ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА. 11 КЛАСС (ДОП. ГЛАВЫ)

ПАРФЕНОВ
КОНСТАНТИН ВЛАДИМИРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 1D: Система дрейфовых движений.

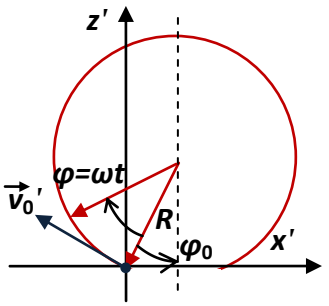
Темы: Комбинации дрейфовых движений. Переход в «дрейфующую» систему отсчета. Поперечный дрейф.

Как было установлено в занятии 10, в общем случае движение заряженной частицы в магнитном поле при наличии других сил можно представить как комбинацию ларморовского вращения, «дрейфа» (плавного движения) центра ларморовской окружности и «плавного» изменения параметров ларморовской орбиты (радиуса, частоты и ориентации плоскости). Если магнитное поле и другие силовые поля постоянны и однородны, то остается только ларморовское вращение и дрейф центра ларморовской окружности с постоянной скоростью. В этом случае анализ движения удобно проводить в «дрейфующей» Системе Отсчета, то есть в СО, центр которой движется со скоростью дрейфа – тогда анализируемое движение сводится к «чистому» ларморовскому вращению. При этом дрейф может быть комбинацией двух изученных нами видов дрейфа – продольного дрейфа и дрейфа в скрещенных полях.

Пример 1: В пространстве над плоской горизонтальной поверхностью Земли создано однородное магнитное поле, линии индукции $\vec{B}$ которого горизонтальны. Маленький шарик с зарядом q и массой m выстреливают с поверхности Земли со скоростью $\vec{v}_0$ под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, причем $\vec{v}_0$ и $\vec{B}$ лежат в одной вертикальной плоскости, а $|\vec{v}_0| = \dfrac{mg}{2qB}$. Записать закон движения шарика и определить дальность его полета (расстояние между точками выстрела и падения).

Решение:

В системе отсчета К, связанной с Землей, выберем систему координат: направим ось z вертикально вверх, ось y – вдоль вектора индукции, а начало координат совмести с точкой старта. Движение частицы в этой системе полей, как следует из общей теории, можно представить как комбинацию продольного дрейфа (вдоль оси y со скоростью $v_0\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0$), дрейфа в скрещенных полях (вдоль оси x со скоростью $\dfrac{mg}{qB} = 2v_0$) и ларморовского вращения. Для выделения «чистого» вращения устраним дрейфовые движения переходом в новую систему отсчета. Перейдем в систему отсчета К′, движущуюся относительно исходной со скоростью $\vec{V} = 2v_0\vec{e}_x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0\vec{e}_y$. В этой системе отсчета сила тяжести компенсируется появляющейся появляющейся электрической силой, и частица движется только под действием однородного магнитного поля в плоскости (x′z′). Начальная скорость $\vec{v}_0' = -2v_0\vec{e}_x' + v_0\sin(\alpha)\vec{e}_z'$. Ее модуль равен $v_0' = \dfrac{\sqrt{17}}{2}v_0$. Шарик



шарик движется по окружности радиуса $R = \dfrac{mv_0'}{qB} = \sqrt{17}\dfrac{v_0^2}{g}$ с угловой скоростью $\omega = \dfrac{qB}{m} = \dfrac{g}{2v_0}$. Изменение координат в этой плоскости (см. рисунок) можно описать следующим образом:

$$x'(t) = R\sin(\varphi_0) - R\sin(\omega t + \varphi_0)]$$
$$z'(t) = R\cos(\varphi_0) - R\cos(\omega t + \varphi_0)]$$

(угол φ_0 равен углу отклонения $\vec{v}_0'$ от горизонтали). Ясно,

что $\sin(\varphi_0)=\frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\cos(\varphi_0)=\frac{4}{\sqrt{17}}$. Значит, $x'(t)=\frac{v_0^2}{g}[1-\cos(\omega t)-4\sin(\omega t)]$ и $z'(t)=\frac{v_0^2}{g}[4-4\cos(\omega t)+\sin(\omega t)]$. Возвращаясь в систему отсчета К, находим закон движения:

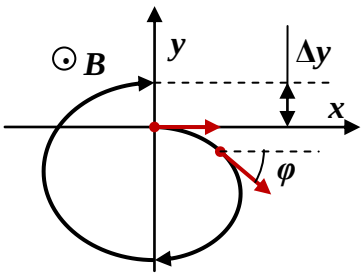
$$\begin{cases} x(t)=2v_0t+\frac{v_0^2}{g}[1-\cos(\omega t)-4\sin(\omega t)] \\ y(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}v_0t \\ z(t)=\frac{v_0^2}{g}[4-4\cos(\omega t)+\sin(\omega t)] \end{cases}.$$

Время полета определяется из соотношения $4\cos(\omega t)-\sin(\omega t)=4$, то есть $\omega t=2(\pi-\varphi_0)$. Дальность полета определяется по координатам точки приземления: $L=\frac{2v_0^2}{g}\sqrt{19(\pi-\varphi_0)^2+8(\pi-\varphi_0)+1}\approx 27\frac{v_0^2}{g}$.

Если поля будут неоднородны, то это может заметно усложнить картину дрейфа, но разбиение общего движения на дрейф и вращение довольно часто продолжает «работать». Более того, могут появиться новые виды дрейфовых движений. В качестве примера рассмотрим явление поперечного дрейфа в слабонеоднородном поле.

Пример 2: В некоторой области пространства создано магнитное поле, всюду направленное по оси z декартовой системы координат. При этом величина индукции магнитного поля медленно изменяется с изменением координаты x: $B_z(x)=B_0(1+\beta\cdot x)$, причем $\beta<<\frac{qB_0}{mv_0}$. В начальный момент времени частица с зарядом $q>0$ и массой m вылетает из начала координат со скоростью v_0, направленной вдоль оси x. Представив движение частицы как комбинацию ларморовского вращения и дрейфа центра ларморовской окружности, найти скорость дрейфа.

Решение: С учетом малости β понятно, что траектория частицы близка к ларморовской



окружности радиуса $R_0=\frac{mv_0}{qB_0}$. Тогда, как видно из рисунка, дрейф возникает из-за различия «средних» радиусов кривизны участков траектории, описываемых частицей в областях $x<0$ и $x>0$ Таким образом, дрейф центра окружности происходит вдоль оси y, и величина сдвига за один оборот может быть вычислена по закону изменения компоненты скорости: $\Delta y=\int_0^T dt v_y(t)$. Уравнения движения частицы

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}=+\frac{qB}{m}v_y=\frac{qB_0}{m}(1+\beta\cdot x)v_y \\ \frac{dv_y}{dt}=-\frac{qB}{m}v_x=-\frac{qB_0}{m}(1+\beta\cdot x)v_x \end{cases}.$$

Из второго уравнения с учетом начального условия $v_y(0)=0$ находим: $dv_y=-\frac{qB_0}{m}(1+\beta\cdot x)dx\Rightarrow v_y=-\frac{qB_0}{m}\left(x+\frac{\beta}{2}x^2\right)$. Как известно, модуль скорости частицы при движении в магнитном поле не изменяется. Поэтому, если ввести угол поворота

вектора скорости φ (см. рисунок), то $v_x = v_0\cos(\varphi)$ и $v_y = -v_0\sin(\varphi)$. Тогда можно найти связь φ и x: $\frac{mv_0}{qB_0}\sin(\varphi) = x + \frac{\beta}{2}x^2$. С другой стороны,

$$dy = v_y dt = \frac{m}{qB_0}\frac{dv_x}{1+\beta x} = -\frac{mv_0}{qB_0}\frac{\sin(\varphi)}{1+\beta x}d\varphi.$$

В области движения частицы $|\beta x| \le \beta R_0 << 1$. Таким образом, пренебрегая поправками порядка 2-й и выше степеней $\beta\frac{mv_0}{qB_0}$, получаем $dy \approx -\frac{mv_0}{qB_0}\sin(\varphi)(1-\beta x)d\varphi$, причем в этом выражении нам достаточно знать x без учета поправок, связанных с β, то есть $x \approx \frac{mv_0}{qB_0}\sin(\varphi)$. В результате $dy \approx \frac{mv_0}{qB_0}\left(-\sin(\varphi) + \beta\frac{mv_0}{qB_0}\sin^2(\varphi)\right)d\varphi$, и $\Delta y \approx \int_0^{2\pi} dy = \pi\beta\left(\frac{mv_0}{qB_0}\right)^2$, поскольку $\int_0^{2\pi}\sin(\varphi)d\varphi = 0$ и $\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)d\varphi = \pi$. Следовательно, скорость дрейфа центра ларморовской окружности

$$\vec{V}_D = \frac{\Delta y}{T}\vec{e}_y \approx \frac{qB_0\Delta y}{2\pi m}\vec{e}_y = \beta\frac{mv_0^2}{2qB_0}\vec{e}_y.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. В пространстве над плоской горизонтальной поверхностью Земли создано однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B} = B\cdot\vec{e}_x$ (в системе координат, в которой оси x и y горизонтальны, а ось z вертикальна). Маленький шарик с зарядом $q > 0$ и массой m выстреливают с поверхности Земли со скоростью $\vec{v}_0 = u\cdot\vec{e}_x + u\cdot\vec{e}_y + u\cdot\vec{e}_z$, причем $u \equiv \frac{mg}{qB}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите дальность его полета (расстояние между точками выстрела и падения).

2. (***региональный этап ВсОШ 2023 г.***) В скрещенных электрическом и магнитном полях движется маленькая частица с массой m и зарядом q. Электрическое поле – однородное, направленное вдоль оси y с напряженностью E. Вектор индукции магнитного поля направлен вдоль оси z, а его величина зависит только от y: $B_z(y) = \alpha\cdot\sqrt{y}$. В начальный момент времени $t = 0$ частица покоилась в начале координат. Известно, что впервые после начала движения частица остановилась в момент времени $t = T$.
а) Определите величину скорости в тот момент, когда она будет направлена вдоль оси x.
б) Найдите радиус кривизны траектории частицы в зависимости от ее координаты y.
в) Изобразите участок траектории частицы, пройденный за время T.
г) На каком расстоянии от точки старта окажется частица спустя время $\tau = \frac{3}{2}T$?
Силы тяжести нет.

3. (***олимпиада «Тумайяда»***) Заряженная частица с массой m и зарядом $q > 0$ движется в магнитном поле линейного тока (бесконечного прямолинейного провода с током I). В начальный момент времени частица стартует из точки на расстоянии r_0 от провода со скоростью v_0, направленной против тока. Других силовых полей в области движения нет, сила сопротивления среды отсутствует.
а) Найдите максимальное и минимальное расстояния от частицы до провода в процессе движения.
б) Определите расстояние, на котором скорость частицы будет перпендикулярна проводу.

в) В каком случае движение частицы можно представить как вращение по ларморовской окружности, центр которой медленно дрейфует с постоянной скоростью? Вычислите величину скорости такого дрейфа.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 2D: Магнитные цепи.

Темы: Каналлирование линий индукции в ферромагнитных сердечниках. Магнитные цепи. Магнитные сопротивления и магнитодвижущие силы.

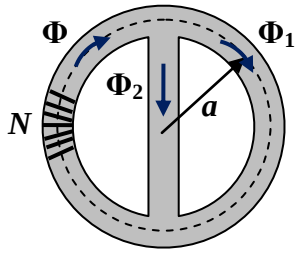
Интересный класс задач магнитостатики – расчет магнитных потоков (индукций магнитного поля) в системах ферромагнитных сердечников, на которые надеты витки проводов с током (катушки индуктивности). Ферромагнетики с большими магнитными проницаемостями обладают свойством «каналлирования» линий магнитных индукции – они идут в основном вдоль оси сердечника, повторяя ее «не слишком крутые» изгибы. Конечно, часть линий индукции покидают сердечник (в этом случае говорят о рассеянии магнитного потока), но для этот эффект мал, и часто расчеты проводят пренебрегая таким рассеянием. Отметим интересную особенность таких систем. Условие непрерывности магнитного потока говорит нам, что в любой «точке ветвления» сердечника сумма притекающих к ней магнитных потоков равна сумме утекающих. Закон полного для случая, когда у нас имеется замкнутый сердечник («магнитный контур»), составленный из участков с разными проницаемостями и сечениями, то для проходящей по контуре линии индукции $\sum_i \frac{B_i}{\mu_i}\Delta l_i = \mu_0 \sum_k (\pm N_k I_k)$. В правой части сумма ведется по участкам контура, в левой – по надетым на сердечник катушкам, причем со знаком «+» берутся вклады тех катушек, которые создают магнитный поток в положительном направлении обхода, выбранном для данного контура. Так как на каждом участке индукцию можно выразить через текущий по сердечнику магнитный поток , то это соотношение записывается в виде

$$\sum_i \Phi_i \frac{\Delta l_i}{\mu_0 \mu_i S_i} \equiv \sum_i \Phi_i R_i = \sum_k (\pm N_k I_k) \equiv \sum_k (\pm \mathrm{M}_k),$$

где величины $R_i \equiv \frac{1}{\mu_0 \mu_i}\frac{\Delta l_i}{S_i}$ называют магнитными сопротивлениями, а $\mathrm{M}_k \equiv N_k I_k$ – магнитодвижущими силами (МДС). В этом виде мы получаем полный аналог правила Кирхгофа для электрических цепей. Вместе с условием непрерывности магнитного потока мы получаем способ построить полную систему уравнений для расчета магнитных цепей, который полностью аналогичен расчету цепей постоянного электрического тока.

Пример 1: В тонкий тороидальный сердечник из материала с $\mu_1 = 100$, радиус средней линии которого $a = 20$см по диаметру вставлена перемычка такого же поперечного сечения, но из материала с $\mu_2 = 200$. С одной стороны от перемычки на сердечник намотано $N = 1000$ витков провода, по которому течет ток $I = 5$А. Найдите индукцию магнитного поля в перемычке. Рассеянием магнитного потока пренебречь.

Решение:



Уравнение непрерывности магнитного потока $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. С учетом того, что сечение всех участков сердечника одинаково, для величин индукции внутри каждого из участков получаем $B = B_1 + B_2$. Теперь запишем закон полного тока для контура, составленного из левой и правой половины тора:

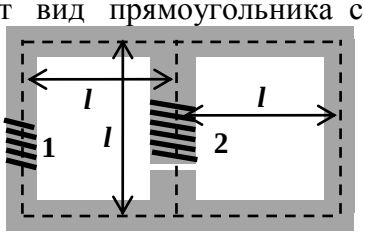
$$\frac{B}{\mu_1}\pi a + \frac{B_1}{\mu_1}\pi a = \mu_0 N I \Rightarrow B + B_1 = \frac{\mu_0 \mu_1 N I}{\pi a}$$

Наконец, запишем закон полного тока для контура, составленного из правой половины тора и перемычки: $\frac{B_1}{\mu_1}\pi a - \frac{B_2}{\mu_2}2a = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{2\mu_1}{\pi \mu_2}B_2$ (обратите внимание: обход контура идет против «положительного» направления потока в перемычке, поэтому соответствующее слагаемое входит в уравнение со знаком «минус»). Теперь решаем

получившуюся систему: подставляем третье уравнение во второе, находим $B=\frac{\mu_0\mu_1 NI}{\pi a}-B_1=\frac{\mu_0\mu_1 NI}{\pi a}-\frac{2\mu_1}{\pi\mu_2}B_2$. Наконец, оба соотношения получаем в первое уравнение, и приходим к ответу: $\frac{\mu_0\mu_1 NI}{\pi a}-\frac{2\mu_1}{\pi\mu_2}B_2=\frac{2\mu_1}{\pi\mu_2}B_2+B_2\Rightarrow B_2=\frac{\mu_0\mu_1\mu_2 NI}{(4\mu_1+\pi\mu_2)a}$. Подставляя численные значения, получаем $B_2\approx 0{,}61$ Тл.

Отметим, что подобные задачи можно решать, непосредственно используя аналогию с цепями постоянного тока. В самом деле, перемычка и правая часть тора – это параллельное соединение двух магнитных сопротивлений, и их общее магнитное сопротивление находится из соотношения $\frac{1}{R_{12}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\mu_0\mu_1 S}{\pi a}+\frac{\mu_0\mu_2 S}{2a}\Rightarrow R_{12}=\frac{2\pi a}{\mu_0(2\mu_1+\pi\mu_2)S}$. Магнитный поток в левой части тора $\Phi=\frac{\text{М}}{R+R_{12}}=\frac{\mu_0\mu_1(2\mu_1+\pi\mu_2)SNI}{(4\mu_1+\pi\mu_2)\pi a}$ делится между перемычкой и правой частью обратно пропорционально сопротивлениям, то есть $\Phi_2=\frac{R_1}{R_1+R_2}\Phi=\frac{\mu_0\mu_1\mu_2 SNI}{(4\mu_1+\pi\mu_2)a}$. Таким образом, мы приходим к тому же результату $B_2=\frac{\Phi_2}{S}=\frac{\mu_0\mu_1\mu_2 NI}{(4\mu_1+\pi\mu_2)a}$.

Пример 2: Тонкий сердечник квадратного сечения имеет вид прямоугольника с перемычкой, причем площадь поперечного сечения перемычки в два раза больше, чем у остальных «ветвей». На «левой» и «средней» ветвях надеты «сонаправленные» катушки с числом витков $N_1=1500$ и $N_2=3000$, в которых текут токи $I_1=6$ А и $I_2=3$А. В перемычке имеется воздушный зазор ширины $\delta=1/3$ см. Магнитная проницаемость материала сердечника $\mu=82$, а $l=54$ см. Найти магнитную индукцию в зазоре, пренебрегая рассеянием магнитного потока.



Решение:

Обозначим магнитные потоки в сердечниках с катушками Φ_1 и Φ_2, а в сердечники без катушки – Φ. Уравнение непрерывности магнитного потока $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$ теперь (с учетом отношения сечений) приводит к соотношению $B=B_1+2B_2$. Отметим, что с учетом непрерывности потока и приближения отсутствия рассеяния потока B_2 – это как раз искомая индукция в зазоре. Закон полного тока для контура из «левой» и «средней» ветви сердечника дает:

$$\frac{B_1}{\mu}3l-\frac{B_2}{\mu}(l-\delta)-B_2\delta=\mu_0(N_1I_1-N_2I_2)=0\Rightarrow B_1=\frac{1}{3}\left(1+(\mu-1)\frac{\delta}{l}\right)B_2,$$

а для «средней» и «правой» ветвей:

$$\frac{B_2}{\mu}(l-\delta)+B_2\delta+\frac{B}{\mu}3l=\mu_0 N_2 I_2\Rightarrow B=\frac{\mu_0\mu N_2 I_2}{3l}-\frac{1}{3}\left(1+(\mu-1)\frac{\delta}{l}\right)B_2.$$

Подставляя эти выражения в уравнение непрерывности, получаем:

$$\frac{\mu_0\mu N_2 I_2}{3l}-\frac{1}{3}\left(1+(\mu-1)\frac{\delta}{l}\right)B_2=\frac{1}{3}\left(7+(\mu-1)\frac{\delta}{l}\right)B_2\Rightarrow B_2=\frac{\mu_0\mu N_2 I_2}{2[4l+(\mu-1)\delta]}\approx 0{,}19\text{ Тл}.$$

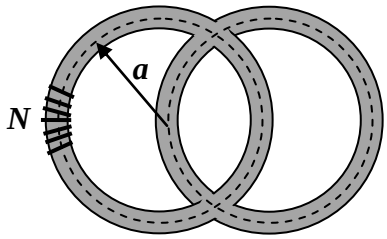
Отметим, что, несмотря на то, что ширина зазора составляет менее 1/150 от длины «средней» ветви сердечника, влияние зазора на величину индукции заметно – соответствующая поправка более 10% ! А величину индукции в «левой» ветви сердечника

зазор и вовсе увеличивает почти на 25%: $B_1 = \frac{1}{3}\left(1+(\mu-1)\frac{\delta}{l}\right)B_2 = \frac{1}{2}B_2 \approx 0{,}95$ Тл, а при $\delta = 0$ $B_1^{(0)} = \frac{\mu_0 \mu N_2 I_2}{24l} \approx 0{,}072$ Тл.

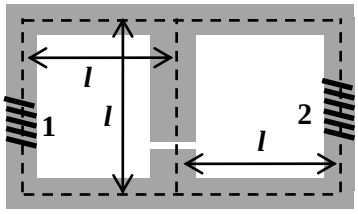
В целом понятно, что можно рассчитать любую магнитную цепь, если нам известен способ расчета аналогичной цепи постоянного тока.

Задачи для самостоятельного решения.

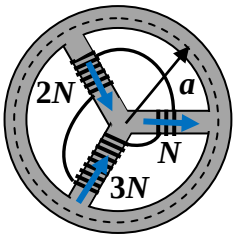
1. Ферромагнитный сердечник из материала с проницаемостью μ = 500 образован двумя одинаковыми тонкими торами с радиусами осевой линии a = 50 см. Торы пересекаются так, что их осевые линии лежат в одной плоскости и каждая проходит через центр другой (см. рисунок). На одну боковую «ручку» намотана катушка из N = 2000 витков, по которой пропускают ток с силой I = 5 А. В какой части сердечника индукция магнитного поля минимальна? Чему она равна? Рассеянием магнитного потока в сердечнике пренебречь.



2. Тонкий сердечник квадратного сечения имеет вид прямоугольника с перемычкой, причем площадь поперечного сечения перемычки в три раза больше, чем у остальных «ветвей» (см. рисунок). На «левой» и «средней» ветвях надеты «противонаправленные» катушки с числом витков N_1 = 1000 и N_2 = 3000, в которых текут токи I_1 = 3 А и I_2 = 2 А. В перемычке имеется воздушный зазор ширины δ = 5 мм. Магнитная проницаемость материала сердечника μ = 100, а l = 60 см. Пренебрегая рассеянием магнитного потока в сердечнике, найдите величину магнитной индукции в зазоре.



3. Тонкий тороидальный сердечник из ферромагнетика с μ = 1000 «дополнен» тремя радиальными цилиндрическими ферромагнитными лучами, площадь поперечного сечения которых такая же, как у сердечника (углы между осями соседних лучей одинаковы и равны 120°). Магнитная проницаемость материала первого луча μ_1 =3 μ/π, и на него намотано 3N = 3000 витков провода. У второго луча μ_2 =3 $\mu/(2\pi)$, и на него намотано 2N = 2000 витков провода, а у третьего луча $\mu_3 = \mu$, и число витков N = 1000. Провода соединены в одну цепь, по которой пропускают ток с силой I = 2,5 А. Направление намотки таково, что направление создаваемых токами в обмотках магнитных потоков совпадает с направлением синих стрелок на рисунке. Пренебрегая рассеянием магнитного потока в сердечнике, найдите величину индукции магнитного поля внутри первого луча. a = 60 см.



курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 3D: Гармонические колебания сложных систем.

Темы: Связанные колебания. Нормальные моды колебаний сложных систем.

В «простых» колебательных системах собственные гармонические колебания происходят с фиксированной частотой, определяемой физикой системы. К «сложным» механическим колебательным системах в данном занятии будем относить составные системы, одна или несколько частей которых могут совершать гармонические колебания разных частот, влияющие друг на друга. Важно отметить, что в таких системах одно или несколько тел могут совершать несколько <u>различных</u> колебаний (обусловленных разными возвращающими силами, с различными собственными частотами). В этом случае сложность анализа поведения системы в основном связана с тем, что разные колебания накладываются друг на друга.
Поясним общую методику описания на конкретных примерах.

Пример 1: Два одинаковых бруска покоятся на горизонтальной поверхности. Линия, соединяющая центры масс брусков, перпендикулярна их обращенным друг к другу граням. К этим граням прикреплена невесомая пружина жесткостью k, ось которой совпадает с этой линией. Пружина не деформирована. Масса каждого из брусков равна m, коэффициент трения между каждым из них и поверхностью равен μ. С некоторого момента времени на один из брусков действует постоянная сила, направленная вдоль упомянутой линии в направлении второго бруска. Величина силы $F = 2\mu mg$. В какие моменты времени скорость второго бруска равна нулю?

Решение:

Поскольку величина силы превышает максимально возможную величину силу трения для одного бруска, первый брусок придет в движение, сжимая пружину. Пока второй брусок неподвижен, деформация пружины связана только со смещением первого бруска. Будем отсчитывать координату первого бруска x_1 вдоль линии движения от его начального положения. Тогда уравнение его движения

$$m x_1'' = F - k\,x_1 - \mu mg \Rightarrow x_1'' + \omega^2\, x_1 = \mu\, g \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

Это уравнение немного отличается от «привычного» уравнения гармонических колебаний: в его правой части присутствует ненулевая постоянная. От нее легко избавиться: если «сдвинуть» начало отсчета координаты на постоянную величину, являющуюся <u>решением этого же уравнения</u>: $x_1(t) \equiv \dfrac{\mu g}{\omega^2} + \tilde{x}_1(t)$, то для $\tilde{x}_1(t)$ получим «привычное» уравнение $\tilde{x}_1'' + \omega^2\, \tilde{x}_1 = 0$, имеющее стандартное решение в виде комбинации косинуса и синуса. Поэтому

$$x_1(t) = \frac{\mu g}{\omega^2} + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

и с учетом начальных условий ($x_1(0) = 0, v_1(0) = 0$) получаем закон движения первого бруска, справедливый до тех пор, пока второй брусок покоится:

$$x_1(t) = \frac{\mu g}{\omega^2}[1 - \cos(\omega t)] = \frac{\mu m g}{k}[1 - \cos(\omega t)]\,.$$

Второй брусок придет в движение, когда сила упругости сжатой пружины превысит максимально возможную величину силы трения. Это произойдет в момент времени $t = \tau$, определяемый из соотношений

$$k\,x_1(\tau) = \mu m g \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Далее будет происходить совместное движение обоих брусков. Будем отсчитывать координату второго бруска x_2 от его положения равновесия. Система уравнений движения для них при $t > \tau$

$$\begin{cases} m x_1'' = F - k(x_1 - x_2) - \mu m g \\ m x_2'' = k(x_1 - x_2) - \mu m g \end{cases}$$

довольно сложна для «прямолинейного» анализа на школьном уровне. Проще всего поступить следующим образом. Заметим, что поскольку сумма внешних сил, действующих на систему двух брусков с пружиной, равна нулю ($F - 2\mu m g = 0$), то центр масс этой системы, координата которого $X(t) = \dfrac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$, движется с постоянной скоростью

$$V = \frac{1}{2} v_1(\tau) = \frac{\mu m g}{2k} \omega \sin(\omega\tau) = \frac{\mu g}{2\omega}.$$

Кроме того, изменение <u>относительного</u> положения брусков, которое можно охарактеризовать координатой $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, описывается уравнением, следующим из записанной выше системы:

$$x'' = x_1'' - x_2'' = \frac{F}{m} - \frac{2k}{m} x \quad \Rightarrow \quad x'' + 2\omega^2 x = 2\mu g .$$

Мы вновь получили уравнение колебаний, решение которого

$$x(t) = \frac{\mu m g}{k} + C\cos[\sqrt{2}\,\omega(t-\tau)] + D\sin[\sqrt{2}\,\omega(t-\tau)]$$

(удобнее записать аргумент гармонических функций через $t - \tau$, поскольку эта фаза движения начинается в момент $t = \tau$). Так как

$$x(\tau) = x_1(\tau) = \frac{\mu m g}{k} = \frac{\mu m g}{k} + C, \quad v(\tau) = v_1(\tau) = \frac{\mu g}{\omega} = \sqrt{2}\,\omega D,$$

то после определения C и D получаем:

$$x(t) = \frac{\mu m g}{k} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left[\sqrt{2}\,\omega(t-\tau)\right] \right\} .$$

Скорость относительного движения брусков

$$v(t) = x'(t) = \frac{\mu g}{\omega} \cdot \cos[\sqrt{2}\,\omega(t-\tau)] .$$

Теперь можно найти скорость второго бруска в любой момент времени

$$v_2(t) = V - \frac{1}{2} v(t) = \frac{\mu g}{2\omega} \cdot \{1 - \cos[\sqrt{2}\,\omega(t-\tau)]\} .$$

Как видно из полученного закона, второй брусок движется «рывками» - в моменты времени, в которые $\cos[\sqrt{2}\,\omega(t-\tau)] = 1$ он останавливается. Однако при заданной величине «подталкивающей» силы эта остановка «лишь на одно мгновение», ибо в эти моменты времени $x = \dfrac{\mu m g}{k}$, и сразу после этого первый брусок снова сжимает пружину, заставляя второй продолжить движение. Моменты остановки второго бруска соответствуют

$$\sqrt{2}\,\omega(t-\tau) = 2\pi n \quad \Rightarrow \quad t_n = \tau + \frac{\pi\sqrt{2}}{\omega} n = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot [1 + 2\sqrt{2}\,n], \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

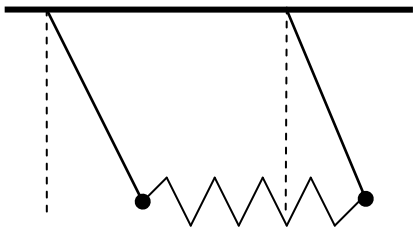
В остальные моменты времени второй брусок движется в направлении действия силы.
Отметим, что скорость первого бруска изменяется при $t > \tau$ по закону

$$v_1(t) = V + \frac{1}{2} v(t) = \frac{\mu g}{2\omega} \cdot \{1 + \cos[\sqrt{2}\,\omega(t-\tau)]\},$$

то есть в моменты остановки второго бруска скорость первого достигает максимума и наоборот.

В решении этой задачи применен очень эффективный прием, который часто применяется для описания движения системы двух взаимодействующих тел. Этот прием состоит в разделение движения системы на движение центра масс (которое определяется только внешними силами) и на относительное движение. Ясно, что заданное значение силы F соответствует одному из простейших случаев. При большем значении силы центр масс системы двигался бы равноускоренно. Если же $F < 2\mu mg$, но достаточна для того, чтобы второй брусок приходил в движение, то движение центра масс будет замедленным в те моменты времени, когда второй брусок движется. Однако такие интервалы будут чередоваться с интервалами, в течение которых второй брусок покоится. Первый при этом может вновь ускоряться, сжимая пружину до нового начала движения второго бруска. Для подобных систем обычно говорят о наличии двух «***мод***» движения – *трансляционной моды* (поступательное движение в одном направлении) и *колебательной моды*.

Пример 2: Изучите движение системы из двух одинаковых математических маятников, связанных невесомой пружиной, причем длина пружины в недеформированном состоянии равна расстоянию между точками подвесов маятников.



Из-за одновременного действия на каждое из тел двух возвращающих сил общая картина колебания каждого из маятников может быть довольно сложной. Тем не менее, есть два случая, для которых характер движения легко определяется. Если, например, отклонить маятники на один и тот же угол в одну сторону и отпустить без начальной скорости, то они будут совершать одинаковые колебания, а пружина при этом будет оставаться недеформированной. Ясно, что частота таких «синфазных» колебаний будет равна частоте колебаний отдельного маятника:

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \alpha_m \cos(\omega_s t) \\ \alpha_2(t) = \alpha_m \cos(\omega_s t) \end{cases}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Если же отклонить маятники на одинаковый угол в противоположные стороны и снова отпустить без начальной скорости, то сила упругости пружины уже не будет равна тождественно нулю, и колебания будут обусловлены действием двух возвращающих сил. Однако «зеркальная» симметрия системы не может сама нарушиться в процессе колебаний, так как этой симметрией обладают не только начальные состояния, но и силы, действующие на тела в любой последующий момент времени. Запишем, например, уравнение движения первого маятника. Учтем, что удлинение пружины, которое при произвольных малых отклонениях $\Delta l = L\sin\alpha_2 - L\sin\alpha_1 \approx L(\alpha_2 - \alpha_1)$, для зеркально-симметричных («противофазных») колебаний маятников можно выразить через отклонение одного маятника: $\Delta l \approx -2L\alpha_1$:

$$mL\alpha_{1t}'' = -mg\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 + k\Delta l \approx -(mg + 2kL)\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1t}'' + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right)\alpha_1 = 0.$$

Таким образом, первый маятник совершает гармонические колебания с частотой $\omega_p = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}$, а второй движется в противофазе к нему:

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = -\alpha_m \cos(\omega_p t) \\ \alpha_2(t) = +\alpha_m \cos(\omega_p t) \end{cases}.$$

Замечательно, что для всякой системы тел, совершающих колебания под действием нескольких возвращающих сил, <u>всегда</u> существуют такие «независимые» друг от друга колебания, совершаемые с некоторой «общей» для всех тел системы частотой. Их называют *нормальными модами колебаний*, а соответствующие частоты – *нормальными частотами* данной системы. Число независимых нормальных мод равно числу степеней свободы системы, и они могут подразделяться на трансляционные и колебательные моды. В общем случае нахождение нормальных мод – задача, превышающая «школьный»

уровень. Но для достаточно симметричных систем часто даже для школьника не представляет проблемы «угадать» такие моды подобно тому, как это было сделано в рассмотренном примере. Еще один простой случай – когда тело совершает независимые колебания в двух или трех взаимно-перпендикулярных направлениях (еще раз отметим: «независимость» колебаний означает, что если подобрать начальные условия, при которых возбуждается только одно из колебаний, то только оно и будет происходить, а другие вовсе не возникнут). Ясно, что эти колебания и есть нормальные моды.

При произвольных начальных условиях колебание системы есть наложение нормальных мод. Например, если в случае с двумя связанными маятниками отклонить на угол α_0 только первый маятник, удерживая второй на месте, а затем отпустить без начальной скорости, то для нахождения закона движения каждого маятника надо поступить следующим образом. Во-первых, представить это начальное положение как комбинацию начальных положений двух найденных нормальных мод:

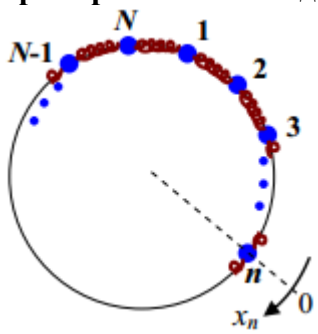
$$\begin{cases} \alpha_1(0) = \alpha_0 = \dfrac{\alpha_0}{2} + \dfrac{\alpha_0}{2} \\ \alpha_2(0) = 0 = \dfrac{\alpha_0}{2} - \dfrac{\alpha_0}{2} \end{cases}$$

(то есть начальное смещение можно рассматривать как смещение обоих маятников на $\alpha_0/2$ в одну сторону одновременно с их смещением на $\alpha_0/2$ в разные стороны). Поэтому будут запущены оба способа колебаний, каждый с амплитудой $\alpha_0/2$, и значит

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \dfrac{\alpha_0}{2}\cos(\omega_s t) + \dfrac{\alpha_0}{2}\cos(\omega_p t) \\ \alpha_2(t) = \dfrac{\alpha_0}{2}\cos(\omega_s t) - \dfrac{\alpha_0}{2}\cos(\omega_p t) \end{cases}.$$

Как видно, закон движения каждого маятника сложнее, чем в нормальных модах, так как определяется суммой двух гармонических функций с разными частотами.

Пример 3: На самом деле «угадывание»нормальных мод – дело практики и интуиции, и при необходимых навыках его можно осуществить для весьма сложных систем. Рассмотрим систему из N одинаковых бусинок, надетых на гладкое кольцо большого радиуса (так, что они при освобождении могли бы свободно по нему двигаться, «не обращая внимания» на изгиб) и связанных попарно одинаковыми невесомыми пружинами. Пусть в состоянии равновесия все пружины не деформированы. Положение n-ой бусинки будем задавать координатой, отсчитываемой «вдоль кольца» от некоторого выбранного ее «положения равновесия» (см. рисунок).



Начнем с простого (но уже «не очень школьного») случая $\boldsymbol{N = 3}$. Ясно, что у этой системы есть три «моды» движения – одна трансляционная (равномерное движение центра масс, в котором $Q_0 \equiv \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = Q_0(0) + V_0 \cdot t$), и две колебательные. Для «угадывания» колебательных мод достаточно заметить, что, если, удерживая бусинку 3 на месте, развести 1 и 2 в разные стороны, то есть задать начальные смещения $x_1(0) = A$, $x_2(0) = -A$ и $x_3(0) = 0$ при нулевых начальных скоростях. Из симметрии системы ясно, что третья бусинка так и не сдвинется с места, а колебания бусинок1 и 2 будут происходить по гармоническому закону с единой частотой в противофазе: $x_3(t) \equiv 0$ и $x_1(t) \equiv -x_2(t) = A \cdot \cos(\omega t)$. Записав уравнение движения бусинки 1 с учетом найденных из симметрии связей, находим частоту колебаний: $mx_1'' = -k(x_1 - x_3) - k(x_1 - x_2) = -3kx_1 \Rightarrow x_1'' + \frac{3k}{m}x_1 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$. Здесь учтено, что

деформации пружин равны разностям введенных нами координат бусинок на концах соответствующей пружины. Нетрудно также заметить, что, удерживая на месте бусинку 2 и отклоняя в разные стороны бусинки 3 и 1, получаем еще одну нормальную колебательную моду, описываемую точно такими же по сути уравнениями: $x_2(t) \equiv 0$ и $x_3(t) \equiv -x_1(t) = B \cdot \cos(\omega t)$. Значит, <u>произвольное</u> движение этой системы можно записать как *суперпозицию* (наложение) трех найденных мод. Например, если запустить колебания следующим способом: удерживая бусинки 2 и 3 на месте, отклонить бусинку 1 на x_0, а затем одновременно отпустить все бусинки без начальной скорости. Тогда очевидно $V_0 = 0$, и законы движения бусинок должны иметь вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{Q_0}{3} + A \cdot \cos(\omega t) - B \cdot \cos(\omega t) \\ x_2(t) = \dfrac{Q_0}{3} - A \cdot \cos(\omega t) \\ x_3(t) = \dfrac{Q_0}{3} + B \cdot \cos(\omega t) \end{cases}.$$

При учете начальных условий ($x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$ и $x_3(0) = 0$) находим: $Q_0 = 3A = -3B = x_0$. Итак,

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{x_0}{3}\left[1 + 2 \cdot \cos(\omega t)\right] \\ x_2(t) = \dfrac{x_0}{3}\left[1 - \cos(\omega t)\right] \\ x_3(t) = \dfrac{x_0}{3}\left[1 - \cos(\omega t)\right] \end{cases}.$$

Пример*(дополнительный): Попробуем рассмотреть «совсем-совсем нешкольный» пример <u>произвольного</u> *N*. Для исследования этого случая лучше использовать более эффективный математический аппарат – метод комплексных амплитуд (смотреть дополнительное занятие 8). И даже в этом подходе анализ потребует математической изощренности.

Энергию описанной системы можно записать в виде:

$$E = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{p_n^2}{2m} + \frac{m\omega^2 (x_{n+1} - x_n)^2}{2}\right],$$

где m – масса частицы, $\omega \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – частота гармонической связи, координата каждой частицы отсчитывается от ее положения равновесия, а $\hat{x}_{N+1} \equiv \hat{x}_1$. Как известно, для такой системы существует <u>линейное</u> преобразование координат и импульсов к переменным *нормальных мод колебаний*, в которых E записывается как сумма энергий независимых одномерных осцилляторов. Так как система является замкнутой, то опять одна из нормальных мод – это *трансляционная* (с нулевой частотой). Соответствующие переменные – координата центра масс и полный импульс:

$$Q_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{x}_n, \quad P_0 = \sum_{n=1}^{N}\hat{p}_n,$$

и есть еще $N-1$ колебательная мода с нормальными частотами $\omega_s \neq 0$. Для этих мод существует <u>линейное</u> преобразование координат и импульсов, приводящее энергию к выражению для энергии набора нормальных колебаний с частотами ω_s и амплитудами A_s (ясно, что $s = 1, 2, \ldots, N-1$):

$$E = \frac{P_0^2}{2mN} + \sum_{s=1}^{N-1}\frac{Nm\omega_s^2 A_s^2}{2}.$$

Так как колебания каждого узла цепочки является суммой колебаний отдельных мод, будем описывать колебание каждой конкретной нормальной частоты с учетом сдвига фаз его комплексной амплитудой $\hat{A}_{sn} \equiv A_s \cdot e^{i\varphi_{sn}}$, где величины φ_{sn} имеют смысл относительных фаз колебаний нормальных мод в соответствующих узлах решетки. Учтем теперь свойства исследуемой конкретной системы:

1. однородность решетки: в силу одинаковости узлов и связей сдвиги фаз между соседними узлами для одной и той же моды должны быть одинаковы:
$$\varphi_{s2} - \varphi_{s1} = \varphi_{s3} - \varphi_{s2} = \ldots \equiv \Delta\varphi_s .$$
Это означает, что при должном выборе начала отсчета фаз $\varphi_{sn} = \Delta\varphi_s \cdot n$.
2. периодичность: так как $N+1$-й узел отождествляется с 1-м, то $\exp(i\varphi_{sN+1}) = \exp(i\varphi_{s1})$, и поэтому $\varphi_{sN+1} = \varphi_{s1} + 2\pi \cdot k_s$, $k_s \in Z$. С учетом предыдущего: $\Delta\varphi_s = \dfrac{2\pi}{N} k_s$. Так как физические осмысленные значения разности фаз колебаний соседних узлов $0 < \Delta\varphi_s < 2\pi$, то $k_s = 1,2,\ldots,N-1$ - целые числа, однозначно соответствующие каждой из $N-1$ колебательных мод. Ясно, что их можно использовать в качестве номера моды, то есть можно отождествить $s \equiv k_s$. В результате находим, что $\varphi_{sn} = \dfrac{2\pi ns}{N}$.

С учетом того, что трансляционная мода задает «синхронное» смещение всех частиц с равномерным распределением импульса, запишем формулы для колебаний бусинок в комплексной форме в виде
$$\begin{cases} \hat{x}_n = \hat{Q}_0 + \sum\limits_{s=1}^{N-1} A_s \exp(i\varphi_{sn}) \cdot \exp(i\omega_s t) \\ \hat{p}_n = \dfrac{1}{N}\hat{P}_0 + m\sum\limits_{s=1}^{N-1} i\omega_s A_s \exp(i\varphi_{sn}) \cdot \exp(i\omega_s t) \end{cases}.$$

При вычислении энергии на языке комплексных амплитуд заметим, что кинетическая и потенциальная энергия каждой моды совершает гармоническое колебание с удвоенной частотой (как квадрат гармонической функции), а полная энергия является постоянной, и поэтому можно считать, что амплитудные значения координат и импульсов <u>в колебательных модах</u> (но не в трансляционных!) должны умножаться на $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (чтобы в энергии, которая квадратична по амплитудам, возник множитель $\dfrac{1}{2}$, соответствующий усреднению по времени квадрата гармонической функции).

Прежде чем приступить к вычислениям, рассмотрим функцию целого аргумента $\Sigma_N(m) \equiv \sum\limits_{n=1}^{N} \exp(i\,2\pi mn/N)$. Входящая в ее определение сумма может быть вычислена как частичная сумма геометрической прогрессии:
$$\Sigma_N(m) = \sum_{n=1}^{N} [\exp(i\,2\pi m/N)]^n = \exp(i\,2\pi m/N)\frac{1-\exp(i\,2\pi m)}{1-\exp(i\,2\pi m/N)} = \begin{cases} 0, & m \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ N, & m = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \end{cases}.$$

Теперь получим выражения для преобразованных форм кинетической и потенциальной энергии. Кинетическая энергия решетки
$$\hat{T} = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n (p_n)^*}{2m} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{N}P_0 + im\sum_{s=1}^{N-1}\omega_s \frac{A_s}{\sqrt{2}}\exp(i\varphi_{sn})\right]\left[\frac{1}{N}P_0 + im\sum_{s'=1}^{N-1}\omega_{s'} \frac{A_{s'}}{\sqrt{2}}\exp(i\varphi_{s'n})\right]^* =$$
$$= \frac{P_0^2}{2mN} + \frac{iP_0}{2N\sqrt{2}} \cdot \sum_{s=1}^{N-1}\omega_s [A_s \cdot \Sigma_N(s) - A_s \cdot \Sigma_N(-s)] + \frac{m}{4}\sum_{s,s'=1}^{N-1}\omega_s \omega_{s'} A_s A_{s'} \cdot \Sigma_N(s-s')$$

(здесь учтено, что после вынесения за знак суммы по n величин, не зависящих от этого номера под знаком таких сумм останутся только фазовые экспоненты, и эти конструкции в точности будут соответствовать определению функции $\Sigma_N(m)$). С учетом того, что $s, s' = 1,..,N-1$ найдем: $\Sigma_N(s) = \Sigma_N(-s) = 0$, а $\Sigma_N(s-s') = N \cdot \delta_{s's}$. В результате:

$$T = \frac{P_0^2}{2mN} + \sum_{s=1}^{N-1} \frac{Nm}{4} \omega_s^2 A_s^2 .$$

При вычислении преобразованного выражения для потенциальной энергии сразу отметим, что слагаемое с Q_0 при вычитании сокращается, а разности фазовых множителей удобно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\exp(i\varphi_{sn+1}) - \exp(i\varphi_{sn}) = \exp(i\varphi_{sn}) \cdot [\exp(i\, 2\pi s/N) - 1] = \\ &= \exp(i\varphi_{sn}) \exp(i\pi s/N)\, 2i \sin(\pi s/N) \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &\exp(-i\varphi_{sn+1}) - \exp(-i\varphi_{sn}) = \exp(-i\varphi_{sn}) \cdot [\exp(-i\, 2\pi s/N) - 1] = \\ &= -\exp(-i\varphi_{sn}) \exp(-i\pi s/N)\, 2i \sin(\pi s/N) \end{aligned}.$$

Тогда потенциальная энергия

$$U = \sum_{n=1}^{N} \frac{m\omega^2 (\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n)^2}{2} = \frac{m\omega^2}{4} \sum_{s,s'=1}^{N-1} 4 \sin(\pi s/N) \sin(\pi s'/N) A_s A_{s'} \cdot \Sigma_N(s-s')\, e^{i\pi(s-s')/N} .$$

С учетом $\Sigma_N(s-s') = N \cdot \delta_{s's}$ находим:

$$E = T + U = \frac{P_0^2}{2mN} + \sum_{s=1}^{N-1} \frac{Nm}{4} \left[\omega_s^2 + 4\omega^2 \sin^2\left(\frac{\pi s}{N}\right) \right] A_s^2 .$$

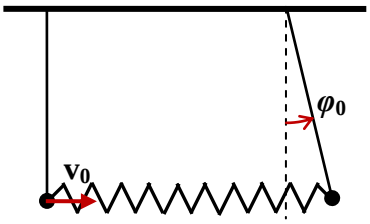
Нетрудно заметить, что это выражение приводится к нужному виду при $\omega_s = 2\omega \sin(\pi s/N)$. Итак, мы нашли нормальные частоты, и мы знаем относительные частотные сдвиги мод в разных узлах, так что мы готовы записывать произвольное колебание как суперпозицию трансляционной моды и нормальных колебательных мод. Отметим, что при N = 3 мы обнаруживаем две нормальные колебательные моды с частотами $\omega_1 = 2\omega \sin(\pi/3) = \sqrt{3}\omega$ и $\omega_2 = 2\omega \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}\omega$, то есть в точности то, что мы «угадали» в «почти школьном» подходе!

Задачи для самостоятельного решения.

1. Четыре одинаковых небольших шайбы массы m соединены четырьмя одинаковыми легкими пружинами жесткостью k и размещены на гладкой горизонтальной плоскости так, что пружины в недеформированном состоянии образуют квадрат со стороной l_0. Шайбы отвели от положений равновесия на одинаковое расстояние $d = l_0/10$ вдоль диагоналей квадрата и отпустили без начальной скорости. Записать закон изменения с течением времени площади четырехугольника, в вершинах которого находятся шайбы.

2. На гладкий горизонтальный стержень надета бусинка массы m, прикрепленная к двум одинаковым пружинам. Вторые концы пружин прикреплены к двум параллельным стенкам (которые перпендикулярны стержню). Положение стенок таково, что обе пружины не деформированы. В некоторый момент времени «правая» стенка начинает двигаться в сторону «левой» с постоянной скоростью V. При этом в течении времени τ после этого момента времени скорость бусинки монотонно растет, достигнув к концу этого интервала величины, равной V. Найдите коэффициент жесткости пружин.

3. Два одинаковых маленьких шарика массой по m = 900 г прикреплены к концам одинаковых легких стержней длиной L = 80 см и соединены невесомой пружиной жесткостью k = 9,8 Н/м. Вторые концы стержней закреплены шарнирно на горизонтальном потолке таким образом, что в положении равновесия оба стержня вертикальны. Удерживая «первый»



шарик в положении равновесия, «второй» отвели от первого так, что его стержень отклонился от вертикали на угол φ_0 = 0,1 рад. Затем их отпустили, подтолкнув первый в сторону второго со скоростью v_0 = 28 см/с, а второй – без начальной скорости. Считая возникшие колебания гармоническими (т.е. пренебрегая сопротивлением воздуха и другими причинами нарушения гармоничности), найдите максимальное расстояние между шариками в процессе этих колебаний. Ускорение свободного падения считать равным g = 9,8 м/с^2.

4. Два одинаковых бруска покоятся на горизонтальной поверхности. Линия, соединяющая центры масс брусков, перпендикулярна их обращенным друг к другу граням. К этим граням прикреплена невесомая пружина жесткостью k, ось которой совпадает с этой линией. Пружина не деформирована. Масса каждого из брусков равна m, коэффициент трения между каждым из них и поверхностью равен μ. С некоторого момента времени на первый брусок действует постоянная сила, направленная вдоль упомянутой линии в направлении второго бруска. Величина силы $F = 5\mu mg/3$, где g – ускорение свободного падения. Определите путь, пройденный вторым бруском за время от начала его движения до первой остановки.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 4D: Затухающие колебания.

Темы: Колебания при наличии сухого трения. Затухающие колебания при вязком трении.

Если в системе, совершающей колебания, присутствуют диссипативные силы, то вследствие потерь механической энергии *амплитуда колебаний* будет убывать, то есть колебания будут *затухающими*. Конечно, при этом закон движения тел системы уже не будет периодическим, и поэтому многие основные понятия требуют переопределения.

В частности, *периодом* затухающих колебаний будем называть интервал времени между ближайшими «однотипными» состояниями системы – например, между ближайшими максимальными отклонениями в одну сторону от положения равновесия для колеблющегося тела. Из-за тормозящего действия диссипативной силы период затухающих колебаний может изменяться. Если период неизменен, то закон движения тела можно представить в виде произведения монотонно убывающей амплитуды колебаний на периодическую функцию, изменяющуюся в интервале $[-1,+1]$:

$$x(t) = A(t)\cdot f(t), \quad f(t+T) = f(t), \quad -1 \le f(t) \le +1 \ (\forall t).$$

Такие колебания будем называть *затухающими периодическими колебаниями*. Если период изменяется, но различие длительностей соседних периодов незначительно ($|\Delta T| << T$), то будем называть колебания *квазипериодическими*. Наконец, если изменение периода значительно $|\Delta T| \ge T$ или закон движения из-за диссипации энергии вообще перестает быть колебательным, будем называть поведение системы *апериодическими колебаниями* (или *апериодическим движением*).

Скорость затухания колебаний характеризуют такими величинами, как *время затухания* τ, за которое амплитуда убывает в определенное число раз (обычно в e раз, где e - основание натурального логарифма), или относительным убыванием амплитуды колебаний за один период

$$\delta \equiv \frac{A(0)-A(T)}{A(0)} = \frac{|\Delta A|}{A(0)}.$$

Во многих ситуациях оказывается, что потери энергии примерно пропорциональны начальной энергии, то есть за каждый период колебаний теряется определенная часть энергии. Тогда и амплитуда за каждый период будет убывать примерно в одинаковое количество раз. В технике очень популярна характеристика, равная натуральному логарифму этого «числа раз» – *логарифмический декремент затухания*

$$\theta \equiv \ln\left[\frac{A(0)}{A(T)}\right].$$

Заметим, что все введенные величины связаны между собой:

$$\theta = \frac{T}{\tau} = \ln\left[\frac{1}{1-\delta}\right]$$

(то есть, например, величина, обратная логарифмическому декременту затухания, есть число периодов, за которое амплитуда уменьшается в e раз). Для очень медленно затухающих колебаний $\delta << 1$ и $\theta << 1$, причем

$$\theta = -\ln(1-\delta)|_{\delta<<1} \approx \delta,$$

а $\tau >> T$ - система совершает много колебаний за счет изначально запасенной энергии, прежде чем амплитуда заметно уменьшится. Системы, для которых этого возможно, в физике называют «добротными». Величина *добротности*

$$Q \equiv 2\pi \frac{E_{нач}}{\Delta E}$$

есть умноженное на 2π отношение начальной энергии системы к потере энергии за один период.

Рассмотрим закономерности затухающих колебаний на примере пружинного маятника, а роль диссипативной силы будет играть сила трения. Начнем со случая сухого трения.

Пример 1: Небольшой груз массы m помещен на горизонтальную поверхность и прикреплен к невесомой пружине жесткостью k., второй конец которой закреплен. Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен μ. Груз отклонили от положения равновесия вдоль пружины, растянув ее на x_0, и отпустили без начальной скорости. Найти время движения груза до полной остановки.

Решение: Поместим начало отсчета координаты груза в точку, которой соответствует недеформированное состояние пружины. Тогда $x(0) = x_0$, и пружина приведет груз в движение, если $k\,x_0 > \mu m g$. Уравнение движения груза до <u>первой</u> остановки

$$m a_x = -k\,x + \mu m g \Rightarrow \quad x_t'' + \frac{k}{m} x = \mu g$$

«почти» совпадает с уравнением гармонических колебаний. Если «сдвинуть» начало отсчета координаты, то можно привести его к обычному виду

$$x = \tilde{x} + \frac{\mu m g}{k} \;\Rightarrow\; \tilde{x}_t'' + \frac{k}{m}\tilde{x} = 0.$$

Поэтому до первой остановки груз движется по гармоническому закону, совершая полпериода колебаний с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ вокруг точки с координатой $x_c^{(+)} = \mu m g/k$:

$$0 \le t \le \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}: \quad x(t) = \frac{\mu m g}{k} + \left(x_0 - \frac{\mu m g}{k}\right)\cos(\omega t).$$

После остановки в момент времени $t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\omega}$ в точке с координатой

$$x_1 = \frac{2\mu m g}{k} - x_0$$

груз продолжит движение только в том случае, если $k|\,x_1\,| > \mu m g$. При выполнении этого условия он движется теперь в положительном направлении оси x, и сила трения также меняет направление. Аналогично предыдущему:

$$\left.\begin{aligned} m a_x &= -k\,x - \mu m g \\ x &= \tilde{x} - \frac{\mu m g}{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tilde{x}_t'' + \frac{k}{m}\tilde{x} = 0$$

получаем, что до второй остановки груз снова совершает полпериода гармонических колебаний с той же частотой вокруг точки с координатой $x_c^{(-)} = -\mu m g/k$

$$\frac{T}{2} \le t \le T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}: \quad x(t) = -\frac{\mu m g}{k} + \left(x_0 - \frac{3\mu m g}{k}\right)\cos(\omega t).$$

и координата точки остановки груза по истечении одного периода колебаний ($t = T = \dfrac{2\pi}{\omega}$)

$$x_2 = x_0 - \frac{4\mu m g}{k}.$$

Таким образом, период затухающих колебаний груза в этом случае равен периоду колебаний в отсутствие силы трения, а амплитуда за каждый период колебаний уменьшается на величину $\Delta A = 4\mu m g/k$. Колебания завершатся в тот момент, когда после остановки груза сила упругости уже не сможет сдвинуть его с места, то есть когда очередная точка остановки окажется в интервале $x_c^{(-)} \le x_N \le x_c^{(+)}$. Нетрудно догадаться, что число прошедших до окончательной остановки полупериодов колебаний равно наибольшему целому числу, которое удовлетворяет требованию

$$N < \frac{k\,x_0 + \mu m g}{2\mu m g}$$

Это число можно записать с помощью функции, которую математики называют «целой частью» заданного числа:

$$N = \left[\frac{k x_0}{2 \mu m g} + \frac{1}{2} \right]$$

(эта формула не совсем пригодна только для «пограничного» случая, когда само число $\frac{k x_0}{2 \mu m g} + \frac{1}{2}$ является целым, то есть когда после $\underline{N-1}$ полупериода деформация пружины <u>в точности равна</u> по модулю $\mu m g / k$ - тогда груз уже не сдвинется с места). Таким образом, полное время движения груза до остановки

$$t_{ост} = N \frac{T}{2} = \left[\frac{k x_0}{2 \mu m g} + \frac{1}{2} \right] \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Амплитуда колебаний убывает с ростом числа прошедших периодов в арифметической прогрессии, и логарифмический декремент затухания зависит от амплитуды, то есть тоже меняется от периода к периоду:

$$\theta = \ln \left[\frac{A}{A - 4 \mu m g / k} \right] = -\ln \left[1 - \frac{4 \mu m g}{k A} \right].$$

А теперь рассмотрим влияние на колебания силы вязкого трения, зависящей от скорости.

Пример 2: Пружинный маятник совершает колебания вдоль одной прямой, и на него действует сила вязкого трения, величина которой пропорциональна скорости тела $\vec{F}_{тр} = -\alpha \vec{v}$. Каков может быть вид закона движения маятника?

Решение: В прежней системе координат

$$m a_x = -k x - \alpha v_x \quad \Rightarrow \quad x_t'' + 2 \gamma x_t' + \omega_0^2 x = 0 \quad \left(\gamma \equiv \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$

Это уравнение отличается от уравнения гармонических колебаний. Чтобы построить его решение, обратим внимание, что убыль механической энергии груза связана с работой силы трения: бесконечно малое изменение $dE = -\alpha v \cdot v dt = -4 \gamma \frac{m v^2}{2} dt$. В процессе колебаний механическая энергия переходит из кинетической энергии в потенциальную и обратно, и <u>в среднем за период</u> кинетическая и потенциальная энергии равны половине полной энергии, поэтому – по крайней мере, для медленно затухающих колебаний – можно считать, что

$$\frac{dE}{dt} \approx -2 \gamma E \quad \Rightarrow \quad E \approx E_0 \cdot e^{-2 \gamma t}.$$

Поскольку энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то закон убывания амплитуды – экспоненциальный:

$$A(t) = A(0) \cdot e^{-\gamma t}.$$

Записав закон движения в форме

$$x(t) = A(t) \cdot f(t) = A(0) e^{-\gamma t} \cdot f(t)$$

и подставив это выражение в уравнение колебаний, получим для функции $f(t)$

$$f_t'' + (\omega_0^2 - \gamma^2) f = 0.$$

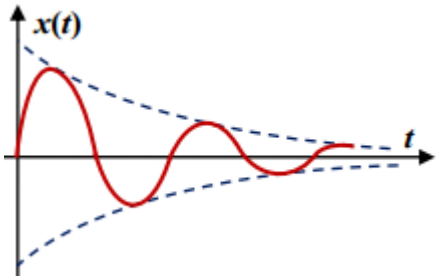
При $\gamma < \omega_0$ это – уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Поэтому, как всегда в таких случаях

$$f(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$$

Значит, закон колебаний груза на пружине, затухающих под действием силы вязкого трения

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) = x_m e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Присутствующие в этом выражении константы (C, D, x_m, φ_0) определяются из начальных условий. Например, при $x(0)=0$ и $v_x(0)=v_0$ получаем: $x(t)=\frac{v_0}{\omega}e^{-\gamma t}\sin(\omega t)$. График этого закона движения показан на рисунке.



Как видно из полученного выражения, амплитуда за каждый период убывает в $e^{\gamma T}$ раз. Логарифмический декремент затухания

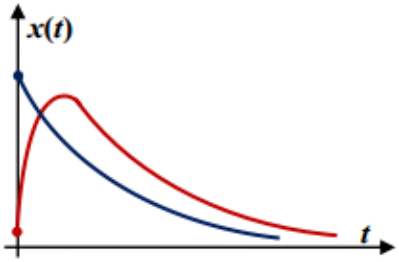
$$\theta=\ln\left[\frac{A(0)}{A(T)}\right]=\gamma T=2\pi\gamma\sqrt{\frac{m}{k-m\gamma^2}}$$

(величину γ часто называют просто *декрементом затухания*). Полная механическая энергия тела убывает:

$$E(t)=\frac{kx_m^2}{2}\cdot e^{-2\gamma t}\left\{1-\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2}\sin(2\omega t+2\varphi_0)+\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\cos(2\omega t+2\varphi_0)\right\}.$$

При очень слабом затухании, когда $\gamma << \omega_0$, последние два слагаемых малы, и энергия убывает почти экспоненциально: $E(t)\approx E(0)\cdot e^{-2\gamma t}$.

При «слишком сильном» трении, то есть при $\gamma > \omega_0$ груз совершает апериодическое движение – можно проверить, что решением уравнения движения является комбинация монотонно убывающих функций



$$x(t)=A\exp[-(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t]+B\exp[-(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t]$$

(с постоянными A и B, которые побираются из начальных условий), и движение тела является *апериодическим*. А зависимости от начальных условий это может быть либо монотонное убывание по модулю, либо сначала рост, а затем, после прохождения максимума, убывание (видно, что в любом случае движение не является колебанием).

Задачи для самостоятельного решения.

1. Небольшой груз массы m = 200 г помещен на горизонтальную поверхность и прикреплен к невесомой пружине жесткостью k = 500 Н/м, второй конец которой закреплен. Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен μ = 0,1. Груз стартует из положения равновесия вдоль пружины с начальной скоростью v_0 = 2 м/с. Найти путь, пройденный грузом до полной остановки. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с^2.

2. Определите добротность пружинного маятника с массой груза m = 200 г и жесткостью пружины k = 500 Н/м, груз которого совершает вертикальные колебания в присутствии силы сопротивления воздуха, линейной по скорости $\vec{F}_c=-\alpha\vec{v}$, где α = 0,05 кг/с.

3. Груз массы m = 800 г подвешен на пружине с жесткостью пружины k = 500 Н/м и находится в равновесии. Его сдвинули вниз от этого положения на расстояние x_0 = 4 см, и отпустили без начальной скорости. При движении на него действует сила вязкого трения, величина которой пропорциональна скорости тела $\vec{F}_c=-\alpha\vec{v}$. Найдите скорость груза в тот момент, когда он впервые вернется в положение равновесия.

4. В момент, когда груз из предыдущей задачи остановился впервые после начала движения, его отклонение от положения равновесия оказалось равно 2 см. Найдите величину α.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 5D: Вынужденные колебания.

Темы: Вынужденные колебания. Резонанс.

Рассмотрим одномерное движение пружинного маятника в среде с силой сопротивления $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, линейной по скорости при действии гармонической внешней силы $F_{ex}(t) = F_0\cos(\omega t)$. Уравнение движения для него имеет вид (как обычно, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и $\gamma = \dfrac{\alpha}{2m}$):

$$x_t'' + 2\gamma x_t' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) \qquad \textbf{(1)}.$$

Мы уже знаем, что в этой системе в отсутствие «вынуждающей» силы происходят свободные затухающие колебания, описываемой функцией $x_{св}(t) = e^{-\gamma t}(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$, в которой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, а константы C и D подбираются из начальных условий. Нетрудно заметить, что, если мы найдем хоть одну функцию, удовлетворяющую (1),то сумма решения, описывающего собственные колебания, и этой функции, даст решение (1), содержащее две произвольные константы, и мы сможем найти закон движения маятника под действием вынуждающей силы с любыми начальными условиями.

В математике (1) относят к *неоднородным дифференциальным уравнениям*, а такое же уравнение, но без правой части – к *однородным дифференциальным уравнениям*. Обнаруженный нами результат есть частный случай математической теоремы, утверждающей, что «***Общее решение неоднородного уравнения есть сумма частного решения этого неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения***».

С точки зрения физики этот же результат указывает нам на то, что закон движения маятника под действием вынуждающей гармонической силы при произвольных начальных условиях записывается как сумма затухающих собственных колебаний на частоте $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ и *вынужденных колебаний*. И с точки зрения физики довольно естественно предположить, что вынужденные колебания будут происходить на частоте вынуждающей силы Ω. Это подтверждается и математически: если искать решение (1) в виде $x_в(t) = A\cos(\Omega t + \varphi_0)$, то после подстановки его в уравнение получаем:

$$\frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) = x_t'' + 2\gamma x_t' + \omega_0^2 x = A[(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\gamma\Omega\sin(\Omega t + \varphi_0)] =$$

$$= A\cos(\Omega t)[(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos(\varphi_0) - 2\gamma\Omega\sin(\varphi_0)] - A\sin(\Omega t)[(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin(\varphi_0) + 2\gamma\Omega\cos(\varphi_0)].$$

Приравнивая коэффициенты при косинусе и синусе, обнаруживаем, что это действительно решение, причем $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$, $\cos\varphi_0 = \dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$ и $\sin\varphi_0 = -\dfrac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$.

Вывод: общее решение (1) при не слишком большом сопротивлении (при $\gamma < \omega_0$)имеет вид

$$x(t) = \{C\cdot\cos[\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t] + D\cdot\sin[\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t]\}\cdot e^{-\gamma t} +$$

$$+\frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2]}\{[\omega_0^2 - \Omega^2]\cdot\cos(\Omega t) + 2\gamma\Omega\cdot\sin(\Omega t)\}.$$

С течение времени, при $t >> \frac{1}{\gamma}$ свободные колебания практически исчезают, и мы получаем *установившееся вынужденное колебание*

$$x_{уст}(t) = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2]}\{[\omega_0^2 - \Omega^2]\cdot\cos(\Omega t) + 2\gamma\Omega\cdot\sin(\Omega t)\} \qquad \textbf{(2)}.$$

Как видно, амплитуда установившихся колебаний зависит от частоты вынуждающей силы. Когда частота вынуждающей силы оказывается близка к частоте собственных колебаний, наблюдается ***резонанс*** – амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает.

Пример 1: Определить резонансную частоту вынуждающей силы – то есть значение Ω, при котором амплитуда установившихся вынужденных колебаний будет максимально большой при заданной амплитуде колебаний силы F_0. Найти амплитуду колебаний в резонансе. Исследовать ее поведение при слабом затухании.

Решение: Ясно, что амплитуда колебаний максимальна, когда знаменатель в выражении $A(\Omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$ будет минимален. Приравнивая к нулю производную подкоренного выражения, находим: $4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 - 2\gamma^2) = 0 \Rightarrow \Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$.

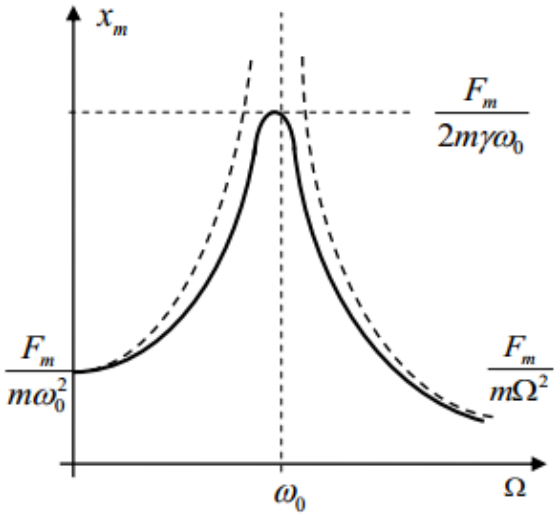
Амплитуда вынужденных колебаний в резонансе получается подстановкой этого значения

$$A_{\max} = A(\Omega_{rez}) = \frac{F_0}{2\gamma m\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

Резонанс проявляется особенно сильно при слабом затухании: если $\gamma << \omega_0$, то

$$\Omega_{rez} \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A_{\max} \approx \frac{F_0}{2\gamma\sqrt{mk}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}\frac{F_0}{k} >> \frac{F_0}{k},$$

то есть амплитуда резонансных колебаний значительно превосходит величину смещения груза под действием постоянной силы, равной по величине амплитуде вынуждающей переменной силы.



Видно, что резонансная амплитуда формально оказывается бесконечно большой при $\gamma \to 0$. На самом деле в отсутствие сопротивления вынуждающая сила будет непрерывно раскачивать маятник, и амплитуда колебаний действительно будет неограниченно расти (за бесконечное время). В реальности при очень больших амплитудах обязательно появится какой-либо механизм диссипации энергии. Так что именно диссипация ограничивает возрастание амплитуды при резонансе. На графике $x_m(\Omega)$ пунктиром показана зависимость амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы при нулевом трении, а сплошной линией – при $\gamma \neq 0$.

Если на маятник действует несколько гармонических сил разной частоты, то закон его движения будет состоять из свободных колебаний и <u>нескольких</u> вынужденных колебаний – свое для каждой из сил, и при этом каждое такое колебание будет описываться формулой (2).

Задачи для самостоятельного решения.

1. Собственная частота маятника ω_0 = 1 кГц, а декремент затухания γ = 1 Гц. При каких частотах вынуждающей гармонической силы амплитуда установившихся колебаний в два раза меньше резонансной (максимально возможной)? Ответ округлите до десятых долей Гц.

2. Груз пружинного маятника совершает установившиеся вертикальные колебания под действием вынуждающей силы $F_x(t)=F_0\cdot\sin(\Omega t)$ в присутствии силы сопротивления воздуха, линейной по скорости $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, где α = 2 кг/с. Известно, что F_0 = 4 Н, а частота вынуждающей силы Ω в точности равна собственной частоте маятника ω_0 = 80 Гц. Найдите закон изменения скорости груза при этих колебаниях.

3. На груз пружинного маятника в некоторых момент времени (далее $t \equiv 0$) начинает действовать вертикальная сила, изменяющаяся по закону $F_x(t)=F_0\cdot\sin(\Omega t)$. Сопротивление среды полностью отсутствует, а частота вынуждающей силы Ω в два раза больше собственной частоты маятника ω_0. При каких начальных условиях (смещении и скорости груза в момент t = 0) колебания груза с самого начала будут происходить только на частоте Ω?

4. Груз пружинного маятника с массой m = 200 г совершает вертикальные колебания на пружине с k = 500 Н/м в присутствии силы сопротивления воздуха, линейной по скорости $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, где α = 5 кг/с. Сначала маятник находился в равновесии, но в некоторых момент времени (далее $t \equiv 0$) на него начинает действовать вертикальная сила, изменяющаяся по закону $F_x(t)=F_0\cdot\sin(\Omega t)$, где F_0 = 5 Н, а Ω = 25 Гц. Найдите закон движения груза в интервале времен от 4 с до 5 с.

5. Для груза из предыдущей задачи найдите закон движения в течении двух первых периодов воздействия вынуждающей силы.

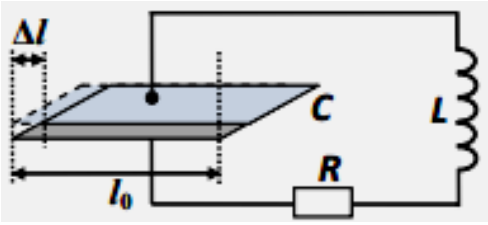
курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 6D: Параметрическое возбуждение и связанные колебания.

Темы: Параметрическое возбуждение колебаний в контуре. Системы связанных контуров. Нормальные моды колебаний в контуре.

Если в колебательном контуре, в котором происходят электромагнитные колебания, внешним воздействием изменять параметры контура (например, изменять емкость конденсатора, передвигая его обкладки), то это будет влиять на колебания. Это влияние можно использовать для управления колебаниями: «запускать» их из равновесного состояния (такой способ называют *параметрическим возбуждением* колебаний), усиливать их (в этом случае говорят о *параметрическом усилении*) или поддерживать колебания незатухающими при наличии диссипации энергии.

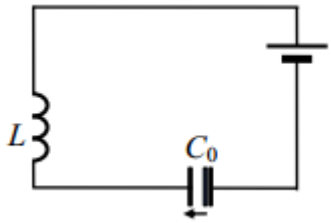
Пример 1: Колебательный контур из катушки с индуктивностью L = 0,01 Гн и плоского воздушного конденсатора емкостью C = 100 мкФ не является идеальным: его сопротивление отлично от нуля и равно R = 0,1 Ом. Для поддержания колебаний в контуре незатухающими используется следующий способ «подкачки» энергии: два раза за период в моменты, когда модуль заряда конденсатора максимален, одну из пластин конденсатора быстро (за время, существенно меньшее периода колебаний) сдвигают параллельно другой вдоль стороны длиной L, уменьшая площадь их перекрытия, а в моменты, когда заряд равен нулю, ее возвращают обратно. Найдите (в процентах) величину необходимого сдвига $\Delta l/l_0$.



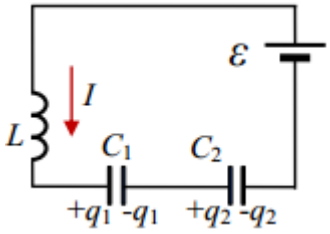
Решение: Отметим сразу, что $\sqrt{\frac{L}{C}} = 10\,\text{Ом}$, то есть $R << \sqrt{\frac{L}{C}}$. Это означает, что сопротивление контура, пусть и отличное от нуля, является малым, и в отсутствие «подкачки» затухание колебаний было бы медленным. Значит, необходимые сдвиги малы и закон изменения тока в контуре близок к гармоническому. При сдвиге пластины емкость конденсатора уменьшается пропорционально площади перекрытия пластин, то есть $\frac{\Delta C}{C} = -\frac{\Delta l}{l_0}$. Поскольку это происходит «очень быстро», то заряд в контуре не успевает переместиться, и заряд конденсатора равен амплитудному значению $q = \pm q_m$. Поэтому в процессе сдвига пластины внешние силы совершают работу, увеличивающие энергию конденсатора на $\Delta W = \frac{q_m^2}{2(C+\Delta C)} - \frac{q_m^2}{2C} \approx \frac{q_m^2}{2C}\frac{(-\Delta C)}{C} = W_m \frac{\Delta l}{l_0}$. Здесь W_m – полная электромагнитная энергия контура. При обратном сдвиге энергия конденсатора не изменяется, так как он имеет нулевой заряд. Для поддержания колебаний незатухающими два таких приращения должны компенсировать тепловые потери на резисторе за период колебаний. Поскольку закон изменения силы тока практически гармонический, среднее значение квадрата силы тока за период равно половине от квадрата амплитудного значения: $Q = R\frac{1}{2}I_m^2 \cdot T = \frac{R}{L}\frac{LI_m^2}{2}2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{L}}W_m$. Таким образом, уравнение энергетического баланса $Q = 2\Delta W$ приводит к требованию $\frac{\Delta l}{l_0} = \pi\frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{L}} \approx 3{,}14\%$.

Пример 2: В схеме, показанной на рисунке, плоский воздушный конденсатор состоит из трех тонких проводящих пластин, две из которых вначале плотно прижаты друг к другу (образуя обкладку, подключенную к отрицательному полюсу источника с ЭДС $\mathcal{E}$).

Затем одну из них отрывают от другой, и с постоянной скоростью v переносят к пластине, соединенную (через катушку) с положительным полюсом источника. Известно, что расстояние между обкладками в начальном состоянии равно d, а начальная емкость конденсатора равна C_0. Кроме того, оказалось, что за все время переноса пластины ток в контуре монотонно рос. Чему может быть равна индуктивность катушки? Сопротивление контура пренебрежимо мало.



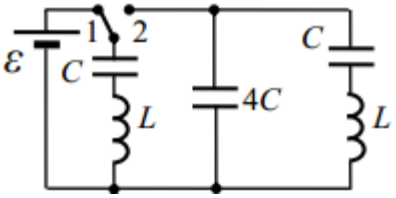
Решение: При переносе пластины конденсатор «превращается» в два, последовательно соединенных (две стороны переносимой пластины становятся соединенными обкладками), и эффективная схема показана на рисунке. Ясно, что перед отрывом на переносимой пластине находился заряд $-C_0\mathcal{E}$, поэтому из закона сохранения заряда следует, что для любого момента времени до окончания переноса $+q_2-q_1=-C_0\mathcal{E}$, то есть $q_2(t)=q_1(t)-C_0\mathcal{E}$. Пусть I – ток зарядки конденсатора 1: $I=\dfrac{dq_1}{dt}$. Тогда напряжение на индуктивности $U_L=+L\dfrac{dI}{dt}$, и условие баланса напряжений имеет вид $L\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{q_1}{C_1}+\dfrac{q_2}{C_2}=\mathcal{E}$. Емкость изначального плоского конденсатора равна $C_0=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$, где S – площадь его пластин, а емкости «составляющих» конденсаторов $C_1=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-vt}=C_0\dfrac{d}{d-vt}$ и $C_2=\dfrac{\varepsilon_0 S}{vt}=C_0\dfrac{d}{vt}$. Подставив эти значения в уравнение баланса, получаем: $\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{1}{C_0L}\left[\left(1-\dfrac{v}{d}t\right)q_1+\dfrac{v}{d}tq_2\right]=\dfrac{1}{L}\mathcal{E}$, и с учетом связи зарядов, $\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{q_1}{C_0L}=\dfrac{1}{L}\mathcal{E}\left(1+\dfrac{v}{d}t\right)$. Это уравнение выглядит сложно, однако нам нужно следить только за поведением силы тока. Продифференцировав его по времени, получим знакомое уравнение $I_t''+\dfrac{1}{C_0L}I=\dfrac{v}{d}\dfrac{\mathcal{E}}{L}$. Ясно, что при переходе к новой функции $I(t)=\dfrac{v}{d}C_0\mathcal{E}+\tilde{I}(t)$ мы получаем стандартное уравнение колебаний $\tilde{I}_t''+\dfrac{1}{C_0L}\tilde{I}=0$, и поэтому $I(t)=\dfrac{v}{d}C_0\mathcal{E}+A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$, где $\omega=\dfrac{1}{C_0L}$. При этом вначале тока в цепи не было ($I(0)=0$) и из уравнения для производной тока следует, что $I'(0)=\dfrac{1}{L}\mathcal{E}-\dfrac{q_1(0)}{C_0L}=0$. Поэтому $I(t)=\dfrac{v}{d}C_0\mathcal{E}[1-\cos(\omega t)]$, и монотонный рост имеет место, если $t=\dfrac{d}{v}\le\dfrac{\pi}{\omega}=\pi\sqrt{C_0L}$. Таким образом, $L\ge\dfrac{d^2}{\pi^2v^2C_0}$. Если бы нам сообщили конечное значение монотонно растущей силы тока $I_f\le 2\dfrac{v}{d}C_0\mathcal{E}$, то мы бы нашли индуктивность точно: $L=\dfrac{d^2}{v^2C_0}\arccos^{-2}\left(1-\dfrac{I_f d}{vC_0\mathcal{E}}\right)$.



Если у нас есть система двух и более колебательных контуров с электрической либо магнитной связью, то мы имеем дело со «сложной» колебательной системой, или *системой связанных контуров*. Точно так же, как при механических колебаниях,

колебание сложной системы можно представить как наложение нескольких *нормальных мод* колебаний с разными частотами. Напомним, что нормальная мода колебаний сложной системы отвечает процессу, при котором «запуск» колебаний в системе произведен таким образом, что во всех ее элементах колебания происходят с одной и той же частотой (частоты, для которых это возможно, называют *нормальными частотами* данной системы). В случае электромагнитных колебаний (как и в случае механических) при поиске нормальных мод нужно учитывать симметрию рассматриваемой системы.

Пример 3: («**Нарушенная симметрия (олимпиада “ПВГ!”)**») В одном из своих изобретений Клапауций использовал симметричный «двойной» колебательный контур, схема которого вместе со схемой устройства для запуска колебаний показана на рисунке. При использовании контура ключ сначала переводится в положение 1, а затем электронное устройство переводит ключ в положение 2 в момент, когда заряд «левого» конденсатора достиг максимального значения. Найти закон изменения заряда на «правом» конденсаторе после этого момента времени. До начала использования все конденсаторы были разряжены. Сопротивлениями всех элементов схемы на рассматриваемых интервалах времени можно пренебречь, остальные их параметры показаны на рисунке.

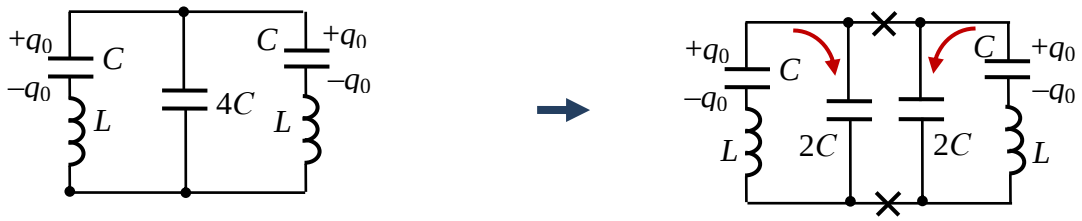


Решение:

Рассмотрим сначала процессы, протекающие в схеме после перевода ключа в положение 1. В контуре, содержащем источник, «левый» конденсатор и катушку, возникнут колебания. Так как сопротивления пренебрежимо малы, то эти колебания будут слабозатухающими (то есть практически гармоническими). Колебания заряда на конденсаторе будут происходить вокруг равновесного значения (очевидно соответствующего $q_0 = C\mathcal{E}$). Так как начальный ток равен нулю, то амплитуда этих колебаний равна величине начального отклонения заряда ($q = 0$) от равновесного, то есть q_0. Таким образом, максимальная величина заряда на «левом» конденсаторе в ходе этих колебаний примерно равна $2q_0$. В этот момент ток в катушке равен нулю (он равен нулю в моменты, когда заряд конденсатора проходит через максимум).

После перевода ключа в положение 2 (далее момент $t = 0$) начинаются колебания в «двойном» контуре. Начальные условия для этих колебаний таковы: токи в катушках равны нулю, «правый» и «средний» конденсаторы не заряжены, заряд «левого» конденсатора равен $2q_0$. Сама схема симметрична по отношению к замене «право-лево», но начальные условия нарушают эту симметрию. Рассмотрим два других процесса колебаний для других, более симметричных начальных условий:

А) «Правый» и «левый» конденсаторы заряжены одинаково. В этом случае удобно заменить «средний» конденсатор емкостью $4C$ на два параллельно соединенных конденсатора с емкостями по $2C$ каждый (см. рисунок):



Ясно, что здесь «крайние» конденсаторы в силу полной симметрии будут синхронно заряжать «средние», и напряжения на «средних» в любой момент времени будут одинаковы. Это значит, что токи по соединяющим их проводам течь не будут, и поэтому их можно удалить без изменения токов в других элементах схемы. Таким образом, закон колебания заряда на «правом» конденсаторе для таких начальных условий совпадает с законом колебаний в одном «правом» контуре, составленном из последовательно соединенных конденсаторов C и $2C$ и катушки индуктивности L. С учетом направления

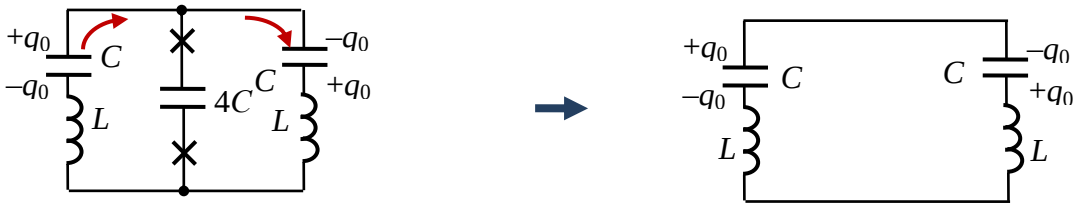
движения зарядов будем считать, что полярности включения конденсаторов противоположны, и уравнение баланса напряжений в контуре $\frac{q_1}{C}-\frac{q_2}{2C}+L\frac{dI}{dt}=0$, где $I\equiv\frac{dq_1}{dt}$. С учетом закона сохранения заряда для пары соединенных обкладок двух конденсаторов $q_1+q_2=const=q_0$ получаем, что для любого момента времени $q_2=q_0-q_1$, и поэтому уравнение колебаний заряда конденсатора C имеет вид:

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}+\frac{3}{2CL}q_1=\frac{q_0}{2CL}.$$

Как видно, заряд интересующего нас конденсатора совершает гармонические колебания с частотой $\omega_A=\sqrt{\frac{3}{2CL}}$ вокруг значения $\frac{q_0}{3}$ (подстановка $q_1(t)=\frac{q_0}{3}+\tilde{q}(t)$ приводит это уравнение к стандартному уравнению гармонических колебаний $\tilde{q}''+\omega_A^2\tilde{q}=0$). С учетом начальных условий ($q_1(0)=q_0$, $I(0)=0$) получаем:

$$q_1^{(A)}(t)=\frac{q_0}{3}+\frac{2q_0}{3}\cos(\omega_A t).$$

В) «Правый» и «левый» конденсаторы заряжены противоположно. Теперь токи в ветвях с этими конденсаторами противоположны, и поэтому в ветви со «средним» конденсатором



ток всегда равен нулю, и его можно убрать из схемы. Последовательно соединенные конденсаторы C оказываются в данном контуре эквивалентны одному конденсатору емкостью $\frac{C}{2}$, а две последовательно соединенные катушки L – одной с индуктивностью $2L$. В этом контуре возникают гармонические колебания с частотой $\omega_B=\frac{1}{\sqrt{CL}}$, а заряд «правого» конденсатора изменяется по закону $q_1^{(B)}(t)=-q_0\cos(\omega_B t)$.

Теперь можно заметить, что начальные условия для колебаний в нашем случае есть в точности сумма начальных условий для случаев (А) и (В). Значит,

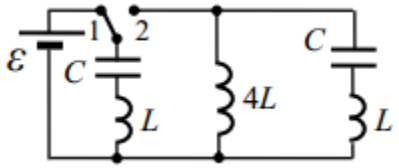
$$q_{пр}(t)=q_1^{(A)}(t)+q_1^{(B)}(t)=\frac{q_0}{3}+\frac{2q_0}{3}\cos(\omega_A t)-q_0\cos(\omega_B t).$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. **(МОШ)** Колебательный контур состоит из разнесенных в пространстве катушки индуктивности L с малым сопротивлением и плоского воздушного конденсатора емкостью C, расстояние между пластинами которого равно d. Пластины конденсатора не заряжены, ток в катушке не течет. За время $\tau<<\sqrt{LC}$ в области пространства, где находится конденсатор, создали однородное электрическое поле с напряженностью E, направленное перпендикулярно пластинам конденсатора. Катушка при этом осталась вне электрического поля. Найдите максимальную силу тока в контуре после этого.

2. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью L = 0,1 Гн, конденсатора емкостью C = 1 мФ и резистора с сопротивлением R = 0,1 Ом. Для поддержания в этом контуре электромагнитных колебаний с почти неизменной амплитудой силы тока I_m = 5 А с помощью внешнего электромагнита один раз за период в области расположения катушки за время τ = 0,5 мс включают магнитное однородное поле с индукцией B и позже за такое же время выключают. Включение производится в момент, когда тук в катушке равен амплитудному значению и внешнее поле противоположно по направлению магнитному полю тока в катушке, а выключение – когда сила тока в катушке проходит через ноль. Число витков в катушке N = 500, площадь сечения ее сердечника равна S = 10 см^2. Найти необходимую величину B.

3. В схеме, показанной на рисунке, ключ сначала из нейтрального положения переведен в положение 1, а затем – в положение 2. Переключение произведено в момент, когда заряд «левого» (по схеме) конденсатора имел максимальную величину. Найти закон изменения заряда на этом конденсаторе после такого переключения. Сопротивлениями всех элементов схемы на рассматриваемом интервале времени можно пренебречь.



4*. Для схемы из предыдущей задачи с закороченными контактами 1 и 2 и подключением ключа к их соединению исследовать зависимость тока в ветви с источником от времени на некотором промежутке времени после включения, если источник постоянной ЭДС заменен на источник переменного напряжения $U(t) = U_m \sin\left(\frac{t}{12\sqrt{LC}}\right)\sin\left(\frac{5t}{12\sqrt{LC}}\right)$.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 7D: Комплексные числа и метод комплексных амплитуд.

Темы: Комплексные числа. Формы записи и свойства комплексных чисел. Описание сложения когерентных колебаний с помощью метода комплексных амплитуд.

Комплексные числа появились в математике при анализе алгебраических уравнений. Даже в простом случае квадратных уравнений при использовании вещественных чисел мы обнаруживаем, что некоторые из уравнений (с отрицательным дискриминантом) не имеют решений. Но мы можем определить новое число – «*мнимую единицу*», равную $i \equiv \sqrt{-1}$, и расширить множество вещественных чисел R^1 до множества *комплексных чисел* C^1 $z = x + iy$. каждое из которых состоит из *вещественной* $x \in R^1$ и *мнимой* $y \in R^1$ частей, и договориться о способе сложения и перемножения таких чисел:

$$z_1 + z_2 = x_1 + i\,y_1 + x_2 + i\,y_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i\,y_1)\cdot(x_2 + i\,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

Тогда мы обнаруживаем, что квадратное уравнение с вещественными коэффициентами $x^2 + px + q = 0$ всегда имеет два решения $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, но при $\frac{p^2}{4} - q > 0$ это два различных вещественных корня, при $\frac{p^2}{4} - q = 0$ — два совпадающих (*кратных*) вещественных корня, а при $\frac{p^2}{4} - q < 0$ – два комплексных корня $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Во всех случаях $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - z_2)$.

Более детальный анализ показывает, что любое алгебраическое уравнение *N*-ой степени в множестве комплексных чисел имеет *N* корней (хотя среди них тоже бывают кратные) – правую часть такого уравнения всегда можно записать в виде $x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - z_1)^{k_1}\cdot(x - z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x - z_K)^{k_K}$, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_K = N$.

Как и в случае квадратных уравнений, в случае уравнений с вещественными коэффициентами комплексные корни всегда “появляются парами”: в этом случае наряду с корнем $z = x + i\,y$ есть также корень $z^* = x - i\,y$ (число z^* называют *комплексно сопряженным* к z). Отметим также обозначения для вещественной и мнимой частей комплексного числа $x \equiv \mathrm{Re}(z)$ и $y \equiv \mathrm{Im}(z)$ и что перемножение сопряженных чисел дает вещественное неотрицательное число: $z \cdot z^* = x^2 + y^2 \equiv |z|^2$. Величина $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа. Удобно использовать «домножение» на сопряженное число при делении комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 1: Заданы комплексные числа: $z_1 = 3+4i$ и $z_2 = 4+3i$. Вычислить: $z_1 \cdot z_2$ и z_1/z_2.

Решение: Используя введенные операции:

$$z_1 \cdot z_2 = (3+4i)\cdot(4+3i) = 12 + 9i + 16i - 12 = 25i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{4+3i} = \frac{(3+4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{12 - 9i + 16i + 12}{16+9} = \frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$$

Изучая свойства комплексных чисел, математики обнаружили много интересного, и научились с их помощью строить компактные методы решений многих задач. Для наших целей очень важно следующее: если определить показательную функцию на множестве комплексных чисел, сохранив ее свойства, то для любого вещественного α будет справедлива *формула Эйлера*: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Тогда для любого комплексного числа $e^z = e^{x+iy} = e^x[\cos y + i\sin y]$. Кроме того, становится возможной запись любого комплексного числа записать в *тригонометрической* и *показательной* (экспоненциальной) формах:

$$z = x + i\,y = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \equiv |\,z\,|\,[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)] = |\,z\,|\cdot e^{i\varphi}.$$

Как видно, $\cos(\varphi) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\sin(\varphi) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Величину называют φ аргументом (фазой) комплексного числа. В записи это утверждение выглядит так: $\varphi = Arg(z)$.

Пример 2: $z = \sqrt{3} + 3i$. Вычислить $\sqrt{z}$.

Решение: Используем преобразование z в показательную форму:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\sqrt{3}+3i} = \sqrt{\sqrt{12}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \sqrt{2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{e^{i\pi/3}} = \sqrt{2\sqrt{3}}\cdot e^{i\pi/6} = \sqrt{2\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3^{3/4}}{2^{1/2}} + \frac{3^{1/4}}{2^{1/2}}i$$

Отметим, что при вычислении дробных степеней возникает «естественная» неоднозначность результата: в выражение под степенью всегда можно добавить множитель $1 = e^{\pm i\cdot 2\pi}$. Однако после вычисления дробной степени этот множитель перестает быть равным 1 и может дать нам другие комплексные числа, которые при возведении в обратную степень дают основание степени. Например, в рассмотренном случае число $\sqrt{3}+3i$ получится при возведении в квадрат еще и числа $-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

При работе в множестве вещественных чисел для квадратного корня мы обычно договаривались, что берем в качестве его значения только положительное вещественное число. Но в множестве комплексных чисел у нас нет «положительных» чисел, так что тут для однозначности определения нужны другие договоренности. Часто просто рассматривают все возможные значения. Например:

$$\sqrt[3]{i} = \begin{cases} (e^{i\pi/2})^{1/3} = e^{i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ (e^{-i\cdot 3\pi/2})^{1/3} = e^{-i\pi/2} = -i \\ (e^{i\cdot 5\pi/2})^{1/3} = e^{i\cdot 5\pi/6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{cases}$$

Соединение в одном комплексном числе модуля (амплитуды) и аргумента (фазы) позволяет эффективно использовать их для решения задачи о сложении когерентных колебаний (напомним – так называют колебания одинаковой частоты с постоянной разностью фаз). Как мы знаем, при сложении двух гармонических колебаний одной частоты $u_1\cos(\omega t + \varphi_1) + u_2\cos(\omega t + \varphi_2) \equiv u\cos(\omega t + \varphi)$ амплитуда и фаза суммарного колебания определяются соотношениями

$$\begin{cases} u\cos(\varphi) = u_1\cos(\varphi_1) + u_2\cos(\varphi_2) \\ u\sin(\varphi) = u_1\sin(\varphi_1) + u_2\sin(\varphi_2) \end{cases}$$

Если для каждого колебания заданной частоты $u(t) = u\cos(\omega t + \varphi)$ ввести его ***комплексную амплитуду*** $A \equiv u \cdot e^{i\varphi}$, то, складывая комплексные амплитуды по правилу сложения комплексных чисел , обнаруживаем:

$$A_1 + A_2 = u_1 \cdot e^{i\varphi_1} + u_2 \cdot e^{i\varphi_2} = u_1\cos(\varphi_1) + u_2\cos(\varphi_2) + i[u_1\sin(\varphi_1) + u_2\sin(\varphi_2)] = u \cdot e^{i\varphi} = A.$$

Таким образом, использование этого метода позволяет находить параметры суммарного колебания. Ясно, что так можно сложить любое число колебаний.

Одно из возможный использований метода – анализ цепей переменного тока. При записи уравнений баланса напряжений и непрерывности токов для установившихся колебаний в цепи нам как раз и нужно уметь складывать когерентные колебания. Кроме того, при изучении поведения в цепях переменного тока стандартных элементов (резисторов, конденсаторов и катушек индуктивностей) мы видели, что амплитуды напряжения и сил тока связаны через активное, емкостное или индуктивное сопротивления $U_m = X \cdot I_m$, и разность фаз колебаний напряжения и силы тока имеет определенное значение. Поэтому можно для каждого элемента ввести *комплексное сопротивление* (*импеданс*) $Z = X \cdot e^{i\Delta\varphi}$, которое будет содержать информацию и о сопротивлении элемента, и о фазовом сдвиге между силой тока и напряжением. Тогда можно записывать уравнения баланса напряжений и непрерывности токов непосредственно на языке комплексных амплитуд. Найдем для дальнейшего комплексные сопротивления для стандартных элементов цепей переменного тока:

- резистор: $Z_R = R$;
- катушка индуктивности: $Z_L = \omega L \cdot e^{i\pi/2} = i\omega L$;
- конденсатор: $Z_C = \dfrac{1}{\omega C} \cdot e^{-i\pi/2} = \dfrac{1}{i\omega C}$.

Комплексные сопротивления для участка цепи, составленного из этих элементов, вычисляются по обычным правилам параллельных и последовательных соединений.

Пример 3: Вычислить комплексные сопротивления параллельного и последовательного соединения конденсатора с емкостью C и катушки с индуктивностью L в цепи переменного тока с циклической частотой ω.

Решение: По правилам параллельного и последовательного соединения:

$$Z_{посл} = Z_L + Z_C = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = i\frac{LC\omega^2 - 1}{\omega C},\ Z_{пар} = \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{i\omega L \cdot \dfrac{1}{i\omega C}}{i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} = i\frac{\omega L}{1 - LC\omega^2}.$$

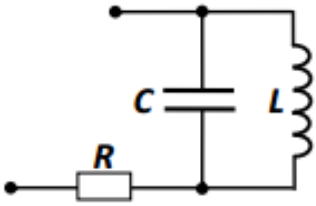
Задачи для самостоятельного решения.

1. Заданы комплексные числа: $z_1 = (5+12i)/13$ и $z_2 = (12+5i)/13$. Вычислить: $z_1 \cdot z_2$ и z_1/z_2.

2. Вычислить все возможные значения в множестве комплексных чисел $(i)^{1|5}$.

3. Найти все возможные корни уравнений $z^3+3z^2+z-5 = 0$ и $z^4-4z^3+6z^2-4z+5 = 0$ в множестве комплексных чисел.

4. Найти комплексное сопротивление участка цепи переменного тока с циклической частотой ω, показанного на рисунке.



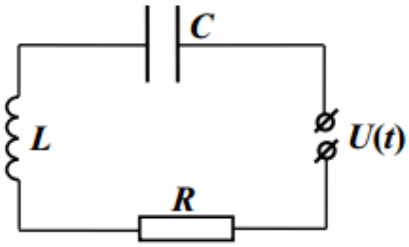
курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 8D: Расчет цепей переменного тока методом комплексных амплитуд.

Темы: Комплексное сопротивление. Запись уравнений баланса напряжений и непрерывности тока в случае синусоидальных токов. Расчет цепей синусоидального тока.

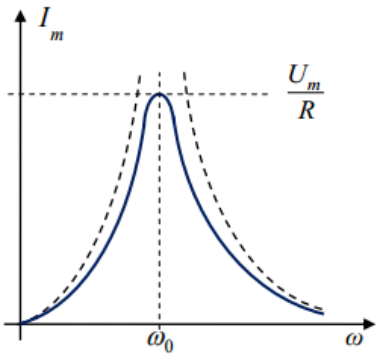
Один из эффектных и одновременно эффективных примеров использования комплексных чисел – это применение *метода комплексных амплитуд* для расчета цепей *синусоидального* (то есть гармонического) тока. Как мы знаем, сложение когерентных гармонических колебаний (то есть определение амплитуды и фазы суммарного колебания по амплитудам и фазам складываемых колебаний) можно выполнять путем простого сложения *комплексных амплитуд* $A \equiv u \cdot e^{i\varphi}$. В результате расчет *линейных* цепей синусоидального тока, в которых происходит установившееся вынужденное колебание токов и напряжений с единой частотой внешнего источника гармонического напряжения производится точно так же, как и расчет линейных цепей постоянного тока, но на языке комплексных амплитуд. Для связи комплексных амплитуд колебаний тока и напряжения на каждом элементе цепи (обычно это резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы) используются *комплексные сопротивления* (*импедансы*) $Z_R = R$, $Z_L = i\omega L$ и $Z_C = \dfrac{1}{i\omega C}$. Посмотрим, как работает этот метод.

Пример 1: Произведем расчет установившихся колебаний силы тока для в «последовательном колебательном контуре» (схеме, составленной из резистора, катушки и конденсатора – см. рисунок) при подключении к источнику синусоидального напряжения $U(t) = U_m \cos(\omega t)$.



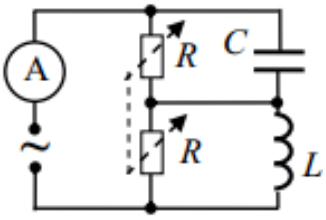
Решение: Комплексное сопротивление цепи $Z = R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$. Комплексная амплитуда силы тока $I_m = \dfrac{U_m}{Z} = \dfrac{U_m}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}\left[R - i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)\right] = \dfrac{U_m \cdot e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$.

Таким образом, мы получаем те же результаты, что и в методе векторных диаграмм (занятие 26): амплитуда тока в контуре $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$, а сдвиг фаз между током и напряжением $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1 - \omega^2 LC}{\omega CR}\right)$. Поведение амплитуды силы тока в зависимости от частоты описывается уже знакомой нам резонансной кривой, а зависимость силы тока от времени $I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.



В некоторых случаях метод комплексных амплитуд дает очень значительное упрощение вычислений.

Пример 2: Стенд для измерения индуктивности имеет схему, показанную на рисунке. Она состоит из конденсатора известной емкости *C*, сдвоенного реостата, амперметра и генератора гармонического напряжения, частоту которого можно менять в широких пределах. Процесс измерения сводится к установлению такого (одинакового) значения сопротивления каждого из



реостатов, при котором показания амперметра перестают изменяться при изменении частоты генератора. Зная амплитуды напряжения генератора U_m и тока в ветви с амперметром I_m, найти измеряемую индуктивность L.

Решение: Комплексное сопротивление цепи (амперметр в ней считаем идеальным) считаем как сопротивление двух последовательно соединенных параллельных пар:

$$Z = \frac{R \cdot \frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} + \frac{R \cdot i\omega L}{R + i\omega L} = R\left(\frac{1}{1 + i\omega CR} + \frac{i\omega L}{R + i\omega L}\right).$$

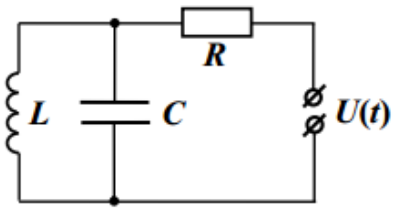
Это выражение устроено довольно сложно, но можно сообразить, что если при нужном нам значении индуктивности оно в широком диапазоне значений частоты равно его значению при $\omega \to 0$, то есть R, и при этом эту величину можно найти через отношение амплитуд напряжения и силы тока $R = \frac{U_m}{I_m}$. Значит, выражение в скобках должно равняться 1 при любом ω. Запишем это требование:

$$0 = \frac{1}{1 + i\omega CR} - 1 + \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = i\omega\left(\frac{-CR}{1 + i\omega CR} + \frac{L}{R + i\omega L}\right) = i\omega \frac{L - CR^2}{(1 + i\omega CR)(R + i\omega L)}.$$

Как видно, оно сводится к $L = CR^2 = C\left(\frac{U_m}{I_m}\right)^2$. Это и есть ответ на вопрос задачи. Попробуйте для сравнения решить эту задачу методом векторных диаграмм.

Важно понимать, что в рассматриваемом методы мы исследуем именно режим установившихся колебаний. В реальности при подключении цепи к источнику переменного напряжения все начинается со смеси собственных и вынужденных колебаний, и установившийся режим возникает спустя некоторое время, когда собственные колебания уже затухают. Если время затухания собственных колебаний велико (и особенно если затухание вообще отсутствует), или если мы исследуем поведение схемы сразу после подключения источника, прямолинейное использование метода комплексных амплитуд может приводить к кажущимся противоречиям.

Пример 3: В схеме, показанной на рисунке, циклическая частота внешнего источника синусоидального напряжения $U(t) = U_m \cos(\omega t)$ в точности равна $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Определите амплитуду колебаний тока в катушке в установившемся режиме и сдвиг его по фазе относительно входного напряжения.



Решение: Если найти стандартным образом комплексную амплитуду силы тока в цепи, результат получится несколько странным:

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{1 - \omega^2 LC}{R(1 - \omega^2 LC) + i\omega L} U_m,$$

и при заданном значении частоты она обращается в ноль! На первый взгляд, тут какая-то ошибка. Однако из этого затруднения можно выйти, если вспомнить, что этот расчет дает нам установившееся значение силы тока через резистор. Получается, что в установившемся режиме через резистор ток не течет, и напряжение на нем тождественно равно нулю. Но это означает, что напряжение на параллельно соединенных катушке и конденсаторе равно напряжению на источнике. Значит, комплексная амплитуда силы тока в катушке $I_m^{(L)} = \frac{U_m}{i\omega L} = U_m \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-i\pi/2}$. Амплитуда колебаний силы тока в катушке равна $U_m \sqrt{\frac{C}{L}}$, и ток

отстает по фазе от внешнего напряжения на $\frac{\pi}{2}$, то есть $I_L(t) = U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\sin(\omega t)$. Отметим, что при этом комплексная амплитуда силы тока через конденсатор $I_m^{(C)} = i\omega C U_m = U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot e^{i\pi/2}$, то есть $I_C(t) = -U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\sin(\omega t)$. То есть в установившемся режиме ток в резисторе отсутствует, а в LC-контуре циркулирует вынужденный синусоидальный ток с амплитудой, не зависящей от величины сопротивления резистора! Как же возникло столь странное состояние схемы и нет ли здесь какой-либо ошибки? Для ответа на этот вопрос придется выйти за рамки применимости нашего метода, то есть «честно» найти закон изменения токов в этой схемы при некоторых заданных начальных условиях.

Приложение*: расчет тока через катушку процессе установления колебаний.
В этой схеме в любой момент времени должно выполняться условие непрерывности тока $I_R(t) = I_L(t) + I_C(t)$ и условия баланса напряжений. На конденсаторе и катушке напряжения одинаковы, то есть $\frac{q}{C} = L\frac{dI_L}{dt}$, и после дифференцирования получаем из него условие связи токов $I_C = LC\frac{d^2 I_L}{dt^2}$. Напряжение на источнике $U(t) = R\cdot I_R(t) + L\frac{dI_L}{dt}$. Подставив в это соотношение I_R из условия непрерывности и I_C из условия связи, получаем уравнение для силы тока в катушке: $\frac{d^2 I_L}{dt^2} + 2\gamma\frac{dI_L}{dt} + \omega^2 I_L = \frac{U_m}{LCR}\cos(\omega t)$, где $\gamma \equiv \frac{1}{2CR}$, и использовано совпадение частот $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Это уравнение – уже знакомое нам уравнение затухающих колебаний с вынуждающей силой, и его решение в общем случае состоит из затухающего собственного колебания и вынужденного колебания: $I_L(t) = e^{-\gamma t}[A\cdot\cos(\tilde{\omega}t) + B\cdot\sin(\tilde{\omega}t)] + U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\sin(\omega t)$. Здесь $\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, а постоянные подбираются из начальных условий. Отметим, что вид частного решения неоднородного уравнения получился очень простым именно из-за совпадения внешней частоты с «собственной»: при подстановке гармонической функции частоты ω в уравнение слагаемые с функцией и ее второй производной сокращаются, и мы видим, что первая производная от должна быть именно косинусом! Пусть при подключении в момент токи в схеме отсутствовали и напряжение на катушке равнялось нулю, то есть $I_L(0) = 0$ и $\frac{dI_L}{dt}(0) = 0$.

Тогда $A = 0$ и $B = -\frac{\omega}{\tilde{\omega}}U_m\sqrt{\frac{C}{L}}$, то есть

$$I_L(t) = U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\tilde{\omega}}e^{-\gamma t}\sin(\tilde{\omega}t)\right] \xrightarrow[t>>1/\gamma]{} U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\sin(\omega t).$$

Мы получили в точности тот же результат для установившегося колебания тока, что и в методе комплексных амплитуд! Как видно, на самом деле ток зависит от сопротивления резистора, но эта зависимость «исчезает» в пределе установившихся колебаний. Используя выражение для токов в других элемента схемы, найдем:

$$I_C(t) = -U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\left\{\sin(\omega t) - \frac{e^{-\gamma t}}{\omega\tilde{\omega}}\left[(\omega^2 - 2\gamma^2)\sin(\tilde{\omega}t) + 2\gamma\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t)\right]\right\} \xrightarrow[t>>1/\gamma]{} -U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\sin(\omega t),$$

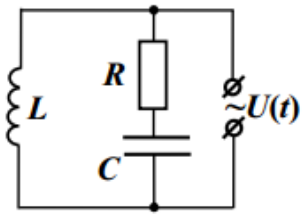
и $I_R(t) = U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{e^{-\gamma t}}{\omega\tilde{\omega}}\left[2\gamma\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t) - \gamma^2\sin(\tilde{\omega}t)\right] \xrightarrow[t>>1/\gamma]{} 0$.

На самом деле не все так просто, как теперь может показаться. Например, анализ предела $R \to 0$ нужно производить очень аккуратно: хотя кажется, что предел $t >> \gamma^{-1} = 2CR$ не

зависит от R, но в действительности необходимо понимать, что наши вычисления были проведены для случая $\gamma < \omega$, а в пределе $R \to 0$ это требование не выполняется, и нам нужно анализировать этот случай отдельно! Кроме того, следует отметить, что в самом *LC*-контуре у нас по условию также отсутствует сопротивление. Это означает, что если в начальные условия включить неравновесное состояние контура, то свободные колебания будут постоянно происходить на фоне вынужденных (математики говорят, что решение этой задачи неустойчиво относительно изменения начальных условий).

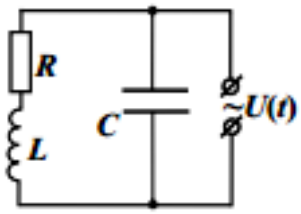
Задачи для самостоятельного решения.

1. Схема из конденсатора с емкостью *C*, катушки с индуктивностью *L* и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а также резистора с сопротивлением *R* = 100 Ом подключена к источнику синусоидального напряжения с амплитудой U_m = 220 В. Известно, что циклическая частота внешнего напряжения в точности равна $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Кроме того, параметры схемы связаны соотношением $\sqrt{\frac{L}{C}} = R$. Найдите амплитуду общего тока и сдвиг фаз между этим током и напряжением.

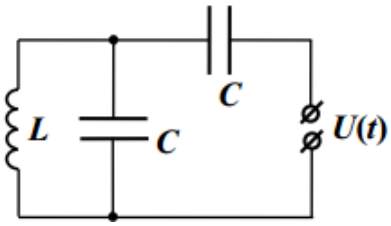


2. Ведро с водой при нормальном атмосферном давлении закипает за время $t_1 = 8$мин, если в него опустить кипятильник в форме спирали с индуктивностью $L = 0{,}02$Гн и активным сопротивлением $R = 5$ Ом, включенным в сеть переменного синусоидального напряжения с частотой $\nu = 50$ Гц. За какое время закипит и наполовину выкипит вода в ведре, если два таких кипятильника соединить последовательно и подключить к источнику постоянного напряжения, величина которого равна амплитудному значению переменного напряжения? Начальная температура воды в обоих случаях одинакова и равна 20ºС. Удельная теплоемкость воды $c \approx 4{,}2$ Дж/г, удельная теплота парообразования $r \approx 2352$Дж/г.

3. Схема из конденсатора с емкостью *C*, катушки с индуктивностью *L* и омическим сопротивлением *R* = 48 Ом подключена к источнику синусоидального напряжения с амплитудой U_m = 300 В. Известно, что циклическая частота внешнего напряжения в точности равна $\omega = \frac{3}{5\sqrt{LC}}$, а параметры схемы связаны соотношением $\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{5}{4}R$. Найдите амплитуду силы общего тока (в ветви с источником) и сдвиг фаз между этим током и внешним напряжением.



4.*Исследовать поведение в установившемся режиме схемы, показанной на рисунке, для двух значений циклической частоты источника синусоидального напряжения $U(t) = U_m \cos(\omega t)$: $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$.



курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 9D: Волны.

Темы: Характеристики волновых процессов. Волновое уравнение. Суперпозиция волн.

Волна – процесс распространения колебаний в пространстве. Само колебание при этом может быть самой разной природы: колебания поверхности жидкости, точки натянутой струны, давления газа, напряженности электрического поля и т.д.. Однако все волновые процессы имеют общие черты.

Основные понятия и определения:

Продольные (поперечные) волны – волны, колебания в которых происходят вдоль (поперек) направления распространения волны. Продольными волнами являются звуковые волны в газах и жидкостях (колебания давления – сгущения и разряжения) и часть звуковых волн в твердых телах (упругие колебания сжатия – растяжения, подобные колебаниям пружины). Поперечные волны – колебания натянутой струны, звуковые волны «смещения» в твердых телах, электромагнитные волны. В некоторых случаях движение частиц среды, в которой распространяется волна, более сложно и может рассматриваться как суперпозиция продольных и поперечных движений (к этому типу относятся, например, волны на поверхности воды).

Фронт волны – при качественном рассмотрении его определяют как поверхность, которой достигают распространяющиеся колебания к фиксированному моменту времени.

Плоские (сферические,…) волны – волны с соответствующей формой волнового фронта.

Амплитуда, фаза, частота, волновое число – характеристики волнового процесса. Понятно, что временной ход колебаний в каждой точке волны может быть различен. Но чаще всего мы рассматриваем именно волны, в которой этот процесс является периодическим. В этом случае у нас обычным образом возникает понятие периода T и частоты ν волны. Оказывается, проще всего изучать именно гармонические волны – в которых колебания происходят по закону косинуса или синуса. Само это название («*гармонические функции*») появилось благодаря музыке, в которой задолго до появления в математике тригонометрических функций выделяли «чистые тона» звуков, а впоследствии было обнаружено, что они соответствуют колебаниям *звукового давления* (так называют отклонения давления в среде от равновесного значения в *акустических волнах*) по закону косинуса или синуса. Произвольную волну можно рассматривать как результат суперпозиции **плоских гармонических (или *монохроматических* – обладающих фиксированной частотой) волн**. Набор частот в этой суперпозиции называют **спектром** волны. Плоская монохроматическая волна величины u, распространяющаяся вдоль оси x, описывается выражением

$$u(x,t) = u_m \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

в котором максимальное значение u_m называют **амплитудой** волны, аргумент косинуса – **фазой** волны (величина φ_0 – начальная фаза), $\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ – циклической частотой, а $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ – *волновым числом*. Таким образом, можно сформулировать как более строгое определение: ***фронт волны*** есть поверхность постоянной фазы. Величина λ – **длина волны**, связана с частотой и скоростью распространения волн соотношением

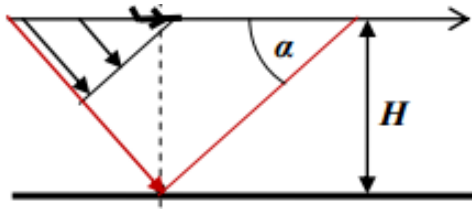
$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k}.$$

Скорость распространения волн и форма волнового фронта определяется физикой волнового процесса.

Акустические волны – распространяющиеся колебания давления (в жидкостях или газах) или напряжения (в твердых телах), обусловленные коллективными смещениями молекул. По частоте эти колебания подразделяют на звуковые волны (частота от 20 Гц до 20 кГц), инфразвук (менее 20 Гц) и ультразвук (свыше 20 кГц).

Пример 1: Сверхзвуковой самолет пролетел точно над наблюдателем, а спустя время t = 6 с наблюдатель услышал звук самолета. Известно, что скорость самолета в 1,25 раза превышает скорость звука в воздухе $V_{зв} \approx$ 330 м/с. На какой высоте летел самолет?

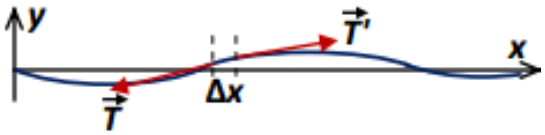
Решение: В этом случае самолет, «обгоняющий» звук, формирует за собой конус звукового излучения (*конус Маха*) . Пока самолет проходит расстояние $\Delta S = V \cdot \Delta t$,



звуковой фронт смещается на расстояние $\Delta s = V_{зв} \cdot \Delta t$, так что угол полураствора этого конуса определяется соотношением $\sin(\alpha) = \dfrac{V_{зв}}{V} = 0{,}8$. К тому моменту, когда звук дойдет до наблюдателя, самолет от положения «точно над наблюдателем» пролетит расстояние $S = V \cdot t = 1{,}25 \cdot V_{зв} \cdot t$. Значит, $H = S \cdot tg(\alpha) = 1{,}25 \cdot V_{зв} \cdot t \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{3} V_{зв} \cdot t \approx 3300$ м.

Пример 2: Однородная гибкая тонкая струна массы m с длиной L натянута с силой T, значительно превышающей действующую на нее силу тяжести. Найдите скорость распространения малых поперечных колебаний струны вдоль нее. Считайте, что при малых колебаниях сила натяжения струны изменяется несущественно, и что сил сопротивления со стороны внешней среды нет.

Решение: Направим ось x вдоль струны и рассмотрим малый ее элемент, имеющий на эту



ось проекцию Δx, сместившийся поперек струны от положения равновесия на расстояние y. Масса этого участка равна $\Delta m = \dfrac{m}{L}\Delta x$. Пусть форма струны в момент времени t описывается уравнением $y = y(x,t)$. Запишем уравнение движения этого участка в проекции на ось y:

$$\frac{m}{L}\Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \cdot \sin[\alpha(x+\Delta x)] - T \cdot \sin[\alpha(x)],$$

где $\alpha(x)$ – угол наклона касательной к струне в точке x. Здесь мы учли, что в рамках нашей модели части струны движутся только под действием неизменной по величине силы натяжения, и использовали обозначение для записи дифференцирования функции двух переменных по одной из них (в математике такую производную называют *частной производной*). Будем также считать, что в связи с малостью отклонений для любой точки $|\alpha(x)| << 1$. Тогда $\sin[\alpha(x)] \approx \alpha(x) \approx \mathrm{tg}[\alpha(x)] \approx \dfrac{\partial y}{\partial x}$, и наше уравнение переписывается в виде

$$\frac{m}{L} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \dfrac{\partial y}{\partial x}(x)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{LT}{m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

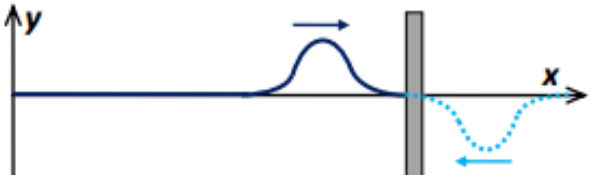
Полученное уравнение называется ***волновым уравнением***, а величина $c \equiv \sqrt{\dfrac{LT}{m}}$ имеет размерность скорости. Нетрудно проверить, что $y(x,t) = y_m \cdot \cos(\omega t \mp kx + \varphi)$ является решением этого уравнения, если $\omega = c \cdot k$, то есть c и есть скорость распространения волн по струне, причем она не зависит от частоты (или длины волны). Более того, можно

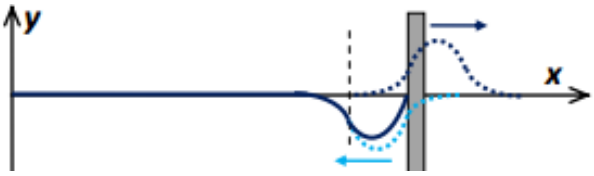
заметить что вообще любая функция вида $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ с достаточно «гладкими» f и g является решением нашего волнового уравнения! Это означает, что в рамках нашей модели по струне в обе стороны могут распространяться волны почти любой формы – с одной и той же скоростью, не затухая и не влияя друг на друга. Впрочем, необходимо понимать, что такая простая картина получилось благодаря *линейности* уравнения, которая достигнута только за счет приближения малости отклонений, отсутствия напряжений изгиба, изменения силы продольного натяжения и сил сопротивления среды. Учет этих факторов сразу существенно усложнит описание распространения волн.

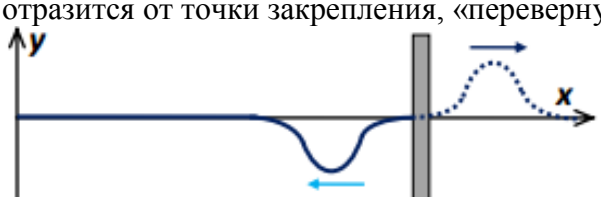
Одно из самых важных следствий линейности волнового уравнения – то, что в линейном приближении сумма двух решений всегда тоже есть решение волнового уравнения. Это означает, что мы всегда можем искать решение, описывающее конкретный процесс, как *суперпозицию* (наложение) нескольких волн, подобранных так, чтобы выполнялись все необходимые требования.

Пример 3: Описать отражение импульса поперечной деформации натянутой струны от ее закрепленного конца.

Решение: Нам необходимо построить решение уравнения, которое поначалу совпадает с заданным импульсом, движущимся «вправо» со скоростью $c = \sqrt{\dfrac{LT}{m}}$, но после того, как импульс добежит до точки закрепления, он начинает видоизменяться так, чтобы поперечное смещение струны в точке закрепления было равно нулю в любой момент времени. Можно придумать необходимую комбинацию: добавим к нашему импульсу во всех точках струны «перевернутый» импульс, движущийся навстречу с той же скоростью, «выходящий» из-за точки закрепления с того же момента, как исходный импульс начнет ее проходить. Ясно, что суммарное смещение струны будет удовлетворять линейному волновому уравнению, и в любой момент времени в точке закрепления суммарное смещение будет нулем. Дальнейшее построение решения можно реализовать как серию рисунков, из которых видно, что в итоге импульс отразится от точки закрепления, «перевернувшись».







Пример 4: Найти частоты гармонических «стоячих волн» на однородной гибкой тонкой струне массы m и длиной L, натянутой с силой T между закрепленными концами.

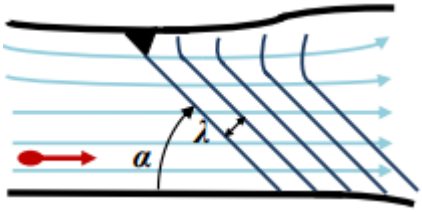
Решение: И в этом случае нам достаточно заметить, что комбинация двух бегущих в разные стороны гармонических волн одинаковой амплитуды дает нужное нам решение:

$$y(x,t) = y_m \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_1) + y_m \cdot \cos(\omega t + kx + \varphi_2) = 2y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos(kx + \varphi').$$

Здесь мы использовали формулу суммы косинусов и обозначили $\varphi \equiv \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ и $\varphi' \equiv \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$. Пусть закрепленные концы находятся в точках $x = 0$ и $x = L$. Тогда решение нужно подчинить «граничным» условиям $y(0,t) \equiv 0$ и $y(L,t) \equiv 0$. Первое условие можно выполнить, выбрав $\varphi' \equiv \frac{\pi}{2}$, чтобы $y(x,t) = 2y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \sin(kx)$. Второе условие при этом дает $kL = \pi \cdot n,\ n = 1,2,\ldots$. Значит, возможные частоты стоячих волн (или, как их еще называют, собственных мод колебаний струны) $\omega_n = ck = \pi\sqrt{\frac{T}{mL}} \cdot n$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. При изучении русла реки в ходе разведывательных работ исследовательская партия вышла к почти прямолинейному участку ее берега. На противоположной стороне реки был виден скальный уступ, в который ударялось течение. Ниже уступа по течению была видна система «водяных валов», расходящихся от уступа. Гребни валов были почти прямолинейны и ориентированы под углом $\alpha \approx 45°$ к берегу (см. рисунок). Исследователи измерили расстояние между валами λ. В это время их коллега спускался вниз по течению на моторной лодке, двигавшейся со скоростью V относительно воды. Он сообщил, что при прохождении системы валов период ударов лодки о валы равен T. Какова скорость течения реки на этом участке?



2. Катер приближается к пристани со скоростью $V = 72$ км/ч. Стоит безветренная погода. На пристани играет оркестр. На сколько полутонов *n* должны изменить свое исполнение музыканты оркестра для того, чтобы пассажиры катера слышали мелодию в неискаженной тональности? Скорость звука в воздухе примите равной $c = 340$ м/с. Ответ округлите до целого значения.

Указание: Один полутон соответствует изменению частоты звучания в $k = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}06$ раза.

3. Выведите линейное волновое уравнение для продольной звуковой волны в очень длинном упругом стержне из вещества с плотностью ρ и модулем Юнга E.

4. Найти частоты гармонических «стоячих волн» на однородной гибкой тонкой струне массы *m* и длиной *L*, натянутой с силой *T*, если один конец струны закреплен неподвижно, а другой прикреплен к меленькому легкому колечку, которое может скользить без трения по неподвижной направляющей, перпендикулярной струне.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 10D: Интерференция света.

Темы: Интерференция волн. Условие когерентности. Схемы двухлучевой интерференции.

Электромагнитные волны – колебания напряженностей электрических и индукции магнитных полей. По классическим представлениям, источником электромагнитных волн являются ускоренно движущиеся электрические заряды. По частоте подразделяются на: радиоволны (примерно до 10^{10}Гц), тепловые (инфракрасные) лучи (10^{11}-10^{14}Гц), видимый свет (от $4\cdot10^{14}$Гц до $8\cdot10^{14}$Гц), ультрафиолетовое (10^{15}Гц), рентгеновское (10^{16}-10^{19}Гц) и гамма (10^{20}Гц и выше) излучения. Внутри этих диапазонов также выделяют различные поддиапазоны значений частоты. Наиболее знакомое нам разделение связано с *цветоощущением*. Действительно, различные видимые цвета отвечают определенным значениям длин волн электромагнитного излучения в оптическом диапазоне:

красный	оранжевый	желтый	зеленый	голубой	синий	фиолетовый
625–740 нм	590-625 нм	565-590 нм	500-565 нм	485-500 нм	440-485 нм	380-440 нм

При изучении световых волн важно отметить, что частоты колебаний электромагнитных полей в них огромны, так что и наши глаза, и наши приборы при взаимодействии с волной «усредняют» результат взаимодействия по большому числу периодов. *Интенсивность света* (средняя энергия, проходящая через единицу площади волнового фронта за единицу времени) пропорциональна среднему значению от квадрата напряженности электрического поля в волне. Для монохроматической (гармонической) волны в вакууме с амплитудой колебания напряженности E_m интенсивность $I=\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_m^2$.

Рассмотрим суммирование двух *монохроматических* волн (для простоты – распространяющихся вдоль одной оси *x*, и с одинаковым направлением оси, вдоль которой происходят колебания напряженности электрического поля): $E_1=E_{1m}\cdot\cos(\omega_1 t-k_1x+\varphi_1)$ и $E_2=E_{2m}\cdot\cos(\omega_2 t-k_2x+\varphi_2)$. Суммарная интенсивность пропорциональна

$$(E_1+E_2)^2=E_1^2+E_2^2+2E_{1m}E_{2m}\cdot\cos(\omega_1 t-k_1x+\varphi_1)\cdot\cos(\omega_2 t-k_2x+\varphi_2).$$

Последнее слагаемое преобразуется к виду

$$E_{1m}E_{2m}\{\cos[(\omega_1+\omega_2)t-(k_1+k_2)x+\varphi_1+\varphi_2]+\cos[(\omega_1-\omega_2)t-(k_1-k_2)x+\varphi_1-\varphi_2]\},$$

и в случае $\omega_1\neq\omega_2$ или случайного изменения начальных фаз от периода к периоду эти слагаемые после усреднении по времени дают ноль. В этом случае энергия суммарной волны в любом месте равна сумме энергий волн, а настоящая интерференция наблюдается только у ***когерентных*** волн, то есть у волн одинаковой частоты с постоянной разностью фаз – в этом случае средняя наблюдаемая интенсивность зависит от этой разности фаз:

$$I=\varepsilon_0 c\left[\frac{1}{2}E_{1m}^2+\frac{1}{2}E_{2m}^2+E_{1m}E_{2m}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right]=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2).$$

При использовании обычных источников света добиться когерентности разных источников нереально: если светить двумя разными фонариками на один экран (даже снабдив фонарики стеклами одинакового цвета), увидеть интерференцию нельзя. И в прежние («долазерные») времена для наблюдения интерференции света использовали наложение световых волн от одного и того же источника. Итак:

Когерентность: волны (и их источники) считаются когерентными, если они имеют одинаковую частоту и постоянную разность фаз.

Интерференция – явление перераспределения энергии колебаний в пространстве при наложении двух или более когерентных волн.

Дифракция – явление изменения направления распространения волны при взаимодействии с препятствиями («огибание» препятствий).

В среде с показателем преломления n скорость (а вместе с ней и длина) волны уменьшаются. Если обозначить λ' (и соответственно k') длину волны и волновое число в среде, то изменение фазы волны при прохождении расстояния $\boldsymbol{x}$ можно записать как

$$k'x = \frac{2\pi}{\lambda'}x = \frac{2\pi n}{\lambda}x = k \cdot nx \equiv k$$

(то есть оно равно изменению фазы волны «без учета» изменения ее длины при прохождении расстояния d). Величину $d \equiv nx$ называют оптической длиной хода волны.

Ясно, что именно разность оптических длин хода волн, пришедших в точку наблюдения от точек, в которых они не имели фазового сдвига (были синфазны), и определяет разность фаз интерферирующих волн в точке наблюдения: $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta d}{\lambda}$. Таким образом, результирующая интенсивность в точке наблюдения

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(2\pi\frac{\Delta d}{\lambda}\right).$$

Нетрудно заметить, что в общем случае ***двулучевой интерференции*** (т.е. при интерференции двух когерентных волн) амплитуда суммарного колебания **максимальна** и равна сумме амплитуд волн, если **оптическая разность хода равна целому числу длин волн («*условие максимумов*»)**:

$$\Delta d = d_2 - d_1 = m \cdot \lambda, \quad m \in Z$$

(при этом суммарная интенсивность $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$).

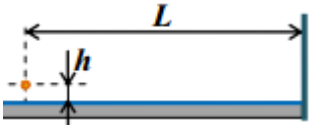
С другой стороны, амплитуда суммарного колебания **минимальна** и равна разности амплитуд волн, если **оптическая разность хода равна нечетному числу длин полуволн («*условие минимумов*»)**:

$$\Delta d = (2m+1)\cdot\frac{\lambda}{2}, \quad m \in Z$$

(суммарная интенсивность $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$).

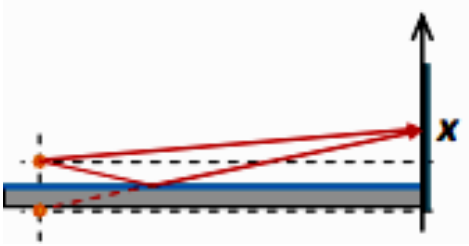
Если интерференция световых волн происходит на экране, то мы можем наблюдать ***интерференционную картину*** – чередование максимумов и минимумов (светлых и темных полос). Целое число m называют *порядком интерференции*. В задачах обычно рассматриваются две схемы интерференции: интерференция волн от двух близкорасположенных точечных источников и интерференция двух сходящихся под малым углом плоских волн. Поэтому анализ результата интерференции обычно сводится к вычислению оптической разности хода интерферирующих волн от общей поверхности постоянной фазы. При этом следует учесть, что при отражении от оптически более плотной среды (т.е. среды с большим n) фаза волны сдвигается на π. Поэтому к оптической длине хода волны, испытывающей такое отражение, следует прибавлять половину длины волны.

Пример 1: Точечный монохроматический источник света (λ = 500 нм) расположен на расстоянии h = 2 мм от поверхности плоского зеркала. На расстоянии L = 4 м от него



перпендикулярно зеркалу установлен плоский экран, на котором наблюдается интерференционная картина. Найдите *ширину интерференционной полосы* Δ, т.е. расстояние между двумя соседними светлыми полосами на экране. Какова полная ширина интерференционной картины на экране, если время когерентности источника τ = 0,2 пс?

Решение: В данном случае изображение источника в зеркале играет роль второго источника, когерентного с первым. Отметим, насколько жестким являются требования к «точечности» источника: он явно должен быть намного меньше 2 мм (а этот размер явно много меньше 4 м). Введем на экране координату x, отсчитываемую от зеркала, и посчитаем оптическую разность хода лучей, интерферирующих в точке с этой координатой на экране. Для луча, идущего непосредственно от источника, длина пути



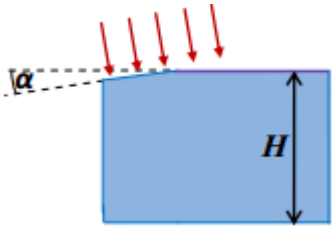
$s_1 = \sqrt{L^2 + (x-h)^2} = L\sqrt{1 + \frac{(x-h)^2}{L^2}} \approx L + \frac{(x-h)^2}{2L}$. Аналогично для луча, идущего с отражением от зеркала $s_2 = \sqrt{L^2 + (x+h)^2} \approx L + \frac{(x+h)^2}{2L}$. Но нам также нужно учесть, что по дороге этот луч отражается от оптически более плотной среды, так что к его оптической длине хода нужно добавить половину длины волны. Следовательно, $\Delta d = \frac{\lambda}{2} + s_2 - s_1 \approx \frac{\lambda}{2} + \frac{2hx}{L}$. Условие максимумов дает:

$$\Delta d = m \cdot \lambda \Rightarrow x_m \approx \frac{\lambda L}{2h}\left(m - \frac{1}{2}\right),\ m = 1,2,\ldots.$$

Таким образом, ширина интерференционной полосы $\Delta = \frac{\lambda L}{2h} = 0{,}5$ мм. Обратите внимание, какие жесткие условия на параметры системы (малость h и большая величина L) нам пришлось использовать, чтобы добиться этого (не очень-то впечатляющего при наблюдении глазами) результата.

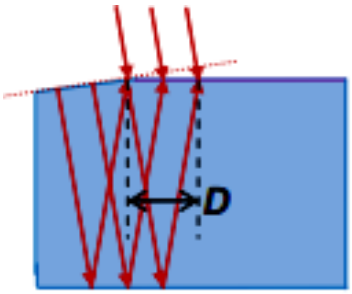
Прежде чем ответить на второй вопрос, обсудим понятие «времени когерентности». На самом деле излучение «обычных» источников света состоит из огромного количества «вспышек», производимых атомами или молекулами светящегося вещества. По отношению друг к другу эти «вспышки» происходят совершено случайно, так что излучение из разных «вспышек» не может иметь постоянную разность фаз. Поэтому излучение такого источника, смещенное по отношению к самому себе на некоторое время, является когерентным с самим собой только в том случае, если величина смещения по времени не превосходит некоторой величины, которую и называют временем когерентности источника. Стоит отметить что для «обычных» источников указанное время – не такое уж маленькое (оно примерно в 100 раз превосходит период излучения). Понятно, что «отставшее» по времени излучение, идущее с отражением от зеркала, сохранит когерентность с излучением, пришедшим напрямую от источника, если $\Delta d \le c \cdot \tau = 60$ мкм (величину $l = c \cdot \tau$ часто называют *длиной когерентности* источника). Таким образом, мы можем наблюдать в интерференционной картине порядки не выше $m_{\max} \approx \frac{c \cdot \tau}{\lambda} = 120$, и полная ширина видимой картины $D \approx \frac{\lambda L}{2h} m_{\max} = 6$ см.

Пример 2: Параллельный пучок лучей, полученных от одномодового лазера (то есть это излучение с высокой точностью можно считать монохроматическим) с длиной волны λ = 600 нм, направляют на объемное тело из стекла в форме прямоугольного параллелепипеда, одна из граней которого «срезана» под углом α = 0,005 рад (см. рисунок). Лучи падают строго



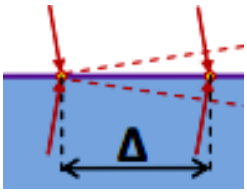
перпендикулярно поверхности среза, а оставшаяся часть срезанной грани обработана так, чтобы она была «матовой» На поверхности среза лучи в основном проходят, а на «нижней» грани параллелепипеда – в основном отражаются. Вблизи края среза на матовой поверхности наблюдается интерференционная картина. Найдите ширину интерференционной полосы и число полос интерференции. Высота параллелепипеда H = 50 см, показатель преломления стекла n = 1,2, длина когерентности лазера l = 2 м.

Решение: В данной схеме происходит интерференция лучей из исходного пучка, падающим на матовую поверхность «сверху» и лучей, прошедших через срез и отраженных от нижней грани. Условие составлено так, что оно исключает участие в



интерференции лучей, испытавших многократное отражение (матовая поверхность рассеивает свет, лучи, попавшие на срез после отражения от нижней грани выходят), и поэтому зона встречи лучей ограничена участком матовой поверхности от среза до точек падения «крайних» лучей, прошедших внутрь тела у самого края среза. Ширина этого участка $D = 2H \cdot \mathrm{tg}(\alpha) = 5\,\text{мм}$. Также отметим, что дополнительная оптическая длина хода до матовой поверхности лучей, отраженных от нижней грани, примерно равна $n{\cdot}2H$ = 1,2 м, что явно меньше длины когерентности, которая, таким образом, не ограничивает область наблюдения интерференционной картины.

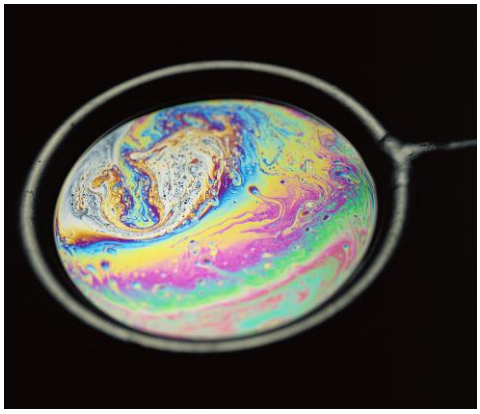
Для определения ширины интерференционной полосы рассмотри две соседние светлые



полосы в области наблюдения картины. Если одна из них (слева) отвечает m-ому порядку интерференции, то есть $\Delta d_1 = m \cdot \lambda$, то вторая – ($m$+1)-му: $\Delta d_2 = (m+1) \cdot \lambda$. С другой стороны, как видно из рисунка, $\Delta d_2 = \Delta d_1 + n\Delta\sin(\alpha) - \Delta\sin(\alpha) \approx \Delta d_1 + (n-1)\alpha \cdot \Delta$.

Значит, $(n-1)\alpha \cdot \Delta = \lambda$, и $\Delta \approx \dfrac{\lambda}{(n-1)\alpha} = 0{,}6\,\text{мм}$. Число наблюдаемых полос интерференции

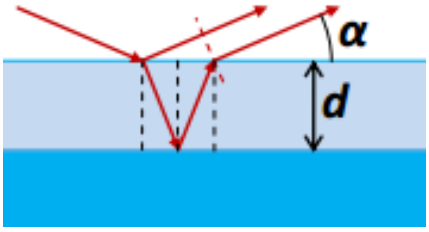
$$N = \left[\frac{D}{\Delta}\right] = 8.$$



Интересный пример интерференционных явлений – цвета тонких пленок наблюдаются при возникновении интерференции в точке наблюдения лучей, отраженных от двух поверхностей тонкой прозрачной пленки. Это явление активно используется и в оптических приборах – например, для просветления оптики. Толщину тонкого слоя, наносимого на поверхность объектива прибора, можно подобрать так, чтобы разность хода лучей, отраженных от двух сторон пленки, соответствовала условию минимумов – тогда интенсивность отраженной волны становится минимальной. Впрочем, в «школьных» задачах обычно ограничиваются случаем нормального падения света на тонкую пленку. Но разбор произвольного падения совсем ненамного сложнее.

Пример 3: В светлый, но пасмурный безветренный день путник шел по ровному горизонтальному участку дороги. Вдалеке впереди на дороге он заметил маленькую лужу, поверхность которой показалась ему оранжевой (уточним, что увиденный им оттенок отвечал длине волны λ_1 = 600 нм). «Наверное, на поверхность лужи попала тонкая бензиновая пленка,» – подумал он. На каком расстоянии от лужи он будет находиться в тот момент, когда поверхность лужи впервые покажется ему красной (будем считать, что цвет с длиной волны λ_2 = 625 нм уже является красным)? Рост путника h = 180 см, показатель преломления этого сорта бензина n = 1,25.

Решение: В светлый пасмурный день освещение поверхности лужи рассеянное (лучи падают со всех возможных направлений), а в безветренный день эта поверхность еще и ровная и горизонтальная. Лучи, попадающие от поверхности лужи в глаза путника, наклонены по отношению к горизонту на угол $\alpha = \mathrm{arctg}(h/L)$, где L – расстояние от лужи до путника. Ясно, что на поверхность лужи луч, образовавший эти лучи, тоже падал под этим углом к горизонту. Как видно из построения, в интерференции участвуют лучи, отраженные от двух сторон бензиновой пленки толщиной d. Подсчитаем оптическую разность хода лучей от точки падения, в которой они были синфазны. Расстояние между точками «входа» и «выхода» луча в пленку $D = 2d \cdot \mathrm{tg}(\beta)$, где угол преломления β находится из закона Снелла: $\sin(\beta) = \frac{1}{n}\cos(\alpha)$, $\cos(\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\cos^2(\alpha)}$ и $tg(\beta) = \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}$. Поэтому $D = \frac{2d\cos(\alpha)}{\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}$. Следовательно, путь отраженного луча до общей поверхности волнового фронта со вторым лучом $s_1 = D \cdot \cos(\alpha) = d\frac{2\cos^2(\alpha)}{\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}$. Оптическая длина хода луча, прошедшего через слой масла, $s_2 = n \cdot 2\frac{d}{\cos(\beta)} = d\frac{2n^2}{\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}$. Первый луч испытывает отражение от оптически более плотной среды, и к его длине хода нужно добавить половину длины волны. Про второй мы этого наверняка не знаем – скорее всего, показатель преломления воды в луже больше 1,25, и тогда второй луч тоже отражается от более плотной среды, и одинаковые добавки к длине хода лучей сокращаются. Но поскольку это точно не известно, запишем оптическую разность хода лучей так:



$$\Delta s = s_2 - s_1 - k\frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)} - k\frac{\lambda}{2},$$

где $k = 0$, если показатель преломления воды в луже больше 1,25, и $k = 1$, если меньше. Видимый цвет пленки соответствует длине волны, для которой выполняется условие максимумов $\Delta s = m \cdot \lambda$, то есть $2d\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)} = \left(m + \frac{k}{2}\right)\lambda$.

Согласно условию, при очень большом расстоянии $L >> h \Rightarrow \alpha \approx 0$ это условие было выполнено для оттенка оранжевого цвета, то есть $2d\sqrt{n^2 - 1} = \left(m + \frac{k}{2}\right)\lambda_1$. Поскольку при увеличении α в области малых углов левая часть равенства монотонно растет, то для λ_2 условие максимума впервые выполнится в том же порядке интерференции, то есть $2d\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)} = \left(m + \frac{k}{2}\right)\lambda_2$. Разделив эти соотношения друг на друга, после возведения в квадрат получаем:

$$z^2 \equiv \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 = \frac{n^2 - \cos^2(\alpha)}{n^2 - 1} \Rightarrow \cos^2(\alpha) = z^2 - n^2(z^2 - 1).$$

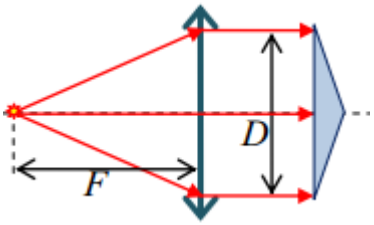
Соответствующее расстояние

$$L = h \cdot \mathrm{ctg}(\alpha) = h\sqrt{\frac{\cos^2(\alpha)}{1 - \cos^2(\alpha)}} = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}\sqrt{\frac{z^2}{z^2 - 1} - n^2} = \frac{5\sqrt{39}}{7}h \approx 8\,\text{м}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Точечный источник света находится на биссектрисе зеркального двугранного угла с раствором α = 178°, на расстоянии d = 3 см от ребра этого угла. Специальная ширма препятствует попаданию света от источника напрямую в область вблизи биссектрисы угла далее источника. Поэтому туда попадают только лучи от источника, отраженные от граней угла. На каком расстоянии от ребра угла нужно поставить параллельный ребру плоский экран, чтобы ширина интерференционной полосы в картине, наблюдаемой на экране в районе биссектрисы угла, равнялась 2 мм? Длина когерентности источника достаточна для этого.

2. Источник, испускающий свет с длиной волны λ=628 нм, помещен в главный фокус тонкой собирающей линзы (см. рисунок). За линзой на небольшом расстоянии размещена «бипризма» (двойная призма), основание которой параллельно линзе, а угол при основании α=2°. Ширина основания D = 24 см. На каком расстоянии за бипризмой нужно разместить экран, параллельный ее основанию, чтобы наблюдать на нем максимальное число полос интерференционной картины? Показатель преломления вещества бипризмы равен 1,4. Чему равно это (т.е. максимально возможное) число полос?



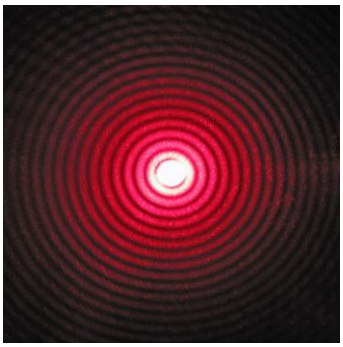
3. Источник, испускающий свет с длиной волны λ=400 нм, помещен в главный фокус тонкой собирающей линзы. За линзой размещен экран, параллельный плоскости линзы. Из средней части линзы аккуратно вырезают узкую полосу шириной h = 2 мм (оптический центр линзы оказывается точно на средней линии полосы) и сдвигают получившиеся половинки вместе. На экране наблюдают интерференционную картину, причем вдоль проекции линии разреза ширина интерференционной полосы равна Δ = 0,1 мм. Найдите оптическую силу линзы.

4. На поверхности стекла с показателем преломления n' = 1,4 находится тонкая пленка воды с показателем преломления n = 1,33. Ее освещают светом с длиной волны λ=700 нм под углом α = 30° к нормали. При этом интенсивность отраженного света изменяется. Оказалось, что промежуток времени между двумя максимумами отражения равен T = 10 минут. Предполагая, что это происходит из-за испарения воды, найдите скорость уменьшения толщины пленки.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 11D: Дифракция света. Дисперсия света.

Темы: Дифракция света. Дифракционная решетка. Дисперсия показателя преломления.

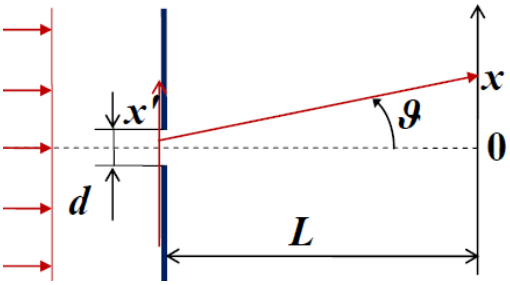


Дифракция – явление изменения направления распространения волны при взаимодействии с препятствиями («огибание» препятствий).

Процесс распространения волны можно описать, опираясь на **принцип Гюйгенса - Френеля**: Каждая точка среды, в которой происходят колебания, становится источником вторичных волн, интерференция которых и приводит к формированию распространяющейся волны. Фронт волны является огибающей фронтов сферических вторичных волн. Таким образом, при ограничении волнового фронта (например, если электромагнитная волна попадает на «ширму» с некоторыми отверстиями), нам нужно записать выражение для амплитуд вторичных волн, отвечающих колебаниям в зонах отверстий, и сложить их как когерентные колебания. Таким образом, в этом случае мы имеем дело с *многолучевой интерференцией*. Поэтому возможны два подхода: «полукачественный», в рамках которого мы анализируем положение направлений, отвечающих максимумам и минимумам интерференции, и количественный, когда мы можем использовать любой метод сложения когерентных колебаний – обычно удобно использовать метод комплексных амплитуд.

Пример 1: Плоская монохроматическая волна с длиной λ падает на плоскую ширму с прямолинейной щелью ширины $d >> \lambda$. Исследовать зависимость интенсивности излучения от угла отклонения от нормали к ширме. Изобразить график зависимости интенсивности излучения, падающего на экран, установленный на расстоянии $L >> d$ от ширмы параллельно ей.

Решение: Пусть ширина щели d по порядку величины не очень сильно превосходит λ и сильно меньше расстояния до экрана L. Волновое поле за препятствием есть сумма вторичных волн от источников в плоскости щели. Введем координату x' в плоскости ширмы и координату x в плоскости экрана, отсчитываемые от средней линии щели и ее проекции на экран соответственно. Рассмотрим в качестве источника вторичных волн узкую полоску толщиной dx' в плоскости щели, и будем считать, что на расстоянии L от себя источник создает колебание с амплитудой $dE_m = E_m \dfrac{dx'}{d}$ (то есть мы считаем, что энергия приходящей волны равномерно распределена по щели, и колебания в разных точках плоскости щели синфазны – это естественно для плоской волны при $d >> \lambda$). С учетом убывания амплитуды (обратно пропорционально расстоянию) и появления фазового сдвига комплексная амплитуда этой вторичной волны в точке $\vec{r}$ равна $d\overline{E}_m = E_m \dfrac{dx'}{d}\dfrac{L}{r}e^{i\vec{k}\vec{r}}$. Здесь *волновой вектор* указывает направление распространения волны от каждой точки



волнового фронта и $|\vec{k}|=\dfrac{2\pi}{\lambda}$. Комплексная амплитуда колебания, получающегося в точке экрана с координатой x равна

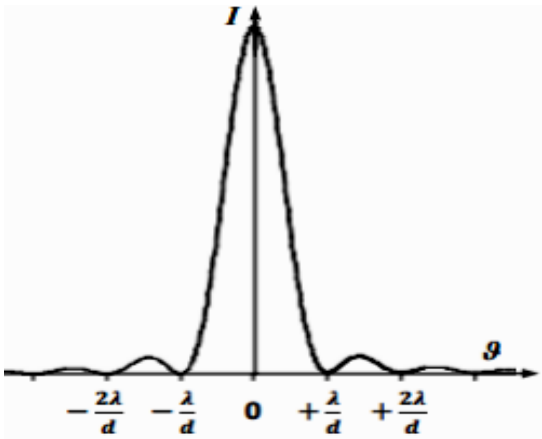
$$\overline{E}_m=\frac{E_m}{d}\int\limits_{-d/2}^{+d/2}dx'\frac{L}{r}e^{i\vec{k}\vec{r}}.$$

Ясно, что при $L >> d$ $\dfrac{L}{r}=\dfrac{L}{\sqrt{L^2+(x-x')^2}}\approx 1$, и при этом $\vec{k}\vec{r}=k[\cos(\vartheta)L+\sin(\vartheta)(x-x')]$, где ϑ – угол отклонения луча от нормали. В наших условиях $\vartheta << 1$, и поэтому $\vec{k}\vec{r}=k[L+\vartheta(x-x')]$.Таким образом,

$$\overline{E}_m=\frac{E_m}{d}e^{ik(L+\vartheta\cdot x)}\int\limits_{-d/2}^{+d/2}dx'e^{-i\vartheta k\cdot x'}=-ie^{ik(L+\vartheta\cdot x)}E_m\frac{2}{kd\vartheta}\sin\left(\frac{kd}{2}\vartheta\right).$$

С учетом квадратичной связи интенсивности и амплитуды

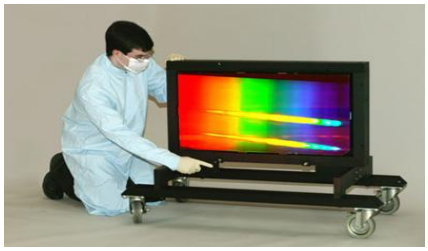
$$I(\vartheta)=I_0\left[\frac{2}{kd\vartheta}\sin\left(\frac{kd}{2}\vartheta\right)\right]^2\equiv I_0\cdot\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\vartheta\right).$$



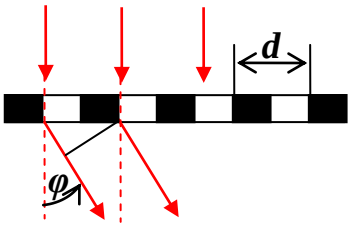
Здесь I_0 – интенсивность излучения в направлении $\vartheta=0$. Как видно, первый ноль интенсивности (то есть угол отклонения, внутри которого находится *первый дифракционный максимум*) соответствует $\vartheta_d=\dfrac{\lambda}{d}$. На удаленном экране $x\approx L\vartheta$, так что распределение интенсивности в зависимости от x описывается той же формулой (см. рисунок).

Как мы обнаружили, интерференция вторичных волн приводит к тому, что свет после щели распространяется не так, как предписывается законами геометрической оптики (то есть нормально ширме), но и с небольшими отклонениями, причем углы отклонения лучей от направления «прямолинейного» распространения оказываются порядка отношения длины волны света к размеру препятствия.

Если ширина щели станет одного порядка или меньше длины волны, или при существенной неоднородности волны в пределах щели, или при близком расположении экрана картина дифракции будет гораздо сложнее. Обычно в этом случае количественное описание становится «нешкольным», так как интегралы для расчета суммарной амплитуды на экране уже не вычисляются через «элементарные» функции.



Дифракционная решетка – система отражающих или пропускающих полосок («штрихов»), расположенных периодически с периодом d. При достаточно малых d



наблюдаются отклонения от законов геометрической оптики: отраженные (или прошедшие) лучи идут под другими углами, чем падающие, то есть наблюдается дифракция. В случае дифракционной решетки <u>максимумы</u> дифракционной картины наблюдаются при значениях углов отражения (или прохождения) φ_m, для которых разность

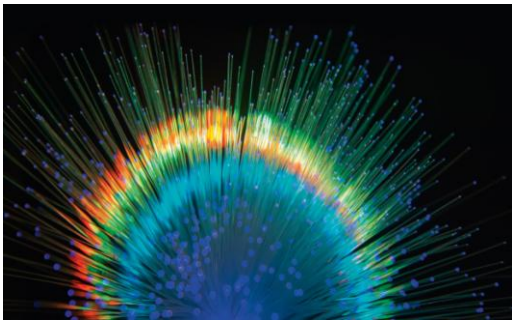
хода от точек, отстоящих друг от друга на один период решетки, равна целому числу длин волн – в этом случае вторичные волны от разных полосок решетки усиливают друг друга. Для нормального падения волны (см. рисунок):

$$d \cdot \sin(\varphi_m) = m \cdot \lambda, \quad m \in Z .$$

Целое число m называют <u>порядком</u> дифракционного максимума. Следует обратить внимание, что эта величина бывает как <u>положительной</u>, так и <u>отрицательной</u>. В ***«обычных школьных» задачах*** именно эта формула чаще всего используется для ответа на вопросы по теме «дифракция». Например, важно понимать, что, поскольку $|\sin(\varphi_m)| \le 1$, то $|m| \le \frac{d}{\lambda}$. Значит, максимальный порядок дифракционного максимума, который можно наблюдать с помощью решетки с периодом d, есть целая часть от отношения $\frac{d}{\lambda}$. При этом максимальное <u>количество</u> наблюдаемых максимумов равно $2m_{\max} + 1$, так как есть еще «главный» порядок ($m = 0$) и отрицательные порядки! Строго говоря, между этими («*основными*») дифракционными максимумами существуют еще и «побочные», но они при большом числе «штрихов» решетки значительно слабее основных.

Пример 2: Дифракционная решетка, имеющая 500 штрихов на 1 мм, расположена параллельно экрану на расстоянии 1 м от него. На решетку нормально падает пучок монохроматического света. Ширина экрана (в направлении поперек штрихов решетки) 1 м, и на нем наблюдаются три дифракционных максимума – один наиболее яркий и еще два менее яркие, расположенные на расстоянии 629 мм друг от друга. Найдите длину волны света. Насколько нужно увеличить ширину экрана, чтобы наблюдать 5 дифракционных максимумов? Сколько всего максимумов можно наблюдать?

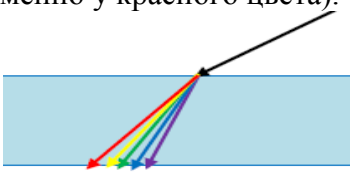
Решение: На экране мы наблюдаем главный максимум и максимумы с $m = \pm 1$. Поэтому известное нам расстояние между ними $D = 2L \cdot \mathrm{tg}(\varphi_1)$. Следовательно, $\frac{\lambda}{d} = \sin(\varphi_1) = \frac{D}{\sqrt{D^2 + 4L^2}} \Rightarrow \lambda = \frac{Dd}{\sqrt{D^2 + 4L^2}} \approx 600$нм. Нетрудно обнаружить, что $\sin(\varphi_2) = 2\frac{\lambda}{d} \approx 0{,}6$, то есть расстояние между максимумами с $m = \pm 2$ равно $D' = 2L \cdot \mathrm{tg}(\varphi_2) \approx 1{,}5 \cdot L$м, и ширина экрана должна быть более 1,5 м. Ясно, что $m_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda}\right] = 3$, так что в принципе можно наблюдать 7 максимумов, но для этого потребуется (при том же расстоянии от решетки до экрана) экран шириной более 4,13 м.



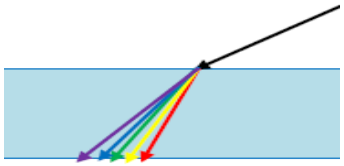
Дисперсией света называют явление разделения световых волн разной частоты вследствие зависимости показателя преломления от частоты (или, что в принципе то же самое, от длины волны). В самом деле, если белый свет (который является смесью всех цветов видимой части спектра) направить на призму, то, если показатель преломления имеет разное значение для лучей разных цветов, эти лучи отклонятся на разный угол. Таким образом, разные цвета будут разделены, и на экране, поставленном за призмой, мы увидим радужную полоску – белый свет разлагается в спектр. Описанный прибор (призма и экран) является простейшим **спектроскопом** – прибором для разделения спектральных компонент излучения. Полезно знать, что спектроскопические исследования – один из основных инструментов современной экспериментальной физики, так как по спектру излучения, испускаемого разными объектами, можно судить об их строении. С дисперсией света отчасти связано видимое покраснение Солнца на закате: показатель преломления атмосферного воздуха для красных лучей выше, чем для

фиолетовых – именно красные лучи дольше всех достигают наблюдателя при закате Солнца. Хотя этот эффект имеет «двойственную» природу – даже в большей степени он

связан с тем, что красные лучи менее интенсивно рассеиваются в атмосферном воздухе (а поэтому лучше доходят). Ясно, что на закате участок пути луча от Солнца до глаз наблюдателя, проходящий в воздухе, гораздо больше, чем, например, в полдень, и влияние рассеяния увеличивается (интенсивность рассеяния быстро растет с частотой, а в видимой области минимальная частота именно у красного цвета).



(а)



(б)

Отметим, что, в зависимости от вещества, с которым мы имеем дело, может наблюдаться два типа дисперсии – ***нормальная*** (когда показатель преломления *растет* вместе с частотой и, соответственно, *убывает* при росте длины волны – случай (а)), и ***аномальная*** дисперсия (когда наоборот – случай (б)). Для большинства стекол наблюдается нормальная дисперсия, а многие газы имеют аномальную дисперсию.

Задачи для самостоятельного решения.

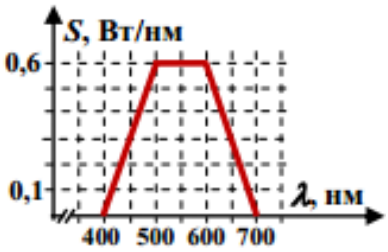
1. Плоская монохроматическая волна с длиной λ = 500 нм падает на плоскую ширму с двумя параллельными прямолинейными щелями ширины d = 5 мкм. Расстояние между щелями l = 5 мкм. Исследовать зависимость интенсивности излучения от угла отклонения от нормали к ширме. При каких значениях этого угла наблюдаются первый и второй основные максимумы дифракционной картины? Во сколько раз отличаются их интенсивности? Сколько между ними наблюдается побочных максимумов?

2. Дифракционная решетка с периодом d = 10 мкм расположена параллельно экрану на расстоянии L = 2,5 м от него. Между решеткой и экраном практически вплотную к решетке и параллельно ей расположена линза, которая фокусирует свет, прошедший через решетку, на экране. Решетка освещается нормально падающим монохроматическим пучком света, и при этом максимум порядка m = 2 наблюдается на экране на расстоянии x = 15 см от центра дифракционной картины. Найти длину волны света.

3. Плоская световая волна с λ = 550 нм проходит через кювету с водой, в которой создана стоячая ультразвуковая волна с частотой ν = 4,7 МГц. Колебания частиц воды в ультразвуковой волне происходят вдоль поверхности фронта световой волны. Таким образом, в воде из-за колебаний плотности возникает периодическая оптическая неоднородность, на которой происходит дифракция световой волны. В результате в фокальной плоскости объектива с фокусным расстоянием F = 35 см наблюдается картина дифракции с расстоянием между соседними максимумами Δ = 0,60 мм. Найти скорость распространения ультразвука с этой частотой в воде.

4. Получите формулу, определяющую направления на дифракционные максимумы при падении монохроматического света с длиной волны λ на дифракционную решетку с периодом d под углом α.

5. На графике показан *спектр* источника света с мощностью излучения 120 Вт, то есть зависимость величины $S \equiv \frac{\Delta P}{\Delta\lambda}\Big|_{\Delta\lambda\to 0}$ (где ΔP – мощность излучения, приходящаяся на интервал длин волн $\Delta\lambda$), от длины волны. Весь свет от этого источника проходит через зелено-голубой светофильтр, который практически полностью пропускает излучение длин волн из этих диапазонов, и практически не пропускает излучение других длин волн. Найдите мощность прошедшего света.



курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 12D: Основы Специальной Теории Относительности (СТО).

Темы: Преобразования Лоренца. Сложение скоростей в СТО. Изменение хода времени и измеряемых длин.

В ньютоновской механике одним из важнейших выводов стало то, что обнаружить факт движения инерциальной СО путем наблюдения за механическими процессами невозможно. Эти рассуждения раскрывают содержания принципа относительности Галилея:

Все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Долгое время после Галилея считалось, что другие (немеханические) физические явления могут позволить обнаружить абсолютное движение СО (т.е. измерить ее скорость относительно абсолютной системы). Большие надежды возлагались на электромагнитные явления: поскольку считалось, что свет и другие типы электромагнитных волн являются колебаниями особой среды – эфира, то естественным выглядело предположение, что эфир в целом покоится по отношению к абсолютной системе, и для обнаружения абсолютного движения наблюдателя достаточно точно измерить скорость распространения света в разных направлениях (если эта скорость имеет фиксированное значение относительно эфира, то относительно движущегося наблюдателя $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}_н$ и минимум и максимум величины скорости света должны быть $c - v_н$ и $c + v_н$ соответственно). Однако экспериментально это различие обнаружить не удалось (наибольшую известность приобрел опыт Майкельсона-Морли, в котором пытались обнаружить смещение полос интерференции в крестообразном интерферометре за счет различия скоростей движения света вдоль его плеч). Новый взгляд на ситуацию предложен в принципе относительности Эйнштейна:

Все физические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

В частности, одинаково протекают электромагнитные явления, и скорость света во всех системах отсчета должна быть **одинакова**. Это утверждение (*принцип постоянства скорости света*) исторически и стало отправной точкой построения СТО.

Но на самом деле современное понимание СТО не сводится к постоянству скорости света. Более того – сейчас физики-теоретики считают, что СТО – в первую очередь теория о геометрическом устройстве нашего мира. Поэтому постараемся разобраться в этом несколько подробнее.

Еще до появления СТО была замечена некоторая несогласованность двух основных физических теорий того времени – механики Ньютона и электродинамики Максвелла. В самом деле, группа преобразований Галилея, описывающая в механике Ньютона преобразование координат пространства (x, y, z) и временной переменной t при переходе из некоторой инерциальной СО (K) в другую (K'), движущуюся относительно первой со скоростью $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_x$ (где $\vec{e}_x$ - единичный вектор, направленный вдоль координатной оси x: мы фактически просто направили эту ось вдоль вектора скорости), состоит из преобразований вида:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}.$$

Принцип относительности Галилея можно сформулировать как утверждение об инвариантности (то есть неизменности) уравнений механики относительно этих преобразований. Но уравнения электродинамики Максвелла (это дифференциальные уравнения, связывающие напряженности и индукции электрического и магнитного полей с распределением зарядов и токов) не являются инвариантными при этих преобразованиях. Оказалось, что уравнения Максвелла инвариантны относительно совсем другой группы преобразований – так называемых преобразований Лоренца:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma(x - vt) = \gamma\left(x - \dfrac{v}{c}ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Leftrightarrow ct' = \gamma\left(ct - \dfrac{v}{c}x\right) \end{cases}$$

(последняя форма записи подчеркивает некоторую симметрию поведения величин x и ct). Однако признать эти преобразования формулами перехода от одной инерциальной СО к другой нельзя, не отказавшись от механики Ньютона! Принцип относительности Эйнштейна фактически фиксирует выбор преобразований Лоренца как более «правильной» симметрии для всей физики, и он требует **отказа** от теории Ньютона и построения новой (ее называют «релятивистской») механики.

Есть еще один – возможно, самый важный – аспект признания группы преобразований Лоренца «истинной» симметрией мира. Такой шаг требует еще и **отказа** от привычной всем евклидовой геометрии пространства (той самой, что построена на системе аксиом Евклида, где пространство однородное, изотропное и плоское, сумма углов треугольника равна $180°$ и т.д.).

Пример 1: Получить формулу сложения скоростей в кинематике СТО.

Решение: Пусть тело движется вдоль оси x со скоростью $u'_{\parallel}$ в СО K', то есть $x'(t') = u'_{\parallel}t'$. Тогда

$$\left.\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{u'_{\parallel} + v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}t' \\ t = \dfrac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{1 + u'_{\parallel}v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}t' \end{cases}\right\} \Rightarrow u_{\parallel} = \frac{x}{t} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + u'_{\parallel}v/c^2}.$$

Здесь мы получили закон сложения двух сонаправленных скоростей v_1 и v_2: нужно считать, что $v_{12} = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1 \cdot v_2/c^2}$ (нетрудно убедиться, что по этому закону величина скорости, получаемая сложением скорости света с любой другой, равна c). Для поперечных составляющих скоростей аналогичным образом можно получить, что

$$y = y' = u'_{\perp}t' = u'_{\perp}\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_{\parallel}v/c^2}t \Rightarrow u_{\perp} = u'_{\perp}\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_{\parallel}v/c^2}.$$

Мы обнаружили, что скорость сближения двух движущихся навстречу друг другу тел не равна сумме величин их скоростей! Ясно, что этот вывод не согласуется с евклидовой геометрией: ведь, согласно этой геометрии, если Вы сделали навстречу кому-либо два шага, а он за то же время сделал Вам навстречу три шага, то Вы с ним приблизились друг к другу на пять шагов, и никак иначе. Кроме того, в формулах преобразований Лоренца течение времени становится зависимым от координат. Поэтому два события в разных точках, одновременные по часам СО K, не будут одновременными по часам K' (говорят, что в СТО наблюдается относительность одновременности)!

Итак, помимо новой механики нам нужна и новая геометрия – геометрия Минковского. Это геометрия единого четырехмерного пространства-времени. Определение «длины» в пространстве Минковского строится путем нахождения величины, инвариантной и при преобразованиях Лоренца, и при «привычных» геометрических преобразованиях – параллельных переносах и поворотах в трехмерном пространстве, при которых временная координата не изменяется. Такой величиной является *интервал* s, для которого $s_{12}^2 = (ct_1 - ct_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$.

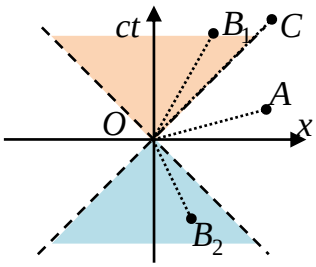
Пример 2: Мюоны – элементарные частицы, во многом похожие на электроны, только более тяжелые и нестабильные – время жизни мюонов в состоянии покоя равно примерно $\tau \approx 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с. При взаимодействии солнечного ветра с верхними слоями атмосферы Земли (на высотах от 10 до 30 км) такие частицы рождаются в довольно больших количествах. На первый взгляд, эти частицы не должны долетать до поверхности Земли – они движутся медленнее, чем свет (скорость которого $c \approx 3 \cdot 10^8$м/с, и $c \cdot \tau \approx 660$ м). Тем не менее их часто регистрируют в земных лабораториях. Объясните этот факт. В качестве примера вычислите долю долетевших до Земли мюонов, рожденных на высоте 10 км со скоростью v = 0,999999·c.

Решение: С точки зрения земного наблюдателя, в соответствии с преобразованием Лоренца, время для мюона течет <u>медленнее</u>, причем это замедление тем заметней, чем ближе скорость мюона к скорости света. В результате мы обнаруживаем, что движущийся относительно нас с околосветовой скоростью мюон живет намного дольше, чем покоящийся. В СО K', связанной с мюоном, события «рождение» и «распад» происходят в одной точке $x' = 0$, в моменты времени $t_1' = 0$ и $t_2' = \tau$. Тогда им соответствуют моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2 = \dfrac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} >> \tau$ по «земным» часам. Этот эффект носит название «релятивистского замедления времени», и благодаря ему мюон за время жизно τ успевает пролететь в СО, связанной с Землей, расстояние $s \approx \dfrac{c\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} >> c\tau$. Например, для заданного значения $v = 0{,}999999 \cdot c$ $s \approx \dfrac{c\tau}{\sqrt{2 \cdot 10^{-6}}} \approx 46{,}66$ км. Соответственно искомая доля $P = e^{-h/s} \approx 0{,}807$.

Полезно рассмотреть это явление и в СО «мюон». В этой системе между рождением и распадом мюона проходит время τ, и в это время Земля летит навстречу мюону с околосветовой скоростью. При этом расстояние между Землей и мюоном в момент его рождения (равное H в СО «Земля») определяется как разность соответствующих координат: $H' = x_3' - x_\mu'$. При этом $x_\mu' \equiv x_\mu \equiv 0$, а $x_3 = \dfrac{x_3'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow H' = H \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} << H$. Поэтому при достаточно близкой к скорости света величине скорости мюон и с этой точки зрения Земля должна долетать до мюона, так как для этого ей нужно пролететь совсем небольшое расстояние. Здесь мы замечаем еще один релятивистский эффект – «сокращение длин».

Очень полезно разобрать структуру причинно-следственных связей в релятивистском мире. Рассмотрим для простоты совокупность «событий» с фиксированными значениями координат $y \equiv z \equiv 0$. Квадрат интервала от начала координат (события О) до произвольного события $(ct, x, 0, 0)$ $s^2 = c^2t^2 - x^2$. По его значениям все события можно разделить на три группы:

1) $|x| > c|t| \Rightarrow s^2 < 0$. Такой интервал называют «*пространственноподобным*» - как у события А на рисунке. Нетрудно заметить, что такое значение s^2 (инвариантное!) допускает существование СО, в которой $t' = 0$, то есть в этой СО события О и А будут одновременными в разных точках. Ясно, что для этих событий не имеет жесткого смысла утверждение, что одно произошло раньше другого – их последовательность во времени зависит от СО. Поэтому они не не могут быть причинно связаны. Говорят, что область нахождения таких событий по отношению к О – «сектор относительной одновременности» («белый» цвет на диаграмме).



2) $|x| < c|t| \Rightarrow s^2 > 0$. Такой интервал называют «*времениподобным*» (точки B_1 и B_2). Теперь существует СО, в которой такие события происходят с О в одной точке, но в разные моменты времени, а последовательность этих событий во времени одинакова во всех СО Они <u>могут</u> (хотя, конечно, не обязаны) быть причинно связаны. Соответствующие области называют «конусом абсолютного будущего» («кремовая» область) и «конусом абсолютного прошлого» («голубая» область) по отношению к О.

3) $x = \pm ct \Rightarrow s^2 = 0$. Линии, лежащие на этих «конусах», соответствуют мировым линиям световых импульсов, и такие интервалы называют «*светоподобными*» (или «*изотропными*») – как для события С. События О и С могут быть причинно связаны, только если эта связь осуществляется световым сигналом – мировая линия частицы с ненулевой массой покоя не может привести из О в С.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что при использовании преобразований Лоренца как формул перехода от одной инерциальной СО к другой скорость света оказывается одинакова во всех инерциальных СО.

2. Пользуясь формулами из примера 1, запишите общую <u>векторную</u> формулу сложения двух скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

3. Звездолет 1 движется относительно Солнца по прямой со скоростью v = 0,9·c, а звездолет 2 – по курсу, составляющему угол α = 60° с курсом первого, с такой же по модулю скоростью. Найдите скорость звездолета 2 относительно звездолета 1.

4. Пусть в некоторой системе отсчета К событие 1 происходит в точке $x_1 = 0$ в момент $t_1 = 0$, а событие 2 – в точке $x_2 = L > 0$ в момент $t_2 = \tau > 0$.
а) при $L > c\tau$ найти систему отсчета K_1, в которой эти события происходят одновременно;
б) при $L < c\tau$ найти систему отсчета K_2, в которой эти события происходят в одной точке.

5. Проверьте инвариантность интервала относительно преобразований Лоренца.

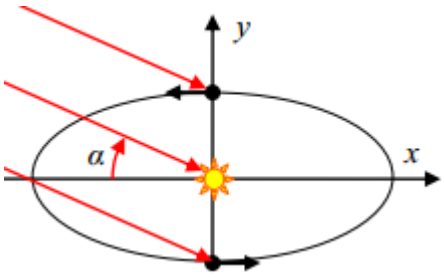
курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 13D: Релятивистские эффекты.

Темы: Следствия постулатов СТО. Астрономическая аберрация. Эффект Доплера. Анализ поведения релятивистских систем.

Постулаты СТО на очень многие явления заставляют нас посмотреть по-новому. Некоторые изменения носят количественный характер, но есть и принципиально новые явления.

Пример 1: Звезды, наблюдаемые с Земли, называют «неподвижными», если они находятся на расстоянии, очень значительно превосходящем диаметр земной орбиты, так что невозможно использовать метод параллакса для определения расстояния до них. Например, если расстояние до звезды порядка миллиарда диаметров орбиты Земли (а даже в нашей Галактике есть значительно более удаленные светящиеся объекты), то изменение направления на звезду, связанное с изменением положения Земли, будет порядка 10^{-9} радиан, и измерить его явно не удастся. Однако на самом деле это направление в течении года изменяется значительно более существенно (так называемое явление астрономической аберрации) – на величину порядка 10^{-4} радиан. Это связано с изменением движения Земли. Пусть, например, в СО, связанной с Солнцем, свет от «неподвижной» звезды падает под углом α к плоскости земной орбиты. Найдите изменение угла направления телескопа на звезду в положениях, кода Земля движется со скоростью $v \approx 30$ км/с «навстречу» фронту светового сигнала и «от» него.



Решение: Считая орбиту Земли практически круговой, направим ось x системы координат, связанной с Солнцем, в плоскости орбиты параллельно проекциям лучей, приходящих от звезды, а ось y – перпендикулярно плоскости орбиты. Тогда компоненты скорости светового сигнала по этим $c_x = c \cdot \cos\alpha$ и $c_y = -c \cdot \sin\alpha$. Используя формулы сложения скоростей, найдем, что в СО, связанной с Землей в положении, когда она движется «навстречу» световому сигналу ($\vec{v} = -v \cdot \vec{e}_x$):

$$\left\{ \begin{array}{c} c'_x = \dfrac{-v + c \cdot \cos\alpha}{1 - c \cdot v \cdot \cos\alpha / c^2} = \dfrac{-v + c \cdot \cos\alpha}{1 - v \cdot \cos\alpha / c} \\ c'_y = \dfrac{-c \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v \cdot \cos\alpha / c} \end{array} \right\} \Rightarrow tg(\alpha') = -\frac{c'_y}{c'_x} = \frac{\sin\alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos\alpha - v/c}.$$

Аналогично для противоположного движения Земли получим $tg(\alpha'') = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha + v/c}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$. Так как вариацию угла $\Delta\alpha \equiv \alpha' - \alpha''$ явно можно считать малой, то

$$\Delta\alpha \approx \cos^2\alpha \cdot [tg\alpha' - tg\alpha''] = \frac{2vc \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{c^2 \cdot \cos^2\alpha - v^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 2\frac{v}{c}\sin\alpha$$

(учитывая, что $\dfrac{v}{c} \approx 10^{-4}$, логично провести вычисления с точностью до величин первого порядка по этому параметру).

Пример 2: Источник, испускающий световой сигнал частоты ν, удаляется от приемника со скоростью $v_{\parallel}$ по «лучу зрения». Найти частоту сигнала, принимаемого приемником (т.е. изучить продольный эффект Доплера).

Решение: Свяжем систему отсчета K с приемником и рассмотрим два события (1 и 2): последовательное испускание источником двух «гребней» электромагнитной волны (то

есть нам нужны события, происходящие с источником, разнесенные по его часам на один период испускаемого излучения). Выберем начало отсчета времени приемника так, чтобы $t_1 = 0$. Ось x системы координат направим от приемнику к источнику. Пусть в момент $t_1 = 0$ координата источника $x_1 = r$. Тогда событие 2 произойдет в момент времени t_2 в точке с координатой $x_2 = r + vt_2$ (источник сместится). Используя преобразования Лоренца, найдем, что для СО K', связанной с источником:

$$\left\{\begin{array}{c} t_1' = \gamma\left(0 - \dfrac{vr}{c^2}\right) = -\gamma\dfrac{vr}{c^2} \\ t_2' = \gamma\left(t_2 - \dfrac{v(r+vt_2)}{c^2}\right) = \gamma t_2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) - \gamma\dfrac{vr}{c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow T_0 = t_2' - t_1' = \gamma t_2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{t_2}{\gamma}$$

(T_0 – период излучения по часам источника). Таким образом, $t_2 = \gamma T_0$ (мы опять столкнулись с эффектом релятивистского замедления времени). Теперь рассмотрим события 3 и 4 – прием этих же «гребней» волны приемником. Ясно, что $t_3 = \dfrac{r}{c}$, а $t_4 = t_2 + \dfrac{r + vt_2}{c} = \dfrac{r}{c} + t_2\left(1 + \dfrac{v}{c}\right)$. Следовательно, период принимаемого излучения

$$T = t_4 - t_3 = t_2\left(1 + \frac{v}{c}\right) = T_0\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \Rightarrow \nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}.$$

Итак, при удалении источника частота уменьшается благодаря двум эффектам: релятивистскому замедлению времени и удалению источника. Уменьшение частоты сигналов удаляющего источника часто называют «красным» смещением.

Пример 3: Пусть у нас есть карандаш длиной L и пенал длиной $l = \dfrac{L}{2}$. Естественно, карандаш не помещается в пенал. Тем не менее, если мы направим карандаш по оси пенала с открытой крышкой со скоростью, чуть большей $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$, то благодаря эффекту релятивистского сокращения длин длина карандаша в СО K, связанной с пеналом, будет чуть меньше $L' = L\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{L}{2}$. Следовательно, в момент времени, когда «острие» карандаша коснется стенки пенала, «мгновенный» затвор может захлопнуть крышку позади «конца» карандаша, и в это мгновение карандаш целиком будет находится внутри пенала. Опишите этот процесс в СО K', связанной с карандашом. Ведь в этой СО длина карандаша равна L, а из-за релятивистского сокращения длина пенала $l' = l\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \approx \dfrac{L}{4}$, и карандаш не может поместиться в пенале. В чем же дело?

Решение: Будем считать, что в СО K события 1 и 2 (касание острием карандаша стенки пенала и закрытие крышки) происходят в момент времени $t_1 = t_2 \equiv 0$. Если начало координат совмещено со стенкой пенала, то $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{L}{2}$. Нетрудно заметить, что по часам K' события 1 и 2 не одновременны, и при этом (считаем, что начало координат K' в момент $t' = 0$ тоже совмещено с острием карандаша и стенкой пенала): $t_1' \equiv 0$, $t_2' = \gamma\left(0 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{L}{c}$. При этом $x_1' \equiv 0$ и $x_2' = \gamma\left(\dfrac{L}{2} + 0\right) = L$, то есть действительно острие карандаша и стенка пенала находятся в одной точке в некоторый момент времени по часам K', и конец карандаша и крышка пенала также «совмещаются» в некоторый момент времени, просто в K' это <u>разные</u> моменты времени. При этом в любой момент времени в K' разность координат конца и острия карандаша равна L, а разность

координат стенки и крышки пенала – $\frac{L}{4}$ (пока они не меняют состояния движения). Итак: в СО, связанной с карандашом, на него налетает пенал, и в момент времени $t_1' = 0$ стенка пенала сталкивается с острием карандаша. Крышка пенала после этого еще продолжает двигаться по закону $x_K' = \frac{L}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} c t_K'$, и к моменту $t_2' = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{c}$ как раз «доезжает» до точки $x_2' = L$. Что при этом «делают» стенка пенала и острие карандаша? Это уже зависит от результата их соударения (для стенки пенала моменты времени $0 < t' < \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{c}$ соответствуют $t > 0$). Если острие пробивает стенку, не теряя скорости, то в K' стенка пенала будет ехать вслед за крышкой с той же скоростью, и в момент $t_2' = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{c}$ уже будет находиться в точке с координатой $x' = \frac{3L}{4}$. Очень любопытный вариант – если после столкновения с крышкой в K карандаш «почти мгновенно» останавливается (конечно, это не вполне физичная модель, так как мы считаем скорость распространения упругих волн в карандаше бесконечно большой, но эта нефизичность сама по себе не должна влиять на согласованность картин в разных СО). Тогда <u>после</u> $t_1 = t_2 \equiv 0$ карандаш «очень быстро расправляется» до длины L (если считать, что крышка ему помешать не сможет – иначе надо еще дополнительно описать взаимодействии карандаша и крышки). Получается следующая картина: от острия к концу по карандашу катится «бесконечно быстрая» волна остановок, которая встречается с концом в точке $x = \frac{L}{2}$, и затем за малое время «выдвигает» его из пенала до точки $x = L$. Как этот процесс выглядит в K'? Рассмотрим точку пенала с координатой $0 < x < \frac{L}{2}$. Остановка участка карандаша около нее происходит в момент времени $t = 0$, то есть в K' $t_0' = \gamma \frac{vx}{c^2}$, $x_0' = \gamma x$. Значит, «волна остановок» движется по пеналу по закону $x_0'(t_0') = \frac{c^2}{v} t_0' = \frac{2}{\sqrt{3}} t_0'$, то есть с конечной (хотя и «сверхсветовой») скоростью. Эта волна «догоняет» крышку пенала в момент времени, определяемый из равенства

$$x_K'(t') = x_0'(t') \Rightarrow \frac{L}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} c t' = \frac{2}{\sqrt{3}} c t' \Rightarrow t' = \frac{\sqrt{3}L}{2c},$$

то есть точно в момент t_2'! К этому моменту пенал «растягивается» от острия до конца карандаша. После этого волна «отражается» от крышки и превращается в волну «стягивания» пенала к его размеру (опять же, если взаимодействие конца карандаша и крышки не помешает). Как видно, процесс последовательно описывается в обеих СО, хотя и весьма по-разному. Интересно построить «более физическое» описание, учтя конечность распространения «волны остановок» в веществе карандаша. Например, можно считать что скорость распространения этой волны в K максимальная из физически возможных, то есть равна скорости света. Тогда при $t_1 \equiv 0$ $t_2 = \frac{L}{c} \neq 0$, и надо повторить все рассуждения заново.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите, под каким углом к вертикали следует расположить телескоп, чтобы увидеть источник света, движущийся относительно телескопа горизонтально со скоростью v в тот момент, когда он проходит точно «над» телескопом.

2. Два прожектора, закрепленные на одной платформе, светят в противоположных направлениях. С какой скоростью платформа должна двигаться в направлении перпендикулярном узким световым пучкам прожекторов, чтобы для наблюдателя эти пучки были перпендикулярны?

3. Стержень АВ движется с постоянной скоростью $v = c/\sqrt{3}$ относительно стержня A'B'. Собственные длины обоих стержней равны L, и на их концах установлены синхронизированные (А с В, А' с В') часы. Стержни параллельны. Момент времени, когда точка В поравнялась с А', взят за начало отсчета времени в СО, связанных с каждым из стержней. Определите показания часов в точках А и А' в момент, когда они поравняются друг с другом. Найти также показания часов в точках В и В' в момент, когда они поравняются друг с другом.

4. В межзвездном пространстве установлены «эталонные часы», маятником которых служит световой сигнал, бегающий между двумя параллельными абсолютно отражающими зеркалами, отражающийся от них нормально. Расстояние между зеркалами равно L_0. Мимо часов пролетает со скоростью $v = \beta \cdot c$ $(0 < \beta < 1)$ ракета. Чему равно расстояние между зеркалами эталонных часов, измеренное с помощью «линейки» на ракете? Каким будет при этом период движения сигнала по часам, установленным на ракете? Покажите, исходя из преобразований Лоренца, что скорость сигнала с точки зрения наблюдателя на ракете равна c.

5. В межзвездном пространстве расположены две станции, которые покоятся относительно друг друга. Расстояние между станциями равно L. На станциях установлены синхронизированные точные часы. В момент времени $t = 0$ по этим часам мимо станции 1 пролетал звездолет, двигавшийся с постоянной скоростью $v = 0{,}6 \cdot c$. В этот же момент на звездолете были запушены такие же часы, которые начали отсчитывать «бортовое время» t' (от нуля). В какой-то более поздний момент на звездолете произошла вспышка. Свет от нее достиг обеих станций, отразился от них, и оба отраженных сигнала достигли звездолета одновременно. На каких расстояниях от станций (по шкале СО, в которой станции неподвижны) находился звездолет в момент вспышки? В какие моменты времени (по часам, установленным на станциях) происходили отражения света вспышки от станций? А в какие моменты времени происходили эти отражения по показаниям часов на звездолете? Что показывали часы звездолета в момент приема отраженных сигналов?

6. В СО, связанной с комнатой, жесткий стержень движется с постоянной скоростью $v = 0{,}6 \cdot c$ по направлению к «полу». При этом стержень все время параллелен «полу» и лежит в одной плоскости, перпендикулярной «полу». По полу в этой же плоскости с такой же по величине скоростью скользит шайба. Какой угол составляет с «полом» стержень в СО, связанной с шайбой? Найдите величину скорости стержня относительно шайбы.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 14D: Релятивистская механика.

Темы: Релятивистская динамика. Законы сохранения и использование законов преобразования сохраняюшихся величин.

Обобщение уравнений движения материальной точки для релятивистского случая производится из тех соображений, что оно должно быть инвариантно относительно преобразований Лоренца, причем закон преобразования сил определяется так, чтобы сила совпадала со скоростью изменения импульса. Таким образом: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Ключом к выбору правильного выражения для импульса явилось то, что выражения для сил электромагнитной природы, действующих на тело, должны остаться такими же, как в теории Максвелла – ведь ее уравнения обладают нужным свойством инвариантности. Релятивистская инвариантность обеспечивается, если выражение для импульса имеет вид $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. В этом выражении величина m_0 – *масса покоя* тела (при нулевой скорости) – именно ее и следует считать мерой инертности тела в СТО. Величину $m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, входящую в выражение для импульса в данной системе отсчета (как видно, $\vec{p} = m\vec{v}$), часто называют «импульсной массой», но она <u>не является</u> характеристикой тела, так зависит от выбора СО.

Пример 1: Найдите закон изменения скорости частицы под действием постоянной силы $\vec{F} = F \cdot \vec{e}_x$ при нулевой начальной скорости.

Решение: Уравнение движения по оси x:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] = F \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{F}{m_0}t \Rightarrow v(t) = c \cdot \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}},$$

то есть скорость тела под действием силы монотонно растет, но никогда не достигнет скорости света.

Можно убедиться, что для величины $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \equiv mc^2$, справедливо соотношение $\frac{dE}{dt} = c\frac{d}{dt}\left(\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}\right) = F \cdot c \cdot \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}} = F \cdot v(t)$. Таким образом, скорость изменения E в точности равна мощности работы силы. Поэтому естественно считать E энергией движущегося релятивистского тела. Следует обратить внимание, что эта она не обращается в ноль при нулевой скорости – величина $E_0 = m_0 c^2$ называется *энергией покоя* тела. Разность полной энергии и энергии покоя следует считать энергией движения (кинетической энергией):

$$E_K \equiv E - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right],$$

причем при $v << c$ это выражение принимает «привычный» вид.

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \Rightarrow E_K \approx \frac{m_0v^2}{2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right).$$

Отметим, что мы обнаружили связь, выражаемую знаменитой формулой Эйнштейна $E \equiv mc^2$: релятивистская энергия и импульсная масса по сути являются одной и той же

величиной (они отличаются только на множитель, являющийся универсальной константой).

Важный случай – частицы с нулевой массой покоя. Как видно, при $m_0 = 0$ частица имеет ненулевую энергию только при скорости, равной скорости света. Поэтому такие частицы не могут существовать иначе, чем двигаясь со скоростью света. При этом их импульсная масса отлична от нуля.

Отметим особо, что для любой скорости $E^2 - c^2\vec{p}^2 = m_0^2 c^4$ (соответственно $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2\vec{p}^2}$, а для частиц с нулевой массой покоя $E = c\,|\,\vec{p}\,|$). Это соотношение удобно применять при решении многих задач. Особенно удобно его использовать при решении уравнений законов сохранения энергии и импульса.

Пример 2: Пусть в некотором детекторе зарегистрированы две пары «электрон-позитрон», рожденные двумя фотонами*. Суммарная энергия электрона и позитрона в каждой из пар оказалась равна E_1 и E_2 соответственно, и при этом оказалось, что линии движения породивших их фотонов пересекаются в одной точке, причем угол между этими линиями равен ϑ. Возникло предположение, что фотоны появились вследствие произошедшего в этой точке распада нейтральной частицы. Найти массу этой частицы (сравнив это значение с массами существующих частиц, можно проверить справедливость предположения).

**Фотоны – кванты света. Взаимодействуя с вакуумом в некотором силовом поле (например, вблизи ядра атома вещества) они действительно могут рождать электрон-позитронные пары. Позитрон – «античастица» электрона, имеющая такую же массу и противоположный знак заряда.*

Решение: Фотоны имеют нулевую массу покоя, поэтому их энергии (равные суммарным энергиям рожденных пар) связаны с импульсами соотношениями $E_{1,2} = c\,|\,\vec{p}_{1,2}\,|$. Энергия и импульс распавшейся частицы равны сумме энергий и импульсов фотонов: $E = E_1 + E_2$, $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Поэтому

$$m^2c^4 = E^2 - c^2\vec{p}^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - c^2\vec{p}_1^2 - c^2\vec{p}_2^2 - 2c^2\,|\,\vec{p}_1\,||\,\vec{p}_2\,|\cos\vartheta =$$
$$= 2E_1E_2(1-\cos\vartheta) = 4E_1E_2\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right),$$

то есть $m = \dfrac{2\sqrt{E_1E_2}}{c^2}\left|\sin\left(\dfrac{\vartheta}{2}\right)\right|$.

При переходе из одной инерциальной СО в другую должны преобразовываться не только координаты пространства-времени, но и в принципе вообще все физические величины. Все величины можно классифицировать по законам преобразования. Например, скаляры – это величины, остающиеся неизменными. Четырех-векторы – это величины из четырех компонент, преобразующихся точно по формулам Лоренца (то есть все они ведут себя как $x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$). Обратим внимание на отождествление: $x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, и $x^3 \equiv z$. Если ввести также $x_0 \equiv ct$, $x_1 \equiv -x$, $x_2 \equiv -y$, и $x_3 \equiv -z$, то квадрат интервала, являющийся скаляром, можно записать как $x^\mu x_\mu \equiv x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3$. Тогда эту конструкцию естественно отождествить со скалярным квадратом 4-вектора. Причем – в силу одинаковости формул преобразования компонент – скалярный квадрат $V^\mu V_\mu \equiv V_0^2 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2$ <u>любого 4-вектора</u> V^μ тоже должен быть скаляром. Также скаляром должно быть скалярное произведение двух 4-векторов $V^\mu W_\mu \equiv V^0W_0 - V_xW_x - V_yW_y - V_zW_z$. Отметим, что скаляры и 4-векторы – самые простые по трансформационным свойствам (то есть по виду законов преобразования) величины. Есть и другие, более сложные, законы преобразований.

Например, энергия E и импульс $\vec{p}$ тела с массой покоя m_0 очевидно изменяются при переходе из одной СО в другую, но при этом величина $\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \equiv m_0^2 c^2$ остается неизменной, то есть это - скаляр. Нетрудно заметить, что она может быть записана как скалярный квадрат 4-вектора $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$. Поэтому $\frac{E}{c}$ и компоненты $\vec{p}$ преобразуются именно по формулам Лоренца. Важное обстоятельство: признание энергии-импульса 4-вектором «практически» очень ценно, так как теперь инвариантность величины $E^2 - \vec{p}^2 c^2$ имеет место не только для <u>одной частицы</u>, но и для <u>произвольной физической системы</u>. Это сильно расширяет круг задач, для которых можно использовать этот «инвариант». Наиболее яркий пример – задачи о «пороге реакции».

Пример 3: Пучок антипротонов с энергией E налетает на покоящуюся мишень, в которой при их столкновении с протонами рождается бозоны Хиггса. Масса покоя протона равна m, масса покоя бозона Хиггса равна M. При какой минимальной величине E возможна такая реакция?

Решение: Проще всего рассматривать эту задачу в системе центра масс (СЦМ), в которой полный импульс пары протон-антипротон равен нулю: $\vec{P}_{СЦМ} = 0$. Так как импульс рожденного бозона Хиггса равен нулю, а энергии сталкивающихся частиц одинаковы, то каждая из них должна иметь энергию не менее $\frac{Mc^2}{2}$, и минимальная полная энергия системы $E_{СЦИ}^{\min} = Mc^2$. В исходной системе с покоящейся мишенью (ее называют «Лабораторной Системой») энергия системы протон-антипротон $E_{ЛС} = E + mc^2$, а импульс равен импульсу налетающего антипротона $\vec{P}_{ЛС} = \vec{p}$. Учитывая инвариантность $E^2 - \vec{p}^2 c^2$, получаем: $(E_{ЛС}^{\min})^2 - \vec{P}_{ЛС}^2 = (E_{\min} + mc^2)^2 - \vec{p}^2 c^2 = (E_{СЦМ}^{\min})^2 - \vec{P}_{СЦМ}^2 = M^2 c^4 - 0$, откуда $E_{\min}^2 - \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 + 2mc^2 E_{\min} = 2m^2 c^4 + 2mc^2 E_{\min} = M^2 c^4$ (здесь учтено, что $E_{\min}^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$), и поэтому $E_{\min} = \frac{M^2 c^2 - m^2 c^2}{2m} \approx \frac{M^2 c^2}{2m} >> Mc^2$. Это вычисление объясняет, почему для открытия бозона Хиггса строили коллайдер, хотя технически ускоритель с неподвижной мишенью проще. Если учесть, что $mc^2 \approx 938$МэВ, а $Mc^2 \approx 125$ГэВ, то $E_{\min} \approx 8329$ГэВ!

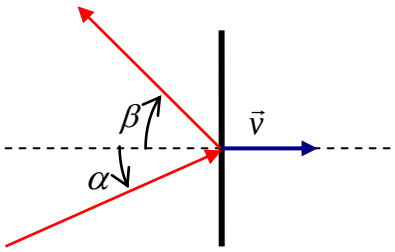
Приведенный пример – лишь частный случай мощного общего метода, в котором мы используем знание того, как разные величины преобразуются при преобразованиях Лоренца.

Например, при рассмотрении плоских волн можно заметить, что наличие в точке $\vec{r}$ в момент времени t узла или пучности волны определяется значением ее фазы $\phi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$, в которой $\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$ - циклическая частота, а $\vec{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ - волновой вектор волны. Факт наличия узла или пучности не должен зависеть от выбора инерциальной СО, поэтому фаза должна быть скаляром (не должна изменяться). Если заметить, что ее можно записать в виде скалярного произведения $\phi = g_{\mu\nu} k^\mu x^\nu$, где $k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right)$, а x^μ – 4-вектор координаты, то можно сделать вывод, что k^μ является 4-вектором. Знание этого факта позволяет легко находить изменение частоты и направления движения волны при переходах между СО.

Пример 4: Свет частоты ω_0 падает на зеркало, которое движется перпендикулярно своей поверхности со скоростью v. Угол падения равен α. Найти частоту отраженного света и угол отражения.

Решение: Направим ось x «неподвижной» СО K вдоль вектора скорости зеркала, как и ось x' СО K', связанной с движущимся зеркалом (для определенности будем считать, что зеркало «убегает» от падающего луча). Оси y и y' направим вдоль поверхности зеркала в плоскости падения луча. Тогда в K компоненты 4-вектора k^μ имеют значения $k^\mu = \left(\frac{\omega_0}{c}, \frac{\omega_0}{c}\cos\alpha, \frac{\omega_0}{c}\sin\alpha, 0\right)$, и для нахождения их значений в K' нужно применить формулы преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} k'_x = \gamma\left(\frac{\omega_0}{c}\cos\alpha - \frac{v}{c}\frac{\omega_0}{c}\right) = \gamma\frac{\omega_0}{c}\left(\cos\alpha - \frac{v}{c}\right) \\ k'_y = \frac{\omega_0}{c}\sin\alpha \\ k'_0 = \gamma\left(\frac{\omega_0}{c} - \frac{v}{c}\frac{\omega_0}{c}\cos\alpha\right) = \gamma\frac{\omega_0}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right) \end{cases}.$$



Закон отражения в K' нам известен: при отражении от покоящегося зеркала частота не изменяется, а угол отражения равен углу падения, то есть для волнового 4-вектора отраженного света q^μ в K' справедливы соотношения $q'_0 = k'_0$, $q'_x = -k'_x$, $q'_y = k'_y$. Произведя обратное преобразование Лоренца, находим компоненты q^μ в K:

$$\begin{cases} q_x = -\frac{\omega}{c}\cos\beta = \gamma\left(-k'_x + \frac{v}{c}k'_0\right) = -\gamma^2\frac{\omega_0}{c}\left[\cos\alpha\cdot\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - 2\frac{v}{c}\right] \\ q_y = \frac{\omega}{c}\sin\beta = \frac{\omega_0}{c}\sin\alpha \\ q_0 = \frac{\omega}{c} = \gamma\left(k'_0 + \frac{v}{c}k'_x\right) = \gamma^2\frac{\omega_0}{c}\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}\right) \end{cases}.$$

Из последнего соотношения получаем, что частота отраженного света

$$\omega = \omega_0\frac{1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

а из двух первых – что

$$tg\beta = \frac{\sin\alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\cos\alpha\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - 2\frac{v}{c}}.$$

Дополнение*: Как отмечалось выше, некоторые величины имеют более сложный закон преобразования, чем у 4-векторов. Например, трехмерные векторы напряженности и индукции электрического и магнитного полей нельзя считать компонентами каких-либо 4-векторов (в теорфизике найдена 4-мерная величина, компонентами которой они являются, но эта величина имеет более сложную структуру и здесь рассматриваться не будет). Закон их преобразования можно установить, отталкиваясь от установленного опытным путем факта, согласно которому движение релятивистского заряда в электромагнитном поле описывается соотношением $\frac{d\vec{p}}{dt} = q\{\vec{E} + [\vec{v}\times\vec{B}]\}$, то есть для силы Лоренца нужно использовать точно такое же выражение, как и в нерелятивистском случае. При этом в

системе покоя частицы на нее действует одно электрическое поле $\vec{E}'$. Учитывая, что $[\vec{v}\times\vec{B}]$ перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}$ и что в это выражение не дает вклада параллельная скорости компонента $\vec{B}_{\parallel}$, можно подобрать подходящее преобразование: при переходе из инерциальной СО в другую, движущуюся относительно нее со скоростью $\vec{v}$, $\vec{E}'=\vec{E}_{\parallel}+\gamma\{\vec{E}_{\perp}+[\vec{v}\times\vec{B}_{\perp}]\}$. Такое же выражение получается и из строгого построения теории Максвелла. Для индукции магнитного поля получается «симметричное» выражение: $\vec{B}'=\vec{B}_{\parallel}+\gamma\left\{\vec{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{E}_{\perp}]\right\}$ (некоторая асимметрия формул – наличие или отсутствие множителя со скоростью света – обусловлена использованием системы единиц СИ).

В качестве примера рассмотрим движение релятивистской частицы в электромагнитном поле.

Как было отмечено выше, уравнение для описания такого движения имеет вид $\frac{d\vec{p}}{dt}=q\{\vec{E}+[\vec{v}\times\vec{B}]\}$, и в общем случае его решение имеет достаточно сложный вид. Рассмотрим некоторые ситуации, в которых такое решение будет проще. Самый простой случай – движение в однородном постоянном магнитном поле $\vec{E}=0$, $\vec{B}=const$. Поскольку в этом случае сила всегда перпендикулярна скорости, то ее работа равна нулю, и модуль скорости неизменен. По этой причине релятивистский множитель $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ также постоянен, и его можно вынести из-под оператора дифференцирования по времени. Кроме того, удобно разделить скорость на компоненты, одна из которых параллельна, а другая – перпендикулярна $\vec{B}$. Тогда уравнения для них имеют вид: $\gamma m\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt}=0\Rightarrow\vec{v}_{\parallel}=const$ (т.е. вдоль поля частица движется с постоянной скоростью – такое движение называют «продольным дрейфом») и $\gamma m\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=q[\vec{v}_{\perp}\times\vec{B}]$. Как видно, второе уравнение в точности совпадает с уравнением для движения нерелятивистской заряженной частицы в плоскости, перпендикулярной полю, только с добавлением множителя γ. Поэтому движение – точно такое же («равномерное ларморовское вращение»), только в формулах для радиуса и частоты вращения нужно заменить m на γm: $R=\frac{\gamma m v_{\perp}}{qB}=\frac{p_{\perp}}{qB}$ и $\omega=\frac{qB}{\gamma m}=\frac{qBc^2}{E}$ (здесь $E=\gamma mc^2$ – полная энергия частицы; как видно, влияние «релятивизма» сводится к эффективному утяжелению частицы). Итак, общее движение в однородном магнитном поле сводится к комбинации продольного дрейфа и ларморовского вращения. Другая интересная задача с достаточно «простым» решение – движение релятивистской частицы в случае, когда $\vec{E}=const$, $\vec{B}=const$, причем начальная скорость частицы $\vec{v}_0$ перпендикулярна $\vec{E}$. Тогда, переходя в новую инерциальную СО **К'**, движущуюся относительно исходной со скоростью $\vec{v}_0$, обнаруживаем, что в этой новой СО начальная скорость равна нулю, а напряженность электрического поля равна $\vec{E}'=\gamma\{\vec{E}+[\vec{v}_0\times\vec{B}_{\perp}]\}$. Индукция магнитного поля $\vec{B}'=\vec{B}_{\parallel}+\gamma\left\{\vec{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}[\vec{v}_0\times\vec{E}]\right\}$. Нетрудно обнаружить, что существует такое значение начальной скорости, при котором $\vec{E}'=0$: $\vec{E}+[\vec{v}_0\times\vec{B}_{\perp}]=0$, откуда $\vec{v}_0=\frac{1}{B_{\perp}^2}[\vec{E}\times\vec{B}_{\perp}]\equiv\vec{v}_{др}$. Тогда в **К'** частица так и останется в покое, а это значит, что в исходной системе частица будет двигаться равномерно-прямолинейно. Такое движение называют «дрейф в скрещенных полях», и соответствующую скорость – «скоростью дрейфа в скрещенных

полях». Это наблюдение можно использовать и для анализа движения частицы в более сложном случае, когда начальная скорость не равна скорости дрейфа. В этом случае можно перейти в новую систему отсчета, движущуюся со скоростью дрейфа $\vec{v}_{др} = \frac{1}{B_\perp^2}[\vec{E} \times \vec{B}_\perp]$. Начальная скорость в новой системе $\vec{v}_0'$ определяется по релятивистской формуле сложения скоростей, и в системе **K'** частица движется в однородном магнитном поле $\vec{B}' = \vec{B}_\parallel + \gamma\left\{\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{v}_{др} \times \vec{E}]\right\} = \vec{B}_\parallel + \gamma\vec{B}_\perp\left\{1 - \frac{E^2}{c^2 B_\perp^2}\right\} + \gamma\frac{(\vec{E}\vec{B}_\perp)\vec{E}}{c^2 B_\perp^2}$. Это движение было рассмотрено выше, то есть решение для задачи в **K'** известно. После этого остается вернуться в исходную систему отсчета.

Упражнение*: Исследовать электромагнитное поле релятивистского точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью $|\vec{v}| = c/2$ (то есть в «лабораторной» системе отсчета закон движения заряда $\vec{r}_0(t) = \vec{e}_x \frac{ct}{2}$): получить аналитические выражения для $\vec{E}(t,\vec{r})$ и $\vec{B}(t,\vec{r})$, изобразить картину эквипотенциальных поверхностей электрического поля и картину линий индукции магнитного поля.

Упражнение*: Небольшое тело массой m с зарядом q влетело со скоростью $v_0 = 0{,}25 \cdot c$, направленной вдоль оси x, в область, в которой созданы однородные электрическое поле $\vec{E} = 0{,}5cB\vec{e}_y$ и магнитное поле $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Найти закон движения тела в этой СО.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В пучке π-мезонов энергия частиц в n = 3 раза превышает энергию покоя. На входе в распадный канал поток частиц равен I_0. Найдите поток частиц в пучке на расстоянии x = 43 м от входа. Время жизни покоящихся пионов $\tau_0 \approx 25$ нс.

2. Пи-ноль-мезон (π^0) распадается на два фотона ($\pi^0 \to \gamma\gamma$), один из которых регистрируется детектором, расположенным на оси пионного пучка («по ходу» пионов). Энергия этого фотона $E_1 = 2mc^2$, где m - масса покоя пиона. Найти кинетическую энергию распавшегося пиона.

3. Антипротон с кинетической энергией $E = 8mc^2$ (m- масса покоя протона) сталкивается с покоящимся протоном и рождает π^0-мезон, который затем распадается на два γ-кванта, полетевших вдоль оси движения антипротона. Найти их энергии.

4. Пи-ноль-мезон (π^0) с энергией E распадается на два фотона ($\pi^0 \to \gamma\gamma$), которые вылетают под одинаковым углом к оси пионного пучка. Найти этот угол. Масса покоя пиона равна m.

5. Позитрон с кинетической энергией $E_K = 2m_e c^2$ налетает на покоящийся свободный электрон. В результате аннигиляции рождаются два гамма-кванта с одинаковыми энергиями. Найти угол разлета этих гамма-квантов.

6. Пи-минус-мезон с энергией $E = 3m_\pi c^2$ распадается на мюон и антинейтрино ($\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$). Антинейтрино вылетело под прямым углом к оси пионного пучка. Найти его энергию. Массу покоя антинейтрино считать пренебрежимо малой.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 15D: «Квантовый мир»: особенности поведения микрообъектов.

Темы: История квантования. Микрообъекты. Квантовые законы. Вероятность. Измерения в микромире и описание состояния микрообъекта.

Немного истории: проблемы классической физики и «магия» кванта.

В XIX веке прогресс физики и математики привел к впечатляющим успехам. Развитие методов ньютоновской механики позволяло просчитывать работу сложных механизмов и обнаруживать неизвестные ранее планеты Солнечной системы по их влиянию на орбиты известных планет. Электродинамика Максвелла не только описала все известные электрические и магнитные явления, но и предсказала электромагнитные волны, положив начало эпохе беспроводной передачи информации. Статистический поход связал молекулярно-кинетическую теорию вещества и термодинамику. Сейчас эти теории считают составляющими *классической* физической картины мира, и в конце XIX века многим казалось, что мир уже почти полностью понят в рамках этой картины.

Однако все же оставались отдельные проблемы, решение которых построить не удавалось. И многие из них были связаны с попытками изучения процессов микромира – процессов, происходящих с отдельными атомами или даже внутри них. Например, было открыто явление радиоактивности, но построить модель для него не получалось – только было понято, что связано оно как раз с внутренним строением атомов. Но самые интригующие события были связаны с изучением того, как атомы излучают и поглощают свет. Уже в 1860 году наука научилась использовать метод *спектрального анализа* – было замечено, что *спектры излучения* и *поглощения* (наборы длин электромагнитных волн, которые атом изучает и поглощает) содержат наборы «узких» спектральных линий, причем у каждого элемента строго свой спектр, так что можно узнать, из каких атомов состоит любое светящееся вещество – даже далекие звезды. Более того – некоторые элементы были открыты по их излучению из космоса раньше, чем их удалось найти на Земле. С точки зрения классической физики это означало, что какие-то заряженные частицы внутри атомов совершали колебания с частотами из строго определенного набора, да еще и остающиеся практическими неизменными при вариациях температуры, давления и внешних полей. Все попытки смоделировать это движение в рамках законов классической механики ничего не давали (позже – в XX веке – удалось доказать, что это было невозможно). И при этом сами спектры были устроены не так сложно: например, в 1885 году преподавателю математики Иоганну Бальмеру удалось (по легенде – на спор с его знакомым, тоже преподававшим физику и математику) подобрать формулу, описывающую длины волн четырех линий из «видимой» части спектра атома водорода: $\lambda_n = a \cdot \frac{n^2}{n^2 - 4}$, где $a \approx 364{,}56$ нм (1 нанометр – это 10^{-9} м), а $n = 3{,}4{,}5{,}6$. А впоследствии оказалось, что последующие *n* тоже дают длины волн атома водорода, только в ультрафиолетовой области! Другое «загадочное» явление – *внешний фотоэффект*, то есть выбивание электронов из металлов под действием света – было изучено Александром Столетовым в 1888-1890 годах. Он обнаружил простые закономерности, совершенно не укладывавшиеся в рамки классической физики: максимальная кинетическая энергия выбиваемых электронов не зависела от интенсивности направляемого на металл света, но линейно зависела от его частоты, и при этом для каждого металла существовала частота, ниже которой электроны вообще не выбивались (эту частоту назвали «*красной границей фотоэффекта*» для данного металла). Еще один удивительный факт нашелся при изучении изучения нагретых тел. В этом случае спектр излучения не разбивался на отдельные линии, а был *сплошным*, причем длина волны, соответствующая максимуму интенсивности излучения, была очень просто связана с температурой тела – согласно *закону смещения*, открытому экспериментально Вильгельмом Вином в 1893 году,

$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$, где постоянная Вина $b \approx 2898$мкм·К. Мощность излучения, испускаемого с единицы площади, тоже зависит от температуры, как выяснил экспериментально Иозеф Стефан в 1879 году, $J = \frac{\Delta E_{rad}}{\Delta S \Delta t} = \sigma \cdot T^4$. Здесь постоянная Стефана-Больцмана $\sigma \approx 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4). В этом случае Людвигу Больцману удалось в 1884 году вывести эту формулу в рамках термодинамики, но ему пришлось предположить, что электромагнитное излучение можно рассматривать как газ в МКТ. Это тоже было не вполне понятно с точки зрения теории Максвелла. А остальные упомянутые формулы и вовсе не удавалось получить даже при использовании очень сложной математики.

Прорыв произошел на рубеже веков, в 1900 году. Макс Планк предложил странную для современников идею – что обмен энергией между электромагнитным полем и атомами вещества возможен только строго фиксированными порциями (Планк назвал их «***квантами***» - от латинского «quantum» – «сколько»), причем величина порции прямо пропорциональна частоте колебаний поля. Так появилась *формула Планка*, которую теперь записывают $E = h\nu$. И Планку удалось в рамках этой модели получить закон смещения Вина и определить коэффициент пропорциональности h (который теперь называют *постоянной Планка*) через постоянную Вина, постоянную Больцмана k и скорость света c: если ввести величину $z \approx 4{,}965$, являющуюся корнем уравнения $\frac{z}{5} = 1 - e^{-z}$, то $h = z\frac{kb}{c} \approx 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. С другой стороны, в той же модели получается и выражение для постоянной Стефана-Больймана: $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$, для которой получается <u>правильное</u> значение!

А еще через пять лет Альберт Эйнштейн, используя формулу Планка, записал уравнение закона сохранения энергии для внешнего фотоэффекта: если учесть, что для выхода электрона из металла требуется некоторая энергия, <u>минимальная</u> величина которой соответствует работе по преодолению притяжения положительно заряженных ионов решетки (ее так и называют – *работа выхода* A), то максимальная кинетическая энергия выбитых электронов как раз и оказывается линейной функцией частоты света:

$$E_{\max} = h\nu - A.$$

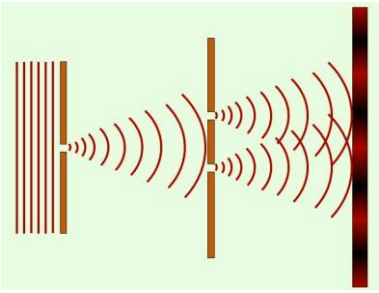
Это – уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, и оно, несмотря на свою удивительную простоту, решает задачу, над которой физики бились 25 лет, то есть позволяет корректно описать это удивительное явление. Ранее экспериментаторы для измерения максимальной энергии использовали включение тормозящего электроны электрического поля. Ясно, что условие остановки всех выбитых электронов состоит в том, что величина «задерживающего» напряжения достигает значения $U_0 = \frac{E_{\max}}{e}$, и, в соответствии с уравнением Эйнштейна $U_0 = \frac{h}{e} \cdot \left(\nu - \frac{A}{h}\right)$. Еще до 1900 года это соотношение записывали в виде $U_0 = \alpha \cdot (\nu - \bar{\nu})$, в котором величину $\alpha \approx 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ В·с подбирали из эксперимента (и она была одинакова для всех металлов), а – $\bar{\nu}$ это красная граница фотоэффекта. Теперь мы видим, что красная граница определяется работой выхода, а измерение α дает нам возможность еще раз независимо определить постоянную Планка: $h = \alpha \cdot e \approx 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, то есть то же значение, что из постоянных Вина и Стефана-Больцмана! Позднее (в 1913 году) Бору удалось с помощью «странной» гипотезы Планка вывести формулу для спектра атома водорода и связать h с постоянной в формуле Бальмера, и снова получить для нее то же значение, а затем множество других важных величин в физике микромира было найдено с использованием «магии» постоянной Планка. Подчеркнем: современники действительно считали идею Планка «странной», ибо она никак не выводилась из законов классической физики. Более того – чем упорнее

физики и математики ее исследовали, тем более они убеждались, что она противоречит этим законам. Так почему же она играет столь выдающуюся роль в микромире? Чем на самом деле законы физики в микромире отличаются от законов классической физики? В первую очередь постараемся ответить именно на эти вопросы.

Микромир: новые объекты и новый тип законов.

Задумаемся: из каких «объектов» составляется классическая модель нашего мира? В ньютоновской механике любое тело разбивается на настолько малые части, что к каждой из них применимо приближение материальной точки. Будем называть такой объект почти по латыни: «*корпускулой*». В электродинамике мы рассматриваем поля, распределенные в пространстве и меняющиеся с течением времени. Распространение возмущений поля в пространстве – это *волны*. Именно корпускулы и волны – два наиболее типичных объекта классической картины мира. В чем их ключевое различие? Корпускулы строго отделены друг от друга, и в системе двух корпускул вы всегда можем энергию системы разделить на энергию каждой корпускулы и энергию их взаимодействия. Волны, существующие в одно и то же время в одной области пространства, «перемешивают» свои поля, и отделить энергию одной волны от другой (особенно если мы не знаем, где находились их источники), вообще говоря невозможно – при сложении полей две волны в одних точках усиливают друг друга, а в других ослабляют, то есть происходит их *интерференция* – перераспределение энергии полей в пространстве при *суперпозиции* (наложении волн друг на друга). Как мы знаем, «настоящая» интерференция наблюдается только у *когерентных* волн, то есть у волн одинаковой частоты с постоянной разностью фаз – иначе энергия суммарной волны в любом месте равна сумме энергий волн. При использовании обычных источников света добиться когерентности разных источников нереально, и до создания лазеров для наблюдения интерференции света использовали наложение световых волн от одного и того же источника.

Долгое время при изучении света между собой конкурировали корпускулярная и волновая модели, и именно интерференция и другие аналогичные явления, характерные для волн и нехарактерные для корпускул, обеспечили преимущество волновой теории. Например, в опыте Юнга в качестве практически точечного источника света использовался прокол в плотной черной бумаге, сделанной кончиком иглы. Бумага клеилась на оконное стекло в солнечный день, и в комнате за окном других источников света не было. Свет от источника направлялся на ширму с двумя такими же маленькими отверстиями. За ширмой располагался экран (см. рисунок). Согласно корпускулярной теории, частицы света, проходя маленькое отверстие, отклонялись из-за взаимодействия с его краями, и получался конус излучения. На экране накладываются два конуса от двух отверстий в ширме, и о области перекрытия пятен от них интенсивности света просто суммируются. Согласно волновой теории, когерентность источников – проколов в ширме (она как раз обеспечена тем, что их свет получен от одного и того же источника) приведет к тому, что в области перекрытия пятен будет наблюдаться интерференция – чередование темных и светлых областей, в которых волны ослабляют и усиливают друг друга. Такую картину и наблюдал Юнг в своем опыте. Но давайте еще уменьшим размеры установки, и вспомним про гипотезу Планка. Пусть через первое отверстие кванты света (им придумали более образное название – *фотоны* от греческого «*φοτοσ*» – «свет») проходят <u>по одному</u>. Чтобы сохранять и суммировать действия этих фотонов, замен экран на фотопластинку. Будет ли наблюдаться интерференция? Ведь для этого «неделимому» кванту нужно разделиться, чтобы пройти через два отверстия в ширме! Опыт показывает, что интерференция все равно наблюдается, но вот что интересно – можно так подобрать параметры установки, что каждый фотон будет взаимодействовать только с одним атомом покрытия фотопластинки – каждый фотон будет оставлять одну точку на фотопластинке, и только после отправки большого числа фотонов эти точки образуют интерференционную картину из темных и светлых областей. Можно посылать фотоны



так, чтобы следующий отправлялся в путь только после того, как предыдущий свою точку на фотопластинке уже оставил. Это полностью исключает «обмен информацией» между фотонами. Как же тогда происходит интерференция? Еще интереснее станет результат, если снабдить отверстия в ширме какими-то элементами, чувствующими прохождение фотона (конечно, для этого они должны взаимодействовать с фотонами, но мы постараемся сделать так, чтобы это взаимодействие было по возможности слабее). Оказывается, что в этом случае всегда срабатывает только один элемент, то есть квант действительно оказывается неразделимым и проходит только через одно отверстие в ширме. Но при этом исчезает интерференционная картина – на фотопластинке мы найдем простое сложение интенсивности двух одинаковых пятен от отверстий. Как все это интерпретировать? Можно отметить, что аналогичный опыт был поставлен с электронами, у которых оказалось аналогичное поведение – с электронными лучами мы тоже наблюдаем интерференционную картину, а роль длины волны в этом случае играет величина, связанная с модулем импульса электрона: $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$. Это соотношение, называемое *формулой де Бройля*, указывает на то, что не только кванты света, но и другие частицы микромира проявляют волновые свойства, и при этом они не являются волнами. В самом деле – отдельные фотоны не «разбивались на части», чтобы интерферировать «с собой», проявляли корпускулярные свойства при взаимодействии с фотопластинками. Но они не являются и корпускулами, так как большое количество фотонов, не взаимодействующие между собой, дают нам «волновую» интерференционную картину. Способ связать все эти факты в одну картину был предложен Максом Борном в 1929 году: он предложил признать, что все ***микрообъекты*** не являются ни волнами, ни корпускулами (это некое совершенно новое по природе образование), а управляющими ими законы носят ***вероятностный*** характер. Это означает, что уравнения, описывающие распространение некой связанной с фотоном волны, описывают распространение вероятности нахождения фотона в том или ином месте. Если при движении фотона от источника до фотопластинки через ширму на него не производили никаких воздействий, выделяющих одно из отверстий, то волна вероятности пройдет через оба отверстия без нарушения когерентности, произойдет перераспределение вероятностей попадания фотона в то или иное место на фотопластинке. Для каждого фотона какая-то из вероятностей реализуется при его взаимодействии с фотопластинкой, и он попадает в один ее атом. При накоплении большого числа фотонов большее их число попадает туда, где при интерференции вероятность стала выше – там будет светлая зона, а там, где при интерференции вероятность стала меньше – темная зона. Даже при «самом аккуратном подглядывании» за фотонами мы разрушаем когерентность волн вероятности – каждый фотон после ширмы летит только от одного отверстия, и никакой интерференционной картины увидеть уже нельзя.

Здесь важно четко понимать, насколько серьезные изменения наших представлений о мире предлагает эта вероятностная интерпретация законов. Мы отказываемся от строгих законов – теперь все законы позволяют предсказывать только вероятности событий, а не сами события. Мы почти никогда не сможем с помощью одного измерения узнать исходное состояние микрообъекта – только набрав статистику многих измерений в одном и том же начальном состоянии, мы оценим вероятности для каждого из результатов, и по ним примерно определим начальное состояние. Мы отказались от классической причинности – если мы полностью воспроизводим все причины некоторого свершившегося события, это не означает, что оно свершиться снова. Это лишь означает, что у нас будет тот же набор возможных событий, что и раньше, с теми же вероятностями того, что они произойдут. Далеко не все физики в XX веке согласились со столь радикальными изменениями. Многие (среди и них были и те, кто вначале участвовал в создании квантовой физики – например, Эйнштейн) достаточно долго пытались построить альтернативную модель, которая должна была «вернуть» на строгие законы и классическую причинность. Но до сих пор такая модель не построена. А те, кто выбрал квантовую теорию, построенную на вероятностных законах , достигли за это время очень серьезных успехов – предсказывали и открывали новые явления, изучили и научились

просчитывать структуру молекул, атомов и атомных ядер. И самое главное – в последние 40 лет многие самые современные технологии (и в особенности – информационные и компьютерные технологии) все более и более задействуют квантовые процессы. Так что даже тем, кто не согласен с вероятностным характером квантовых законов, необходимо их изучать, так как иного способа «обсчитывать» события в микромире на данный момент нет.

Математическое отступление: немного о теории вероятностей.

При изучении сложных явлений мы довольно часто не можем точно предсказать исход того или иного события. Но при изучении большого количества таких событий можно использовать *статистический подход*. При таком подходе мы опираемся на понятие *вероятности* того или иного события. Для этого мы выделяем множество неких «элементарных» событий, которые обычно считаем *равновероятными*. Затем подсчитываем, какая доля от общего количества «элементарных» событий означает наступление исследуемого события. Именно ее мы и считаем вероятностью.

Например, рассмотрим бросание на стол однородного кубика с шестью гранями, пронумерованными цифрами от 1 до 6. Рассчитать результат одного броска (то есть указать, какая цифра окажется сверху, когда кубик остановится) очень сложно. Но можно заметить, что одно бросание кубика может привести к шести возможным результатам (то есть выпадение каждого из чисел мы считаем «элементарным» событием), и, если они равновероятны, то выпадение каждого числа происходит с вероятностью $w = \frac{1}{6}$. Умножив вероятность на количество попыток N, мы получаем *математическое ожидание* числа произошедших событий wN (или среднее число «успехов» в серии из N испытаний). Конечно, это не означает, что при $N = 6$ бросках кубика обязательно выпадет одна цифра 1 – это означает, что при очень большом числе бросков N число выпадений 1 будем тем ближе к $\frac{1}{6}N$, чем больше N.

Математики доказали, что при проведении серии из N независимых испытаний с вероятностью успеха w *стандартное отклонение* числа успехов (то есть корень квадратный из среднего квадрата отклонении от этого среднего) равно $\Delta N = \sqrt{Nw(1-w)}$. Как видно, для числа выпадений 1 при 6 бросках $N_1 \approx 1{,}0 \pm 0{,}9$ (относительная ошибка близка 90%!), а при 60000 бросках $N_1 \approx 10000 \pm 91$ (относительная ошибка менее 1%).

А что с несколькими событиями? Пусть, например, кубик бросается два раза. Как найти вероятность того, что при первом бросании выпадет цифра 1, а при втором – цифра 2? Эта вероятность вычисляется исходя из того, что это один вариант выпадения цифр из 36 возможных в двух независимых бросках – мы обнаруживаем, что вероятность осуществления двух независимых событий вместе равна произведению вероятностей осуществления каждого из них: $w_{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Измерения в микромире.

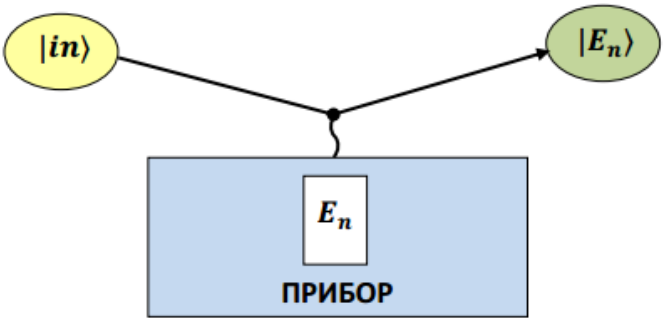
Физика – эмпирическая наука. Измерение является для физика и источником информации для построения моделей процессов, и основным способом проверки правильности этих моделей. Поэтому очень важно правильно понимать, как устроено само измерение. Первое, на что нужно обратить внимание – для получения информации об объекте наш *измерительный прибор* должен с ним *взаимодействовать*. Взаимодействие, конечно же, изменяет состояние исследуемого объекта и тем самым вносит искажение в результат измерения. Поэтому в макромире мы обычно стараемся построить прибор таким образом, чтобы это взаимодействие сделать как можно слабее. И часто достигаем в этом значительных успехов. Например, если мы определяем закон движения метки, нанесенной на кузов гоночной машины по данным видеозаписи, мы уверены, что свет, отражающийся от машины и попадающий в объектив видеокамеры, оказывает чрезвычайно слабое

влияние на движение машины. Но когда мы конструируем *макроскопический* прибор, который должен для нас измерить характеристику *микрообъекта*, мы не можем рассчитывать, что для микрообъекта взаимодействие с прибором произойдет «незаметно». А если мы вспомним о вероятностном характере законов, управляющих поведением микрообъекта, становится очевидно, что измерение практически всегда изменяет состояние микрообъекта.

Пусть, например, мы сконструировали прибор, измеряющий энергию микрообъекта. Это значит, что мы задали способ взаимодействия прибора с микрообъектом и способ, которым прибор превращает результат взаимодействия в число (результат измерения), которое он нам сообщит. Но разве это можно сделать каким-то единственным образом? Ясно, что существует много возможных конструкций. Итак, первый важный вывод: результат измерения зависит от конструкции прибора – каждый прибор измеряет свою «энергию микрообъекта», и мы всегда говорим об измеренной величине не как об «энергии вообще», а об «энергии, измеренном данным прибором». Представление о наличии у микрообъекта «энергии вообще» есть уже некоторое приближение – идеализация, согласно которой мы используем приборы, разброс результатов которых заметно меньше требующейся нам точности. Есть и второй: микрообъект до взаимодействия с прибором «не знает», что именно мы собираемся измерять, и он «не обязан» иметь определенное значение этой характеристики (например, энергии, измеряемой именно этим прибором). Значит, состояние микрообъекта до взаимодействия потенциально содержит ***все возможные результаты измерений*** нашего прибора, просто каждому из этих результатов соответствует некоторая ***вероятность*** того, что в результате взаимодействия прибор сообщит нам именно этот результат. И, наконец, третий вывод: после того, как измерение произведено, состояние микрообъекта изменилось определенным образом. Ведь если прибор сконструирован «правильно», то есть выданное им значение энергии – действительно энергия микрообъекта, то это значение соответствует именно состоянию микрообъекта после взаимодействия с прибором.

Обозначим символом $|in\rangle$ *состояние микрообъекта* до взаимодействия с прибором, и пусть числа $E_n = E_1, E_2, E_3, \ldots$ – это все возможные значения энергии, которые может получить наш прибор, а $|E_n\rangle$ – это *состояние микрообъекта*, в которые он переходит при взаимодействии с прибором, когда прибор выдает значение энергии E_n. Набор чисел $\{E_n\}$ мы далее будем называть *спектром* измеряемой величины (в нашем примере – *спектром энергии*), а $|E_n\rangle$ – «*состояниями с определенным значением энергии*». Итак:

Измерение в микромире – это процесс взаимодействия макроскопического прибора с микрообъектом, находящемся в некотором состоянии $|in\rangle$, в результате которого прибор сообщает число E_n, принадлежащее спектру измеряемой величины, а микрообъект переходит в состояние $|E_n\rangle$ с определенным значением измеряемой величины. При этом начальное состояние микрообъекта определяет однозначно набор вероятностей w_n, с которыми может быть получено каждое из возможных значений E_n.



На рисунке мы изобразили этот процесс схематически. Обратим внимание – мы рассуждаем в рамках вероятностной интерпретации законов микромира: даже в точности зная состояние $|in\rangle$, мы не можем однозначно предсказать результат измерения – только набор вероятностей возможных результатов! Оправдание такого подхода – в том, что именно он на практике дает наилучшее описание всех экспериментов, которые мы производим в микромире.

Отметим еще три важных обстоятельства. Первое: как обнаруживают измерения в микромире, набор возможных значений (спектр) характеристик микрообъекта, «наверняка» (то есть с вероятностью 100%) находящегося в области пространства конечных размеров (физики называют такой микрообъект «локализованным») является дискретным (то есть это действительно набор отдельных чисел, а не непрерывное множество значений). Можно говорить о том, что все эти характеристики изменяются «порциями», то есть «*квантованы*», как изменялась порциями энергия электромагнитных колебаний на определенной частоте в нагретом теле. Это одно из фундаментальных свойств микрообъектов (именно поэтому описывающую их физику назвали «квантовой физикой»). Эта дискретность делает микрообъекты похожими на корпускулы, у которых в каждом состоянии каждая характеристика имеет определенное значение. Даже когда мы иногда рассуждаем о непрерывном спектре какой-нибудь величины, мы на самом деле работаем с «очень-очень частым», но дискретным спектром. И для нас действие любого прибора однозначно описывается его спектром ($\{E_n\}$) и набором тех состояний $|E_n\rangle$, в которые он «загоняет» микрообъекты при измерениях. Второе: Мы, конечно, должны понимать, что не для всякого физического объекта достаточно измерения одной величины, чтобы получить полную информацию о его состояния. Обычно число необходимых независимых измерений больше 1, и мы считаем его *числом степеней свободы данного* объекта. Поэтому, строго говоря, для фиксации состояния нам нужно измерить несколько величин, которые *независимы* (результат любого из измерений нельзя однозначно предсказать по результатам остальных) и их можно выполнить «одновременно» (измерение любой из величин не искажает результатов измерений, проведенных до него). Такой набор величин называют «*полным набором наблюдаемых*» для данного микрообъекта. Впрочем, иногда нам достаточно частичной информации о состоянии объекта. Например, нас интересует только энергия электрона в атоме водорода, и нам неважно, какой у него момент импульса (а это независимые характеристики – при одинаковой энергии существуют состояния с разными значениями момента импульса). Третье: с точки зрения прибора начальное состояние микрообъекта есть ***суперпозиция*** состояний с определенным значением измеряемой величины. Этим микрообъекты похожи на волны: именно для волн мы рассматривали суперпозицию («наложение» разных волн друг на друга), приводящую к интерференции. Как мы помним, при описании суперпозиции волн удобно учитывать амплитуды и фазовые сдвиги волн с помощью метода комплексных амплитуд. Так будет удобно действовать и при описании *квантовой суперпозиции состояний*.

ИТОГ: Математика для квантового мира.

Построим математический аппарат для описания всех возможных состояний некоторого микрообъекта. При этом согласимся, что нам может понадобиться и «полная» фиксация состояния (для чего нужно будет измерить все величины из полного набора наблюдаемых), и «частичная» (скажем, по результатам измерения одной величины). Как мы поняли, нам нужно ввести набор состояний с «определенными наборами результатов измерений $f_1, f_2, ...f_s$ величин $F_1, F_2, ..F_s$». Обозначим их $|f_1...f_s\rangle$. В одном из этих состояний микрообъект должен оказаться после измерения. Произвольное состояние до измерения – это квантовая суперпозиция этих состояний. Таким образом, множество возможных состояний нашего микрообъекта (в дальнейшем будем называть его ***пространство состояний*** микрообъекта) состоит из ***векторов состояния*** $|\Psi\rangle = \sum_{f_1...f_s} \alpha(f_1...f_s)|f_1...f_s\rangle$. Здесь коэффициенты нашей суперпозиции $\alpha(f_1...f_s)$ – комплексные числа. Важно сразу постараться в этой конструкции «узнать знакомые черты». Чтобы ей пользоваться на практике, мы должны уметь умножать любой *вектор* из нашего *пространства* на комплексное число и складывать вектора так, чтобы снова получать вектора из этого пространства. Операции сложения векторов и умножения их на число математики называют *линейными операциями*, а пространства, в которых они определены так, что обладают «естественными» свойствами типа перестановочности

($|\Psi_1\rangle+|\Psi_2\rangle=|\Psi_2\rangle+|\Psi_1\rangle$), сочетательности ($\alpha\cdot(|\Psi_1\rangle+|\Psi_2\rangle)=\alpha\cdot|\Psi_1\rangle+\alpha\cdot|\Psi_2\rangle$), эквивалентность умножения на 1 и отождествления ($1\cdot|\Psi\rangle\equiv|\Psi\rangle$), называют *линейными* (*векторными*) *пространствами*. Хорошо знакомый для нас пример линейного пространства – обычное трехмерное пространство из векторов координат $\vec{r}=(x,y,z)$ (только в нем мы обычно используем операцию умножения на <u>вещественные</u> числа). Теперь можно заявить, что набор векторов $\{|f_1...f_s\rangle\}$ – это ***базис*** нашего пространства, и формула $|\Psi\rangle=\sum_{f_1...f_s}\alpha(f_1...f_s)|f_1...f_s\rangle$ просто описывает разложение любого из векторов по этому базису. В случае пространства состояний микрообъекта наш вектор должен еще и определять вероятности исходов измерений. Давайте договоримся, что вероятность получить набор значений $f_1, f_2, ...f_s$ равна квадрату модуля соответствующего коэффициента разложения $w_{f_1...f_s}=|\alpha(f_1...f_s)|^2$! Но тогда возникает естественное требование: сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1, то есть $\sum_{f_1...f_s}w_{f_1...f_s}=\sum_{f_1...f_s}|\alpha(f_1...f_s)|^2=1$. Вспомним «знакомое» пространство трехмерных векторов: базис в нем образуют единичные вектора, направленные вдоль координатных осей: $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$, и $\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z$. Сумма квадратов коэффициентов разложений - это квадрат длины вектора $|\vec{r}|^2=\vec{r}^2=x^2+y^2+z^2$. Мы можем так же (с поправкой на комплексные значения коэффициентов) определить «длину» (математики обычно говорят «*норму*») вектора в нашем пространстве состояний $||\Psi\rangle|^2\equiv\sum_{f_1...f_s}|\alpha(f_1...f_s)|^2$, и тогда мы окончательно определяем математический образ «состояния» микрообъекта – это вектор единичной длины в пространстве состояний.

Пример: Рассмотрим микрообъект с <u>одной</u> степенью свободы, энергия которого может принимать всего <u>два</u> значения: E_1 и E_2. То, что у степень свободы всего <u>одна</u>, означает, что двух независимых «наблюдаемых», которые можно одновременно измерить, у этого микрообъекта нет – все наблюдаемые либо однозначно определяются энергией, либо их нельзя измерить одновременно с энергией. Пусть $|1\rangle$ и $|2\rangle$ – состояния этого микрообъекта с определенной энергией. «Придумаем» конкретную математическую реализацию для них. Пусть $|1\rangle\equiv\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, а $|2\rangle\equiv\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Таким образом, каждый из этих двух базисных векторов мы отождествили со «столбиком» из двух <u>комплексных</u> чисел (1 и 0 – тоже можно считать комплексными числами, пусть и с нулевой мнимой частью). Договоримся складывать столбики «покомпонентно»: $\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}u_1+u_2\\v_1+v_2\end{pmatrix}$, а умножение на комплексное число задать как умножение обеих компонент: $\alpha\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\alpha\cdot u\\\alpha\cdot v\end{pmatrix}$. Произвольный вектор состояния – суперпозиция $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}$. Мы «создали» пространство состояний нашего микрообъекта как линейное пространство двухкомпонентных столбиков. Для физически реализуемого состояния должно выполняться условие $|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2=1$. Измерение энергии с вероятностью $|\alpha_1|^2$ дает E_1, и с вероятностью $|\alpha_2|^2$ дает E_1. Допустим, мы сконструировали измерительный прибор, который при измерении «загоняет в микрообъект» в состояние $|f_1\rangle\equiv\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\i/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, выдавая в качестве результата число $f_1=+2$, или в состояние $|f_2\rangle\equiv\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-i/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ при результате

$f_2 = -1$. Этот прибор измеряет наблюдаемую, которую мы обозначим F. Ясно, что измерение энергии в состоянии $|f_1\rangle$ с вероятностью 50% даст E_1, и с такой же E_2. А что мы можем сказать про измерение F в состоянии $|1\rangle$? Чтобы ответить на этот вопрос, нам нужно представить $|1\rangle$ в виде суперпозиции $|f_1\rangle$ и $|f_2\rangle$. Это на самом деле несложно сделать:

$$|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |f_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |f_2\rangle .$$

Значит, измерение F с вероятностями по 50% выдаст либо +2, либо –1.

А можно ли в построенном пространстве определить что-то, похожее на скалярное произведение в пространстве «обычных» векторов $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$? Например, можно договориться называть скалярным произведением двух векторов состояний

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle \equiv \begin{pmatrix} (u_1)^* & (v_1)^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = (u_1)^* u_2 + (v_1)^* v_2 .$$

Такое определение оказывается очень полезным: легко увидеть, например, что для состояния $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ вероятность $w_1 = |\alpha_1|^2 = |\langle 1 | \Psi \rangle|^2$. То есть вероятность выпадения некоторого значения при измерении равна квадрату модуля скалярного произведения «начального» вектора и вектора состояния, в котором объект окажется при таком результате измерения! Конечно, это не случайное совпадение, а точный результат. Вспомните: в «обычном» пространстве векторов коэффициенты разложения вектора по базису тоже в точности равны таким скалярным произведениям: $x = (\vec{e}_x \cdot \vec{r})$. Вектора, у которых скалярное произведение равно нулю, естественно считать *ортогональными*. Обратим внимание: у нас ортогональность приобрела физический смысл. Если два вектора состояния ортогональны, то микрообъект, находящийся в одном из них, при измерении нельзя обнаружить в другом! Например, ясно, что состояния с <u>разными определенными значениями</u> одной и той же величины <u>должны</u> описываться ортогональными векторами. Ведь если микрообъект изначально находится в состоянии с определенным значением энергии E_1, получить при измерении энергии другое ее значение должно быть невозможно. Так что вектора $\{|f_1 \ldots f_s\rangle\}$ с определенными значениями $f_1, f_2, \ldots f_s$ величин из некоторого полного набора наблюдаемых – не просто базис в пространстве состояний, но *ортонормированный базис*, то есть он составлен из ортогональных друг другу векторов единичной длины.

Классическую физическую систему с двумя возможными состояниями иногда называют «*бит*», указывая, что ее можно использовать в качестве ячейки памяти для записи 1 бита информации. Изученную нами систему, у которой базис пространства состояний содержит два вектора, называют «*квантовым битом*» или «*кубитом*».

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите вероятность того, что при двух бросках кубика (на каждой грани которого помещены от 1 до 6 точек) в сумме выпадет 8 точек. Считайте, что при каждом броске выпадения всех шести граней равновероятны.

2. При измерениях энергии некоторого микрообъекта в одном и том же начальном состоянии могут быть получены следующие значения: E_1 = 1 эВ с вероятностью w_1 = ½ , E_2 = 2 эВ с вероятностью w_2 = 1/3, E_3 = 3 эВ с вероятностью w_3 = 1/6. Найдите среднее значение и оцените разброс энергии в большой серии измерений.

3. Пусть $|\Psi_1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 7/25 \\ 24i/5 \end{pmatrix}$ и $|\Psi_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 24/25 \\ -7i/5 \end{pmatrix}$. Найдите скалярный квадрат каждого из этих векторов и их скалярное произведение.

4. Состояние кубита описывается вектором $|\Psi\rangle = N \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -12i \end{pmatrix}$, где N – вещественное положительное число. Найдите N.

5. У микрообъекта с <u>одной</u> степенью свободы, энергия которого может принимать <u>два</u> значения: E_1 = 4 эВ и E_2 = 9 эВ. Состояния этого микрообъекта с определенными значениями энергии – это $|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $|2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдите среднее значение и оцените разброс значений энергии, полученных в большой серии измерений над такими микрообъектами в состоянии $|\Psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4i/5 \end{pmatrix}$.

6. Для микрообъектов из предыдущей задачи построен прибор, измеряющий некоторую величину G. Известно, что, выдавая значение g_1 = +5, прибор переводит микрообъект в состояние $|g_1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Выдавая значение g_2 = – 4, прибор переводит микрообъект в состояние $|g_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Найдите среднее значение G и оцените величину разброса в большой серии измерений G в состоянии с определенной энергией E_2 = 9 эВ.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 16D: Корпускулярно-волновой дуализм как метод расчетов.

Темы: Корпускулярно-волновой дуализм. Эффект Комптона. Фотоэффект. Атом водорода.

Как мы теперь знаем, кванты света – фотоны – обладают многими свойствами, характерными для частиц: в частности, они обладают импульсом

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k .$$

Это может быть обнаружено при рассеянии фотонов на свободных электронах: отдавая часть своего импульса электрону, фотон «краснеет», то есть его длина волны увеличивается (эффект Комптона). Покажем, что для количественного описания этого эффекта достаточно формулы Планка и «обычных» законов сохранения. Электроны в веществе входят в состав атомов, при этом характерные величины потенциальной энергии их взаимодействия с полем атома составляют от нескольких эВ до тысячи эВ (1 эВ – энергия, которую приобретает электрон при перемещении между точками, разность потенциалов которых равен 1 В; это удобная единица энергии при описании атомных и молекулярных явлений). При использовании для «просвечивания» вещества рентгеновских лучей с энергией квантов порядка десятков или сотен кэВ взаимодействием электронов с полем атома и их движением до рассеяния можно пренебречь, и тогда можно рассмотреть рассеяние фотонов на свободных покоящихся электронах. Правда, поскольку в этом случае энергии квантов могут приближаться к энергии покоя электрона (примерно 511 кэВ), то электрон нельзя считать нерелятивистским, и при записи законов сохранения придется пользоваться формулами механики СТО. Пусть $\vec{q}$ и $\vec{q}'$ – импульсы фотона до и после рассеяния на электроне, $E = cq$ и $E' = cq'$ – соответствующие энергии, а $\vec{p}$ – импульс электрона после рассеяния. Энергия электрона в конечном состоянии $\mathrm{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$, где m- масса покоя электрона. Тогда законы сохранения записываются в виде:

$$\left\{\begin{array}{c} \vec{q} = \vec{p} + \vec{q}' \\ E + mc^2 = E' + \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} p^2 = q^2 + q'^2 - 2qq'\cos\theta \\ m^2c^4 + c^2p^2 = E^2 + E'^2 + m^2c^4 - 2EE' + 2mc^2(E - E') \end{array}\right.$$

(θ - угол между $\vec{q}$ и $\vec{q}'$, называемый *углом рассеяния* фотона). Разделив второе уравнение на c^2 и выразив в нем энергии фотонов через импульсы, подставляем в него p^2 из первого уравнения. После сокращения подобных получаем, что

$$mc(q - q') = qq'(1 - \cos\theta) .$$

Разделим это выражение на qq' и «вспомним» про волновые свойства фотонов: так как $q = \frac{h}{\lambda}$ и $q' = \frac{h}{\lambda'}$, то

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) ,$$

то есть увеличение длины волны однозначно связано с углом рассеяния. Величину $\Lambda \equiv \frac{h}{mc}$ обычно называют «комтоновской длиной», а полученную здесь формулу – формулой Комптона.

Упражнение: Покажите, что эффект Комптона является именно подтверждением корпускулярных свойств фотона, а не подтверждением СТО. Для этого получите формулу для увеличения длины волны фотона при рассеянии на нерелятивистском свободном покоящемся электроне.

Другой интересный пример проявления квантовых свойств электромагнитного излучения при взаимодействии с микрочастицами – явление ***фотоэффекта***. Оно состоит

в «выбивании» электронов из металла под действием света. Закономерности фотоэффекта удобно изучать с помощью вакуумной трубки с двумя электродами (впервые такое исследование было выполнено А.Г. Столетовым в 1988-90 гг.). Если освещать один из электродов, то из него выбиваются электроны, которые могут достигать второго электрода, создавая электрический ток через трубку. Оказывается, что *при заданной частоте света «фототок» пропорционален интенсивности световой волны*. Появлению фототока можно помешать, включив «запирающую» разность потенциалов между электродами, т.е. создав между ними поле, заворачивающее выбитые электроны обратно на первый электрод. Вторым важным результатом Столетова было обнаружение связи этой разности потенциалов с частотой света: *минимальная величина запирающего напряжения зависит от частоты света линейным образом*:

$$U_{\min} = \alpha \cdot (\nu - \bar{\nu}) \ (\text{для } \nu \geq \bar{\nu}).$$

Видно, что при частоте света ниже *красной границы фотоэффекта* фототок отсутствует даже при нулевой запирающей разности потенциалов. Эти закономерности долгое время не удавалось объяснить с позиций классической физики, и только после привлечения А. Эйнштейном идеи квантования удалось создать простую теорию фотоэффекта. Для ее построения достаточно заметить, что для выбивания электрона проводимости из металла надо совершить работу против удерживающих его сил притяжения со стороны кристаллической решетки – ***работу выхода***. Если энергия передается от световой волны электрону **квантованно**, т.е. в виде «порции» $h\nu$, то кинетическая энергия выбитого электрона есть разность этой «порции» и работы выхода. В этом случае для запирания фототока поле между электродами должно полностью забирать у электрона его энергию:

$$eU_{\min} = E_{кин} = h\nu - A \Rightarrow U_{\min} = \frac{h}{e} \cdot \left(\nu - \frac{A}{h} \right) \equiv \alpha \cdot (\nu - \bar{\nu}).$$

При этом величина фототока пропорциональна числу выбиваемых в единицу времени электронов, которое равно числу поглощенных квантов и поэтому пропорционально интенсивности световой волны.

Пример: При освещении фотокатода монохроматическим светом с длиной волны λ_0 максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов равна E_0, а работа выхода электронов для материала фотокатода равна $3E_0$. Во сколько раз нужно уменьшить дину волны света, чтобы максимальная кинетическая энергия выбитых электронов достигла значения $9E_0$?

Решение: С помощью уравнения Эйнштейна можно связать длину волны света и максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов: $E = h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A$, то есть $\lambda = \frac{hc}{E + A}$. Таким образом, при $A = 3E_0$: $\lambda_0 = \frac{hc}{4E_0}$, и тогда $\lambda = \frac{hc}{9E_0 + A} = \frac{hc}{12E_0} = \frac{1}{3}\lambda_0$, то есть $\frac{\lambda_0}{\lambda} = 3$.

Важной особенностью систем микрообъектов (например, атомов и молекул вещества) является *дискретность* набора возможных значений физических величин. В частности, дискретность значений энергии электронной оболочки атома была известна задолго до возникновения квантовой теории – *спектральный анализ* испускаемого атомами электромагнитного излучения показал, что его спектр состоит из набора спектральных линий с определенными частотами и длинами волн, характерного для каждого атома. Поэтому атомы можно «опознавать» по спектру их излучения, и таким образом исследовать атомарный состав любого светящегося вещества – например, фотосферы звезд. Спектры атомов подчиняются некоторому набору относительно простых закономерностей, которые тем не менее не удавалось объяснить с позиций классической физики. Например, на основе экспериментальных данных был установлен принцип «комбинации частот» - было обнаружено, что многие частоты спектральных линий можно

представить как сумму частот двух других спектральных линий того же атома. Для некоторых «серий» спектральных линий даже удавалось подбирать простые формулы, описывающие их с довольно высокой точностью. Как объяснить эти закономерности с точки зрения квантовой теории? В рамках «наивного» подхода это удалось сделать на основе *постулатов Бора*. Их можно построить, опираясь на два соображения. Во-первых, как отмечалось выше, с точки зрения корпускулярно-волнового дуализма, стабильные («долгоживущие», для которых $\Delta t \to \infty$) состояния квантовых систем могут обладать определенной энергией ($\Delta E \to 0$). Во-вторых, с точки зрения волновой теории такие состояния должны соответствовать «стоячим» волнам, в которых при возвращении в исходную точку «колебания волны» должны совпадать сами с собой. Это означает, что сдвиг фазы волны на замкнутом пути должен быть целым кратным 2π (то есть длина замкнутой траектории микрообъекта должна быть кратна длине волны). Рассмотрим, как эти идеи реализуются при описании атома водорода. Постулаты Бора впервые были сформулированы именно для этой задач в виде:

- Существуют стационарные орбиты электрона в атоме, на которых электрон не излучает и в отсутствие внешних воздействий может находиться вечно.
- Электрон излучает (испускает фотон) при переходе с одной стационарной орбиты на другую.

Противоречие этих постулатов с законами классической физики особенно очевидно, если вспомнить, что при движении по криволинейной орбите заряженный электрон испытывает ускорение и **обязан** излучать электромагнитные волны. Бор также предложил условие, позволяющее отобрать стационарные орбиты. Для круговых орбит оно собственно и означало, что на длине орбиты должно укладываться целое число длин волн (*условие Бора*):

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = n\,(n \in Z) \Rightarrow r \cdot p = \frac{h}{2\pi} \cdot n = \hbar \cdot n\,.$$

Если учесть условие равновесия электрона на орбите, то для атома водорода получим:

$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2} \Rightarrow r = \frac{ke^2}{mv^2} \Rightarrow mvr = \frac{ke^2}{v} = \hbar n\,.$$

и поэтому скорость электрона на орбите и радиус орбиты равны $v = \dfrac{ke^2}{\hbar n}$, $\quad r = \dfrac{\hbar^2 n^2}{mke^2}$.

Значит, энергия электрона в атоме водорода на стационарной орбите

$$E_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \approx -13{,}6\ \text{эВ} \cdot \frac{1}{n^2}\,.$$

Согласно второму постулату, электрон испустит фотон при переходе с одной орбиты на другую (с более низкой энергией). С учетом закона сохранения энергии и формулы Планка можно найти все возможные частоты фотонов, то есть **спектр** излучения атома водорода:

$$\nu_{nn'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h} = \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3} \cdot \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \equiv R \cdot \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Видно, что этот спектр – *линейчатый* (набор дискретных спектральных линий). Более того, для него очевидно работает принцип комбинации частот (ясно, что $\nu_{nk} = \nu_{nm} + \nu_{mk}$), а соответствующая формула для длин волн повторяет подобранные формулы (типа формулы Бальмера).

В случае разнообразного по составу, сильно нагретого вещества линии многих элементов уширяются, перекрываются и наблюдается практически ***непрерывный спектр*** излучения (как и в случае излучения несвязанных носителей заряда, испытывающих ускорение).

Итак, в самом простом подходе описание поведения микрообъектов можно строить, подбирая «комбинацию» корпускулярных и волновых соотношений. На самом деле (в «настоящей» квантовой теории) доказывается, что такой подход является приближенным.

Да, мы используем корпускулярные и волновые характеристики (координата, импульс, частота, длина волны и т.д.) и закономерности (законы сохранения для взаимодействия квантов, волновое уравнение для описания распространения связываемой с микрообъектом волны). Но они не вполне адекватно соответствуют «истинной природе» микрообъекта, поэтому в действительности реальный микрообъект не имеет определенных значений этих характеристик.

Например, рассмотрим процесс измерения координаты. В самом деле, если мы захотим «зафиксировать» координату квантовой точечной частицы, посадив ее между двух стенок и сдвигая их, то в процессе сжатия мы будем уменьшать характерные длины волн, то есть – в соответствии с формулой де Бройля – неограниченно увеличивать ее импульс. При любой конечной прочности стенок частица покинет нашу установку до того, как мы сведем неопределенность ее координаты к нулю. Аналогично попытка измерить точно импульс квантовой частицы потребует убрать из волны искажения, отвечающие всем волнам, кроме гармонической волны с одной определенной длиной λ. Поскольку любое препятствие приводит к искажению волны, придется убрать вообще все стенки, так что частица с определенным импульсом должна быть равномерно «размазана» по пустой Вселенной. Значит, если даже мы построим «идеальный» прибор для измерения импульса или координаты, для любой наблюдаемой частицы в результатах одинаковых измерений, производимых над одинаковыми частицами в совершенно одинаковых состояниях, будет все равно наблюдаться разброс. Это можно представить себе как результат неких «*квантовых флуктуаций*» - неконтролируемых малых изменений, в результате которых измеряемая величина может не иметь какого-либо одного определенного значения. Как показывают вычисления, неопределенности в измерениях координаты и импульса частицы всегда удовлетворяют неравенству

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \equiv \frac{\hbar}{2}.$$

Аналогично для энергии и времени $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$. Ввиду малости постоянной Планка, в «обычном» мире этот разброс значений практически не заметен.

Пример: Оценить минимальное значение энергии квантового линейного гармонического осциллятора с циклической частотой ω.

Решение: Энергия осциллятора есть сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Ясно, что минимум этой функции равен нулю и соответствует $x = 0$ и $p_x = 0$. Однако соотношение неопределенностей запрещает такое состояние у квантового осциллятора! Поэтому минимальная энергия не равна нулю – квантовый осциллятор нельзя «полностью остановить», и если мы забрали у него всю энергию, которую можно забрать, он все равно продолжает совершать колебания, которые стали называть «нулевыми колебаниями». Пусть x - характерное отклонение от положения равновесия при «нулевых» колебаниях. Тогда $p \approx \frac{\hbar}{2x}$, и $E(x) \approx \frac{\hbar^2}{8mx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, и можно найти энергию «нулевых» колебаний как минимум этой функции (разумеется, такое рассуждение является оценочным, а не точным!).

Поскольку $\frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$, то $E_{\min} \approx E\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right) = \frac{\hbar\omega}{2}$.

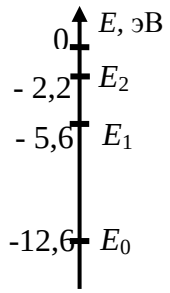
Любопытно, что полученный ответ на самом деле является точным.

Задачи для самостоятельного решения.

1. При освещении катода из металла с работой выхода A светом с длиной волны λ_1 минимальная величина запирающего напряжения оказалась равна U_1. Какой будет эта величина, если длину волны используемого света уменьшить в два раза? А если увеличить в два раза?

2. Уединенный серебряный шарик радиусом $r = 1$мм облучается ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 200$нм. Каким станет заряд шарика за достаточно большое время? Работа выхода электронов из серебра $A \approx 4{,}3$эВ.

3. Пусть схема нижних энергетических уровней некоторого атома имеет вид, показанный на рисунке. Электрон с кинетической энергией $E_e = 2$эВ сталкивается с таким атомом, находящимся в состоянии с энергией E_1. В результате столкновения скорость электрона изменилась. Найти кинетическую энергию электрона после столкновения с атомом.



4. Опишите спектр излучения однократно ионизированного иона гелия He^+.

5. Пусть где-то в просторах Космоса есть очень большое облако из атомарного водорода с температурой около 0 К, в котором все атомы изначально находятся в основном состоянии. На него направляют пучок есть фотонов с энергией 15 эВ. *Длина свободного пробега* фотонов в облаке (это расстояние, на котором «большое» число фотонов в пучке убывает из-за поглощения атомами водорода в $e \approx 2{,}72$ раза: с точки зрения одного фотона это означает, что вероятность поглощения при прохождении слоя облака такой толщины равна $(1-1/e)$) меньше размеров облака в десятки миллиардов раз. Фотоны поглощаются, и довольно быстро излучаются снова, так как после поглощения фотона атом переходит в одно из возбужденных состояний. Оцените отношение числа исходных фотонов, поглощенных облаком к числу фотонов с частотой ν_{21}, вылетевших из него.

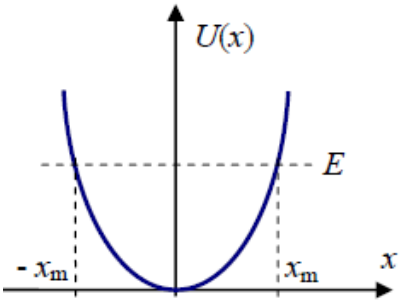
курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 17D: Квантование движений и тунелльный эффект.

Темы: Волны вероятности. Уровни энергии при движении в ограниченной области. Тунеллирование через классически запрещенную область.

В соответствии с формулами Планка $E = \hbar\,\omega$ и де Бройля $\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\vec{n} = \hbar\,\vec{k}$ частота и длина волны вероятности, соответствующей состоянию микрообъекта, связаны с его энергией и импульсом. Например, в состоянии с определенной энергией эта волна является монохроматической. У свободной частицы одновременно с энергией и импульс может иметь определенное значение, и тогда и длина волны зафиксирована. В комплексной форме записи такая волна (в одномерном случае, когда $\vec{k} = k\cdot\vec{e}_x$) может быть записана в виде $\psi(t,x) = A\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\pm kx - \omega t)}$, где A – амплитуда волны, а знак определяет направление движения волны. Отметим, что для свободной нерелятивистской частицы $E = \frac{p^2}{2m}$, то есть $p = \sqrt{2mE}$ и $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$. Если на микрообъект будет действовать внешняя сила, то его импульс уже не будет определенным даже для монохроматической волны, соответствующей состоянию с определенной энергией. Ведь в этом случае мы можем описать внешнее силовое поле, задав зависимость потенциальной энергии микрообъекта в этом поле как функцию координаты $U(x)$. Тогда с учетом корпускулярных свойств микрообъекта $p = \sqrt{2m[E - U(x)]}$, и изменение фазы волны вероятности для бесконечно малого изменения координаты $d = k_x dx = \frac{p\cdot dx}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m[E-U(x)]}\cdot dx$. Тогда ясно, что изменение фазы волны на пути от точки x_1 до точки x_2 равно $\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m[E-U(x)]}dx$. Если воспользоваться идеей Бора о том, что состояния с определенными энергиями связаны со стоячими волнами вероятности, то можно заключить, что разрешенные значения энергии микрообъекта должны определяться из условия кратности фазового сдвига волны для любой замкнутой траектории «частицы» с таким значением энергии. Здесь важно также вспомнить, что фаза волны изменяется не только вследствие ее распространения, но и при некоторых воздействиях на волну – например, при ее отражении от препятствий. Как показал анализ, для волн вероятности следует считать, что при отражении от непроницаемой стенки к фазе волны добавляется π (к длине пути нужно добавить половину длины волны), а при изменении направления движения в точке остановки (когда скорость непрерывно убывает до нуля, а затем снова увеличивается, но уже при движении в другую сторону) к фазе волны добавляется $\frac{\pi}{2}$ (соответственно четверть длины волны).

Пример 1: Найти разрешенные уровни энергии для линейного гармонического осциллятора (частицы массы m, совершающей колебания вдоль оси x в поле с потенциальной энергией $U(x) = \frac{kx^2}{2} \equiv \frac{m\omega^2 x^2}{2}$).



Решение: В соответствии с предложенным обобщением условия Бора энергии стационарных состояний должны определятся из условия

$$\frac{2}{\hbar}\int_{-x_m}^{+x_m} p_x dx + 2\cdot\frac{\pi}{2} = k\cdot 2\pi, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

(за один цикл движения частица дважды проходит от одного амплитудного значения до другого и две точки остановки с изменением направления движения). Обычно вводят индекс $n \equiv k-1$, и тогда $\frac{1}{\pi\hbar}\int_{-x_m}^{+x_m} p_x dx = n + \frac{1}{2}$, $n = 0,1,2,\ldots$, причем амплитуда связана с энергией: $E = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2} \Rightarrow x_m = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$. Подставив в условие стационарности соотношение $p_x = \sqrt{2m[E-U(x)]} = \sqrt{2mE}\cdot\sqrt{1-\frac{m\omega^2 x^2}{2E}}$:, получим:

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\pi\hbar}\int_{-x_m}^{+x_m}\left(1-\frac{m\omega^2 x^2}{2E}\right)dx = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Сделав в интеграле замену переменной $x = \frac{t}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$ и учтя симметрию интеграла (отрезки от $-x_m$ до 0 и от 0 до $+x_m$ дают одинаковые вклады), получаем:

$$\frac{4E}{\pi\hbar\omega}\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{E}{\hbar\omega} = n + \frac{1}{2} \Rightarrow E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Мы получили формулу, описывающую *энергетический спектр* линейного осциллятора. Обратим внимание, что наинизшая возможная энергия осциллятора $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, что в точности совпадает с оценкой, полученной в занятии 16D на базе соотношения неопределенностей. На самом деле и эта оценка, и вычисление энергии на базе постулатов Бора – это приближенные вычисления, построенные на базе противоречивого подхода (синтеза корпускулярных и волновых формул). Но в случае осциллятора этот результат (как и для атома водорода) совпадает с точным, получающимся в более строгой квантовой теории.

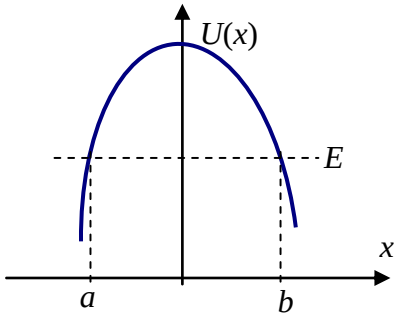
Нетрудно переписать это условие для другого вида потенциала $U(x)$, который удерживает микрообъект в области конечного размера (то есть для любого ***финитного*** движения нерелятивистского микрообъекта с массой m). Ясно, что в этом случае, применяя корпускулярное описание, мы должны считать, что точки поворота – границы области движения частицы (обозначим их a и b) при определенной энергии E определяются из уравнения $E = U(x) \Rightarrow a(E), b(E)$. Тогда «общее» условие Бора имеет вид

$$\frac{1}{\pi\hbar}\int_{a(E)}^{b(E)}\sqrt{2m[E-U(x)]}\,dx = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Как поведет себя волна вероятности в «классически запрещенной» области, в которой ее полная энергия меньше потенциальной энергии ее взаимодействия с внешним полем? В этом случае в выражении для изменения фазы стационарной волны на пути s $\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar}\int_0^s dx\, p(x)$ импульс становится <u>мнимой</u> величиной: $p = \sqrt{2m[E-U(x)]} = i\sqrt{2m[U(x)-E]}$. Соответственно амплитуда волны в такой области должна убывать, так как $e^{i\Delta\varphi} = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_0^s\sqrt{2m[U(x)-E]}\,dx\right\}$. Формально она может и

расти – при другом знаке мнимого импульса, но это выглядит неестественно: ясно что в классическом пределе вероятность проникновения в эту область должна превратится в ноль. Итак, если энергии частицы не хватает на преодоление потенциального барьера, в квантовой теории частица все же может его преодолеть (это и называют «туннельным эффектом»). Действительно, если a и b (см. рисунок): – границы «подбарьерной» (классически запрещенной) области, то изменение амплитуды волны на пути от a до b

$$\frac{A(b)}{A(a)} = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m[U(x)-E]}dx\right\}.$$

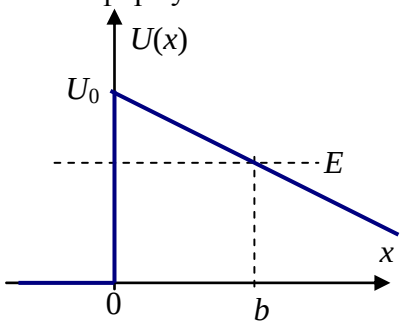


В «волне вероятности» вероятность пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому вероятность тунеллирования через барьер в зависимости от энергии частицы

$$T(E) = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m[U(x)-E]}dx\right\}.$$

Пример 2: Оценить вероятность тунеллирования частицы массы m с энергией $E < U_0$ через потенциальный барьер $U(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ U_0 - Fx, & x \ge 0 \end{cases}$.

Решение: Воспользуемся полученной «корпускулярно-волновой» формулой. В нашем случае границы области «под барьером» - это $a = 0$ и $b = \dfrac{U_0 - E}{F}$. Значит,



$$T(E) = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_0^b \sqrt{2m[U_0 - E - Fx]}dx\right\} = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\int_0^b \sqrt{1-\frac{x}{b}}dx\right\}.$$

Выполнив подстановку $x = b \cdot t$ и вычисляя интеграл $\int_0^b \sqrt{1-\frac{x}{b}}dx = b\int_0^1 \sqrt{1-t}dt = \frac{2}{3}b$, получаем ответ: $T(E) = \exp\left\{-\frac{4}{3\hbar F}\sqrt{2m}(U_0-E)^{3/2}\right\}$.

Важно понимать, что формула для вероятности тунеллирования, которую мы использовали, является <u>приближенной</u> (мы ее вывели в рамках «оценочного» корпускулярно-волнового подхода). На самом деле она справедлива с приличной точностью только для задач, в которых модуль показателя экспоненты значительно превышает 1.

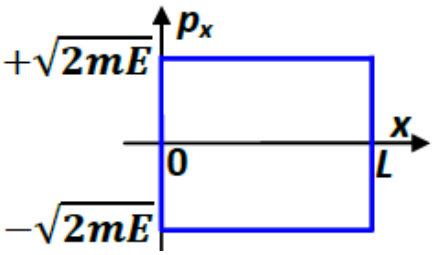
Пример 3: Квантовая частица массы m, которая может двигаться только вдоль оси x, удерживается в области $0 \le x \le L$. Внутри этой области она движется свободно, а работа выхода наружу равна U_0. Оценить количество разных состояний этой частицы N. Известно, что значения U_0 и L таковы, что N>>1.

Решение: С классической точки зрения частица совершает финитное движение, так что в квантовом случае энергия будет принимать какое-то значение из дискретного спектра. В соответствии с условием Бора $\frac{1}{\pi\hbar}\int_0^L \sqrt{2mE}dx = \frac{L\sqrt{2mE}}{\pi\hbar} \approx n + \frac{1}{2} \Rightarrow E_n \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$. Здесь мы положили $U(x) = 0$ внутри области $0 \le x \le L$. Максимальное возможное значение энергии нашей частицы равно U_0, и каждому уровню энергии соответствует одно состояние (так

как движение одномерно). Следовательно, число состояний равно максимальному номеру уровня, то есть

$$N \approx \frac{L\sqrt{2mU_0}}{\pi\hbar}.$$

Отметим, что у полученного результата есть интересная интерпретация. В классической механике используется понятие ***фазового пространства***, координатами в котором являются проекции векторов координат и импульсов частиц. Для одномерного движения одной частицы это двумерное пространство – плоскость . Если следить за изменением импульса и координаты классической частицы в поле таких же сил, то легко увидеть, что при финитном движении с максимальной возможной энергией при движении «влево» $p_x = +\sqrt{2mU_0}$ (при этом x изменяется от 0 до L), и при движении «вправо» $p_x = -\sqrt{2mU_0}$ (x изменяется от L до 0). Такому движению соответствует траектория в



фазовой плоскости (x, p_x), изображенная на рисунке (ее обычно называют *фазовой траекторией*). Нетрудно заметить, что размер проекции траектории на ось x равна $\Delta x = L$, а размер ее проекции по оси p_x равна $\Delta p_x = 2\sqrt{2mU_0}$. Значит, количество состояний кантовой частицы можно выразить через «площадь» фазовой траектории для максимальной энергии: $N \approx \frac{\Delta x \cdot \Delta p_x}{2\pi\hbar} = \frac{\Delta x \cdot \Delta p_x}{h}$. Мы обнаруживаем, что у постоянной Планка появился новый смысл: для одномерной системы это размер «клеточки» <u>классического</u> фазового пространства одномерного движения частицы, в которую помещается одно <u>квантовое</u> состояние.

В общем случае – для трехмерного движения частицы – ясно, что число состояний движения частицы равно произведению числа состояний движения по каждой из осей. Произведение «площадей» проекций фазовой траекторий даст ***фазовый объем*** $V^{(6)}$ шестимерной области в пространстве (x, y, z, p_x, p_y, p_z) с энергией не больше максимальной. Как видно, в этом случае число состояний $N \approx \frac{V^{(6)}}{h^3}$. Это необычайно интересно, так как еще ДО создания квантовой теории, при построении статистической физики, одной из задач которой был вывод формул термодинамики из молекулярно-кинетической теории в рамках статистического подхода, теоретикам пришлось ***постулировать***, что число микросостояний всякой молекулярной системы <u>конечно</u>. Тогда один из создателей статистической физики – Джозайа Уиллард Гиббс ***предположил***, что это конечное количество состояний очень велико и пропорционально фазовому объему системы. Это предположение привело к успеху – получилась работоспособная теория с правильными предсказаниями. Но Гиббс не знал коэффициента пропорциональности – теперь мы знаем, что он записывается через постоянную Планка!

Приложение*: **Уравнение Шредингера**.

Можно для «волны вероятности» записать волновое уравнение? Повторим рассуждения Эрвина Шредингера по этому поводу. Для простоты начнем с одномерного случая. Мы понимаем, что у <u>свободной</u> квантовой частицы существуют состояния с определенной энергией E и импульсом p_x. Этому состоянию отвечает плоская волна вероятности

$\psi(t,x) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\pm kx - \omega t)}$, причем $E = \hbar\omega$ и $p_x = \hbar k$. Для нерелятивистской частицы с массой m энергия и импульс связаны соотношением $E = \frac{p_x^2}{2m}$. Нетрудно заметить, что дифференцирование $\psi(t,x)$ по времени превращает ее в саму себя, умноженную на коэффициент, пропорциональный энергии: $\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E \cdot \psi(t,x) \Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = E \cdot \psi(t,x)$. Аналогично $-i\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} = p_x \cdot \psi(t,x)$. Следовательно, в случае свободной частицы уравнение $i\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right]^2\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}$ имеет в точности нужное решение. Опять, вспоминая о корпускулярные свойствах микрообъекта и учитывая соотношение из механики $E = \frac{p_x^2}{2m} + U(x)$, мы можем прийти к идее, что для квантовой частицы в поле внешних потенциальных сил $U(x)$ волна вероятности должна быть решением ***уравнения Шредингера***

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} + U(x) \cdot \psi(t,x).$$

Функцию $\psi(t,x)$ обычно называют ***координатной волновой функцией*** данного состояния частицы. Ее основное свойство – то, что она определяет вероятность нахождения частицы в заданной области значений координаты: $w[x_1 \le x \le x_2] = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(t,x)|^2$. Это свойство можно выразить чуть иначе: квадрат модуля координатной волновой функции определяет ***плотность вероятности*** реализации разных значений координаты в состоянии, которому эта функция соответствует.

Отметим, что для состояний с определенной энергией E (***стационарных состояний***) решение уравнения Шредингера имеет вид $\psi(t,x) = \phi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ (зависимость волновой функции стационарных состояний от времени всегда экспоненциальная), причем функция координаты $\phi(x)$ в этом случае удовлетворяет уравнению

$$E \cdot \phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + U(x) \cdot \phi(x) \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)] \cdot \phi = 0,$$

которое называют ***стационарным уравнением Шредингера***.

В более сложном трехмерном случае в уравнении нужно использовать частные производные:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,x,y,z)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + U(\vec{r}) \cdot \psi(t,x,y,z)$$

и $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(\vec{r})] \cdot \phi = 0$ в стационарном случае.

Пример 4*: Квантовая частица массы m, которая может двигаться только вдоль оси x, находится в состоянии с определенной энергией $E = 2\ U_0$ и налетает на потенциальный

барьер высотой U_0 и шириной L. Найти вероятность того, что частица отразится от этого барьера.

Решение: Сразу отметим для себя, что в классической механике частицы всегда проходят такой барьер, и приступим к решению квантовой задачи на базе стационарного уравнения Шредингера. Введем координату x таким образом, что частица налетает на барьер «слева» ($p_x > 0$), а границы барьера соответствуют $x = 0$ и $x = + L$. Тогда в областях I ($x < 0$), II (0 < x < + L) и III (x >+ L) частица имеет определенный импульс $|p_{xI}| = |p_{xIII}| = \sqrt{2mE} = 2\sqrt{mU_0}$ или $|p_{xII}| = \sqrt{2m(E-U_0)} = \sqrt{2mU_0}$. Волна вероятности может отражаться от каждой из границ ямы, так что в области I она должна состоять из «падающей» и «отраженной волн»: $\phi_I(x) = A_1 \cdot e^{+\frac{i}{\hbar}kx} + A_2 \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}kx}$ (где $k = \frac{2\sqrt{mU_0}}{\hbar}$), в области II — тоже из двух волн, идущих в разные стороны $\phi_{II}(x) = B_1 \cdot e^{+\frac{i}{\hbar}\tilde{k}x} + B_2 \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{k}x}$ ($\tilde{k} = \frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar}$), а в области III – только из прошедшей волны (нет волны вероятности, падающей на барьер «справа»): $\phi_{III}(x) = C \cdot e^{+\frac{i}{\hbar}kx}$. В случае конечной энергии взаимодействия естественно требовать, чтобы график волновой функции был непрерывным и гладким, то есть

$$\begin{Bmatrix} \phi_I(0) = \phi_{II}(0) \\ \phi_I'(0) = \phi_{II}'(0) \\ \phi_{II}(L) = \phi_{III}(L) \\ \phi_{II}'(L) = \phi_{III}'(L) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \\ ik(A_1 - A_2) = i\tilde{k}(B_1 - B_2) \\ B_1 \cdot e^{i\tilde{k}L} + B_2 \cdot e^{-i\tilde{k}L} = C \cdot e^{ikL} \\ i\tilde{k}(B_1 \cdot e^{i\tilde{k}L} - B_2 \cdot e^{-i\tilde{k}L}) = ikC \cdot e^{ikL} \end{Bmatrix}.$$

Выразим из третьего и четвертого уравнений B_1 и B_2 через C: $B_1 = \frac{k+\tilde{k}}{2\tilde{k}} C e^{i(k-\tilde{k})L}$ и $B_2 = \frac{\tilde{k}-k}{2\tilde{k}} C e^{i(k+\tilde{k})L}$. Затем из первого и второго исключим A_2: $A_1 = \frac{k+\tilde{k}}{2k} B_1 + \frac{k-\tilde{k}}{2k} B_2$.

Тогда можно найти отношение комплексных амплитуд прошедшей и падающей волны:

$$\frac{C}{A_1} = e^{-ikL} \frac{1}{\cos(\tilde{k}L) - i\frac{k^2+\tilde{k}^2}{2k\tilde{k}}\sin(\tilde{k}L)} = e^{-ikL} \frac{1}{\cos(\tilde{k}L) - i\frac{3}{2\sqrt{2}}\sin(\tilde{k}L)}.$$

В последнем переходе мы использовали конкретные значения k и $\tilde{k}$. Значит, вероятность прохождения барьера $T = \left|\frac{C}{A_1}\right|^2 = \frac{1}{\cos^2(\tilde{k}L) + \frac{9}{8}\sin^2(\tilde{k}L)} = \frac{8}{8+\sin^2(\tilde{k}L)}$. Так как сумма вероятностей отражения и прохождения должна равняться 1, то вероятность отражения в квантовом случае отлична от нуля: $R = 1 - T = \frac{\sin^2(\tilde{k}L)}{8+\sin^2(\tilde{k}L)}$. Здесь мы сталкиваемся с квантовым эффектом «***надбарьерного отражения***». Видно, что в зависимости от величины $\tilde{k}L = \frac{L\sqrt{2mU_0}}{\hbar}$ эта вероятность может изменяться от 0 (при $\tilde{k}L = \pi \cdot n$) до 1/9 (при $\tilde{k}L = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$). Понятно, что эффект полного погашения отраженной или частичного

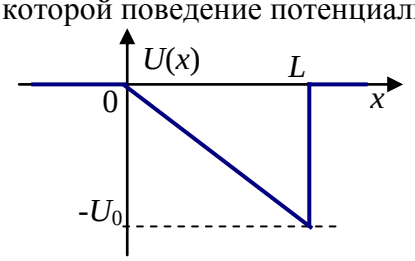
погашения прошедшей волны - это результат интерференции когерентных волн вероятности, то есть проявление волновых свойств частицы.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти разрешенные уровни энергии для частицы массы m, посаженную в одномерный «ящик» с непроницаемыми стенками, расстояние между которыми равно L. Учтите, что добавка к фазе волны при отражении от непроницаемой стенки равна π!

2. Область одномерного движения частицы массы m ограничена с одной стороны (в точке $x = 0$) непроницаемой стенкой, а с другой (при $x > 0$) – силовым полем с потенциальной энергией $U(x) = U_0 \cdot x/a$.
а) С помощью соотношения неопределенностей оценить энергию основного состояния.
б) Пользуясь условием Бора, найти спектр значений энергии частицы.

3. Оценить количество квантовых состояний частицы массы m в потенциальной яме, для которой поведение потенциальной энергии удерживающих сил показан на рисунке.



4. Оценить вероятность тунеллирования электрона с кинетической энергией E = 500 эВ, движущегося по оси x, через потенциальный барьер, созданный в плоском слое толщиной $2a$ = 0,1 мкм (ось x перпендикулярна границам слоя, координаты его точек $-a \le x \le +a$) электростатическим полем с потенциалом $\varphi(x) = -U_0 \cdot [1-(x/a)^2]$, где U_0 = 50 кВ.

5*. С помощью уравнения Шредингера найдите спектр энергий частицы массы m, посаженную в одномерный «ящик» с непроницаемыми стенками, расстояние между которыми равно L. Сравните с результатом задачи 1.

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 18D: «Неклассические» наблюдаемые. Спин.

Темы: Наблюдаемые, не имеющие классического аналога. Спин квантовой частицы. Спин и свойства частицы.

Как мы уже видели, многие измеряемые характеристики (*наблюдаемые*) микрообъектов похожи по свои свойствам на аналогичные характеристики классических объектов (частиц или волн). Но микрообъекты – не частицы и не волны. Поэтому естественно, что у них могут быть наблюдаемые, которые по свойствам очень значительно отличаются от классических. Очень важный для квантовой физики пример – уже знакомый нам по курсу механики ***момент импульса***. Из определения ясно, что при остановке классической частицы ее момент импульса обращается в ноль. Однако среди квантовых частиц есть такие, у которых момент импульса отличен от нуля даже при полной остановке частицы. Это означает, что их момент импульса содержит часть, связанную не с каким-либо движением частицы в пространстве, а с ее «внутренней» природой. Такой «***собственный***» (измеряемый в системе отсчета, связанной с самой частицей) момент импульса квантовых частиц называют ***спином***. Данные экспериментов и вычисления в рамках «строгой» квантовой теории показывают, что проекция спина на некоторую ось может принимать **только** значения, равные целым или полуцелым долям величины $\hbar \equiv h/2\pi$. В этом случае и сам спин называют соответственно ***целым*** или ***полуцелым*** (по сути, в физике микромира принято измерять спин в единицах $\hbar$). Определим спин квантовой частицы как максимально возможное значение модуля его проекции на «выделенную» ось. Например, измерения показывают, что спин любого электрона равен s = ½. Это означает, что при измерении проекции собственного момента количества движения электрона на некоторое направление (ось z) могут быть получены только значения $S_z = \pm\frac{\hbar}{2}$.

На самом деле в микромире спин является фундаментальной характеристикой объектов: все частицы, из которых состоит материя – это частицы с определенным спином, причем наряду с массой покоя и зарядами (по отношению ко всем фундаментальным взаимодействиям) спин определяет тип частицы. При этом поведение квантовых частиц очень существенно зависит от спина. Оказывается, что одинаковые частицы с целым спином могут находиться одновременно в одном и том же состоянии в любом количестве (такие частицы называют ***бозонами***). Для одинаковых частиц с полуцелым спином действует «принцип запрета Паули» – в каждом из состояний может находиться не более одной такой частицы (их называют ***фермионами***). По этой причине газ из фермионов гораздо труднее сжимать, чем газ из бозонов – одинаковые фермионы стремятся отдалиться друг от друга даже в отсутствие взаимодействия между ними.

Рассмотрим «газ» электронов проводимости в металле. Понятно, что реальные электроны взаимодействуют друг с другом и с ионами решетки металла, однако внутри металла существуют электроны, которые двигаются практически как ***свободные*** (то есть почти невзаимодействующие): для них электростатическое отталкивание «в среднем» компенсируется притяжением к ионам решетки. Одна из важных характеристик структуры металла, во многом определяющая его свойства – это концентрация таких *электронов проводимости* n_e.

Пример 1: При заданной концентрации электронов проводимости в металле найти диапазон значений кинетической энергии этих электронов при температуре, близкой к абсолютному нулю.

Решение: Электроны проводимости – фермионы (спин ½), поэтому они занимают состояния по одному. Значит, число электронов проводимости равно числу занятых состояний. Пусть в куске металла объемом V находятся N_e электронов. При $T \approx 0$ все они стремятся занять состояния с наименьшей энергией. Энергию электронов принимаем

равной кинетической энергии (потенциальную энергию считаем равной 0 всюду внутри металла). Поэтому электроны займут состояния с модулем импульса, не превосходящем некоторого максимального значения (это значение называют *импульсом Ферми*). Обозначим этот импульс p_F, и тогда занимаемый электронами импульсный объем равен $\frac{4\pi}{3}p_F^3$. Кроме того, у электронов есть две возможные проекции спина, отвечающие двум независимым спиновым состояниям. Итак, $N_e = n_e V = \frac{1}{h^3}V \cdot \frac{4\pi}{3}p_F^3 \cdot 2$. Выражаем отсюда импульс Ферми:

$$p_F = \hbar \cdot (3\pi^2 n_e)^{1/3}.$$

Максимальная энергия электрона проводимости (*энергия Ферми*):

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot (3\pi^2 n_e)^{2/3}.$$

Таким образом, кинетическая энергия электронов проводимости изменяется в интервале от нуля до энергии Ферми, определяемой этим соотношением. Интересно вычислить полную внутреннюю энергию «электронного газа». Количество электронов в каждом «сферическом слое» импульсного пространства $dN_e = \frac{1}{h^3}V \cdot 4\pi p^2 dp \cdot 2 = V\frac{p^2 dp}{2\pi^2\hbar^3}$, а энергия каждого из них есть $\frac{p^2}{2m}$, поэтому

$$E = V\int_0^{p_F} \frac{p^2 dp}{2\pi^2\hbar^3}\frac{p^2}{2m} = V\frac{p_F^5}{20\pi^2 m\hbar^3} = \frac{3(3\pi^2)^{2/3}}{20}\frac{\hbar^2 N_e^{5/3}}{mV^{2/3}}.$$

Следовательно, давление этого газа

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{10}\frac{\hbar^2 n_e^{5/3}}{m}.$$

Как видно, давление фермионного газа даже при абсолютном нуле температуре не равно нулю и гораздо быстрее растет с ростом концентрации частиц $p \sim n_e^{5/3}$, чем у «обычного» идеального газа (для которого $p \sim n$). Давление «холодного» электронного газа поддерживает равновесие особого класса звезд – «*белых карликов*». Это очень впечатляет: структура и характеристики совсем не микроскопического объекта (типичный белый карлик имеет массу, превосходящую массу Солнца) определяются законами физики микромира. Например, формула, выражающая равновесный радиус белого карлика при заданной массе, явно содержит постоянную Планка!

Если частица микромира движется, то наряду со спиновым моментом импульса у нее будет и «обычный» (в микромире его принято называть «***орбитальным моментом»).*** В этом случае полный момент импульса есть сумма орбитального и спинового моментов. При этом нужно иметь в виду, что сложение моментов в квантовой физике производится по более сложным правилам, чем в классической механике (см. дополнение ниже). Само описание орбитального момента строится так же, как и описание спинового, но проекции орбитального момента на выделенное направление могут иметь только <u>целые</u> значения в единицах $\hbar$: $L_z = +\hbar \cdot l, +\hbar \cdot (l-1), \ldots, -\hbar \cdot (l-1), -\hbar \cdot l$. Мы можем также ввести величину орбитального момента l как максимально возможное значение модуля его проекции на «выделенную» ось.

Самое заметное проявление наличия спина у электрически заряженных частиц микромира – спиновый магнетизм. Каждая «точечная» заряженная частица с ненулевым спином является «маленьким» магнитным диполем. Магнитный момент такого диполя пропорционален его спиновому моменту, причем для частицы с зарядом $+e$ ***гиромагнитное отношение*** (отношение магнитного момента к моменту импульса) связано с удельным зарядом частицы. Например, у частиц спина ½ оно равно $2\mu_0 \equiv \frac{e\hbar}{mc}$ (если спин измеряется в единицах $\hbar$). Тогда энергия взаимодействия частицы с внешним

магнитным полем $\vec{B}$ равна $E_B = -2\mu_0(\vec{s}\cdot\vec{B}) = -2\mu_0 B\cdot s_z$. Здесь ось z направлена вдоль $\vec{B}$, то есть энергия определяется проекцией спина частицы на направление магнитного поля. Для электронов (заряд $-e$) $E_B = 2\mu_0(\vec{s}\cdot\vec{B}) = 2\mu_0 B\cdot s_z$.

Пример 2: В решетке некоторого материала создана электронная ловушка, в которой «пойманный» электрон движется свободно внутри шара радиуса R = 0,2 нм. Спектр разрешенных энергия электрона внутри ловушки для состояний с нулевым орбитальным моментом описывается формулой $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2}n^2$, где n = 1,2,3…. В ловушке создано однородное магнитное поле с индукцией B = 0,52 МТл. Определите разность энергий ΔE *основного* и *низшего возбужденного* состояний электрона (то есть состояния с минимальной возможной энергией и следующего за ним по энергии). Считайте, что энергия движения электрона внутри ловушки практически не зависит от направления его спина.

Решение: Для начала найдем величину энергии электрона в ловушке явно: $E_n = E_1\cdot n^2$, где $E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2} \approx 9{,}4$эВ. В соответствии с условием, полная энергия электрона в стационарном состоянии есть сумма E_n и энергии его взаимодействия с магнитным полем $E_B = 2\mu_0 B\cdot s_z = \pm\mu_0 B$, причем $\mu_0 B \approx 2\cdot 10^{-7}$эВ. Здесь учтено, что разрешенные значения проекции спина электрона $s_z = \pm\dfrac{1}{2}$. Ясно, что возбуждение движения электрона (то есть увеличение E_n) требует значительно большей энергии, чем переворот спина. Поэтому основное состояние электрона в ловушке соответствует n=1 и s_z= – ½, и его энергия $E_{осн} = E_1 - \mu_0 B$, а низшее возбужденное – n=1 и s_z= + ½ ($E_{нв} = E_1 + \mu_0 B$). Итак, $\Delta E = 2\mu_0 B \approx 4\cdot 10^{-7}$эВ.

Пример 3: Пусть у некоторого металла все ионы решетки имеют нулевые моменты импульса (и нулевые магнитные моменты), а концентрация электронов проводимости равна n_e. Найдите магнитный момент единицы объема «холодного» металла (при T = 0) в «слабом» ($B << hc(n_e)^{2/3}/e$) однородном внешнем магнитном поле $\vec{B}$. Считайте, что энергия движения электрона проводимости в металле практически не зависит от направления его спина.

Решение: Так как в отсутствие внешнего поля у системы нет никаких выделенных направлений, то и магнитный момент единицы объема (эту величину в электродинамике называют *намагниченностью* материала) равна нулю. Ясно, что в присутствии поля вектор намагниченности обязательно будет направлен вдоль или против $\vec{B}$. Направим ось z вдоль $\vec{B}$. В предлагаемом приближении энергия электрона проводимости есть сумма кинетической энергии (не зависящей от B) и энергии взаимодействия с магнитным полем, то есть $E_{\vec{p}s_z} = \dfrac{\vec{p}^2}{2m} + 2\mu_0 B s_z$. Электроны (как и в отсутствие поля) заполняют стационарные состояния с энергиями от минимальной до энергии Ферми, но теперь импульсы Ферми оказываются разными для состояний с разными s_z:

$$E_F = \frac{(p_F^{(+)})^2}{2m} + \mu_0 B = \frac{(p_F^{(-)})^2}{2m} - \mu_0 B \Rightarrow (p_F^{(-)})^2 - (p_F^{(+)})^2 = 4\mu_0 mB.$$

Импульс Ферми для каждого из состояний связан с концентрацией электронов прежней формулой $p_F^{(\pm)} = \hbar\cdot(3\pi^2 n_e^{(\pm)})^{1/3}$, а сумма концентраций электронов с каждым s_z осталась прежней и равной полной концентрации электронов проводимости, то есть

$$(p_F^{(+)})^3 + (p_F^{(-)})^3 = 3\pi^3\hbar^3[n_e^{(+)} + n_e^{(-)}] = 3\pi^3\hbar^3 n_e \equiv p_F^3.$$

Ясно, что при $B = 0$ концентрации равны $n_e^{(+)} = n_e^{(-)} = \frac{1}{2} n_e$, и включение «слабого» поля изменяет их незначительно (нетрудно заметить, что условие «слабости» поля эквивалентно требованию $\mu_0 mB << p_F^2$). Подставив выражение $p_F^{(\pm)} = \frac{p_F}{\sqrt[3]{2}}(1 \pm \varepsilon)$ в полученные уравнения, обнаруживаем, что в линейном по ε приближении второе уравнение обращается в тождество, а первое дает $\varepsilon \approx 2^{2/3} \frac{\mu_0 mB}{p_F^2} = \frac{\mu_0 mB}{\hbar^2} \left(\frac{2}{3\pi^2 n_e} \right)^{2/3}$.

Вклад в проекцию магнитного момента каждого электрона проводимости равен $-2\mu_0 s_z$, так что намагниченность

$$M_z = -\mu_0 \cdot n_e^{(+)} + \mu_0 \cdot n_e^{(-)} = \mu_0 \cdot \frac{n_e}{2} [(1+\varepsilon)^3 - (1-\varepsilon)^3] \approx +3\mu_0 n_e \varepsilon \approx + \frac{2\mu_0^2 m}{\pi \hbar^2} \left(\frac{3n_e}{2\pi} \right)^{1/3} B.$$

Как оказалось, наш металл является ***парамагнетиком*** – «наведенный» магнитный момент вещества совпадает по направлению с внешним полем: $\vec{M} \approx + \frac{2\mu_0^2 m}{\pi \hbar^2} \left(\frac{3n_e}{2\pi} \right)^{1/3} \vec{B}$.

Коэффициент пропорциональности в этой формуле называют ***магнитной восприимчивостью***.

Приложение*: **Общие свойства момента импульса и сложение моментов в квантовой теории.**

В общем случае момент импульса – наблюдаемая, играющая очень важную роль в описании объектов микромира, причем он может иметь, как мы заметили, разную природу (орбитальный и спиновый). Отличительной особенностью квантового мира является то, что не все наблюдаемые «одновременно измеримы» - часто бывает так, что измерение одной наблюдаемой (в ходе которого микрообъект взаимодействует с макроскопическим измерительным прибором) изменяет состояние микрообъекта таким образом, что другая наблюдаемая становится неопределенной – например, одновременно неизмеримыми являются координата и импульс микрообъекта. Для момента импульса $\vec{L}$ ситуация еще более необычная – у этой векторной наблюдаемой одновременно неизмеримы ее перпендикулярные компоненты (например, L_x и L_z). Одновременно можно измерить только квадрат момента $\vec{L}^2$ и одну из проекций – например, L_z. Это утверждение относится ко всем моментам – орбитальному (обусловленному вращением частицы по некоторой «орбите»), спиновому и полному (который есть сумма всех моментов разной природы).

Интересная особенность момента импульса – то, как складываются моменты в микромире. Ясно, что эти наблюдаемые складываются векторным образом, например $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Но с точки зрения измерений над квантовой системой прочтение этого равенства довольно нетривиально. В самом деле, мы не можем измерить вектор момента, так как разные его компоненты одновременно неизмеримы. Мы лишь понимаем, что $J_z = L_z + S_z$, и что разрешенные значения $\vec{J}^2$ связаны с разрешенными значениями $\vec{L}^2$ и $\vec{S}^2$. Рассмотрим, например систему из двух электронов. Каждый из них имеет спин, для которого $s = \frac{1}{2}$, то есть наблюдаемая $\vec{S}_i^2$ для i-го электрона имеет значение $\hbar^2 s(s+1) = \frac{3}{4}\hbar^2$. Пусть орбитальный момент относительного движения электронов равен нулю. Что в этом случае может «выдать» на прибор, измеряющий наблюдаемую $\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ (то есть квадрат полного момента этой системы, складывающегося из суммы двух спиновых моментов)? Для ответа на этот вопрос посмотрим сначала, какие значения может принимать наблюдаемая $S_z = S_{1z} + S_{2z}$:

S_{2z} \ S_{1z}	$+\hbar/2$	$-\hbar/2$
$+\hbar/2$	$+\hbar$	0
$-\hbar/2$	0	$-\hbar$

Как видно, набор получившихся значений составляется из набора $m_s = +1, 0, -1$, соответствующего значению $s = 1$, и еще одного значения $m_s = 0$, отвечающего $s = 0$. Поэтому возможные значения $\vec{S}^2 = \hbar^2 s(s+1) = 2\hbar^2, 0$. Более того, можно предсказать и вероятность, с которой будет получено каждое из этих значений: если состояния электронов независимы, то 3 из 4 возможных комбинаций отвечают $s = 1$, и только одна – $s = 0$. Итак: при наборе достаточно большой статистики прибор должен примерно в $\frac{3}{4} = 75\%$ случаев выдавать $2\hbar^2$, и примерно в $\frac{1}{4} = 25\%$ измерений – 0.

Эта же процедура реализуется и при записи закона сохранения момента импульса в микромире. Например, если атом с полным моментом $\vec{J}$ испускает фотон, который имеет спиновый момент $\vec{S}_\gamma$ ($s_\gamma = 1$), то закон сохранения момента означает, что $\vec{J} = \vec{J}' + \vec{S}_\gamma + \vec{L}$, где $\vec{L}$ - орбитальный момент фотона относительно центра масс атома. Поскольку длина волны испускаемого фотона много больше размеров атома (фотон вылетает практически «из точки», совпадающей с центром масс атома), то в подавляющем большинстве случаев орбитальный момент равен нулю. Проведя анализ возможных значений $J'_z = J_z - S_{\gamma z}$, найдем, что возможные значения квантового числа $j' = j+1,\ j,\ j-1$. Таким образом, на изменение этого квантового числа накладывается требование $\Delta j = 0, \pm 1$. Такие требования, возникающие вследствие законов сохранения для разных процессов в микромире, носят название «*правил отбора*». Для испускания атомом фотонов правила отбора также включают в себя еще ряд требований: изменение m_j подчиняется ограничению $\Delta m_j = 0, \pm 1$ при $\Delta j = \pm 1$ и $\Delta m_j = \pm 1$ при $\Delta j = 0$, и s не изменяется, т.е. $\Delta s = 0$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В решетке некоторого материала создана электронная ловушка, в которой «пойманный» электрон движется свободно внутри куба с ребром L = 10 нм. В ловушке создано однородное магнитное поле с индукцией B = 1,94 ГТл. Найти энергии основного и двух низших возбужденных состояний электрона.

2. Две одинаковые невзаимодействующие частицы спина ½ помещены в одномерный «ящик» с непроницаемыми стенками (движение по осям y и z отсутствует, движение по оси x – свободное внутри ящика). Спектр энергии движения по оси x описывается формулой $E_n = E_1 \cdot n^2$, гиромагнитное отношение у частиц $2\mu_0$. В ящике создано однородное магнитное поле с индукцией B, причем $\mu_0 B = E_1$ = 1 эВ. Найдите положение 5 низших уровней энергии этой системы.

3. Нейтрино – частица со спином ½, причем проекция спина на направление движения у нее всегда имеет только одно значение –½. Электронные нейтрино имеет очень малую энергию покоя (заметно меньше 1 эВ). Оценить давление, создаваемое газом из $N = 10^{24}$ электронных нейтрино при температуре, близкой к абсолютному нулю, в литровой банке с непроницаемыми для нейтрино стенками.

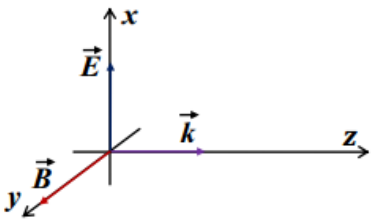
4*. Электрон в атоме водорода находится в состоянии с определенным орбитальным моментом l. Какие значения могут быть получены при измерении квадрата полного момента импульса электрона?

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 19D: Фотоны и кубиты.

Темы: Фотоны: поляризационные и спиновые состояния. Смешанные состояния. Кубиты.

Согласно квантовой теории света, его можно рассматривать как совокупность дискретных «порций» энергии электромагнитного поля - *фотонов*. Чтобы описать состояние отдельного фотона, нужно задать его частоту ν и направление движения (например, единичным вектором $\vec{n}$), а также его *состояние поляризации*. Частоту и направление движения можно задать вместе с помощью *волнового вектора* $\vec{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = \frac{2\pi}{c}\nu\vec{n}$ (здесь λ – длина волны, а c – скорость света). Волновой вектор определяет импульс $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ и энергию $\varepsilon = h\nu = \hbar c|\vec{k}|$ фотона (здесь $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \approx 1{,}05 \cdot 10^{-34}$Дж·с – постоянная Планка). При каждом значении $\vec{k}$ у <u>классической</u> электромагнитной волны есть <u>два</u> независимых состояния поляризации, соответствующие двум возможным направлениям в плоскости, перпендикулярной $\vec{k}$, вдоль которых направлено поле $\vec{E}$ в волне. Например, если $\vec{k}$ направлен вдоль оси z, то такая волна может иметь две независимые поляризации по осям x и y.



Конечно, у волны могут быть и другие состояния поляризации, но их можно получить наложением (*суперпозицией*) базисных. Отметим, что при составлении суперпозиции мы можем строить не только *линейные* поляризации (для которых $\vec{E}$ в волне направлено вдоль оси, отличающейся от x и y, и проекции этого $\vec{E}$ на базисные оси могут иметь разные значения, но их колебания происходят *синфазно*), но и *круговые* или *эллиптические* поляризации, в которых проекции $\vec{E}$ на базисные оси совершают колебания со сдвигом по фазе. Такую ситуацию, как мы знаем, удобно описывать на языке комплексных амплитуд.

Оказывается, что у отдельного фотона тоже могут быть поляризационные состояния. И для фотона с $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$ также возможны <u>два</u> независимых состояния поляризации: $|x\rangle$ и $|y\rangle$. При этом классическая гармоническая электромагнитная волна, поляризованная по оси x, состоит из большого числа фотонов в состоянии $|x\rangle$. Таким образом, если волновой вектор фотона известен (и мы направляем по нему ось z), и мы производим измерения у него только величин, связанных с поляризацией, можно считать фотон квантовым объектом с двумя базисными состояниями $|x\rangle$ и $|y\rangle$. Кроме того, у фотона могут быть состояния, являющиеся суперпозициями базисных. Для этих состояний измерение поляризации фотона должно с вероятностью w_x обнаруживать поляризацию по x, и с вероятностью $w_y = 1 - w_x$ – поляризацию по y. Объекты с двумя базисными состояниями играют важную роль в *квантовой теории информации* и *квантовой криптографии*, где для них введено специальное название – ***кубиты*** («*квантовые биты*»).
Вспомним: ***бит*** – это не только единица измерения информации. С точки зрения физики это ***классическая*** система с двумя состояниями. Например, простой проводящий контур с источником тока и ключом. При замкнутом ключе ток в контуре течет (состояние 1), при разомкнутом – не течет (состояние 0). Взяв набор контуров, можно, замыкая и размыкая ключи, «записать» любой *двоичный код* – последовательность нулей и единиц.
Кубит – это *квантовая* система с двумя базисными состояниями, которые мы обозначим $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Одно из основных отличий кубита от бита состоит в том, что квантовые объекты могут находиться в состоянии *суперпозиции*: кроме базисных состояний у системы будет еще и бесконечное количество других возможных состояний, каждое из которых является их линейной суперпозицией (смесью). Второе важное отличие состоит в том, что связь состояния квантовой системы и результатов производимых над ней *измерений* имеет *вероятностный* характер: если у бита (проводящего контура) измерить «наличие тока», то измерения в состоянии 1 <u>всегда</u> покажут наличие тока, а в состоянии 0 – <u>всегда</u> отсутствие

тока, и других вариантов быть не может. У кубита, находящегося в состоянии суперпозиции базисных состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$, результаты измерений с некоторой вероятностью w_0 будут соответствовать состоянию $|0\rangle$, и с некоторой вероятностью w_1 – состоянию $|1\rangle$.

Для построения математического аппарата, позволяющего описывать такие объекты, введем новую математическую конструкцию.

Будем называть ***матрицами*** $(n \times m)$ прямоугольные таблицы, состоящие из n строк и m столбцов. Например матрица (2×1) – это «двухкомпонентный» столбец $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, матрица (1×2) – «двухкомпонентная» строка $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$, а матрица (2×2) – квадратная матрица $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Научимся **перемножать** матрицы: это делается по правилу «***строка на столбец***»: произведение матрицы $\hat{A}$ размером $(n \times m)$ на матрицу $\hat{B}$ размером $(m \times l)$ равно матрице $\hat{C}$ размером $(n \times l)$, элементы которой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Пример 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание на то, что перемножать можно не любые матрицы – число столбцов в первой должно равняться числу строк во второй!

Сопряженной к данной матрице $\hat{A}$ назовем матрицу $\hat{A}^\dagger$, получаемую перестановкой строк и столбцов и сопряжением всех комплексных чисел: $\hat{A}^\dagger \equiv \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$.

Пример 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & -4i \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2i & 4i \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8i \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}8i \end{pmatrix}.$$

Теперь мы готовы описывать поляризационные состояния фотонов как состояния кубита. Договоримся сопоставить состоянию $|x\rangle$ фотона двухкомпонентный столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а состоянию $|y\rangle$ – двухкомпонентный столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда произвольная суперпозиция этих состояний описывается столбцом $\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$, в котором комплексные числа $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ связаны *условием нормировки* $|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2 = 1$. Это условие имеет физический смысл, так величину $|\boldsymbol{\alpha}|^2 \equiv w_x$ мы считаем вероятностью того, что при измерении поляризации фотона в состоянии суперпозиции будет обнаружено, что он поляризован вдоль оси x, и соответственно величину $|\boldsymbol{\beta}|^2 \equiv w_y$ – вероятностью того, что будет обнаружена поляризация вдоль оси y. Напомним, что при сложении когерентных волн вероятности мы пользуемся методом комплексных амплитуд, то есть числа $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ должны быть именно комплексными.

Множество всех столбцов можно считать двумерным векторным пространством (конечно, необычным: нельзя забывать, что «координаты» $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ в этом пространстве – комплексные числа!). Можно определить в этом пространстве ***скалярное произведение*** двух «векторов» как $\langle 1|2\rangle \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \end{pmatrix}^\dagger \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^* & \boldsymbol{\beta}_1^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_1^* \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_1^* \boldsymbol{\beta}_2$. Полезно обратить внимание следующие обстоятельства:

1) базисные состояния ***ортогональны*** (их скалярное произведение равно нулю $\langle x|y\rangle = 0$);

2) условие нормировки можно сформулировать как требование, что скалярный квадрат «вектора» равен единице;

3) вероятности можно записывать как квадраты модулей скалярных произведений: например,. $w_x = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}\right|^2$.

Состояния кубита, описываемые двухкомпонентными столбцами, принято называть «*чистыми*» состояниями. В самом общем случае вероятность того, что кубит,

находящийся в чистом состоянии $|1\rangle$, при измерении будет обнаружен в чистом состоянии $|2\rangle$, равна $w_{21} = |\langle 2|1\rangle|^2$. Отметим важное обстоятельство: никакие вероятности, вычисляемые по этой формуле, для нашего чистого состояния не изменятся, если столбец умножить на комплексное число вида $e^{i\varepsilon}$(с любым вещественным ε). Кроме того, при этом остается справедливым и условие нормировки (оба факта следует из того, что $|e^{i\varepsilon}|^2 = \cos^2(\varepsilon) + \sin^2(\varepsilon) = 1$). Поэтому, экспериментально изучая однофотонное чистое состояние, невозможно установить его «общую фазу». Значит, ее можно выбрать произвольно – например, так, чтобы в столбце число $\boldsymbol{\alpha}$ было вещественным и положительным, и, без ограничения общности, можно считать, что столбец, описывающий некоторое чистое состояние, имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha \\ |\boldsymbol{\beta}| \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}$.

Пример 3: Фотон находится в чистом состоянии $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}$. Найти вероятность обнаружить его в чистом состоянии $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 \\ i/3 \end{pmatrix}$.

Решение: Произведя вычисление, обнаруживаем:

$$w_{21} = \left| \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & -i/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ (1-i)/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{2}{3} - \frac{i}{6} - \frac{1}{6} \right|^2 = \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{18} \approx 0{,}278.$$

Пример 4: В эксперименте три фотона с одинаковым поляризационным состоянием $\begin{pmatrix} \frac{1+2i}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ направляются на поляроид, пропускающий фотоны, поляризованные по оси x, и отражающий фотоны, поляризованные по оси y. Найдите вероятность того, что все три фотона пройдут через поляроид.

Решение: Для одного фотона вероятность прохождения $w_x = |\boldsymbol{\alpha}|^2 = \left|\frac{1}{3} + i\frac{2}{3}\right| = \frac{5}{9}$. Вероятность того, что пойдут все три, равна $\left(\frac{5}{9}\right)^3 = \frac{125}{729} \approx 0{,}1715$.

Тут самое время вспомнить, что в классической физике бывают не только поляризованные, но и неполяризованные электромагнитные волны. Мы их рассматриваем как смесь некогерентных волн со всеми возможными поляризациями. Могут ли существовать отдельные «неполяризованные фотоны»? Эксперимент показал, что фотоны <u>могут</u> находиться в состоянии, не обладающем вообще <u>никакой</u> определенной поляризацией. В таком состоянии при измерении любых величин, связанных с поляризацией, могут быть с равной вероятностью получены значения, отвечающие **любой** из линейных поляризаций (вдоль **любой** оси, перпендикулярной $\vec{k}$). Такое состояние фотона называют «***полностью неполяризованным***».

Аналогия с волнами тут не случайна: вообще все квантовые объекты обладают волновыми свойствами – с ними связывают *волны вероятности* нахождения их в том или ином состоянии. Эти волны тоже могут не быть когерентными, а в квантовой суперпозиции могут участвовать только когерентные волны. При потере ***квантовой когерентности*** получаются поляризационные состояния фотонов, которые нельзя описать <u>никаким</u> столбцом $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$, так как столбцу соответствует наложение когерентных волн вероятности. Для некогерентных смесей приходится использовать другой объект – матрицу (2×2):

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы подчинены следующим требованиям: $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ и $\rho_{11} \cdot \rho_{22} > \rho_{12} \cdot \rho_{21}$; при этом ρ_{11} и ρ_{22} вещественны и положительны, а ρ_{12} и ρ_{21} – сопряженные по отношению друг к другу ($\rho_{21} = \rho_{12}^*$). Эти свойства подобраны для правильного описания физики: в частности $\rho_{11} = w_x$ и $\rho_{22} = w_y$, так что для вероятностей

получаются положительные значения, в сумме равные 1. Полностью неполяризованное состояние фотона отвечает $\hat{\rho}_{\text{пн}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Состояния кубита, которые нельзя описать двухкомпонентным столбцом, а только матрицей 2×2, принято называть «***смешанным состоянием***». В самом общем случае вероятность того, что кубит, находящийся в смешанном состоянии $\hat{\rho}$, при измерении будет обнаружен в чистом состоянии $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$, равна $w = (\boldsymbol{\alpha}^* \quad \boldsymbol{\beta}^*)\hat{\rho}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$.

Пример 5: Фотон находится в смешанном состоянии $\begin{pmatrix} 1/3 & -i/3 \\ i/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Найти вероятность обнаружить его в чистом состоянии $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 \\ i/3 \end{pmatrix}$.

Решение: Согласно приведенной формуле,

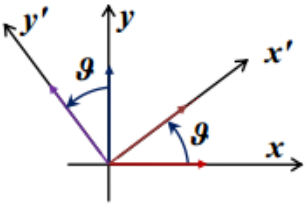
$$w = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & -i/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & -i/3 \\ i/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 \\ +i/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^3}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+1 \\ +2i(\sqrt{2}+1) \end{pmatrix} = \frac{10+4\sqrt{2}}{27} \approx 0{,}58.$$

Разберем теперь действия, которые мы можем производить над поляризационным состоянием фотона. Они в действительности сводятся к двум возможностям:

(1) мы можем поместить фотон в условия, в которых его поляризационное состояние будет определенным образом изменяться (*эволюционировать*);

(2) мы можем произвести измерение некоторой физической величины, связанной с поляризацией.

Например, можно направить фотонный пучок в среду, которая поворачивает плоскость поляризации фотона на угол, пропорциональный длине пройденного пути. Как в этом случае будет изменяться поляризационное состояние? Если угол поворота $\vartheta(z) = kz$, то



состояние $|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ должно превратиться в состояние с поляризацией вдоль оси x' (см. рисунок), а состояние $|y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – в состояние с поляризацией вдоль оси y' (как обычно, положительным направлением вращения мы считаем направление против часовой стрелки).

Нетрудно понять, что «новые» состояния можно записать как комбинацию «старых»:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |x\rangle \to |x'\rangle = \cos(\vartheta)|x\rangle + \sin(\vartheta)|y\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |y\rangle \to |y'\rangle = \cos(\vartheta)|y\rangle - \sin(\vartheta)|x\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Видно, что этот переход для обоих состояний можно описать как результат *действия* (то есть умножения) одной «матрицы поворота плоскости поляризации» на столбец, задающий начальное состояние:

$$\hat{U}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \hat{U}(\vartheta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \hat{U}(\vartheta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Значит, и для <u>любой суперпозиции</u> базисных состояний эволюция этой суперпозиции при прохождении среды, вращающей плоскость поляризации, будет описываться действием $\hat{U}(\vartheta)$ на столбец начального состояния. Точно так же для любой эволюции поляризационного состояния фотона существует соответствующая *матрица эволюции* $\hat{U}$, действие которой описывает данную эволюцию.

Пример 6: Фотон находился в состоянии $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4i/5 \end{pmatrix}$. Он прошел слой вещества, поворачивающего плоскость поляризации на 30° против часовой стрелки. С какой вероятностью этот фотон может быть обнаружен в состоянии, поляризованном вдоль оси y?

Решение: Вычислим матрицу поворота для заданного угла: $\hat{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Поэтому после прохождения слоя состояние фотона

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4i/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} - 4i \\ 3 + 4\sqrt{3}i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $w_y = |\beta|^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{10}\right)^2 = 0{,}57$.

При ***измерении*** фотон взаимодействует с измерительным прибором, и это взаимодействие изменяет состояние фотона: прибор «загоняет» фотон в состояние с определенным значением измеренной величины (до измерения фотон мог и не иметь какого-либо определенного значения этой величины).

Задачи для самостоятельного решения.

1. В эксперименте три фотона с одинаковым поляризационным состоянием $\begin{pmatrix} 1/2 \\ i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ направляются на поляроид, пропускающий фотоны, поляризованные по оси *y*, и отражающий фотоны, поляризованные по оси *x*. Найдите вероятность того, что два фотона пройдут, а один отразится. Учтите, что фотоны ***неразличимы*** – их невозможно «пронумеровать».

2. Пучок фотонов, находящихся в одинаковом чистом поляризационном состоянии, направляют на поляроид, пропускающий фотоны, поляризованные по оси x, и отражающий фотоны, поляризованные по оси y. В первой серии было пущено $N_0 = 1690$ фотонов, и через поляроид прошло $N_1 = 250$ фотонов. Затем ось поляроида повернули на 30° в сторону оси y. Снова на него было направлено $N_0 = 1690$ фотонов в том же поляризационном состоянии, и в этот раз через поляроид прошло $N_2 = 807$ фотонов. Ось поляроида повернули еще на 30° в ту же сторону и в третий раз направили на поляроид то же количество фотонов в том же состоянии. Предскажите математическое ожидание количества фотонов N_3, прошедших через поляроид на этот раз. Попробуйте оценить точность этого предсказания.

3. Для световой волны, в которой все фотоны находятся в состоянии $\begin{pmatrix} \frac{1+2i}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ найдите толщину слоя среды, поворачивающей плоскость поляризации, который нужно поставить перед поляроидом, чтобы интенсивность прошедшей через поляроид волны была максимально возможной. Считайте, что для этой среды угол поворота изменяется пропорционально длине пройденного фотоном пути: $\vartheta(z) = \frac{\pi}{L} z$, где $L = 26$ см.

4. Фотон находится в смешанном состоянии $\begin{pmatrix} 1/4 & i/8 \\ -i/8 & 3/4 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность обнаружить у него *правую циркулярную поляризацию* (колебания напряженности по осям *x* и *y* имеют одинаковые амплитуды, но колебания по *y* опережают по фазе колебания по *x* на $\frac{\pi}{2}$).

курс «ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА для 11 класса»
Парфенов К.В., физический факультет МГУ

Занятие 20D: Математика и «настоящая» квантовая теория.

Темы: Пространство состояний. Измерения, операторы и матрицы. Спектр оператора.

Как должен выглядеть математический аппарат квантовой теории? Для ответа на этот вопрос постараемся обобщить все факты, которые нам уже известны.

Во-первых: Мы знаем, что одним из ключевых понятий является понятие ***состояния*** квантового объекта. Наиболее характерной чертой этих состояний является возможность построения ***суперпозиции*** когерентных состояний – каждое «*чистое*» состояние микрообъекта можно записать как суперпозицию состояний *с определенными значениями* любой из измеримых характеристик («***наблюдаемых***») этого микрообъекта. Мы также узнали, что эти суперпозиции (с учетом зависимости результата интерференции «волн вероятности» от разности фаз) удобно описывать на языке комплексных амплитуд. Это приводит нас к выводу, что при введении математической конструкции, соответствующей чистым состояниям (назовем ее «вектором состояния» и обозначим $|\psi\rangle$) необходимо обеспечить возможность построения линейных комбинаций векторов состояний с комплексными коэффициентами, которые тоже являются векторами состояний. На языке математиков это означает, что вектора состояний образуют ***комплексное векторное пространство*** (которое в дальнейшем будем называть «***пространством состояний***» и обозначим $\boldsymbol{H} = \{|\psi\rangle\}$). То есть для любой пары векторов состояний ($|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$) и любой пары комплексных чисел (α и β) задано правило, по которому можно построить вектор из этого пространства $|\psi\rangle = \alpha\cdot|\psi_1\rangle + \beta\cdot|\psi_2\rangle$. Причем это правило должно удовлетворять системе «естественных» требований (например, $|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle + |\psi_1\rangle$ или $\alpha\cdot(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \alpha\cdot|\psi_1\rangle + \alpha\cdot|\psi_2\rangle$, или $1\cdot|\psi\rangle = |\psi\rangle$, или существование «*нулевого*» вектора Ø – такого, что $|\psi\rangle$ + Ø = $|\psi\rangle$ и 0· $|\psi\rangle$ = Ø).

Во-вторых, у нас должна быть возможность ввести вероятностную интерпретацию для возможности обнаружения микрообъекта в каком-либо состоянии. Пример с кубитами подсказывает нам, что для этого можно использовать конструкцию *скалярного произведения*. Там скалярное произведение было реализовано как матричное умножение сопряженного столбца (превратившегося в строку при транспонировании) на столбец: $\begin{pmatrix}\alpha_1^* & \beta_1^*\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$. В более общем случае договоримся, что существует математическое правило, по которому каждому вектору $|\psi\rangle$ из $\boldsymbol{H}$ соответствует сопряженный вектор $\langle\psi|$, и каждой паре векторов $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ соответствует комплексное число $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, которое и является их скалярным произведением. Это правило тоже должно удовлетворять «естественным» требованиям. Самым необычным для того, кто впервые знакомится со скалярным произведением в комплексных векторных пространствах, является требование его комплексного сопряжения при перестановке сомножителей: $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$. Кроме того, договоримся, что, как и в «обычных» вещественных векторных пространствах, длину вектора можно с сохранением «естественных» свойств этого понятия определить как квадратный корень из скалярного квадрата вектора $\||\psi\rangle\| \equiv \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$. «Естественные» требования здесь – то, что длина есть вещественное

неотрицательное число, равное нулю только для нулевого вектора (а значит, скалярный квадрат любого вектора тоже есть вещественное неотрицательное число, равное нулю только для Ø), и *неравенство треугольника* $\left\|\left|\psi_1\right\rangle+\left|\psi_2\right\rangle\right\| \le \left\|\left|\psi_1\right\rangle\right\|+\left\|\left|\psi_2\right\rangle\right\|$. В итоге мы можем постулировать, что вероятность обнаружения в чистом состоянии $\left|\psi_1\right\rangle$ микрообъекта, находящегося в другом чистом состоянии $\left|\psi_2\right\rangle$, равна $w_{12}=\left|\left\langle\psi_1\middle|\psi_2\right\rangle\right|^2$. Важно понимать, что для «*обнаружения микрообъекта в чистом состоянии* $\left|\psi_1\right\rangle$» необходимо произвести ***измерение*** наблюдаемой, при котором микрообъект «загоняется» в $\left|\psi_1\right\rangle$.

В-третьих, нам нужно научиться описывать в общем виде результаты ***измерений*** в микромире – процессов взаимодействия микрообъекта с прибором, в результате которых прибор «сообщает» нам значение *f наблюдаемой*, и «загоняет» микрообъект в состояние $\left|f\right\rangle$ с этим значением наблюдаемой (напомним, что в произвольном состоянии заданная наблюдаемая может и не иметь определенного значения). Начнем с наиболее простого случая объекта с одной степенью свободы: у такого микрообъекта существуют наблюдаемые, измерения каждой из которых однозначно определяет состояние микрообъекта после измерения (то есть $f \leftrightarrow \left|f\right\rangle$). Ясно, что в этом случае одно из возможных значений *f* обязательно реализуется, и поэтому любое чистое состояние $\left|\psi\right\rangle$ микрообъекта есть суперпозиция состояний с определенными значениями нашей наблюдаемой: $\left|\psi\right\rangle=\sum_f \alpha_f \cdot \left|f\right\rangle$. Вероятность выпадения данного значения есть квадрат модуля коэффициента разложения и одновременно квадрат модуля скалярного произведения, что обеспечивается при

$$\alpha_f = \left\langle f\middle|\psi\right\rangle.$$

Отметим естественность этого выражения: точно так же коэффициент разложения по базису выражался через скалярное произведение и в знакомых нам вещественных векторных пространствах (сравните наше соотношение с $x=(\vec{e}_x\cdot\vec{r})$ для евклидова трехмерного пространства векторов $\vec{r}$). Таким образом, для любого $\left|\psi\right\rangle$ из $\boldsymbol{H}$

$$\left|\psi\right\rangle=\sum_f \left\langle f\middle|\psi\right\rangle\cdot\left|f\right\rangle.$$

Эти два равенства устанавливают взаимно-однозначное соответствие между векторами $\left|\psi\right\rangle\in\boldsymbol{H}$ и функциями $\psi(f)\equiv\left\langle f\middle|\psi\right\rangle$. Область определения этой функции – это множество допустимых значений наблюдаемой (ее *спектр*), а множество значений – множество комплексных чисел. В дальнейшем будем назвать ее «***волновой функцией состояния в F-представлении***» (далее – просто **ВФ**). Как мы теперь видим, пространство состояний квантового объекта может быть реализовано как пространство волновых функций, причем подобные реализации (по математической терминологии, ***представления*** пространства состояний) могут быть связаны с любой из наблюдаемых, измерение которых дает полную информацию о состоянии объекта после измерения (то есть разных представлений может быть сколько угодно, даже бесконечно много).

По сути, мы поняли, что набор состояний с определенными значениями наблюдаемой образуют базис в нашем пространстве, причем базис *ортонормированный*: каждый вектор описывает чистое состояние и имеет единичную длину, а вероятность получить при измерении в состоянии с одним определенным значением наблюдаемой некоторое другое

ее значение равна нулю, то есть равно нулю скалярное произведение любых разных базисных векторов. Таким образом, $\langle f | f' \rangle = \begin{Bmatrix} 1, & f' = f \\ 0, & f' \neq f \end{Bmatrix} \equiv \delta_{ff'}$. Последнее равенство определяет ***символ Кронекера***.

Для дальнейшего нам нужно познакомиться еще с одной важной математической конструкцией. Допустим, что у нас есть какое-то правило, по которому <u>каждому</u> вектору из $\boldsymbol{H}$ сопоставляется другой вектор – тоже из $\boldsymbol{H}$: $|\psi\rangle \to |\tilde{\psi}\rangle$. Договоримся считать это правило определением **оператора в** $\boldsymbol{H}$, который *действует* на вектора нашего пространства, то есть $\hat{G}|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$. Обычно $|\tilde{\psi}\rangle$ называют ***образом*** $|\psi\rangle$ при действии $\hat{G}$, а $|\psi\rangle$ – ***прообразом*** $|\tilde{\psi}\rangle$.Можно подчинить это правило различным требованиям, и получать разные классы операторов. Например, ***линейные операторы*** должны удовлетворять требованию $\hat{G}(\alpha \cdot |\psi_1\rangle + \beta \cdot |\psi_2\rangle) = \alpha \cdot \hat{G}|\psi_1\rangle + \beta \cdot \hat{G}|\psi_2\rangle$ для $\forall |\psi_{1,2}\rangle \in \boldsymbol{H}$ и $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathrm{C}^1$. Так как любой вектор можно записать как разложение по базису, то для определения действия линейного оператора на любой вектор достаточно знать, как он действует на базисные вектора: $\hat{G}|\psi\rangle = \sum_f \langle f | \psi \rangle \cdot \hat{G} | f \rangle$. Каждому вектору можно сопоставить ВФ $\psi(f)$, и каждому прообразу – тоже: $\tilde{\psi}(f) \equiv \langle f | \tilde{\psi} \rangle$. Значит, мы можем «перенести» определение оператора из пространства векторов в пространство волновых функций, считая по определению, что $\hat{G}\psi(f) \equiv \tilde{\psi}(f)$. Тогда

$$\tilde{\psi}(f) = \langle f | \tilde{\psi} \rangle = \langle f | \hat{G} | \psi \rangle = \sum_{f'} \langle f' | \psi \rangle \cdot \langle f | \hat{G} | f' \rangle = \sum_{f'} G_{ff'} \cdot \psi(f').$$

Мы обнаружили, что ВФ образа строится по ВФ прообраза с помощью квадратной матрицы $n \times n$ $(G_{ff'})$, где n – количество разных значений наблюдаемой F (напомним – это наблюдаемая, в представлении которой мы строим ВФ). Ее далее будем называть ***матрицей оператора*** $\hat{G}$ ***в F-представлении***. Значит, матрица (в любом представлении) дает полное описание нашего оператора, и на операторы в можно перенести все свойства матриц: ввести понятие оператора $\hat{G}^\dagger$, *сопряженного* к $\hat{G}$: $(G^\dagger)_{ff'} \equiv G^*_{f'f}$, и ввести понятие *самосопряженного* оператора, у которого $G_{ff'} = G^*_{f'f}$.

Пример 1: Пусть $|\phi\rangle \in \boldsymbol{H}$ и $\langle \phi | \phi \rangle = 1$. *Оператор проектирования на* $|\phi\rangle$ определен соотношением $\hat{P}_\phi |\psi\rangle \equiv \langle \phi | \psi \rangle \cdot |\phi\rangle$ для $\forall |\psi\rangle \in \boldsymbol{H}$. Найти матрицу этого оператора в F-представлении. Проверить, является ли он самосопряженным.

Решение: По определению

$$(P_\phi)_{ff'} = \langle f | \hat{P}_\phi | f' \rangle = \langle f | \phi \rangle \cdot \langle \phi | f' \rangle = \phi(f) \cdot \phi^*(f').$$

Проверка: $(P_\phi)^*{}_{f'f} = \phi^*(f') \cdot \phi(f) = \phi(f) \cdot \phi^*(f') = (P_\phi)_{ff'}$. Значит, оператор проектирования на вектор является самосопряженным. Отметим, что можно придумать удобную «компактную» форму записи оператора $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$: действие $\hat{P}_\phi$ на $\forall |\psi\rangle \in \boldsymbol{H}$ при этом записывается точно в нужном виде.

А теперь вернемся к математическому описанию процедуры измерения величины F. Мы уже знаем, что для ее задания нужно указать спектр $\{f\}$ и вектора состояния $\{|f\rangle\}$ с этими значениями измеряемой величины. Тогда мы можем объединить эту информацию, сконструировав ***оператор наблюдаемой*** $\hat{F} \equiv \sum_f f \cdot \hat{P}_f = \sum_f f \cdot |f\rangle\langle f|$. Мы помним, что в этой формуле f пробегает все возможные значения нашей наблюдаемых. Выделим какое-то одно из них (назовем его f_1). Что получится при действии оператора наблюдаемой на вектор состояния с определенным значением этой наблюдаемой? Проверим:

$$\hat{F}|f_1\rangle = \sum_f f \cdot |f\rangle\langle f|f_1\rangle = \sum_f f \cdot |f\rangle \cdot \delta_{ff_1} = f_1 \cdot |f_1\rangle .$$

Как видно, получается тот же вектор, умноженный на соответствующее значение наблюдаемой! Более того: поскольку других (не входящих в ряд, по которому идет суммирование) значений у нашей наблюдаемой нет, оказывается, что все допустимые значения наблюдаемой и все состояния с этими ее значениями можно найти, решая так называемую ***спектральную задачу*** для оператора наблюдаемой: если решать уравнение $\hat{F}|\psi\rangle = f \cdot |\psi\rangle$ относительно $|\psi\rangle$, то нетривиальные (отличные от нулевого вектора Ø) решения существуют только при f, равных допустимым значениям наблюдаемой (их также называют ***собственными значениями*** данного оператора), а сами эти решения, нормированные на 1, и есть вектора состояний, в которые переходит объект после измерения (их называют ***собственными векторами*** оператора).

В качестве примера обсудим измеряемые величины, связанные с поляризацией свободного фотона. Среди таких наблюдаемых одной из самых важных является ***спиральность***. Разберемся, что это такое. Фотоны, как и многие квантовые частицы, обладают *спином* – «собственным» моментом импульса. Название «собственный» означает, что этот момент импульса не связан с движением фотона в пространстве, и он отличен от нуля в системе координат, начало которой находится на линии движения фотона. Таким образом, он связан с неким «внутренним» устройством фотона. Поэтому ***полный момент импульса*** фотона $\vec{j}$ состоит из «обычного» вклада, связанного с импульсом (в квантовой физике его называют «***орбитальным моментом***»), и «собственного»: $\vec{j} = [\vec{r} \times \vec{p}] + \vec{S}$. Поэтому даже у свободного фотона орбитальный момент и спин по отдельности не сохраняются – сохраняющейся величиной является именно полный момент. Ясно также, что у свободного фотона сохраняется импульс $\vec{p}$. Если измерять проекцию спина фотона на некоторое направление, то мы обнаружим, что допустимые значения этой наблюдаемой равны $\pm\hbar$ (или ± 1, если измерять спин в единицах $\hbar$), и им соответствуют два возможных *спиновых состояния* фотона. Оказывается, что «пространство» спиновых состояний фотона и «пространство» его поляризационных состояний – на самом деле <u>одно и то же</u> двумерное пространство его состояний при заданном волновом векторе. Однако поляризации, о которых мы говорили ранее, сохраняются у свободно движущегося фотона, и мы можем использовать поляризацию как характеристику его состояния. А вот проекцию спина на «произвольно выбранное» направление не можем – она <u>не сохраняется</u>, и поэтому не имеет определенного значения для свободного фотона. Как же выбрать базисные спиновые состояния фотона? Выход в том, чтобы из всех возможных проекций спина фотона выбрать величину, которая сохраняется при свободном движении. Такой величиной очевидно является проекция полного момента на направление импульса, то есть $j_z = \frac{1}{k}(\vec{k} \cdot \vec{j})$ (ведь и импульс, и полный момент сохраняются – как обычно, мы ось z направили по $\vec{k}$). С другой стороны, орбитальный момент всегда перпендикулярен импульсу, и его проекция $l_z \equiv 0$. Значит, проекция полного момента на направление

импульса равна проекции спина на это направление. Собственно, именно эта величина (в единицах $\hbar$) и называется *спиральностью* Λ. Она является характеристикой спинового состояния, и при этом может быть измерена у свободного фотона. Связь состояний свободного фотона с определенной спиральностью и состояний с определенной поляризацией оказалась достаточно простой: состояние с Λ = + 1 в точности соответствует правой циркулярной поляризации $|+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|y\rangle$, а с Λ = – 1 – левой циркулярной поляризации $|-1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|y\rangle$.

Пример 2: Построить пространство поляризационных состояний фотона, движущегося по оси *z* и определить в нем операторы поляризации вдоль оси *x* и спиральности.

Решение: Как мы уже знаем, возможный способ построения пространства поляризационных состояний фотона состоит в том, чтобы сопоставить базисным состояниям поляризации двухкомпонентные столбцы $|x\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $|y\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда пространство состояний образуется линейными комбинациями базисных векторов: $|\psi\rangle = \alpha \cdot |x\rangle + \beta \cdot |y\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Чистым поляризационным состояниям отвечают вектора единичной длины, у которых $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Конструкция скалярного произведения нам тоже известна: $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \beta_1^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_1^* \alpha_2 + \beta_1^* \beta_2$.

Для определения оператора наблюдаемой нужно задать возможные результаты измерений и состояния с определенными значениями измеряемых величин. Например, мы можем определить оператор поляризации по оси *x* так, чтобы измерение выдавало число 1 и переводило фотон в состояние $|x\rangle$, и выдавало число 0 и переводило фотон в состояние $|y\rangle$.Тогда

$$\hat{\Pi}_x = 1 \cdot |x\rangle\langle x| + 0 \cdot |y\rangle\langle y| = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедится, что собственные значения этого оператора равны 1 и 0, а соответствующие им собственные вектора – это $|x\rangle$ и $|y\rangle$.

Измерение спиральности должно выдавать значения ± 1 в состояниях с правой и левой циркулярной поляризациями, то есть

$$\hat{\Lambda} = (+1) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}.$$

Полезно самостоятельно решить спектральную задачу $\hat{\Lambda}|\psi\rangle = \Lambda \cdot |\psi\rangle$ и убедиться, что нетривиальные решения существуют при Λ = ± 1 и (с точностью до выбора фазового множителя) эти решения соответствуют векторам $|\pm 1\rangle = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|y\rangle$.

Также интересно обратить внимание на то, что и само построение пространства поляризационных состояний (оно же пространство спиновых состояний) фотона можно было выполнить по-другому. Представим себя, например, что мы использовали бы в

качестве базисных столбцов состояния с определенной спиральностью: $|+1\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}'$ и $|-1\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}'$ (штрих у «новых» базисных столбцов поставлен, чтобы отличать их от «прежних»). Из уравнений связи состояний с определенной спиральностью и поляризацией можно найти, что $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}'$ и $|y\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}|+1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-1\rangle = \begin{pmatrix}-i/\sqrt{2}\\-i/\sqrt{2}\end{pmatrix}'$. Видно, что мы фактически попали в другой вариант (математики говорят о другом ***представлении***) нашего пространства – в виде «штрихованных столбцов». Оно полностью эквивалентно прежнему, но конкретные записи векторов состояний (столбцов) и операторов наблюдаемых (матриц) изменяются. Теперь матрица оператора спиральности

$$\hat{\Lambda} = (+1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}'\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}' + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}'\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}+1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}'.$$

Мы обнаружили проявление общей закономерности: если в качестве базиса в пространстве состояний используются вектора с определенными значениями некоторой наблюдаемой, то матрица оператора этой наблюдаемой ***диагональна*** (у нее отличны от нуля только элементы на «главной диагонали»), причем эти элементы – в точности ее возможные значения.

Пример 3: Точечная квантовая частица может двигаться только вдоль оси *x*. Построить пространство ее состояний движения и найти вид оператора импульса в этом пространстве.

Решение: На самом деле важно с самого начала понять, что задача нечетко сформулирована, так как мы не договорились, что такое «точечная квантовая частица» и даже не знаем, существуют ли такие на самом деле. Более того – ясно, что это некоторая идеализация, и нам нужно это учитывать. Примем для начала, что если для нее существует процедура измерения координаты *x*, то она должна выдавать конкретные значения и при этом частица должна отправляться в состояние $|x\rangle$. Эти состояния должны образовывать базис в пространстве состояний, то есть любое состояние такой частицы может быть записано в виде $|\psi\rangle = \sum_x \langle x|\psi\rangle|x\rangle$. Для чистых состояний полная вероятность найти частицу где-то в пространстве равна 1, то есть $\sum_x |\langle x|\psi\rangle|^2 = 1$. И тут мы обнаруживаем модельную несогласованность: дискретность набора возможных значений координаты не согласуется с существованием «точечных» частиц, ибо это требует от нас существования сколь угодно малых размеров, то есть <u>непрерывности</u> набора значений координаты. Поэтому на самом деле в этих формулах должны фигурировать не суммы, а интегралы: $|\psi\rangle = \int \langle x|\psi\rangle|x\rangle dx$ и $\int |\langle x|\psi\rangle|^2\, dx = 1$. А волновая функция в координатном представлении $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ оказывается функцией непрерывно изменяющейся переменной, пробегающей все возможные значения координаты частицы (для неограниченного движения – от –∞ до +∞). Если взять в качестве состояние с определенным значением координаты $|x'\rangle$, то ясно что вероятность получить другое

значение координаты в таком состоянии равна нулю: $\langle x|x'\rangle = 0$ при $x \neq x'$. Но считать, что $\langle x|x\rangle = 1$ нельзя, так как в этом случае $\int \langle x|x'\rangle|x\rangle dx = 0 \neq |x'\rangle$! Дирак предложил ввести для описания подобных конструкций ***дельта-функцию*** $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$, рассматривая ее как результат предельного перехода. Если ввести $\delta_l(z) = \begin{cases} 1/l, |z| \leq l/2 \\ 0, |z| > l/2 \end{cases}$, то $\delta_l(z) \xrightarrow[l\to 0]{} \delta(z) = \begin{cases} 0, z \neq 0 \\ +\infty, z = 0 \end{cases}$, и при этом $\int \langle x|x'\rangle|x\rangle dx = \int \delta(x-x')|x\rangle dx = |x'\rangle$. Но тогда не выполняется условие нормировки для волновой функции состояния с определенной координатой: $\int [\delta(x-x')]^2 dx = +\infty \neq 1$. Единственный выход из создавшегося противоречия – считать, что на самом деле пространство разбито на квантовые «клеточки» размера l, значения координаты дискретны, и поэтому частица не может быть точечной, но можно изучать идеализацию, в рамках которой l очень-очень мало , и мы используем предельный переход $l \to 0$. Таким образом, у квантовых частиц «на самом деле» не может быть чистых состояний с определенным значением координаты (состояния с определенным значением координаты физически нереализуемы), но мы можем формально рассматривать базис из таких состояний, полученных в результате предельного перехода. В этом пределе пространство состояний движения «точечной» частицы может быть реализовано как пространство координатных ВФ $\psi(x)$, и волновые функции чистых состояний нормированы условием $\langle \psi|\psi\rangle = \int |\psi(x)|^2 \, dx = 1$. Как видно, скалярное произведение в этом пространстве нужно определить следующим образом: $\langle \psi_1|\psi_2\rangle = \int \psi^*_1(x) \cdot \psi_2(x) dx$. Постулат вероятностной интерпретации в этом случае состоит в утверждении, что $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ – это ***плотность вероятности*** нахождения нашей частицы в пространстве. Тогда $\bar{x}_\psi = \int x |\psi(x)|^2 \, dx = \langle \psi|\hat{x}|\psi\rangle$ – это среднее значение координаты в состоянии $|\psi\rangle$.

Для корректного построения оператора импульса заметим, что состояния с определенным импульсом должны быть плоской волной $\psi_p(x) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px}$. Эта функция должна быть решением уравнения $\hat{p}_x \psi_p(x) = p \cdot \psi_p(x)$. Ясно, что нам подходит <u>линейный</u> оператор $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Интересный факт: собственные функции оператора импульса – $\psi_p(x) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px}$ с $A \neq 0$ тоже не удовлетворяют условию нормировки $\int [\psi_p(x)]^2 dx = +\infty \neq 1$. Так что и состояния с определенным импульсом для «точечной» частицы физически нереализуемы. Как можно доказать, для любого состояния такой частицы произведение неопределенностей координаты и импульса ограничено снизу: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$.

Важно обратить внимание на уровень абстракции наших математических рассуждений, ибо это первый шаг на весьма долгой дороге: чем более современные методы теоретической физики мы будем изучать, тем выше будет этот уровень. И понимание этого факта должно еще усилиться, если прочитать дополнительные материалы (Приложения).

Приложение 1*: Коммутаторы, измерения и соотношение неопределенностей Гайзенберга.

На примере операторов координаты и импульса точечной частицы мы можем обнаружить важное свойство операторов наблюдаемых, которые мы определяем в пространстве состояний. Подействуем двумя этими операторами *последовательно* на одну и ту же произвольную координатную ВФ в разном порядке:

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi(x) = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = -i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x}, \text{ и } \hat{p}_x\hat{x}\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = -i\hbar\psi - i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Как видно, результат изменяется в зависимости от порядка действия. Можно считать последовательное действие операторов, определенных в одном и том же пространстве, их ***перемножением***. Тогда мы должны обратить внимание, что такое перемножение ***некоммутативно*** – при изменении порядка сомножителей результат изменяется! Для изучения «степени некоммутативности» часто определяют ***коммутатор*** двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$: это такой оператор $\hat{K} \equiv [\hat{A}, \hat{B}]$, результат действия которого на любой вектор из нашего пространства (или – что то же самое – на любую волновую функцию в выбранном представлении) совпадает с разностью результатов действия и в разном порядке: $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|\psi\rangle = \hat{K}|\psi\rangle$. Так как это равенство должно выполняться для любого , то его часто записывают непосредственно для операторов, то есть $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{K}$. Как видно, $(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})|\psi\rangle = i\hbar|\psi\rangle$,то есть коммутатор операторов координаты и проекции импульса есть оператор, кратный единичному (его действие сводится к умножению на число $i\hbar$): $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$. Важно заметить, что это равенство должно работать для любого вектора $|\psi\rangle$, и не должно зависеть от используемого представления.

Для каждой квантовой системы можно построить ее пространство состояний бесконечным количеством способов – точнее, мы можем использовать бесконечное количество ***представлений*** каждого такого пространства. Например, для пространства состояний одномерного движения точечной квантовой частицы мы можем использовать не только координатное, но и *импульсное представление*. Схема его построения точно такая же: если существует процедура измерения импульса p_x, то она должна выдавать конкретные значения p и при этом частица должна отправляться в состояние $|p\rangle$. Эти состояния должны образовывать базис в пространстве состояний, то есть любое состояние такой частицы может быть записано в виде $|\psi\rangle = \int\langle p|\psi\rangle|p\rangle dp$. При этом в пределе непрерывного спектра значений импульса условие ортонормированности базиса записывается через дельта-функцию: $\langle p|p'\rangle = \delta(p - p')$, а комплекснозначная функция $\tilde{\psi}(p) \equiv \langle p|\psi\rangle$ есть ***волновая функция состояния в импульсном представлении***. Для чистых состояний полная вероятность иметь какой-нибудь импульс равна 1, то есть $\int|\tilde{\psi}(p)|^2\, dp = 1$. Конечно же, в этом представлении оператор импульса действует на ВФ «своего» представления по простой формуле $\hat{p}_x\tilde{\psi}(p) = p\tilde{\psi}(p)$. Для построения оператора координаты можно использовать уже известное нам коммутационное соотношение $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$: ясно, что для его выполнения в импульсном представлении достаточно использовать $\hat{x}\tilde{\psi}(p) = i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial p}$, то есть оператор координаты в импульсном представлении $\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$.

Интересный вопрос: поскольку $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ и $\tilde{\psi}(p) \equiv \langle p|\psi\rangle$ – ВФ одного и того же состояния $|\psi\rangle$ в разных представлениях, то должны быть некие «формулы пересчета» их друг в друга. Как они выглядят? Этот вопрос «совсем нешкольный» (формулы интегральные), но ответ красив и очень важен для математики и физики.

А теперь постараемся выяснить связь между коммутатором операторов двух наблюдаемых $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ (в этом соотношении мы сразу ввели для коммутатора наблюдаемых, которым отвечают самосопряженные операторы, обозначение с коэффициентом i – полезно самостоятельно доказать, что тогда оператор $\hat{C}$ тоже гарантированно окажется самосопряженным) и свойствами соответствующих измерительных процедур. Вспомним, что для любого $|\psi\rangle$ средние значения этих наблюдаемых $\overline{A} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ и $\overline{B} = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$. В статистике для описания разброса значений величины относительно среднего используется ***дисперсия*** этой величины – по определению, это среднее значение квадрата отклонения от среднего. Нетрудно заметить, что дисперсия $DA = \langle\psi|(\hat{A} - \overline{A})^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^2$, и аналогично для $\hat{B}$. Ясно, что в состоянии, в котором величина имеет определенное значение, ее дисперсия равна нулю.

Введем теперь оператор $\hat{G}$, зависящий от вещественного параметра z: $\hat{G}(z) \equiv \hat{A} - \overline{A} + iz(\hat{B} - \overline{B})$. Этот оператор не является сопряженным: $\hat{G}^\dagger(z) \equiv \hat{A} - \overline{A} - iz(\hat{B} - \overline{B})$. Скалярный квадрат вектора $|\psi(z)\rangle \equiv \hat{G}(z)|\psi\rangle$ неотрицателен, и из очевидного требования $\langle\psi(z)|\psi(z)\rangle = \langle\psi|\hat{G}^\dagger(z)\hat{G}(z)|\psi\rangle \geq 0$ можно вывести очень интересное следствие. В самом деле:

$$\hat{G}^\dagger(z)\hat{G}(z) = (\hat{A} - \overline{A})^2 + z^2(\hat{B} - \overline{B})^2 + iz(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = (\hat{A} - \overline{A})^2 + z^2(\hat{B} - \overline{B})^2 - z\hat{C},$$

и $DB \cdot z^2 - \overline{C}z + DA \geq 0$. Это неравенство должно выполняться при любом z, (график этой функции z – парабола – не должен заходить ниже оси z), а для этого необходимо, чтобы $\overline{C}^2 - 4 \cdot DA \cdot DB \leq 0 \Rightarrow DA \cdot DB \geq \dfrac{\overline{C}^2}{4}$. Таким образом, если операторы двух наблюдаемых <u>не коммутируют</u>, то произведение их дисперсий <u>в любом состоянии</u> ограничено <u>снизу</u>: оно не может быть меньше величины $\overline{C}^2/4$, которая вычисляется через коммутатор. В частности, если $\overline{C} \neq 0$, то эти наблюдаемые одновременно не измеримы в состоянии $|\psi\rangle$ – они не могут одновременно иметь определенные значения (ведь в этом случае произведение дисперсий точно равнялось бы нулю). Для операторов координаты и импульса точечной частицы эта формула дает $Dx \cdot Dp_x \geq \dfrac{\hbar^2}{4}$ для любого состояния. Если ввести неопределенность наблюдаемой как корень квадратный из ее дисперсии, то $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$. Это соотношение называют ***соотношением неопределенностей Гайзенберга***. Как видно, координата и импульс точечной частицы оказываются практически не измеримыми в любом состоянии – если хотя бы одна из них имела бы определенное значение (и нулевую дисперсию), то дисперсия другой была бы бесконечна. Например, точечная частица с определенным импульсом была бы «размазана» по всей Вселенной, и вероятность ее взаимодействия с любым нашим прибором была бы порядка отношения объема прибора к объему всей Вселенной! Вряд ли при этом мы бы смогли собрать статистику результатов измерений за сколь-нибудь приемлемое время.

Приложение 2*: Многомерные задачи.

До сих пор мы рассматривали системы с одной степенью свободы: для фиксации состояния объекта нам было достаточно произвести одно измерение. Конечно, для реальных квантовых частиц ело обстоит сложнее – как правило, нам нужно произвести несколько измерений. Ведь даже если мы изучаем только состояния движения «точечной» частицы в реальном мире, мы должны учесть трехмерность пространства, так что тут число степеней свободы равно **трем**: например, мы можем измерить три координаты (x, y и z). Здесь обобщение конструкции пространства состояний и операторов наблюдаемых является чисто технической задачей. В самом деле, достаточно, например, рассмотреть базис из состояний $|\vec{r}\rangle$, где $\vec{r}=(x,y,z)$. Считая, что измерения разных координат у «точечной» частицы никак не влияют друг на друга, мы считаем их независимыми одновременно измеримыми наблюдаемыми, так что $|\vec{r}\rangle$ – это состояние, в которое наша частица попадает в результате измерений всех трех этих наблюдаемых. Тогда $|\psi\rangle=\int\langle\vec{r}|\psi\rangle|\vec{r}\rangle dx\,dy\,dz$, а условие ортонормированности $\langle\vec{r}|\vec{r}'\rangle=\delta(x-x')\cdot\delta(y-y')\cdot\delta(z-z')$. Теперь ВФ в координатном представлении – комплекснозначные функции трех вещественных переменных $\psi(x,y,z)\equiv\langle\vec{r}|\psi\rangle$, а операторы компонент импульса $\hat{p}_x=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y=-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$ и $\hat{p}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$. Векторная запись этой системы соотношений выглядит так: $\hat{\vec{p}}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}}$.

Но бывает и так, что частица имеет ***спин***, а также некоторые наблюдаемые (***заряды***), описывающие ее участие в разных взаимодействиях (например, ***электрический заряд*** описывает участие в электромагнитном взаимодействии, ***цветовой заряд*** – в сильном взаимодействии и так далее). Так что полное число степеней свободы квантовой частицы – это как раз и есть число независимых и при этом одновременно измеримых наблюдаемых. Но это число не совпадает с размерностью пространства состояний, которое нужно будет использовать для частиц определенного типа (например, для электрона). В физике микромира договорились считать, что ***инертная масса*** (для релятивистских частиц – ***масса покоя***), ***квадрат спина*** и ***заряды*** – наблюдаемые, измерения которых определяют **тип частицы**, а все остальные наблюдаемые определяют ее **состояние**. Поэтому размерность пространства состояний – это число «остальных» наблюдаемых (в число которых входит, например, проекция спина на како-либо «выделенное» направление). Например, любой ***фотон*** имеет нулевую массу покоя, спин 1 и нулевые электрический и цветовой заряды (иначе это не фотон). *Состояние фотона* определяется характеристиками его движения в трехмерном пространстве и значением спиральности. ВФ фотона может зависеть от спиральности λ и от его координат: $\psi=\psi(\lambda,x,y,z)$.

Приложение 3*: Эволюция состояний.

В полученной картине теперь не хватает только одного – она статична, ибо в ней нет *эволюции объектов* (изменения состояний объектов с течением времени). Хотя на самом деле в приложении к лекции 18D. Мы вводили уравнение для описания эволюции «волны вероятности»- *уравнение Шредингера*. Так что нам осталось просто обобщить его на описание эволюции состояния любого объекта в любом представлении. Для этого достаточно записать его в операторном виде. Как мы видели, монохроматические (с определенной частотой) волны вероятности отвечают состояниям с определенной энергией, то есть собственным векторам ***оператора энергии*** (в квантовой теории сложилась традиция обозначать оператор энергии буквой H и назвать «***гамильтонианом***» в честь выдающегося ирландского математика, астронома и физика-теоретика Уильяма Роуэна Гамильтона). Таким образом, такие состояния удовлетворяют уравнению

$i\hbar\dfrac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = E\cdot|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$. Остается «убрать» промежуточное равенство и считать, что эволюция состояний $|\psi(t)\rangle$ описывается уравнением Шредингера в общей форме

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle.$$

Конкретные уравнения для ВФ в любом из представлений выводятся из него математически. Уравнение, полученное в приложении к лекции 18D – просто уравнение для ВФ координатного представления.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Фотон находится в чистом состоянии $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}$. Найти среднее значение его спиральности.

2. Постойте матрицу оператора поляризации по оси x (наблюдаемой $\hat{\Pi}_x$) в базисе из состояний с определенной спиральностью.

3. В пучке фотонов, летящих вдоль оси z, все фотоны находятся в одинаковом чистом поляризационном состоянии. Среднее значение спиральности равно +0,75. При прохождении поляроида, ориентированного вдоль оси x, интенсивность пучка уменьшается в 4 раза. Найти среднее значение наблюдаемой $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ у фотонов пучка.

4. Рассмотрим <u>другой</u> пучок фотонов, летящих вдоль оси z, все фотоны которого находятся в одинаковом <u>смешанном</u> поляризационном состоянии. У нас есть три наблюдаемые, связанные с поляризацией. Первая наблюдаемая $\hat{F}$ имеет определенные значения 1 (в состоянии $|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) и 4 (в состоянии $|y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Вторая ($\hat{G}$) имеет определенные значения +1 (в состоянии $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$) и -1 (в состоянии $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$). Третья наблюдаемая – спиральность. Измерения показали, что для фотонов пучка среднее значение $\bar{F} = 3$, среднее значение $\bar{G} = +\frac{1}{4}$, а среднее значение спиральности $\bar{\Lambda} = -\frac{1}{4}$. Определите все элементы матрицы $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$ для этого состояния.

5. Точечная частица локализована на участке $x \in [0,L]$. Ее координатная волновая функция $\psi(x) = \sqrt{\dfrac{30}{7L^7}}\cdot x\cdot(2L^2 - Lx^2 - x^3)$. Найдите среднее значение координаты и импульса частицы в этом состоянии.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ