1 R e^{-i\Phi} \tag{8.12}$$

Значит

$$\hat{E}_k = \hat{E}_0 R^k e^{-i\Phi} \tag{8.13}$$

Тогда напряженность электрического поля всей прошедшей волны:

$$\hat{E}_{\text{пр}} = \sum_{k=0}^{\infty} = \hat{E}_0 \left(Re^{-i\Phi}\right)^k = \hat{E} T e^{-i\varphi} \frac{1}{1 - Re^{-i\Phi}} \tag{8.14}$$

Интенсивность прошедшей волны будет равна:

$$I_{\text{пр}}(\Phi) = \frac{1}{2}\left\langle \hat{E}_{\text{пр}} \hat{E}^*_{\text{пр}} \right\rangle = I \frac{T^2}{(1 - Re^{-i\Phi})(1 - Re^{i\Phi})} = I \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R\cos\Phi} \tag{8.15}$$

$$\boxed{I_{\text{пр}}(\Phi) = I \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Phi}{2}}} \tag{8.16}$$

Мы получили одну из *формул Эйри* (8.16).

Для отраженных волн, проделав аналогичные вычисления, можно найти вторую формулу Эйри. Приведем ее частный случай, который нам будет интересен. Будем считать, что в пластинке нет поглощения световой волны, т.е $R + T = 1$. Тогда:

$$I_{\text{отр}} + I_{\text{пр}} = I \tag{8.17}$$

$$\boxed{I_{\text{отр}}(\Phi) = I \frac{4R\sin^2\frac{\Phi}{2}}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Phi}{2}}} \tag{8.18}$$

Зависимость интенсивности отраженных или прошедших волн от разности фаз двух параллельно вышедших соседних волн приведена на (Рис. 8.4). m – порядок интерференции:

$$m(\lambda, \vartheta) = \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{4\pi d}{2\pi\lambda}\cos\vartheta = \frac{2d}{\lambda}\cos\vartheta \tag{8.19}$$

На (Рис. 8.5) приведена зависимость интенсивности прошедших волн $I_{\text{пр}}$ от разности фаз Φ двух параллельно вышедших соседних волн при различных значениях коэффициента отражения R. Видно, что ширина светлой интерференционной полосы δ прошедших волн уменьшается с ростом R при неизменном расстоянии между интерференционными полосами.

6.2. Функция видности, ширина и резкость интерференционных полос.

Функция видности:

$$\begin{aligned} V_{\text{пр}}(R) &= \frac{2R}{1+R^2}, \\ V_{\text{отр}}(R) &= 1 \end{aligned} \tag{8.20}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

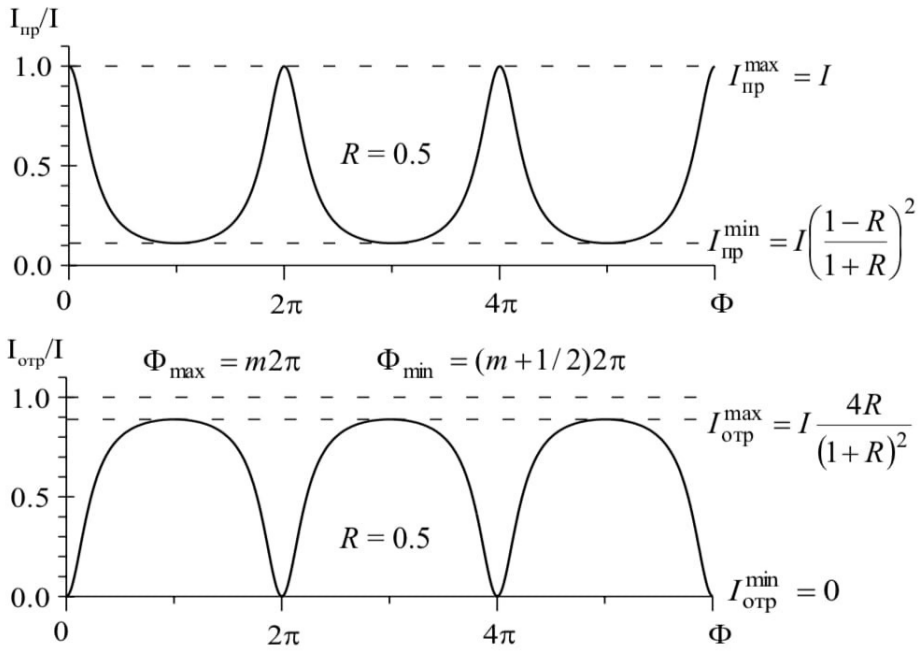


Рис. 8.4. Сверху: зависимость интенсивности прошедших волн $I_{\text{пр}}$ от разности фаз Φ двух параллельно вышедших соседних волн;
Снизу: зависимость интенсивности прошедших волн $I_{\text{отр}}$ от разности фаз Φ двух параллельно вышедших соседних волн.

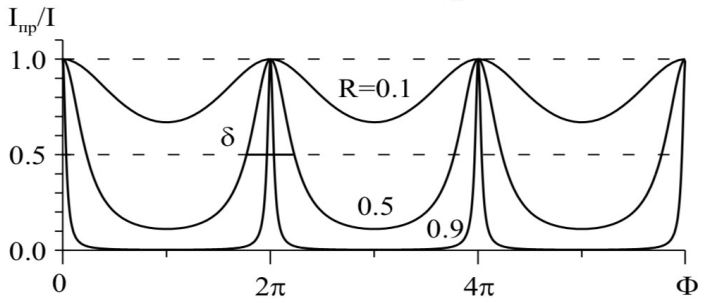


Рис. 8.5. Зависимость интенсивности прошедших волн $I_{\text{пр}}$ от разности фаз Φ двух параллельно вышедших соседних волн при различных значениях коэффициента отражения R.

В экспериментах для многоволновой интерференции обычно используются коэффициенты отражения $R \in [0.9, 0.98]$. Из (Рис. 8.6) видно, что в этом диапазоне значений R видность интерференционной картины практически одинакова для прошедших и отраженных волн.

Ширина интерференционных полос – ширина на половине высоты, т.е.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

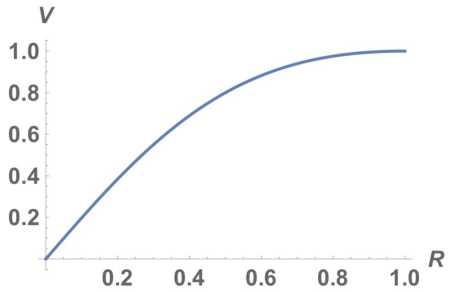


Рис. 8.6. Зависимость функции видности от коэффициента отражения по энергии R.

$I_{\text{пр}}\,(m2\pi \pm \delta_{\text{пр}}/2) = I/2$:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{пр}}(R) &= 2\frac{1-R}{\sqrt{R}}, \\ \delta_{\text{отр}}(R) &= 2\pi - \delta_{\text{пр}}(R) \end{aligned} \tag{8.21}$$

При $R \to 1$ $\delta_{\text{пр}} \to 0$, $\delta_{\text{отр}} \to 2\pi$. Для отраженных волн будут наблюдаться широкие светлые полосы с узкими темными полосами. Для прошедших волн – яркие узкие полосы на темном фоне. Поэтому в многоволновых спектрометрах используются прошедшие волны.

Резкость интерференционных полос:

$$\begin{aligned} F_{\text{пр}}(R) &\equiv \frac{2\pi}{\delta_{\text{пр}}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}, \\ F_{\text{отр}}(R) &\equiv \frac{2\pi}{\delta_{\text{отр}}} = \frac{2\pi}{2\pi - \delta_{\text{пр}}} \end{aligned} \tag{8.22}$$

При $R \to 1$ $F_{\text{пр}} \to \infty$, $F_{\text{отр}} \to 1$.

Численная оценка резкости: $F_{\text{пр}}(R = 0.9) \cong 30$, $F_{\text{пр}}(R = 0.98) \cong 156$.

6.3. Интерференционный фильтр.

Понятно, что при использовании пластинки в случае многоволновой интерференции интервал частот должен удовлетворять условию:

$$|\Phi - \Phi_{max}| \leqslant \frac{\delta_{\text{пр}}}{2} \sim \delta_{\text{пр}} \tag{8.23}$$

$$\Phi = \frac{4\pi d}{\lambda}\cos\theta, \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} \tag{8.24}$$

Тогда:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{max}} \simeq \frac{\Delta\omega}{\omega_{max}} \simeq \frac{\Delta\Phi}{\Phi_{max}} = \frac{\delta_{\text{пр}}}{2\pi m} = \frac{1}{mF_{\text{пр}}} \tag{8.25}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Значит инетрвал длин волн (частот), который пропускается данным фильтром:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &\cong \frac{1}{mF_{\text{пр}}}\lambda_{max}, \\ \Delta\omega &= \frac{1}{mF_{\text{пр}}}\omega_{max} \end{aligned} \tag{8.26}$$

Из условия наблюдения максимума интерференционной картины

$$\Phi = \frac{4\pi d}{\lambda}\cos\theta = m2\pi \tag{8.27}$$

понятно, что, при изменении угла между интерференционным фильтром и направлением пучка, будет меняться характерная частота пропускания.

6.4. Реализации многоволновой интерференции.

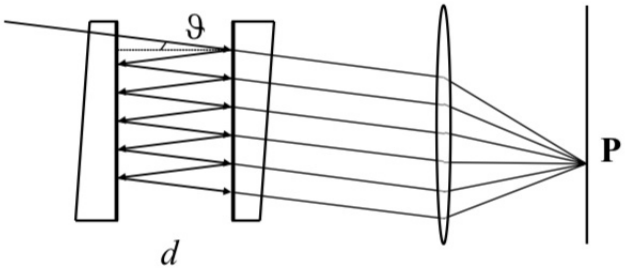


Рис. 8.7. Интерферометр Фабри-Перо.

На (Рис. 8.7) изображена схема **интерферометра Фабри-Перо**: стеклянные или кварцевые пластины, покрытые полупрозрачной пленкой с большим R.
$d = 0.1 - 100$ см ($\delta d \leqslant 10^{-2}\lambda \sim 50\,\mathring{A}$), $N \sim 30$, $R \cong 0.90 - 0.98$, $m = \frac{2d}{\lambda}\cos\vartheta \cong 10^4 - 10^6$.

При $d = const$ – *эталон Фабри-Перо.*

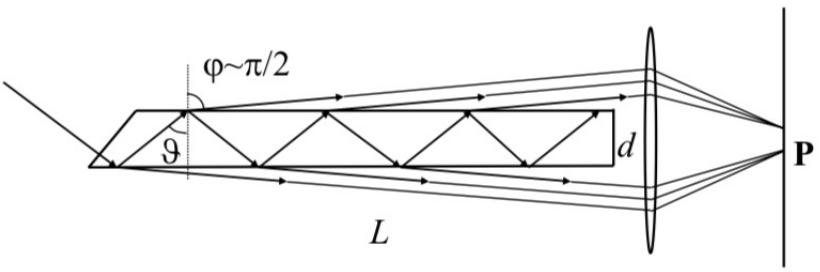


Рис. 8.8. Пластинка Люммера-Герке.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На (Рис. 8.8) изображена схема **пластинки Люммера-Герке**: стеклянная или кварцевая пластинка. $d = 0.3 - 1$ см, $L = 10 - 30$см, $\varphi \sim \pi/2$, при $\vartheta \leqslant \vartheta_0 = arcsin\frac{n_1}{n_2}$. $R \cong 0.90 - 0.98$, $N = 10 - 15$, $m = \frac{2d}{\lambda}\cos\vartheta \cong 10^4 - 10^5$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9. Дифракция света. Метод зон Френеля. Спираль Френеля

Опр. Дифракция – это явление отклонения от законов геометрической оптики при распространении света в среде, обусловленное волновой природой света.

§1. Дифракционный интеграл Френеля.

1.1. Принцип Гюйгенса-Френеля и дифракционный интеграл.

Принцип Гюйгенса-Френеля: любая точка волнового фронта является источником вторичных когерентных сферических волн. Результат интерференции волн – световое поле, которое образуется при наличии исходного фронта волны.

Воспользуемся этим принципом в обобщенном варианте, который дал Д.Рэлей.

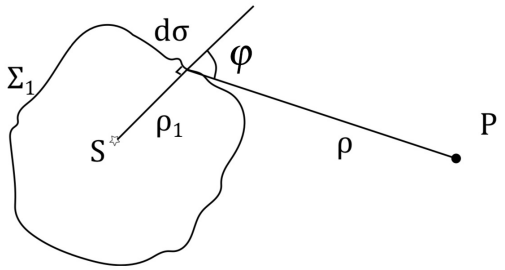


Рис. 9.1. Иллюстрация к принципу Гюйгенса-Френеля.

Рассмотрим точечный монохроматический источник S (Рис. 9.1). В соответствии с Рэлеем, можно заменить источник на замкнутую, в общем случае произвольную, светящуюся поверхность, которая полностью охватывает этот источник. Предполагается, что любой физически бесконечно малый элемент этой поверхности является источником вторичных сферических когерентных волн. Поле, которое создается в области наблюдения, – поле, создаваемое всей совокупностью светящихся (точечных) элементов с учетом фазы колебаний на светящейся поверхности, площади этой поверхности и направления на точку наблюдения по отношению к направлению исходного пучка света.

Запишем выражение для напряженность электрического поля в точке наблюдения P. Известно, что это поле создается точечным монохроматическим источником S:

$$E(P) = a\frac{1}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0), \tag{9.1}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где kr – набег фазы. В комплексной форме данное выражение задается как:

$$\hat{E}(P) = \frac{a}{r} e^{i\varphi_0} e^{-ikr} e^{i\omega t} = A(P) e^{i\omega t}, \tag{9.2}$$

где комплексная амплитуда $A(P)$:

$$A(P) = a e^{-\varphi_0} \frac{e^{-ikr}}{r} = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \tag{9.3}$$

В случае монохроматических волн однозначно достаточно интересоваться комплексной амплитудой, а не напряженностью электрического поля.

Комплексная амплитуда на светящейся поверхности Σ (Рис. 9.1):

$$A_\Sigma = A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}, \tag{9.4}$$

где ρ_1 – расстояние от точечного источника до элемента поверхности, площадь которого $\mathrm{d}\sigma$ – физически бесконечно малая величина. На (Рис. 9.1) угол φ между исходным пучком и дифрагирующим пучком – *угол дифракции.*

Комплексная амплитуда в точке наблюдения P в соответствие с принципом Гюйгенса-Френеля:

$$\boxed{A(P) = \iint\limits_\Sigma A_\Sigma \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\varphi) \mathrm{d}\sigma} \tag{9.5}$$

Френель предположил, что элемент $\mathrm{d}\sigma$ излучает особенно сильно в направлении, перпендикулярном элементу поверхности, и комплексная амплитуда уменьшается при увеличении угла дифракции. Из этого предположения в (9.5) появляется *коэффициент наклона* $K(\varphi)$.

Выражение (9.5) называется *дифракционным интегралом Френеля.*

Сравнивая выражения (9.3) и (9.5), можно сделать вывод о размерности коэффициента наклона: $[K(\varphi)] = \text{м}^{-1}$.

Предположения Френеля: $K(\varphi = 0) = K_{max}$, при росте φ K уменьшается, $K(\varphi \geqslant \pi/2) = 0$. Т.е. физически бесконечно малый элемент сильно излучает в направлении, перпендикулярном поверхности элемента, и совсем не излучает при угле $\pi/2$ и, тем более, назад.

Дифракционный интеграл может быть записан в следующем виде:

$$\boxed{A(\varphi) = \iint\limits_\Sigma A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\varphi) \mathrm{d}\sigma} \tag{9.6}$$

1) Пусть имеется не один, а несколько источников, которые находятся внутри светящейся поверхности. Тогда, в соответствии с принципом суперпозиции:

$$A_\Sigma K(\varphi) \to \sum_j A_{j\Sigma} K(\varphi_j) \tag{9.7}$$

2) Пусть в качестве светящейся поверхности используется фронт волны. В этом случае $A_\Sigma = const$ – постоянная величина по отношению к точке на светящейся поверхности. Значит интеграл Френеля приобретает вид:

$$A(\varphi) = A_\Sigma \iint\limits_\Sigma \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\varphi) \mathrm{d}\sigma \tag{9.8}$$

1.2. Свойства дифракционного интеграла Френеля.

1) Если на (Рис. 9.1) поменять местами точки расположения источника S и наблюдения P, видно, что $\rho \leftrightarrow \rho_1$, угол дифракции будет тем же самым. При этом интеграл Френеля не изменится. Значит можно сформулировать **теорему обратимости Гельмгольца**.

$$A_S(P) = A_P(S) \tag{9.9}$$

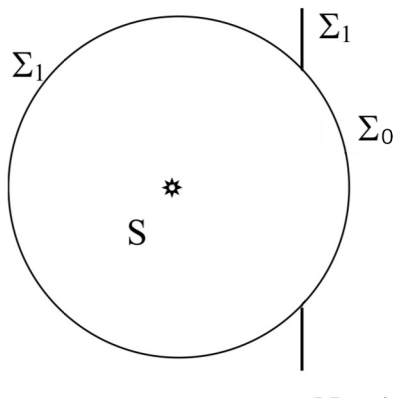


Рис. 9.2. Иллюстрация к принципу дополнительности Бабине.

2) Пусть светящая поверхность, охватывающая источник S, каким-то образом прикрыта непрозрачным экраном (Рис. 9.2). Поверхность непрозрачного экрана – Σ_1, часть светящейся поверхности Σ, которая не прикрыта экраном, – Σ_0.

Гипотеза Френеля: если размеры прозрачных и непрозрачных частей экрана гораздо больше длины волны, то:

$$\begin{cases} A_{\Sigma_0} = A_\Sigma, \\ A_{\Sigma_1} = 0 \end{cases} \tag{9.10}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Данные предположения (9.10) достаточно хорошо действуют, если линейные размеры всех частей экрана гораздо больше длины волны.

Воспользуемся гипотезой Френеля и сформулируем **принцип дополнительности Бабине**.

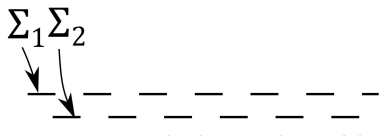


Рис. 9.3. Иллюстрация к принципу дополнительности Бабине.

Рассмотрим два экрана (Рис. 9.3). Первый экран состоит из прозрачных и непрозрачных поверхностей, второй – дополнительный к первому, т.е. его прозрачные части полностью совпадают с непрозрачными частями первого экрана. Понятно, что если эти два экрана стоят по отдельности на пути распространения пучка, то:

$$\int_{\Sigma} = \int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2} \tag{9.11}$$

Значит

$$A_1(P) + A_2(P) = A(P) \tag{9.12}$$

Если мы знаем комплексную амплитуду в точке наблюдения одного из экранов, то можно сказать, что мы будем видеть в случае, если вместо него будет стоять другой, дополнительный ему, экран.

§2. Метод зон Френеля.

Далеко не всегда интегралы Френеля легко берутся, так как неизвестна точная зависимость коэффициента наклона от угла дифракции. Один из способов хорошо оценить дифракционный интеграл Френеля – **метод зон Френеля**. В основе этого метода лежат утверждения:

1) В качестве светящеся поверхности возьмем фазовую поверхность, т.е. $A_{\Sigma_0} = const$ и не зависит от положения точечного источника вторичных волн на светящейся поверхности.

2) *Зона Френеля* – такая область светящейся (свободной) поверхности, постоянная разность расстояний от границ которой до точки наблюдения равна $\lambda/2$ и есть

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

величина постоянная, т.е.

$$\Delta\rho_m = \lambda/2 = const(m), \tag{9.13}$$

где m – номер зоны.

На светящеся поверхности Σ выбираются зоны Френеля.

3) В соответствие с принципом суперпозиции:

$$A(P) = \sum_m A_m(\sigma_m, \varphi_m, \rho_m) = \sum_m (-1)^{m-1} |A_m(\sigma_m, \varphi_m, \rho_m)|, \tag{9.14}$$

где σ_m – площадь m-ой зоны

2.1. Радиус и площадь зон Френеля.

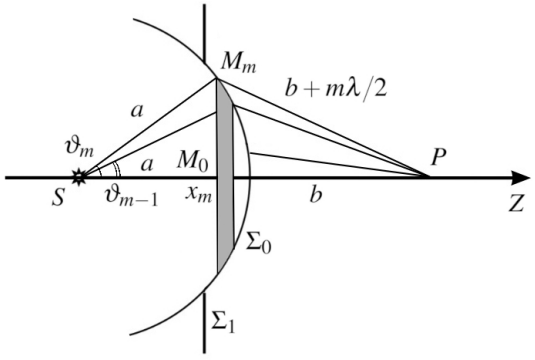


Рис. 9.4. Зоны Френеля.

Рассмотрим точечный источник (Рис. 9.4). В соответствие с методом зон Френеля выбираем светящуюся повехность в виде сферы. Σ_1 – непрозрачный экран, имеющий форму отверстия, Σ_0 – светящаяся свободная поверхность. Будем считать, что точка наблюдения P лежит на прямой, соединяющей источник S и центр отверстия.

На (Рис. 9.4) заштихованная область – m-я зона Френеля. Она представляет собой так называемый сферический пояс на светящейся поверхности.

Радиус зоны Френеля – расстояние от точки M_m до основания высоты из нее на прямую, соединяющую источник S и центр отверстия.

$$R_m^2 = a^2 - (a - x_m)^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x_m)^2 \tag{9.15}$$

$$R_m^2 = a^2 - a^2 + 2ax_m - x_m^2 = b^2 + mb\lambda + m^2\frac{\lambda^2}{4} - b^2 - 2bx_m - x_m^2 \tag{9.16}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предположим, что $bm\lambda \gg m^2\lambda^2/4$. Следовательно

$$m \ll \frac{4b}{\lambda} \simeq \frac{4 \cdot 4}{0.5 \cdot 10^{-6}} = 32 \cdot 10^6 \tag{9.17}$$

Значит в (9.16) можно пренебречь слагаемым $m^2\lambda^2/4$. Тогда получаем:

$$\boxed{x_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}} \simeq \frac{m \cdot 4 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8} = 0.125 \cdot 10^{-6} \cdot m \tag{9.18}$$

Найдем радиус зоны Френеля:

$$R_m^2 = 2ax_m - x_m^2 = 2ax_m = 2a\frac{mb\lambda}{2(a+b)} \tag{9.19}$$

Так как $x_m \ll 2a$, то слагаемым x_m при преобразованиях можно было пренебречь. Окончательно получаем:

$$\boxed{R_m = \sqrt{m\lambda\frac{ab}{a+b}}} \tag{9.20}$$

Так как зона Френеля представляет собой сферический пояс, то для расчета ее площади воспользуемся сферической системой координат.

Площадь физически бесконечно малого элемента поверхности в сверической системе координат:

$$\sigma = a^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta, \tag{9.21}$$

где ϑ – полярный угол (между осью z и направлением на этот элемент), φ – азимутальный угол.

Посчитаем площадь m-ой зоны:

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m}\int_0^{2\pi} a^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta = a^2 2\pi\left(-\cos\vartheta_m + \cos\vartheta_{m-1}\right) = \\ &= 2\pi a\left(-(a-x_m) + (a-x_{m-1})\right) = 2\pi a(x_m - x_{m-1}) = 2\pi a\frac{b\lambda}{2(a+b)}\end{aligned} \tag{9.22}$$

Получаем:

$$\sigma_m = \frac{\pi ab\lambda}{a+b} \tag{9.23}$$

Видно, что σ_m является величиной постоянной по отношению к номеру зоны, т.е. площади всех зон Френеля одинаковы.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2.2. Число Френеля. Условия подобия дифракции и перехода от волновой к геометрической оптике.

Понятно, что в конкретном случае есть максимальный радиус зоны Френеля. Это значит, что открыто конечное число зон Френеля.

Число Френеля N – число открытых (задействованных) зон Френеля.

Воспользуемся выражением для радиуса зоны Френеля:

$$\frac{R_m^2}{m} = \lambda \frac{ab}{a+b} = \frac{r_0^2}{N} \tag{9.24}$$

В последнем равенстве использован факт того, что при максимальном числе открытых зон Френеля $m = N$ радиус зоны Френеля совпадает с радиусом отверстия. Получаем:

$$\boxed{N = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \tag{9.25}$$

Обратим внимание, что радиус зоны Френеля (9.20) зависит от расстояний a и b: при уменьшении b радиус R_m уменьшается, при увеличении b R_m увеличивается. То же самое происходит при уменьшении или увеличении a.

Комплексная амплитуда в точке наблюдения P при использовании метода зон Френеля:

$$A(P) = \sum_m (-1)^{m-1} |A_m(\sigma_m, \varphi_m, \rho_m)| = |A_1| - |A_2| + |A_3| - |A_4| + |A_5| - \dots \tag{9.26}$$

Из (9.26) видно, что, если N – нечетное, то будет наблюдаться максимум комплексной амплитуды, а значит и интенсивности. Если же N – четное, то будет минимум. Т.е. будет наблюдаться отклонение от законов геометрической оптики – явление дифракции.

$$A_m \xrightarrow{m\to\infty} 0 \tag{9.27}$$

Введем величину *приведенное расстояние* $l = \frac{ab}{a+b}$. Если $a \to \infty$, то $l \to b$.

Вклады зон Френеля в комплексную амплитуду в увеличением m убывают монотонно: $|A_{m+1}| < |A_m|$. Тогда:

$$\begin{aligned} A(P) &= |A_1| - \frac{|A_1| + |A_3|}{2} + |A_3| - \frac{|A_3| + |A_5|}{2} + |A_5| - \dots = \\ &= \frac{|A_1|}{2} + \begin{cases} +\frac{|A_N|}{2}, & \text{если } N \text{ – нечетное,} \\ -\frac{|A_{N+1}|}{2}, & \text{если } N \text{ – четное,} \end{cases} \end{aligned} \tag{9.28}$$

Если $N \gg 1$, то вкладами $|A_N|$ и $|A_{N+1}|$ можно пренебречь:

$$A(P) \cong \frac{|A_1|}{2} \tag{9.29}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Значит интенсивность:

$$\boxed{I(P) = \frac{1}{4} I_1} \tag{9.30}$$

Если $N \gg 1$ при изменении расстояния b практически не меняется интенсивность в точке наблюдения P, т.е. волна ведет себя как в случае законов геометрической оптики. $N \gg 1$ – условие наблюдения геометрической оптики.

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \gg 1 \tag{9.31}$$

Значит для перехода к геометрической оптике можно увеличивать радиус отверстия r_0, уменьшать длину волны λ или уменьшать a или b.

$N = const$ – условие подобия дифракции (условие подобия дифракционной картины). Это означает, что при переходе от одной ситуации к другой, и в обеих ситуациях N одинаковое, то, если в одном случае максимум, то и во втором будет максимум.

§3. Метод векторных диаграмм.

В общем случае комплексная амплитуда в точке наблюдения:

$$A(P) = \sum_m A_m \tag{9.32}$$

Сложение комплексных амплитуд – довольно непростая процедура из-за различия в фазах. Чтобы упростить операции линейной комбинации над комплексными процедурами поступают следующим образом.

Пусть $A \to \vec{A}$ (однозначно): $|\vec{A}| = |A|$.

Т.к. $A = A_0 \frac{-ikr}{r} = a_0 \frac{-i(kr-\varphi_0)}{r}$, то понятно, что $|\vec{A}| = \frac{A_0}{r}$. При этом $-\varphi = kr - \varphi_0$ – угол между $\vec{A}$ и выбранным направлением в пространстве.

Тогда произвольной линейной комбинации комплексных амплитуд можно поставить в соответствие такую же линейную комбинацию векторов, которые соответствуют данным комплексным амплитудам:

$$\sum_j \alpha_j A_j \to \sum_j \alpha_j \vec{A}_j \tag{9.33}$$

3.1. Спираль Френеля.

Элементарная подзона Френеля – область светящейся поверхности, принадлежащая данной зоне, постоянные расстояния от границ которой до точки наблюдения равны $\frac{\lambda/2}{n}$, при этом $n \gg 1$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

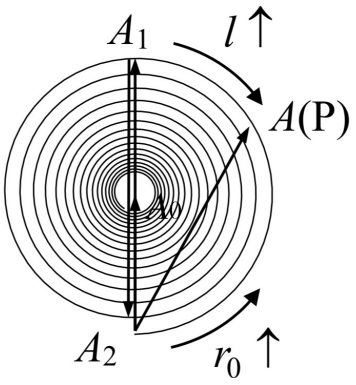


Рис. 9.5. Спираль Френеля.

Тогда каждая зона Френеля разбивается на большое количество элементарных подзон. Сложим вклады в точке наблюдения P от всех подзон Френеля.

Первая и последняя подзоны первой зоны Френеля отличаются набегом фазы, равным $\lambda/2$, и разностью фаз, равной π. Если вклад от первой подзоны будет направлен слева направо (Рис. 9.5), то вклад от последней – справа налево. Тогда, выстроив множество слабо меняющихся векторов (площади подзон одинаковы, расстояние до точки наблюдения слабо меняется, как и угол дифракции) один за другим, мы получим немного деформированную полуокружность. Тогда $\vec{A}_1$ – вклад от первой зоны Френеля.

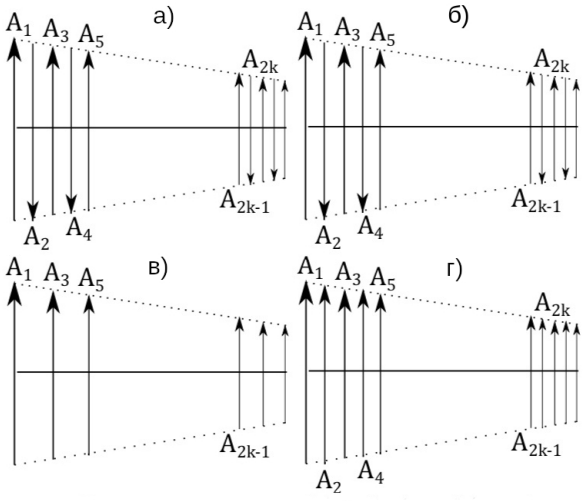


Рис. 9.6. Принцип работы амплитудной (а,в) и фазовой (б,г) зонной пластинки.

Аналогичное построение сделаем для второй зоны Френеля. В этом случае A_2 будет немного меньше по модулю, чем A_1. Повторив данные рассуждения для всех

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

зон, мы получим *спираль Френеля* (Рис. 9.5), которая с хорошей степенью точности сходится в центре.

Если спираль Френеля сходится в центре, значит $N \to \infty$, т.е. экран отсутствует.

3.2. Зонные пластинки.

Изобразим в векторной форме вклады от всех зон Френеля (на (Рис. 9.6) *рисунок а*). Если поставить прозрачный экран, на котором каждую четную зону сделать непрозрачной, то получится картина как на (Рис. 9.6) *рисунок в*. Тогда комплексная амплитуда резко возрастет. Такой оптический прибор – **амплитудная зонная пластинка**.

Если же на каждую четную зону воздействовать таким образом, что будет добавляться набег фазы π, то картина будет как на (Рис. 9.6) *рисунок г*. В этом случае комплексная амплитуда еще больше возрастет. Оптический прибор, действующий таким образом – **фазовая зонная пластинка**.

Лекция 10. Простейшие дифракционные задачи. Ближняя и дальняя зоны дифракции

§3. Метод векторных диаграмм. Продолжение.

Изобразим в векторной форме вклады от всех зон Френеля (на (Рис. 9.6) *рисунок а*). Если поставить прозрачный экран, на котором каждую четную зону сделать непрозрачной, то получится картина как на (Рис. 9.6) *рисунок в*. Тогда комплексная амплитуда резко возрастет. Такой оптический прибор – **амплитудная зонная пластинка**.

Тогда комплексная амплитуда в случае нечетных зон:

$$A_{\text{нч}} = \sum_{k=0}^{N} |A_{2k+1}| = \frac{N}{2}\frac{|A_1| + |A_N|}{2} \tag{10.1}$$

Если число задействованных зон Френеля $N \gg 1$, то вклад от последней зоны Френеля A_N близок к 0, и получаем:

$$A_{\text{нч}} \cong \frac{N}{2}\frac{|A_1|}{2} = \frac{N}{2}|A_0| \tag{10.2}$$

Отсюда ясно, что интенсивность в точки наблюдения:

$$I_{\text{нч}} \cong \frac{N^2}{4} I_0 \simeq I_{\text{ч}} \tag{10.3}$$

В случае зонной пластинки с закрытыми нечетными зонами вместо A_1 в (10.2) появится A_2, которая с хорошей степенью точности совпадает с вкладом от первой зоны Френеля. Отсюда следует последнее равенство в (10.3).

Если же на каждую четную зону воздействовать таким образом, что будет добавляться набег фазы π, то картина будет как на (Рис. 9.6) *рисунок г*. В этом случае комплексная амплитуда еще больше возрастет. Оптический прибор, действующий таким образом, – **фазовая зонная пластинка**.

Комплексная амплитуда в случае фазовой зонной пластинки:

$$A_{\text{ф}} = N|A_0| \tag{10.4}$$

Интенсивность в этом случае:

$$I_{\text{ф}} = N^2 I_0 \tag{10.5}$$

Напомним, что радиус m-ой зоны Френеля R_m равен:

$$R_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}} \tag{10.6}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Условие зонной пластинки:

$$\frac{r_0^2}{N} = \frac{R_m^2}{m} = \lambda \frac{ab}{a+b} \tag{10.7}$$

Выразим отсюда соотношение a и b.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\lambda N}{r_0^2} = \frac{1}{r_0^2/(\lambda N)} = \frac{1}{f_0} \tag{10.8}$$

Из (10.8) можно сделать вывод, что зонная пластинка на расстояниях a и b ведет себя как линза с фокусным расстоянием f_0.

$$f_0 = \frac{r_0^2}{\lambda N} \tag{10.9}$$

Пусть на зонную пластинку падает плоскопараллельный пучок. Значит $a \to \infty$. В соответствие с рассмотрением выше на расстоянии f_0 все пучки света сойдутся в одной точке.

Интенсивность света в точке на расстоянии f_0 от фазовой зонной пластинки будет равна

$$I_{f_0} = N^2 I_0, \tag{10.10}$$

где I_0 – интенсивность падающего света.

Предположим, что расстояние от точки наблюдения до зонной пластинки уменьшили в нечетное число раз.

$$R_m = \sqrt{m\lambda b} = \sqrt{m\lambda f_0} = \sqrt{m(2k+1)\lambda \frac{f_0}{2k+1}} = \sqrt{m_k \lambda f_k} \tag{10.11}$$

В (10.11) мы учли, что $a \to \infty$, $b \to f_0$.

При уменьшении f_0 в $(2k+1)$ раз радиусы зон Френеля, соответствующие новому положению точки наблюдения, уменьшатся в $\sqrt{2k+1}$ раз. Вопрос: сколько новых зон Френеля будет соответствовать одной m-ой зоне Френеля пластинки? Из (10.11) видно, что $(2k+1)$. Если в каждой зоне Френеля зонной пластинки расположено $(2k+1)$ новых зон, то из них $2k$ зон свои вклады компенсируют. Условие наблюдения локального максимума остается. f_k можно интерпретировать как новое фокусное расстояние.

Интенсивность в точке на расстоянии f_k будет равна

$$I_{f_k} = \frac{I_{f_0}}{(2k+1)^2} \tag{10.12}$$

Зонная пластинка ведет себя как линза и имеет бесконечно много фокусных расстояний, но с различной интенсивностью воспроизведения исходно падающего на эту пластинку пучка.

3.3. Линза как оптимальная фазовая зонная пластинка.

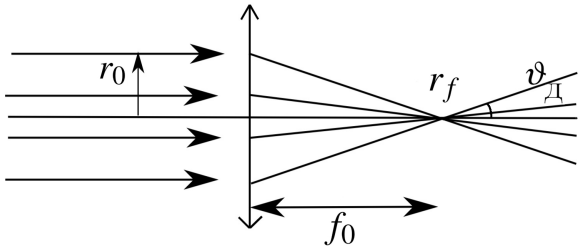


Рис. 10.1. Собирающая линза.

Собирающая линза (Рис. 10.1) изготавливается из прозрачного материала, ее толщина в различных местах разная: максимальна в области оптической оси. Набег фазы пучков, которые проходят не по центру линзы, уменьшается с удалением от оптической оси.

Линза устроена таким образом, что, смещаясь от одной элементарной зоны к другой, уменьшается набег фазы, значит на фазовой диаграмме (Рис. 9.5) вектор должен развернуться по часовой стрелке. Причем так, что каждая из следующих подзон становится параллельной направлению первой центральной подзоны Френеля. Значит длина такого вклада от первой зоны Френеля будет равна $\frac{\pi}{2}|A_1|$. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что вклады от всех зон на фазовой диаграмме будут направлены вдоль той же прямой и будут равны $\frac{\pi}{2}|A_m|$. Тогда интенсивность линзы в фокусе:

$$\boxed{I_f = \frac{\pi^2}{4} N^2 I_0} \tag{10.13}$$

Пусть на линзу падает широкий параллельный пучок света, то есть плоская волна (Рис. 10.1). r_0 – радиус пучка. Как мы знаем, все пучки после прохождения линзы сойдутся в одной точке на расстоянии f_0. Т.к. плотность энергии электромагнитной волны не может быть бесконечной, понятно, что пучок в области расположения фокальной плоскости имеет конечные размеры r_f. Найдем эти размеры.

Пусть падающий пучок однороден в пространстве. Если I_0 – плотность потока энергии, усредненная за время разрешения прибора, то $\pi r_0^2 I_0$ – поток энергии, т.е. энергия, проходящая через сечение исходного пучка за единицу времени. Вся энергия, пройдя через линзу, оказывается в фокальной плоскости:

$$\pi r_0^2 I_0 = I_f \pi r_f^2 \tag{10.14}$$

Отсюда можно найти радиус пучка в фокальной плоскости:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$r_f = r_0\sqrt{\frac{I_0}{I_f}} = r_0\sqrt{\frac{I_0}{\frac{\pi^2}{4}N^2 I_0}} = r_0\frac{4}{\pi N} \tag{10.15}$$

Используя условие зонной пластинки (10.7), находим:

$$r_f = r_0\frac{2\lambda f}{\pi r_0^2} = \frac{2\lambda f}{\pi r_0} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{f}{d_0}\lambda, \tag{10.16}$$

где d_0 – диаметр пучка.

Пусть $d_0 \to d$, где d – диаметр самой линзы. Понятно, что $d \geqslant d_0$. Тогда

$$r_f = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{f}{d_0}\lambda \geqslant \frac{4}{\pi}\frac{f}{d}\lambda \gtrsim \lambda \tag{10.17}$$

Степень локализации пучка такая, что радиус пучка не может быть меньше длины волны.

Оценим величину угла $\vartheta_д$, который задает степень расхождения исходного светового пучка, прошедшего через линзу.

$$\vartheta_д \simeq \frac{r_0}{f_0} = \frac{2\lambda}{\pi r_f} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{d_f} \sim \frac{\lambda}{d_f} \tag{10.18}$$

§4. Простейшие дифракционные задачи.

4.1. Дифракция на круглом отверстии.

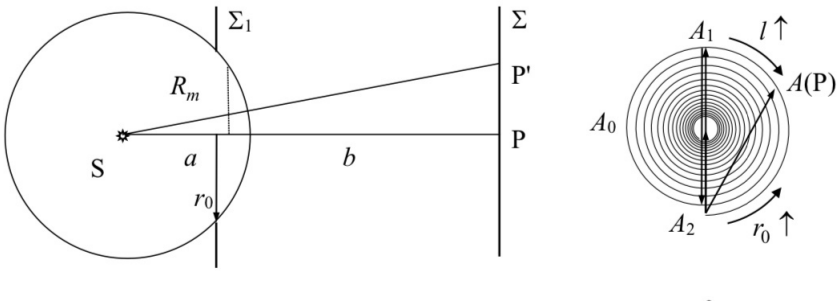


Рис. 10.2. Дифракция на круглом отверстии.

На (Рис. 10.2) представлена схема дифракции на круглом отверстии. r_0 – радиус отверстия в непрозрачном экране Σ_1. На (Рис. 10.2) же справа представлена векторная диаграмма для светящейся поверхности, которая является фронтом волны точечного источника.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

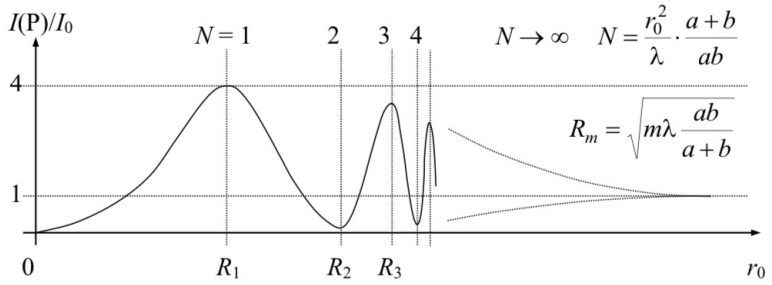


Рис. 10.3. Зависимость интенсивности света в точке наблюдения от радиуса отверстия при дифракции на круглом отверстии.

Если радиус отверстия r_0 совпадает с размерами первой зоны Френеля R_1, то в точке наблюдения будет в 4 раза выше, чем в отсутствие экрана (Рис. 10.3). При $r_0 = R_2$ значение интенсивности будет близко к 0. Таким образом на (Рис. 10.3) показана зависимость интенсивности света в точке наблюдения от радиуса отверстия.

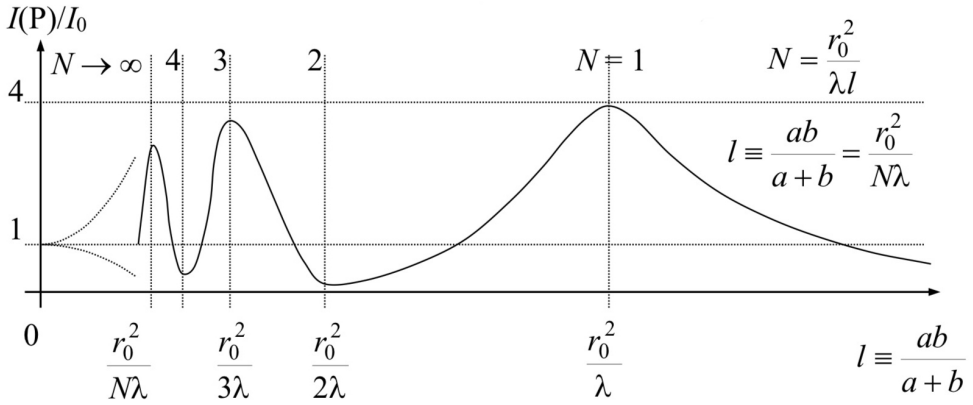


Рис. 10.4. Зависимость интенсивности света в точке наблюдения от приведенного расстояния.

Аналогично можно построить зависимость интенсивности света в точке наблюдения от расстояния от точки наблюдения до экрана b. В общем случае, когда исходный пучок не параллельный, b – конечная величина, можно ввести приведенное расстояние $l = \frac{ab}{a+b}$. При $a \to \infty$ $l \to b$ и имеет смсыл расстояния от точки наблюдения до экрана. Тогда на (Рис. 10.4) показана зависимость интенсивности в точке наблюдения от приведенного расстояния.

4.2. Дифракция на круглом экране. Пятно Пуассона.

На (Рис. 10.5) представлена схема дифракции на круглом экране. В данном случае ситуация обратная предыдущему случаю. r_0 – радиус непрозрачного экрана Σ_1.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

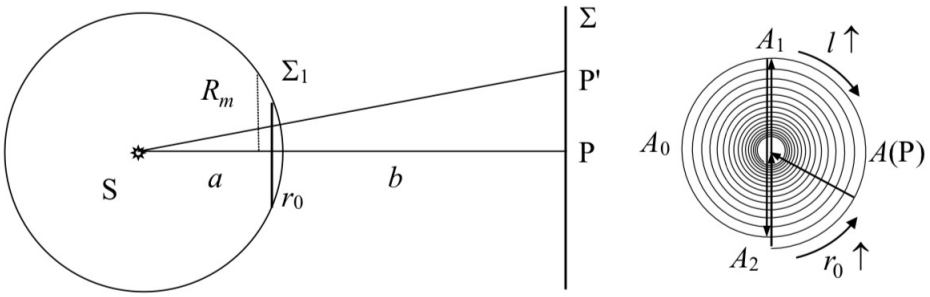


Рис. 10.5. Дифракция на круглом экране.

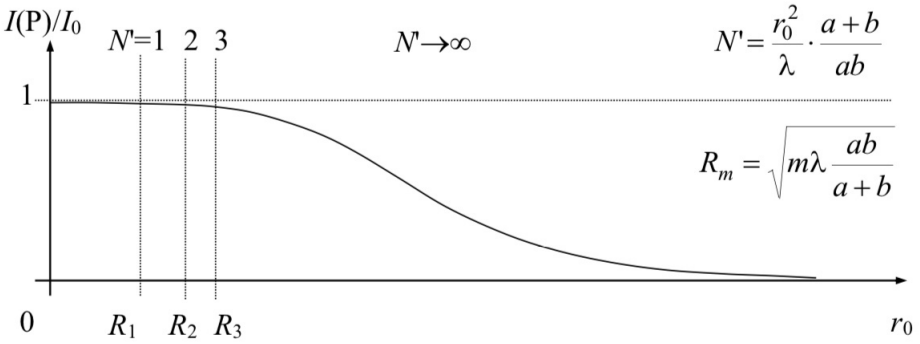


Рис. 10.6. Зависимость интенсивности света в точке наблюдения от радиуса экрана при дифракции на круглом экране.

Из (Рис. 10.6) представлена зависимость интенсивности света в точке наблюдения от радиуса экрана. При $r_0 = 0$, т.е. при полном отсутствии экрана, интенсивность максимальная и равна I_0. При увеличении радиуса экрана на векторной диаграмме (Рис. 10.5) мы получим изображение комплексной амплитуды светового возбуждения в точке наблюдения в виде вектора, конец которого находится в центре спирали Френеля, а основание будет двигаться по спирали. То есть интенсивность будет постепенно уменьшаться с ростом r_0 (Рис. 10.6).

N' на рисунках – число закрытых зон Френеля.

На (Рис. 10.7) приведена зависимость интенсивности света в точке наблюдения от приведенного расстояния l. Пусть радиус экрана совпадает с радиусом первой зоны Френеля. Тогда на векторной диаграмме комплексная амплитуда $A(N')$ будет выглядеть как вектор, направленный вниз. Если несколько сдвинуться с оси, то приоткроется часть первой зоны Френеля. Тогда от первой зоны на векторной диаграмме появится небольшой вклад в виде вектора, направленного вверх ΔA_1. Но при этом диск закроет небольшую часть второй зоны Френеля, что даст дополнительный вклад ΔA_2. Значит амплитуда $A(P)$ уменьшается. Тогда уменьшается и интенсивность. Значит в

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

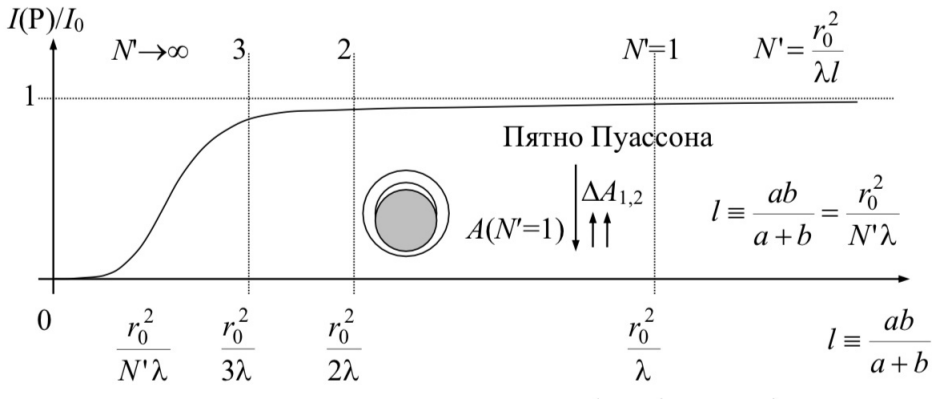


Рис. 10.7. Зависимость интенсивности света в точке наблюдения от приведенного расстояния при дифракции на круглом экране.

центре экрана было светлое пятно – пятно Пуассона.

4.3. Дифракция на крае полубесконечного экрана и щели. Спираль Корню.

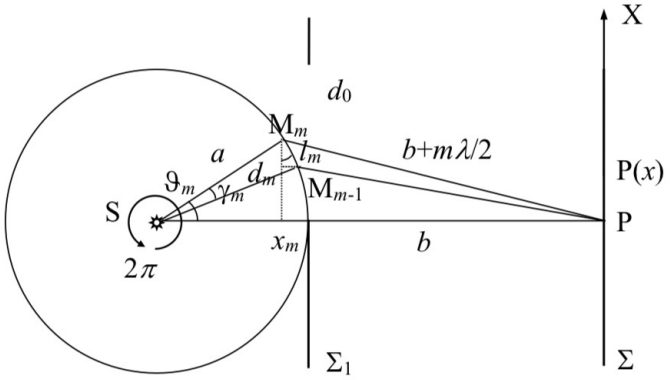


Рис. 10.8. Дифракция на крае полубесконечного экрана.

На (Рис. 10.8) изображен фронт волны от светящегося источника S, непрозрачный экран Σ_1. Предлагается разбить светящуюся поверхность на зоны, не совпадающие с зонами Френеля, так называемые лунки (сферические двуугольники). Расстояние от самой дальней от P точки лунки M_m до оптической оси – d_m.

Аналогичные со случаем зон Френеля рассуждения приводят к геометрическому соотношению:

$$d_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a+b}} \tag{10.19}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В данном случае нельзя сказать, что от различных частей одной зоны фаза светового возбуждения будет одинакова, как это было в случае зон Френеля. Она будет существенно меняться.

При $a \sim b \sim 4$м, $\lambda \sim 0.5 \cdot 10^{-6}$м: $d_m \sim \sqrt{m} \cdot 10^{-3}$м, $x_m \sim m \cdot 0.125 \cdot 10^{-6}$м.

$$\cos\vartheta_m = \frac{a - x_m}{a} \cong \frac{d_m - d_{m-1}}{l_m} \cong 1 \tag{10.20}$$

Найдем площадь m-ой лунки:

$$\sigma_m = \frac{4\pi a^2}{2\pi}\gamma_m = 2a^2\frac{l_m}{a} = 2al_m \cong 2a(d_m - d_{m-1}) \sim (\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) = \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}} \tag{10.21}$$

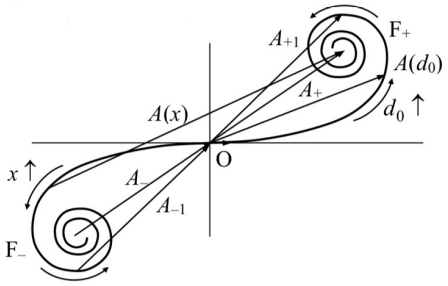


Рис. 10.9. Спираль Корню.

То есть площадь лунки зависит от ее номера: чем больше m, тем меньше площадь σ_m, особенно при малых значениях m. Воспользуемся данной зависимостью при построении векторной диаграммы, спирали Корню (клотоида) (Рис. 10.9). Разобьем лунки на элементарные лунки. Разность хода от краев, которые удалены от точки наблюдения, будет не $\lambda/2$, а величина существенно меньшая. Тогда векторы от элементарных зон, которые в случае подзон Френеля были практически одинаковой длины, поворачивались на один угол и замыкались в полуокружность, в данном случае окажутся совсем другими. Их длины уменьшаются с увеличением номера – получится вытянутая спираль. На (Рис. 10.9) O – центр, F_+, F_- – полюса клотоиды.

§5. Ближняя и дальняя зоны дифракции.

5.1. Дифракционная длина пучка.

Рассмотрим снова дифракцию на круглом отверстии. Пусть на (Рис. 10.2) $a \to \infty$. Тогда $l \to b$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Опр. Дифракционная длина пучка b_∂ – расстояние от сечения, в котором пучок квазиплоский и при котором сечение совпадает с первой зоной Френеля.

$$b_\text{д} = \frac{r_0^2}{\lambda} \tag{10.22}$$

Зоны дифракции:

1) При $b \ll b_\text{д}$ число Френеля $N \to \infty$ и с хорошей степенью точности распространение пучка, прошедшего отверстие, описывается законами геометрической оптики. Данная область – *область ближней дифракции* или геометрической оптики.

2) При $b \gg b_\text{д}$ – *область дальней дифракции* или дифракции Фраунгофера.

3) При $b \sim b_\text{д}$ – *дифракционная область Френеля.*

Оценим дифракционную длину пучка в случае лазерного излучения, если $d_0 = 5 \cdot 10^{-3}$м, $\lambda \cong 0.5 \cdot 10^{-6}$м:

$$b_\text{д} = \frac{25 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}} = 12.5\text{м} \tag{10.23}$$

5.2. Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне.

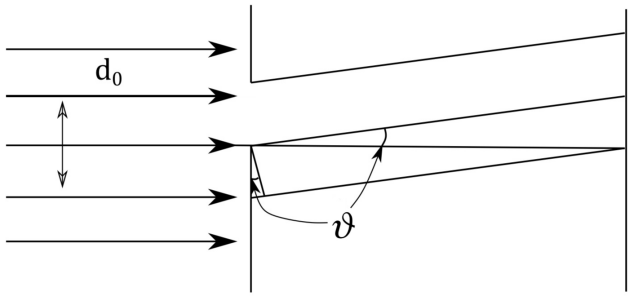


Рис. 10.10. Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне.

Рассмотрим непрозрачный экран с отверстием, который освещается пучком света (квазиплоские волны) (Рис. 10.10). На малых расстояниях от экрана до $\sim b_\text{д}$ пучок практически не меняет свое сечение и соответствует форме отверстия. Рассмотрим в дальней зоне крайние пучки в некотором направлении, которое задается углом ϑ. Тогда разность хода:

$$\Delta l = d_0 \sin\vartheta \cong d_0 \vartheta \tag{10.24}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В каком случае все пучки, исходящие из светящейся щели, погасят друг друга в этом направлении? Разобьем все светящиеся вторичные источники по парам, расстояния в которых между пучками $d_0/2$,а разность хода $\lambda/2$. Тогда пара пучков будет гасить друг друга.

Тогда разность хода для крайних источников: $\Delta l = \lambda$. Тогда направление, при котором $\Delta l = d_0 \vartheta_д = \lambda$, называется *углом дифракционной расходимости* $\vartheta_д$.

$$\vartheta_д \cong \frac{\lambda}{d_0} \tag{10.25}$$

На больших расстояниях b пучок локализован в углах $\pm\vartheta_д$.

5.3. Фокусировка света как дифракционное явление.

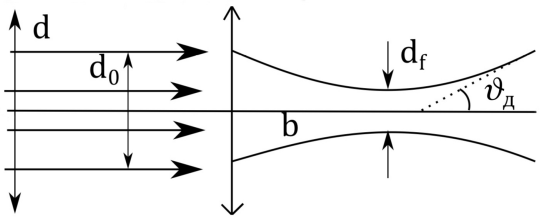


Рис. 10.11. Фокусировка света с помощью собирающей линзы.

Пусть на собирающую линзу падает параллельный пучок света (Рис. 10.11). Все пучки, параллельные оптической оси, прошедшие через линзу, собираются в фокусе. Ранее мы выяснили, что в фокальной плоскости пучок обладает конечной шириной d_f. Из соображений симметрии можно сказать, что это есть сечение, в котором пучок, прошедший через линзу, является квазиплоским. Если не брать во внимание, как пучок оказался в фокальной плоскости, то далее его можно рассматривать как ограниченный в пространстве пучок, для которого наблюдается дифракционное расширение. Тогда профиль для крайних пучков представлен на (Рис. 10.11).

Исходя из рассмотрения, сделанного выше, можно записать для угла дифракционного расширения:

$$\vartheta_д \cong \frac{\lambda}{d_f} = \frac{r_0}{f} \tag{10.26}$$

Отсюда диаметр пучка в фокальной плоскоти:

$$d_f = \frac{f}{r_0}\lambda = \frac{f}{d_0}2\lambda = \frac{2\lambda}{d_0/f} \tag{10.27}$$

Диаметр линзы $d \geqslant d_0$. Тогда:

$$d_f = \frac{2\lambda}{d_0/f} \geqslant \frac{2\lambda}{d/f}, \tag{10.28}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где величина d/f – *относительное отверстие линзы*. Опыт показывает, что $d/f < 1$.

Учитывая сказанное в предыдущем пункте, можно сказать, что есть некоторая область пространства длиной l_f вблизи фокальной плоскости, в которой диаметр пучка d_f практически не меняется. Данная область называется *фокальной перетяжкой*.

$$l_f \cong 2b_{\text{д}} = 2\frac{r_f^2}{\lambda} = \frac{d_f^2}{2\lambda} = \frac{(2\lambda)^2 f^2}{2\lambda d_0^2} = \frac{2\lambda}{(d_0/f)^2} \geqslant \frac{2\lambda}{(d/f)^2} \tag{10.29}$$

Оценим параметры области пространства, в которой пучок можно считать квазиплоским:

$$d_f = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3}} = 0.2\text{мм} \quad l_f = \frac{10^{-6} \cdot 1}{25 \cdot 10^{-6}} = 4\text{см} \tag{10.30}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11. Теория дифракции Кирхгофа. Приближения Френеля и Фраунгофера

§6. Понятие о теории дифракции Кирхгофа.

6.1. Недостатки положений принципа Гюйгенса-Френеля.

Напомним дифракционный интеграл Френеля:

$$A(P) = \iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\varphi) \mathrm{d}\sigma \tag{11.1}$$

Недостатки:

1) Недостаточная обоснованность появления коэффициента наклона $K(\varphi)$, из предположений Френеля.

   Напомним, что $K(\varphi = 0) = K_{max}$, $K(\varphi \geqslant \pi/2) = 0$, при возрастании φ коэффициент K уменьшается. Также получили, что единицы измерения коэффициента наклона: $[K] = \text{м}^{-1}$.

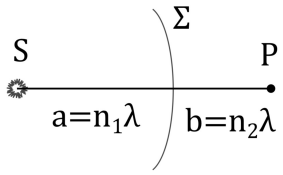


Рис. 11.1. Точечный источник света.

2) Рассмотрим точечный источник света S (Рис. 11.1), светящуюся поверхность Σ на расстоянии $a = n_1\lambda$ от источника. Пусть точка наблюдения P находится на расстоянии $b = n_2\lambda$ от центра этой светящейся повехности. Комплексная амплитуда для сферических волн:

   $$A(r) = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{11.2}$$

   где A_0 – амплитуда колебаний, содержащая в себе начальную фазу колебаний.

   Найдем комплексную амплитуду в точке на расстоянии a от источника:

   $$A(a) = \frac{A_0}{a} \tag{11.3}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

То есть колебания на расстоянии a от источника происходят в фазе с колебаниями в самом источнике.

Найдем комплексную амплитуду в точке наблюдения P на расстоянии $a+b$ от источника:

$$A(a+b) = \frac{A_0}{a+b} \tag{11.4}$$

Т.е. колебания в точке наблюдения P, на светящейся повехности Σ и в источнике S происходят в фазе в данном случае.

Если выполнить построение на спирали Френеля, то комплексная амплитуда $A(P)$ в данном случае – вектор, направленный вертикально вверх. A_Σ же будет изображен как вектор, касательный к основанию спирали, направленный вдоль выбранной оси. Таким образом между $A(P)$ и A_Σ в любом случае получаем разность фаз $\pi/2$.

6.2. Уравнение Гельмгольца и интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа.

Рассмотрим решение волнового уравнения для однородной изотропной среды

$$\frac{\partial^2 \hat{E}(t,\vec{r})}{\partial t^2} = v^2 \Delta \hat{E}(t,\vec{r}) \tag{11.5}$$

в виде монохроматической (гармонической) волны в комплексной форме:

$$\hat{E}(t,\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{i\omega t}, \tag{11.6}$$

где $A(\vec{r})$ – комплексная амплитуда. Подставим данное выражение (11.6) в волновое уравнение (11.5) и получим:

$$-\omega^2 A(\vec{r}) e^{i\omega t} = v^2 \Delta A(\vec{r}) e^{i\omega t} \tag{11.7}$$

$$K = \frac{\omega}{v} \tag{11.8}$$

Поделим обе части выражения (11.7) на ω^2:

$$\boxed{(\Delta + K^2) A(\vec{r}) = 0} \tag{11.9}$$

Мы получили **уравнение Гельмгольца** (11.9). Другими словами, если некоторая функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то она может представлять собой комплексную амплитуду световой гармонической волны.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

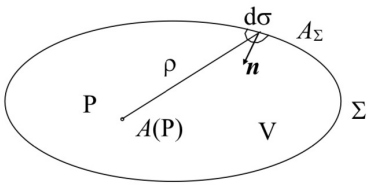


Рис. 11.2. Иллюстрация к теореме Гельмгольца-Кирхгофа.

Пусть задана произвольная замкнутая поверхность Σ и произвольная точка P внутри нее. На (Рис. 11.2) ρ – расстояние от точки наблюдения до физически бесконечно малого элемента $d\sigma$ поверхности Σ, $\vec{n}$ – внутренняя по отношению к замкнутой поверхности Σ нормаль к элементу $d\sigma$.

Если решение уравнения Гельмгольца (комплексная амплитуда $A(\vec{r})$ гармонической волны) имеет *непрерывные частные производные первого и второго порядков* на заданной поверхности Σ и внутри объема V, ограниченного этой поверхностью, то имеет место **интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа**:

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left(A_\Sigma \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) \Big|_\Sigma - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_\Sigma \right) d\sigma \tag{11.10}$$

В этой теореме решение уравнения Гельмгольца (комплексная амплитуда волнового поля) в произвольной точке поля P выражается через значение комплексной амплитуды поля и ее первых производных во всех точках произвольной замкнутой поверхности Σ, окружающей точку P.

6.3. Дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа.

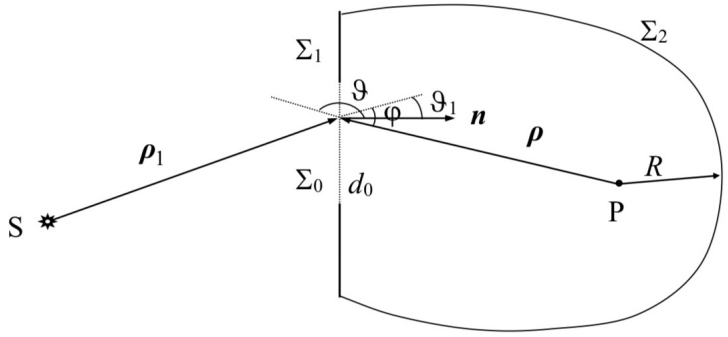


Рис. 11.3. Иллюстрация к дифракционному интегралу Френеля-Кирхгофа.

Пусть монохроматическая волна, идущая от точечного источника S (Рис. 11.3) сквозь отверстие Σ_0 в непрозрачном экране Σ_1 создает световое возмущение в точке

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

наблюдения P. Проведем вокруг этой точки P замкнутую поверхность $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2$.

Допустим, что линейные размеры d_0 отверстия Σ_0 велики по сравнению с длиной волны света ($d_0 \gg \lambda$). Тогда разумно принять **граничные условия Кирхгофа** (приближение Кирхгофа):

1) на Σ_0 как в отсутствие экрана

$$A_{\Sigma_0} = \frac{A_0}{\rho_1} e^{-ik\rho_1}, \quad \left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} = \left.\frac{\partial A_{\Sigma_0}}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} \tag{11.11}$$

2) в области расположения экрана Σ_1

$$A_{\Sigma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{\Sigma_1} = 0 \tag{11.12}$$

3) на поверхности Σ_2

$$A_{\Sigma_2} \to 0, \quad \left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{\Sigma_2} \to 0 \tag{11.13}$$

При бесконечном удалении точек поверхности Σ_2 от точки наблюдения P; их вклад убывает в силу того, что световое поле существовало в этой области пространства не всегда и имеет конечную скорость распространения.

Пусть справедливо **оптическое приближение** – расстояния ρ и ρ_1 гораздо больше длины волны:

$$\rho, \rho_1 \gg \lambda > \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} \tag{11.14}$$

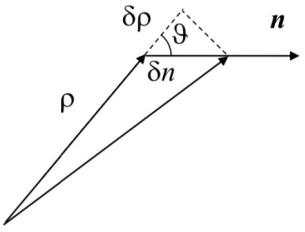


Рис. 11.4. Иллюстрация к вычислению производных по нормалям.

Тогда, вычисляя производные по нормалям (Рис. 11.4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = \cos\left(\vec{n}\hat{\vec{\rho}}\right), \tag{11.15}$$

получим:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right) = \frac{-ike^{-ik\rho}\rho - e^{-ik\rho}}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial n} \cong -ik\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\cos\vartheta, \tag{11.16}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} = \frac{\partial A_\Sigma}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(A_0\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\right) \cong -A_0 ik\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\cos\vartheta_1, \tag{11.17}$$

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma_0}\left(A_0\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\left(-ik\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\cos\vartheta\right) + \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}A_0 ik\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\cos\vartheta_1\right)\mathrm{d}\sigma = \\ &= \iint\limits_{\Sigma_0} A_0\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\frac{i}{2\lambda}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)\mathrm{d}\sigma; \end{aligned} \tag{11.18}$$

$$A(P) = \iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\frac{i}{2\lambda}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)\mathrm{d}\sigma, \tag{11.19}$$

где A_{Σ_0} – комплексная амплитуда поля реального точечного источника S (если учесть принцип суперпозиции, то и совокупности *реальных точечных источников, для которых* $\cos\vartheta_1 \sim const$) на поверхности Σ_0 вторичных источников. Эта формула называется **дифракционным интегралом (формулой) Френеля-Кирхгофа**. Если сравнить его с дифракционным интегралом Френеля, то коэффициент наклона равен:

$$K(\vartheta_1, \vartheta) = \frac{i}{2\lambda}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta) \tag{11.20}$$

В частном случае волнового фронта, выбранного в качестве светящейся поверхности Σ_0: $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta = \pi - \varphi$, $\cos\vartheta_1 = 1$, $\cos\vartheta = -\cos\varphi$ и

$$K(\varphi) = \frac{i}{2\lambda}(1 + \cos\varphi) \tag{11.21}$$

В подынтегральном выражении дифракционного интеграла Френеля-Кирхгофа коэффициент наклона $K(\vartheta_1, \vartheta)$ является *медленно меняющейся функцией* от положения точки на светящейся поверхности Σ_0 по сравнению с быстро осциллирующим экспоненциальным множителем. Медленно меняющийся множитель не оказывает практического влияния на картину интерференции, не меняет ее видимость, а лишь *слабо влияет на среднюю освещенность*. В этом приближении можно записать:

$$A(P) = \overline{K(\vartheta_1, \vartheta)}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\mathrm{d}\sigma \tag{11.22}$$

В большинстве практически важных случаев углы ϑ_1 и ϑ меняются в небольших пределах вблизи своих средних зачений $\overline{\vartheta_1} = 0$ и $\overline{\vartheta} = \pi$ (**параксиальные пучки**). В этом приближении

$$\overline{K(\vartheta_1, \vartheta)} \cong \frac{i}{\lambda} \text{ и } \boxed{A(P) = \frac{i}{\lambda}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\mathrm{d}\sigma} \tag{11.23}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание. Для дифракционного интеграла Френеля-Кирхгофа справедливы те же, что и для дифракционного интеграла Френеля, теорема обратимости (взаимности) Гельмгольца и принцип дополнительности Бабине.

6.4. Приближения Френеля и Фраунгофера.

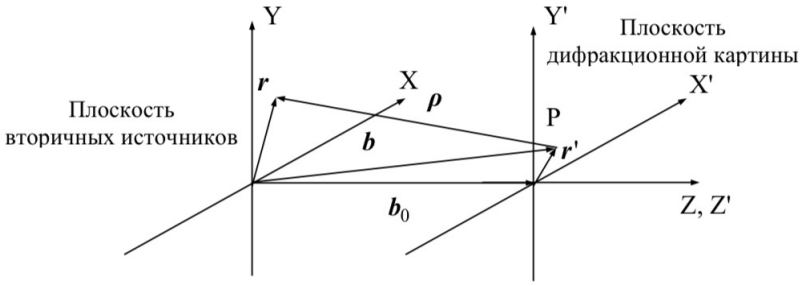


Рис. 11.5. Схема наблюдения дифракционной картины.

Изобразим схему наблюдения дифракционной картины (Рис. 11.5). Будем рассматривать светящуюся поверхность в виде плоскости, перпендикулярной оптической оси – *плоскость вторичных источников*, в которой введем систему координат (X,Y). Пусть экран для наблюдения дифракционной картины будет плоским – *плоскость дифракционной картины*, в которой также введем систему координат (X',Y').

Вектором $\vec{r}$ задается положение светящейся точки на плоскости вторичных источников. Точка наблюдения P на плоскости дифракционной картины – $\vec{r}'$.

1) **Приближение Френеля** – дифракция приосевых (приаксиальных) пучков света на расстояниях порядка дифракционной длины пучка $b_{\text{д}} \simeq r_0^2/\lambda$:

$$b \geqslant b_0 \sim b_{\text{д}} = \frac{r_0^2}{\lambda} = r_0\frac{r_0}{\lambda} \gg r_0 \tag{11.24}$$

Условие приосевых пучков:

$$b_0 \gg |\vec{r} - \vec{r}'| \tag{11.25}$$

Условия (11.24) и (11.25) определяют вид дифракционного интеграла Френеля-Кирхгофа в приближении Френеля.

$$\vec{\rho} = -\vec{b}_0 + (\vec{r} - \vec{r}'); \quad \rho^2 = b_0^2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2 \tag{11.26}$$

Используя (11.25), получаем:

$$\rho = \sqrt{b_0^2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2} \cong b_0 + \frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{2b_0} \tag{11.27}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Получившееся выражение (11.27) подставим в формулу для интеграла Френеля-Кирхгофа:

$$\boxed{A(P) \cong \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb_0}}{b_0}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{2b_0}}\,\mathrm{d}\sigma} \tag{11.28}$$

(11.27) – интеграл Кирхгофа в случае приближения Френеля или в т.н. зоне дифракции Френеля.

Если учесть граничные условия (11.12), (11.13), то интегрирование можно развернуть по всей плоскости:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb_0}}{b_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A_{\Sigma_0}(x,y) e^{-ik\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2b_0}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.29}$$

2) **Приближение Фраунгофера** – приближение, при котором рассматривается дифракционная картина в дальней зоне дифракции (зоне дифракции Фраунгофера). Или еще в данном случае говорят о дифракции в параллельных пучках света.

$$b \geqslant b_0 \gg b_{\text{Д}} \simeq \frac{r_0^2}{\lambda} = r_0\frac{r_0}{\lambda} \gg r_0 \tag{11.30}$$

При этом не нарушается условие приосевых (приаксиальных) пучков:

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \ll b_0 \tag{11.31}$$

Из (Рис. 11.5) видно, что $\vec{\rho}$ можно представить в виде:

$$\vec{\rho} = -\vec{b}+\vec{r}; \quad \rho^2 = b^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{r} + r^2 \tag{11.32}$$

$$\rho \cong -\frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{b} + \frac{r^2}{2b} \tag{11.33}$$

Подставим в выражение для экспоненты:

$$e^{-ik\rho} = e^{-ikb}e^{ik\frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{b}}e^{-ik\frac{r^2}{2b}} \tag{11.34}$$

Преобразуем выражение, стоящее в показателе третьей экспоненты:

$$k\frac{r^2}{2b} = \pi\frac{r^2}{\lambda b} \gg 1 \tag{11.35}$$

Тогда 3-я экспонента в (11.34) будет ~ 1. Получаем:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik\frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{b}}\,\mathrm{d}\sigma \tag{11.36}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Преобразуем выражение (11.36). Для этого проведем преобразование скалярного произведения векторов:

$$\vec{b}\cdot\vec{r} = (\vec{b}_0 + \vec{r}')\cdot\vec{r} = \vec{r}\cdot\vec{r}' \tag{11.37}$$

Тогда

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{b}}\mathrm{d}\sigma = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0}(x,y)e^{ik\frac{xx'+yy'}{b}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.38}$$

Т.к. $\vec{k} = k\frac{\vec{b}}{b}$, то возможна еще одна запись выражения для комплексной амплитуды в данном случае:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\sigma \tag{11.39}$$

Перейдем к декартовой системе координат и интегрированию по всей плоскости:

$$\boxed{A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x,y)e^{i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{11.40}$$

6.5. Дифракция в дальней зоне как пространственное преобразование Фурье.

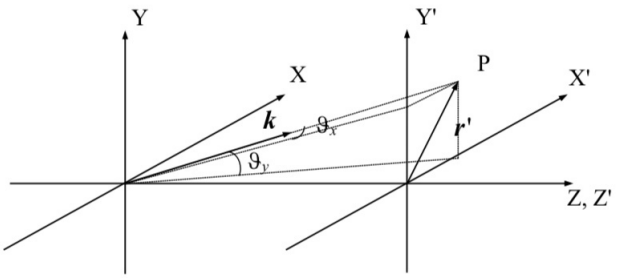


Рис. 11.6. Схема наблюдения дифракционной картины.

Изобразим схему дифракционной картины (Рис. 11.6), включающую в себя плоскость вторичных источников с декартовой системой координат (X,Y) и плоскость наблюдения дифракционной картины с системой координат (X',Y'). Рассмотрим точку наблюдения P, положение которой в системе координат (X',Y',Z') задается вектором $\vec{r}'$, а в системе координат, связанной с плоскотью вторичных источников, вектором $\vec{b}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На расстояниях, гораздо больших дифракционной длины пучка, вектор $\vec{k}$ направлен параллельно вектору $\vec{b}$.

Вектор $\vec{b}$ задается углами ϑ_x и ϑ_y. При этом $k_{x,y} = k\sin\vartheta_{x,y}$.

Пусть имеется некоторая функция времени $f(t)$. Тогда можно с помощью преобразования Фурье найти ее Фурье-образ:

$$f(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \tag{11.41}$$

Также возможно и обратное преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{11.42}$$

Здесь $f(i\omega)$ – спектральная амплитуда.

Из вида выражений для комплексной амплитуды дифракционной картины в приближении Фраунгофера предлагаются однозначные соответствия: $t \to x,y$, где x,y – точки светящейся поверхности; $\omega \to k_x,k_y$, где k_x,k_y – *пространственные частоты.* Тогда по аналогии и прямым преобразованием Фурье интеграл в (11.40) – *пространственная спектральная амплитуда* $A_\Sigma(ik_x,ik_y)$:

$$A_\Sigma(ik_x,ik_y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x,y)e^{i(k_x x+k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.43}$$

Данное выражение – прямое пространственное (пространственно-частотное или угловое) преобразование Фурье комплексной амплитуды $A_\Sigma(x,y)$ светового поля.

Тогда можно записать и обратное пространственное преобразование Фурье комплексной пространственной спектральной амплитуды $A_\Sigma(ik_x,ik_y)$, т.е. выражение для комплексной амплитуды светового поля на светящейся поверхности:

$$A_\Sigma(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(k_x,k_y) \tag{11.44}$$

Отсюда можно сделать вывод, что в дальней зоне дифракции комплексная амплитуда дифракционной картины с точностью до множителя $\frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}$ – пространственная комплексная амплитуда.

Разложение пучка по плоским волнам.

Комплексную амплитуду светового поля $A(x,y,z)$ в произвольной точке пространства за плоскостью вторичных источников ищем в виде, аналогичном для поля светящейся поверхности $A_\Sigma(x,y)$:

$$A(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A(ik_x, ik_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \tag{11.45}$$

Воспользуемся уравнением Гельмгольца $\left(\Delta + k^2\right) A(x,y,z) = 0$:

$$\left(\Delta + k^2\right) \left(A(ik_x, ik_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} \right) = 0 \tag{11.46}$$

$$\frac{\partial^2 A(ik_x, ik_y, z)}{\partial z^2} + \left(k^2 - k_x^2 - k_y^2\right) A(ik_x, ik_y, z) = 0 \tag{11.47}$$

Тогда:

$$A(ik_x, ik_y, z) = A_\Sigma(ik_x, ik_y) e^{-\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z} = A_\Sigma(ik_x, ik_y) e^{-ik_z z}, \tag{11.48}$$

где $k_z \equiv \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$. В результате:

$$\begin{aligned} A(x,y,z) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(ik_x, ik_y) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(ik_x, ik_y) e^{-\vec{k}\cdot\vec{R}} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y, \end{aligned} \tag{11.49}$$

где $\vec{R}$ – радиус-вектор произвольной точки пространства относительно точки O – центра светящейся поверхности.

Как видим, *ограниченный в пространстве пучок можно представить в виде суперпозиции (совокупности) плоских волн, распространяющихся в разных направлениях, задаваемых волновым вектором* $\vec{k}$ (с *независимыми* поперечными компонентами k_x и k_y волнового вектора $\vec{k}$ или угловыми координатами ϑ_x и ϑ_y, а также волновыми числом $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = const$).

Угловой спектр и его ширина.

Интенсивность дифракционной картины $I(P)$ равна:

$$I(P) = \frac{1}{2}|A(P)|^2 = \frac{1}{2\lambda^2 b^2}|A_\Sigma(ik_x, ik_y)|^2 \tag{11.50}$$

Здесь $|A_\Sigma(k_x,k_y)|^2$ – **пространственная спектральная плотность** или **угловой спектр излучения (пучка)**, заданного комплексной амплитудой $A_\Sigma(x,y)$ светового возмущения на поверхности Σ.

В дальней зоне дифракции комплексная амплитуда дифракционной картины $A(P)$ пропорциональна комплексной пространственной спектральной амплитуде $A_{\Sigma(ik_x,ik_y)}$, а интенсивность дифракционной картины $I(P)$ – угловому спектру $|A_\Sigma(ik_x,ik_y)|^2$ излучения вторичных источников с комплексной амплитудой $A_\Sigma(x,y)$ в сечении исходного пучка. *Основная закономерность дифракции Фраунгофера* – формирование в дальней зоне устойчивой угловой структуры поля, повторяющей форму углового спектра пучка.

Как и при частотно-временном Фурье-преобразовании, когда ширина частотного спектра $\Delta\omega$ связана с длительностью импульса Δt – $\Delta\omega\Delta t \cong 2\pi$, припространственно-частотном Фурье-преобразовании **ширины углового спектра** Δk_x и Δk_y связаны с **поперечными линейными размерами пучка** l_x и l_y:

$$\Delta k_{x,y} l_{x,y} \cong 2\pi \text{ и } \Delta k_{x,y} = \frac{2\pi}{l_{x,y}} \tag{11.51}$$

Для угловых координат $\vartheta_{x,y}$ точки наблюдения P дифракционной картины получим:

$$\Delta k_{x,y} = \Delta(k\sin\vartheta_{x,y}) = k\cos\vartheta_{x,y}\Delta\vartheta_{x,y} \cong \frac{2\pi}{l_{x,y}} \tag{11.52}$$

$$\Delta\vartheta_{x,y} \cong \frac{2\pi}{l_{x,y}k\cos\vartheta_{x,y}} = \frac{\lambda}{l_{x,y}\cos\vartheta_{x,y}} \tag{11.53}$$

В случае параксиальных пучков – $\Delta\vartheta_{x,y} \cong \frac{\lambda}{l_{x,y}}$, что совпадает с оценкой **угла дифракционного расширения** пучка в дальней зоне.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12. Дифракция Фраунгофера на пространственных структурах

§7. Дифракция Фраунгофера на пространственных структурах.

Напомним, вид дифракционного интеграла Френеля-Кирхгофа в случае Фраунгофера:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\sigma, \tag{12.1}$$

где $\vec{r}$ задает положение элемента светящейся поверхности с площадью $\mathrm{d}\sigma$. В декартовых координатах данный интеграл будет иметь вид:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0}(x,y) e^{i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12.2}$$

7.1. Дифракция на прямоугольном отверстии.

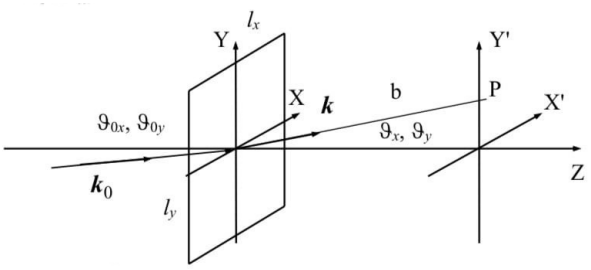


Рис. 12.1. Дифракция на прямоугольном отверстии.

Пусть на прямоугольное отверстие падает плоская монохроматическая световая волна, комплексная амплитуда которой имеет в этом случае вид:

$$A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-i\vec{k}_0\cdot\vec{r}}, \tag{12.3}$$

где $\vec{k}_0$ – волновой вектор падающей волны.

Воспользуемся выражением для дифракционного интеграла (12.1):

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{\Sigma_0} A_0 e^{-i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\sigma = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \iint\limits_{\Sigma_0} e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\sigma = \\ &= \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{A_0}\int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{i(k_x-k_{0x})x}\mathrm{d}x \int_{-l_y/2}^{l_y/2} e^{i(k_y-k_{0y})y}\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{12.4}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отсюда получаем:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{A_0} l_x l_y sinc\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l_x\right) sinc\left(\frac{k_y - k_{0y}}{2} l_y\right) \tag{12.5}$$

Найдем интенсивность:

$$\begin{aligned} I(P) &= \frac{1}{2}|A(P)|^2 = I_0 \left(\frac{l_x l_y}{\lambda b}\right)^2 sinc^2 \xi_x^l sinc^2 \xi_y^l, \\ \xi_{x,y}^l &\equiv \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} l_{x,y} \end{aligned} \tag{12.6}$$

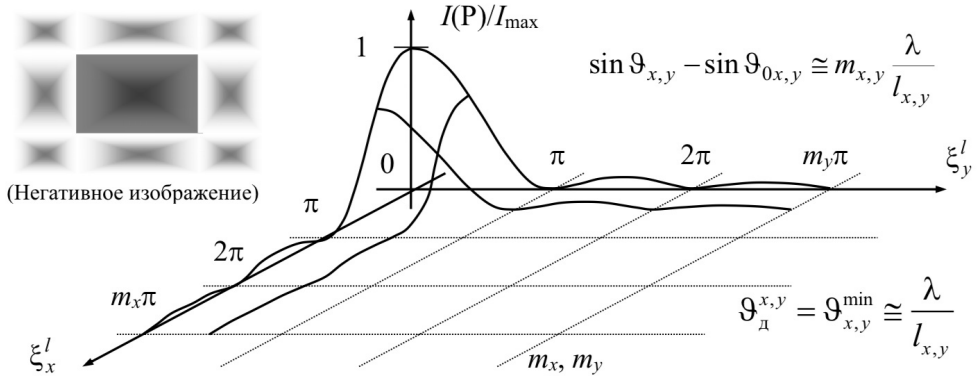


Рис. 12.2. Зависимость интенсивности дифракционной картины I от переменных ξ_x^l и ξ_y^l при дифракции на прямоугольном отверстии.

Минимумы интенсивности будут наблюдаться при

$$\xi_{x,y}^l \equiv \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} l_{x,y} = m_{x,y}\pi, \tag{12.7}$$

где $m_{x,y} = 1, 2, 3, \ldots$ – **порядок дифракции** вдоль оси $X(Y)$.

График интенсивности при дифракции на прямоугольном отверстии представлен на (Рис. 12.2).

7.2. Дифракция на круглом отверстии.

Пусть на круглое отверстие перпендикулярно ему падает плоская монохроматическая световая волна (Рис. 12.3):

$$A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} = A_0 \tag{12.8}$$

Для удобства перейдем в полярную систему координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $x' = r'\cos\varphi'$, $y' = r'\sin\varphi'$. Тогда:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = (\vec{k}_z + \vec{k}_{xy}) \cdot \vec{r} = k_{xy} r \cos(\varphi - \varphi') \tag{12.9}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

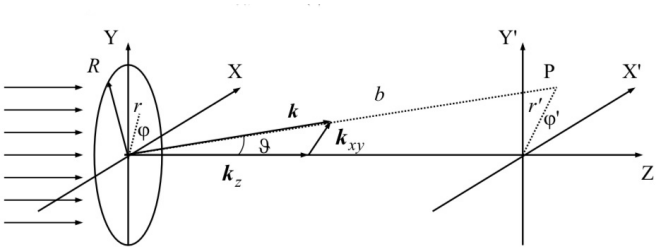


Рис. 12.3. Дифракция на круглом отверстии.

В результате получаем для комплексной амплитуды:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}A_0\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} e^{ik_{xy}r\cos(\varphi-\varphi')}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \\ = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}A_0\frac{2\pi R}{k_{xy}}J_1(k_{xy}R) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}A_0\pi R^2\frac{2J_1(\xi)}{\xi} = A(\xi), \tag{12.10}$$

где $J_1(\xi)$ – функция Бесселя первого порядка,

$$\xi \equiv k_{xy}R = kR\sin\vartheta = \frac{2\pi R}{\lambda}\sin\vartheta \tag{12.11}$$

Тогда для интенсивности светового поля получаем выражение:

$$I(\xi) = \frac{1}{2}|A(\xi)|^2 = I_0\left(\frac{\pi R^2}{\lambda b}\right)^2\left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right)^2 \tag{12.12}$$

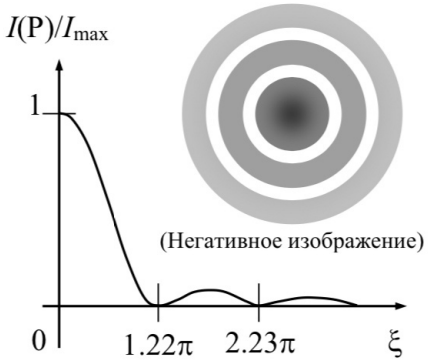


Рис. 12.4. Зависимость интенсивности дифракционной картины I от переменной ξ при дифракции на круглом отверстии.

Значение ξ, при котором интенсивность минимальна:

$$\xi_{min} = kR\sin\vartheta_{\min} \cong 1.22\pi \tag{12.13}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Ширина основного максимума интенсивности:

$$\vartheta_{Д} = \vartheta_{min} \cong 0.61\frac{\lambda}{R} = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{12.14}$$

График интенсивности при дифракции на круглом отверстии представлен на (Рис. 12.4).

7.3. Дифракционные решетки.

Дифракционная решетка – оптический элемент, который обладает периодической пространственной структурой оптических свойств.

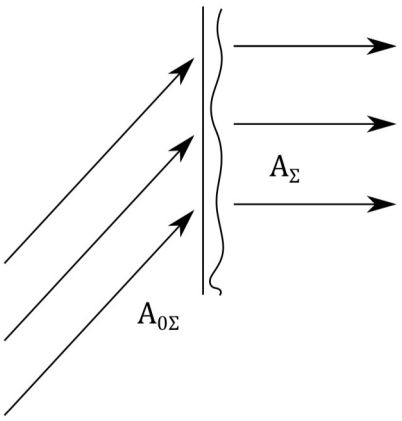


Рис. 12.5. Волна, падающая на плоский оптический элемент.

Рассмотрим волну, падающую на некоторый плоский оптический элемент (Рис. 12.5). Комплексная амплитуда на поверхности Σ, где находится этот оптический элемент – $A_{0\Sigma}$. Комплексная амплитуда волны, покидающей поверхность – A_{Σ}. Тогда можно ввести **комплексный коэффициент (функцию) пропускания (отражения)** оптического элемента.

Комплексный коэффициент пропускания по определению:

$$t(x,y) \equiv \frac{A_{\Sigma}(x,y)}{A_{0\Sigma}(x,y)} \tag{12.15}$$

Дифракционная решетка обладает периодической пространственной структурой оптических свойств, т.е.

$$t(x + n_x d_x, y + n_y d_y) = t(x,y) \tag{12.16}$$

где $n_{x,y}$ – целые числа, $d_{x,y}$ – период оптических свойств вдоль направлений x, y. Линейные размеры решетки: $L_{x,y} = d_{x,y}N_{x,y}$, где $N_{x,y}$ – число периодов решетки вдоль направления.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Т.к. $t(x,y)$ является комплексной величиной, то он может быть представлен в виде:

$$t(x,y) = |t(x,y)|e^{-i\Phi(x,y)} \tag{12.17}$$

Дифракционные решетки можно классифицировать следующим образом:

1) Пропускательные решетки;

2) Отражательные решетки;

3) Амплитудные решетки: $|t(x,y)| \neq 1$, $\Phi(x,y) = 0$;

4) Фазовые решетки: $|t(x,y)| = 1$, $\Phi(x,y) \neq 0$;

5) Амплитудно-фазовые: $|t(x,y)| \neq 1$, $\Phi(x,y) \neq 0$.

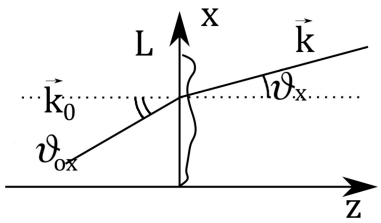


Рис. 12.6. Одномерная дифракционная решетка, модификация оптических свойст которой происходит только вдоль оси X.

Рассмотрим одномерную решетку (Рис. 12.6), т.е. периодические оптические свойства наблюдаются только в одном направлении. В этом случае $A_\Sigma(x,y) = A_\Sigma(x)$. Поскольку $\vec{r}\cdot\vec{b} = \vec{r}\cdot\vec{r}'$ и $b \gg r$, то

$$\rho = \sqrt{b^2 + r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{b}} = \sqrt{b^2 + r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'} \cong b\frac{r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{2b} \tag{12.18}$$

и дифракционный интеграл Френеля Кирхгофа можно записать в виде:

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{i}{\lambda}\iint\limits_\Sigma A_\Sigma \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\mathrm{d}\sigma \cong \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_\Sigma A_\Sigma e^{-ik\frac{r^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{2b}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int A_\Sigma(x) e^{-ik\frac{x^2-2xx'}{2b}} e^{-ik\frac{y^2-2yy'}{2b}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{12.19}$$

Проведем преобразования:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k}{2b}(y^2-2yy')}\mathrm{d}y &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k}{2b}(y-y')^2} e^{i\frac{k}{2b}y'^2}\mathrm{d}y = e^{i\frac{k}{2b}y'^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k}{2b}(y-y')^2}\mathrm{d}y = \\ &= e^{i\frac{k}{2b}y'^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i\frac{k}{2b}}} = e^{i\frac{k}{2b}y'^2}\sqrt{\frac{2b\pi}{ik}} \cong \sqrt{\frac{2b\pi}{ik}} \end{aligned} \tag{12.20}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Здесь $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, при точке наблюдения P с $b \gg \frac{y'^2}{\lambda}$ $(L_y \gg \sqrt{b\lambda})$.

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\sqrt{\frac{2b\pi}{ik}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x)e^{-ik\frac{x^2-2xx'}{2b}}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}}e^{-ikb}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x)e^{-ik\frac{x^2-2xx'}{b}}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{12.21}$$

При рассмотрении дифракции в дальней зоне дифракции по координате x $(b \gg \frac{x^2}{\lambda})$ окончательно получим:

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}}e^{-ikb}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x)e^{ik_x x}\mathrm{d}x \tag{12.22}$$

На (Рис. 12.6) направление распространения падающей на решетку волны задается вектором $\vec{k}_0$, а прошедшей – вектором $\vec{k}$. Пусть длина дифракционной решетки – L, а вдоль оси X она характеризуется периодом оптических свойств d_x, число которых N $(dN = L)$. Тогда:

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}}e^{-ikb}\int\limits_0^L A_0 e^{-k_{0x}x}t(x)e^{ik_x x}\mathrm{d}x = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}}e^{-ikb}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)d}^{jd} t(x)e^{i(k_x-k_{0x})x}\mathrm{d}x \tag{12.23}$$

Сделаем замену переменных: $w = x-(j-1)d$, $\mathrm{d}w = \mathrm{d}x$. Получаем:

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}}e^{-ikb}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_0^d A_0 t(w+(j-1)d)e^{i(k_x-k_{0x})w}e^{i(k_x-k_{0x})(j-1)d}\mathrm{d}w \tag{12.24}$$

Так как коэффициент пропускания обладает периодическим свойством, то:

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}}e^{-ikb}\int\limits_0^d A_0 e^{-ik_{0x}w}t(w)e^{ik_x w}\mathrm{d}w\cdot\sum_{j=1}^{N}e^{i(k_x-k_{0x})(j-1)d} = A_1(k_x,k_{0x})h(N,k_x,k_{0x}) \tag{12.25}$$

где A_1 – комплексная амплитуда дифракционной картины от одного периода решетки, h – **фактор многоволновой интерференции**.

Т.к. h – сумма геометрической прогрессии, то выражение для него будет:

$$h(N,k_x,k_{0x}) = \frac{1-e^{iN(k_x-k_{0x})d}}{1-e^{i(k_x-k_{0x})d}} = \frac{1-e^{i2N\xi_x^d}}{1-e^{i2\xi_x^d}} = \frac{iN\xi_x^d}{e^{i\xi_x^d}}\frac{\sin\left(N\xi_x^d\right)}{\sin\left(\xi_x^d\right)} \tag{12.26}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где

$$\xi_x^d \equiv \frac{k_x - k_{0x}}{2} d \tag{12.27}$$

Интенсивность дифракционной картины в точке наблюдения в этом случае:

$$I(P) = \frac{1}{2}|A(P)|^2 = I_1(k_x, k_{0x}) H(N, \xi_x^d) \tag{12.28}$$

где I_1 – интенсивность дифракционной картины от одного периода, H – **интерференционная функция Лауэ**

$$H(N, \xi_x^d) = \frac{\sin^2(N\xi_x^d)}{\sin^2(\xi_x^d)} \tag{12.29}$$

Обратим внимание, что N в выражениях выше – число *задействованных* периодов дифракционной решетки, L – длина той части решетки, которая задействована волной, т.к. размеры решетки вне действия волны не влияют на дифракционное поле.

Легко понять, что интерференционная функция Лауэ H принимает максимальное значение, когда $\sin \xi_x^d = 0$, а значит

$$\xi_x^d = m\pi = \frac{k_x - k_{0x}}{2} d = \frac{k}{2}(\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x}) d = \pi \frac{d}{\lambda}(\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x}) \tag{12.30}$$

Получаем условие наблюдения максимума H для направляющих углов ϑ_x и ϑ_{0x}:

$$\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x} = m\frac{\lambda}{d}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{12.31}$$

Тогда максимум функции Лауэ:

$$H(N, \xi_x^d) = N^2 \tag{12.32}$$

Минимум же достигается, если $\sin\left(N\xi_x^d\right) = 0$, т.е.

$$\xi_x^d = k\frac{\pi}{N}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, N-1 \tag{12.33}$$

Ширина пика интенсивности будет равна

$$\delta\xi_x^d = \frac{\pi}{N} \text{ или } (\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x}) = \frac{\lambda}{dN} \tag{12.34}$$

Отсюда получаем

$$\cos\vartheta_x \delta\vartheta_x = \frac{\lambda}{dN} = \frac{\lambda}{L} \tag{12.35}$$

Следовательно угловая ширина максимума будет равна

$$\delta\vartheta_x = \frac{\lambda}{dN\cos\vartheta_x} \simeq \frac{\lambda}{dN\cos\vartheta_{0x}} = \frac{\lambda}{d_\perp N} = \frac{\lambda}{L_\perp}, \tag{12.36}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где $d_\perp = d\cos\vartheta_{0x}$ – период дифракционной решетки перпендикулярно напралению распространения падающей волны, $L_\perp L\cos\vartheta_{0x}$ – поперечное сечение падающей волны.

Здесь считаем, что $\cos\vartheta_x \simeq \cos\vartheta_{0x}$ при малых φ.

Из (12.28) видно, что интенсивность дифракционной картины в значительной степени определяется значением N, т.е. числом периодов, задействованных падающим на решетку пучком.

Амплитудная прямоугольная решетка.

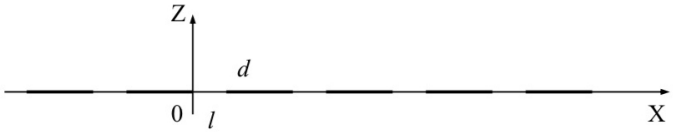


Рис. 12.7. Амплитудная прямоугольная решетка

Под амплитудной прямоугольной решеткой понимают опространственно-периодическую чистему прозрачных щелей, перпендикулярных направлению периодичности, в непрозрачном экране (Рис. 12.7). Период решетки на (Рис. 12.7) – d, l – размер щели.

Функция пропускания в данном случае:

$$t(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l, \\ 0, & \text{при } l \leqslant x \leqslant d. \end{cases} \tag{12.37}$$

Результат дифракции *на одной щели*:

$$\begin{aligned} A_1(k_x) &= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 \int_0^d t(x) e^{i(k_x - k_{0x})x} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 e^{i\frac{k_x - k_{0x}}{2} l} l\, sinc\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l\right) \end{aligned} \tag{12.38}$$

$$I_1(k_x) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} sinc^2\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l\right) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} sinc^2 \xi_x^l, \tag{12.39}$$

где $\xi_x^l \equiv \frac{k_x - k_{0x}}{2} l$.

Результат дифракции *на всей решетке*:

$$I(k_x) = I_1(k_x) H(N, \xi_x^d) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} sinc^2 \xi_x^l \frac{\sin^2(N\xi_x^d)}{\sin^2 \xi_x^d} \tag{12.40}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Условие наличия **главных минимумов**:

$$\xi_x^l \equiv \frac{k_x - k_{0x}}{2} l = \frac{\pi l(\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x})}{\lambda} = k\pi, \quad \sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x} = k\frac{\lambda}{l}, \quad k = 1,2,3,\ldots \quad (12.41)$$

Максимальное значение порядка дифракции:

$$m_{max} = \frac{\lambda/l}{\lambda/d} = \frac{d}{l} \quad (12.42)$$

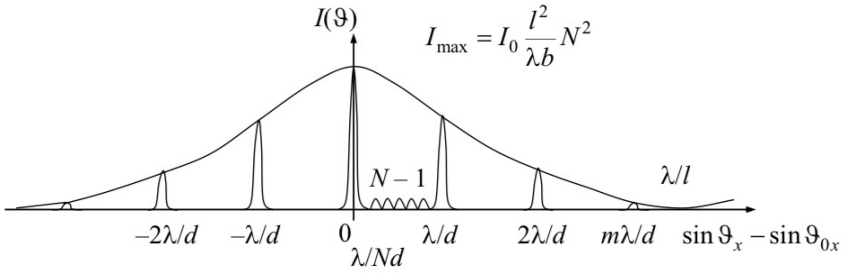


Рис. 12.8. Зависимость интенсивности дифракционной картины I от $(\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x})$ для амплитудной дифракционной решетки.

Фазовая призматическая решетка.

Фазовая решетка представляет собой оптический элемент, который практически не меняет амплитуду колебаний волны, но меняет фазу.

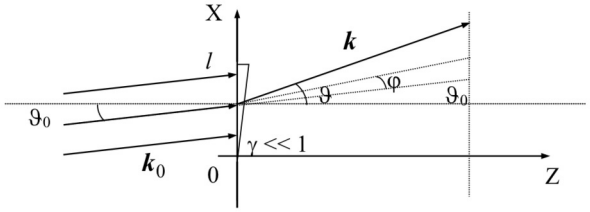


Рис. 12.9. Фазовая призматическая решетка

На (Рис. 12.9) изображена схема дифракции на щели с непрерывным изменением фазы (тонкой призме). В этом случае коэффициент пропускания:

$$t(x) = e^{-i\Phi(x)}, \quad (12.43)$$

где $\Phi(x) \cong k(n-1)\gamma x/\cos\vartheta_{0x} = k\varphi x$, а $\varphi = (n-1)\gamma/\cos\vartheta_{0x}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Результат дифракции *на одной щели*:

$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 \int_0^l e^{-ik\varphi x} e^{i(k_x - k_{0x})x} \mathrm{d}x = \\ = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 e^{i\frac{k_x - k_{0x} - k\varphi}{2} l} l sinc\left(\frac{k_x - k_{0x} - k\varphi}{2} l\right) \tag{12.44}$$

$$I_1(\vartheta) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} sinc^2\left(\frac{k_x - k_{0x} - k\varphi}{2} l\right) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} sinc^2\left(k\frac{\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x} - \varphi}{2} l\right) \tag{12.45}$$

Распределение интенсивности $I_1(\vartheta)$ в дифракционной картине точно такое же, как и в случае щели, только повернуто на угол φ.

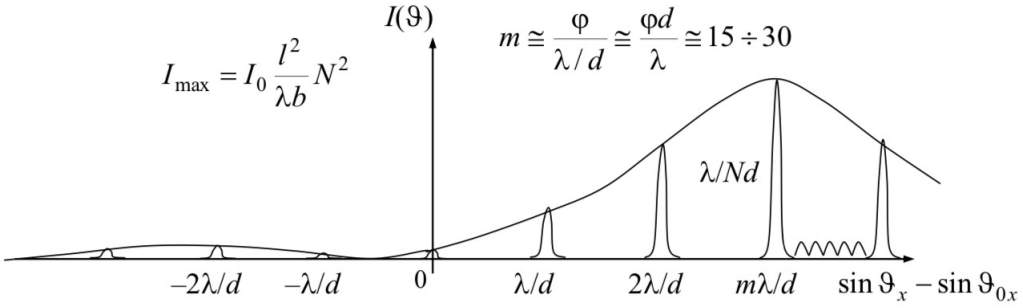


Рис. 12.10. Зависимость интенсивности дифракционной картины I от $(\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x})$ для фазовой дифракционной решетки.

Если в дифракционной решетке использовать вместо щелей призмы, то направления на главные максимумы не изменятся, а огибающая $I_1(\vartheta)$ сдвинется на угол φ, увеличивая интенсивность главных максимумов при более высоких порядках дифракции. Это позволяет работать с более высокими порядками дифракции – m.

7.4. Дифракция на многомерных периодических структурах.

Рассмотрим прямоугольные двумерные дифракционные решетки, при этом периодичности в пространстве у таких решеток взаимно ортогональны. В этом случае дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} \iint\limits_{\Sigma_0} A_{0\Sigma_0} t(x,y) e^{i(k_x x + k_y y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} \iint\limits_{\Sigma_0} A_0 e^{-i(k_{0x}x + k_{0y}y)} t(x)t(y) e^{i(k_x x + k_y y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ = A_1(k_x, k_y) h(N_x, \xi_x^d) h(N_y, \xi_y^d), \tag{12.46}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где A_1 – комплексная амплитуда дифракционной картины от области пространства, которая ограничена периодами в двух взаимно перпендикулярных направлениях (от одной области периодичности дифракционной решетки).

Здесь комплексный коэффициент пропускания представлен как произведение двух коэффициентов $k(x,y) = k(x)k(y)$ в следствие ортогональности периодических свойств. Далее были проделаны аналогичные одномерному случаю преобразования.

Интенсивность дифракционной картины:

$$I(P) = I_1(k_x, k_y)H(N_x, \xi_x^d)H(N_y, \xi_y^d) \tag{12.47}$$

Понятно, что условия наблюдения максимума будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x} &= m_x\frac{\lambda}{d_x}, \\ \sin\vartheta_y - \sin\vartheta_{0y} &= m_y\frac{\lambda}{d_y} \end{aligned} \tag{12.48}$$

Ширина максиммов:

$$\delta\vartheta_{x,y} = \frac{\lambda}{d_{x,y}N_{x,y}\cos\vartheta_{x,y}} \simeq \frac{\lambda}{N_{x,y}d_{x,y\perp}} \tag{12.49}$$

Если рассматривать дифракцию на трехмерной структуре, то возникает вопрос: где взять такой оптический элемент, который будет иметь периодичность в пространстве оптических свойств по трем некомпланарным направлениям. Ответ: кристаллическая структура. При этом периодичность в кристалле $d_{x,y,z} \sim (2-5)\cdot 10^{-10}$м. Но условия наблюдения дифракции: $\lambda < d_{x,y,z}$. Диапазон видимого света этому условию не удовлетворяет. Тогда для наблюдения дифракции на кристаллах используется рентгеновское излучение.

Рассмотрим простейший случай трехмерной структуры, когда все три направления периодичности оптических свойств взаимно перпендикулярны. Для удобства вводят углы между волновым вектором и осями $\alpha_{x,y,z} = \pi/2 - \vartheta_{x,y,z}$. Тогда условия наблюдения максимума в данном случае будут определяться **уравнениями Лауэ**:

$$\begin{aligned} d_x(\cos\alpha_x - \cos\alpha_{0x}) &= m_x\lambda, \\ d_y(\cos\alpha_y - \cos\alpha_{0y}) &= m_y\lambda, \\ d_x(\cos\alpha_z - \cos\alpha_{0z}) &= m_z\lambda. \end{aligned} \tag{12.50}$$

Пусть задано направление падающего луча $(\alpha_{0x}, \alpha_{0y}, \alpha_{0z})$, известна длина падающей монохроматической волны λ. Тогда из этих условий нельзя найти значения $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, в которых будет наблюдаться дифракционный максимум, т.к. имеется 3

уравнения, но при этом только 2 независимые переменные ($\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$).

Тогда, например, используют не монохроматический, а широкий спектр излучения $\Delta\lambda$. Такой способ наблюдения дифракционной картины – **наблюдение с помощью метода Лауэ**, а сама дифракционная картина – **Лауэграмма**.

Более распространен способ, когда используется монохроматическое излучение, но углы варьируются в широких пределах $\Delta\alpha_{0x,y,z}$ (например, с помощью вращения образца или использования поликристаллического образца с сильно разрозненными кристаллами).

Лекция 13. Анализ, преобразование и синтез световых полей.

§7. Дифракция Фраунгофера на пространственных структурах. Продолжение.

Диифракция на трехмерной системе атомов в кристалле может быть рассмотрена как отражение рентгеновских волн от атомных плоскостей кристалла.

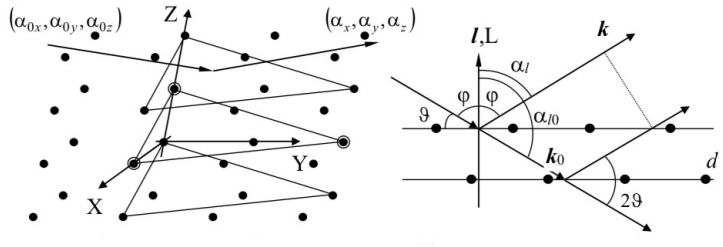


Рис. 13.1. Схема дифракции на трехмерной системе атомов как отражение волн от атомных плоскостей кристалла.

На (Рис. 13.1) изображено некоторое семейство атомных плоскостей с межатомным расстоянием d, на каждой из которых атомы обладают двумерной периодичностью. Пусть на плоскости падает волна. Всегда будет наблюдаться дифракция нулевого порядка, т.е. $\cos\alpha_{x,y,z} = \cos\alpha_{0x,y,z}$ и прошедшая волна будет распространяться в том же направлении, что и падающая.

Введем систему координат H,K,L, оси H и K которой лежат в атомной плоскости решетки, а ось L перпендикулярна этой плоскости. Поскольку угол падения φ равен углу отражения, а волновые векторы $\vec{k}_0$, $\vec{k}$ и нормаль $\vec{l}$ лежат в одной плоскости, перпендикулярной отражающим плоскостям, то $\alpha_{h,k} = \alpha_{0h,k}$ и два условия Лауэ:

$$\begin{aligned} d_h(\cos\alpha_h - \cos\alpha_{0h}) &= m_h\lambda, \\ d_h(\cos\alpha_k - \cos\alpha_{0k}) &= m_k\lambda \end{aligned} \tag{13.1}$$

Обратим внимание, что в случае рентгеновского излучения угол падения и угол преломления равны с высокой степенью точности. Частоты рентгеновского излучения на два порядка больше частот световой волны и на два порядка больше частот, характерных для колебаний электронной системы атомов, т.е. среда практически не вмешивается в процесс распространения и упругого рассеяния волн.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Оптическая разность хода для двух волн, отраженных от двух параллельных плоскостей:

$$\Delta = 2nd\cos\vartheta = 2d\cos\varphi \tag{13.2}$$

Мы учли, что в данном случае $n = 1$. При падении волны под углом φ дифракционные максимумы будут наблюдаться, если $2d\cos\varphi = m\lambda$. Данное выражение – преобразованное третье условие Лауэ. Его можно записать в другом виде:

$$\boxed{2d\sin\vartheta = m\lambda}, \tag{13.3}$$

где ϑ – **угол скольжения**, 2ϑ – **угол дифракции**, m – целое число.

Уравнение (13.3) называется **условием (уравнением) Брэгга-Вульфа**. Углы скольжения ϑ, которые ему удовлетворяют, называются **углами Брэгга**. Если это условие выполнено, то волны, дифрагированные на семействе параллельных атомных плоскостей кристалла, будут складываться в фазе и усиливать друг друга. Для направлений, не удовлетворяющих записанному условию, произайдет взаимное погашение интерферирующих волн. Выполнение данного условия обеспечивается различной ориентацией кристалликов в *поликристаллическом образце* по отношению к направлению первичного рентгеновского монохроматического пучка - пучка характеристического излучения анода рентгеновской трубки.

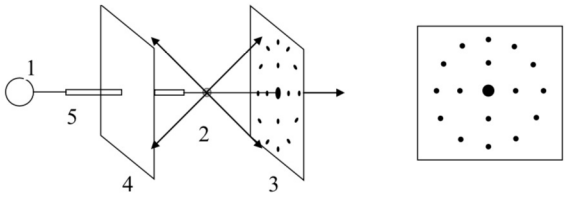


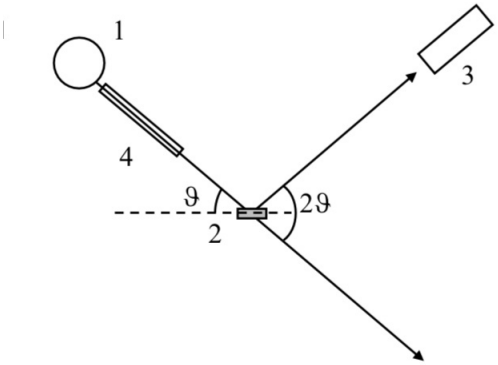
Рис. 13.2. Схема установки для получения Лауэграммы:
1 – источник рентгеновского излучения с широким спектром ($\Delta\lambda$),
2 – исследуемый кристалл,
3 – положение фотопластинки при прямой фотосъемке,
4 – положение фотопластинки при обратной фотосъемке,
5 – коллиматор.

На (Рис. 13.2) изображена схема установки для получения картины дифракции рентгеновских лучей в ристалле – **Лауэграммы**. (В общем случае каждому рефлексу (пятну) на Лауэграмме соответствует пучок света со своей длиной волны.)

На (Рис. 13.3) изображена схема регистрации по Брэгу-Брентано (для получения картины дифракции рентгеновских лучей в поликристаллическом образце – дифрактограммы).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU



1 – источник рентгеновского излучения,
2 – исследуемый образец,
3 – детектор,
4 – коллиматор.

Рис. 13.3. Схема регистрации по Брэгу-Брентано.

§8. Анализ, преобразование и синтез световых полей.

Рассматривая возможные временные и пространственные Фурье-преобразования, мы показали, что произвольное световое поле можно разложить на спектральные составляющие. Причем разложить на спектральные временные составляющие, т.е. на монохроматические волны, которые в свою очередь раскладываются на пространственные спектральные составляющие, т.е. плоские волны, распространяющиеся в разных направлениях.

Явление разложения на спектральные составляющие – **анализ (Фурье-анализ) светового поля**.

Как правило световые волны не очень большой мощности. Т.е. напряженность электрических полей электромагнитного поля волны заметно меньше, чем напряженность электрического поля, в котором находятся электроны в атоме. В этом случае отклик среды будет линейным и преобразование гармонических спектральных составляющих будет происходить независимо друг от друга. Тогда можно рассмотреть поведение гармонической пространственной спектральной составляющей (поведение плоской монохроматической волны, распространяющейся в каком-либо направлении), ее взаимодействие со средой и найти преобразование, например, ее комплексной амплитуды. Далее можно выполнить аналогичные действия со всеми составляющими исходного сложного светового поля. Результат суперпозиции полученных преобразованных спектральных составляющих – результат преобразования исходного сложного светового поля в среде.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

8.1. Спектральный прибор и его основные характеристики.

Спектральный прибор – оптический прибор для пространственного разложения светового поля на монохроматические составляющие (в частотный спектр) с помощью угловой дисперсии.

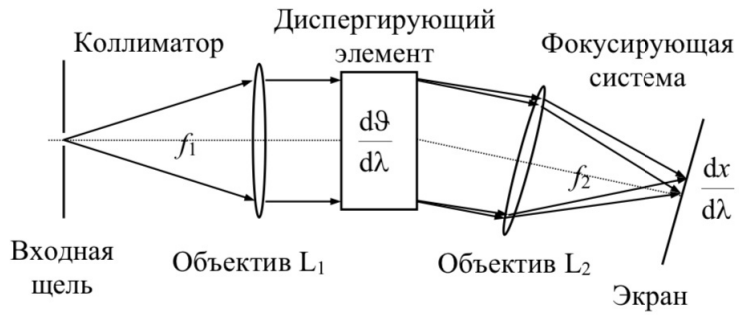


Рис. 13.4. Схема спектрального прибора.

Схема спектрального прибора представлена на (Рис. 13.4). Любой спектральный прибор состоит из трех основных функциональных частей: коллиматора, диспергирующего элемента и фокусирующей системы. Коллиматор – точечный источник света и линза, которая называется объективом коллиматора. После прохождения коллиматора пучок становится параллельным. Диспергирующий элемент может использовать различные физические явления, такие как интерференция, дифракция или дисперсия. Из него выходит несколько пучков под разными углами и попадают в фокусирующую систему, которая состоит из объектива, т.е. линзы, и экрана в фокальной плоскости этой линзы. На экране получается множество изображений входной щели.

Аппаратная функция $I(P)$ – "отклик" прибора на монохроматическое излучение – регистрируемая интенсивность светового поля в зависимости от обобщенной координаты точки наблюдения P.

Область свободной дисперсии, дисперсионная область $\Delta\lambda$ – максимальный интервал длин волн, при котором возможна работа прибора (получение разрешенной дифракционной или интерференционной картины). Максимальный интервал длин волн, исследуемый спектральным прибором.

Предел разрешения $\delta\lambda$ – максимальная разность длин волн двух спектральных линий, которые разрешает спектральный прибор.

Условие разрешения Рэлея – спектральные линии считаются разрешенными, если максимум регистрируемой интенсивности одной линии попадает на минимум регистрируемой интенсивности от другой. Если линии не обладают минимумом регистри-

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

руемой интенсивности, то предел разрешения $\delta\lambda$ соответствует сдвигу максимума интенсивности линии на ее ширину.

Разрешающая способность (сила) $R = \lambda/\delta\lambda$ – отношение характерной длины волны λ исследуемого излучения к пределу разрешения $\delta\lambda$.

Угловая дисперсия $D_\vartheta = \mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\lambda$ – скорость изменения угловой координаты ϑ максимума регистрируемой интенсивности с изменением длины волны.

8.2. Дисперсионные, дифракционные и интерференционные спектральные приборы.

А. Призма.

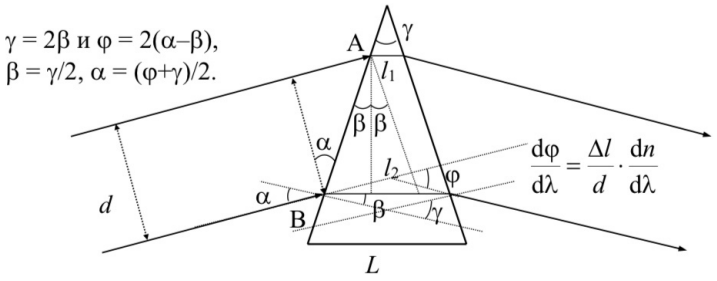


Рис. 13.5. Призма.

Призма – дисперсионный спектральный прибор. $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda \neq 0$ для призмы, т.е. показатель преломления вещества – функция длины волны падающего излучения. Удобно рассматривать такую геометрию падения на призму пучка шириной d, при которой узкие пучки света (которые относятся к краям широкого пучка) распространяются внутри призмы параллельно основанию (Рис. 13.5). Угол при вершине призмы – γ, основание – L. Из геометрических соображений получаем:

$$\begin{gathered}\gamma = 2\beta \text{ и } \varphi = 2(\alpha - \beta) \\ \beta = \frac{\gamma}{2}, \quad \alpha = \frac{\varphi + \gamma}{2}\end{gathered} \tag{13.4}$$

Затем воспользуемся законом Снеллиуса:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\left((\varphi+\gamma)/2\right)}{\sin(\gamma/2)} = n \tag{13.5}$$

Продифференцируем левую и правую части этого соотношения:

$$\frac{\cos\left((\varphi+\gamma)/2\right)}{2\sin(\gamma/2)}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\cos\alpha}{2\sin\beta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{13.6}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отсюда получаем:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2\sin\beta}{\cos\alpha}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{l_2 - l_1}{AB}\frac{AB}{d}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\Delta l}{d}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{13.7}$$

где Δl – разность хода двух крайних узких пучков света.

Аппаратная функция – интенсивность дифракционной картины от щели:

$$I(\vartheta) = I_0\frac{d^2}{\lambda b}sinc^2\left(\frac{k\sin(\vartheta-\varphi)}{2}d\right) \tag{13.8}$$

Условие главного максимума: $\frac{k\sin(\vartheta-\varphi)}{2}d = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \varphi, \quad \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}$

Условие минимума: $\frac{k\sin(\vartheta-\varphi)}{2}d = \pi, \quad \Rightarrow \quad \vartheta \cong \varphi + \frac{\lambda}{d}$, сдвиг минимума относительно макисмума – $\delta\vartheta = \frac{\lambda}{d}$.

Область дисперсии: $\Delta\lambda \sim \infty$.

Угловая дисперсия:

$$D_\vartheta \equiv \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\Delta l}{d}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{13.9}$$

Предел разрешения:

$$\delta\lambda = \frac{\delta\vartheta}{|D_\vartheta|} = \frac{\lambda/d}{\frac{\Delta l}{d}\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|} = \frac{\lambda}{\Delta l\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|} \tag{13.10}$$

Разрешающая способность:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \Delta l\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|; \quad R_{max} = L\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right| \tag{13.11}$$

Б. Дифракционная решетка.

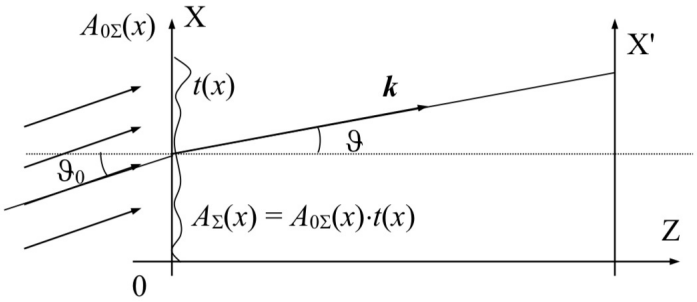


Рис. 13.6. Дифракционная решетка.

Аппаратная функция – интенсивность дифракционной картины от дифракционной решетки:

$$\begin{aligned} &I(\vartheta) = I_1(\vartheta)H(N,\xi(\vartheta)),\\ &H(N,\xi(\vartheta)) = \frac{\sin^2(N\xi(\vartheta))}{\sin^2\xi(\vartheta)}, \quad \xi(\vartheta) = k\frac{\sin\vartheta - \sin\vartheta_0}{2}d = k\frac{\Delta(\vartheta)}{2}, \end{aligned} \tag{13.12}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где $\Delta(\vartheta)$ – разность хода крайних лучей для одного периода решетки.

Условие главных максимумов:$\xi(\vartheta) = k\frac{\Delta(\vartheta)}{2} = m\pi, \quad \Delta(\vartheta) = d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda.$

Условие ближайших минимумов: $\Delta(\vartheta) = d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$

Порядок дифракции:$m = \frac{\Delta(\vartheta)}{\lambda} = \frac{d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)}{\lambda}$

Область дисперсии:$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$

Предел разрешения:$m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda \quad \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm}.$

Разрешающая способность:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm, \quad R_{max} = Nm_{max} = N\frac{d}{l} = \frac{L}{l} \tag{13.13}$$

Угловая дисперсия:

$$D_\vartheta = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\vartheta} \tag{13.14}$$

В. Эшелон Майкельсона.

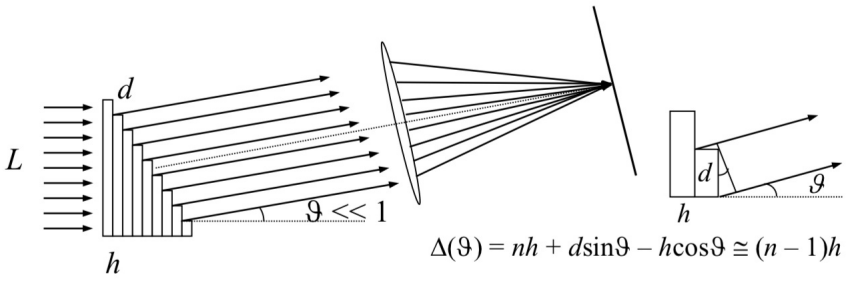


Рис. 13.7. Эшелон Майкельсона.

Эшелон Майкельсона – разновидность дифракционной фазовой решетки (Рис. 13.7). Он состоит из стеклянных или кварцевых пластин одинаковой толщины, которые сложены вертикально и концы которых сдвинуты друг относительно друга на одну и ту же величину d. Легко найти разность хода для двух лучей по краям одного периода:

$$\Delta(\vartheta) = nh + d\sin\vartheta - h\cos vartheta \cong (n-1)h \tag{13.15}$$

Аппаратная функция:

$$\begin{aligned} &I(\vartheta) = I_1(\vartheta)H(N,\xi(\vartheta)), \\ &H(N,\xi(\vartheta)) = \frac{\sin^2(N\xi(\vartheta))}{\sin^2\xi(\vartheta)}, \quad \xi(\vartheta) = k\frac{\Delta(\vartheta)}{2} \end{aligned} \tag{13.16}$$

Условие главных максимумов: $\Delta(\vartheta) = nh + d\sin\vartheta - h\cos\vartheta = m\lambda.$

Порядок дифракции: $m = \frac{\Delta}{\lambda} \cong \frac{(n-1)h}{\lambda}.$

Область дисперсии: $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \cong \frac{\lambda^2}{(n-1)h}$.

Предел разрешения:$\delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} \cong \frac{\lambda^2}{N(n-1)h}$.

Разрешающая способность:

$$R = Nm \cong \frac{N(n-1)h}{\lambda} \tag{13.17}$$

Угловая дисперсия:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta(\vartheta)}{\mathrm{d}\lambda} = (d\cos\vartheta + h\sin\vartheta)\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\lambda} = m, \tag{13.18}$$

$$D_\vartheta = \frac{m}{d\cos\vartheta + h\sin\vartheta} \cong \frac{m}{d} = \frac{(n-1)h}{\lambda d} \tag{13.19}$$

Г. Многоволновые интерферометры.

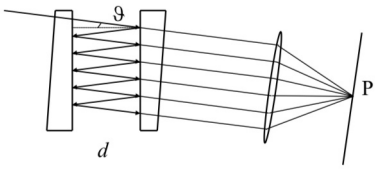


Рис. 13.8. Интерферометр Фабри-Перо.

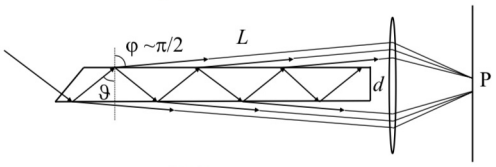


Рис. 13.9. Пластинка Люммера-Герке.

Используется явление многоволновой интерференции. Такие спектральные приборы: интерферометр Фабри-Перо (Рис. 13.8) и пластинка Люммера-Герке (Рис. 13.9).

Аппаратная функция – формула Эйри:

$$I_{\text{пр}}(\vartheta) = I_0\frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Phi(\vartheta)}{2}}, \quad \Phi(\vartheta) = \frac{4\pi d}{\lambda}\cos\vartheta \tag{13.20}$$

Ширина максимума: $\delta = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}}$.

Условие максимумов: $\Phi(\vartheta) = m2\pi \quad \Rightarrow \quad 2d\cos\vartheta = m\lambda$.

Порядок инетференции: $m = \frac{2d\cos\vartheta}{\lambda}$.

Дисперсионная область: $m(\lambda+\Delta\lambda) = (m+1)\lambda \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2d\cos\vartheta}$

Предел разрешения – сдвиг интерференционной полосы $\delta\Phi = \frac{4\pi d\cos\vartheta}{\lambda^2}\delta\lambda = \frac{2\pi m}{\lambda}\delta\lambda = \delta = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}} \quad \Rightarrow \quad \delta\lambda = \frac{\lambda}{m}\frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$.

Разрешающая способность: $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = m\frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$.

Угловая дисперсия:

$$D_\vartheta = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{m}{2d\sin\vartheta} = -\frac{ctg\vartheta}{\lambda} \tag{13.21}$$

Для пластинки Люммера-Герке: $d \Rightarrow nd$, $\sin\vartheta \cong \sin\vartheta_0 = 1/n$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Д. Интерферометр Майкельсона.

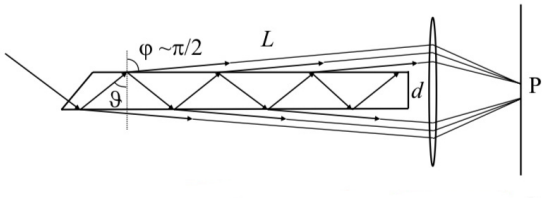


Рис. 13.10. Интерферометр Майкельсона.

Аппаратная функция – уравнение двухволновой интерференции:

$$I(\vartheta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(k\Delta(\vartheta)), \quad \Delta(\vartheta) = 2\Delta l\cos\vartheta \tag{13.22}$$

Условие максимумов: $2\Delta l\cos\vartheta = m\lambda$.

Условие минимумов: $2\Delta l\cos\vartheta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$.

Порядок интерференции: $m = \frac{2\Delta l\cos\vartheta}{\lambda}$.

Область дисперсии: $m(\lambda+\Delta\lambda) = (m+1)\lambda$, $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$.

Предел разрешения: $m(\lambda+\delta\lambda) = (m+1/2)\lambda$, $\delta\lambda = \frac{\lambda}{2m}$.

Разрешающая способность: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 2m$.

Угловая дисперсия:

$$D_\vartheta \equiv \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{m}{2\Delta l\sin\vartheta} = -\frac{1}{\lambda tg\vartheta} \tag{13.23}$$

8.3. Основы дифракционной теории формирования изображений Аббе. Пространственная фильтрация изображения. Опыт Аббе-Портера.

В соответствие с теорией Аббе формирование изображений происходит в 2 этапа.

Первый этап: линза в своей фокальной плоскости осуществляет пространственный Фурье-анализ светового поля светящегося объекта.

Второй этап: в процессе свободной дифракции осуществляется пространственный Фурье-синтез изображения (расходящихся волн).

Пусть имеется светящийся объект (Рис. 13.12), который характеризуется комплексной амплитудой светового поля в области расположения самого объекта $A_\Sigma(x,y)$. Ранее мы показали, что световое поле за светящимся объектом:

$$A(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(ik_x, ik_y)e^{-i(k_x x+k_y y+k_z z)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{13.24}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Спектральный прибор	**Параметры прибора**	N	m	$\Delta\lambda$, Å	$\delta\lambda$, Å	R	D_ϑ, рад/м	Прибор
Призма	$\Delta l = 1$ см, $d = 0.5$ см, $\frac{dn}{d\lambda} = -10^5\ м^{-1}$	∞	0	∞	5	10^3	$-2\cdot10^5$	Дисп.
Дифракционная решетка	$L = 10$ см, $N = 10^5$, $m = 3$	10^5	3	**1700**	0.0170	$3\cdot10^5$	$3\cdot10^6$	Дифр.
Эшелон Майкельсона	$n = 1.5$, $h = 1$ см, $d = 0.5$ см, $N = 30$	30	10^4	0.5	0.0170	$3\cdot10^5$	$2\cdot10^6$	Дифр.
Интерферометр Фабри-Перо	$D = 2.5$ см, $L = 15$ см, $N = 30$, $R = 0{,}9$	30	10^5	**0.05**	0.0017	$\mathbf{3\cdot10^6}$	$-2\cdot10^7$	Интерф.
Пластинка Люммера-Герке	$n = 1.5$, $d = 1$ см, $L = 20$ см, $R = 0{,}9$	11	$3\cdot10^4$	**0.16**	0.0042	$\mathbf{1.2\cdot10^6}$	$-2\cdot10^6$	Интерф.
Интерферометр Майкельсона	$\Delta l = 25$ см, $\vartheta \sim 0$	2	$\sim10^6$	$\sim$**0.005**	$\sim$0.0025	$\sim\mathbf{2\cdot10^6}$	$\sim -\infty$	Интерф.

Рис. 13.11. Основные характеристики спектральных приборов (порядок интерференции – m, область дисперсии – $\Delta\lambda$, предел разрешения – $\delta\lambda$, разрешающая способность – R, угловая дисперсия – D_ϑ) для $\lambda = 0.5\cdot10^{-6}$ м.

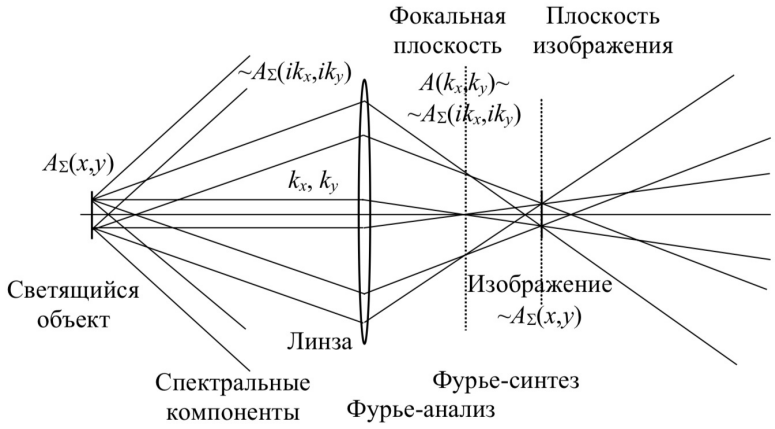


Рис. 13.12. Схема формирования изображения по Аббе.

Данное световое поле – суперпозиция плоских волн. Другими словами, световое поле правее светящегося объекта (до линзы) – совокупность плоских волн.

Комплексная амплитуда дифракционной картины в дальней зоне дифракции:

$$A(k_x, k_y) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x,y)e^{i(k_x x + k_y y)}dxdy = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}A_\Sigma(ik_x, ik_y) \tag{13.25}$$

Интенсивность в дальней зоне дифракции:

$$I(k_x, k_y) = \frac{1}{2}|A(k_x, k_y)|^2 = \frac{1}{2\lambda^2 b^2}|A_\Sigma(ik_x, ik_y)|^2 \tag{13.26}$$

Т.е. при регистрации волн на больших расстояниях, то комплексная амплитуда оказывается пропорциональной комплексной пространственной амплитуде. При

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

установке линзы пучки, которые могли быть зарегестрированы на больших расстояниях, теперь оказываются в фокальной плоскости. Тогда в фокальной плоскости комплексная амплитуда будет равна (13.25), а интенсивность – (13.26). В области между линзой и фокальной плоскостью происходит Фурье-анализ. Далее, если не вмешиваться в процесс распространения света между фокальной плоскостью и плоскостью изображения (в процессе свободной дифракции), начинается формирование изображения – суперпозиция пространственных спектральных компонент.

Пространственная фильтрация изображения – изменение изображения объекта посредством модификации пространственных спектральных компонент светового поля объекта.

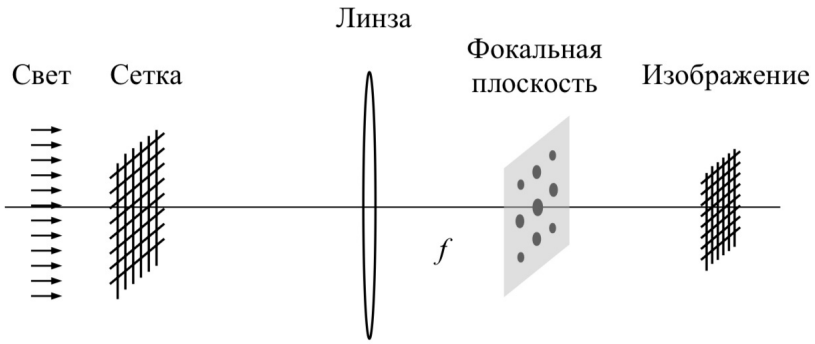


Рис. 13.13. Схема опыта Аббе-Портера.

Схема опыта Аббе-Портера представлена на (Рис. 13.13).

Расстояния между пятнами определяются периодами $d_{x,y}$ метки (чем больше период, тем меньше расстояние) – $\frac{\lambda}{d_{x,y}} f$. Здесь f – фокусное расстояние линзы.

Размеры пятна определяются размерами $L_{x,y}$ освещаемой части сетки (чем больше размер, тем меньше пятно) – $\frac{\lambda}{L_{x,y}} f$.

Если в фокальной плоскости помещают узкую щель, то в плоскости изображения наблюдают систему полос, вытянутых перпендикулярно щели.

Если поместить ирисовую диафрагму (непрозрачный экран с отверстием переменного диаметра) в центре фокальной плоскости, то, измеряя ее диаметр, можно шаг за шагом проследить Фурье-синтез изображения.

Если в центре фокальной плоскости поместить маленький непрозрачный экран, закрывающий центральное пятно Фурье-спектра, то получим изображение сетки с обращенным контрастом.

Если в центре непрозрачного экрана в фокальной плоскости оставить малое отверстие, то получим практически равномерно засвеченный экран.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

8.4. Специальные методы наблюдения фазовых объектов.

Часто возникает необходимость проанализировать световое поле, которое модифицируется фазовыми объектами. Рассмотрим фазовые объекты, которые практически не поглощают свет $|t(x,y)| \sim 1$ и слабо меняют фазу $|\Phi(x,y)| \ll 1$:

$$t(x,y) = |t(x,y)e^{-i\Phi(x,y)}| \cong 1 - i\Phi(x,y) \tag{13.27}$$

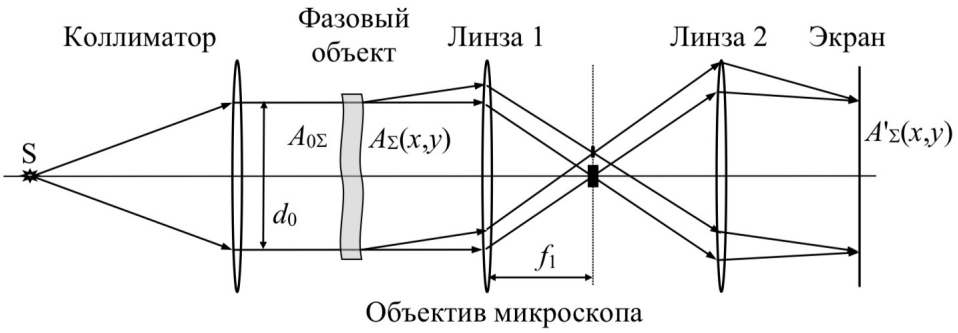


Рис. 13.14. Схема наблюдения объекта в микроскопе.

Схема наблюдения такого объекта представлена на (Рис. 13.14).

Комплексная амплитуда светового поля сразу после фазового объекта:

$$A_\Sigma(x,y) = A_{0\Sigma}t(x,y) \cong \underbrace{A_{0\Sigma}}_{const(x,y)} t(x,y) \cong A_{0\Sigma}\left(1 - i\Phi(x,y)\right) \tag{13.28}$$

Тогда интенсивность прошедшего света:

$$I_\Sigma(x,y) \cong I_{0\Sigma} \tag{13.29}$$

А. Метод темного поля. Кружок Эйри.

В отсутствие фазового объекта в фокальной плоскости линзы будет наблюдаться в основном четкое светлое пятно в центре – **кружок Эйри**. Он возникает, т.к. аппертура пучка, который проходит через линзу, ограничена.

В заднем фокусе объектива микроскопа – непрозрачный диск, закрывающий кружок Эйри радиуса $r_д = \vartheta_д f_1 \cong 1.22 \cdot \lambda/d_0 \cdot f_1$:

$$A'_\Sigma(x,y) \cong A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\Phi(x,y) - A_{0\Sigma} \cong -iA_{0\Sigma}\Phi(x,y) \tag{13.30}$$

$$I'_\Sigma(x,y) \cong I_{0\Sigma}\Phi^2(x,y) \tag{13.31}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Б. Метод фазового контраста. Светлый и темный фазовый контраст.

Фазовый рельеф преобразуется в амплитудный рельеф с помощью фазовой пластинки, перекрывающей кружок Эйри. Пластинка толщиной $d = (2k+1)\frac{\lambda_0}{4(n-n_0)}$ осуществляет изменение фазы $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = k_0(n-n_0)d = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-n_0)d = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \tag{13.32}$$

$$e^{-i\Delta\varphi} = e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{2}} = -i(-1)^k \tag{13.33}$$

Тогда:

$$A'_\Sigma(x,y) \cong -i(-1)^k A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\Phi(x,y) = -iA_{0\Sigma}\Big((-1^k) + \Phi(x,y)\Big) \tag{13.34}$$

$$I'_\Sigma(x,y) \cong I_{0\Sigma}\Big(1 + 2(-1)^k\Phi(x,y)\Big) \tag{13.35}$$

При $k = 2l+1$ – **темный**, а при $k = 2l$ – **светлый фазовый контраст**.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 14. Дифракционные приборы, голография. Распространение света в веществе.

8.5. Роль дифракции в приборах, формирующих изображение.

Будем считать, что приборы, формирующие изображение, с точки зрения геометрической оптики идеальные. Т.е. каждой светящейся точке светящейся поверхности в соответствие формируется сфетящаяся точка в плоскости изображений (создается стигматическое изображение светящегося объекта).

Изображение светящейся точки формируется пучком света, который ограничен в направлении, перпендикулярном направлению распространения этого пучка. Следовательно будут наблюдаться дифракционные явления. Конечная апертура линзы улавливает конечную полосу пространственных частот спектра излучения объекта.

Изображением светящейся точки в сопряженной плоскости является дифракционная картина, состоящая из концентрических колец, окружающих центральный светлый кружок (пятно) с радиусом $r_д$ – **кружок Эйри**. Изображение объекта есть наложение таких кружков и дифракционных колец.

А. Предел разрешения и разрешающая способность оптического прибора.

Разрешающая свособность оптических приборов ограничивается дифракцией Фраунгофера на их входной апертуре.

Предел углового (линейного) разрешения оптического прибора $\delta\vartheta$ (δl) – минимальное угловое (линейное) расстояние между двумя светящимися точками объекта, которые разрешает прибор.

Разрешающая свособность (сила) оптического прибора R – величина, обратная пределу разрешения – $R_\vartheta = 1/\delta\vartheta$ $(R_l = 1/\delta l)$.

Б. Телескоп.

Телескоп – оптический прибор для наблюдения далеких объектов с малыми угловыми размерами.

На входе телескопа стоит линза (объектив) с радиусом r_0 (Рис. 14.1). Рассмотрим две светящиеся точки, находящиеся на большом расстоянии от прибора. Угловой размер объекта Ω должен быть таким, чтобы волна, приходящая в область расположения объектива, была пространственно когерентной: $\Omega < \lambda/d_0$.

Пусть плоская волна от первого источника падает перпендикулярно линзе. Тогда

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

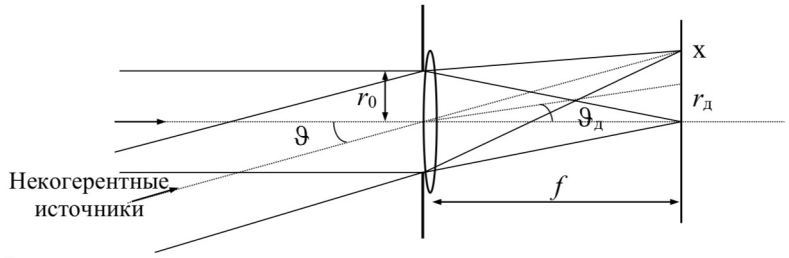


Рис. 14.1. Схема телескопа.

в центре фокальной плоскости появится кружок Эйри радиуса $r_д = \vartheta_д f$. Пусть плоская волна от второго источника падает на объектив под углом ϑ, вследствие чего в точке на фокальной плоскости будет наблюдаться еще один кружок Эйри.

В соответствие с критерием Рэлея: $\vartheta \geqslant \vartheta_д = 0.61\frac{\lambda}{r_0} = \delta\vartheta$, $R_\vartheta = \frac{1}{\delta\vartheta} = \frac{r_0}{0.61\lambda}$.

Оценим эти величины. Для телескопа радиуса $r_0 = 2$м и длины волны регистрируемого светового излучения $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$м:

$$\begin{aligned} &\delta\vartheta = 0.61\frac{\lambda}{r_0} = 0.61\frac{0.5\cdot 10^{-6}}{2}\cdot\frac{180\cdot 60\cdot 60}{3.14} \cong 0.03'', \\ &R_\vartheta = \frac{1}{\delta\vartheta} \cong 7\cdot 10^6 \text{рад}^{-1}. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Для глаза радиус зрачка $r_0 = 2$мм:

$$\begin{aligned} &\delta\vartheta = 0.61\frac{\lambda}{r_0} = 0.61\frac{0.5\cdot 10^{-6}}{2\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{180\cdot 60\cdot 60}{3.14} \cong 30'', \\ &R_\vartheta = \frac{1}{\delta\vartheta} \cong 7\cdot 10^3 \text{рад}^{-1}. \end{aligned} \tag{14.2}$$

B. Микроскоп. Уравнение синусов Аббе.

Микроскоп – оптический прибор для изучения объектов малых линейных размеров.

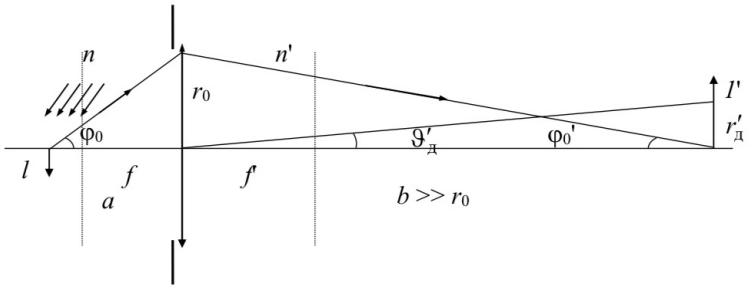


Рис. 14.2. Схема микроскопа.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть r_0 – радиус объектива микроскопа (Рис. 14.2), а показатели преломления среды в которой находится объект и среды, в которой находится изображение, разные и соответственно равны n и n'. Объект, излучение которого будем считать **некогерентным**, размера l помещается перед передней фокальной плоскостью. Размер получившегося изображения – l'. φ_0' – угловая апертура линзы из места расположения источника, φ_0 – угловая апертура линзы из области расположения светящегося источника.

$$\frac{l'}{l} = \frac{f}{a-f}; \quad l' = l\frac{f}{a-f} \tag{14.3}$$

Значит, если $(a-f) \ll f$, то $l' \gg l$.

Запишем уравнение для такой линзы (Рис. 14.2):

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{b} = 1; \quad \frac{f'}{b} = 1 - \frac{f}{a} = \frac{a-f}{a} \ll 1; \quad b \gg f' > r_0 \tag{14.4}$$

Значит $\vartheta_0' \ll 1$.

Если $l \ll \sqrt{\lambda(a-f)}$, то оптическая длина пути для всех сопряженных точек источника и излучения одинаковы с точностью $\lambda/2$. При этом условии выполняется уравнение синусов Аббе:

$$nl\sin\varphi_0 = n'l'\sin\varphi_0' \tag{14.5}$$

Условие разрешения:

$$l' \geqslant r_{\text{д}}' = \vartheta_{\text{д}}' b = 0.61\frac{\lambda'}{r_0}b \cong 0.61\frac{\lambda_0}{n'\sin\varphi_0'} \tag{14.6}$$

С учетом (14.5) и (14.6) получаем:

$$l \geqslant 0.61\frac{\lambda_0}{n\sin\varphi_0} = \delta l, \tag{14.7}$$

$$\delta l = 0.61\frac{\lambda_0}{n\sin\varphi_0} = 0.61\frac{\lambda}{\sin\varphi_0} \tag{14.8}$$

$$R \equiv \frac{1}{\delta l} = \frac{n\sin\varphi_0}{0.61\lambda} \tag{14.9}$$

Здесь $n\sin\varphi_0$ – **числовая апертура объектива**. Чем она больше, чем меньше предельное разрешение, а разрешающая сила больше.

Как видим, угловая апертура φ_0 лучей, формирующих изображение, должна быть как можно больше.

Для повышения разрешающей свособности микроскопа применяют также **иммерсию** – заполнение пространства межлу покровным стеклом, на котором размещается исследуемый объект, и фронтальной линзой объектива прозрачной жидкостью с возможно большим значением показателя преломления.

Оценим предел линейного разрешения при $n \sim 1.5$ и $\varphi_0 \sim \pi/6$:

$$\delta l = 0.61 \frac{\lambda_0}{n \sin \varphi_0} \cong \frac{0.61 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}}{1.5 \cdot 0.5} = 0.4\text{мкм} \tag{14.10}$$

Дальнейшее уменьшение разрешающей способности возможно только при уменьшении длины волны.

Рассмотрим теперь случай **когерентного** освещения объекта.

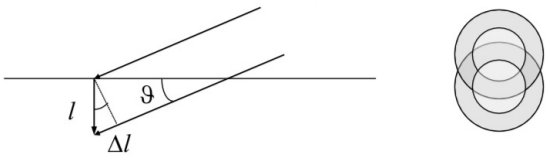


Рис. 14.3. Когерентное освещение объекта в микроскопе.

Пусть поверхность объекта освещается плоской монохроматической волной под углом ϑ к нормали к плоскости объекта (Рис. 14.3), тогда, если l – расстояние между светящимися точками, то разность фаз между волнами, приходящими к этим вторичным источникам, будет равна:

$$\Delta\varphi = k\Delta l = kl \sin \vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta, \tag{14.11}$$

где Δl – разность хода волн, λ – длина волны в среде со стороны объекта.

Такова же будет и разность фаз между колебаниями, приходящими в область пересечения дифракционных кружков Эйри от двух вторичных когерентных источников. Интенсивность в этой области будет описываться уравнением двухволновой интерференции:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi) \tag{14.12}$$

Меняя угол наклона ϑ, можно менять разрешающую способность объектива. Если интерференционный член будет положительным, то разрешение ухудшится, если отрицательным – улучшится.

При $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l \sin\vartheta = (2m+1)\pi$, $\sin\vartheta = \frac{2m+1}{2}\frac{\lambda}{l}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, что возможно лишь при $l \geqslant \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_0}{2n} = l_{min}$, в области пересечения дифракционных кружков Эйри от двух вторичных источников всегда будет малая интенсивность $\left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$; разделение максимумов будет выражено особенно отчетливо и разрешение повысится примерно вдвое:

$$\delta l = l_{min} \cong \frac{\lambda_0}{2n} \cong 0.17\text{мкм} \tag{14.13}$$

Таким образом, применение подобранного наклонного освещения когерентным источников приводит к повышению разрешающей свособности микроскопа.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

8.6. Запись и восстановление светового поля – голография.

При обычном фотографировании на пленку (фотопластинку) падает объектная волна (световая волна, которая испускается или рассеивается объектом, который мы хотим запечатлеть). За счет различных химических реакций, возникающих в светочувствительном слое под действием волны, фиксируется интенсивность этой волны. Т.е. записываться информация только об амплитуде светового поля и полностью теряется информация о его фазе.

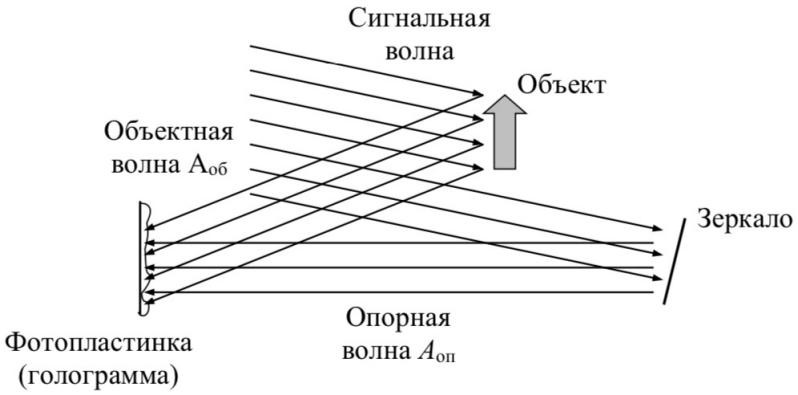


Рис. 14.4. Схема записи светового поля.

Основная идея голографии – фотографируется не само объектное световое поле $A_{об}$, идущее от светящегося объекта, а картина интерференции этого поля с когерентной опорной волной $A_{оп}$ (Рис. 14.4).

На объект падает когерентная **сигнальная волна** (ее пространственная когерентность должна быть больше, чем объект). Волна, отраженная от объекта (рассеянная объектом) достигает пластинки с фоточувствительным слоем – **объектная волна**. Часть сигнальной волны, прошедшая мимо объекта, поворачивается зеркалом – **опорная волна**. Если пространственная когерентность сигнальной волны достаточно большая, то объектная и опорная волны оказываются когерентными.

Картина интерференции объектной и опорной волн, записанная на фотопластинку, называется **голограммой**.

Амплитуда светового поля в плоскости фотопластинки:

$$A(x,y) = A_{об}(x,y) + A_{оп} \tag{14.14}$$

Распределение интенсивности в плоскости фотопластинки:

$$I(x,y) = \frac{1}{2}|A(x,y)|^2 = \frac{1}{2}|A_{оп} + A_{об}|^2 = I_{оп} + I_{об} + \frac{1}{2}A_{оп}A^*_{об} + \frac{1}{2}A^*_{оп}A_{об} \tag{14.15}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Это распределение интенсивности фиксируется на фотопластинке. Важно, что в этом выражении есть слагаемые, содержащие информацию о фазе объектной волны.

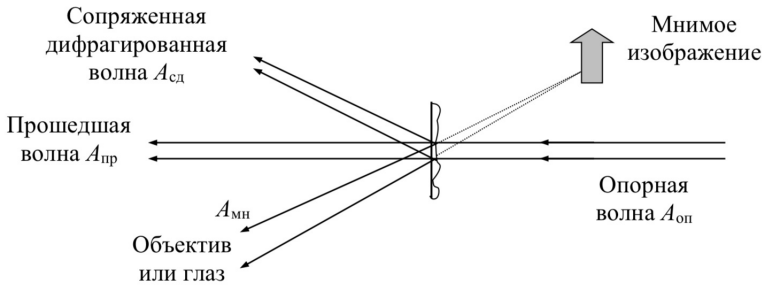


Рис. 14.5. Схема восстановления светового поля.

Для восстановления светового поля голограмму освещают опорной волной $A_{оп}$ (Рис. 14.5). В результате дифракции опорной волны на голограмме возникает несколько световых волн, одна из которых в точности повторяет поле предметной волны.

Функция пропускания света голограммой – $t(x,y) = 1 - \alpha I(x,y)$, поскольку зачернение, полученное при экспонировании фотопластинки, пропорционально интенсивности излучения $I(x,y)$, а величина коэффициента α зависит от чувствительности пластинки, времени экспонирования и интенсивности сигнальной волны. Световое поле, образованное на задней поверхности голограммы:

$$\begin{aligned} A'(x,y) &= A_{оп}t(x,y) = A_{оп} - \alpha I(x,y)A_{оп} = \\ &= A_{оп} - \alpha\left(I_{оп}A_{оп} + I_{об}A_{оп} + \frac{1}{2}A_{оп}^2A_{об}^* + I_{оп}A_{об}\right) = \\ &= (1 - \alpha I_{оп} - \alpha I_{об})A_{оп} - \frac{\alpha}{2}A_{оп}^2A_{об}^* - \alpha I_{оп}A_{об} = A_{пр} + A_{сд} + A_{мн} \end{aligned} \tag{14.16}$$

Прошедшая волна $A_{пр} = (1 - \alpha I_{оп} - \alpha I_{об})A_{оп}$ в результате свободной дифракции распространяется в прямом направлении и с точностью до константы воспроизводит опорную волну.

Волна $A_{мн} = -\alpha I_{оп}A_{об}$ с точностью до константы повторяет объектное поле и несет **мнимое изображение объекта**.

Сопряженная дифрагированная волна $A_{сд} = \frac{\alpha}{2}A_{оп}^2A_{об}^*$ несет в себе трансформированную информацию о действительном изображении объекта. ($k_{x,y}^{мн} = k_{x,y}^{об}, k_{x,y}^{сд} = -k_{x,y}^{об}$, $k^{мн} = k^{сд} = k^{об} = 2\pi/\lambda$).

Для восстановления светового поля голограмму можно освещать также и опорной волной, направленной в противоположную сторону опорной волны, использованной при записи светового поля (Рис. 14.6).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

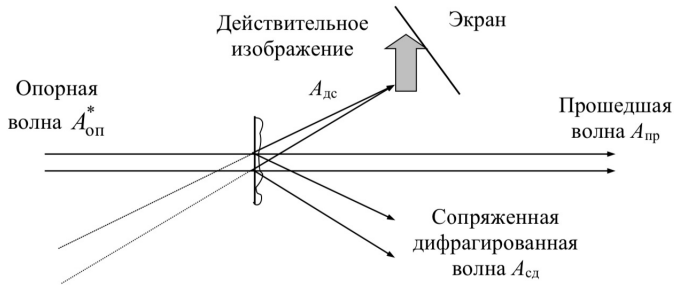


Рис. 14.6. Схема восстановления светового поля.

В результате для светового поля, образованного на передней поверхности голограммы получим:

$$\begin{aligned} A'(x,y) &= A^*_{оп}t(x,y) = A^*_{оп} - \alpha I(x,y)A^*_{оп} = \\ &= A^*_{оп} - \alpha\left(I_{оп}A^*_{оп} + I_{об}A^*_{оп} + I_{оп}A^*_{об} + \frac{1}{2}A^{*2}_{оп}A_{об}\right) = \\ &= (1 - \alpha I_{оп} - \alpha I_{об})A^*_{оп} - \alpha I_{оп}A^*_{об} - \frac{1}{2}\alpha A^{*2}_{оп}A_{об} = A_{пр} + A_{дс} + A_{сд} \end{aligned} \tag{14.17}$$

Как видим, в этом случае можно наблюдать действительное изображение объекта.

При обычном некогерентном освещении голограмма выглядит как почти однотонная мутноватая пластинка.

Глава 5. Распространение света в веществе.

§1. Дисперсия и поглощение света.

Явление **дисперсии** заключается в зависимости оптических характеристик среды от частоты (длины волны) излучения.

Напомним механизм воздействия высокочастотного поля световой волны на среду (вещество). Сила, действующая со стороны электрического поля:

$$\vec{F}_q = q\vec{E}(t) \tag{14.18}$$

При этом частоты изменения электрического поля $\nu \sim 10^{15}$ Гц.

На движущиеся по отношению к лабораторной системе отсчета заряды действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}_q\vec{B}(t)], \tag{14.19}$$

где v_q – скорость движения заряда в веществе (среде).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Сравним модули сил, действующих на заряд со стороны электрического и магнитного поля световой волны:

$$\frac{F_q}{F_L} = \frac{E(t)}{v_q B(t) \sin\left(\vec{v}\vec{B}(t)\right)} \geqslant \frac{v}{v_q} \sim 10^5 \tag{14.20}$$

В неравенстве мы учли, что в электромагнитной волне $E(t) = vB(t)$.

Тогда надо ли учитывать воздействие магнитного поля на среду? Похоже что нет, с точки зрения силового воздействия.

Поэтому будем описывать состояние именно электрического поля в среде.

$$\begin{aligned} &\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ &\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum\limits_{i(\Delta V)} \vec{p}_i}{\Delta V} = \sum_j N_j \vec{p}_j = N\vec{p} \end{aligned} \tag{14.21}$$

Здесь ΔV – выделенный физически бесконечно малый объем. $a^3 \ll \Delta V \ll L^3$, где a – характерное расстояние между атомами, L – характерные линейные размеры неоднородности электрического поля. Суммирование по j – суммирование по различным типам атомов и молекул, где N_j – концентрация, $\vec{p}_j$ – электрический диполный момент j-го типа молекул (атомов). N – концентрация молекул в веществе, $\vec{p}$ – среднее по всем молекулам значение электрического дипольного момента.

Материальные уравнения:

$$\begin{aligned} &\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}, \\ &\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \end{aligned} \tag{14.22}$$

где κ – диэлектрическая восприимчивость, $\varepsilon = 1 + \kappa$ – диэлектрическая проницаемость.

1.1. Молекулярная поляризуемость и вектор поляризации. Формула Моссоти-Клаузиуса.

Электрический дипольный момент атома:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \beta \vec{E}' \tag{14.23}$$

Здесь β – **молекулярная поляризуемость**, $\vec{E}'$ – напряженность электрического поля, действующего на атом (молекулу). В общем случае $\vec{E}' \neq \vec{E}$.

Вектор поляризации:

$$\vec{P} = N\vec{p} = \varepsilon_0 N \beta \vec{E}' \tag{14.24}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим неподвижный линейный изотропный однородный диэлектрик во внешнем электрическом поле $\vec{E}_0$. Будем интересоваться электрическим полем, действующим на какую-либо молекулу (атом). Выделим некоторый макроскопический объем радиуса R: $R \gg a \simeq (2-5)\cdot 10^{-10}$м, $R \ll L$.

Тело поляризуется с $\vec{P}$ и результат поляризации, т.е. пространственного перераспределения связанных зарядов, на поверхности появляются заряды. Поверхностная плотность связанных зарадов – σ_{ex}. Если рассмотреть часть тела без сферического объема, то на внутренней поверхности объема R также возникнут поверхностные заряды с σ_{in}.

В соответствие с принципом суперпозиции запишем значение напряженности электрического поля, действующего на молекулу:

$$\vec{E}' = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ex}\vec{E}_{in} + \vec{E}_{dip} \tag{14.25}$$

$\vec{E}_{dip}$ – напряженность электрического поля, создаваемая совокупностью атомов (молекул), находящихся внутри сферического объема R.

Понятно, что

$$\begin{aligned} &\vec{E}_0 + \vec{E}_{ex} = \vec{E}, \\ &\vec{E}_{in} = \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}, \\ &\vec{E}_{dip} \cong 0 \end{aligned} \tag{14.26}$$

Тогда

$$\vec{P} = \varepsilon_0 N\beta\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_0 N\beta\left(\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon-1)} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) \tag{14.27}$$

$$1 = N\beta\frac{\varepsilon+2}{3(\varepsilon-1)} \tag{14.28}$$

Отсюда:

$$\boxed{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{N\beta}{3}} \tag{14.29}$$

Полученное выражение (14.29) – **формула Моссоти-Клаузиуса**.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 15. Дисперсия и поглощение света.

1.1. Молекулярная поляризуемость и вектор поляризации. Формула Моссоти-Клаузиуса. Продолжение.

Будем рассматривать случай немагнитных сред, т.е. $\mu \simeq 1$, $n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда формула Моссоти-Клаузиуса (14.29) можно записать для показателя преломления:

$$\boxed{\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{N\beta}{3}} \tag{15.1}$$

Если рассматривать случай разреженных газов, то $N\beta \ll 1$. Тогда

$$\boxed{n^2 - 1 = \varepsilon - 1 = N\beta} \tag{15.2}$$

1.2. Классическая электронная теория дисперсии. Плазменная частота. Комплексный показатель преломления. Закон Бугера.

Рассмотрим атом с одним *оптическим* электроном массой m и зарядом q.

Учтем, что $m_p/m_e \cong 1836$ и $F_E \gg F_B$.

Электрон рассматривается как затухающий гармонический осциллятор:

$$m\ddot{\vec{x}} = -k\vec{x} - \gamma\dot{\vec{x}} + q\vec{E}'(t), \tag{15.3}$$

где $\vec{x}(\vec{E}')$ – смещение электрона относительно ядра атома под действием локального электрического поля $\vec{E}'$, $-k\vec{x}$ – квазиупругая сила, $-\gamma\dot{\vec{x}}$ – сила трения, введенная для учета поглощения и излучения света электроном.

$$\ddot{\vec{x}} + 2\delta\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = \frac{q}{m}\vec{E}' \tag{15.4}$$

Здесь $\delta \equiv \frac{\gamma}{2m}$ – **коэффициент затухания**, $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ – **собственная частота колебаний** электрона в атоме.

Рассмотрим гармоническую волну. Выражение для напряженности электрического поля, действующего на атом, имеет вид:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = A_0(\vec{r})e^{i\omega t} \tag{15.5}$$

Можем считать, что $\vec{E}(t,\vec{r})$ в атоме является постоянной величиной по отношению к $\vec{x}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Будем искать решение уравнения движения (15.4) для оптического электрона в виде вынужденных колебаний с той частотой, с которой меняется напряженность электрического поля в световой волн:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{i\omega t} \tag{15.6}$$

Подставим решение (15.6) в уравнение движения (15.4):

$$-\omega^2\vec{x}(t) + i2\delta\omega\vec{x}(t) + \omega_0^2\vec{x}(t) = \frac{q}{m}\vec{E}'(t) \tag{15.7}$$

Отсюда получим:

$$\vec{x}(t) = \frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}\vec{E}' \tag{15.8}$$

1) В любой момент времени радиус вектор $\vec{x}(t)$ относительно атома сонаправлен с вектором напряженности электрического поля, действующего на этот атом: $\vec{x}(t) \uparrow\uparrow \vec{E}'(t)$.

2) $\vec{x} = \vec{x}(\omega, \omega_0, \delta)$.

3) $\vec{x}$ – комплексная величина.

Легко понять, что электрический дипольный момент атома (молекулы) при данном рассмотрении:

$$\vec{p} = q\vec{x} = \frac{q^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}\vec{E}' = \varepsilon_0\beta\vec{E}' \tag{15.9}$$

Отсюда молекулярная поляризуемость:

$$\hat{\beta} = \frac{q^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} \tag{15.10}$$

(Над $\hat{\beta}$ пишем $\hat{}$, чтобы подчеркнуть, что молекулярная поляризуемость, а значит и электрический дипольный момент, – комплексная величина.)

Воспользуемся формулой Моссоти-Клаузиуса (15.1):

$$\frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} = \frac{\hat{\varepsilon} - 1}{\hat{\varepsilon} + 2} = \frac{N\hat{\beta}}{3} = \frac{1}{3}\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} = \frac{\omega_{\text{п}}^2}{3}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} \tag{15.11}$$

Здесь $\omega_{\text{п}} \equiv \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}$ – **плазменная частота** (характеристика среды), $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - i\varepsilon'$ – **комплексная диэлектрическая проницаемость**.

Оценка плазменной частоты $\omega_{\text{п}}$ и плазменной длины волны $\lambda_{\text{п}}$.

1) Для конденсированных сред $N = 10^{28}$ м^3:

$$\omega_{\text{п}} = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}} = 1.6 \cdot 10^{-19}\sqrt{\frac{10^{28} \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 9 \cdot 10^9}{9.1 \cdot 10^{-31}}} \cong 5.6 \cdot 10^{15}\text{с}^{-1},$$
$$\lambda_{\text{п}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{п}}} \cong \frac{6.28 \cdot 3 \cdot 10^8}{5.6 \cdot 10^{15}} \cong 0.34 \text{ мкм (ближняя УФ область).} \tag{15.12}$$

2) Для разреженных газов $N = 10^{25}$м^3:

$$\omega_{\text{п}} = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}} = 1.6 \cdot 10^{-19}\sqrt{\frac{10^{25} \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 9 \cdot 10^9}{9.1 \cdot 10^{-31}}} \cong 1.8 \cdot 10^{14}\text{с}^{-1},$$
$$\lambda_{\text{п}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{п}}} \cong \frac{6.28 \cdot 3 \cdot 10^8}{1.8 \cdot 10^{14}} \cong 10.5 \text{ мкм (ИК область).} \tag{15.13}$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - i\varepsilon' \tag{15.14}$$

Комплексный показатель преломления:

$$\hat{n} = \sqrt{\hat{\varepsilon}} = n - in' \tag{15.15}$$

Комплексное волновое число для волны в среде:

$$\hat{k} = k - ik' = \frac{\omega}{c}\hat{n} = \frac{\omega}{c}(n - in') \tag{15.16}$$

Рассмотрим распространение плоской гармонической волны вдоль оси Z в некоторой среде, в которой показатель преломления и волновое число – комплексные величины. Комплексная амплитуда волны:

$$A(z) = A_0 e^{-i\hat{k}z} = A_0 e^{-ikz} e^{-k'z} = A_0 e^{-ikz} e^{-\frac{\omega}{c}n'z} \tag{15.17}$$

Тогда интенсивность данной волны:

$$I(z) = \frac{1}{2}|A(z)|^2 = I_0 e^{-2\frac{\omega}{c}n'z} = I_0 e^{-\alpha z} \tag{15.18}$$

Интенсивность падает при распространении волны вдоль оси Z экспоненциально. $\alpha(\omega) = 2k' = 2\frac{\omega}{c}n'(\omega)$ – **линейный коэффициент поглощения**. Наличие мнимой составляющей в показателе преломления означает наличие эффекта поглощения энергии и самой волны в среде.

Рассмотрим *разреженные* среды ($\hat{n} \sim 1$):

$$\frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} = \frac{(\hat{n} - 1)(\hat{n} + 1)}{3} \cong \frac{2(\hat{n} - 1)}{3} \cong \frac{N\hat{\beta}}{3} = \frac{\omega_{\text{п}}^2}{3}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}, \tag{15.19}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\hat{n} \cong 1 + \frac{\omega_п^2}{2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} \tag{15.20}$$

Вещественная часть комплексного показателя преломления:

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_п^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2} \tag{15.21}$$

Линейный коэффициент поглощения:

$$\alpha(\omega) = 2\frac{\omega}{c}n' = \frac{\omega_п^2}{c} \frac{2\delta\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2} \tag{15.22}$$

1.3. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты. Дисперсионные формулы.

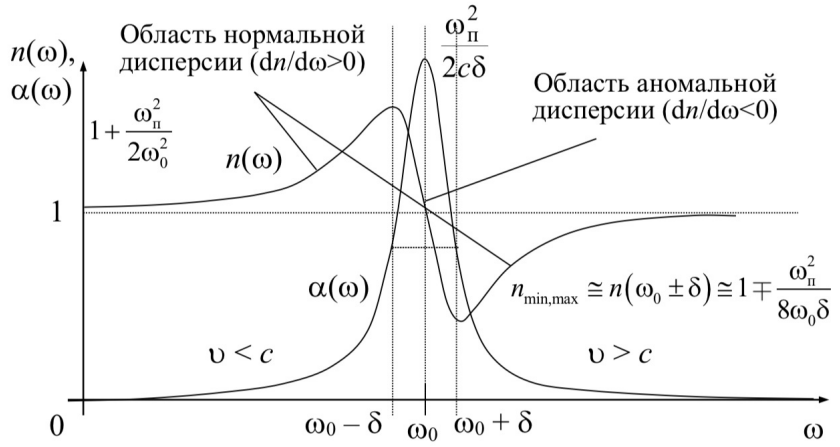


Рис. 15.1. Зависимость показателя преломления n и линейного коэффициента поглощения α от частоты ω в случае разреженного газа.

На (Рис. 15.1) приведена зависимость показателя преломления n и линейного коэффициента поглощения α от частоты ω в случае разреженного газа. ω_0 – частота собственных колебаний оптического электрона. Понятно, что при $\omega = \omega_0$ $n = 1$, при $\omega \to \infty$ $n \to 1$, а при $\omega \to 0$ показатель преломления будет $1 + \frac{\omega_п^2}{2\omega_0^2}$. (Напомним, что $\omega \to 0$ означает воздействие постоянным электрическим полем.)

Пусть коэффициент затухания $\delta \ll \omega_0$. При значениях частоты $\omega_0 - \delta$ и $\omega_0 + \delta$ будут наблюдаться экстремумы показателя преломления:
$n_{min,max} \cong n(\omega_0 \pm \delta) \cong 1 \mp \frac{\omega_п^2}{8\omega_0\delta}$.

Пусть коэффициент затухания $\delta \ll \omega_0$. Тогда форма линии для зависимости $\alpha(\omega)$ – Лоренцевская (форма типа $1/(1+x^2)$). Зависимость имеет максимум в точке ω_0: $\alpha_{max} = \frac{\omega_п^2}{2c\delta}$. Ширина максимума на половине высоты: 2δ.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Всю область значений частот можно разделить на две характерные области:

1) Область *нормальной дисперсии*: $|\omega - \omega_0| > \delta$. Здесь $\frac{dn}{d\omega} > 0$. Увеличение частоты приводит к тому, что показатель преломления увеличивается. Спектральные составляющие с большей частотой отклоняются на границе раздела двух сред на больший угол.

2) Область *аномальной дисперсии*: $|\omega - \omega_0| < \delta$. Здесь $\frac{dn}{d\omega} < 0$.

Обратим внимание, что фазовая скорость волны (задающая скорость перемещения фронта волны в пространстве) $v = c/n$. При $\omega < \omega_0$ $v < c$, а при $\omega > \omega_0 > c$. Но в эксперименте перенос энергии и импульса происходит не со скоростью фазового фронта.

Факты, подтверждающие данную теорию дисперсии:

1) Нормальная дисперсия. Прозрачные оптические материалы должны обладать нормальной дисперсией. Короткие волны должны преломляться сильнее, чем длинные. Это наблюдается во всех прозрачных средах (когда $|\omega - \omega_0| > \delta$). Показатель преломления здесь практически вещественный. В эксперименте определяется **молекулярная рефракция** R:

$$R \equiv \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\frac{\mu}{\rho} = \frac{N\beta}{3}\frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A\beta}{3} = const(\rho) \tag{15.23}$$

2) Аномальная дисперсия. Ее существование подтверждается экпериментом. Аномальная дисперсия имеет место в узкой области частот вблизи линии поглощения, поэтому наблюдать ее – трудная экспериментальная задача.

3) Дисперсия в области низких частот. Для разреженной газообразной среды в пределе низких частот $\omega \ll \omega_0$ нетрудно получить **дисперсионную формулу Коши**:

$$\begin{aligned} n - 1 &= \frac{\omega_п^2}{2}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2} \cong \frac{\omega_п^2}{2}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_п^2}{2\omega_0^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right), \\ n - 1 &= A + \frac{B}{\lambda^2}. \end{aligned} \tag{15.24}$$

Эксперимент показывает, что эта формула хорошо описывает дисперсию газов в видимой и инфракрасной областях спектра.

4) Дисперсия в области высоких частот. Для любой среды в пределе высоких частот $\omega \gg \omega_0$ с учетом $\hat{n} \to n \to 1$ получим:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2} \cong \frac{n^2-1}{3}\frac{\omega_{\text{п}}^2}{3}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i2\delta\omega} \cong -\frac{\omega_{\text{п}}^2}{3\omega^2},$$
$$n^2 \cong 1-\frac{\omega_{\text{п}}^2}{\omega^2}. \tag{15.25}$$

5) Теория дисперсии нашла свое подтверждение в квантовой теории, которая показывает, что при не очень сильных световых полях (когда можно пренебречь изменением заселенностей квантовых уровней под действием света) динамика электрического дипольного момента атома действительно описывается уравнением классического осциллятора.

Напомним, что вектор поляризации в общем случае – сумма по всем электрическим возможным осцилляторам, которые есть в среде (14.21) (разные оптические электроны одного атома, оптические электроны разных атомов, электрическая система). Тогда возможно тривиальное обобщение полученных выше дисперсионных формул:

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = 1+\sum_j N_j\hat{\beta}_j = 1+\omega_{\text{п}}^2\sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2-\omega^2+i2\delta_j\omega}, \tag{15.26}$$

$$\hat{n}(\omega) = 1+\frac{\omega_{\text{п}}^2}{2}\sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2-\omega^2+i2\delta_j\omega}. \tag{15.27}$$

Здесь $f_j = \frac{N_j q_j^2}{m_j}\frac{m}{Nq^2} \sim \frac{m}{m_j}$ – **сила j-го осциллятора**.

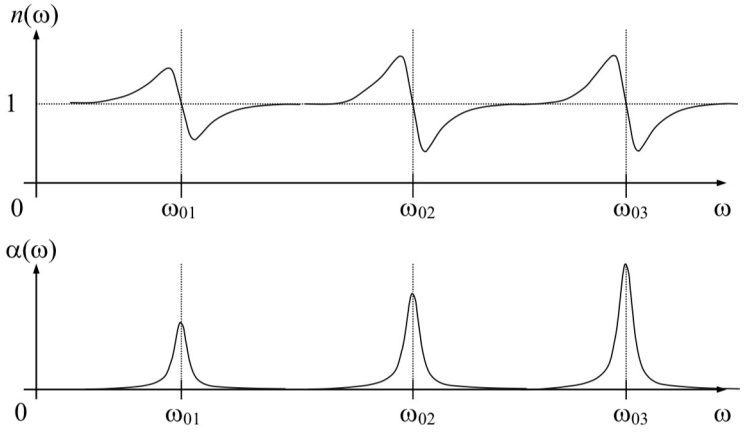


Рис. 15.2. Зависимость показателя преломления n и коэффициента поглощения α от частоты ω в общем виде.

Зависимости показателя преломления n и коэффициента поглощения α от частоты ω в общем виде качественно представлены на (Рис. 15.2).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1.4. Распространение светового импульса в диспергирующей среде.

Рассмотрим прозрачные диспергирующие среды, то есть $|\omega_0 - \omega| > \delta$: $\hat{k}(\omega) \cong k(\omega)$, $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} > 0$.

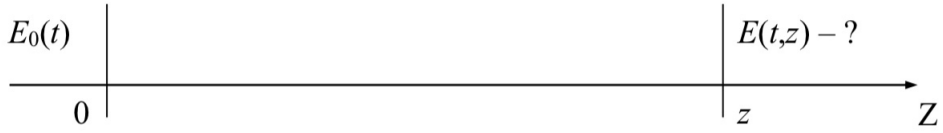


Рис. 15.3. Распространение светового импульса в прозрачной диспергирующей среде.

Пусть в такой среде распространяется световой импульс (Рис. 15.3). Известна напряженность электрического поля в точке $z = 0$: $E(t, z = 0) = E_0(t)$. Хотим узнать значение напряженности электрического поля $E(t, z)$.

Три этапа решения.

1) *Фурье-анализ* входного импульса $E_0(t)$:

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_0(i\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega, \tag{15.28}$$

где

$$E_0(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-i\omega t'} \mathrm{d}t' \tag{15.29}$$

2) *Преобразование* спектральных компонент входного импульса $E_0(t)$ диспергирующей средой:

$$E(i\omega, z) = E_0(i\omega) e^{-ik(\omega)z} \tag{15.30}$$

3) *Фурье-синтез* импульса на выходе:

$$E(t,z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(i\omega, z) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-ik(\omega)z} e^{i\omega(t-t')} \mathrm{d}t' \mathrm{d}\omega \tag{15.31}$$

Линейная прозрачная среда с дисперсией первого порядка – $k(\omega) \cong k_0 + k_0'(\omega - \omega_0)$. Меняя порядок интегрирования в (15.32) получим:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$E(t,z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} E_0(t')e^{-i\left(k_0+k_0'(\omega-\omega_0)\right)z}e^{i\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t' =$$

$$= e^{-i\left(k_0-k_0'\omega_0\right)z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(E_0(t')\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\left(-k_0'z+t-t'\right)}\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}t' = \tag{15.32}$$

$$= e^{-i\left(k_0-k_0'\omega_0\right)z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_0(t')\delta\left(t'-(t-k_0'z)\right)\mathrm{d}t' = e^{-i(k_0-k_0'\omega_0)z}E_0(t-k_0'z)$$

Интенсивность волны:

$$I(t,z) = \frac{1}{2}\left\langle|E(t,z)|^2\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle|E_0(t-k_0'z)|^2\right\rangle = I_0(t-k_0'z) \tag{15.33}$$

В среде с дисперсией первого порядка узкополосный световой импульс с несущей частотой ω_0 распространяется без изменения формы с постоянной **групповой скоростью** u_0:

$$\mathrm{d}\left(t-k_0'z\right) = \mathrm{d}t - k_0'\mathrm{d}z = 0, \quad u_0 = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{k_0'} = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\omega_0} - const \tag{15.34}$$

Возьмем производную от выражения $k(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega)$:

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{c}\left(n(\omega)+\omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}om}\right) \tag{15.35}$$

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c}{n(\omega)+\omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}} = \frac{v(\omega)}{1+\frac{\omega}{n(\omega)}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}} \tag{15.36}$$

Напомним, что ведем рассмотрение случая прозрачных сред, то есть $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega > 0$ (область нормальной дисперсии).

Из (15.36) следует, что $u \leqslant v$, $u \leqslant c$.

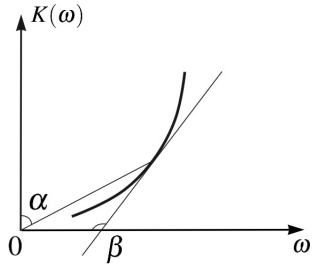


Рис. 15.4. Зависимость волнового числа $k(\omega)$ от частоты ω.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Возьмем произвольную точку на зависимости волнового числа $k(\omega)$ от частоты ω (Рис. 15.4). α – угол между прямой, соединяющей начало координат и эту точку, и осью k. β – угол между касательной к кривой в этой точке и осью ω. Тогда:

$$tg\alpha = v, \quad tg\beta = u \tag{15.37}$$

Продифференцируем левую и правую части выражения $\omega = k(\omega)v(\omega)$ по частоте:

$$u(\omega) = v(\omega) + k(\omega)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}k} \tag{15.38}$$

Т.к. $k = 1\pi/\lambda$, получаем **формулу Рэлея**:

$$\boxed{u(\omega) = v(\omega) - \lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}} \tag{15.39}$$

Дисперсионное расплывание волновых пакетов.

В линейных прозрачных средах с дисперсией второго и более порядков групповая скорость $u(\omega)$ зависит от частоты света, имеет место дисперсия групповых скоростей:

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k_0 + k_0'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}k_0''(\omega - \omega_0)^2 + \ldots, \\ u(\omega) &= \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{k_0' + k_0''(\omega - \omega_0) + \ldots}. \end{aligned} \tag{15.40}$$

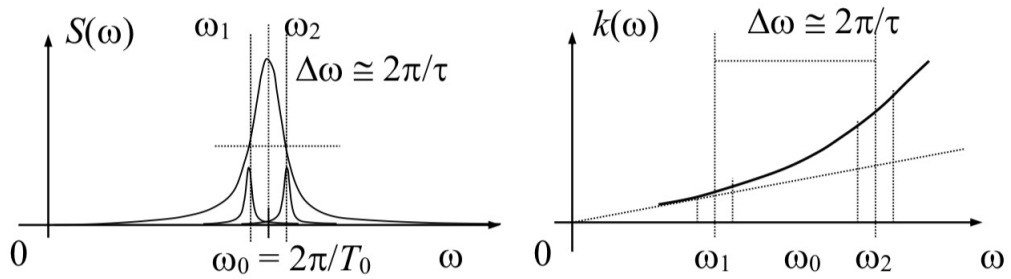


Рис. 15.5. Слева: изображение двух импульсов на краях частотного интервала исходного светового импульса;
Справа: зависимость волнового числа k от частоты ω.

Рассмотрим два узкополосных волновых пакета (Рис. 15.5) (импульса) с частотами ω_1 и ω_2 на краях частотного интервала $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ исходного светового импульса. При этом для волновых пакетов средя является диспергирующей средой с дисперсией первого порядка.

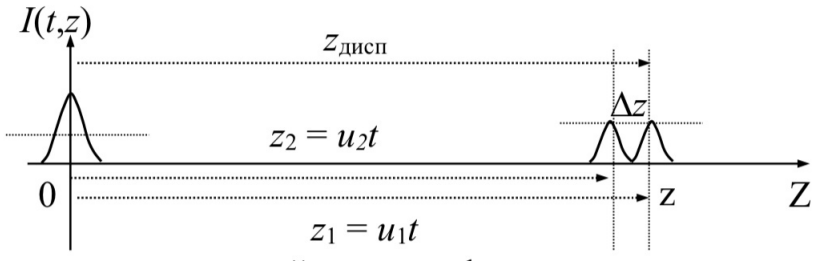


Рис. 15.6. Распространение световых импульсов в пространстве.

Эти пакеты вначале находятся вместе в начале координат, а затем распространяются в пространстве с разными групповыми скоростями u_1 и u_2. За время t эти пакеты пройдут расстояния z_1 и z_2 соответственно (Рис. 15.6).

В точке с координатой z_1 после фиксации первого пакета второй пакет будет зафиксирован через время:

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_2} t = \frac{u_1 - u_2}{u_2 u_1} z_1 = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) z_1 = (k_2' - k_1') z_1 \cong k_0'' \Delta\omega z_1 \cong \frac{2\pi k_0''}{\tau} z_1 \quad (15.41)$$

Из-за такой задержки между пакетами начнет увеличиваться длительность импульса примерно на ту же величину. Выберем расстояние $z_{\text{дисп}}$ такое, чтобы задержка между пакетами Δt равнялась длительности импульса τ в начале процесса, и назовем ее **дисперсионной длиной** импульса в данной среде, тогда:

$$\boxed{z_{\text{дисп}} = \frac{\tau^2}{2\pi k_0''}} \quad (15.42)$$

Как видим, чем короче исходный импульс (шире его частотный спектр), тем быстрее он расплывается.

Дисперсионная длина светового импульса в среде – расстояние вдоль направления распространения светового импульса в прозрачной диспергирующей среде, на котором его длительность увеличивается вдвое.

Дальняя дисперсионная зона светового импульса в среде – расстояния z, существенно превышающие дисперсионную длину $z \gg z_{\text{дисп}}$. В дальней дисперсионной зоне импульс "забывает"свою первоначальную форму.

Оценим дисперсионную длину светового импульса для оптического волокна. Пусть $\tau \sim 1\text{пс} = 10^{-12}\text{с}$ и $k_0'' = 3 \cdot 10^{-26}\text{с}^2/\text{м}$, тогда:

$$z_{\text{дисп}} = \frac{\tau^2}{2\pi k_0''} = \frac{10^{-24}}{6.28 \cdot 3 \cdot 10^{-26}} = 5.3\text{м} \quad (15.43)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 16. Оптические явления на границе двух сред. Анизотропные среды.

§2. Оптические явления на границе раздела изотропных немагнитных диэлектриков.

Рассмотрим границу раздела двух сред. Среды – изотропные немагнитные диэлектрики: $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\mu_{1,2} = 1$. Пусть на поверхности раздела сред нет ни поверхностных свободных зарядов ($\sigma = 0$), ни поверхностных токов проводимости ($\vec{i} = 0$).

2.1. Законы отражения и преломления света.

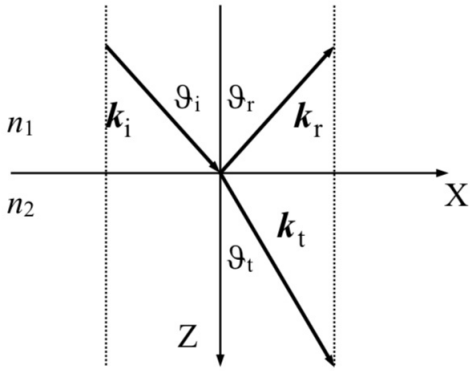


Рис. 16.1. Отражение и преломление света.

Пусть на границу раздела двух сред падает плоская волна (Рис. 16.1). Плоская монохроматическая линейно поляризованная световая волна:

$$\vec{E} = \vec{A}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_t \tag{16.1}$$

Здесь $\vec{E}_t$ – прошедшая волна, $\vec{E}_i$ – падающая волна, $\vec{E}_r$ – отраженная волна.
Граничное условие $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$:

$$\vec{A}_{i\tau}e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})} + \vec{A}_{r\tau}e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r\cdot\vec{r})} = \vec{A}_{t\tau}e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t\cdot\vec{r})} \tag{16.2}$$

Тогда в любой момент времени t:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \tag{16.3}$$

Для всех точек, лежащих на границе раздела двух сред:

$$\begin{aligned}
&\vec{k}\cdot\vec{r} = (\vec{k}_n + \vec{k}_\tau)\cdot\vec{r}_\tau = \vec{k}_\tau\cdot\vec{r}_\tau \\
&\vec{k}_{i\tau} = \vec{k}_{r\tau} = \vec{k}_{t\tau} \\
&k_i \sin\vartheta_i = k_r \sin\vartheta_r = k_t \sin\vartheta_t \\
&k_0 n_1 \sin\vartheta_i = k_0 n_1 \sin\vartheta_r = k_0 n_2 \sin\vartheta_t \\
&n_1 \sin\vartheta_i = n_1 \sin\vartheta_t = n_2 \sin\vartheta_t
\end{aligned} \tag{16.4}$$

1) Частоты падающей, отраженной и преломленной волн равны.

2) Волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела двух сред в точке падения.

3) Угол падения равен углу отражения: $\vartheta_i = \vartheta_r$.

4) Закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_t} = \frac{n_2}{n_1} \equiv n \tag{16.5}$$

Плоскость падения плоской световой волны – плоскость, образованная волновым вектором падающей волны и нормалью к поверхности раздела сред.

2.2. Формулы Френеля.

Граничные условия – $\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n}$, $\vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n}$, $\vec{E}_{2\tau} = \vec{E}_{1\tau}$, $\vec{H}_{2\tau} = \vec{H}_{1\tau}$.
Свойства плоских волн – $[\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B}$, $[\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D}$; $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0}H$.
Материальные уравнения – $\vec{D}_{1,2} = \varepsilon_0\varepsilon_{1,2}\vec{E}_{1,2}$, $\vec{B}_{1,2} = \mu_0\vec{H}_{1,2}$.

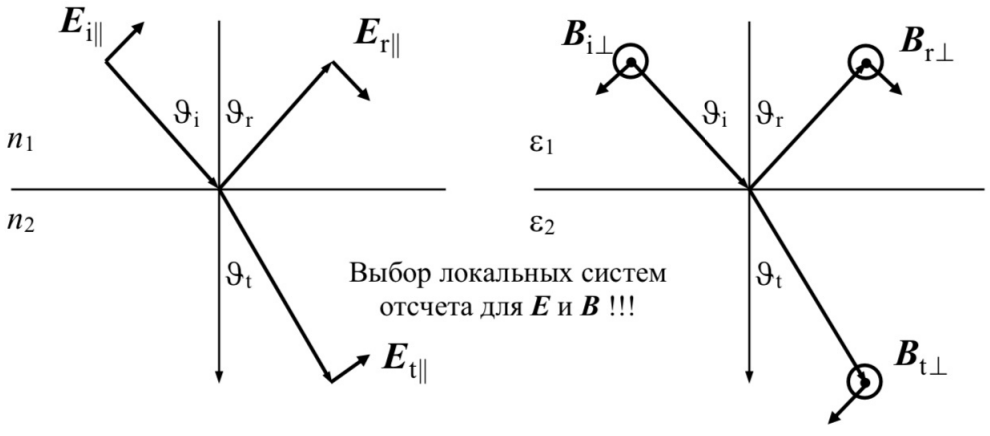


Рис. 16.2. Поляризация падающей волны в плоскости $\vec{E}_\parallel$ и перпендикулярно $\vec{E}_\perp$ плоскости падения.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Введем локальные системы координат для описания напряженности электрического поля и магнитной индукции, т.е. полевых векторов волны светового поля. Локальные координаты вводят так, чтобы при нормальном падении положительные направления основной компоненты полевых векторов напряженности электрического поля совпадали.

Падающую плоскую полну представим в виде суперпозиции двух плоских волн с взаимно перпендикулярными поляризациями – параллельно $\vec{E}_{\parallel}$ и перпендикулярно $\vec{E}_{\perp}$ плоскости падения (Рис. 16.2).

Комплексные коэффициенты отражения $(r_{\parallel}, r_{\perp})$ и пропускания $(t_{\parallel}, t_{\perp})$ (по амплитуде):

$$r_{\parallel} \equiv \frac{A_{r\parallel}}{A_{i\parallel} = -\frac{tg(\vartheta_i - \vartheta_t)}{tg(\vartheta_i + \vartheta_t)}} = -\frac{n^2 \cos\vartheta_i - n^2 - \sin^2\vartheta_i}{n^2\cos\vartheta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_i}}, \tag{16.6}$$

$$t_{\parallel} \equiv \frac{A_{t\parallel}}{A_{i\parallel}} = \frac{2\sin\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)\cos(\vartheta_i - \vartheta_t)} = \frac{2n\cos\vartheta_i}{n^2\cos\vartheta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_i}}, \tag{16.7}$$

$$r_{\perp} \equiv \frac{A_{r\perp}}{A_{i\perp}} = -\frac{\sin(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)} = \frac{\cos\vartheta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_i}}{\cos\vartheta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_i}}, \tag{16.8}$$

$$t_{\perp} \equiv \frac{A_{t\perp}}{A_{i\perp}} = \frac{2\sin\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)} = \frac{2\cos\vartheta_i}{\cos\vartheta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_i}} \tag{16.9}$$

Здесь $n \equiv \frac{n_2}{n_1}$ – показатель преломления второй среды относительно первой; n_1 и n_2 – показатели преломления первой и второй сред.

На (Рис. 16.3) представлены зависимости модулей коэффициентов отражения и пропускания от угла падения при различных значениях относительного показателя преломления.

Существует такой угол падения (как при $n > 1$, так и при $n < 1$), при котором коэффициент отражения, если волна поляризована в плоскости падения, равен нулю. Такой угол называется **угол Брюстера** $\vartheta_B = arctg(n)$.

Если $n < 1$ угол падения $\vartheta_i \geqslant \vartheta_0 = arcsin(n)$, то волна не проходит сквозь поверхность раздела двух сред.

2.3. Эффект Брюстера.

Эффект Брюстера – явление полной поляризации ($\perp$ плоскости падения) отраженной волны при $\vartheta_i + \vartheta_t = \pi/2$ $(tg(\vartheta_i + \vartheta_t) = \infty)$ или при угле падения, равном **углу Брюстера**:

$$\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_t} = \frac{\sin\vartheta_B}{\sin(\pi/2 - \vartheta_B)} = tg\vartheta_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{16.10}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

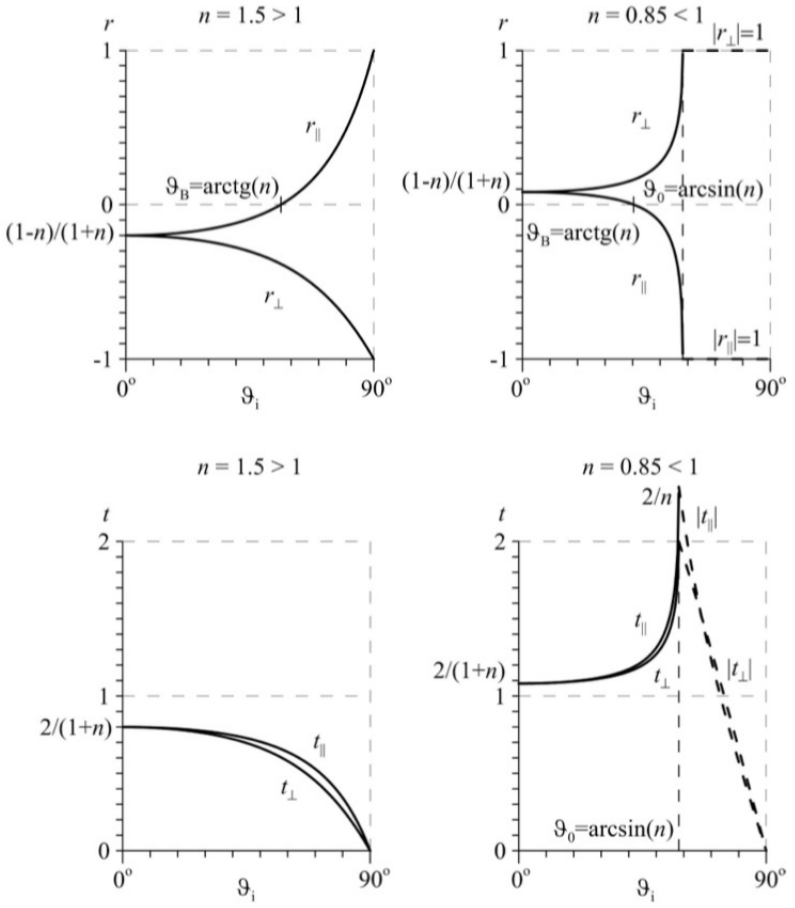


Рис. 16.3. Зависимости модулей коэффициентов отражения и пропускания от угла падения при различных значениях относительного показателя преломления.

Следовательно угол Брюстера:

$$\vartheta_B = arctg\frac{n_2}{n_1} = arctg(n) \tag{16.11}$$

Степень поляризации:

$$P = \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel}, \quad 0 \leqslant P \leqslant 1 \tag{16.12}$$

Пусть на повехность раздела двух сред волна падает под углом Брюстера. Угол между отраженной и прошедшей волнами будет равен $\pi/2$. Во второй среде при проникновернии в нее прошедшей волны под действием напряжености электрического поля заряды начинают двигаться. Так как обе среды изотропные, то движение этих зарядов (в первую очередь, электронов, как наиболее легких и менее связанных) ускоренное. Причем ускорение будет направленно вдоль направления напряженности электрического поля падающей волны. В этом случае носители заряда будут

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

излучать волны с максимальной интенсивностью излучения в направлении, перпендикулярном ускорению.

Коэфф.	$n \equiv \frac{n_2}{n_1}$	$\vartheta_i < \vartheta_B$	$\vartheta_i = \vartheta_B$	$\vartheta_B < \vartheta_i \leq \pi/2(\vartheta_0)$
$t_\parallel$, $t_\perp$ ($\Delta\varphi$)	$n > 1$	>0 (0)	>0 (0)	>0 (0)
	$n < 1$	>0 (0)	>0 (0)	>0 (0)
$r_\parallel$ ($\Delta\varphi$)	$n > 1$	**<0 ($\pm\pi$)**	0	>0 (0)
	$n < 1$	>0 (0)	0	**<0 ($\pm\pi$)**
$r_\perp$ ($\Delta\varphi$)	$n > 1$	**<0 ($\pm\pi$)**	**<0 ($\pm\pi$)**	**<0 ($\pm\pi$)**
	$n < 1$	>0 (0)	>0 (0)	>0 (0)

Рис. 16.4. Знак коэффициентов и изменение фазы волны при прохождении и отражении от граница раздела двух сред.

Для прозрачных сред (n_1 и n_2 – вещественны).

1) На поверхности раздела двух сред пока есть прошедшая волна ($n < 1$: при $\vartheta_i < \vartheta_0$) фазы падающей и прошедшей волн совпадают.

2) На поверхности раздела двух сред разность фаз ($\Delta\varphi$) между падающей и отраженной волнами зависит от поляризации падающей волны и показателя преломления (Рис. 16.4).

2.4. Явление полного внутреннего отражения.

При $n_2 < n_1$ ($n < 1$) существует **угол полного внутреннего отражения** ϑ_0 – наименьший угол падения, при котором нет преломленной волны во второй среде:

$$\sin\vartheta_0 = \frac{n_2}{n_1} = n, \quad \vartheta_0 = arcsin\frac{n_2}{n_1} = arcsin(n) \tag{16.13}$$

В этом случае волна движется вдоль поверхности раздела (Рис. 16.5) с амплитудой, затухающей вглубь второй среды:

$$E_t = A_t e^{i(\omega t - \vec{k}_t\cdot\vec{r})} = A_t e^{i(\omega t - k_t \sin\vartheta_t x - k_t\cos\vartheta_t z)} \tag{16.14}$$

При $\vartheta_i > \vartheta_0$ $\sin\vartheta_i \geqslant n$ и в соответствии с законом Снеллиуса:

$$\cos\vartheta_t = \pm\sqrt{1-\sin^2\vartheta_t} = \pm\frac{\sqrt{n^2\sin^2\vartheta_i}}{n} = \pm i\frac{\sqrt{2\vartheta_i - n^2}}{n}, \tag{16.15}$$

$$E_t = A_t e^{-k_t\frac{\sqrt{\sin^2\vartheta_i - n^2}}{n}z} e^{i(\omega t k_t\sin\vartheta_t x)} = A_t e^{-\frac{z}{\Delta z}} e^{i(\omega t k_t\sin\vartheta_t x)} \tag{16.16}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

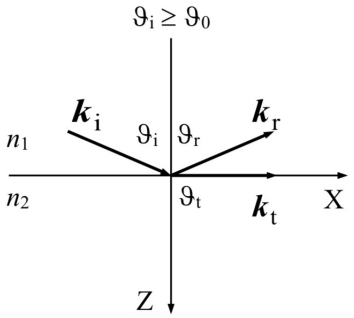


Рис. 16.5. Полное внутреннее отражение.

Глубина проникновения волны в среду Δz вдоль оси Z:

$$\Delta z = \frac{n}{k_t\sqrt{\sin^2\vartheta_i - n^2}} = \frac{n\lambda_t}{2\pi\sqrt{\sin^2\vartheta_i - n^2}} \tag{16.17}$$

Оценка глубины проникновения волны при $\vartheta_i \sim \pi/2$: для $n = 0.8$ – $\Delta z \cong 0.21\lambda_t$, для $n = 0.95$ – $\Delta x \cong 0.48\lambda_t$.

2.5. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света.

Усредненный по времени разрешения прибора вектор Умова-Пойтинга S (плотность потока энергии световой волны с указанием направления потока) - произведение интенсивности вотлны на единичный вектор направления переноса энергии:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = I\vec{n} = \varepsilon_0\varepsilon v\left\langle |E|^2 \right\rangle \vec{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\frac{1}{2}\left\langle |\hat{E}|^2 \right\rangle \vec{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\frac{1}{2}|A|^2\vec{n} \tag{16.18}$$

Коэффициент отражения (по энергии) R – модуль отношения плотностей потоков энергии вдоль нормали к поверхности раздела сред отраженной и падающей волн:

$$R \equiv \left|\frac{I_r\cos(\pi - \vartheta_r)}{I_i\cos\vartheta_i}\right| = \frac{I_r\cos\vartheta_r}{I_i\cos\vartheta_i} = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = |r|^2 \tag{16.19}$$

$$R_\parallel = |r_\parallel|^2, \quad R_\perp = |r_\perp|^2 \tag{16.20}$$

Коэффициент пропускания (по энергии) T – модуль отношения плотностей потоков энергии вдоль нормали к поверхности раздела сред прошедшей и падающей волн:

$$T \equiv \left|\frac{I_t\cos\vartheta_t}{I_i\cos\vartheta_i}\right| = \frac{I_t\cos\vartheta_t}{I_i\cos\vartheta_i} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}|A_t|^2\cos\vartheta_t}{\sqrt{\varepsilon_1}|A_i|^2\cos\vartheta_i} = \frac{n_2}{n_1}|t|^2\frac{\cos\vartheta_t}{\cos\vartheta_i} \tag{16.21}$$

$$T_\parallel = \frac{n_2}{n_1}|t_\parallel|^2\frac{\cos\vartheta_t}{\cos\vartheta_i}, \quad T_\perp = \frac{n_2}{n_1}|t_\perp|^2\frac{\cos\vartheta_t}{\cos\vartheta_i} \tag{16.22}$$

Из формул Френеля следует: $R + T = 1$ – закон сохранения энергии.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

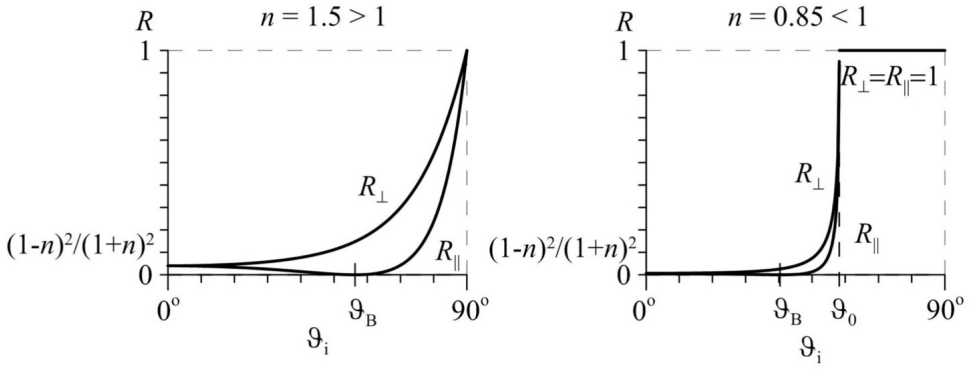


Рис. 16.6. Зависимость коэффициента отражения по энергии от угла падения при различных значениях относительного показателя преломления.

§3. Распространение света в анизотропных средах.

Под анизотропными средами будем понимать те среды, в которых некоторые свойства зависят от направления. Оптическая анизотропия – зависимость отптических свойств среды от направления.

3.1. Описание диэлектрических свойств анизотропных сред. Главные диэлектрические оси.

В случае анизотропных сред (кристаллов в первую очередь) связь вектора поляризации с напряженностью электрического поля в среде можно записать следующим образом:

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \kappa_{ij} E_j \tag{16.23}$$

Здесь P_i – проекция вектора поляризации на i-ю ось системы координат; $i = x, y, z$. Совокупность девяти величин κ_{ij} представляет собой тензор диэлектрической восприимчивости.

В соответствии с определением электрическая индукция:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{16.24}$$

Тогда ее i-я компонента:

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + \varepsilon_0 \sum_j \kappa_{ij} E_j = \varepsilon_0 \sum_j (\delta_{ij} + \kappa_{ij}) E_j \tag{16.25}$$

Здесь $\delta_{ij} + \kappa_{ij} = \varepsilon_{ij}$ – тензор диэлектрической проницаемости, который также характеризуется девятью компонентами; δ_{ij} – символ Кронекера.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Получим *закон изменения энергии электромагнитного поля в произвольной неподвижной, линейной, анизотропной (а также локальной, безынерциальной и стационарной) среде*, воспользовавшись уравнениями Максвелла.

Рассмотрим некоторый объекм V, ограниченный поверхностью Σ, внутри которого имеются электромагнитное поле и движущиеся заряды. Воспользуемся 3 и 4 уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\vec{B}t, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{16.26}$$

Умножим скалярно первое уравнение из (16.26) на $\vec{H}$, а второе на $\vec{E}$ и вычтем одно из другого:

$$\begin{aligned} &\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ &\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{E}\vec{j} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ &\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} = -\vec{E}\vec{j} - \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{16.27}$$

В соответствие с формулой $\operatorname{div}[\vec{a}\vec{b}] = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$ получим:

$$\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = -\vec{E}\vec{j} - \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \tag{16.28}$$

Воспользуемся выражением для объемной плотности энергии электромагнитного поля – $w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2}$ и выясним, какая должна быть тензорная линейная связь между векторами электрического и между векторами магнитного полей, чтобы в правой части уравнения (16.28) в скобках стояла скорость изменения объемной плотности энергии электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\vec{D} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\vec{B}\right) \end{aligned} \tag{16.29}$$

$$\vec{E}\dot{\vec{D}} + \vec{H}\dot{\vec{B}} = \dot{\vec{E}}\vec{D} + \dot{\vec{H}}\vec{B} \tag{16.30}$$

С учетом материальных уравнений $D_i = \sum_j \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j$ и $B_i = \sum_j \mu_0 \mu_{ij} H_j$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} E_i \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \dot{E}_j - \sum_{i,j} \dot{E}_j \varepsilon_0 \varepsilon_{ji} E_i + \sum_{i,j} H_i \mu_0 \mu_{ij} \dot{H}_j - \sum_{i,j} \dot{H}_j \mu_0 \mu_{ji} H_i = 0, \\ &\sum_{i,j} E_i \varepsilon_0 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}) \dot{E}_j + \sum_{i,j} H_i \mu_0 (\mu_{ij} - \mu_{ji}) \dot{H}_j = 0. \end{aligned} \tag{16.31}$$

Так как это равенство должно выполняться для любых изменяющихся во времени электромагнитных полей, то:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \text{ и } \mu_{ij} = \mu_{ji} \tag{16.32}$$

Для анизотропных сред достаточно единственного требования симметричности тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Теперь воспользуемся определением вектора Умова-Пойтинга $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$ и законом Джоуля-Ленца $q = \vec{j}\vec{E}$. В результате получим закон изменения энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = q + \operatorname{div}\vec{S} \tag{16.33}$$

Здесь q - количество теплоты, выделяющееся в единице объема проводника в единицу времени в результате работы сил электрического поля волны. Сила со стороны магнитного поля работу не совершает, поскольку в соответствии с выражением для Амперовой составляющей силы Лоренца $\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{u}\vec{B}]$ она действует перпендикулярно скорости.

Проинтегрируем обе части уравнения (16.33) по объему и воспользуемся математической теоремой Остроградского-Гаусса, тогда получим закон изменения энергии электромагнитного поля в интегральной форме:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \int_V \operatorname{div}\vec{S}\mathrm{d}V = Q + \int_\Sigma \vec{S}\mathrm{d}\vec{\sigma} \tag{16.34}$$

Итак, *убыль энергии электромагнитного поля в произвольном объеме в единицу времени равна сумме джоулевой теплоты, выделяемой в этом объеме в единицу времени, и потока электромагнитной энергии через поверхность, ограничивающую этот объем.*

Тензор ε_{ij} – симметричный. Значит для среды можно найти собственные **главные диэлектрические оси** этого тензора (X,Y,Z), в которых он диагонализуется. Тогда в системе координат главных осей тензора:

$$\varepsilon_{IJ} = \begin{pmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{pmatrix} \tag{16.35}$$

Тогда в данной системе координат:

$$\boxed{D_I = \varepsilon_0 \varepsilon_I E_I} \tag{16.36}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Здесь $I = X, Y, Z$. ε_I – **главные диэлектрические проницаемости анизотропной среды (кристалла)**.

Введем по определению **главные показатели преломления анизотропной среды**:

$$n_I \equiv \sqrt{\varepsilon_I} \tag{16.37}$$

3.2. Плоские электромагнитные волны в анизотропной среде.

А. Структура световой волны, нормаль и луч, фазовая и лучевая скорости.

Пусть в среде отсутствуют свободные заряды ($\rho = 0$) и токи проводимости ($\vec{j} = 0$). Тогда уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\vec{D} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}\vec{D} = 0, \\
&\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}\vec{B} = 0, \\
&\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \Longrightarrow \quad [\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B}, \\
&\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad \Longrightarrow \quad [\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D}.
\end{aligned} \tag{16.38}$$

Здесь нормаль $\vec{n}$ – единичный вектор, указывающий направление движения фронта волны.

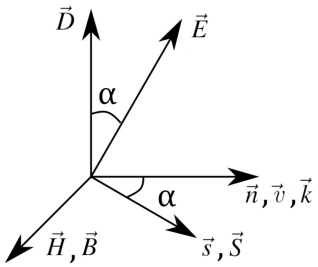


Рис. 16.7. Взаимное расположение векторов в пространстве.

Из уравнений, следующих из уравнений Максвелла (16.38), и материальных уравнений можно получить взаимное расположение векторов в пространстве (Рис. 16.7). α – **угол анизотропии**.

Введем вектор **луч** $\vec{s} \equiv \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}$ – единичный вектор, указывающий направление переноса энергии в волне.

Скорость световой волны по нормали (фазовая скорость): $\vec{v} = v\vec{n} = \frac{\omega}{k}\vec{n}$.

$$\vec{S} = S\vec{s} = \frac{w\mathrm{d}\sigma v_s \mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t}\vec{s} = w v_s \vec{s} = w\vec{v}_s, \tag{16.39}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где $\vec{v}_s = \vec{s}/w$ – лучевая скорость (скорость световой волны вдоль луча), w – объемная плотность энергии, $\mathrm{d}\sigma$ – единичная площадь поверхности.

В выражение для объемной плотности энергии подставим соотношения, следующие из 3 и 4 уравнений Максвелла (16.38):

$$\begin{aligned} w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2} = \frac{\vec{E}[\vec{H}\vec{n}]}{2v} + \frac{\vec{H}[\vec{n}\vec{E}]}{2v} = \\ = \frac{\vec{n}[\vec{E}\vec{H}]}{2v} + \frac{\vec{n}[\vec{E}\vec{H}]}{2v} = \frac{\vec{n}S}{v} \end{aligned} \tag{16.40}$$

Следовательно фазовая скорость:

$$v = \frac{\vec{n}\vec{S}}{w} = \vec{n}\vec{v}_s = v_s \cos\alpha \tag{16.41}$$

Мы получили соотношение для фазовой и лучевой скорости. Отсюда можно сделать вывод, что $v < v_s$ в анизотропной среде.

Б. Главные скорости. Уравнение Френеля для фазовых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении нормали.

Исключим из соотношений, связывающих полевые и материально-полевые векторы в плоской волне, следующих из 3 и 4 уравнений Максвелла (16.38), $\vec{B}$ и $\vec{H}$:

$$v\vec{D} + \frac{\left[\vec{n}[\vec{n}\vec{E}]\right]}{v\mu_0} = 0 \tag{16.42}$$

Домножим на $\mu_0 v$ и воспользуемся выражением для двойного векторного произведения:

$$\boxed{\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E} = 0} \tag{16.43}$$

Пусть напряженность электрического поля $\vec{E}$ направлена вдоль главной оси анизотропного кристалла Z. Тогда $\vec{E} = (0,0,E_Z)$, $\vec{D} = (0,0,\varepsilon_0\varepsilon_z E_Z)$.

$$\mu_0 v_z^2 D_Z - E_Z = 0, \tag{16.44}$$

где v_Z – фазовая скорость, для которой напряженность электрического поля направлена вдоль оси Z:

$$v_Z^2 = \frac{E_Z}{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_Z E_Z} = \frac{c^2}{n_Z^2} \tag{16.45}$$

Откуда получаем скорость:

$$\boxed{v_Z = \frac{c}{n_Z} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_Z}}} \tag{16.46}$$

Аналогично для v_X, v_Y. Вся совокупность этих скоростей v_I $(I = X,Y,Z)$ называется **главными скоростями анизотропной среды**.

Запишем соотношение (16.43) в виде проекций на главные оси анизотропной среды:

$$\mu_0 v^2 D_I + n_I(\vec{n}\vec{E}) - E_I = 0 \tag{16.47}$$

Воспользуемся материальным уравнением:

$$\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_I v^2 E_I + n_I(\vec{n}\vec{E}) - E_I = 0 \tag{16.48}$$

Отсюда:

$$E_I\left(\frac{v^2}{v_I^2} - 1\right) + n_I(\vec{n}\vec{E}) = 0 \tag{16.49}$$

Умножим выражение на n_I, поделим на $\left(\frac{v^2}{v_I^2} - 1\right)$ и возьмем сумму по I:

$$\sum_I \frac{n_I^2(\vec{n}\vec{E})}{\left(\frac{v^2}{v_I^2} - 1\right)} + \underbrace{\sum_I E_I n_I}_{(\vec{n}\vec{E})} = 0 \tag{16.50}$$

Учитывая, что $1 = \sum_I n_I^2$, получаем:

$$\boxed{\sum_I \frac{n_I^2}{v_I^2 - v^2} = 0} \tag{16.51}$$

Полученное выражение (16.51) – **уравнение Френеля** для фазовых скоростей.

Обозначим сумму в выражении (16.51) как $f(v^2)$. Из вида функции $f(v^2)$ можно понять, что она имеет только два корня: v'^2 и v''^2. То есть в данном направлении нормали в анизотропной среде могут распространяться только две волны с двумя скоростями. Причем значения этих скоростей лежат между максимальной главной скоростью и средней и между минимальной и средней.

Домножим уравнение (16.43) скалярно на $\vec{D}$:

$$\mu_0 v D^2 - \vec{E}\vec{D} = 0 \tag{16.52}$$

Тогда

$$v^2 = \frac{\vec{E}\vec{D}}{\mu_0 D^2} = \frac{\sum_I E_I D_I}{\mu_0 D^2} \tag{16.53}$$

Отсюда получаем:

$$\boxed{v^2 = \sum_I v_I^2 \frac{D_I^2}{D_2}} \tag{16.54}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Из (16.54) можно сделать вывод, что фазовая скорость однозначно определяется главными скоростями анизотропной среды и ориентацией электрической индукции, т.е. $v = v\left(\frac{\vec{D}}{D}\right)$.

Запишем уравнение (16.43) для двух скоростей v' и v'', возможных в данном направлении нормали в анизотропной среде:

$$\begin{aligned} &\mu_0 v'^2 \vec{D}' + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}') - \vec{E}' = 0, \\ &\mu_0 v''^2 \vec{D}'' + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}'') - \vec{E}'' = 0, \end{aligned} \tag{16.55}$$

Первое уравнение домножим на $\vec{D}''$, а второе – на $\vec{D}'$ и вычтем одно из другого:

$$\mu_0 \vec{D}'\vec{D}''(v'^2 - v''^2) - \vec{E}'\vec{D}'' + \vec{E}''\vec{D}' = 0 \tag{16.56}$$

$$\vec{E}'\vec{D}' = \sum_I \underbrace{E'_I \varepsilon_0 \varepsilon_I}_{D'_I} E''_I = \vec{E}''\vec{D}' \tag{16.57}$$

Получаем:

$$\mu_0 \vec{D}'\vec{D}''(v'^2 - v''^2) = 0 \tag{16.58}$$

Следовательно, если $v' \neq v''$, то $\vec{D}'\vec{D}'' = 0$. Значит ориентации электрической индукции двух волн, которые распространяются в анизотропной среде в данном направлении нормали, всегда взаимно перпендикулярны.

В. Уравнение Френеля для лучевых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении луча.

Умножим обе части соотношений, связывающих полевые и материально-полевые векторы в плоской волне, следующих из 3 и 4 уравнений Максвелла (16.38), векторно слева на луч $\vec{s}$:

$$\begin{aligned} &\left[\vec{s}[\vec{n}\vec{E}]\right] = v[\vec{s}\vec{B}], \\ &\left[\vec{s}[\vec{n}\vec{H}]\right] = -v[\vec{s}\vec{D}]. \end{aligned} \tag{16.59}$$

Воспользуемся выражением для двойного векторного произведения, при этом учтем взаимную ориентацию луча и напряженностей электрического и магнитного полей в волне ($\vec{s}\cdot\vec{E} = 0$, $\vec{s}\cdot\vec{H} = 0$), а также соотношение между волновой и лучевой скоростями (16.41):

$$\begin{aligned} &\left[\vec{s}[\vec{n}\vec{E}]\right] = \vec{n}(\vec{s}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{s}\vec{n}) = -\vec{E}(\vec{s}\vec{n}) = v[\vec{s}\vec{B}], \\ &\left[\vec{s}[\vec{n}\vec{H}]\right] = \vec{n}(\vec{s}\vec{H}) - \vec{H}(\vec{s}\vec{n}) = -\vec{H}(\vec{s}\vec{n}) = -v[\vec{s}\vec{D}]; \end{aligned} \tag{16.60}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -v_s[\vec{s}\vec{B}],\\ \vec{H} &= v_s[\vec{s}\vec{D}].\end{aligned} \tag{16.61}$$

Исключим теперь из уравнений векторы магнитного поля, и в результате получим уравнение, связывающее лучевую скорость v_s в заданном лучом $\vec{s}$ направлении с векторами электрического поля:

$$\vec{E} = -\mu_0 v_s^2 \left[\vec{s}[\vec{s}\vec{D}]\right], \tag{16.62}$$

$$\frac{1}{\mu_0 v_s^2}\vec{E} + \vec{s}(\vec{s}\vec{D}) - \vec{D} = 0 \tag{16.63}$$

Последнее уравнение полностью аналогично уравнению для фазовых скоростей (16.43) с точностью до замены $\vec{n} \Longrightarrow \vec{s}$, $\vec{D} \Leftrightarrow \vec{E}$, $\mu_0 v^2 \Longrightarrow \frac{1}{\mu_0 v_s^2}$, $\mu_0 v_I^2 \Longrightarrow \frac{1}{\mu_0 v_I^2}$.

В результате для лучевых скоростей получим **уравнение Френеля**:

$$\boxed{\sum_I \frac{s_I^2 v_I^2}{v_I^2 - v_s^2} = 0} \tag{16.64}$$

$$\frac{1}{v_s^2} = \sum_I \frac{1}{v_I^2}\left(\frac{E_I}{E}\right)^2 \tag{16.65}$$

При $v_s' \neq v_s''$ $\vec{E}'\vec{E}'' = 0$

Основные особенности распространения света в анизотропной среде:

1) Фазовая $\vec{v} = v\vec{n}$ и лучевая $\vec{v}_s = v_s\vec{s}$ скорости распространения волны в общем случае не равны по модулю ($v = v_s \cos\alpha$) и не совпадают по направлению ($\vec{n}\vec{s} = \cos\alpha$).

2) Модули фазовой и лучевой скоростей зависят только от ориентации векторов электрического поля волны относительно главных диэлектрических осей кристалла – $v\left(\frac{\vec{D}}{D}\right)$, $v_s\left(\frac{\vec{E}}{E}\right)$.

3) В данном направлении нормали $\vec{n}$ могут распространяться только две линейно поляризованные волны в общем случае с разными по модулю фазовыми скоростями v' и v'', векторы электрической индукции которых взаимно перпендикулярны $\vec{D}' \perp \vec{D}''$.

4) В данном направлении луча $\vec{s}$ могут распространяться только две линейно поляризованные волны в общем случае м разными по модулю лучевыми скоростями v_s' и v_s'', векторы напряженности электрического поля которых взаимно перпендикулярны $\vec{E}' \perp \vec{E}''$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 17. Распространение света в анизотропных средах. Поляризационные приборы.

3.3. Эллипсоид лучевых скоростей. Оптическая ось.

Воспользуемся взаимосвязью модуля лучевой скорости v_s и ориентации напряженности поля $\vec{E}$ относительно главных диэлектрических осей кристалла (16.65). Домножим левую и правую часть на v_s^2:

$$\sum_I \frac{v_s^2}{v_I^2}\left(\frac{E_I}{E}\right)^2 = 1 \tag{17.1}$$

Зададим координаты точки поверхности в главных осях, сделав замену переменных: $X_I \equiv v_s\frac{E_I}{E}$, $\vec{R} = v_s\frac{\vec{E}}{E}$; в направлении $\vec{E}$: $R = |\vec{R}| = v_s$.

В результате получим уравнение поверхности:

$$\boxed{\left(\frac{X}{v_X}\right)^2 + \left(\frac{Y}{v_Y}\right)^2 + \left(\frac{Z}{v_Z}\right)^2 = 1} \tag{17.2}$$

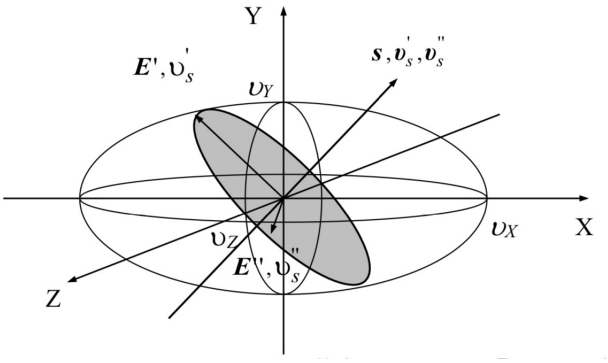


Рис. 17.1. Эллипсоид лучевых скоростей.

Эллипсоид лучевых скоростей (эллипсоид Френеля) – эллипсоид, главные оси которого совпадают с главными диэлектрическими осями X,Y,Z кристалла, а длины главных полуосей равны главным скоростям v_X, v_Y, v_Z распространения света в среде (Рис. 17.1).

В сечении лучевого эллипсоида, перпендикулярном лучу $\vec{s}$, образуется эллипс, вдоль главных осей которого направлены напряженности $\vec{E}'$ и $\vec{E}''$ двух волн, переносящие энергию вдоль $\vec{s}$, а его главные полуоси равны модулям соответствующих лучевых скоростей v_s' и v_s'' этих волн.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Оптическая ось – направление в кристалле (среде), перпендикулярное плоскости кругового сечения эллипсоида лучевых скоростей.

Всем лучам вдоль оптической оси соответствует одна и та же лучевая скорость (в общем случае при различных фазовых скоростях), а векторы напряженности электрического поля $\vec{E}$ могут колебаться в любом направлении, перпендикулярном лучу.

Классификация анизотропных сред:

1) $v_X \neq v_Y \neq v_Z$ – двухосный кристалл.

2) $v_X = v_Y \neq v_Z$ – одноосный кристалл. Эллипсоид лучевых скоростей в данном случае превращается в эллипсоид вращения, который имеет только одну оптическую ось.

3) $v_X = v_Y = v_Z$ – изотропный кристалл (среда).

3.4. Лучевая поверхность и ее сечения.

Воспользуемся уравнением Френеля для лучевых скоростей (16.64). Зададим координаты точки поверхности в главных осях, сделав замену переменных: $X_I \equiv v_s s_I$, $\vec{R} = v_s \vec{s}$, $R = |\vec{R}| = v_s$ (если внутри анизотропной среды возник некоторый источник световых волн, то через некоторый интервал времени возбуждение в этой среде дойдет до двух поверхностей).

В результате получим уравнение лучевой поверхности:

$$\sum_I \frac{X_I^2 v_I^2}{v_I^2 - R^2} = 0 \tag{17.3}$$

Лучевая (волновая) поверхность – поверхность, до которой доходит световое возбуждение из данной точки среды за фиксированный интервал времени.

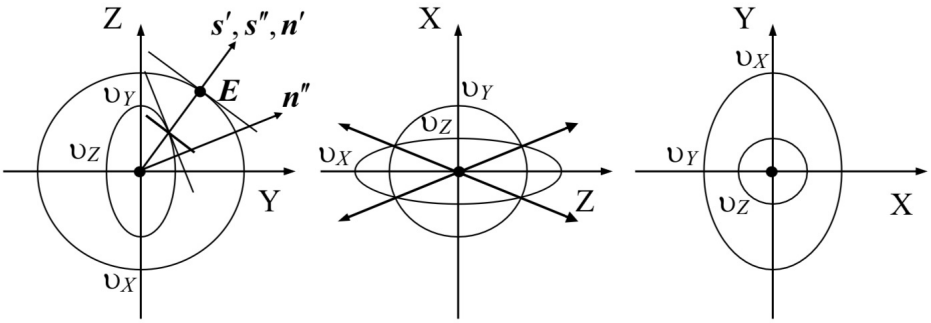


Рис. 17.2. Лучевая поверхность.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Это *двухоболочечная самопересекающаяся поверхность*. В общем случае в каждом направлении из начала координат лучевая поверхность встречается два раза.

Фронт волны для каждой точки лучевой поверхности (волны с заданным лучом) – плоскость, касательная к лучевой поверхности в этой точке.

Главные координатные плоскости пересекают лучевую поверхность по эллипсу и окружности. При $v_X > v_Y > v_Z$ получим (Рис. 17.1). В главном сечении будет наблюдаться окружность и эллипс. Пусть нас интересует некоторое направление переноса энергии $\vec{s} = \vec{s'} = \vec{s''}$. Скорости данных волн – расстояние от центра до поверхности. Напряженность поля будет направлена вдоль оси X. Для второй волны напряженность поля перпендикулярна направлению луча и лежит в плоскости (Y,Z). Нормаль (направление переноса фронта волны) первой волны $\vec{n'}$ будет перпендикулярна касательной к окружности в точке пересечения $\vec{s'}$ и окружности. Нормаль второй волны $\vec{n''}$ – перпендикулярна касательной к эллипсу в точке пересечения $\vec{s'}$ и эллипса. Тогда углы анизотропии: $\alpha' = 0$, $\alpha'' \neq 0$.

3.5. Оптические свойства одноосных кристаллов.

А. Главная плоскость, обыкновенный и необыкновенный лучи. Отрицательные и положительные кристаллы.

Одноосный кристалл (среда) – кристалл (среда), для которого две главные скорости распространения волн равны: $v_o \equiv v_X = v_Y \neq v_Z \equiv v_e$ ($\varepsilon_o \equiv \varepsilon_X = \varepsilon_Y \neq \varepsilon_Z \equiv \varepsilon_e$; $n_o \equiv n_X = n_Y \neq n_Z \equiv n_e$).

(Индексы o – от слова *ordinary*, т.е. обыкновенный, индексы e – от слова *extraordinary*, т.е. необыкновенный.)

Для одноосного кристалла имеется:

- одна оптическая ось, совпадающая с осью вращения – главной диэлектрической осью, для которой диэлектрическая проницаемость отлична от остальных;
- эллипсоид лучевых скоростей – эллипсоид вращения;
- лучевая поверхность – совокупность сферы и эллипсоида вращения, вписанные друг в друга.

Главная плоскость (главное сечение) – плоскость, образованная лучом и оптической осью – $(\vec{s}, OO)$.

Обыкновенный (ordinary) **луч** – луч, вектор напряженности электрического поля которого перпендикулярен главной плоскости – $\vec{E}_o \perp (\vec{s}, OO)$ (а значит и оптической оси).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Ему соответствует лучевая поверхность в виде сферы.

Фазовая и лучевая скорости совпадают – $\vec{v'} = \vec{v'_s} = v_o\vec{s}$, их модули равны v_o и не зависят от направления ($\vec{n}_o = \vec{s}_o = \vec{s}$, $\alpha_o = 0$, $\vec{n}_o \cdot \vec{s}_o = 1$).

Необыкновенный (extraordinary) **луч** – луч, вектор напряженности электрического поля которого лежит в главной плоскости – $\vec{E}_e \parallel (\vec{s}, OO)$.

Ему соответствует лучевая поверхность в виде эллипсоида вращения.

Фазовая и лучевая скорости не совпадают по величине и направлению – $\vec{v''} \neq \vec{v''_s}$, зависят от угла между лучом и оптической осью, при этом модули скоростей лежат в интервале значений $v'' < v''_s \in (v_o, v_e]$ или $v'' < v''_s \in [v_e, v_o)$ ($\vec{n}_e \neq \vec{s}_e = \vec{s}$, $\alpha_e \neq 0$, $\vec{n}_e \cdot \vec{s}_e = \cos\alpha_e$).

Если в данном направлении в одноосном анизотропном кристалле распространяется две волны, то одна волна ведет себя как обыкновенная, вторая – как необыкновенная.

Отрицательный кристалл – $v_o \equiv v_X = v < v_Z \equiv v_e$ ($n_o \equiv n_X = n_Y > n_Z \equiv n_e$) эллипсоид Френеля вытянут вдоль оси вращения Z; лучевая сфера вписана в сплющенный вдоль оси Z лучевой эллипсоид вращения. Исландский шпат – $CaCO_3$ с $n_o = 1.658 > n_e = 1.486$.

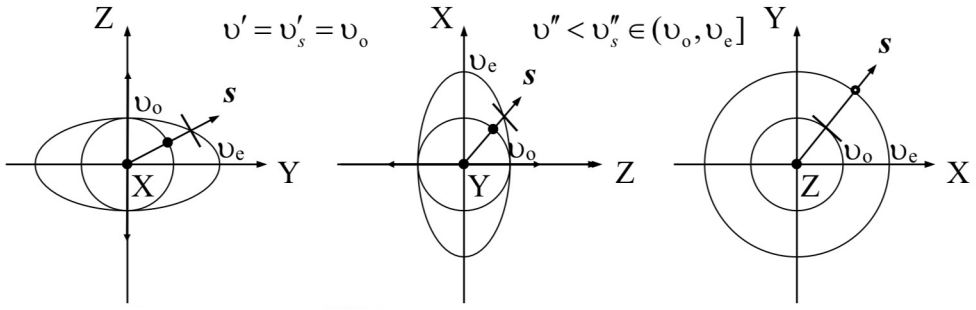


Рис. 17.3. Главные сечения лучевой поверхности одноосного отрицательного кристалла.

Главные сечения лучевой поверхности одноосного отрицательного кристалла представлены на (Рис. 17.3).

Положительный кристалл – $v_o \equiv v_X = v > v_Z \equiv v_e$ ($n_o \equiv n_X = n_Y < n_Z \equiv n_e$); эллипсоид Френеля сплюснут вдоль оси Z; лучевая сфера охватывает вытянутый вдоль оси Z лучевой эллипсоид вращения. Кварц – SiO_2 с $n_o = 1.543 < n_e = 1.552$.

Главные сечения лучевой поверхности одноосного положительного кристалла представлены на (Рис. 17.4).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

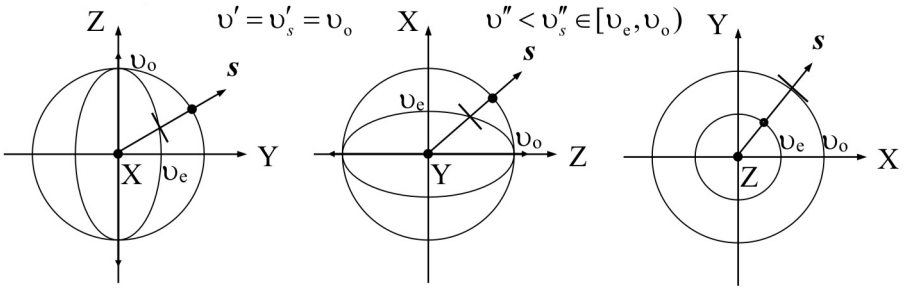


Рис. 17.4. Главные сечения лучевой поверхности одноосного положительного кристалла.

Б. Двойное лучепреломление и поляризация света. Метод построения Гюйгенса.

Двойное лучепреломление – явление возникновения при падении на поверхность анизотропной среды плоской произвольно поляризованной волны двух преломленных линейно и взаимно перпендикулярно поляризованных плоских волн.

Основные положения **метода построения Гюйгенса**:

1) каждая точка, до которой доходит возбуждение, становится источником вторичных волн, несущих световое возмущение (возникает лучевая двухоболочечная самопересекающаяся поверхность);

2) огибающая вторичных волн (касательная поверхность к лучевым поверхностям) определяет фронт волны в последующий момент времени.

Построение Гюйгенса дает направления нормали и луча:

– перпендикуляр к огибающей лучевой поверхности из источника вторичной волны дает направление нормали,

– прямая, соединяющая источник вторичной волны с точкой касания огибающей с лучевой поверхностью, дает направление луча.

Рассмотрим характерные случаи построения Гюйгенса при переходе света из изотропной среды в анизотропную среду (одноосный положительный кристалл – $v_o > v_e$).

1) Оптическая ось перпендикулярна поверхности кристалла.

   Плоская волна падается из изотропной среды. На (Рис. 17.5) изображены два луча, соответствующие краю волнового фронта этой волны. Штриховой линией обозначен фронт волны. Когда один луч уже достиг поверхности, второй

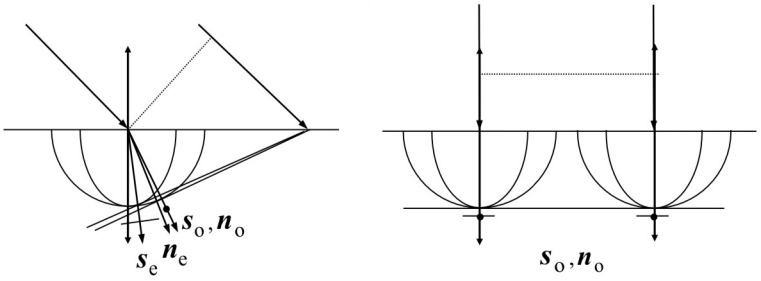


Рис. 17.5. Построение Гюйгенса в случае, когда оптическая ось перпендикулярна поверхности кристалла.

еще находится на некотором расстоянии от этой поверхности. За время, пока он будет идти до поверхности, в точке соприкосновения поверхности и первого луча возникнет возбуждение, которое начнет распространяться в анизотропной среде. Возникнет двухлучевая поверхность. На (Рис. 17.5) положение сечения соответствует моменту времени, когда второй луч достиг поверхности. Восстанавливаются касательные к поверхности. Направление луча $\vec{s_o}$ – точка касания с окружностью, $\vec{s_e}$ – точка касания с эллипсом. Направления нормалей – перпендикуляры к касательным.

При нормальном падении волны на поверхность кристалла поведение обыкновенного и необыкновенного лучей будет одинаково: распространение в направлении, перпендикулярном поверхности.

2) Оптическая ось параллельна поверхности кристалла.

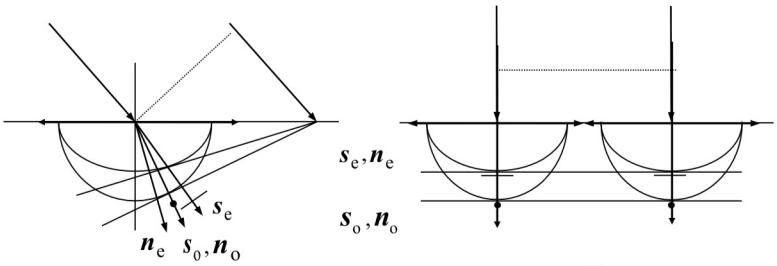


Рис. 17.6. Построение Гюйгенса в случае, когда оптическая ось параллельна поверхности кристалла.

Плоская волна падается из изотропной среды. На (Рис. 17.6) изображены два луча, соответствующие краю волнового фронта этой волны. Далее на (Рис. 17.6) показаны построения Гюйгенса.

При нормальном падении волны на поверхность кристалла скорость обыкновен-

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ного луча будет больше, чем для необыкновенного, направления распространения будут совпадать. Возникает разность фаз, пропорциональная расстоянию, пройденному волнами в этой среде.

Закон Этьена Луи Малюса: пусть нормально падает линейно поляризованная волна. ϑ – угол между направлением напряженности электрического поля падающей волны $\vec{E}$ и оптической оси анизотропного кристалла. Тогда волна, проникая внутрь анизотропного кристалла, представляется в виде совокупности двух волн со взаимно перпендикулярными ориентациями напряженности поля. Одна из них соответствует обыкновенной волне, вторая – необыкновенной.

$$\begin{aligned} E_o &= E\sin\vartheta \to I_o = I\sin^2\vartheta, \\ E_e &= E\cos\vartheta \to I_e = I\cos^2\vartheta. \end{aligned} \tag{17.4}$$

3) Оптическая ось под углом к поверхности кристалла.

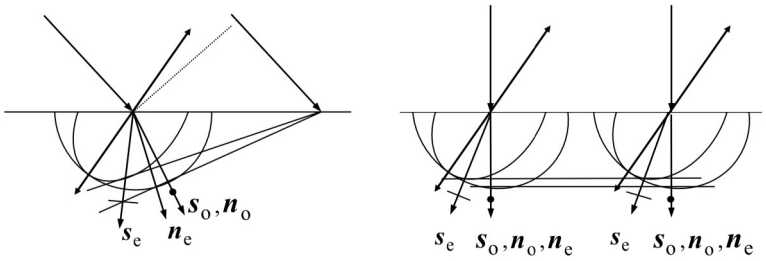


Рис. 17.7. Построение Гюйгенса в случае, когда оптическая ось под углом к поверхности кристалла.

Плоская волна падается из изотропной среды. На (Рис. 17.6) показаны построения Гюйгенса. Сечение лучевой поверхности в данном случае развернуто по отношению к поверхности.

При нормальном падении обыкновенная волна проходит перпендикулярно к поверхности, а необыкновенная волна отклонится от нормали к поверхности.

3.6. Поляризационные приборы.

Поляроид – дихроичная пластинка, при прохождении которой один из лучей в результате поглощения сильно ослабляется, а другой выходит линейно поляризованным.

В основе – **явление дихроизма** – зависимость поглощения света от направления поляризации.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Кристаллы турмалина – эффективная толщина поглощения $d_{\text{эфф}} \cong 1$мм, герапатита – $d_{\text{эфф}} \cong 0.1$мм. Пленочные полимерные поляроиды, состоящие из анизотропных макромолекул и дихроичных молекул (или нанокристаллов) вещества-активатора.

Поляризатор – поляроид, использующийся для получения поляризованного света.

Анализатор – поляроид, использующийся для анализа поляризованного света.

Поляризационная призма – комбинация кристаллов, оставляющая один поляризованный луч на выходе.

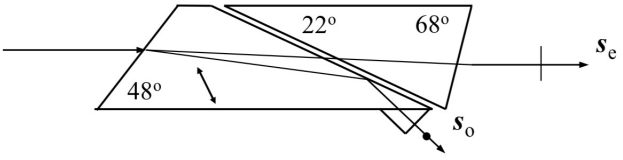


Рис. 17.8. Призма Николя.

Призма Николя (Рис. 17.8) – две призмы из Исландского шпата $CaCO_3$ ($n_o = 1.658 > n_e = 1.486$), канадский бальзам ($n_o > n = 1.55 > n_e$). Известны показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Угол падения подбирается такой, чтобы для обыкновенного луча наблюдалось полное внутреннее отражение.

Двоякопреломляющая призма – комбинация кристаллов, оставляющая оба поляризованных луча на выходе.

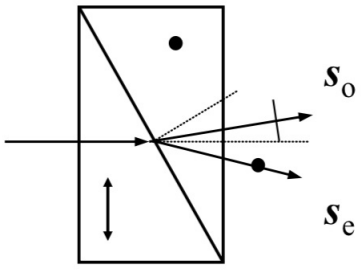


Рис. 17.9. Призма Уильяма Хайда Волластона.

Призма Уильяма Хайда Волластона (Рис. 17.9) – два клина из Исландского шпата $CaCO_3$ ($n_o > n_e$).

Компенсатор – пластина, вдоль которой непрерывно меняется разность фаз выходящих лучей.

Компенсатор Жака Бабине (Рис. 17.10) – тонкие кварцевые клинья с углом при вершине $\alpha \ll 1$ (SiO_2 – $n_o = 1.543 < n_e = 1.552$). Оптическая разность хода:

$$\Delta = (n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_2 d_2) = (n_e - n_o)(d_1 - d_2) \tag{17.5}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

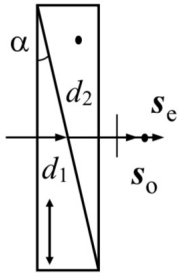


Рис. 17.10. Компенсатор Жака Бабине.

$$\Delta\varphi = k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)(d_1 - d_2) \tag{17.6}$$

Оптические пластинки – пластинки из оптически анизотропных кристаллов, вносящие заданную оптическую разность хода для необыкновенного и обыкновенного лучей:

$$\Delta = (n_2 - n_o)d \tag{17.7}$$

$$\Delta\varphi = k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d \tag{17.8}$$

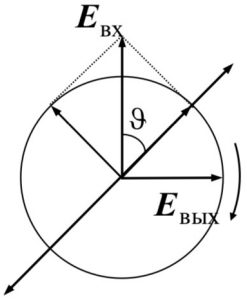


Рис. 17.11. Четвертьволновая пластинка.

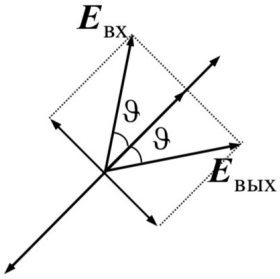


Рис. 17.12. Полуволновая пластинка.

Пластинка в четверть волны (четвертьволновая пластинка) (Рис. 17.11):

$$\begin{aligned} \Delta &= (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{4}, \\ \Delta\varphi &= k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{17.9}$$

Линейная поляризация – циркулярная при $\vartheta = 45^\circ$ или эллиптическая при $\vartheta \neq 45^\circ$ поляризация ($+\Delta\vartheta = 90^\circ$ – смена направления поляризации). Т.е. данная пластинка преобразует линейно поляризованный свет либо в круговую, либо в эллиптическую поляризацию.

Пластинка в полволны (полуволновая пластинка)(Рис. 17.11):

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\begin{aligned} \Delta &= (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{2}, \\ \Delta\varphi &= k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d = \pi. \end{aligned} \tag{17.10}$$

Поворот линейной поляризации на 2ϑ или изменение направления вращения плоскости поляризации в циркулярно (эллиптически) поляризованной волне.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 18. Рассеяние света. Закон Рэлея.

3.7. Наведенная анизотропия оптических свойств.

Механо- (электро-, магнито-) оптические эффекты – изменение оптических характеристик среды под внешним механическим (электрическим, магнитным) воздействием.

Воздействие	Тип эффекта	Эффект	Год	Авторы
Механическое	Линейный (поперечный)	**Фотоупругость**	1813 1815	Немецкий физик Томас Иоганн Зеебек, Шотландский физик Дэвид Брюстер
Электрическое	Линейный (поперечный)	**Поккельса**	1894	Немецкий физик Фридрих Карл Поккельс
	Квадратичный (поперечный)	**Керра**	1875	Шотландский физик Джон Керр
Магнитное	Квадратичный (поперечный)	**Коттон-Мутона**	1907	Французские физики Эме Коттон, А. Мутон
	Расщепление (прод. и попереч.)	**Зеемана**	1896	Нидерландский физик Питер Зееман
	Линейный (продольный)	**Фарадея**	1846	Английский физик Майкл Фарадей

Рис. 18.1. Оптические эффекты, вызванные внешним воздействием.

В (Рис. 18.1) перечислены некоторые оптические эффекты, вызванные внешним воздействием.

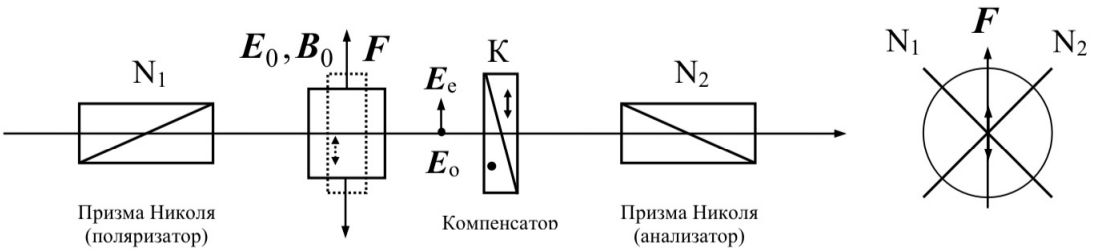


Рис. 18.2. Схема наблюдения эффекта фотоупругости.

На (Рис. 18.2) представлена схема наблюдения основных оптических эффектов. На пути исходного пучка света (как правило, белого) ставится поляризатор. Затем образец, после которого устанавливается второй поляризатор. Причем он ориентирован по отношению к первому таким образом, что пучок света, поляризованный первым поляризатором и прошедший без взаимодействия со средой, второй поляризатор не проходит. Также в схеме используется компенсатор.

Если воздействия на свет нет, то после прохождения схемы мы увидим чередование светлых и темных полос на экране. При воздействии на свет картина будет

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

смещаться.

Полосы: $\Delta\varphi_k = (2k+1)\pi$ – светлые, $\Delta\varphi_k = 2k\pi$ – темные. Сдвиг – $\Delta\varphi(F)$.

Фотоупругость – линейный механооптический эффект.

Мера возникшей оптической анизотропии – разность главных показателей преломления для необыкновенной n_e ($\vec{E}_e\vec{F}$) и обыкновенной n_o ($\vec{E}_o \perp \vec{F}$) волн. Она пропорциональна напряжению воздействия σ, причем, с учетом знака этого воздействия:

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega)\frac{F}{S} = \gamma(\omega)\sigma \quad (\gamma > 0, \gamma < 0), \tag{18.1}$$

$$\Delta\varphi = k_0(\omega)\left(n_e(\omega) - n_o(\omega)\right)l = \frac{\omega}{c}\Delta n(\omega)l = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}\Delta n(\omega)l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0(\omega)}2\pi\sigma l, \tag{18.2}$$

$\gamma(\omega)$ – **постоянная Брюстера**, для стекол $\gamma(\omega) = 10^{-12} - 10^{-11}$м$^2/H$.

Белый свет $\Longrightarrow$ окрашивание из-за зависимости набегающей разности фаз $\Delta\varphi$ от частоты (в т.ч. дисперсии – $\Delta n(\omega)$) и распределения напряжения внутри образца.

Механизм – направленная механическая деформация тела.

Эффект Поккельса – линейный электрооптический эффект.

Схема опыта для обнаружения эффекта Поккельса (также, как и эффекта Керра) полностью аналогична схеме наблюдения фотоупругости (Рис. 18.2). Единственное отличие – образец (твердое тело, жидкость или газ) помещается между обкладками плоского конденсатора.

Механизм – ангармонизм движения связанных зарядов в кристалле. Классическая электронная теория, модель ангармонического осциллятора ($-kx - \beta x^2$), $\vec{E}_0 \parallel \vec{E}(t)$, $E_0 \gg E(t)$:

$$E_0 \Longrightarrow \Delta\omega_0^2 = \frac{2\beta q}{\omega_0^2 m^2}E_0 \Longrightarrow \Delta n(\omega), \tag{18.3}$$

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = -\frac{\omega_n^2}{2n(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\frac{2\beta q}{\omega_0^2 m^2}E_0 = \gamma(\omega)E_0 \tag{18.4}$$

Смена знака напряженности приводит к смене эффекта.

Для кристалла дигидрофосфата калия KH_2PO_4 – $\gamma = 3.6 \cdot 10^{-11}$ м/В, для ниобата лития $LiNbO_3$ – $\gamma = 3.7 \cdot 10^{-10}$ м/В.

Линейный оптический эффект наблюдается только в кристаллах, не обладающих центром симметрии.

Эффект Керра – квадратичный электрооптический эффект в центрально-симметричных средах (неизменность характеристик при преобразовании инверсии – смене направления $\vec{E}_0$ на обратное).

Классическая электронная теория, модель ангармонического осциллятора ($-kx - \beta x^3$), $\vec{E}_0 \parallel \vec{E}(t)$, $E_0 \gg E(t)$:

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega) E_0^2, \tag{18.5}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}(n_e - n_o)l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0(\omega)} 2\pi E_0^2 l = B(\omega) 2\pi E_0^2 l, \tag{18.6}$$

где $B(\omega) = \gamma(\omega)/\lambda_0(\omega)$ – **постоянная Керра**.

Механизм – поляризация и ориентация анизотропных молекул.

Для неполярных молекул $B > 0$, для полярных – $B > 0$ и $B < 0$.

Эффект Керра определяется свойствами молекул и, следовательно, усиливается с повышением концентрации молекул.

Для жидких кислорода и азота – $\sim 10^{-10}$м/В^2 и $\sim 4 \cdot 10^{-10}$м/В^2. Для них же в газообразном состоянии – $\sim 4.5 \cdot 10^{-14}$м/В^{2}2 и $\sim 3 \cdot 10^{-14}$м/В^2.

С повышением температуры постоянная Керра падает из-за дезориентирующего действия температуры на дипольные моменты.

Эффекты Поккельса и Керра практически безынерционны (время релаксации $\sim 10^{-10} - 10^{-13}$ с). $\Longrightarrow$ ячейки Поккельса и Керра – изотропный кристалл во внешнем поле с наведенной оптической осью и симметрично скрещенные под 90° два поляроида – высокоскоростные электрооптические модуляторы света (в том числе оптические затворы для лазеров).

Явление Коттон-Мутона – квадратичный магнитооптический эффект в поперечном магнитном поле. Схема наблюдения почти такая же как и в предыдущих случаях (Рис. 18.2).

$$n_e - n_o = \gamma(\omega) B_0^2 \quad (\gamma \sim 10^{-8}\text{Тл}^{-2}), \tag{18.7}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}(n_e - n_o)l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0(\omega)} 2\pi B_0^2 l = C(\omega) 2\pi B_0^2 l \tag{18.8}$$

Механизм – ориентация анизотропных молекул, обладающих μ (аналог. механизму поведения полярных молекул в эффекте Керра).

Этот эффект очень мал. Для нитробензола – $C \sim 2 \cdot 10^{-2}\text{м}^{-1}\text{Тл}^{-2}$. В магнитном поле 1 Тл при $l = 10$ см разность фаз равна $\Delta\varphi \cong 0.72^\circ$.

Эффект Зеемана – расщепление спектральных линий испускания (прямой эффект) и поглощения (обратный эффект) в продольном – $\omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_0 + \Delta\omega$ и поперечном – $\omega_0 - \Delta_0$, ω_0, $\omega_0 + \Delta\omega$ магнитных полях.

Схема наблюдения эффекта представлена на (Рис. 18.3). Она представляет собой магнит, в сердечнике которого просверлено небольшое сквозное отверстие. Между магнитами находится источник света, излучение которого вызвано движением заряженной частицы. Это движение можно представить как суперпозицию трех независимых движений: вдоль оси магнита и поперек оси магнита, которое тоже можно

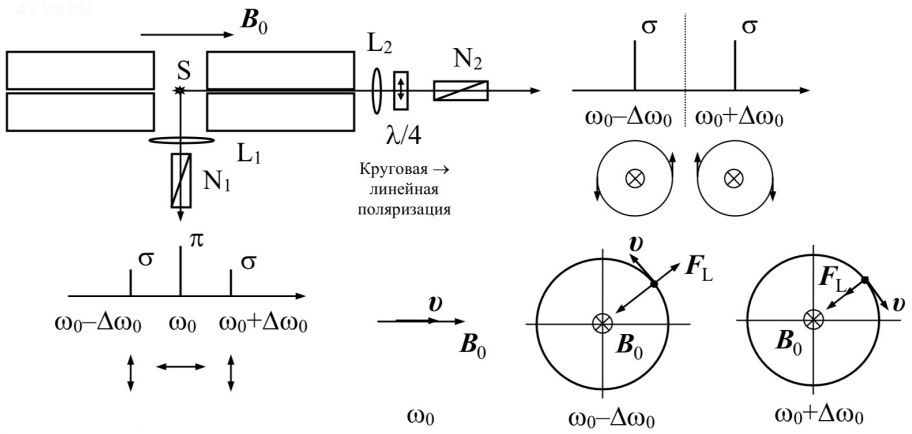


Рис. 18.3. Эффект Зеемана. Расщепление спектральных линий, наблюдаемое в эксперименте. Сверху: схема наблюдения эффекта Зеемана.
Снизу: движение заряженной частицы вдоль направления внешнего магнитного поля и в плоскости, поперечной этому направелению.

представить как совокупность круговых движений в разных направлениях. Сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}_0] \tag{18.9}$$

Если заряженная частица движется вдоль направления магнитного поля $\vec{B}_0$, то $\vec{F}_L = 0$, то есть данная составляющая движения не меняется во внешнем магнитном поле.

Если заряженная частица движется в плоскости, поперечной направлению магнитного поля (Рис. 18.3), то в случае движения против часовой стрелки $\vec{F}_L$ действует вдоль радиус-вектора точки, в которой находится заряд. Тогда собственная частота вращения данного заряда вокруг атома уменьшится. При движении по часовой стрелке – увеличится.

$$m\omega^2 r = m\omega_0^2 r \pm |q|\omega r B_0, \tag{18.10}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm\frac{|q|B_0}{m}\omega = \pm\Delta\omega_0^2, \tag{18.11}$$

$$\Delta\omega_0 \cong \frac{|q|B_0}{2m} = \frac{|q|\mu_0 H_0}{2m} \tag{18.12}$$

С обратным эффектом Зеемана непосредственно связан эффект Фарадея.

Эффект Фарадея – магнитооптический эффект – явление вращения плоскости поляризации в продольном магнитном поле.

Механизм – изменение показателей преломления среды для циркулярно право- и левополяризованного света (циркулярное двулучепреломление) из-за изменения собственных частот электронов во внешнем магнитном поле.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

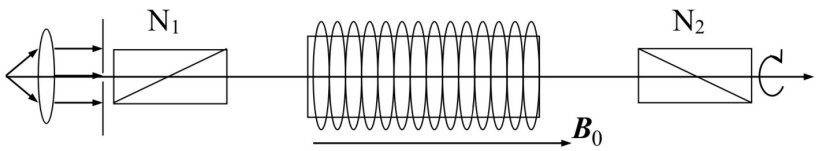


Рис. 18.4. Схема наблюдения эффекта Фарадея.

Схема наблюдения эффекта Фарадея изображена на (Рис. 18.4). На пути света ставится поляризатор, который линейно поляризует свет. После магнита устанавливается второй поляризатор. Если магнит отключен, то на экране после второго поляризатора пучок света наблюдаться не будет. При прохождении через включенный магнит свет остается линейно поляризованным, но ориентация плоскости поляризации меняется.

При световых частотах ω вдали от полос поглощения ω_0, $\omega_0 - \Delta\omega_0$ и $\omega_0 + \Delta\omega_0$; а также при $\Delta\omega_0^2 \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$, $n = (n_- + n_+)/2$:

$$\hat{n}^2 = 1 + \omega_{\text{п}}^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} \cong 1 + \omega_{\text{п}}^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{18.13}$$

$$n_-^2 = 1 + \frac{\omega_{\text{п}}^2}{\omega_0^2 - \Delta\omega_0^2 - \omega^2}, \quad n_+^2 = 1 + \frac{\omega_{\text{п}}^2}{\omega_0^2 + \Delta\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{18.14}$$

$$n_- - n_+ \cong \frac{\omega_{\text{п}}^2 \Delta\omega_0^2}{n\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} = \frac{\omega_{\text{п}}^2}{n\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} \frac{|q|\omega_0}{m} B_0 = \gamma(\omega) B_0, \tag{18.15}$$

$$\Delta\varphi = 1\pi \frac{n_- - n_+}{\lambda_0} l = \frac{\omega}{c}(n_- - n_+) l = \frac{N|q|^3 \omega\omega_0}{\varepsilon_0 n m^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} l B_0 = V(\omega) l H_0, \tag{18.16}$$

где $V(\omega)$ – **постоянная Верде** (характеристика данного вещества).

Направление вращения плоскости поляризации определяется по отношению к направлению (вдоль) магнитного поля. Для положительных веществ направление поля и направление вращения составляют правовинтовую систему, для отрицательных – левовинтовую систему.

Направление вращения относительно поля от направления луча не зависит. Если свет пройдет туда и обратно, то угол поворота увеличится.

В тонких прозрачных слоях ферромагнетиков (Fe, Ni, Co): при $l = 0.1$ мкм, $H_0 \cong 8 \cdot 10^5$ А/м: $\Delta\varphi \cong 2^\circ$.

Естественное вращение плоскости поляризации (открыто французским ученым Домиником Франсуа Араго, 1811 г.).

При прохождении плоскополяризованного света через *оптически активные (гиротропные)* вещества (кристаллические – кварц; аморфные, в том числе чистые жид-

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

кости и растворы активных веществ – скипидар, никотин, водные растворы сахара) наблюдается вращение плоскости поляризации:

$$\varphi = \alpha(\omega) l (\alpha < 0, \alpha < 0), \tag{18.17}$$

где $\alpha(\omega)$ – постоянная вращения (вращательная способность), в общем случае зависящая от длины волны. Для растворов линейно зависит от его концентрации.

Вдоль оптической оси кварца – $\alpha \sim 15 - 50$ град/мм.

Механизм – различие в скоростях света с разными направлениями круговой поляризации, обусловленное асимметрией молекул или асимметричным расположением атомов в кристалле (без центра и плоскостей симметрии, проходящих через нормаль к фронту волны).

Две модификации оптически активных веществ: правовращающая и левовращающая. Направление вращения определяется по отношению к направлению (навстречу) распространения света (луча). Для правовращающих веществ плоскость поляризации вращается по часовой стрелке, для левовращающих – против.

Обе модификации естественно-активных веществ отличаются друг от друга внутренней кристаллической или молекулярной структурой. Обе модификации не конгруэнтны – они не могут быть совмещены в пространстве, но зеркальное изображение одной может быть совмещено с другой.

Направление вращения по отношению к направлению света не зависит от того, в каком из двух прямо противоположных направлений распространяется свет.

Если свет пройдет туда и обратно через естественно-активное вещество, то плоскость поляризации возвратится к исходному направлению.

§4. Рассеяние света.

Рассеяние света – возмущение (в общем случае частичное поглощение и изменение интенсивности, частоты, поляризации) световых полей на оптических пространственных неоднородностях среды.

Оптические неоднородности – включения инородных частиц и флуктуации оптических свойств среды (тепл. флуктуации $\rho, c, \vec{E}', \vec{p}'$).

Процесс рассеяния света состоит в заимствовании молекулой или частицей энергии у распространяющейся в среде волны и последующем излучении всей или части этой энергии.

Упругое рассеяние – частота рассеянного света $\omega_р$ равна частоте падающего света $\omega_п$; сохраняются фазовые соотношения между падающей и рассеянной волнами – когерентное рассеяние.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

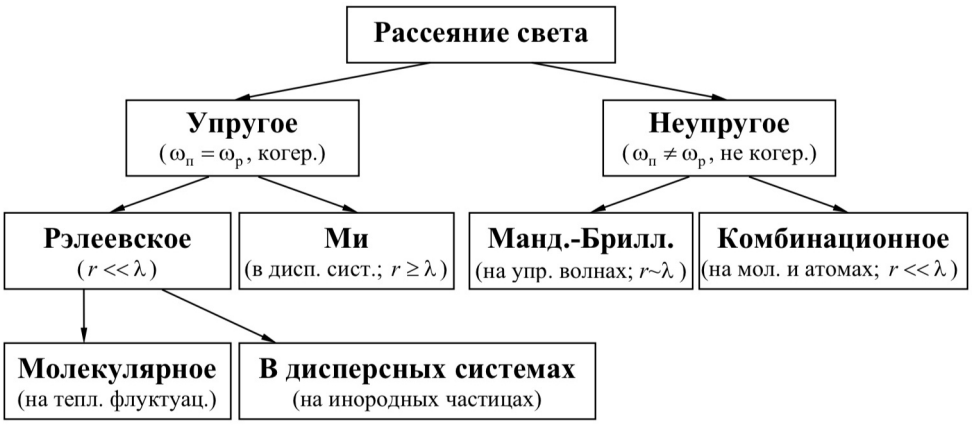


Рис. 18.5. Классификация типов рассеяния света.

Неупругое рассеяние – частота рассеянного света $\omega_р$ не равна частоте падающего света $\omega_п$; фазовый сбой – некогерентное рассеяние.

Стоксово рассеяние – $\omega_р < \omega_п$. **Антистоксово** рассеяние – $\omega_р > \omega_п$.

Рэлеевское рассеяние – упругое когерентное рассеяние света на оптических неоднородностях, размеры которых $r \ll \lambda$.

Виды (типы) рассеяния. (Рис. 18.5)

1) Молекулярное рассеяние – рэлеевское рассеяние света на тепловых статистически независимых (быстро затухающих, некоррелированных) флуктуациях оптических свойств макроскопически однородной среды, не содержащей примесей.

2) Рэлеевское рассеяние в дисперсных системах – на инородных частицах ($r \ll \lambda$), содержащихся в макроскопически однородной (дисперсной) среде.

3) Рассеяние Ми – упругое рассеяние в дисперсных системах на частицах с $r \leqslant \lambda$.

4) Рассеяние Мандельштама-Бриллюэна – неупругое рассеяние на изменениях плотности чистой макроскопически однородной конденсированной среды, в которой распространяются упругие волны (на слабо затухающих коррелированных флуктуациях плотности).

5) Комбинационное рассеяние – неупругое рассеяние света молекулами и атомами.

Возможно многократное рассеяние элементарными рассеивателями – как частицами, так и молекулами внутри частиц.

Дисперсные системы – системы, состоящие из множества мелких частиц (дисперсная фаза), распределенных в однородной среде (дисперсной среде).

Тонкодисперсные (высокодисперсные, коллоидные) системы ($10^{-9} \leqslant r \leqslant 10^{-7}$м = 1 мкм) – золи. Характерно интенсивное броуновское движение частиц.

Грубодисперсные ($r \geqslant 10^{-6}$м = 1 мкм) – суспензии, эмульсии, пары, туманы, пыли.

Мутные среды – среды с явно выраженной оптической неоднородностью (аэрозоли – пыль, дым, туман; суспензии; эмульсии, пар и т.д.).

Явление Тиндаля – рассеяние света мутной средой.

4.1. Индикатриса рассеяния, сечения и коэффициенты рассеяния.

Индикатриса рассеяния – пространственная диаграмма зависимости интенсивности $I(r,\Omega)$ рассеянного света от телесного угла Ω (направления) рассеяния на данном расстоянии r от рассеивателя.

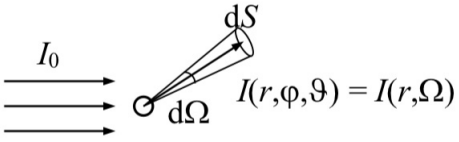


Рис. 18.6. Падение света на рассеиватель.

Полное сечение рассеяния (рассеивателем) σ – отношение полного потока энергии рассеянного света к интенсивности падающего излучения (Рис. 18.6):

$$\sigma \equiv \frac{J}{I_0} = \frac{\int\limits_0^{4\pi} I(r,\Omega) r^2 \mathrm{d}\Omega}{I_0} = \int\limits_0^{4\pi} \frac{I(r,\Omega) r^2}{I_0} \mathrm{d}\Omega = \int\limits_0^{4\pi} \mathrm{d}\sigma, \quad [\sigma] = \text{м}^2 \tag{18.18}$$

Дифференциальное сечение рассеяния (рассеивателем) – отношение потока энергии излучения, рассеянного в единицу телесного угла J, к интенсивности падающего излучения I_0:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}J}{I_0} = \frac{I(r,\Omega)\mathrm{d}S}{I_0} = \frac{I(r,\Omega) r^2 \mathrm{d}\Omega}{I_0}, \quad [\mathrm{d}\sigma] = \text{м}^2 \tag{18.19}$$

Коэффициент рассеяния (телом) – отношение потока энергии излучения, рассеиваемого данным телом, к падающему на него потоку энергии излучения с поперечным сечением площадью S:

$$k_S \equiv \frac{J}{J_0(S)} = \frac{J}{I_0 S} = \frac{\sigma}{S}, \quad [k_s] = 1 \tag{18.20}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

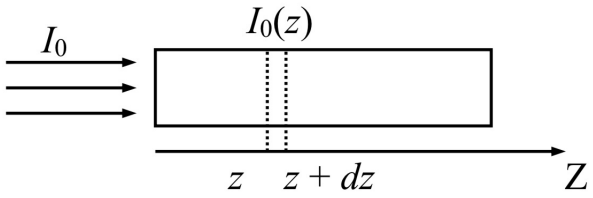


Рис. 18.7. Ослабление интенсивности света.

Рассмотрим процесс распространения света вдоль оси Z (Рис. 18.7), взаимодействие которого со средой приводит к рассеянию света. Рассмотрим слой толщиной $\mathrm{d}z$. Плотность потока падающего света в точке z – $I_0(z)$, в точке $(z+\mathrm{d}z)$ – $I_0(z+\mathrm{d}z)$.

Изменение плотности потока излучения при рассеянии света слоем $\mathrm{d}z$ пропорционально плотности падающего потока и толщине слоя:

$$\mathrm{d}I_0 = I_0(z+\mathrm{d}z) - I_0(z) = -\alpha_s I_0(z)\mathrm{d}z \tag{18.21}$$

Здесь α_s – **линейный коэффициент рассеяния** ($[\alpha_s] = \text{м}^{-1}$).

Тогда

$$I_0(z) = I_0(z=0)e^{-\alpha_s z} = I_0 e^{-\frac{z}{1/\alpha_s}} \tag{18.22}$$

$1/\alpha_s$ – характерная длина вдоль направления распространения волны, на котором интенсивность падает в e раз.

Рассмотрим сечение слоя (Рис. 18.7) площадью S. Пусть N – концентрация рассеивателей. Изменение потока при прохождении слоя толщиной $\mathrm{d}z$:

$$-\alpha_s S I_0(z)\mathrm{d}z = -NJS\mathrm{d}z \tag{18.23}$$

Тогда:

$$\alpha_s = N\frac{J}{I_0} = N\sigma \tag{18.24}$$

4.2 Излучение элементарного рассеивателя. Закон Рэлея, индикатриса рассеяния и поляризация.

Пусть исходная волна *в вакууме* линейно поляризована (Рис. 18.8). Рассмотрим некоторую систему зарядов, которая не обладала электрическим дипольным моментом до воздействия электрического поля волны. При воздействии электрического поля возникает электрический дипольный момент $\vec{p} = q\vec{l}$ ($\vec{l}$ – величина, указывающая направление и степень смещения зарядов друг относительно друга), направленный как напряженность электрического поля. Пусть $l \ll \lambda$.

Рассмотрим точку, положение которой задается радиус-вектором $\vec{r}$ относительно рассеивателя. $\vec{n}$ – единичный вектор, указывающий направление распространения

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

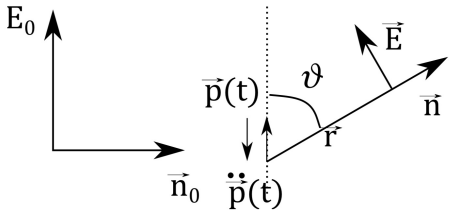


Рис. 18.8. Воздействие света на систему зарядов в вакууме.

рассеянной волны (по смыслу он есть и нормаль, и луч для рассеянного света). Будем считать, что $r \gg l$.

В соответствие с уравнениями Максвелла:

$$\vec{H}(t, vecr) = -\frac{1}{4\pi cr}[\vec{n}\ddot{\vec{p}}(t - r/c)] \tag{18.25}$$

Воспользуемся тем, что в вакууме $\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Longrightarrow [\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D}$, тогда

$$\vec{D} = -\frac{1}{v}[\vec{n}\vec{H}] = -\frac{1}{c}[\vec{n}\vec{H}] = \varepsilon_0\vec{E} \tag{18.26}$$

$$\vec{E}(r,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi c^2 r}\left[\vec{n}[\vec{n}\ddot{\vec{p}}(t - r/c)]\right] \tag{18.27}$$

Будем считать излучение таким, что для него характерны гармонические изменения напряженности электрического поля. Значит:

$$\vec{p} = \vec{p}_0\cos(\omega t), \quad \ddot{\vec{p}} = -\omega^2\vec{p}_0 \tag{18.28}$$

Т.е. следует ожидать, что $\ddot{\vec{p}}$ будет направлен в противоположную сторону $\vec{p}$.

Понятно, что напряженность магнитного поля в точке $\vec{r}$ будет направлена на нас из плоскости (Рис. 18.8), а напряженность электрического поля – перпендикулярно как $\vec{n}$, так и $\vec{H}$. Отсюда делаем вывод, что напряженность электрического поля всегда лежит в плоскости, которая образована напряженностью электрического поля падающей волны и вектора нормали рассеянной волны $\vec{E} \parallel (\vec{E}_0, \vec{n})$.

Интенсивность рассеянной волны (с точностью до константы $\varepsilon_0\varepsilon v = \varepsilon_0 c$ в системе СИ):

$$I(\vec{r}) = \left\langle E^2(t)\right\rangle \tag{18.29}$$

Проекция напряженности электрического поля на локальную ось, которая направлена $\perp \vec{n}$ и $\perp \vec{H}$:

$$E(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\ddot{p}(t)\sin\vartheta \tag{18.30}$$

Тогда интенсивность рассеянной волны:

$$I(\vec{r}) = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)^2}\overline{(\ddot{p})^2}\sin^2\vartheta = \frac{\omega^4}{(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)^2}\overline{p^2}\sin^2\vartheta \tag{18.31}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

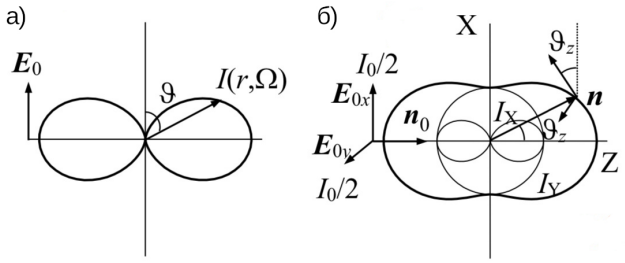


Рис. 18.9. Угловое распределение интенсивности рассеянного излучения:
а – для поляризованного света,
б – для неполяризованного света (с естественной поляризацией).

Полученное выражение (18.31) – закон Рэлея.

Угловое распределение интенсивности рассеянного излучения (индикатриса рассеяния) электрического поля падающей линейно поляризованной волны аксиально симметрично вдоль направления напряженности (Рис. 18.9).

Пусть падающий свет не поляризован (с естественной поляризацией):

$$I(\vec{n}) = I_X(\vartheta_x) + I_Y(\vartheta_y) \sim \frac{\sin^2\vartheta_x + \sin^2\vartheta_y}{2} = \frac{1+\cos^2\vartheta_z}{2} = I(\vartheta_z), \tag{18.32}$$

I_X и I_Y – интенсивности рассеянного света, который образован линейно поляризованными вдоль осей X и Y некоррелированными компонентами падающего света. Угловое распределение интенсивности излучения (индикатриса рассеяния) аксиально симметрично вдоль направления падающей волны (Рис. 18.9). Здесь $\vec{n} = (\cos\vartheta_x, \cos\vartheta_y, \cos\vartheta_z)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 19. Молекулярное рассеяние света. Излучение света.

4.2 Излучение элементарного рассеивателя. Закон Рэлея, индикатриса рассеяния и поляризация. Продолжение.

Элементарный рассеиватель – рассеиватель, линейные размеры которого много меньше длины волны, а расстояния, на которых рассматривается рассеянная им волна, гораздо больше линейных размеров рассеивателя.

Полный поток энергии рассеянной волны (мощность волны) т.е. энергия, котороя в единицу времени рассеивается на рассеивателе:

$$J = \oiint I(\vartheta)\mathrm{d}S = \int_0^{4\pi}\!\!\int I(\vartheta)r^2\mathrm{d}\Omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} I(\vartheta)r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \\ = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\omega^4\overline{p^2}r^2}{(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)^2}\sin^2\vartheta\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \frac{\omega^4\overline{p^2}}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4} \tag{19.1}$$

Интенсивность рассеянной волны была найдена с точностью до константы $\varepsilon_0\varepsilon v = \varepsilon_0 c$ в системе СИ. Поэтому для оценки величины J надо выражение (19.1) домножить на константу:

$$J = \frac{\omega^4\overline{p^2}}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{19.2}$$

Неполяризованный свет, рассеянный под углом к первичному пучку, становится частично поляризованным.

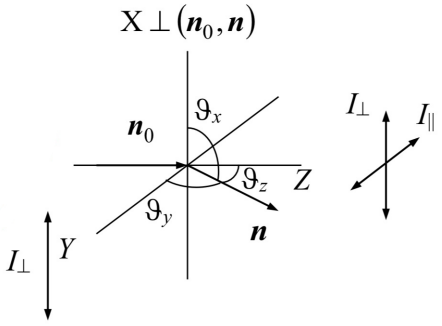


Рис. 19.1. Выбор системы координат.

Рассмотрим другую систему координат (Рис. 19.1): с помощью $\vec{n}_0$ зададим ось Z, остальные оси будут определяться вектором нормали рассеянной волны $\vec{n}$. Ось $X \perp (\vec{n}_0, \vec{n})$. Ось Y определяется однозначно. Тогда $\vartheta_x = \pi/2$, $\vartheta_y = \pi/2 - \vartheta_z$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Степень поляризации:

$$P \equiv \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel} \tag{19.3}$$

где $I_\perp$ и $I_\parallel$ – интенсивности рассеянного света, который поляризован вдоль и поперек плоскости $(\vec{n}_0, \vec{n})$.

$$P = \frac{I_X - I_Y}{I_X + I_Y} = \frac{\sin^2\vartheta_x - \sin^2\vartheta_y}{\sin^2\vartheta_x + \sin^2\vartheta_y} = \frac{1-\cos^2\vartheta_z}{1+\cos^2\vartheta_z} = \frac{\sin^2\vartheta_z}{1+\cos^2\vartheta_z} = P(\vartheta_z) \tag{19.4}$$

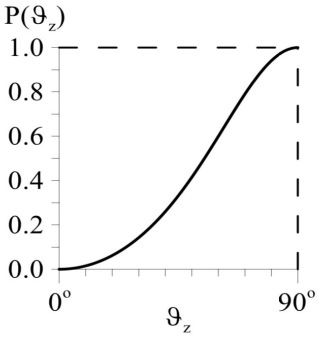


Рис. 19.2. Зависимость степени поляризации от угла ϑ_z.

Зависимость степени поляризации P от угла ϑ_z изображена на (Рис. 19.2).

4.3. Молекулярное рассеяние света.

Молекулярное рассеяние – рэлеевское (упругое, при $r \ll \lambda$) рассеяние света на тепловых статистически независимых флуктуациях оптических свойств макроскопически однородной среды, не содержащей примесей.

А. Статистическая теория рассеяния.

Для разреженных газов – в 1908 г. (польск.) Мариан Смолуховский. Для жидкостей – в 1910 г. (немецк.) Альберт Эйнштейн.

Основные положения:

– размеры оптических неоднородностей малы по сравнению с длиной волны света;

– положение каждой области неоднородности не зависит от положений других областей;

– взаимодействием областей неоднородности можно пренебречь.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Основная причина статистических (тепловых) флуктуаций оптических свойств – флуктуация плотности среды. При этом будет флуктуировать и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$:

$$\Delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \Delta T \cong \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho \tag{19.5}$$

Рассеяние обусловлено наличием флуктуации электрического дипольного момента выделенных объемов V_j оптической неоднородности $\vec{p}_{V_j} = V_j\vec{P} = V_j\varepsilon_0(\varepsilon_j - 1)\vec{E}_0$:

$$\Delta\vec{p}_{V_j} = V_j\varepsilon_0\Delta\varepsilon_j\vec{E}_0 = V_j\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho_j\vec{E}_0 \tag{19.6}$$

Рассеяние на молекулах каждой оптической неоднородности упруго и когерентно. Напряженность электрического поля рассеянного света на этой неоднородности равна сумме напряженностей полей света, рассеянного каждой молекулой. Следовательно:

$$E_j = \frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\Delta p_{V_j}\sin\vartheta = E_0\frac{\omega^2}{4\pi c^2 r}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho_j V_j\sin\vartheta \tag{19.7}$$

$$I_j = \langle E_j^2\rangle = I_0\frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \overline{(\Delta\rho_j V_j)^2}\sin^2\vartheta \tag{19.8}$$

Поскольку $\rho_j = m_j/V_j$, то для выделенной массы m_j среды при малых флуктуациях $\frac{\Delta\rho_j}{\rho_j} = -\frac{\Delta V_j}{V_j}$ и $\overline{(\Delta\rho_j V_j)^2} = \overline{(\rho_j\Delta V_j)^2} \cong \rho\overline{(\Delta V_j)^2}$

Рассеяние на совокупности областей оптической неоднородности не когерентно и интенсивность рассеянного света равна сумме интенсивностей света, рассеянного отдельными областями. В результате при рассеянии на статистически независимых тепловых флуктуациях плотности в совокупности объемов $\{V_j\}$ получим:

$$I = \sum_j I_j \cong I_0\frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \sum_j \overline{(V_j)^2}\sin^2\vartheta \tag{19.9}$$

Б. Формулы Эйнштейна и Рэлея.

Формула Эйнштейна для рассеяния света в жидкостях и плотных газах.

Пусть объем выделенной части жидкости или газа флуктуирует при данной температуре на малую величину ΔV_j. В первом приближении:

$$\left(\frac{\Delta P_j}{\Delta V_j}\right)_T \cong \alpha_j - const(V_j) < 0 \tag{19.10}$$

Работа сил давления при флуктуации будет равна:

$$\Delta A_j = \int\limits_{\overline{V_j}}^{\overline{V_j}+\Delta V_j} (\overline{P} + \Delta P_j)\mathrm{d}V = \int\limits_0^{\Delta V_j} (\overline{P} + \alpha_j\Delta V_j)\,\mathrm{d}\big(\Delta V_j\big) = \overline{P}\Delta V_j + \frac{\alpha_j}{2}(\Delta V_j)^2 \tag{19.11}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть процессы флуктуаций достаточно быстры по сравнению со скоростью обмена энергией между выделенной частью и средой. В соответствии с первым началом термодинамики для выделенной части при адиабатических процессах $\Delta Q_j = \Delta U_j + \Delta A_j = 0$. Воспользуемся теоремой о равнораспределении энергии по степеням свободы для термодинамической системы в состоянии равновесия:

$$\overline{\Delta U_j} = -\overline{\Delta A_j} = -\overline{P\Delta V_j} - \frac{\alpha_j}{2}\overline{(\Delta V_j)^2} = -\frac{\alpha_j}{2}\overline{(\Delta V_j)^2} = \frac{1}{2}kT, \tag{19.12}$$

$$\overline{(\Delta V_j)^2} = -\frac{kT}{\alpha_j} \tag{19.13}$$

В то же время изотермическая сжимаемость $\beta_T \equiv -\frac{1}{V_j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial P_j}\right)_T$ и $\alpha_j \cong \left(\frac{\Delta P_j}{\Delta V_j}\right)_T \cong -\frac{1}{V_j\beta_T}$. Таким образом

$$\overline{(\Delta V_j)^2} = V_j\beta_T kT, \quad \sum_j \overline{(\Delta V_j)^2} = V\beta_T kT \tag{19.14}$$

В результате получим **формулу Эйнштейна** для рассеяния света в жидкостях и плотных газах:

$$\boxed{I = I_0\frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 V\beta_T kT\sin^2\vartheta} \tag{19.15}$$

Формула Рэлея. В случае разряженных газов воспользуемся уравнением состояния $P_jV_j = N_jkT$:

$$\beta_T \equiv -\frac{1}{V_j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial P_j}\right)_T = \frac{1}{V_j}N_jkT\frac{1}{P_j^2} = \frac{1}{P_j}, \tag{19.16}$$

$$\beta_T kT = \frac{kT}{P_j} = \frac{V_j}{N_j} \cong \frac{1}{N}, \tag{19.17}$$

где N_j – число молекул (атомов) в объеме V_j, N – средняя концентрация молекул, одинаковая по всем объемам V_J.

Воспользуемся выражением для диэлектрической проницаемости газа $\varepsilon - 1 = N\beta = N_A\frac{\rho}{\mu}\beta$:

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} = \rho N_A\frac{1}{\mu}\beta = \varepsilon - 1 = n^2 - 1 \cong 2(n-1), \tag{19.18}$$

где β – поляризуемость молекулы. В результате получим **формулу Рэлея** для рассеяния света в разреженном газе:

$$\boxed{I = I_0\frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2}4(n-1)^2\frac{V}{N}\sin^2\vartheta} \tag{19.19}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В. Важнейшие особенности молекулярного рассеяния.

1) Индикатриса интенсивности рассеянного света – как у элементарного рассеивателя:
   - линейно поляризованное излучение – $I(\Omega) \sim \sin^2\vartheta$,
   - естественная поляризация – $I(\Omega) \sim \frac{1+\cos^2\vartheta_z}{2}$

2) Поляризация рассеянного света:
   - от изотропных молекул – как у элементарного рассеивателя:
     степень поляризации – $P(\vartheta_z) \equiv \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel} = \frac{\sin^2\vartheta_z}{1+\cos^2\vartheta_z}$;
   - от анизотропных молекул – деполяризация света при $\vartheta = \pi/2$;
     коэффициент деполяризации – $\gamma \equiv \frac{I_\parallel}{I_\perp}(\vartheta_z = \pi/2)$,
     (газы – $\gamma \sim 10^{-2}$, жидкости – $\gamma \sim 0.1 - 1$).

3) Закон Рэлея – $I \sim \omega^4 \sim 1/\lambda^4$ – как у элементарного рассеивателя.

4) Критическая опалесценция – явление возрастания интенсивности рассеянного излучения вблизи критической температуры из-за возрастания флуктуаций и соответственно возрастания изотермической сжимаемости

$$\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \text{ и } \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T \tag{19.20}$$

5) Селективное по частоте рассеяние – интенсивность рассеянного излучения возрастает вблизи собственных частот элементарного рассеивателя $\omega \sim \omega_0$, поскольку $I \sim (n-1)^2$.

4.4. Рассеяние Рэлея в дисперсных средах.

Рэлеевское (упругое, при $r \ll \lambda$) рассеяние света на содержащихся в макроскопически однородной среде частицах, линейные размеры r которых значительно меньше длины волны λ, аналогично упругому рассеянию молекулой.

Случайное распределение в диэлектрической среде (ε) одинаковых диэлектрических шариков (ε_1) радиуса $r \ll \lambda$ на расстояниях друг от друга $r \gg r$.

Основываясь на законах электростатики, можно показать, что под действием поля $\vec{E}_0$ дополнительная поляризация в области шариков равна

$$\Delta\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon)\varepsilon}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon}\vec{E}_0 \tag{19.21}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

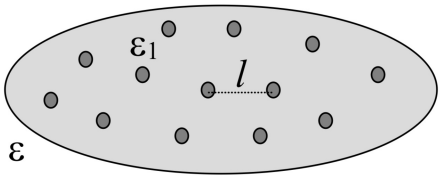


Рис. 19.3. Случайное распределение в диэлектрической среде (ε) одинаковых диэлектрических шариков (ε_1) радиуса $r \ll \lambda$ на расстояниях друг от друга $r \gg r$.

Дипольный момент этой области V_1:

$$\Delta\vec{p} = V_1\Delta\vec{P} = V_1\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon)\varepsilon}{\varepsilon_1+2\varepsilon}\vec{E}_0 \tag{19.22}$$

Интенсивность света, рассеянного одним шариком:

$$I_1 = \frac{\omega^4}{(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)^2}\overline{(\Delta p)^2}\sin^2\vartheta = I_0\left(\frac{3\varepsilon}{4\pi c^2 r}\right)^2\omega^4 V_1^2\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{\varepsilon_1+2\varepsilon}\right)^2\sin^2\vartheta \tag{19.23}$$

Интенсивность света, рассеиваемого всеми шариками в объеме на расстояниях $L \gg \sqrt[3]{V}$ (Джон Уильям Рэлей, 1871 г.):

$$\boxed{I = NVI_1 = I_0 NV\left(\frac{3\varepsilon}{4\pi c^2 r}\right)^2\omega^4 V_1^2\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{\varepsilon_1+2\varepsilon}\right)^2\sin^2\vartheta} \tag{19.24}$$

N – концентрация шариков (рассеивающих частиц) в среде.

Основные особенности:

1) индикатриса рассеяния – как в случае молекулярного рассеяния;

2) поляризация – как в случае молекулярного рассеяния;

3) закон Рэлея – как в случае молекулярного рассеяния;

4) сильная зависимость от размера частиц – r^6.

5) сильная зависимость от разности проницаемостей: $\sim(\varepsilon_1-\varepsilon)^2$

4.5. Рассеяние Ми.

Рассеяние Ми – упругое рассеяние на содержащихся в макроскопически однородной среде мелкодисперсных частицах, линейные размеры которых порядка и больше λ ($r >\sim \lambda$).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Строгая теория разработана Густавом Адольфом Ми (1908 г.). Теория сводится к решению уравнений Максвелла с граничными условиями на поверхности сферической частицы произвольного радиуса r, характеризуемой диэлектрической и магнитной проницаемостями и электропроводностью. Теория упругого рассеяния Ми учитывает размеры частиц – с малым параметром $\alpha = kr = 2\pi\frac{r}{\lambda}$. При $\alpha < 0.2$ рассеяние становится Рэлеевским (при $r \ll \lambda$) как предельный случай рассеяния Ми.

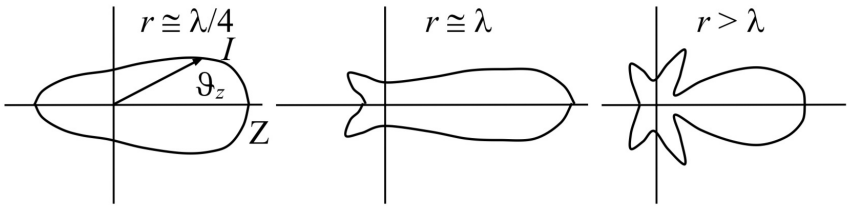


Рис. 19.4. Индикатриса рассеяния при рассеянии Ми.

Некоторые результаты громоздкой и сложной теории Ми.

1) Индикатриса рассеяния (Рис. 19.4).

   С увеличением размера частиц (r/λ) преобладает рассеяние вперед без резких максимумов и минимумов $(r < \lambda)$.

   При дальнейшем увеличении размеров частиц r до λ и более (при $\varepsilon > 1$) в индикатрисе рассеяния появляются резкие максимумы и минимумы – вблизи так называемых **резонансов Ми** $(2r = m\lambda, \quad m = 1,2,3,\ldots)$, рассеяние вперед усиливается, назад – ослабевает.

2) Рассеянный свет частично поляризован даже при неполяризованном падающем излучении. Характер поляризации зависит от оптических свойств частицы и от направления рассеяния, зависимость поляризации от угла рассеяния усложняется.

3) Слабая зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны.

Проявления рассеяния Ми: белые облака; белесый оттенок неба при задымлении; небо сереет к горизонту; почти полная непрозрачность тумана.

Основные причины различий рассеяния Ми от рэлеевского рассеяния

1) Влияние переизлучения первичной волны элементарными рассеивателями одной частицы.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) Различия в фазах излучения элементарных рассеивателей из-за расстояния между элементарными рассеивателями и их зависимость от направления рассеивания.

В грубодисперсных средах при $r \gg \lambda$ процесс рассеяния рассматривается на основе геометрической оптики с учетом интерференции лучей, отраженных и преломленных на поверхности частиц – дифракции.

Важная особенность – периодический характер зависимости интенсивности по углу и по отношению размера частицы к длине волны. Эта периодичность обуславливает ореолы, радуги, гало и другие явления, происходящие в аэрозолях, туманах и т.д.

4.6. Рассеяние Мандельштама-Бриллюена.

Рассеяние Мандельштама-Бриллюэна – неупругое рассеяние на изменениях плотности чистой макроскопически однородной конденсированной среды, в которой распространяются упругие волны (на слабозатухающих коррелированных флуктуациях плотности).

Коррелированные флуктуации плотности можно рассматривать как совокупность упругих волн, распространяющихся в конденсированной среде по всевозможным направлениям и обладающих всевозможными частотами Ω и фазами.

Этим волнам соответствуют гармонические распределения оптической неоднородности среды в пространстве и времени, которые приводят к модуляции амплитуды и фазы рассеянного света. В результате возникает дифракция света на упругих волнах – рассеяние с изменением частоты дифрагированного света.

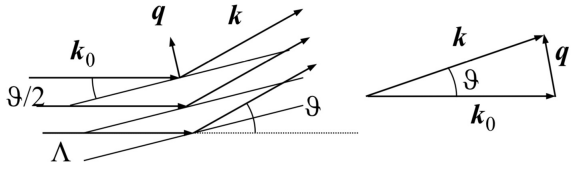


Рис. 19.5. Распространение двух волн с волновыми векторами $\vec{k}_0$ и $\vec{q}$.

Если в среде распространяется плоская монохроматическая волна с частотой ω_0 и волновым вектором $\vec{k}_0$: $E_0 = a_0 \cos\left(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}\right)$, которая встречает бегущую упругую волну с частотой Ω и волновым вектором $\vec{q}$: $\delta\rho = \delta\rho_0 \cos(\Omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})$, то максимум дифрагировавшего света будет виден в направлении, отвечающем **условию Брэгга-Вульфа** (с учетом $k = \omega/\lambda \cong k_0 = \omega/\lambda_0 \gg q = \Omega/\Lambda$ – **условию векторного синхро-**

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

низма) (Рис. 19.5):

$$2\Lambda \sin\frac{\vartheta}{2} = \lambda_0 \tag{19.25}$$

$$2k_0 \sin\frac{\vartheta}{2} = q \tag{19.26}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{q} \tag{19.27}$$

В соответствии с условием Брэгга-Вульфа можно связать между собой частоты световой $\omega_0 = k_0 v$ и упругой $\Omega = qV$ волн с углом рассеяния ϑ:

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = 2\frac{V}{v}\sin\frac{\vartheta}{2} \tag{19.28}$$

Полученное выражение (19.28) – **формула Мандельштама-Бриллюэна**. Как видим, при $\vartheta \uparrow \Longrightarrow \Omega \uparrow, \Lambda \downarrow$.

При дифракции волны на гармонической неоднородности плотности среды (диэлектрической проницаемости) в линейном приближении получается дифракционный спектр только первого порядка. Амплитуда рассеянного света, дифрагировавшего на упругой волне в направлении, определяемом не- которым углом рассеяния ϑ, будет меняться по закону $\cos(\Omega t)$

$$E(t) \sim E_0(t)\delta\rho(t) \sim \cos(\omega_0 t)\cos(\Omega t) = \frac{\cos\left((\omega_0 - \Omega)t\right) + \cos\left((\omega_0 + \Omega)t\right)}{2} \tag{19.29}$$

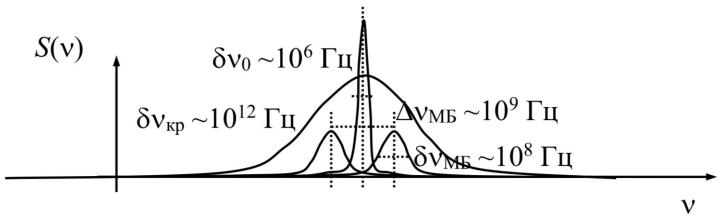


Рис. 19.6. Компоненты Мандельштама-Бриллюэна.

Следовательно, в рассеянном свете должны наблюдаться два сателлита – **стоксов** и **антистоксов** сателлиты с частотами $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$, симметрично расположенными по обе стороны от частоты падающего света. Эти сателлиты называются **компонентами Мандельштама-Бриллюэна** и образуют тонкую структуру спектральной линии Рэлея (Рис. 19.6).

Для каждой упругой волны с частотой Ω существует две рассеянные волны под углами $\pm\vartheta$ с частотами $\omega_0 \pm \Omega$. При этом под бóльшими углами рассеяния наблюдается бóльшее частотное смещение ($\Delta\nu_{\text{МБ}} = \pm\Omega$) компонент М.-Б (в соотв. с формулой М.-Б). Обе частотные компоненты имеют ширину $\delta\nu_{\text{МБ}} \sim 10^8$ Гц, связанную со временем затухания звуковой волны: $\delta\nu_{\text{МБ}} \sim 1/\tau_{\text{зв}}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4.7. Комбинационное рассеяние.

Комбинационное рассеяние (**эффект Рамана**) – неупругое рассеяние света молекулами (атомами, ионами).

Классическое представление

Амплитуда рассеиваемого света модулируется (поскольку меняются оптические свойства молекулы) гармоническим внутримолекулярным (внутриатомным) движением с частотой ω_i:

$$E(t) \sim (1+\alpha\cos(\omega_i t))\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{2}(\cos((\omega_0-\omega_i)t) + \cos((\omega_0+\omega_i)t)) \quad (19.30)$$

Квантовое представление

Свет частоты ω_0 распространяется в виде определенных порций – квантов, энергия которых равна $\hbar\omega_0$ ($\hbar \cong 1.05\cdot 10^{-34}$Дж$\cdot$с). Атомы или молекулы, в которых совершаются колебания с частотой ω_i, содержат запас энергии $\hbar\omega_i$. Процесс рассеяния света молекулами можно упрощенно рассматривать как столкновение световых квантов – фотонов с молекулами, в результате которого фотоны изменяют направление своего полета, то есть рассеиваются.

Столкновения фотонов с молекулами могут быть как упругими, так и неупругими.

Упругое столкновение – $\hbar\omega = \hbar\omega_0$, $\omega = \omega_0$.

Неупругое столкновение – $\hbar\omega = \hbar\omega_0 \pm \hbar\omega_i$, $\omega = \omega_0 \pm \omega_i$. Частота рассеянного света комбинируется из частоты падающего света ω_0 и частот ω_i внутримолекулярного колебания.

Закономерности комбинационного рассеяния.

1) В спектре рассеянного света наблюдаются сателлиты, сопровождающие каждую спектральную линию падающего света.

2) Число сателлитов, разности частот спектральной линии и сателлитов $\Delta\nu \sim 10^{12}$Гц, характер их поляризации, не зависят от частоты спектральной линии и характерны для рассеивающего вещества.

3) Сателлиты образуют две симметричные системы линий относительно спектральной линии падающей волны: с меньшими частотами – красные (стоксовы), с большими – фиолетовые (антистоксовы).

4) Интенсивности красных спутников значительно больше, чем фиолетовых, с повышением температуры интенсивности их быстро выравниваются.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Глава 6. Излучение света.

§1. Излучение атома.

1.1. Классическая осцилляторная модель атома.

Рассмотрим классическую осцилляторную модель атома, разработанную Хендриком Антоном Лорентцем. Для простоты предположим, что в атоме есть всего один оптический электрон. По определению электрического дипольного момента

$$\vec{p}(t) = q\vec{x}(t), \tag{19.31}$$

где q – заряд электрона, $\vec{x}(t)$ – смещение электрона относительно ядра. Учтем, что масса ядра и масса электрона: $m_p/m_e \cong 1836$.

Рассмотрим электрон в атоме, как **затухающий гармонический осциллятор** (**атомный осциллятор**), колебания которого описываются классическим уравнением движения:

$$m\ddot{\vec{x}} = -k\vec{x} - \gamma\dot{\vec{x}}, \tag{19.32}$$

где m – масса электрона, $-\gamma\dot{\vec{x}}$ – сила, описывающая силу трения, и введенная для учета излучения света, $-k\vec{x}$ – квазиупругая сила, стремящаяся вернуть электрон в положение равновесия. Запишем уравнение движения электрона:

$$\ddot{\vec{x}} + 2\delta\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = 0, \tag{19.33}$$

где $\delta \equiv \gamma/2m$ – коэффициент радиационного затухания, $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебаний электрона в атоме без затухания.

Решая уравнение движения электрона при $\delta < \omega_0$ (обычно $\delta \sim 10^8 \text{с}^{-1} \ll \omega_0 \sim 10^{15}\text{с}^{-1}$), получим закон его движения:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{19.34}$$

При этом $\vec{x}_0$ и φ_0 зависят от начальных значений. Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Найдем первую производную по времени от $\vec{x}(t)$:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{x}_0\left((-\delta e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0)\right) \tag{19.35}$$

Рассмотрим энергию атомного осциллятора, усредненную за период колебаний T. Пусть $\delta \ll \omega$, тогда:

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle_T = \left\langle x_0^2 e^{-2\delta t}\cos^2(\omega t + \varphi_0)\right\rangle_T \cong \frac{1}{2}x_0^2 e^{-2\delta t}, \tag{19.36}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\left\langle \dot{x}^2(t) \right\rangle_T \cong \frac{1}{2} x_0^2 e^{-2\delta t} (\delta^2 + \omega^2) = \frac{1}{2} x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} \tag{19.37}$$

Кинетическая энергия атомного осциллятора:

$$\langle W_K \rangle_T = \left\langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right\rangle_T = \frac{1}{4} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t}, \tag{19.38}$$

где учтено, что $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Потенциальная энергия атомного осциллятора:

$$\langle W_n \rangle_T = \left\langle \frac{1}{2} k x^2 \right\rangle_T = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t} \tag{19.39}$$

Полная энергия атомного осциллятора:

$$\langle W \rangle_T = \langle W_K \rangle_T + \langle W_n \rangle_T = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\delta t} = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} = W_0 e^{-2\delta t} = W_0 e^{-t/\Delta t}, \tag{19.40}$$

то есть, энергия осциллятора меняется со временем по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания 2δ.

Введем в рассмотрение **время затухания** атомного осциллятора $\tau \equiv 1/\delta$ – время, через которое мплитуда колебаний осциллятора уменьшается в e раз.

При этом время уменьшения энергии осциллятора в те же e раз (**время жизни атома в возбужденном состоянии**) равно: $\Delta t = \tau/2$.

Мощность рассеяния (поток энергии в рассеиваемом свете) рассеивателя:

$$J = -\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} = 2\delta \frac{m \omega_0^2 x_0^2}{2} e^{-2\delta t} \tag{19.41}$$

С другой стороны, мощность рассеяния (19.2):

$$J \cong \frac{\omega_0^4 q^2 x_0^2 e^{-2\delta t}}{6\pi\varepsilon_0 c^3 2} \tag{19.42}$$

Тогда время затухания:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{12\pi\varepsilon_0 c^3 m}{q^2 \omega_0^2}} \tag{19.43}$$

Оценим время затухания для частот, соответствующих видимому диапазону света: $\tau \simeq 2 \cdot 10^{-8}$ с.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 20. Ансамбль независимых осцилляторов. Квантовые свойства света.

1.2. Естественная форма и ширина линии излучения.

В соответствии с законом движения осциллятора его электрический дипольный момент меняется со временем по закону:

$$\vec{p}(t) = q\vec{x}(t) = \vec{p}_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{20.1}$$

В то же время напряженность электрического поля излучаемой им электромагнитной волны определяется второй производной дипольного момента по времени:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[\vec{n}[\vec{n}\ddot{\vec{p}}]\right] \tag{20.2}$$

Учитывая, что $\delta \sim 10^8 \text{с}^{-1} \ll \omega_0 \sim 10^{15}\text{с}^{-1}$, получим:

$$\ddot{\vec{p}}(t) \cong -\omega_0^2 \vec{p}_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{20.3}$$

$$\vec{E}(t) \cong \vec{E}_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{20.4}$$

Или для напряженности поля в проекции на локальную ось координат:

$$E(t) \cong E_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{20.5}$$

Как нами было показано ранее, в случае слабозатухающих колебаний – $f(t) = f_0 e^{-\delta t}\cos\omega_0 t$, $\omega_0 \delta$, спектральная плотность равна:

$$|f(i\omega)|^2 = \left(\frac{f_0}{2\delta}\right)^2 L\left(\frac{\omega-\omega_0}{\delta}\right) = \left(\frac{f_0}{2\delta}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\delta}\right)^2} \tag{20.6}$$

Здесь $L(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}$ – функция Лоренца.

Спектральная плотность для напряженности электрического поля излучения (частотный спектр) запишется в виде:

$$|E(i\omega)|^2 = \left(\frac{E_0}{2\delta}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\delta}\right)^2} \tag{20.7}$$

Качественно зависимость спектральной плотности от частоты изображена на (Рис. 20.1). Ширина линии на половине высоты:

$$\Delta\omega = 2\delta = \frac{2}{\tau} = \frac{1}{\Delta t} \tag{20.8}$$

Ширина спектра $\Delta\omega$ и характерное время изменения энергии осциллятора подчиняются соотношению:

$$\boxed{\Delta\omega\Delta t = 1} \tag{20.9}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

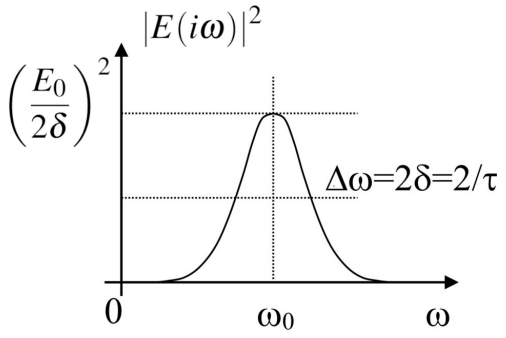


Рис. 20.1. Зависимость спектральной плотности напряженности электрического поля $|E(i\omega)|^2$ от частоты ω.

§2. Излучение ансамбля статистически независимых осцилляторов.

Будем рассматривать такой ансамбль, который состоит из большого числа атомов ($N \sim 10^{17}$ в см^3) – макроскопический ансамбль осцилляторов. Эти атомы участвуют в тепловом движении и взаимодейтсвуют между собой. В процессе соударений процесс излучения атома прерывается. Частота соударений может достигать $10^{10} - 10^{11}$ соударений в секунду, поэтому характерное время излучения будет $\sim 10^{-11}$ с.

2.1. Уширение спектральной линии.

А. Ударное уширение.

В газе при комнатной температуре и нормальном давлении среднее время между столкновениями атомов $\tau_0 \sim 10^{-11}$с. Оценка времени затухания естественного излучения атомного осциллятора дает $\tau \sim 10^{-8}$с. Для выбранных условий за время излучения атом претерпевает $\sim 10^3$ соударений. После каждого столкновения фаза испускаемой волны меняется случайным образом. Весь процесс излучения разбивается на отдельные акты излучения со средней продолжительностью τ_0. Так как ширина линии излучения обратно пропорциональна времени излучения, то из-за соударений ширина линии в рас- сматриваемых условиях будет примерно в 10^3 раз больше естественной ширины линии излучения.

В данном случае спектр излучения будет пропорционален функции Лоренца.

$$w(\omega) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+(1/\tau_0)^2} \tag{20.10}$$

Ударное уширение характеризуется лоренцевой формой линии с шириной $\Delta\omega_L =$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$2/\tau_0$.

Среднее время между соударениями τ_0 и ударное уширение $\Delta\omega_L$ можно оценить, воспользовавшись известными из раздела "Молекулярной физики" выражениями для средней длины свободного пробега и среднего модуля скорости молекул:

$$< l >= \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad < v >= \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}, \tag{20.11}$$

где d – газокинетический диаметр молекул, n – концентрация молекул в газе, k_B – постоянная Больцмана, T – температура, m – масса молекулы.

Среднее время между столкновениями с учетом $p = nk_B T$, где p – давление в газе, будет равно:

$$\tau_0 = \frac{< l >}{< v >} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n < v >} = \frac{\sqrt{mk_B T}}{4\sqrt{\pi} d^2 p}, \tag{20.12}$$

а ударное уширение:

$$\Delta\omega_L = \frac{2}{\tau_0} = \frac{8\sqrt{\pi} d^2 p}{\sqrt{mk_B T}} \tag{20.13}$$

Заметим, что при постоянном давлении p – $\Delta\omega_L \sim 1/\sqrt{T}$, а при постоянном объеме V, с учетом уравнения состояния газов – $\Delta\omega_L \sim \sqrt{T}$.

Б. Доплеровское уширение.

Пусть излучающий осциллятор участвует в тепловом движении. Тогда в соответствии с эффектом Доплера излучаемая им частота не равна частоте излучения покоящегося атома.

Воспользовавшись законом сохранения энергии и импульса в основном и возбужденном состояниях, можно получить выражение для частоты излучения осциллятора ω. Частота излучения и проекция скорости осциллятора v_z линейно связаны (продольный эффект Доплера):

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_z}{c}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \tag{20.14}$$

Было использовано следующее приближение для комнатных температур и типичных масс атомов:

$$\frac{\hbar\omega}{2mc^2}(10^{-9}) \ll \frac{v_z}{c}(10^{-5}) \tag{20.15}$$

Доля атомов, проекции скорости которых заключены в интервале $(v_z, v_z + \mathrm{d}v_z)$, в соответствии с распределением Максвелла вероятность пропорциональна

$$w(v_z)\mathrm{d}v_z \sim e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}}\mathrm{d}v_z \tag{20.16}$$

Учитывая линейную связь v_z и ω, для вероятности того, что частоты излучения заключены в интервале $(\omega, \omega + \mathrm{d}\omega)$, можно записать:

$$w(\omega)\mathrm{d}\omega = w(v_z)\mathrm{d}v_z \tag{20.17}$$

Следовательно, получаем выражение для распределения энергии по частотам:

$$w(\omega)\mathrm{d}\omega \sim e^{-\frac{mc^2(\omega-\omega_0)^2}{2k_BT\omega_0^2}}\mathrm{d}\omega = e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega_G/2}\right)^2\ln 2}\mathrm{d}\omega \tag{20.18}$$

Как видим, ударное уширение характеризуется гауссовой формой линии с шириной на половине высоты распределения:

$$\Delta\omega_G = \omega_0\sqrt{\frac{8k_BT\ln 2}{mc^2}} \sim \sqrt{T} \tag{20.19}$$

Оценим доплеровскую ширину спектральной линии излучения гелий-неонового лазера. Полагая $T = 300\mathrm{K}$, $\lambda = 6328\,\mathring{A}$, $m(Ne) = 3\cdot 10^{-26}$кг, $k_B = 1.38\cdot 10^{-23}$ Дж/град, $c = 3\cdot 10^8$ м/с, получим $\Delta\omega_G \cong 8.6\cdot 10^9\mathrm{c}^{-1}$.

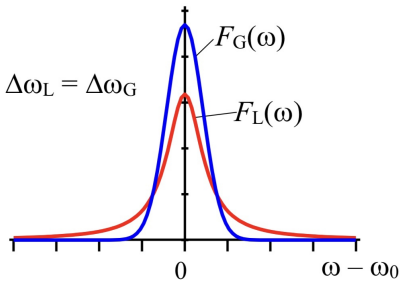


Рис. 20.2. Лоренцева и гауссова линии, имеющие одинаковую ширину $\Delta\omega_L = \Delta\omega_G$.

На (Рис. 20.2) представлены лоренцева и гауссова линии, имеющие одинаковую ширину $\Delta\omega_L = \Delta\omega_G$. При этом использована нормировка площади под каждой из этих кривых.

2.2. Понятие об однородном и неоднородном уширении.

Однородный ансамбль осцилляторов – ансамбль, в котором осцилляторы имеют одинаковые собственные частоты колебаний.

Однородно уширенная спектральная линия – спектральная линия однородного ансамбля осцилляторов, равная суперпозиции спектральных линий отдельных осцилляторов.

Однородная ширина $\Delta\omega$ характеризует спектр колебаний ансамбля осцилляторов с одинаковыми собственными частотами.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Причины – одинаковость квантовых состояний атомов или молекул, однородность изотопного или химического состава среды.

Этот тип уширения присущ спектрам отдельных осцилляторов.

Формы спектральных линий отдельных осцилляторов и всего однородного ансамбля осцилляторов совпадают.

Примеры – естественное (радиационное) и ударное уширения.

Неоднородный ансамбль осцилляторов – ансамбль, в котором осцилляторы имеют разные собственные частоты колебаний.

Неоднородно уширенная спектральная линия – спектральная линия неоднородного ансамбля осцилляторов, равная суперпозиции спектральных линий отдельных осцилляторов.

Неоднородная ширина $\Delta\omega^*$ характеризует спектр колебаний ансамбля осцилляторов с разными собственными частотами (ширина полосы резонансных частот).

Причины – различие квантовых состояний атомов или молекул, неоднородность изотопного или химического состава среды, хаотическое тепловое движение частиц и т.п.

Этот тип уширения присущ только спектру ансамбля осцилляторов, но не спектрам отдельных осцилляторов.

Формы спектральных линий отдельных осцилляторов и всего неоднородного ансамбля отличаются. При этом для неоднородного ансамбля осцилляторов спектральная линия оказывается шире спектральных линий отдельных осцилляторов.

Примеры – доплеровское, изотопическое, вращательное (в молекулярных газах) и т.п. уширения.

§4. Основные представления о квантовой теории излучения света атомами и молекулами.

4.1. Квантовые свойства света.

(Внешний) фотоэффект – явление испускания электронов веществом под действием света – фотоэлектронная эмиссия.

Законы фотоэффекта:

1) Существует фототок насыщения, сила которого $J_{\text{нас}}$ прямо пропорциональна интенсивности падающего света I.

2) Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов $W_{max} = eV_{\text{зап}}$ не зависит

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

от интенсивности I падающего света, а линейно зависит от частоты ν падающего света.

3) Существует минимальная частота падающего света ν_{min} – **красная граница фотоэффекта** ($h\nu_{min} = A$), при которой еще наблюдается фотоэффект.

Внутренний фотоэффект – оптическое возбуждение электронов, остающихся внутри освещенного тела. В диэлектриках и полупроводниках меняется концентрация носителей заряда или их подвижность.

Для объяснения законов фотоэффекта пришлось предположить, что свет состоит из отдельных корпускул – квантов света, фотонов. Формула Эйнштейна для фотоэффекта: $h\nu = A + W_{max}$, где A – работа выхода – энергия, необходимая для удаления электрона из металла.

Эффект Комптона – явление увеличения длины электромагнитной волны (рентгеновских лучей) при ее рассеянии на свободном электроне (слабо связанном электроне легких атомов).

Изменение длины волны $\Delta\lambda$ не зависит от длины волны λ рассеиваемой волны и от материала рассеивающего тела, но зависит от направления рассеяния. $\Delta\lambda = \lambda_K(1-\cos\vartheta)$, где $\lambda_K \equiv \frac{h}{mc} \cong 0.024\,\mathring{A}$ – **уомптоновская длина волны электрона**.

Свободный покоящийся электрон не может поглотить фотон. Эффект Комптона – прямое доказательство существования кванта света – фотона и обладания им импульсом.

Вывод: свет испускается атомом, распространяется в пространстве (со скоростью света) и вступает во взаимодействие с веществом (поглощается и рассеивается) как целое, в виде локализованной порции света, – кванта света, фотона.

Квант света или фотон – это элементарная (наименьшая) неделимая порция света, обладающая энергией и импульсом: $E_\nu = h\nu = \hbar\omega$, $\vec{p} = \frac{E_\nu}{c}\vec{n} = \hbar\vec{k}$, $\lambda = h/p$.

Оценка кванта света E_ν для световых волн – $E_\nu \cong 4\cdot 10^{-19}$Дж $\cong 2.5$ эВ, рентгеновского излучения – $E_\nu \cong 2\cdot 10^{-15}$Дж $\cong 1.25\cdot 10^4$ эВ.

Оценка числа квантов n, регистрируемых за 1 с глазом ($r = 2$мм) на расстоянии $R = 1$м в случае лампы накаливания с $P = 60$Вт – $n \cong 1.5\cdot 10^{14}\text{с}^{-1}$.

С увеличением частоты и уменьшением интенсивности электромагнитных волн усиливается проявление их корпускулярных свойств при излучении и взаимодействии с веществом.

Гипотеза Луи де Бройля – каждой частице с массой m, движущейся со скоростью v, можно сопоставить волну длиной: $\lambda = h/p = h/(mv)$

Свойство дуализма присуще не только свету, а материи вообще.

4.2. Квантовые свойства атомов, постулаты Бора.

Гипотеза Макса Планка о квантовании энергии осциллятора + модель атома Резерфорда $\Longrightarrow$ теория водородоподобного атома Бора.

1) Существуют стационарные состояния атомов, в которых они не излучают и не поглощают свет. В этих состояниях атомы обладают энергиями W_n, образующими дискретный ряд значений – уровни энергии.

2) При переходах между уровнями энергии W_n и W_m испускается или поглощается атомом квант света – фотон с энергией $h\nu_{nm} = \hbar\omega_{nm} = W_n - W_m$.

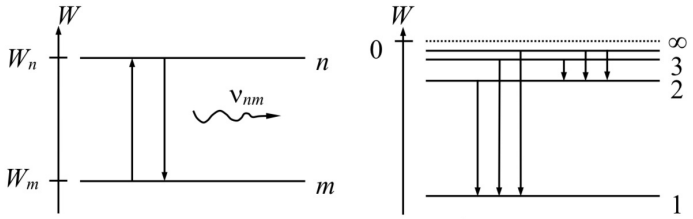


Рис. 20.3. Схема энергетических уровней атома. Слева – двухуровневая система, справа – многоуровневая система.

Схемы энергетических уровней атома для двухуровневой и многоуровневой систем представлены на (Рис. 20.3).

Для простейших атомов – $W_n = -\frac{(Z-a)^2}{n^2}Rhc$, $R = 109678\text{см}^{-1}$ – постоянная Ридберга, Z – заряд ядра, a – константа экранирования, $n = 1,2,3,\ldots$ – главное квантовое число.

Для атома водорода: $Z = 1$, $a = -\frac{Rhc}{n^2}$, $\hbar\omega_{nm} = Rhc\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$.

Серия **Лаймана** – $m = 1$, $\hbar\omega_{n1} = W_n - W_1 = Rhc\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Серия **Бальмера** – $m = 2$, $\hbar\omega_{n2} = W_n - W_2 = Rhc\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$.

Серия **Пашена** – $m = 3$, $\hbar\omega_{n3} = W_n - W_3 = Rhc\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$.

4.3. Двухуровневые квантовые системы.

Рассмотрим двухуровневую квантовую систему (Рис. 20.4). Энергия нижнего уровня (основного состояния) – W_m, энергия уровня, соответвтующего атому в возбужденном состоянии – W_n.

Рассмотрим ансамбль атомов, в котором N – концентрация атомов. Тогда число из этих атомов, находящихся на каком-либо уровне энергии – **заселенность уровня**

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

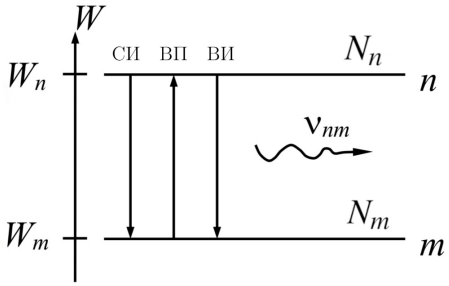


Рис. 20.4. Двухуровневая квантовая система.

(N_m, N_n). Понятно, что $N = N_m + N_m = const$. Будем считать, что в системе возможны 3 радиационных процесса: спонтанное испускание кванта света (СИ), поглощение (ВП), вынужденное испускание кванта (ВИ).

Если происходит испускание, то вылетает гамма-квант с энергией $\hbar\omega_{nm} = W_n - W_m$. При поглощении квант с энергией $\hbar\omega_{nm} = W_n - W_m$ поглощается, переводя квантовую систему из основного состояния в возбужденное.

1. Спонтанное испускание.

Предполагаем, что процесс испускания происходит мгновенно и характеризуется некоторой вероятностью спонтанного перехода из возбужденного состояния в основное в единицу времени: $[\alpha_n] = \text{с}^{-1}$.

Введем в рассмотрение мощность спонтанного излучения для единицы объема вещества:

$$P_{nm}^{\text{СИ}} = A_{nm} N_n \hbar\omega_{nm}, \tag{20.20}$$

где A_{nm} – коэффициент Эйнштейна: $[A_n m] = \frac{[P_{nm}^{\text{СИ}}]}{[N_n][\hbar\omega_{nm}]} = \text{с}^{-1}$.

$A_{nm}N_n$ – число квантов света, которое испускается в единицу времени единицей объема вещества. A_{nm} – вероятность спонтанного испускания в единицу времени гамма-кванта атомом, находящимся в возбужденном состоянии.

Если квантовая система содержит только два уровня энергии и все переходы в ней радиационные, то $A_{nm} = \alpha_n$. Если кроме n в системе существуют еще промежуточные возбужденные уровни i и возможны переходы $n \to i$, тогда

$$\boxed{\alpha_n = \sum_i A_{ni} + C_n} \tag{20.21}$$

Здесь C_n – вероятность спонтанного перехода с уровня n в случае нерадиационного перехода.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2. Поглощение.

Мощность вынужденного поглощения для единицы объема вещества:

$$P_{mn}^{\text{ВП}} = B_{mn} N_m \hbar \omega_{nm} U(\omega_{nm}), \tag{20.22}$$

где U – спектральная объемная плотность энергии индуцирующего излучения: $[U(\omega_{nm})] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}^{-1} \cdot \text{м}^3}$; B_{mn} – коэффициент Эйнштейна, описывающий процесс вынужденного поглощения света: $[B_m n] = \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{Дж}}$.

$B_{mn} N_m U(\omega_{nm})$ – число квантов света, которое поглощается под действием индуцирующего излучения в единицу времени единицей объема вещества. $B_{mn} U(\omega_{nm})$ – вероятность вынужденного поглощения в единицу времени гамма-кванта атомом, находящимся в возбужденном состоянии.

3. Вынужденное испускание.

Мощность вынужденного излучения для единицы объема вещества:

$$P_{nm}^{\text{ВИ}} = B_{nm} N_n \hbar \omega_{nm} U(\omega_{nm}), \tag{20.23}$$

где U – спектральная объемная плотность энергии индуцирующего излучения.

$B_{mn} N_m U(\omega_{nm})$ – число квантов света, которое излучается под действием индуцирующего излучения в единицу времени единицей объема вещества. $B_{mn} U(\omega_{nm})$ – вероятность вынужденного испускания в единицу времени гамма-кванта атомом, находящимся в возбужденном состоянии.

Взаимодействие с излучением при термодинамическом равновесии.

Рассмотрим ансамбль двухуровневых квантовых систем, который находится в термодинамическом равновесии. Тогда

$$P_{mn}^{\text{ВП}} = P_{nm}^{\text{СИ}} + P_{nm}^{\text{ВИ}} \tag{20.24}$$

Отсюда получаем:

$$B_{mn} N_m U(\omega_{nm}) = A_{nm} N_n + B_{nm} N_n U(\omega_{nm}) \tag{20.25}$$

В данном случае $U(\omega_{nm})$ – равновесное тепловое излучение:

$$U(\omega_{nm}) = \frac{A_{nm} N_n}{B_{mn} N_m - B_{nm} N_n} = \frac{A_{nm}/Bnm}{(B_{mn}/Bnm)(N_m/N_n) - 1} \tag{20.26}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В соответствии с распределением Гиббса:

$$N_{m,n} = N\frac{g_{m,n}e^{-\frac{W_{m,n}}{k_BT}}}{Z}, \tag{20.27}$$

где $g_{m,n}$ – кратность состояние, которое определяется значениями других характеристик системы (например, проекцией спина) в данном состоянии с энергией $W_{m,n}$, Z – статистическая сумма:

$$Z = \sum_i e^{-\frac{W_i}{k_BT}} = \sum_n g_n e^{-\frac{W_n}{k_BT}} \tag{20.28}$$

Здесь i – микросостояния системы, n – макросостояния системы.

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n}e^{\frac{\hbar\omega_{nm}}{k_BT}} \tag{20.29}$$

$$U(\omega_{nm}) = \frac{A_{nm}/B_{nm}}{\frac{g_m}{g_n}\frac{B_{mn}}{B_{nm}}e^{\frac{\hbar\omega_{nm}}{k_BT}} - 1} \tag{20.30}$$

Формула Рэлея-Джинса (классический случай):

$$U(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3}k_BT \tag{20.31}$$

При $T \to \infty$ $U \to \infty$. Полученное выражение (20.30) $\to \infty$, если знаменатель $\to 0$, то есть:

$$\boxed{g_mB_{mn} = g_nB_{nm}} \tag{20.32}$$

В классическом пределе $k_BT \gg \hbar\omega_{nm}$. В этом случае:

$$U(\omega_{nm}) = \frac{A_{nm}/Bnm}{e^{\frac{\hbar\omega_{nm}}{k_BT}} - 1} \Longrightarrow \frac{\omega_{nm}^2}{\pi^2c^3}k_BT \tag{20.33}$$

Отсюда:

$$\boxed{\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar\omega_{nm}^3}{\pi^2c^3}} \tag{20.34}$$

Т.к. рассматривалась произвольная двухуровневая система, значит доказанное выше справедливо для любых переходов и любой частоты.

Окончательное выражение для спектральной объемной плотности равновесного теплового излучения:

$$\boxed{U(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} - 1}} \tag{20.35}$$

Полученное выражение (20.35) – формула Планка (Рис. 20.5).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

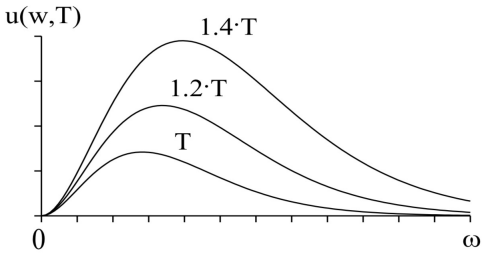


Рис. 20.5. Зависимость спектральная объемной плотности равновесного теплового излучения от частоты для различных значений температуры.

Формула Рэлея-Джинса: при $k_B T \gg \hbar\omega$

$$U(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T \tag{20.36}$$

Формула Вина: при $k_B T \ll \hbar\omega$

$$U(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \tag{20.37}$$

Закон Стефана-Больцмана: объемная плотность энергии равновесного теплового излучения:

$$w(T) = \int_0^\infty U(\omega, T)\mathrm{d}\omega = \sigma T^4 \tag{20.38}$$

Закон смещения Вина:

$$\left.\frac{\partial U(\omega, T)}{\partial \omega}\right|_{\omega_{max}} = 0 \Longrightarrow \frac{\omega_{max}}{T} = const, \quad \lambda_{max} T = const \tag{20.39}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 21. Многоуровневые системы. Люминесценция и резонансное усиление света.

Контуры спектральных линий.

Вероятность перехода в двухуровневой системе квантовой системе (Рис. 20.4) из возбужденного состояния n в основное состояние m – α_n.

Найдем вероятность того, что двухуровневая квантовая система находится в возбужденном состоянии в момент времени t.

$$p_n(t+\mathrm{d}t) = p_n(t)\,(1-\alpha_n \mathrm{d}t) \tag{21.1}$$

Пусть α_n не зависит от времени нахождения квантовой системы в возбужденном состоянии.

$$\mathrm{d}p_n = -\alpha_n p_n(t)\mathrm{d}t \tag{21.2}$$

Отсюда следует:

$$\boxed{p_n(t) = p_n(0)e^{-\alpha_n t}} \tag{21.3}$$

Если $p_n(0) = 1$, то $p_n(t) = e^{-\alpha_n t}$.

Домножив левую и правую части выражения (21.3) на концентрацию квантовых систем (атомов) N, получим выражение для заселенности уровня n в момент времени t:

$$N_n(t) = N_n(0)e^{-\alpha_n t} \tag{21.4}$$

Интенсивность спонтанного перехода (которые могут быть как радиационными, так и нерадиационными):

$$I^{\text{СП}}(t) = -\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}t} = N_n(0)\alpha_n e^{-\alpha_n t} \tag{21.5}$$

Интенсивность спонтанного излучения:

$$I^{\text{СИ}}(t) = I^{\text{СИ}}(0)e^{-\alpha_n t} \tag{21.6}$$

Тогда для этого излучение выражение для амплитуды напряженности электрического поля:

$$E_0(t) = E_0(0)e^{-\frac{\alpha_n}{2}t} = E_0(0)e^{-\delta t}, \tag{21.7}$$

где δ – коэффициент затухания.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Спектр в этом случае будет иметь ширину $\Delta\omega = 2\delta = \alpha_n = 1/\tau_n$. Время жизни квантовой системы в возбужденном состоянии τ_n – промежуток времени, за которое интенсивность уменьшается в e раз.

$$I^{\text{СИ}}(t) = I^{\text{СИ}}(0)e^{-t/\tau_n} \tag{21.8}$$

Спектральным прибором высокой разрешающей силы можно измерить контуры спектральных линий излучения и поглощения.

Контуры спектральных линий – спектральные плотности мощности спонтанного излучения $p^{\text{СИ}}_{nm}(\omega)$, поглощения $p^{\text{ВП}}_{nm}(\omega)$ и вынужденного излучения $p^{\text{ВИ}}_{nm}(\omega)$ единицы объема вещества при радиационных переходах $n \leftrightarrow m$ атомов:

$$\begin{aligned} p^{\text{СИ}}_{nm}(\omega) &= a_{nm}(\omega)N_n\hbar\omega, \\ p^{\text{П}}_{mn}(\omega) &= b_{mn}(\omega)N_m\hbar\omega u(\omega), \\ p^{\text{ВИ}}_{nm}(\omega) &= b_{nm}(\omega)N_n\hbar\omega u(\omega), \end{aligned} \tag{21.9}$$

$a_{nm}(\omega), b_{mn}(\omega), b_{nm}(\omega)$ – спектральные плотности коэффициентов Эйнштейна (при $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-7} \ll 1$ ω и $u(\omega)$ – слабо меняющиеся функции):

$$\int_0^\infty a_{nm}(\omega)\mathrm{d}\omega = A_{nm}, \quad \int_0^\infty b_{mn}(\omega)\mathrm{d}\omega = B_{mn}, \quad \int_0^\infty b_{nm}(\omega)\mathrm{d}\omega = B_{nm} \tag{21.10}$$

Аналогично коэффициентам Эйнштейна:

$$b_{mn}(\omega)g_m = b_{nm}(\omega)g_n, \quad \frac{a_{nm}(\omega)}{b_{nm}(\omega)} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \tag{21.11}$$

При $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-7} \ll 1$ – линии подобны: $b_{mn}(\omega) \sim b_{nm}(\omega) \sim a_{nm}(\omega)$.

В соответствии с экспоненциальным по времени характером распада состояния (дисперсионная формула Брейта-Вигнера):

$$a_{nm}(\omega) = A_{nm}\frac{\Delta\omega/2\pi}{(\omega-\omega_{nm})^2 + (\Delta\omega/2)^2} \tag{21.12}$$

Т.е. a_{nm} имеет форму Лоренцевой функции с естественной шириной линии $\Delta\omega$.

Согласно квантовой теории излучения – $\Delta\omega = 1/\tau_n + 1/\tau_m$.

Уширение: $\Delta\omega^{\text{уд}}_L = \frac{8\sqrt{\pi}d^2p}{\sqrt{mk_BT}}$, $\Delta\omega^{\text{доп}}_G = \omega_0\sqrt{\frac{8k_BT\ln 2}{mc^2}}$.

§5. Многоуровневые системы.

5.1. Энергетическая структура атомов, молекул и твердых тел.

Атомов – линейчатая (серии Лаймана, Бальмера, Пашена, ...).

$$W_n = -\frac{(Z-a)^2}{n^2}Rhc; \quad \hbar\omega_{nm} = W_n - W_m = Rhc\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{21.13}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$n = 1,2,3,\ldots$ – главное квантовое число, Z – заряд ядра, R – постоянная Ридберга, a – константа экранирования.

Молекул – линейчато-полосатая. Три типа переходов: электронные, колебательные и вращательные.

Энергия колебательного движения – $W_v = \hbar\omega_v(v+1/2)$, $v = 0,1,2,\ldots$ – колебательное квантовое число, ω_v частота колебаний.

Энергия вращательного движения – $W_r = \frac{L_r^2}{2J} = \frac{\hbar^2 r(r+1)}{2J}$, J – момент инерции, $L_r = \hbar\sqrt{r(r+1)}$ – момент количества движения (импульса), $r = 0,1,2,3,\ldots$ – вращательное квантовое число.

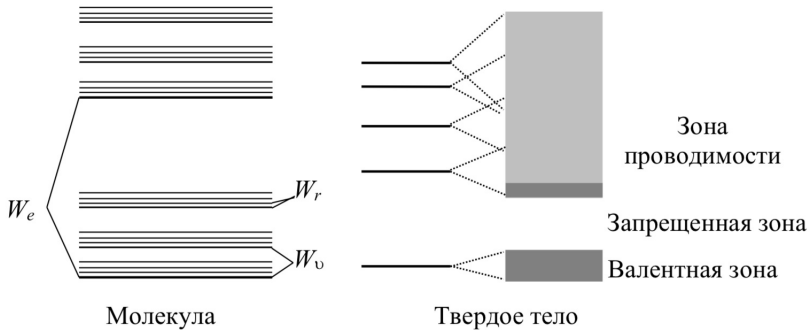


Рис. 21.1. Энергетическая структура молекулы и твердого тела.

Изменения энергии, связанные с вращательным и колебательным движением, существенно меньше, чем изменение энергии, связанное с электронными переходами. У каждого электронного уровня возникается набор дискретных уровней, которые соответсвуют различным колебательным и вращательным состояниям (Рис. 21.1). Дополнительные уровни на схеме выглядят как полосы плотно расположенных друг с другом уровней.

В первом приближении три вида движения независимы:

$$W = W_e + W_v + W_r, \tag{21.14}$$

$$\omega = \frac{\Delta W}{\hbar} = \frac{\Delta W_e}{\hbar} + \frac{\Delta W_v}{\hbar} + \frac{\Delta W_r}{\hbar} = \omega_e + \omega_v + \omega_r, \quad \omega_e > \omega_v > \omega_r \tag{21.15}$$

$\Delta W_e = \hbar\omega_e$ – видимая облать и ультрафиолетовая область, $\Delta W_v = \hbar\omega_v$ – инфракрасная область, $\Delta W_r = \hbar\omega_r$ – далекая инфракрасная облать.

Твердых тел – полосатая.

Пусть имеется большая совокупность не взаимодействующих между собой атомов с высокой плотностью. Тогда энергетическая структура будет выглядеть как совокупность уровней отдельных молекул или атомов. Но в твердом теле все эти уровни

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

оказываются вырожденными, причем степень вырождения соответствует концентрации различных квантовых систем. Взаимодействие атомов приводит к тому, что энергетические уровни для каждого атома будут сдвигаться и расщепляться. В результате энергетическая система для всей макроскопической системы будет выглядеть как набор полос, включающих множество уровней с высокой плотностью уровней, что набор состояний можно считать квазинепрерывным. Полосы, пересекаясь, образуют зоны: проводимости, валентную, запрещенную.

5.2. Явление люминесценции.

Люминесценция – квантовый неравновесный процесс спонтанного излучения при энергетических переходах, происходящих после возбуждения вещества в газообразном (в атомах и молекулах), жидком и твердом состояниях.

Люминесценция представляет собой избыток над тепловым излучением тела и продолжается в течение времени (τ), значительно превышающего период ($T = 10^{-14} - 10^{-15}$ с) световых колебаний ($\tau \gg T$).

Вещество, на которое оказывается энергетическое воздействие, должно находиться в состоянии, близком к равновесному. При сильном отклонении от равновесного состояния говорить о тепловом излучении или люминесценции не имеет смысла.

Излучение некогерентно, поскольку длительность между энергетическим воздействием и испусканием фотона больше периода световой волны.

В природе – северное сияние, свечение насекомых, минералов, гниющего дерева.

Люминофоры – люминесцентные вещества в любом агрегатном состоянии: газы, пары (O_2, S, J, Na), соли редких земель, соединения бензольного ряда, ароматические соединения (нафталин, атрацен)m различные виды красителей, неорганические кристаллы с примесями тяжелых металлов ($ZnS, CuCl_2$) – кристаллофоры.

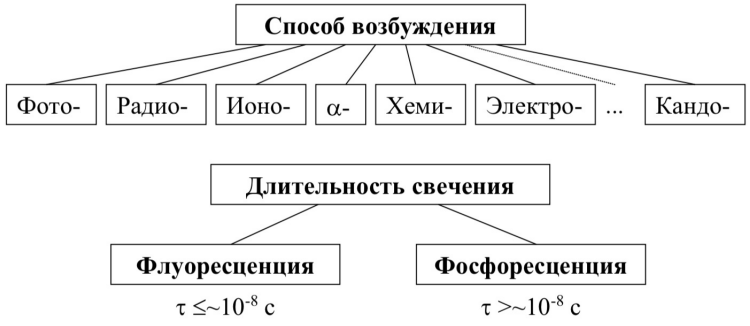


Рис. 21.2. Виды люминесценции.

Классификация видов люминесценции по способу возбуждения и длительности

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

свечения представлена на (Рис. 21.2).

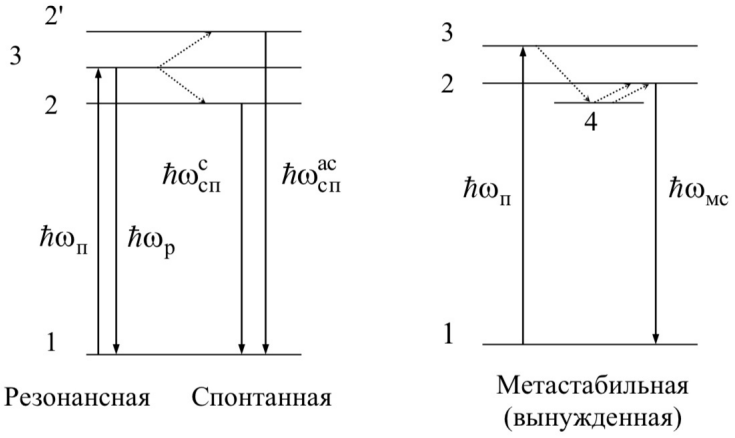


Рис. 21.3. Схемы изменения состояний, соответствующие различным механизмам процесса испускания при люминесценции.

По механизму процессы испускания квантов света при люминесценции разделяют на: резонансную, спонтанную, метастабильную и рекомбинационную люминесценцию. Схемы изменения состояний, которые соответствуют каждому из этих процессов, изображены на (Рис. 21.3).

Рекомбинационная люминесценция – возбуждение вещества $\Longrightarrow$ разделение разноименно заряженных частиц (ионов, электронов) $\Longrightarrow$ рекомбинация $\Longrightarrow$ возбужденное состояние молекул $\Longrightarrow$ высвечивание.

Свойства люминесценции.

Правило Стокса – длина волны испущенного кванта света, как правило, больше, чем поглощенного – стоксова люминесценция: $\hbar\omega^{c}_{л} < \hbar\omega_{п}$.

Возможна антистоксова люминесценция – испущенный квант света имеет длину волны меньше, чем поглощенный: $\hbar\omega^{ac}_{л} > \hbar\omega_{п}$.

В соответствии с распределением Больцмана $N_i = N_0 e^{-\frac{W_i}{k_B T}}$: $I^{c}(T) > I^{ac}(T)$, при $T \uparrow$: $I^{c} \downarrow, I^{ac} \uparrow$.

Закон Стокса-Ломмеля – спектр люминесценции в целом и его максимум всегда сдвинуты по сравнению со спектром поглощения и его максимумом в сторону длинных волн.

При спонтанной люминесценции успевает наступить термодинамическое равновесие по колебательным степеням свободы: $\tau_{кол} \sim 10^{-11} - 10^{-13}$с $\ll \tau \sim 10^{-8} - 10^{-9}$с. В этом случае спектр люминесценции не зависит от длины волны возбуждающего света

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

и ширина спектра люминесценции определяется шириной нижней энергетической полосы, образованной набором уровней, соответствующих различным колебательным состояниям и одному электронному состоянию.

Количественные характеристики процесса люминесценции.

Энергетический выход – отношение энергии люминесценции $E_{\text{л}}$ к поглощенной энергии возбуждения $E_{\text{п}}$ в тот же интервал времени: $B_{\text{э}} = E_{\text{л}}/E_{\text{п}} < 1$.

При фотолюминесценции: **квантовый выход** – отношение числа испускаемых световых квантов $q_{\text{л}}$ к общему числу поглощенных квантов $q_{\text{п}}$ в тот же интервал времени: $B_{\text{кв}} = q_{\text{л}}/q_{\text{п}} <> 1$.

В стационарном состоянии – $B_{\text{э}} = \frac{E_{\text{л}}}{E_{\text{п}}} = \frac{q_{\text{л}}\hbar\omega_{\text{л}}}{q_{\text{п}}\hbar\omega_{\text{п}}} = B_{\text{кв}}\frac{\omega_{\text{л}}}{\omega_{\text{п}}}$, где $\omega_{\text{л}}$ и $\omega_{\text{п}}$ – частоты люминесценции и поглощенного света.

Закон затухания люминесценции.

Для спонтанной (самостоятельной) люминесценции:

$$N(t) = N_0 e^{-(A_{\text{р}}+A_{\text{би}})t}, \quad I(t) = I_{\text{р}}(t) + I_{\text{би}}(t) \sim \frac{\partial N(t)}{\partial t} = (A_{\text{р}} + A_{\text{би}})N_0 e^{-At}, \tag{21.16}$$

где $A_{\text{р}}$ и $A_{\text{би}}$ – вероятности радиационного и безизлучательного переходов молекулы в основное состояние в единицу времени.

Тушение люминесценции – уменьшение выхода люминесценции B при увеличении вероятности безизлучательных переходов $A_{\text{би}}$. Если вероятность $A_{\text{би}}$ постоянна в течение всего времени возбужденного состояния, то:

$$I_{\text{р}} \sim A_{\text{р}} N_0 e^{-At}, \quad I_{\text{би}} \sim A_{\text{би}} N_0 e^{-At} \tag{21.17}$$

$$B \sim \frac{I_{\text{р}}}{I} = \frac{I_{\text{р}}}{I_{\text{р}} + I_{\text{би}}} = \frac{A_{\text{р}}}{A_{\text{р}} + A_{\text{би}}} \tag{21.18}$$

Механизм тушения – внутри- и межмолекулярные взаимодействия. Виды тушения – температурное, концентрационное и примесное.

Применение люминесценции: активная среда квантовых генераторов, люминесцентные лампы, сцинтилляционные детекторы, экраны осциллографов, мониторов, телевизоров и т.д., электронно-оптические преобразователи, химический люминесцентный анализ, люминесцентная спектроскопия.

5.3. Резонансное усиление света.

А. Линейные коэффициенты поглощения и усиления среды. Инверсная заселенность энергетических уровней.

Рассмотрим двухуровневую квантовую систему (Рис. 20.4), где n – возбужденный, m – основной уровень. Пусть индуцирующее излучение со спектральной плотностью интенсивности $S(\omega)$ распространяется в среде вдоль оси Z.

Если на пути распространения излучения рассмотреть элемент поверхности площадью $\mathrm{d}\sigma$. Тогда спектральная плотность энергии, проходящая через этот элемент поверхности за время $\mathrm{d}t$:

$$S(\omega)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t\sigma = U(\omega)\mathrm{d}\sigma v\mathrm{d}t \tag{21.19}$$

где $U(\omega)$ – объемная плотность энергии, v – скорость распространения волны. Отсюда:

$$\boxed{S(\omega) = U(\omega)v} \tag{21.20}$$

Далее будем рассматривать процессы, происходящие в слое $(z, z+\mathrm{d}z)$ с площадью поперечного сечения σ. Спектральная плотность потока энергии индуцирующего излучения:

$$\mathrm{d}S\sigma = \left(kp_{nm}^{\text{СИ}}(\omega) - p_{mn}^{\text{П}}(\omega)U(\omega) + p_{nm}^{\text{ВИ}}(\omega)U(\omega)\right)\sigma\mathrm{d}z \tag{21.21}$$

$p_{nm}^{\text{СИ}}$ – спектральная плотность мощности спонтанного излучения, k – малый коэффициент (спонтанное излучение равновероятно во всех направлениях, а нас интересует выделенное направление изменения спектральной протности энергии), $p_{mn}^{\text{П}}$ – спектральная плотность мощности поглощения, $p_{nm}^{\text{ВИ}}$ – спектральная плотность мощности вынужденного излучения. Тогда, учитывая (21.20):

$$\mathrm{d}S = -\frac{S(\omega)}{v}\left(-\frac{kp_{nm}^{\text{СИ}}(\omega)v}{S(\omega)} + p_{mn}^{\text{П}}(\omega) - p_{nm}^{\text{ВИ}}(\omega)\right)\mathrm{d}z \tag{21.22}$$

Если k – мал, и нас интересуют очень интенсивные пучки света, то первым слагаемым, связанным со спонтанным излучением, можно пренебречь.

$$\mathrm{d}S = -\frac{\hbar\omega}{v}\left(b_{mn}^{\text{П}}N_m - b_{nm}^{\text{ВИ}}N_n\right)S(\omega)\mathrm{d}z \tag{21.23}$$

Обозначим: $\alpha_{nm}(\omega) \equiv \frac{\hbar\omega}{v}\left(b_{mn}^{\text{П}}N_m - b_{nm}^{\text{ВИ}}N_n\right)$. Тогда:

$$S(\omega, z) = S_0(\omega)e^{-\alpha_{nm}(\omega)z} \tag{21.24}$$

Здесь α_{nm} – линейный коэффициент поглощения (если $\alpha_{nm} > 0$).

$$\boxed{\alpha_{nm}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{v}b_{nm}(\omega)g_n(n_m - n_n)} \tag{21.25}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Здесь $n_{m,n} \equiv N_{m,n}/g_{m,n}$ – относительная заселенность уровня. Видно, что поведение спектральной плотности интенсивности определяется тем, как соотносятся друг к другу относительные заселенности. Т.е. если $n_m > n_n$, то $\alpha_{nm} > 0$ – поглощение.

Рассмотрим ансамбль квантовых систем, который находится в термодинамическом равновесии. Тогда:

$$N_{m,n} = N\frac{g_{m,n}e^{-\frac{W_{m,n}}{k_BT}}}{Z} \tag{21.26}$$

$$\frac{n_m}{n_n} = e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} > 1 \quad \text{(при любых } T\text{)} \tag{21.27}$$

Значит в случае равновесия не будет усиления света.

Пусть возбужденный уровень заселен существенно больше, чем основной. Спектральная плотность коэффициента усиления:

$$\beta_{nm}(\omega) \equiv -\alpha_{nm}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{v} b_{nm}(\omega) g_n (n_n - n_m) \tag{21.28}$$

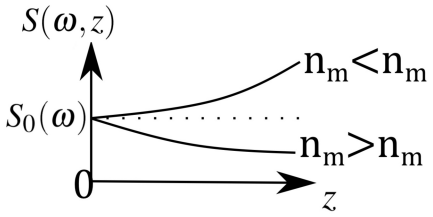


Рис. 21.4. Зависимость спектральной плотности интенсивности от расстояния вдоль оси Z.

Зависимость спектральной плотности интенсивности $S(\omega, z)$ от расстояния вдоль оси Z, вдоль которой распространяется индуцирующее излучение представлена на (Рис. 21.4). При $n_m > n_n$ будет наблюдаться экспоненциальное уменьшение $S(\omega)$, при $n_m < n_n$ – экспоненциальное возрастание.

Б. Воздействие светового потока на заселенность уровней.

Рассмотрим изменение заселенностей уровней под действием светового потока. Световой поток, вызывая вынужденные переходы (поглощение и вынужденное излучение) между уровнями, изменяет их заселенность. Пусть $N = N_m + N_n$ – полная концентрация атомов в среде. Изменение заселенности верхнего уровня N_n происходит за счет вынужденных и спонтанных переходов и может быть в соответствии с определением коэффициентов Эйнштейна описано уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}t} = -A_{nm}N_n + B_{mn}N_m U(\omega_{nm}) - B_{nm}N_n U(\omega_{nm}) \tag{21.29}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При достижении стационарного состояния $\mathrm{d}N_n/\mathrm{d}t = 0$:

$$N_n = \frac{B_{mn}U(\omega_{nm})}{A_{nm} + (B_{nm} + B_{mn})U(\omega_{nm})}N \tag{21.30}$$

При увеличении спектральной плотности интенсивности $S(\omega_{nm}) = vU(\omega_{nm})$ с учетом соотношения $B_{mn}g_m = B_{nm}g_n$ получим:

$$N_n \to \frac{B_{mn}}{B_{nm} + B_{mn}}N = \frac{g_n}{g_m + g_n}N, \tag{21.31}$$

$$N_m = N - N_n \to \frac{g_m}{g_m + g_n}N \tag{21.32}$$

Следовательно:

$$n_n \equiv \frac{N_n}{g_n} \to \frac{N}{g_m + g_n}, \tag{21.33}$$

$$n_m \equiv \frac{N_m}{g_m} \to \frac{N}{g_m + g_n} \tag{21.34}$$

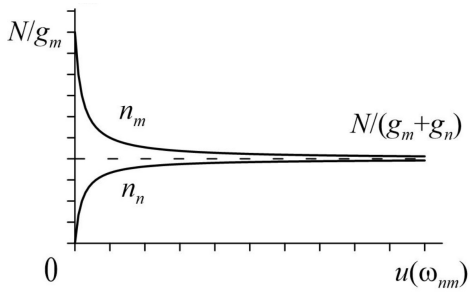


Рис. 21.5. Зависимость относительных заселенностей от спектральной объемной плотности энергии индуцирующего излучения.

Как видим (Рис. 21.5), световой поток выравнивает относительные заселенности двух уровней и не может создать инверсную заселенность между этими уровнями.

В. Получение инверсной заселенности с помощью трехуровневой системы.

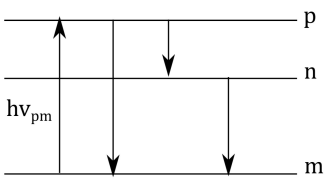


Рис. 21.6. Трехуровневая квантовая система.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Рассмотрим трехуровневую систему (Рис. 21.6): основное состояние m и два возбужденных n и p. Если каким-либо образом перевести систему из основного состояния m в возбужденное p, то будут происходить спонтанные переходы $p \to m$, $p \to n$, $n \to m$. Тогда $n_n > n_m$, если времена жизни уровней $\tau_n > \tau_p$.

Можно показать, что $n_n > n_m$, если $A_{pn} g_p > A_{nm} g_n$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 22. Лазеры - принцип работы. Нелинейные оптические явления.

§6. Лазеры – устройство и принцип работы.

Лазер – оптический квантовый генератор – устройство, преобразующее произвольного вида энергию (электрическую, световую, химическую, тепловую и т.д.) в энергию когерентного электромагнитного излучения оптического диапазона.

LASER – "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" – "Усиление света вынужденным излучением" .

6.1. Принципиальная схема лазера. Условия стационарной генерации.

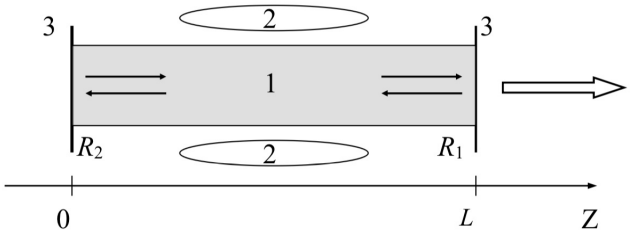


Рис. 22.1. Принципиальная схема лазера.
1 – активная среда (рабочая среда с инверсной заселенностью уровней),
2 – система накачки (источник энергии для создания активной среды),
3 – оптический резонатор (обратная связь для генерации; зеркала).

Принципиальная схема лазера изображена на (Рис. 22.1).

Благодаря накачке, т.е. переброса атомов в среде из основного состояния в возбужденное, происходит инверсия заселенностей. Далее развиваются несколько процессов, один из которых – спонтанное излучение. Испущенные кванты света распространяются в активной среде, встречают атомы в возбужденном состоянии, для которых являются индуцирующим излучением. Таким образом происходит вынужденный переход из возбужденное состояние в основное атомов среды – вынужденное излучение. При распространении таких квантов в среде происходит усиление света.

$$S(\omega, z) = S_0(\omega) e^{\beta_{nm}(\omega) z} \tag{22.1}$$

Линейный коэффициент усиления $\beta_{nm}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{v} b_{nm}(\omega) g_n (n_n - n_m)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Для возникновения генерации, т.е. самоподдерживающегоса процесса, необходима обратная связь. Из (22.1) видно: чем больше z, тем сильнее усиление. Наличие зеркал позволяет увеличить z.

Элементарный цикл – два последовательных прохождения через активную среду и соответствующие отражения от зеркал.

Баланс амплитуд – условие усиления для возникновения генерации: в конце элементарного цикла

$$S(\omega) = S_0(\omega) R_1 R_2 e^{\beta_{nm}(\omega) 2L}, \tag{22.2}$$

$$\frac{S(\omega)}{S_0(\omega)} = R_1 R_2 e^{\beta_{nm}(\omega) 2L} > 1 \tag{22.3}$$

$$\beta_{nm}(\omega) > \beta_{\text{пор}} = \frac{\ln\left(1/\sqrt{R_1 R_2}\right)}{L} \equiv \frac{f}{L}, \tag{22.4}$$

$\beta_{\text{пор}}$ – пороговое значение, R_1 и R_2 – коэффициенты отражения (по энергии) зеркал; L – длина резонатора.

Баланс фаз – условие цикличности для генерации:

$$2L = m\lambda_m, \quad \lambda_m = \frac{2L}{m}, \quad k_m = m\frac{\pi}{L}, \quad \omega_m = m\frac{\pi v}{L}, \quad T_m = \frac{2L}{mv}; \quad m \sim 10^5 - 10^7 \tag{22.5}$$

Для повышения мощности излучения необходимо накопить как можно больше возбужденных атомов и уменьшить длительность импульсов, задержав начало генерации лазера.

Длительность импульса τ определяется временем нахождения системы в условиях генерации и зависит от момента времени выхода системы из этих условий вследствие изменения инверсной заселенности ($\beta(\omega) \downarrow$) или уменьшения добротности (увеличения потерь – $\beta_{\text{пор}} \uparrow$).

Добротность системы Q – отношение запасенной в системе энергии W к потере энергии ΔW за один период T_m колебаний:

$$W = w\sigma L, \quad \Delta W = \frac{w\sigma L}{2}\left(1 - R_1 + R_1(1 - R_2)\right)\frac{T_m}{2L/v} = \frac{w\sigma L}{2}(1 - R_1 R_2)\frac{1}{m}, \tag{22.6}$$

$$Q = \frac{W}{\Delta W} = \frac{2m}{1 - R_1 R_2} = \frac{2m}{1 - e^{-2f}} \cong \frac{m}{f} = \frac{m}{\beta_{\text{пор}} L} = \frac{2}{\beta_{\text{пор}} \lambda_m} \tag{22.7}$$

Здесь w – объемная плотность энергии поля, σ – площадь поперечного сечения лазерного пучка, $T = 2L/v$ – продолжительность цикла.

Метод модулированной добротности. На некоторое время специально нарушают условия генерации, но накачка продолжает происходить, т.е. увеличивается относительная заселенность возбужденного состояния. В некоторый момент восстанавливаются условия генерации.

6.2. Продольные и поперечные моды. Спектральный состав излучения лазера. Ширина полосы усиления.

Стационарность и цикличность → стоячая и бегущие волны.

Стоячая волна – суперпозиция гармонических стоячих волн – **мод колебаний**.

Для прямоугольного резонатора – два зеркала с $n > 1$ вдоль оси Z и отсутствие зеркал ($n < 1$) вдоль X и Y, с учетом комплексных коэффициентов отражения при $\vartheta_I = 0$ $-r_\parallel = r_\perp = (1-n)/(1+n)$ уравнение моды колебания (решение волнового уравнения) будет:

$$\begin{aligned} E(t,x,y,z) &= E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)\cos(k_x x + \varphi_{x0})\cos\big(k_y y + \varphi_{y0}\big)\cos(k_z z + \varphi_{z0}) = \\ &= E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z) \end{aligned} \tag{22.8}$$

Излучение лазера – бегущие волны, соответствующие модам колебаний **моды излучения лазера**; уравнение моды излучения:

$$E(t,x,y,z) = E_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) = E_0 \cos\Big(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\Big) \tag{22.9}$$

Условия цикличности (баланс фаз):

$$2l_\alpha = m_\alpha \lambda_{m_\alpha}, \quad k_{m_\alpha} = \frac{2\pi}{\lambda_{m_\alpha}} = m_\alpha \frac{\pi}{l_\alpha}, \quad m_\alpha = 0,1,2,\ldots, \tag{22.10}$$

где l_α – линейные размеры ($\alpha = x,y,z$), мода – (m_x, m_y, m_z).

Продольные моды – $(0,0,m_z)$ – в плоскости XOY нет узлов:

$$k_{m_z} = \frac{2\pi}{\lambda_{m_z}} = m_z \frac{\pi}{L}, \quad \omega_{m_z} = k_{m_z} v = m_z \frac{\pi v}{L}, \quad \Delta\omega_z = \frac{\pi v}{L} \cong 2\cdot 10^9 \text{ с}^{-1}, \quad m_z \sim 10^5 - 10^7 \tag{22.11}$$

Поперечные моды – $m_x, m_y \neq 0$ – число узлов в плоскости XOY.

Из волнового уравнения – $k^2_{m_x m_y m_z} = k^2_{m_x} + k^2_{m_y} + k^2_{m_z} = \omega^2_{m_x m_y m_z}/v^2$,

$$\omega_{m_x m_y m_z} = \pi v \sqrt{(m_x/l_x)^2 + (m_y/l_y)^2 + (m_z/l_z)^2} \tag{22.12}$$

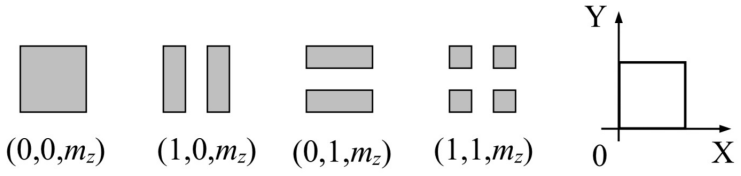


Рис. 22.2. Сечения пучков различных мод излучения (заштрихованная область – область большой интенсивности).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Ширины межмодовых интервалов поперечных мод ($L = l_z$, $m_z \sim 2L/\lambda \sim 2 \cdot 10^6$, $m_x \sim m_y \sim 1$ и $k_{m_{x,y}} \ll k_{m_z}$ – из-за ориентации зеркал к оси Z):

$$\Delta\omega_\alpha = \frac{m_\alpha}{\omega_{m_x m_y m_z}} \left(\frac{\pi v}{l_\alpha}\right)^2, \quad \frac{\Delta\omega_{x,y}}{\Delta\omega_z} = \frac{m_x}{m_x} \left(\frac{L}{l_{x,y}}\right)^2 \sim \frac{\lambda}{2L} \frac{L^2}{l_{x,y}^2} = \frac{\lambda L}{2 l_{x,y}^2} \sim 10^{-3} \ll 1 \qquad (22.13)$$

Ширина линий излучения – $\delta\omega (\sim 1/\tau \sim 10^8 \text{ с}^{-1})$.
Ширина межмодового интервала – $\Delta\omega_z = \pi v/L (\sim 2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1})$.
Полоса усиления – $[\omega_н, \omega_к]$, при $\omega \in [\omega_н, \omega_к]$ $\beta_{nm}(\omega) \geqslant \beta_{пор}$.
Ширина полосы усиления – $\Delta\omega_{ус} = \omega_н - \omega_к (\sim 10^{10} - 10^{14} \text{ с}^{-1})$.

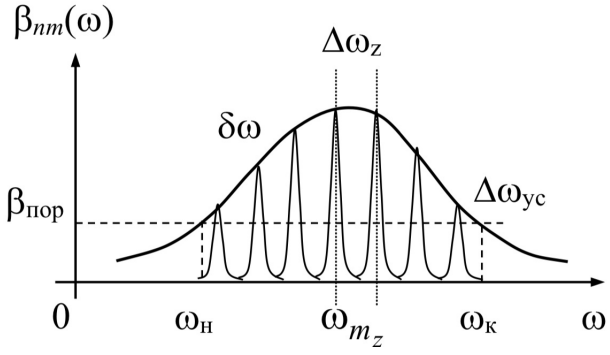


Рис. 22.3. Зависимость линейного коэффициента усиления от частоты.

Форма и ширина линейного коэффициента усиления $\beta_{nm}(\omega)$ (Рис. 22.3) определяются спектральной линией $a_{nm}(\omega)$ с учетом ударного и доплеровского уширений.

Число генерируемых мод:

$$N = \frac{\omega_к - \omega_н}{\Delta\omega_z} = \frac{\Delta\omega_{ус}}{\Delta\omega_z} \qquad (22.14)$$

Ширина линий излучения $\delta\omega$ определяется длительностью излучения τ: $\delta\omega \sim 1/\tau$.

В импульсном режиме с модуляцией добротности – $\tau \sim 10^{-8}$с и $\delta\omega \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$. В непрерывном режиме теоретически τ и $\delta\omega$ – любые значения. Практически – флуктуации n, изменения L (вибрации, тепловое расширение) и т.д. – $\delta\omega \sim 10^7 - 10^8 \text{ с}^{-1}$.

Принципиальные причины уширения – броуновское движение зеркал и спонтанное излучение атомами активной среды – до $\delta\omega \sim 10^1 - 10^3 \text{ с}^{-1}$.

Принципиальная схема **одномодового лазера** изображена на (Рис. 22.3). Внутри резонатора – частотный фильтр – диспергирующий элемент (призма, дифракционная решетка и т.д.) и диафрагма. Преодолимый порог генерации $\beta_{пор}$ создается только для узкой области частот. Вращение призмы – непрерывная перестройка частот

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

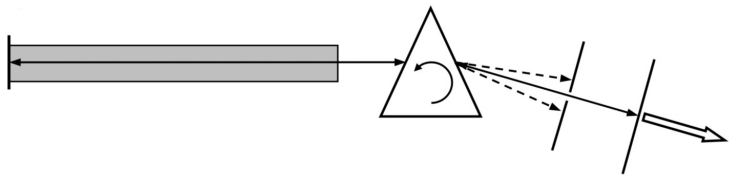


Рис. 22.4. Принципиальная схема одномодового лазера.

6.3. Синхронизация мод, генерация сверхкоротких импульсов.

Длительность импульса τ:

Метод модуляции добротности – $\tau \sim 10^{-7} - 10^{-8}$ с.

Ячейки Керра – $\tau \sim 10^{-9}$ с.

Метод синхронизации мод – $\tau \sim 10^{-12}$ с.

Синхронизация мод – согласование фаз различных мод – $\omega_m = m\frac{\pi v}{L}$.

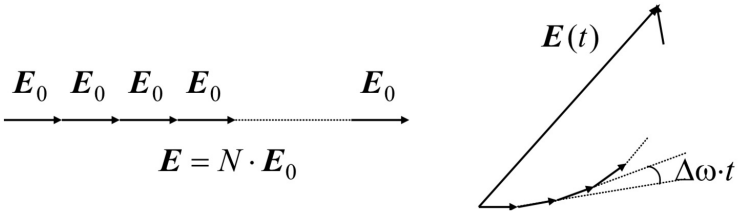


Рис. 22.5. Синхронизация мод.

Пусть наблюдается N мод в системе: совокупность с разной кратной по отношению друг к другу частотой. Пусть в какой-то момент времени колебания происходят в одной фазе. Тогда в соответствии с фазовой диаграммой (Рис. 22.5) напряженности электрических полей складываются и получается максимальное значение напряженности электрического поля и интенсивности.

Через время t фазы волн относительно первой моды изменяются на $\Delta\omega t, 2\Delta\omega t, 3\Delta\omega t, \ldots, (N-1)\Delta\omega t$. До того как напряженность поля станет равной нулю. Со временем амплитуда уменьшается, а затем начинает возрастать с периодом повторения T, равным продолжительности цикла $(2L/v)$:

$$\Delta\omega T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2L}{v}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2L} \tag{22.15}$$

Продолжительность импульса ΔT определяется из условия обращения в нуль амплитуды суммарной волны:

$$N\Delta\omega\Delta T = 2\pi, \quad \Delta T = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{2L}{Nv} = \frac{T}{N} \tag{22.16}$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

6.4. Характеристики лазеров.

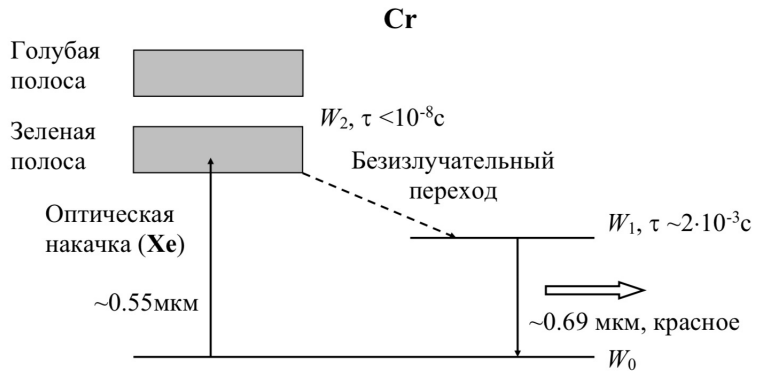


Рис. 22.6. Рубиновый лазер.

Рубиновый лазер (Рис. 22.6): активная среда – в твердом состоянии, импульсная оптическая накачка. Генерация происходит на уровне примесных атомов хрома.

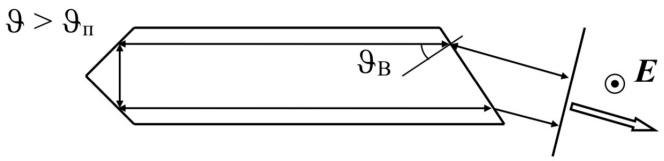


Рис. 22.7. Конструкция активной части рубинового лазера.

Конструкция активной части изображена на (Рис. 22.7): кристалл, один конец которого срезан под углом, бóльшим угла полного внутреннего отражения $\vartheta > \vartheta_п$. Другой конец кристалла срезан под углом Брюстера ϑ_B – излучение линейно поляризовано параллельно грани кристалла (перпендикулярно плоскости падения – плоскости чертежа).

Гелий-неоновый лазер (Рис. 22.8): активная среда – газовая смесь He и Ne; накачка – электрический ток через газовую смесь – электронный удар по посреднику – атомам He; генерация – между возбужденными энергетическими уровнями Ne.

Особенность – W_1 – не основной уровень – легко достигается $n_2 > n_1$ – малая мощность накачки, непрерывный режим.

Концы стеклянной лазерной трубки, где находится активная смесь газов, закрыты прозрачными пластинками, наклоненными под углом Брюстера – излучение линейно поляризовано.

Лазер на углекислом газе (Рис. 22.9): активная среда – газовая смесь $CO_2 + N_2 + He$; накачка – электрический ток – электронный удар по посреднику – молекулам N_2; генерация – между колебательными подуровнями CO_2 (Рис. 22.10).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

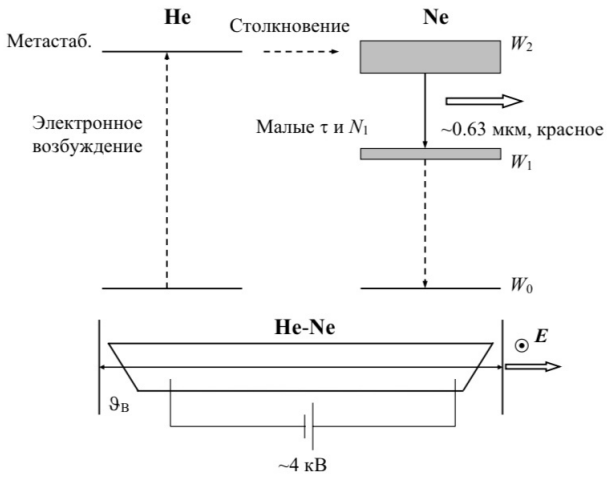


Рис. 22.8. Гелий-неоновый лазер.

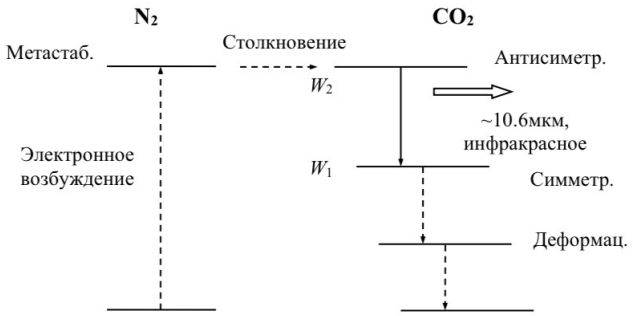


Рис. 22.9. Лазер на углекислом газе.

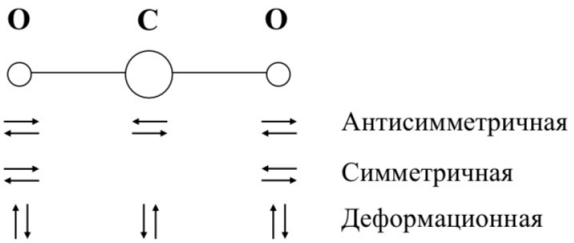


Рис. 22.10. Моды колебаний CO_2.

Особенность – W_1 – не основной уровень, атом He – для $\downarrow \tau_{\text{симм}}$ – малая мощность накачки, непрерывный режим.

Лазеры на органических красителях (Рис. 22.11): активная среда – сложные органические соединения (красители); накачка – оптическая (импульс.), лазерная (импульс., непрер.); генерация – между квазинепрерывными колебательными подуровнями.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

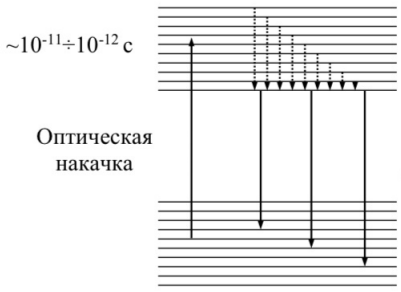


Рис. 22.11. Лазеры на органических красителях.

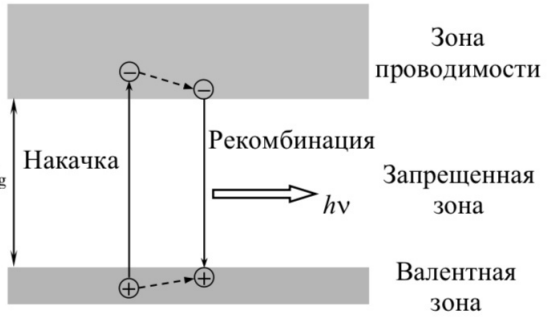


Рис. 22.12. Полупроводниковый лазер.

Особенность – возможность плавной перестройки в широком диапазоне длин волн, импульсный режим (оптическая накачка), непрерывный режим (лазерная накачка).

Полупроводниковый лазер (Рис. 22.12): активная среда – твердотельный полупроводник; накачка – электрическим током (прямая накачка), электронным пучком, оптическая (квантами с $h\nu > E_g$); генерация – между разрешенными зонами полупроводника.

Особенность – малые размеры (коллективно атомы кристаллической решётки), высокий КПД, простота конструкции.

Межзонная люминесценция – излучение в результате рекомбинации созданных внешним воздействием избыточных электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне. Длину волны λ лазерного излучения можно выразить через ширину запрещённой зоны E_g: $\lambda = hc/E_g$.

Полупроводниковые лазеры перекрывают спектральный диапазон от ближней УФО до средней ИКО.

§7. Нелинейные оптические явления.

До сих пор мы считали, что напряженность электрического поля в излучении гораздо меньше, чем напряженность поля, в котором находится электрон в атоме. Пусть напряженность будет большой.

7.1. Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения.

Электрическая поляризация среды в сильном поле:

$$P(t) = \varepsilon_0 \left(\kappa E(t) \chi E^2(t) + \xi E^3(t) + \ldots\right) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \ldots, \qquad (22.17)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где κ – линейная (оптическая) восприимчивость, χ – нелинейная восприимчивость второго порядка, ξ – нелинейная восприимчивость третьего порядка.

Разложение в ряд по отношению $\frac{\chi E^2}{\kappa E} \sim \frac{\xi E^3}{\chi E^2} \sim \frac{E}{E_{\text{ат}}}$

Оценка: $E_{\text{ат}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{r_{\text{ат}}^2} \cong 3 \cdot 10^{12}\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$

Напряженность электрического поля падающей плоской гармонической волны: $E(t) = E_0\cos(\omega t - kz)$. Тогда вектор поляризации:

$$P(t) = \varepsilon_0\left(\kappa E_0\cos(\omega t - kz) + \chi E_0^2\cos^2(\omega t - kx) + \xi E_0^3\cos^3(\omega t - kx) + \ldots\right) \tag{22.18}$$

7.2. Среды с квадратичной нелинейностью. Оптическое детектирование и генерация гармоник.

$$P(t) \cong \varepsilon_0\left(\kappa E(t) + \chi E^2(t)\right) = P_1(t) + P_2(t) \tag{22.19}$$

Тогда:

$$P_2(t) = \varepsilon_0\chi E_0^2\cos^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi E_0^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi E_0^2\cos(2\omega t - 2kz) \tag{22.20}$$

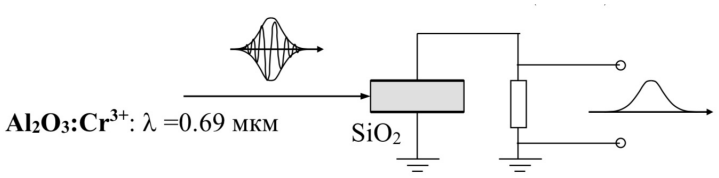


Рис. 22.13. Оптическое детектирование.

За счет первого слагаемого – оптическое детектирование (Рис. 22.13) – выпрямление высокочастотного светового поля: $U(t) \sim \sigma(t) \sim \langle P(t)\rangle \sim \left\langle E^2(t)\right\rangle \sim E_0^2(t) = I(t)$

Генерация второй гармоники:

$$E_{\text{изл}}(t) \sim \ddot{P}_1 + \ddot{P}_2 = \varepsilon_0\kappa\omega^2 E_0\cos(\omega t - kz) + 2\varepsilon_0\chi\omega^2 E_0^2\cos(2\omega t - 2kz) \tag{22.21}$$

7.3. Среды с кубичной нелинейностью. Самофокусировка волновых пучков и генерация гармоник.

Для изотропных сред или кристаллов с центром симметрии:

$$\vec{P}(-\vec{E}) = -\vec{P}(\vec{E}) \Longrightarrow P(t) = \varepsilon_0\left(\kappa E(t) + \xi E^3(t) + \ldots\right) \cong P_1(t) + P_3(t), \tag{22.22}$$

$$\begin{aligned} P_3(t) &= \varepsilon_0\xi E_0^3\cos^3(\omega t - kz) = \\ &= \varepsilon_0\xi E_0^2\frac{3}{4}E_0\cos(\omega t - kz) + \varepsilon_0\xi E_0^3\frac{1}{4}\cos(3\omega t - 3kz) \end{aligned} \tag{22.23}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Изменение показателя преломления среды:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \kappa + \frac{3}{4}\xi E_0^2} \cong n_0 + \frac{3}{8n_0}\xi E_0^2, \quad n = n_0 + n_2 E_0^2 \tag{22.24}$$

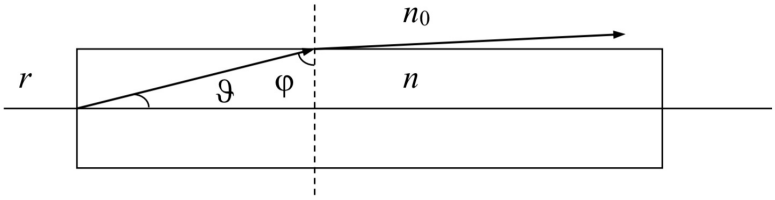


Рис. 22.14. Изменение показателя преломления среды.

Если пучок распространяется в той области пространства, где показатель преломления будет больше (Рис. 22.14), при $n_2 > 0$, то может происходить самофокусировка волновых пучков.

Может происходить полное внутреннее отражение.

$$\cos\vartheta_{\text{п}} = \sin\varphi_{\text{п}} = \frac{n_0}{n} = \frac{n_0}{n_0 + n_2 E_0^2}, \quad 1 - \frac{1}{2}\vartheta_{\text{п}}^2 \cong 1 - \frac{n_2 E_0^2}{n_0}, \quad \vartheta_{\text{п}}^2 \cong 2\frac{n_2 E_0^2}{n_0} \tag{22.25}$$

Дифракционное расширение пучка радиуса r – $\vartheta_{\text{д}} = 0.61\frac{\lambda}{r} = 0.61\frac{\lambda_0}{rn_0}$.

1) $\vartheta_{\text{д}} > \vartheta_{\text{п}}$ – расширение пучка (при $P < P_{\text{пор}}$).

2) $\vartheta_{\text{д}} \cong \vartheta_{\text{п}}$ – самоканалирование светового пучка (при $P = P_{\text{пор}}$).

3) $\vartheta_{\text{д}} < \vartheta_{\text{п}}$ – самофокусировка (при $P > P_{\text{пор}}$).

Пороговая мощность $P_{\text{пор}}$ определяется из условия $\vartheta_{\text{д}} \cong \vartheta_{\text{п}}$.

Также может воникать генерация третьей гармоники.

7.4. Тепловое самовоздействие излучения.

Тепловое самовоздействие излучения – тепловое воздействие светового пучка на оптические свойства среды и, как результат, влияние на распространение самого пучка.

Распространение светового пучка ⇒ поглощение энергии ⇒ повышение температуры ⇒ изменение оптических свойств среды (показателя преломления) ⇒ влияние на распространение пучка.

Показатель преломления среды $n(\rho, T) = n_T \Delta T$, где n_T – полная производная показателя преломления по температуре, которая является характеристикой вещества.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Профиль температуры – колокообразная форма – температура убывает от оси пучка к его периферии. Профиль показателя $n(r)$:
– фокусирующие среды ($n_T > 0$) – распределенная тепловая собирающая линза – тепловая самофокусировка.
–дефокусирующие среды ($n_T < 0$) – распределенная тепловая рассеивающей линза – тепловая дефокусировка.

В дальней зоне дифракции из-за дефокусировки световой пучок приобретает нелинейную расходимость $\vartheta_{\text{нл}}$, которая может в несколько раз превышать дифракционную расходимость пучка $\vartheta_{\text{д}}$.

Критическая мощность тепловой дефокусировки значительно меньше, чем пороговая мощность в нелинейных средах.

Тепловая нелинейность обладает сравнительно большим временем установления стационарного состояния – порядка несколько секунд.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ