



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 2

КОБЕЛЬКОВ  
ГЕОРГИЙ МИХАЙЛОВИЧ

—  
МЕХМАТ МГУ

—  
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**КАРПАЧЕВА ДЕНИСА ОЛЕГОВИЧА**



## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СЕМИНАР 1. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ .....</b>	<b>4</b>
УРАВНЕНИЕ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ .....	4
ПРИМЕР .....	4
УРАВНЕНИЕ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА .....	5
ПРИМЕРЫ .....	7
<b>СЕМИНАР 2. МЕТОД ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ. 11</b>	
УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА .....	11
УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. ШАБЛОН 1 .....	12
УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. ШАБЛОН 2 .....	15
УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. ШАБЛОН 3 .....	16
УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. ШАБЛОН 4 .....	17
ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ. ЯВНАЯ СХЕМА .....	19
ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ .....	20
<b>СЕМИНАР 3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ</b>	
<b>.....</b>	<b>23</b>
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	23
АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ. ШАБЛОН 1 .....	24
ШАБЛОН 2. АППРОКСИМАЦИЯ РАЗНОСТЬ НАЗАД .....	25
ШАБЛОН 3. ВТОРОЙ ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ ПО КООРДИНАТЕ .....	27
ШАБЛОН 4. ВТОРОЙ ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ ПО ВРЕМЕНИ .....	28
ШАБЛОН 5. СХЕМА “КАБАРЭ” .....	29
ШАБЛОН 6. НЕЯВНАЯ СХЕМА .....	31
<b>СЕМИНАР 4. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ .....</b>	<b>33</b>
ШАБЛОН 1. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ .....	33
ШАБЛОН 2. НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА .....	34
ШАБЛОН 3. СХЕМА СО ВТОРЫМ ПОРЯДКОМ ТОЧНОСТИ .....	35



ШАБЛОН 4. МОДИФИКАЦИЯ СХЕМЫ.....	37
ШАБЛОН 5. УЧЁТ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ.....	38
ШАБЛОН 6. СХЕМА КРАНКА-НИКОЛСОНА .....	38
<b>СЕМИНАР 5. МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ .....</b>	<b>41</b>
ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ .....	41
ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ .....	42
НОВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ .....	43
АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ .....	44
ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ .....	46
<b>СЕМИНАР 6. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.....</b>	<b>49</b>
УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА .....	49
ПРИМЕРЫ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ.....	50
НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ.....	52
УРАВНЕНИЕ РАСПАДА-РАЗРЫВА.....	52
УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ.....	54
<b>СЕМИНАР 7. АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.....</b>	<b>57</b>
ПРИМЕР. ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ .....	57
ПРИМЕР. ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ .....	58
ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ .....	62
<b>СЕМИНАР 8. ПРИМЕР ДИСКРЕТИЗАЦИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....</b>	<b>66</b>
ПРИМЕР ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.....	66
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ .....	71

## СЕМИНАР 1. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

### УРАВНЕНИЕ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Определение. Уравнение в конечных разностях первого порядка – выражение вида:

$$a_n u_{n+1} + b_n u_n = f_n$$

Где  $u_n$  – численный аргумент,  $a_n$  и  $b_n$  – заданные коэффициенты,  $f_n$  – правая часть уравнения.

В курсе ограничимся рассмотрением уравнения с постоянными коэффициентами:

$$a u_{n+1} + b u_n = f_n \quad (1)$$

Попробуем выразить общую формулу для решения данного уравнения. Для начала, ограничимся рассмотрением однородного уравнения вида:

$$a u_{n+1}^0 + b u_n^0 = 0 \quad (2)$$

Решение данного уравнения выписывается в явном виде:

$$u_n^0 = c \left( -\frac{b}{a} \right)^n,$$
$$c = u_0^0$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$u_n = u_n^0 + v_n,$$

где  $v_n$  – частное решение

### ПРИМЕР

Рассмотрим задачу:

$$u_{n+1} - 2u_n = n$$

Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$u_{n+1}^0 - 2u_n^0 = 0$$



$$\Rightarrow u_n^0 = c * 2^n$$

Так как правая часть решения представляет собой многочлен первой степени, то будем искать решение в виде многочлена первой степени (если решение не имеет такой вид, то пытаемся повысить степень):

$$u_n = \alpha n + \beta$$

Подставляя данное выражение в однородное уравнение:

$$\alpha(n + 1) + \beta - 2(\alpha n + \beta) = n$$

Приведём подобные и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях  $n$ :

$$-\alpha n + \alpha - \beta = n$$

$$\Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1$$

Откуда получаем частное решение:

$$v_n = -n - 1$$

Общее решение выразим через сумму частного и однородного:

Ответ:  $u_n = c * 2^n - n - 1$

## УРАВНЕНИЕ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. Уравнение в конечных разностях второго порядка – выражение вида:

$$au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = f_n \quad (3)$$

Попробуем его решать также, как решали ранее уравнение первого порядка.

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$au_{n+1}^0 + bu_n^0 + cu_{n-1}^0 = 0 \quad (4)$$

Решение данной задачи, как и в случае решений однородного ОДУ 2-го порядка ищем в виде экспоненты с неизвестным основанием:

$$u_n^0 = \mu^n$$

Подставляем данное представление в (4), сокращая на  $\mu^{n-1}$ :

$$a\mu^2 + b\mu + c = 0$$

Получили квадратное уравнение, рассмотрим три возможных случая:

$$\mu_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.  $\mu_1 \neq \mu_2$  – действительные  $\Rightarrow$  по построению имеем решение:

$$u_n^0 = c_1 \mu_1^n + c_2 \mu_2^n$$

Заметим, что при задании каких-либо значений, например,  $u_0$  и  $u_1$ , остальные значения находятся однозначно из (3), так как имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными.

2.  $b^2 - 4ac = 0$  – кратный корень. В данном случае, как и в случае ОДУ, решение ищем в виде многочлена соответствующей кратности, умноженного на экспоненту:

$$u_n^0 = (c_1 n + c_2) \mu_1^n$$

Убедимся, что данный вид действительно является решением, для этого подставим его в (4), сокращая на  $\mu^{n-1}$ :

$$a(c_1(n+1) + c_2)\mu_1^2 + b(c_1 n + c_2)\mu_1 + c(c_1(n-1) + c_2) = 0$$

$$c_1[(an+a)\mu_1 + bn\mu_1 + cn - c] + c_2[a\mu_1^2 + b\mu_1 + c] = 0$$

Так как  $\mu_1$  – корень соответствующего квадратного уравнения, то множитель перед  $c_2$  равен нулю. Также выделим такое же выражение в множителе перед  $c_1$  и приравняем к нулю, получим:

$$a\mu_1^2 - c = 0$$

Данное выражение соответствует нашему предположению о кратности корня.

3.  $b^2 - 4ac < 0$ ,  $\mu_1 = \bar{\mu}_2$

Представим корни уравнения в тригонометрической форме:

$$\mu_{1,2} = r(\cos \phi \pm i \sin \phi)$$

Формально решение имеет вид:

$$\begin{aligned} u_n^0 &= c_1 \mu_1^n + c_2 \mu_2^n = c_1 r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) + c_2 r^n (\cos n\phi - i \sin n\phi) \\ &= (c_1 + c_2) r^n \cos n\phi + (c_1 - c_2) i r^n \sin n\phi \end{aligned}$$

И действительная и мнимая часть являются решением задачи, решение имеет вид:

$$u_n^0 = c_1 r^n \cos n\phi + c_2 r^n \sin n\phi$$

В выражении выше мы выполнили следующие обозначения:

$$c_1 + c_2 \rightarrow c_1,$$

$$c_1 - c_2 \rightarrow c_2$$

Найдём  $r$  и  $\phi$ :

$$\mu_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Выразим модуль комплексного число:

$$|\mu_1|^2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$-\frac{b}{2ar} = \cos \phi$$

## ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим задачу:

$$u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = 0$$

$$\mu^2 - 2\mu - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2} = 1 \pm 2$$

$$u_n = c_1 3^n + c_2 (-1)^n$$

2. Случай кратного корня:

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$$

$$\mu^2 - 2\mu + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2} = 1$$





$$u_n = c_1 n + c_2$$

3. Случай комплексных корней:

$$u_{n+1} - 2u_n + 5u_{n-1} = 0$$

$$\mu^2 - 2\mu + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2} = 1 \pm 2i$$

$$r = \sqrt{5},$$

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$u_n = c_1 r^n \cos n\phi + c_2 r^n \sin n\phi$$

4. Рассмотрим неоднородное уравнение:

$$u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = n$$

Частное решение данного уравнения ищем в виде многочлена первой степени:

$$v_n = \alpha n + \beta$$

Подставим его в уравнение и найдём коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha(n+1) + \beta - 2(\alpha n + \beta) - 3[\alpha(n-1) + \beta] = n$$

Приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях  $n$ :

$$\alpha + \beta - 2\beta + 3\alpha - 3\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\alpha - 2\alpha - 3\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4}$$

Получаем:

$$v_n = -\frac{n}{4} - \frac{1}{4}$$

5. Рассмотрим более сложный пример неоднородного уравнения:

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = n$$

$$u_n^0 = c_1 n + c_2$$

В данном случае, общее решение уже имеет вид многочлена первой степени и частное решение в таком виде искать нет смысла. Частное решение также не следует искать в виде многочлена второй степени:

$$v_n = \alpha n^2$$

Попробуем подставить в уравнение:

$$\alpha[(n+1)^2 - 2n^2 + (n-1)^2] = 2\alpha$$

$$2\alpha = n$$

Коэффициент  $\alpha$  в данном случае подобрать не выйдет.

Необходимо искать решение в виде многочлена третьей степени:

$$v_n = \alpha n^3$$

Подставим данный вид в уравнение:

$$\alpha[(n+1)^3 - 2n^3 + (n-1)^3] = 6n\alpha$$

$$6n\alpha = n$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{6}$$

Окончательно, получаем общее решение задачи:

$$u_n = c_1 n + c_2 + \frac{1}{6} n^3$$

6. Усложним задачу, когда в неоднородности не будет многочлена:

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \cos n$$

Так как синус и косинус выражаются через экспоненты с комплексным показателем, то и частное решение будем искать в виде линейной комбинации синусов и косинусов.

Попробуем искать частное решение в виде:

$$v_n = \alpha \cos n$$

Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned} \alpha[\cos(n+1) - 2\cos n + \cos(n-1)] &= \alpha[2\cos n \cos 1 - 2\cos n] = -4\alpha \sin^2 \frac{1}{2} \cos n \\ &= \cos n \end{aligned}$$

Откуда находим значение для коэффициента  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{-1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}}$$

Общее решение имеет вид:

$$u_n = c_1 n + c_2 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}} \cos n$$

## СЕМИНАР 2. МЕТОД ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

### УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Данный метод используется для оценки устойчивости разностных схем. Будем вести изложение на примере простейшей задачи (уравнение переноса):

$$u_t + u_x = 0, \quad u(x, 0) = \psi(x) \quad (1)$$

Решение данного уравнения выписывается в явном виде:

$$u(x, t) = \psi(x - t)$$

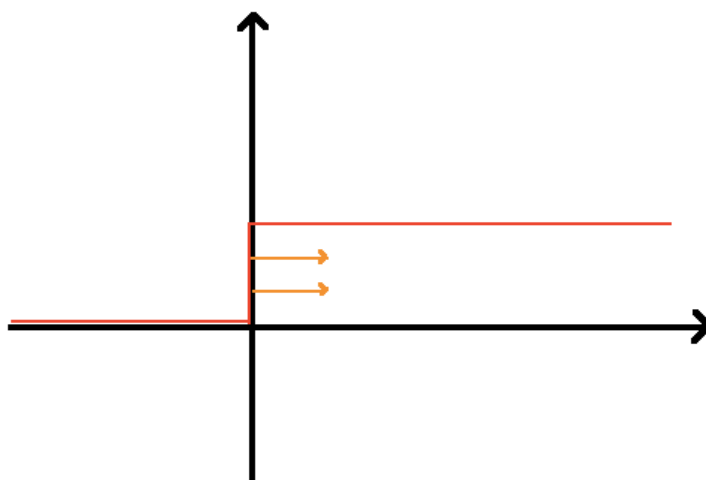


Рисунок 2.1

Рассмотрим данный процесс с физической точки зрения. В данном процессе график (Рисунок 2.1) функции  $\psi(x)$  параллельно переносится по  $OX$  с течением времени со скоростью  $-1$ .

На примере этой модельной задачи будем строить различные разностные схемы, а также исследовать их свойства.

Для начала введём сетку в плоскости  $OXT$  с шагом  $h$  по  $OX$  и с шагом  $\tau$  по  $OT$  (Рисунок 2.2):

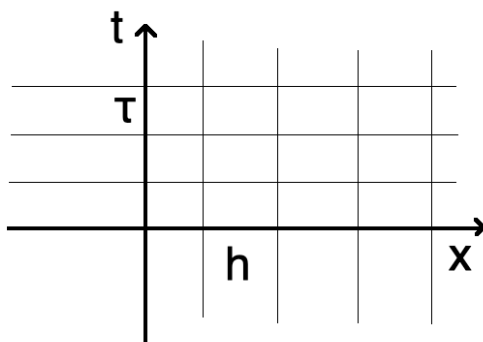


Рисунок 2.2

### УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. ШАБЛОН 1

Множество точек, которые будут входить в аппроксимацию задачи, будем называть шаблоном.

Рассмотрим следующий шаблон (Рисунок 2.3):

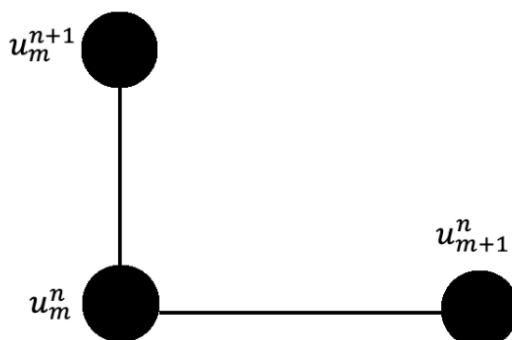


Рисунок 2.3

Данному шаблону соответствует следующая разностная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0 \quad (2)$$

Хотим исследовать решение данной разностной схемы и понять, как решение по этой схеме соответствует решению поставленной задачи. Заметим, прежде всего, что так как явное решение не возрастает, то и разностное решение возрастать не должно.

Будем искать решение с помощью метода разделения переменных:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\phi}$$

При  $n = 0$  начальное условие представляет собой гармонику. Будем исследовать решения, для которых начально значение представимо в виде тригонометрической функции.

Подставим вид данного решения в разностную схему, полагая, что  $\lambda \neq 0$ . После сокращения на  $\lambda^n e^{im\phi}$ , получим:

$$\lambda - 1 + \kappa(e^{i\phi} - 1) = 0$$

Где введено следующее обозначение:

$$\kappa = \frac{\tau}{h}$$

Из данного соотношения получим:

$$\lambda(\phi) = 1 - \kappa(e^{i\phi} - 1)$$

Если мы хотим для любого  $\phi$  получать ограниченное решение, необходимо, чтобы:

$$\max_{\phi} |\lambda(\phi)| \leq 1$$

Для решения данной задачи изобразим множество точек  $\lambda(\phi)$  (Рисунок 2.4):

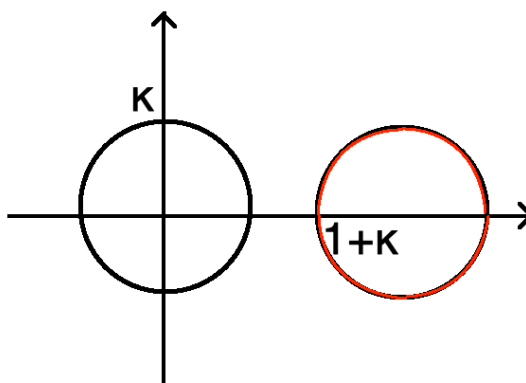


Рисунок 2.4

Из данного рисунка видно, что

$$\max_{\phi} |\lambda(\phi)| \geq 1$$

и решение будет неограниченным с течением времени. Постараемся сформулировать определение спектральной устойчивости:

Определение. Пусть имеется разностная эволюционная схема и мы ищем решение в виде:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\phi}$$

(Замечание: здесь и далее индекс  $n$  относится ко времени и ставится сверху, а  $m$  к координатам и ставится снизу)

Разностная схема называется спектрально устойчивой, если существует постоянная  $c$ , не зависящая от шагов сетки  $\tau, h$ , такая, что выполнено следующее неравенство:

$$\max_{\phi} |\lambda(\phi)| \leq 1 + c\tau \quad (3)$$

Построенная разностная схема (2) не является спектрально устойчивой. Действительно:

$$\begin{aligned} \phi &= \pi \\ \Rightarrow e^{i\pi} &= -1 \\ \Rightarrow \lambda(\pi) &= 1 + 2\frac{\tau}{h} \end{aligned}$$

Для устойчивости необходимо:

$$1 + 2\frac{\tau}{h} \leq 1 + c\tau$$

При  $h \rightarrow 0$  неравенство выше не выполняется, следовательно, разностная схема действительно не является устойчивой. Попробуем рассмотреть различные разностные схемы для этого уравнения и сделать соответствующие выводы.

## УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. ШАБЛОН 2

Рассмотрим следующую разностную схему (Рисунок 2.5):

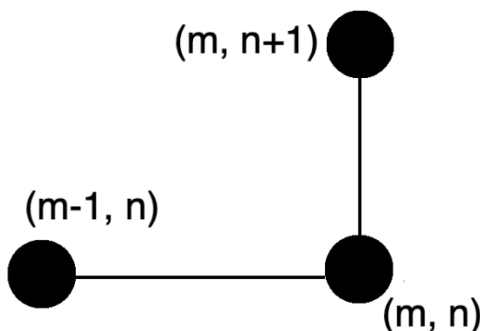


Рисунок 2.5

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (4)$$

Также подставим в (4) гармонику

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\phi},$$

сокращая на  $\lambda^n e^{im\phi}$ :

$$\lambda - 1 + \kappa(1 - e^{-i\phi}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\phi) = 1 - \kappa + \kappa e^{-i\phi}$$

Нарисуем геометрическое место точек, соответствующих уравнению на комплексной плоскости (Рисунок 2.6):



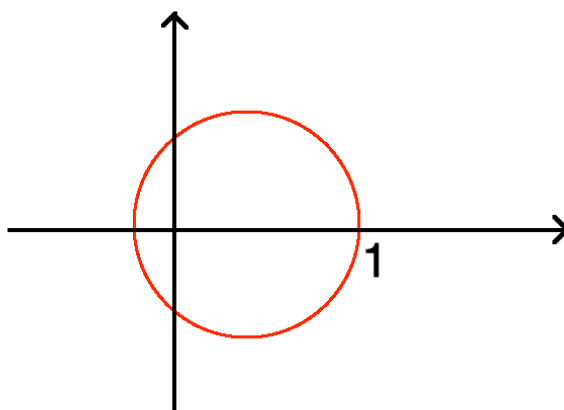


Рисунок 2.6

Заметим, что условие спектральной устойчивости выполнено. Помимо асимптотической устойчивости иногда необходимо учитывать закон, по которому  $\tau$  и  $h$  стремятся к нулю, как, например, здесь:

$$\frac{\tau}{h} = const \leq 1$$

### УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. ШАБЛОН 3

Порядок аппроксимации (2), (4):  $O(h + \tau)$ . Рассмотрим разностную схему со вторым порядком аппроксимации по координате, для этого используем формулу центральной разности. Соответствующая разностная схема имеет вид (Рисунок 2.7):

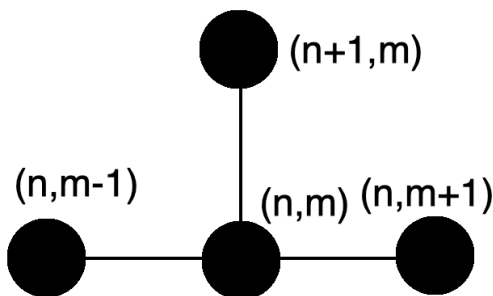


Рисунок 2.7

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (5)$$

Продолжаем аналогичные выкладки – подставляем гармонику в (5), а после сокращаем на неё, получим:

$$\lambda - 1 + \frac{\kappa}{2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = 0$$

Заметим, что

$$\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2} = i \sin \phi$$

откуда, получим:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1 - \kappa i \sin \phi \\ \Rightarrow |\lambda(\phi)| &= \sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2 \phi} \\ \max_{\phi} |\lambda(\phi)| &= \sqrt{1 + \kappa^2} \\ \sqrt{1 + \kappa^2} &\leq 1 + c\tau \\ 1 + \frac{\tau^2}{h^2} &\leq 1 + 2c\tau + c^2\tau^2\end{aligned}$$

Для выполнения неравенства необходимо, чтобы:

$$\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$$

При выполнении условия выше разностная схема – спектрально устойчива.

## УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. ШАБЛОН 4

Рассмотрим другую разностную схему, например, следующую (Рисунок 2.8):

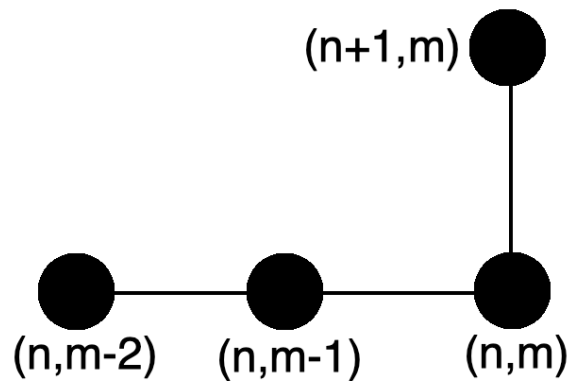


Рисунок 2.8

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{3u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n}{2h} = 0$$

Проверим, что данная аппроксимация имеет второй порядок по координате, подставим в выражение выше гладкую функцию и разложим в ряд Тейлора в точке  $x$ :

$$\frac{3u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{h} = u'(x) + O(h^2)$$

Продельвая аналогичные выкладки с разностной схемой, получим:

$$\lambda - 1 + \frac{3}{2}\kappa - 2\kappa e^{-i\phi} + \frac{\kappa}{2}e^{-2i\phi} = 0$$

$$\lambda(\phi) = 1 - \frac{3}{2}\kappa + 2\kappa e^{-i\phi} - \frac{\kappa}{2}e^{-2i\phi} =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\kappa + 2\kappa \cos \phi - \frac{\kappa}{2} \cos 2\phi - 2\kappa i \sin \phi + \frac{\kappa}{2} i \sin 2\phi$$

Пусть

$$\kappa = \frac{\tau}{h} = 1:$$

$$\lambda(\phi) = -\frac{1}{2} + 2 \cos \phi - \frac{1}{2} \cos 2\phi + i \left( \frac{1}{2} \sin 2\phi - 2 \sin \phi \right)$$

$$\lambda(\pi) = -3 > 1$$

Получаем, что при данном  $\kappa$  спектральное условие устойчивости не выполнено.

## ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ. ЯВНАЯ СХЕМА

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется параболическое уравнение:

$$u_t - u_{xx} = 0$$

Рассмотрим следующий шаблон (Рисунок 2.9):

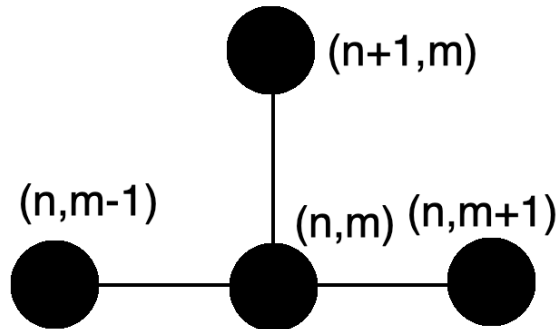


Рисунок 2.9

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0$$

Иследуем этот шаблон на спектральную устойчивость, подставив в него гармонику, как и ранее, а после разделив на неё ( $\kappa = \frac{\tau}{h^2}$ ):

$$\lambda - 1 - \kappa(e^{i\phi} - 2 + e^{-i\phi}) = 0$$

$$2 \cos \phi - 2 = -4 \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

$$\lambda(\phi) = 1 - 4\kappa \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

$$|\lambda_{max}| = |\lambda(\pi)|$$

$$|\lambda(\pi)| = |1 - 4\kappa|$$

$$|1 - 4\kappa| \leq 1 + c\tau$$

Решая неравенство и пренебрегая членом  $c\tau$  по сравнению с  $\kappa$ , получаем спектральное условие устойчивости для данной схемы:

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Использование других методов, таких как энергетический или принцип максимума, дадут аналогичный результат, однако, вычисления будут сложнее.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Рассмотрим неявную схему для того же уравнения теплопроводности:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

Подставляя представление в виде гармоники, как и ранее, получим:

$$\lambda - 1 + 4\kappa\lambda \sin^2 \frac{\phi}{2} = 0$$

$$\lambda(\phi) = \frac{1}{1 + 4\kappa \sin^2 \frac{\phi}{2}} \leq 1$$

Получаем, что данная неявная схема устойчива для любых  $\tau$  и  $h$ .

Поставим в дополнение к уравнению следующие краевые условия:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0 \\ u_0^n = u_M^n = 0 \end{cases}$$

При граничных условиях подходят не все гармоники, как ранее – они должны удовлетворять введённым условиям. Поэтому решение ищем в виде:

$$u_m^n = \lambda^n \sin \pi k \frac{m}{M}$$

Параметр для нашей гармоники теперь не  $\phi$ , а



$$k = \overline{1, M-1}$$

Подставляя эту гармонику, получим:

$$(\lambda(k) - 1) \sin\left(\pi k \frac{m}{M}\right) - \kappa \left( \sin\left(\pi k \frac{m+1}{M}\right) - 2 \sin\left(\pi k \frac{m}{M}\right) + \sin\left(\pi k \frac{m-1}{M}\right) \right) = 0$$

Используя формулу суммы синусов для первого и последнего слагаемых в скобках:

$$\sin\left(\pi k \frac{m+1}{M}\right) + \sin\left(\pi k \frac{m-1}{M}\right) = 2 \sin\left(\pi k \frac{m}{M}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{M}\right)$$

Сокращая на  $\sin\left(\pi k \frac{m}{M}\right)$ , получим:

$$\lambda(k) = 1 - 4\kappa \sin^2 \frac{\pi k}{2M} \leq 1$$

$$1 - 4\kappa \sin^2 \frac{\pi k}{2M} \geq 1$$

Из двух неравенств заключаем:

$$4\kappa \sin^2 \frac{\pi k}{2M} \leq 2 \quad \forall \kappa$$

$$\Rightarrow \kappa \leq \frac{1}{2}$$

Получаем тот же результат, что и ранее, несмотря на то, что краевые условия сужают класс множеств.



## СЕМИНАР 3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для начала рассмотрим простой пример. Соответствующее утверждение сформулируем позже. Пусть

$$u_x + u_t = 0,$$

$$u(x, 0) = \psi(x)$$

Решением данного уравнения будет уравнение бегущей волны:

$$u(x, t) = \psi(x - t)$$

Если  $\psi(x)$  – ограниченная функция, то и  $u(x, t)$  также является ограниченной. На этом модельном примере будем пытаться решать задачи такого вида.

Введём, как и ранее сетку в плоскости  $OXT$  с шагом  $h = \frac{1}{N}$  по  $OX$  и с шагом  $\tau = \frac{1}{M}$  по  $OT$  (Рисунок 3.1):

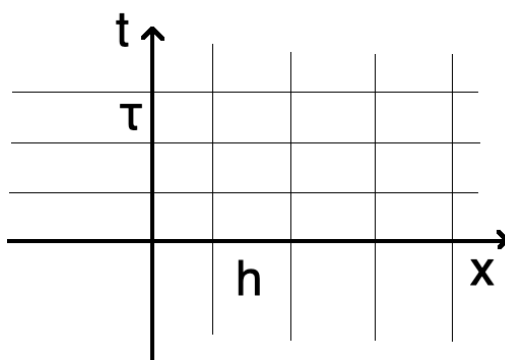


Рисунок 3.1

Точки пересечения будем называть узлами сетки и обозначать:

$$(m, n) \equiv (mh, n\tau)$$

Множество узлов сетки, по которым будем аппроксимировать решение – назовём шаблоном.



## АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ. ШАБЛОН 1

1. Рассмотрим в качестве примера следующий шаблон (Рисунок 3.2):

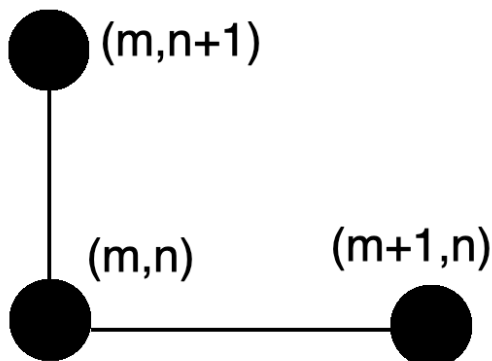


Рисунок 3.2

В виде формулы:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0 \quad (1)$$

Изучим свойства данной схемы. Прежде всего, изучим асимптотику при  $\tau, h \rightarrow 0$ . Хотим, чтобы решение не возрастало со временем. Сформулируем условие спектральное устойчивости, связанное с данным требованием.

Определение. Спектральная устойчивость. Решение ищется в виде гармоники:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\phi}$$

При подстановке данного выражения в разностную схему – получаем зависимость  $\lambda(\phi)$ . Разностная схема спектрально устойчива, если

$$\exists c \text{ (не зависящая от } h \text{ и } \tau)$$

$$\Rightarrow \max_{\phi} |\lambda(\phi)| \leq 1 + c\tau$$

Данное определение позволяет гарантировать ограниченность решения на конечном временном промежутке.

Подставляя в (1) гармонику, получим:

$$\lambda - 1 + \frac{\tau}{h}(e^{i\phi} - 1) = 0,$$

$$\kappa \equiv \frac{\tau}{h}$$

$$\lambda = 1 + \kappa(1 - e^{i\phi})$$

Учитывая, что на комплексной плоскости  $e^{i\phi}$  – единичная окружность, изобразим зависимость  $\lambda(\phi)$  (Рисунок 3.3):

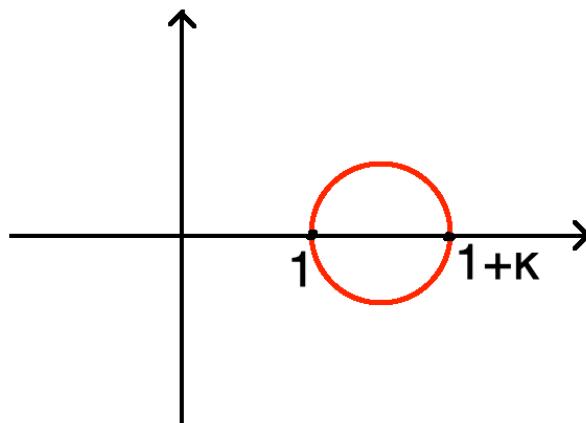


Рисунок 3.3

Максимум модуля, как видно из рисунка -  $1 + \kappa$  при  $\phi = \pi$ :

$$\max_{\phi} |\lambda(\phi)| = \lambda(\pi) = 1 + 2\kappa = 1 + \frac{2\tau}{h} \leq 1 + c\tau$$

Видим, что независимый от  $h$  константы  $c$ , чтобы выполнялось неравенство выше – не существует при любом законе  $\tau(h) \Rightarrow (1)$  – спектрально неустойчива.

## ШАБЛОН 2. АППРОКСИМАЦИЯ РАЗНОСТЬ НАЗАД

2. Рассмотрим шаблон с аппроксимацией разностью назад (Рисунок 3.4):

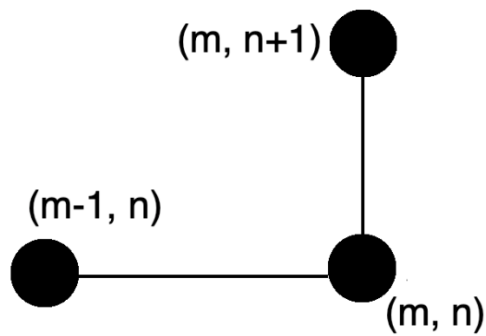


Рисунок 3.4

Соответствующая схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (2)$$

Продельвая полученный алгоритм, после подстановки гармоник в (2) получим:

$$\lambda - 1 + \kappa(1 - e^{-i\phi}) = 0$$

Графически  $\lambda(\phi)$  имеет следующий вид (Рисунок 3.5):

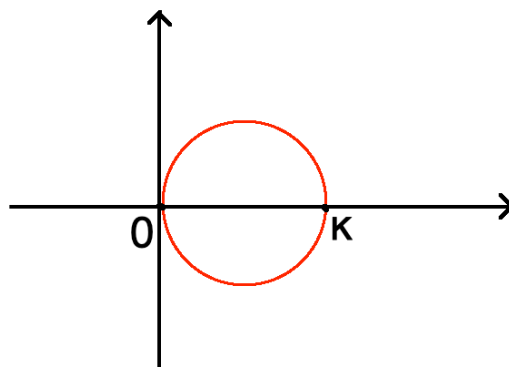


Рисунок 3.5

Из рисунка видно, что

$$\max_{\phi} |\lambda(\phi)| \leq 1,$$

$$\text{если } \frac{\tau}{h} = \text{const} \leq 1$$

При условии выше разностная схема (2) – условно спектрально устойчива.

### ШАБЛОН 3. ВТОРОЙ ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ ПО КООРДИНАТЕ

3. Рассмотрим разностную схему со вторым порядком аппроксимации (Рисунок 3.6):

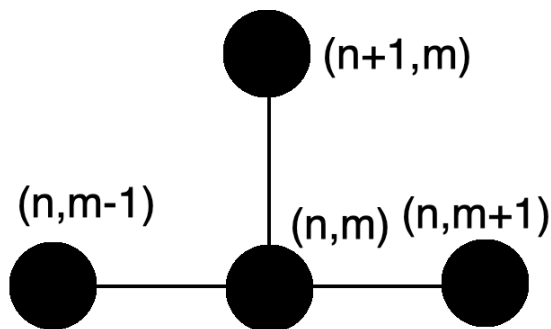


Рисунок 3.6

Разностная схема имеет вид:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (3)$$

Повторяя тот же алгоритм, после подстановки и сокращения получим:

$$\lambda - 1 + \frac{\kappa}{2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = 0$$

Вспомогая, что  $e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2i \sin \phi$ :

$$\lambda(\phi) = 1 + \kappa i \sin \phi$$

$$|\lambda|^2 = 1 + \kappa^2 \sin^2 \phi$$

$$\max_{\phi} |\lambda(\phi)| = \left| \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|$$

$$\left| \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{h^2}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{h^2}} \leq 1 + c\tau$$
$$1 + \frac{\tau}{h^2} \tau \leq 1 + 2c\tau + c^2\tau^2$$

Для выполнения неравенства необходимо, чтобы

$$\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$$

Схема (3) условно спектрально устойчива, однако ограничение на шаги сетки достаточно жёсткие.

Решение исходной модельной задачи представимо в виде бегущей волны по  $Ox$  с течением времени. При этом, отметим результат: аппроксимация “против потока” (2) – наиболее удачная из рассмотренных.

#### ШАБЛОН 4. ВТОРОЙ ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ ПО ВРЕМЕНИ

4. Рассмотрим аппроксимацию со вторым порядком по времени (центральная разность) и с первым по пространству (“против потока”) (Рисунок 3.7):

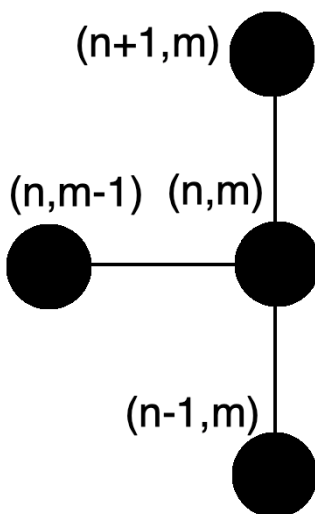


Рисунок 3.7

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (4)$$

Будем считать, что условие на первом шаге уже найдено, рассмотрим, что будет далее, используя алгоритм:

$$\lambda^2 - 1 + 2\kappa\lambda(1 - e^{-i\phi}) = 0$$

Положим  $\phi = \pi$ :

$$\lambda^2 + 4\lambda\kappa - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -2\kappa \pm \sqrt{4\kappa^2 + 1}$$

$$\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = |\lambda_2|$$

$$|\lambda_2| = 2\kappa + \sqrt{4\kappa^2 + 1}$$

$$2\kappa + \sqrt{4\kappa^2 + 1} \leq 1 + c\tau$$

После возведения в квадрат получим:

$$1 + 4\kappa^2 \leq (1 + c\tau - 2\kappa)^2$$

$$(1 + c\tau - 2\kappa)^2 = 1 + c^2\tau^2 + 2c\tau - 4\kappa^2 - 4(1 + c\tau)\kappa$$

При

$$\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$$

неравенство выше выполняется. Схема (4) условно спектрально устойчива.

## ШАБЛОН 5. СХЕМА “КАБАРЭ”

5. Построим схему устойчивую при  $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ , обладающую вторым порядком аппроксимации. Выпишем шаблон схемы “кабаре”:

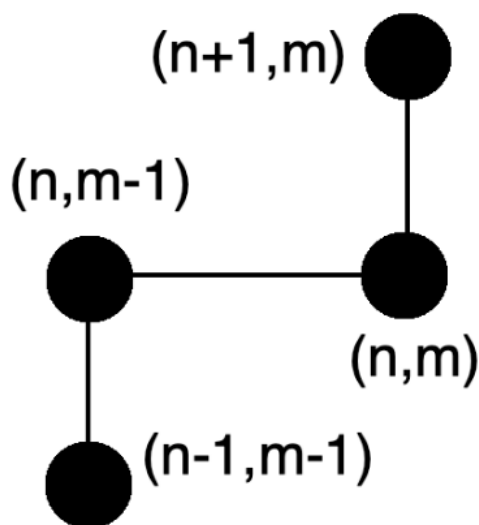


Рисунок 3.8

$$\frac{1}{2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{u_m^n - u_{m-1}^{n-1}}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (5)$$

Используем алгоритм, после подстановки гармоника и сокращения, получим:

$$(\lambda^2 - \lambda) + (\lambda - 1)e^{-i\phi} + 2\kappa\lambda(1 - e^{-i\phi}) = 0$$

Исследуем данное уравнение при конкретном  $\kappa$  для простоты выкладок:

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda e^{-i\phi} - e^{-i\phi} + 2\kappa\lambda - 2\kappa\lambda e^{-i\phi} = 0$$

При  $\kappa = \frac{\tau}{h} = \frac{1}{2}$ :

$$\lambda^2 - e^{-i\phi} = 0$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq 1 \quad \forall \phi$$

Получаем, что данная схема спектрально устойчива.

Рассмотрим аппроксимацию данной схемы. Подставим точное решение данной задачи и используем разложение в ряд относительно точки  $(n, m - \frac{1}{2}), x = mh$ :

$$\frac{1}{2} \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{u(x - h, t) - u(x - h, t - \tau)}{\tau} + \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} = 0$$

Последний член в выражении выше имеет аппроксимацию -  $O(h^2)$

Рассмотрим первый член выражения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_t(x, t) + \frac{\tau}{4} u_{tt}(x, t) + O(\tau^2) &= \frac{1}{2} u_t\left(x - \frac{h}{2}, t\right) + \frac{h}{4} u_{tx}\left(x - \frac{h}{2}, t\right) + O(h^2) + \\ &+ \frac{\tau}{4} u_{tt}\left(x - \frac{h}{2}, t\right) + \frac{\tau h}{8} u_{ttx}\left(x - \frac{h}{2}, t\right) + O(\tau h^2) \end{aligned}$$

Рассмотрим второй член выражения (аргументы опустим):

$$\frac{1}{2} u_t(x - h, t) - \frac{\tau}{4} u_{tt}(x - h, t) + O(\tau^2) = \frac{1}{2} u_t - \frac{h}{4} u_{tx} + O(h^2) - \frac{\tau}{4} u_{tt} + \frac{\tau h}{8} u_{ttx}$$

Складывая слагаемые, заключаем, что схема имеет порядок -  $O(h^2 + \tau^2)$ .

## ШАБЛОН 6. НЕЯВНАЯ СХЕМА

6. Рассмотрим неявную схему с аппроксимацией первого порядка:

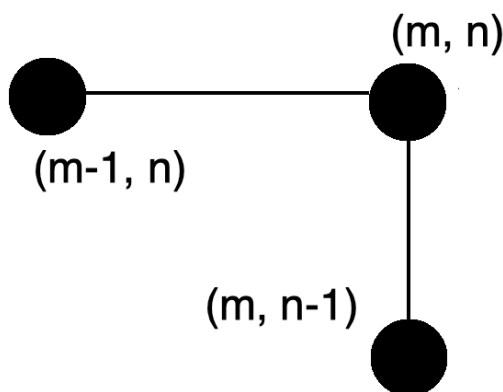


Рисунок 3.9

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (6)$$

Используя алгоритм, получим выражение:

$$\lambda - 1 + \kappa \lambda (1 - e^{-i\phi}) = 0$$



$$\lambda(\phi) = \frac{1}{1 + \kappa(1 - e^{-i\phi})},$$

$$|1 + \kappa(1 - e^{-i\phi})| \geq 1$$

$$\Rightarrow |\lambda(\phi)| \leq 1$$

Неявная схема является безусловно устойчивой.

## СЕМИНАР 4. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

### ШАБЛОН 1. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$u_t - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(x, 0) = u^0(x)$$

Введём следующую сетку в плоскости  $OXT$  с шагом  $h$  по  $OX$  и с шагом  $\tau$  по  $OT$  (Рисунок 4.1):

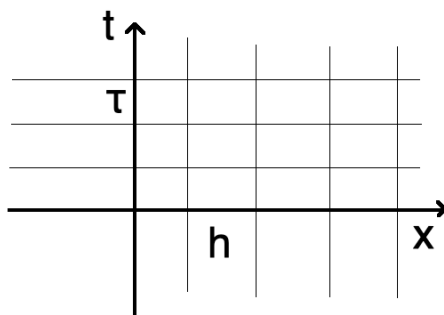


Рисунок 4.1

В соответствующих узлах сетки  $(m, n) \equiv (mh, n\tau)$  аппроксимация имеет вид (Рисунок 4.2):

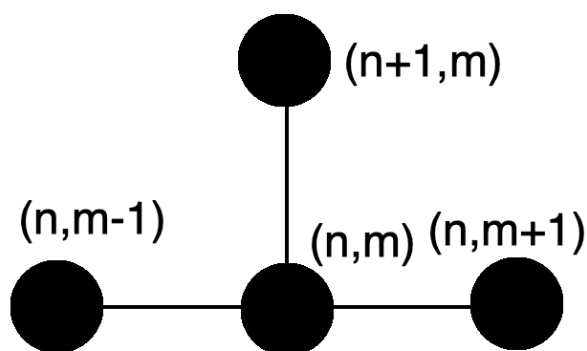


Рисунок 4.2

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0 \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что данная схема аппроксимирует задачу с порядком  $-O(h^2 + \tau)$

Напоминаем, что нижние индексы в выражении относятся к пространственной части, а верхние к временной.

Как и ранее, решение ищем в виде:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\phi} \quad (2)$$

Подставляя искомое решение (2) в схему (1), получим:

$$\lambda - 1 - \frac{\tau}{h^2} [e^{i\phi} + e^{-i\phi} - 2] = 0$$

Учитывая, что  $2 \cos \phi = e^{i\phi} + e^{-i\phi}$ , получим:

$$\lambda(\phi) = 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

Для спектральной устойчивости необходимо, чтобы:

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ \Rightarrow \frac{\tau}{h^2} &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Получили условие на устойчивость схемы.

## ШАБЛОН 2. НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Рассмотрим следующую схему, на этот раз – полностью неявную:

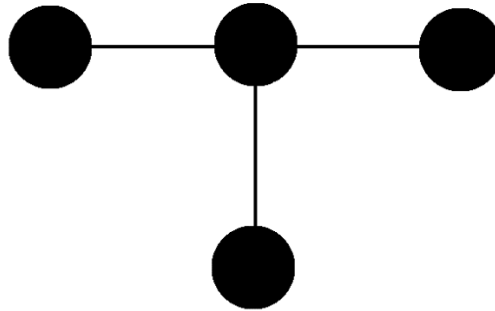


Рисунок 4.3

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \quad (3)$$

Подставляя гармонику (2) и сокращая на неё, получим уравнение:

$$\lambda - 1 - \frac{\tau\lambda}{h^2} [e^{i\phi} + e^{-i\phi} - 2] = 0$$

$$\lambda \left[ 1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\phi}{2} \right] = 1$$

$$\Rightarrow |\lambda(\phi)| \leq 1$$

Из данного соотношения следует, что схема (3) безусловно спектрально устойчива.

### ШАБЛОН 3. СХЕМА СО ВТОРЫМ ПОРЯДКОМ ТОЧНОСТИ

Рассмотрим схему со вторым порядком точности, как по координате, так и по времени:

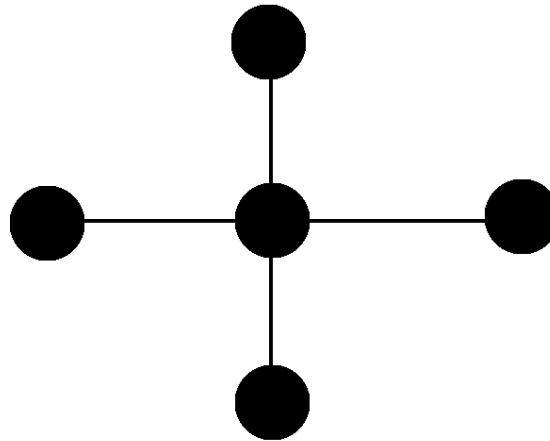


Рисунок 4.4

Схема имеет вид:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0 \quad (4)$$

Предположим, что значение на следующем слое уже найдено и схема может быть использована. Изучим её спектральные свойства. Подставим гармонику (2) в (4), сократив на неё же:

$$\lambda^2 - 1 - \frac{2\tau}{h^2} \lambda * 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = 0$$

Нам достаточно рассмотреть контрпример, поэтому положим  $\phi = \pi$ :

$$\lambda^2 - \frac{4\tau}{h^2} \lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2\kappa \pm \sqrt{4\kappa^2 + 1},$$

$$\kappa \equiv \frac{\tau}{h^2}$$

$$2\kappa + \sqrt{4\kappa^2 + 1} \leq 1 + c\tau$$

$$4\kappa^2 + 1 + 4\kappa^2 + 4\kappa\sqrt{1 + 4\kappa^2} \leq 1 + c\tau$$

Однако, даже  $\frac{4}{h^2} \leq c$  – не может быть выполнено, соотношение выше не выполнено и подавно. Подучаем, что рассмотренная схема (4) является абсолютно неустойчивой.

Вывод: производную по времени в уравнении теплопроводности нельзя аппроксимировать центральной разностью.

## ШАБЛОН 4. МОДИФИКАЦИЯ СХЕМЫ

Заменяем центральный узел в схеме (4) полусуммой верхнего и нижнего узлов, получим схему (Рисунок 4.5):

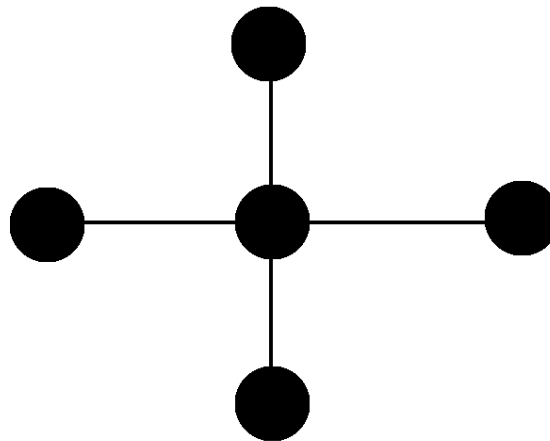


Рисунок 4.5

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^{n+1} - u_m^{n-1} + u_{m-1}^n}{h^2} = 0 \quad (5)$$

Подставляя (2) в (5) и сокращая на гармонику, получим:

$$\lambda^2 - 1 - 2\kappa[\lambda(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) - \lambda^2 - 1] = 0$$

$$(1 + \kappa)\lambda^2 - 4\kappa \cos \phi \lambda - 1 + 2\kappa = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\kappa \cos \phi \pm \sqrt{4\kappa^2 \cos^2 \phi + (1 + 2\kappa)(1 - 2\kappa)}}{1 + 2\kappa}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\kappa \cos \phi \pm \sqrt{1 - 4\kappa^2 + 4\kappa^2 \cos^2 \phi}}{1 + 2\kappa}$$

$$\left| \frac{2\kappa \cos \phi \pm \sqrt{1 - 4\kappa^2 \sin^2 \phi}}{1 + 2\kappa} \right| \leq 1$$

Действительно, возводя числитель выражения в квадрат:

$$4\kappa^2 \cos^2 \phi + 1 + 4\kappa^2 \sin^2 \phi \pm 4\kappa \cos \phi \sqrt{1 - 4\kappa^2 \sin^2 \phi} \leq 1 + 4\kappa^2 + 4\kappa$$

Получаем, что разностная схема (5) является безусловно устойчивой.

## ШАБЛОН 5. УЧЁТ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим следующую схему с двумя краевыми условиями:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0 \\ u_0^n = u_M^n = 0, \quad u_m^0 - \text{задано} = u^0(mh) \end{cases} \quad (6)$$

Необходимо брать не все гармоники, а лишь те, которые удовлетворяют граничным условиям:

$$u_m^n = \lambda^n \sin \pi k(mh) \quad (7)$$

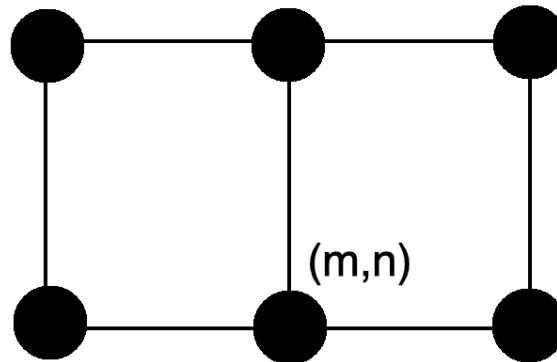
Подставляя (7) в (6) и проделывая аналогичные выкладки, получим условие устойчивости:

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Вывод: сужение, посредством введения граничных условий, не влияет на устойчивость.

## ШАБЛОН 6. СХЕМА КРАНКА-НИКОЛСОНА

Рассмотрим наиболее употребительную схему для решения прикладных задач.



$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \quad (8)$$

Данная схема имеет порядок точности  $-O(h^2 + \tau^2)$ . Подставим гармонику (2) в (8), получим:

$$\lambda - 1 + 2\kappa \sin^2 \frac{\phi}{2} + 2\kappa\lambda \sin^2 \frac{\phi}{2} = 0$$

$$\lambda(\phi) = \frac{1 - 2\kappa \sin^2 \frac{\phi}{2}}{1 + 2\kappa \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

$$\Rightarrow |\lambda(\phi)| \leq 1$$

Данная схема является безусловно спектрально устойчивой.

Данная схема обладает недостатком. Рассмотрим исходную задачу с граничным условием:

$$\begin{cases} u_t - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & u(x, 0) = \sin \pi k x \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

Решение ищется в явном виде (проверяется непосредственно постановкой):

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 k^2 t} \sin \pi k x$$

Заметим, что в каждой точке рассматриваемой области решение экспоненциально убывает. Проверим, передаёт ли наша схема эту особенность.



Решение ищем в виде:

$$u_m^n = \lambda^n \sin \pi k(mh)$$

Подставим его в разностную схему (8):

$$\lambda - 1 - \frac{\kappa}{2} 4 \sin^2 \frac{\pi kh}{2} + \frac{\kappa}{2} \lambda \sin^2 \frac{\pi kh}{2} = 0$$

$$\lambda(\phi) = \frac{1 - 2\kappa \sin^2 \frac{\pi kh}{2}}{1 + 2\kappa \sin^2 \frac{\pi kh}{2}}$$

Для того, чтобы в каждой точке решение экспоненциально убывало, необходимо:

$$1 - 2\kappa \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \geq 0$$

$$\kappa \leq \frac{1}{2}$$

**Вывод:** при правильном моделировании решения, условие, ограничивающее шаг сетки всё равно появится.

**Замечание:** высокие гармоники  $\sin^2 \frac{\pi kh}{2} \cong 1$ , при которых возникает данное ограничение, зачастую не рассматриваются в практических задачах. Получается, что в этом случае мы находимся в области аппроксимации, так как условие значительно ослабляется.

## СЕМИНАР 5. МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

### ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ

Теорема. Пусть имеется отрезок  $[0, 1]$  и функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируемая на нём, тогда имеет место неравенство:

$$\|f\|_{C[0,1]} \leq \|\tilde{f}'\|_{L_2} + \|f\|_{L_2}$$

Доказательство: Представим  $f(x)$  в виде:

$$f(x) = \tilde{f}(x) + a,$$

$$\int_0^1 \tilde{f}(x) dx = 0$$

Функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируемая на отрезке, значит существует хотя бы одна точка, где она обращается в ноль:

$$\exists x_1 \in [0, 1]: f(x_1) = 0$$

Тогда, справедливо равенство:

$$\tilde{f}(x) = \int_{x_1}^x \tilde{f}'(\xi) d\xi$$

$$|\tilde{f}(x)| = \left| \int_{x_1}^x \tilde{f}'(\xi) d\xi \right|$$

$$\left| \int_{x_1}^x \tilde{f}'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^1 |\tilde{f}'(\xi)| d\xi$$

$$\int_0^1 |\tilde{f}'(\xi)| d\xi \leq \|\tilde{f}'\|_{L_2}$$



$$|a| = \left| \int_0^1 f(x) dx \right|$$

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \|f\|_{L_2}$$

Имеем окончательную оценку:

$$\|f\|_{C[0,1]} \leq \|\tilde{f}\|_C + |a|$$

$$\|\tilde{f}\|_C + |a| \leq \|\tilde{f}'\|_{L_2} + \|f\|_{L_2}$$

### ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, & q = \text{const} > 0 \\ u'(0) = u'(1) + \lambda u(0) = 0 \end{cases}$$

Где  $\lambda$  – некий параметр задачи.

Прежде всего, рассмотрим существование решения поставленной задачи. Умножим скалярно уравнение в задаче на  $u$  и проинтегрируем по частям:

$$\|u'\|^2 + q\|u\|^2 - u'u|_0^1 = (f, u)$$

$$-u'u|_0^1 = -u'(1)u(1) + u'(0)u(0)$$

Из граничных условий

$$u'(0)u(0) = 0$$

$$u'(1) = -\lambda u(0)$$

следовательно:

$$u'u|_0^1 = \lambda u(0)u(1)$$

Подставляя данную оценку, получим:

$$\|u'\|^2 + q\|u\|^2 + \lambda u(0)u(1) = (f, u)$$

$$(f, u) \leq \|f\|^2 + \frac{1}{4}\|u\|^2$$



$$|\lambda u(0)u(1)| \leq |\lambda| \|u\|_C^2$$
$$|\lambda| \|u\|_C^2 \leq \frac{|\lambda|}{2} (\|u'\|^2 + \|u\|^2)$$

Таким образом, получено энергетическое неравенство:

$$\|u'\|^2 \left(1 - \frac{|\lambda|}{2}\right) + \|u\|^2 \left(q - \frac{|\lambda|}{2} - \frac{1}{4}\right) \leq \|f\|^2$$

Вывод: Пусть

$$q > 1$$

Тогда, если

$$|\lambda| \leq 1$$

то решение задачи существует и единственно.

## НОВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Поставим новую задачу на основе предыдущей: выяснить при каких  $\lambda$  решение не существует. Для решения новой задачи введём на отрезке  $[0,1]$  сетку с шагом  $h = 1/N$  (Рисунок 5.1):

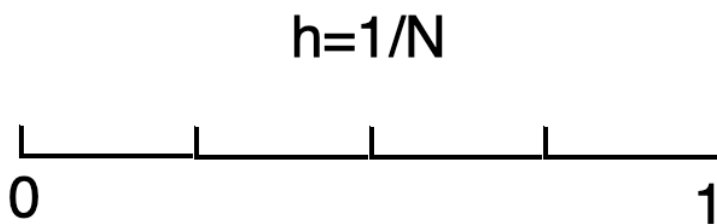


Рисунок 5.1

Для сеточных функций введём следующие нормы:

$$\|v\|^2 = \sum_{j=0}^N hv_j^2$$

$$\|v\|_1^2 = \sum_{j=1}^N hv_{\bar{x},j}^2$$

$$\sum_{j=1}^N hv_{\bar{x},j}^2 \equiv \sum_{j=1}^N h \left( \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right)^2$$

Введём суммирование:

$$(u, v) \equiv \sum_{i=1}^{N-1} hu_i v_i$$

Квадратная скобка означает включение соответствующего узла, например:

$$(u, v] \equiv \sum_{i=1}^N hu_i v_i$$

Аналогично разделённой разности назад -  $v_{\bar{x},j}$  вводится разделённая разность вперёд:

$$v_{x,j} = \frac{v_{j+1} - v_j}{h}$$

Введём также формулу суммирования по частям – аналог интегрирования по частям:

$$(u, v_x) = -(u_{\bar{x}}, v] + u_N v_N - u_0 v_1$$

## АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ

Выпишем аппроксимацию задачи, учитывая, что вторую производную можно аппроксимировать по трём точкам. Для внутренних точек задачи уравнение аппроксимируется следующим образом:

$$-u_{\bar{x}\bar{x}} + qu = f$$

Для краевых условий имеем следующую аппроксимацию:

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = 0$$

Хотим повысить порядок:

$$\frac{u(h) - u(0)}{h} = \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) = \frac{h}{2}[qu - f]_0$$

Окончательно имеем на левом конце аппроксимацию:

$$\frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}[q_0u_0 - f_0] = 0$$

На правом конце, аналогично, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{u(1) - u(1-h)}{h} &= u'(1) - \frac{h}{2}u''(1) + O(h^2) \\ u'(1) - \frac{h}{2}u''(1) + O(h^2) &= u'(1) + \frac{h}{2}[f - qu]_1 \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h} - \frac{h}{2}[f_N - qu_N] + \lambda u_0 &= 0 \end{aligned}$$

Полная постановка задачи, с учётом аппроксимации, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} -u_{\bar{x}\bar{x}} + qu = f \\ \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}[q_0u_0 - f_0] = 0 \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h} - \frac{h}{2}[f_N - qu_N] + \lambda u_0 = 0 \end{cases}$$

Данная задача является системой линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим матрицу этой системы. Пусть

$$\bar{u} = (u_0, \dots, u_n)^T$$

Ненулевые коэффициенты обозначим - \*:

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * \end{pmatrix} \bar{u} = \bar{\phi}$$

Матрица полученной системы является трёхдиагональной. Решение данной системы тривиально, при задании краевого условия на левом конце – можем вычислить все значения искомого вектора:

$$u_0^{(1)} \rightarrow \bar{u}^{(1)},$$

$$u_0^{(2)} \rightarrow \bar{u}^{(2)}$$

Решение ищем в виде:

$$\bar{u} = \alpha \bar{u}^{(1)} + (1 - \alpha) \bar{u}^{(2)}$$

При этом, все уравнения выполняются при любом  $\alpha$ , кроме последнего. Из последнего уравнения находим  $\alpha$ . При этом,  $\alpha$  должен быть отличен от нуля, иначе, при данном значении  $\lambda$  решение не существует.

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Теоретическое исследование данной задачи можно проделать также, как мы делали в случае дифференциальной задачи. Для начала, необходимо доказать сеточную оценку неравенства:

$$\|f\|_{C[0,1]} \leq \|\tilde{f}'\|_{L_2} + \|f\|_{L_2}$$

Доказательство дословно повторяет данное в начале, только вместо интеграла будет рассматриваться соответствующая сумма. Пусть узел сетки -  $x = ih$ , тогда:

$$u(x) = \tilde{u}(x) + a,$$

$$[\tilde{u}, 1] \equiv \sum_{j=0}^N h \tilde{u}_j = 0$$

Необходимо найти такую точку, в которой  $\tilde{u}_j$  обращается в ноль, но такой точки может не существовать! Потребуем, выполнение следующего условия

$$\tilde{u}(0) = 0$$

$$\Rightarrow a = u(0)$$

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n h \tilde{u}_{\bar{x},j}$$

Откуда получаем оценку:

$$\max_j |\tilde{u}_j| \leq \|\tilde{u}_{\bar{x}}\|$$

Где  $\|\tilde{u}_{\bar{x}}\|$  означает, что в норме также учитывался правый конец отрезка.

Необходимо также дать оценку для  $u(0)$ :

$$|u(0)| = |a|$$

$$|a| = |u(x) - \tilde{u}(x)|$$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{1}{2}|u(x)| + \frac{1}{2}|\tilde{u}(x)|$$

Просуммируем неравенство выше по всем узлам сетки, получим:

$$|a| \leq \frac{1}{2} \sum h (|u| + |\tilde{u}|)$$

$$\frac{1}{2} \sum h (|u| + |\tilde{u}|) \leq \frac{1}{2} (\|u\| + \|\tilde{u}\|)$$

$$\frac{1}{2} (\|u\| + \|\tilde{u}\|) \leq \frac{1}{2} (\|u\| + \|\tilde{u}_{\bar{x}}\|)$$

Окончательно имеем оценку:

$$\|u\|_{C_h} \leq \frac{3}{2} (\|u\|_{L_2, h} + \|\tilde{u}_{\bar{x}}\|)$$

Так как введено скалярное произведение, то исходное уравнение в задаче можем также умножить на  $u$ , как и в доказательстве ранее. В качестве окончательного результата имеем:

$\exists a > 0$ , если

$$|\lambda| < a$$

то решение поставленной задачи существует и единственно.

Для поиска “точки спектра” необходимо использовать условие ограниченности

$$|\lambda| < a$$

в качестве начального значения берём  $\lambda = 1$ , а далее последовательно увеличиваем до тех пор, пока решение сеточной задачи перестаёт существовать.



Замечание: хотя оператор поставленной задачи существует, принцип максимума для него не выполняется – необходимо использовать энергетический метод. Это связано с граничными условиями задачи.

## СЕМИНАР 6. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

### УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим, как и ранее, уравнение переноса:

$$u_t + au_x = 0, \quad u(x, 0) = \psi(x) \quad (1)$$

Решение имеет вид:

$$u(x, t) = \psi(x - at)$$

Как было отмечено ранее, аппроксимация в данной задаче должна производиться против потока для устойчивости. Однако, имеется дополнительное условие аппроксимации – требование монотонности. Сформулируем данное требование:

Предположим, что  $\psi(x)$  является монотонной – неубывающей, тогда решение в любой момент времени также должно быть неубывающим.

Потребуем, чтобы разностная схема удовлетворяла введённому условию. Для этого сформулируем теорему.

Пусть имеется сеточная функция на сетке с шагами  $h$  и  $\tau$  соответственно, пусть также имеются два слоя -  $n, n + 1$  сеточной функции. Введём следующие обозначения:  $u_i$  – значение функции  $u$  на  $n$ -ом слое по времени в точке  $i$ , а  $u^i$  – значение функции  $u$  на  $(n + 1)$ -ом слое по времени.

Теорема: Пусть имеется схема

$$u^i = \sum_k a_{i-k} u_k \quad (2)$$

(2) – монотонна, если  $a_j \geq 0$

Доказательство: Пусть  $u_{i+1} \geq u_i$ . Рассмотрим следующую разность:

$$u^{i+1} - u^i = \sum_k a_{i+1-k} u_k - \sum_k a_{i-k} u_k$$

Производим сдвиг индекса:

$$u^{i+1} - u^i = \sum_k a_{i-k} (u_k - u_{k-1})$$

Замечаем, что по условию

$$a_{i-k} \geq 0, u_k - u_{k-1} \geq 0$$

Следовательно, схема является неубывающей.

## ПРИМЕРЫ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Рассмотрим следующий пример:

$$a) \frac{u^{i+1} - u_i}{\tau} + a \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = 0,$$
$$a > 0$$

Приводя данную схему к виду (2), получим:

$$u^{i+1} = \left(1 + a \frac{\tau}{h}\right) u_i - \frac{a\tau}{h} u_{i+1}$$

Заметим, что

$$1 + a \frac{\tau}{h} > 0,$$
$$-\frac{a\tau}{h} < 0$$

Закключаем, что данная схема, помимо того, что является неустойчивой, является немонотонной.

Рассмотрим следующий пример:

$$b) \frac{u^{i+1} - u_i}{\tau} + a \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = 0,$$
$$a > 0$$

Также приводя к (2), получим:

$$u^{i+1} = \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) u_i + \frac{a\tau}{h} u_{i-1}$$



В данном случае условие монотонности будет аналогично условию устойчивости:

$$1 - \frac{a\tau}{h} \geq 0$$

Рассмотрим случай аппроксимации центральной разностью:

$$c) \frac{u^{i+1} - u_i}{\tau} + a \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0,$$

$$a > 0$$

Приводя к (2), получим:

$$u^{i+1} = u_i - \frac{a\tau}{2h} u_{i+1} + \frac{a\tau}{2h} u_{i-1}$$

Наличие отрицательного коэффициента показывает, что данная схема не является монотонной. При этом, если имеется разрыв у начального условия (обозначено чёрным на Рисунке 6.1), то расчёт по данной схеме приведёт к осцилляциям (схематично изображено красным):

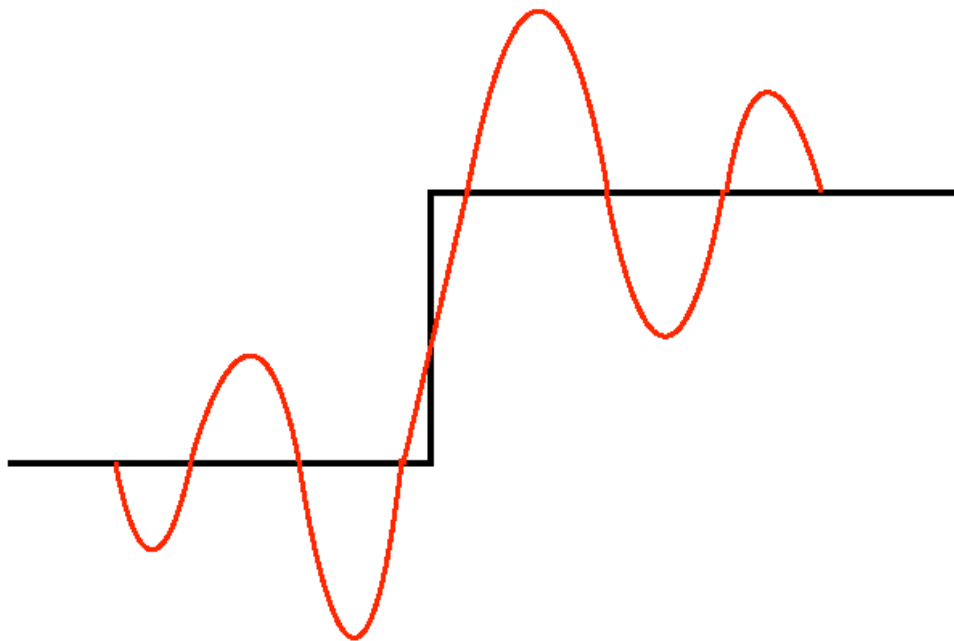


Рисунок 6.1

## НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим случай, когда  $a = a(x, t)$ . Для корректной аппроксимации необходимо выполнение условия Куранта, то есть величина  $\frac{a\tau}{h}$  (число Куранта) должна быть ограничена при использовании явной схемы первого порядка.

Если  $a(ih, n\tau) > 0$

$$\Rightarrow u_x \sim \frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

Иначе:

$$u_x \sim \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

**Вывод:** линейную задачу для выполнения условия монотонности необходимо аппроксимировать нелинейным образом.

## УРАВНЕНИЕ РАСПАДА-РАЗРЫВА

Рассмотрим более сложный пример:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, & u(x, 0) = \psi(x) \\ u(x, t) = \psi(x - at) \end{cases}$$

Попробуем аппроксимировать данную задачу также, как в примере а):

$$\frac{u^{i+1} - u_i}{\tau} + u_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = 0$$

И пусть в качестве начального условия выступает функция, представленная ниже (Рисунок 6.2):

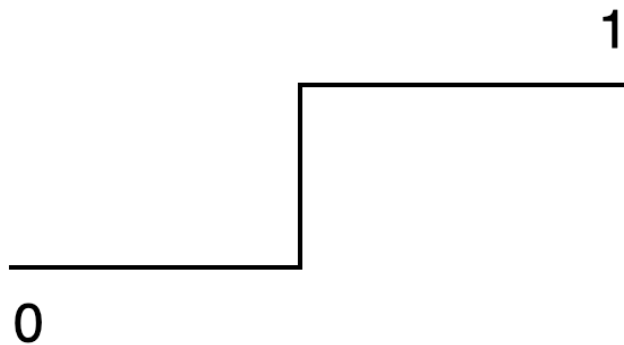


Рисунок 6.2

Заметим, что на каждой итерации по данной схеме мы будем получать

$$u^{i+1} = 0$$

то есть тривиальное решение на всех узлах сетки. Делаем вывод: данная схема неприменима к данной задаче, так как даёт заведомо неверный результат.

Зададимся вопросом: как правильно аппроксимировать поставленную задачу?

Рассмотрим следующий шаблон (Рисунок 6.3):

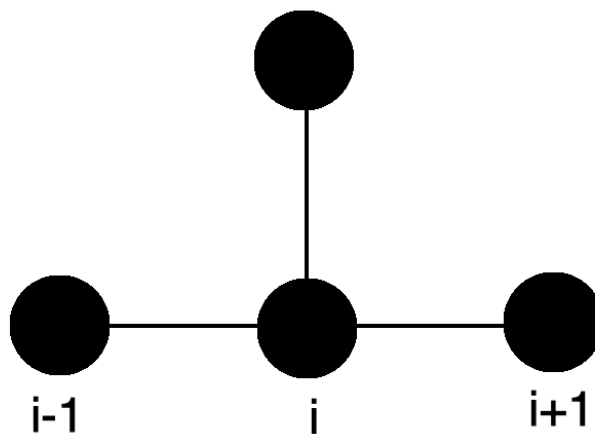


Рисунок 6.3

Воспользуемся полусуммой аппроксимаций центральных разностей в узлах  $i - \frac{1}{2}$  и  $i + \frac{1}{2}$ :

$$\frac{u^{i+1} - u_i}{\tau} + \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1} + u_i}{2} \frac{u_{i-1} - u_i}{h} + \frac{u_i + u_{i-1}}{2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] = 0$$

С точки зрения критериев, введённых ранее, данная схема идеально должна подходить для решения данной задачи. Однако, в данной схеме не выполняется условие монотонности.

## УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

В одномерной газовой динамике имеем уравнение, описывающее неразрывность среды:

$$\rho_t + (\rho x)_x = 0,$$

$$\rho > 0$$

$\rho, u$  – плотность и скорость среды соответственно.

Сформулируем вопрос: в начальный момент времени плотность среды – положительная функция, следует ли отсюда, что в последующие моменты времени она также положительна (решение данного уравнения) или же этот факт нужно постулировать отдельно от задачи? Данный вопрос является открытым по сей день.

В сеточном случае напишем аппроксимацию, обеспечивающую положительность плотности. Рассмотрим четыре случая, в зависимости от направления скорости:

$$1) u_i, u_{i+1} > 0$$

$$\Rightarrow (\rho u)_x \sim \frac{\rho_i u_{i+1} - \rho_{i-1} u_i}{h}$$

Заметим, что индексы в выражении сдвинуты, а скорости в  $i$  и  $i + 1$  узлах направлены вправо.

$$2) u_i, u_{i+1} < 0$$

$$\Rightarrow (\rho u)_x \sim \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_i u_i}{h}$$

Рассмотрим ещё два случая:

$$3) u_i > 0, u_{i+1} < 0$$

$$\Rightarrow (\rho u)_x \sim \frac{\rho_{i+1}u_{i+1} - \rho_i u_i}{h} + \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{h} u_i$$

Заметим, что помимо обычной аппроксимации, данная содержит нетривиальный член. Заметим, что если на концах отрезка, функция имеет разные знаки, то величина  $u_i$  является величиной порядка  $O(h)$ .

$$4) u_i < 0, u_{i+1} > 0$$

$$\Rightarrow (\rho u)_x \sim \rho_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

Данная аппроксимация возникает из рассмотрения аппроксимации, как в случае 1) с добавлением члена  $\rho_i u_i$ , тогда получим выражение вида:

$$(\rho u)_x \sim \rho_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + u_i \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{h}$$

Однако, учтём, что  $u_i$  по порядку величины есть  $O(h)$ , поэтому им, в данном случае, пренебрегаем.

После рассмотрения всех случаев мы можем записать аппроксимацию. Необходимо учесть избегание оператора перехода, так как при практической реализации, в ином случае, придётся обновлять все регистры, что является затратной операцией.

Проведём линеаризацию нелинейных членов:

$$\frac{\rho^i - \rho_i}{\tau} + \frac{[-\rho^{i+1}(|u_{i+1}| - u_{i+1}) + \rho^i(|u_{i+1}| + u_{i+1} + |u_i| - u_i) - \rho^{i-1}(|u_i| + u_i)]}{2h} = 0$$

Именно так выглядит правильная аппроксимация задачи. В данном выражении учтены все 4 случая.

Относительно  $\rho^i$  данная задача представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей. Для однозначного решения данной задачи необходимо задание краевых условий, однако, для  $\rho$  краевых условий нет. В этом случае полагают  $\rho \equiv 0$  вне рассматриваемого отрезка.



Замечание: Из того факта, что  $\rho > 0$  в случае решения сеточной задачи не следует, что это так в случае непрерывной задачи. Мы не можем устремить шаги сетки к нулю, так как задача носит нелинейный характер.

Итог: в конечномерном (сеточном) случае, существует схема, использующая нелинейную аппроксимацию), которая обеспечивает положительность плотности.

## СЕМИНАР 7. АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

### ПРИМЕР. ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ

На данном семинаре продолжим рассматривать дополнительные (помимо аппроксимации) требования, которые необходимо предъявлять к разностным схемам, в зависимости от рода задачи. В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} -u'' = 0, & x \in [0,1] \\ u(0) = \alpha_0, u(1) = \alpha_1 \end{cases}$$

Известно, что для этой задачи выполнен принцип максимума:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| = \max\{|\alpha_0|, |\alpha_1|\}$$

То есть, максимум решения может достигаться только на границе рассматриваемого отрезка. Необходимо к разностной схеме также предъявить данное требование. Для начала введём равномерную сетку на отрезке (Рисунок 7.1):

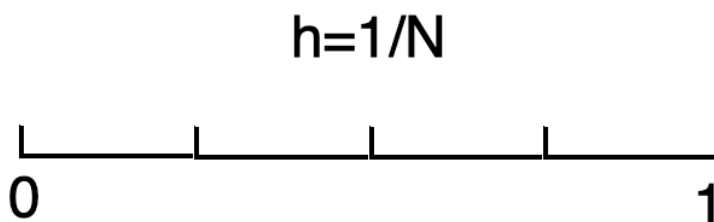


Рисунок 7.1

Сопоставим краевой задаче следующую разностную схему:

$$-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = 0,$$

$$u_0 = \alpha_0,$$

$$u_N = \alpha_1$$

Проверим, что данная схема удовлетворяет принципу максимума. Предположим противное: максимум решения достигается во внутреннем узле отрезка, если таких узлов несколько – берём самый левый из них. Запишем соответствующее уравнение в выбранной точке:

$$n: (u_n - u_{n-1}) + (u_n - u_{n+1}) = 0$$

Заметим, что

$$(u_n - u_{n-1}) > 0,$$

$$(u_n - u_{n+1}) \geq 0$$

Получаем, что для данной схемы справедлив принцип максимума.

Рассмотрим разностную схему высшего порядка аппроксимации:

$$nh = x: -\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = -u''(x) - \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4)$$

Для того, чтобы построить разностную схему высшего порядка, рассмотрим  $u^{(4)}$ , как  $(u''')''$  и добавим к исходной аппроксимации. Однако, если вспомнить, что по условию  $u'' = 0$ , то нетрудно заметить, что данное действие не изменит порядок точности разностной схемы. Проблема заключается в том, что мы рассматривали одномерный случай.

## ПРИМЕР. ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Построим конструктивный пример для двумерной задачи. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ u|_{\partial\Omega} = \alpha(x, y) \end{cases}$$

Аналогично случаю выше, введём сетку на квадрате (Рисунок 7.2):

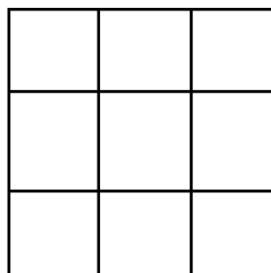


Рисунок 7.2

Для разностной схемы введём следующий шаблон (Рисунок 7.3):

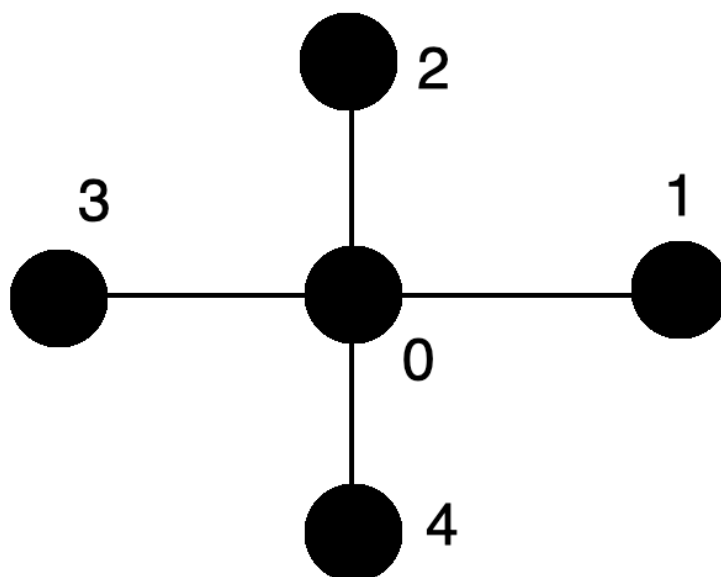


Рисунок 7.3

Разностная схема имеет следующий вид:

$$\frac{4u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4}{h^2} = 0$$

Порядок у данной схемы -  $O(h^2)$ . Докажем, что данная схема обладает принципом максимума. Предположим, что это не так и внутреннее значение достигается во внутренней точке, если таких точек несколько, то берём крайнюю левую точку. Выпишем уравнение в этой точке:

$$(u_0 - u_1) + (u_0 - u_2) + (u_0 - u_3) + (u_0 - u_4) = 0$$

Заметим, что при этом, что  $(u_0 - u_3) > 0$ , а остальные слагаемые – неотрицательные. Получено противоречие. Принцип максимума для схемы “крест” выполняется.

Рассмотрим разностную схему более высокого порядка. Рассмотрим точку:

$$(x, y) = (mh, nh)$$

$$(mh, nh) = (m, n)$$

Подставим точное решение в данной точке в разностную схему:

$$r = -\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + O(h^4)$$

Для повышения порядка точности, добавим эту величину в разностную схему. Проблема заключается в аппроксимировании 4 производной в приграничных узлах. Однако, из уравнения имеем:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Учитывая это, запишем погрешность аппроксимации, как:

$$r = \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^4)$$

Окончательно в точке  $(m, n)$  схема имеет следующий вид, коэффициенты в схеме представлены на Рисунке 7.4:

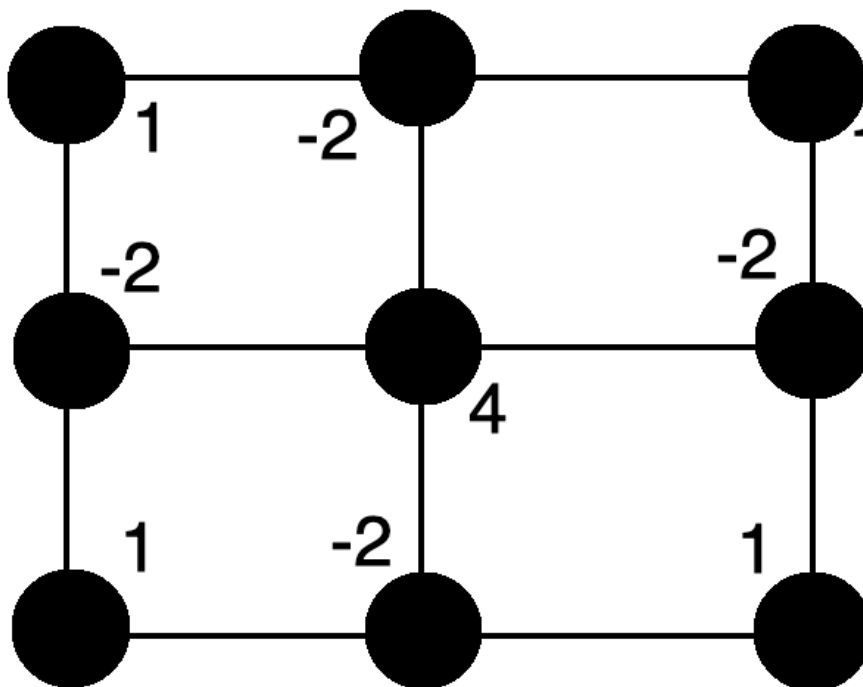


Рисунок 7.4

$$\frac{4u_{m,n} - u_{m+1,n} - u_{m-1,n} - u_{m,n+1} - u_{m,n-1}}{h^2} - \frac{1}{6h^2} [4u_{m,n} - 2u_{m+1,n} - 2u_{m,n+1} - 2u_{m-1,n} - 2u_{m,n-1} + u_{m+1,n+1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n-1}] = 0$$

Данная схема имеет четвёртый порядок аппроксимации по построению, рассмотрим удовлетворяет ли решение, полученное по ней, принципу максимума:

Решение по разностной схеме сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Принцип максимума означает, что схема имеет диагональное преобладание, то есть если мы упорядочим неизвестные в разностной схеме мы получим некий вектор неизвестных:

$$\sum_{(i_1, j_1) \in \Pi} a_{i_1, j_1} u_{i_1, j_1} = 0$$

Диагональное преобладание, в этом случае, выполняется, при:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

В нашем случае имеем матричное уравнение:

$$A\vec{v} = 0$$

При этом, структура матрицы  $A$  такова, что строка представляет собой:

$$-\frac{1}{6}, \dots, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, 0, \dots, 0, -\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \dots, 0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}$$

Элемент  $\frac{10}{3}$  находится на главной диагонали.

Заметим, что в этом случае диагональное преобладание выполнено, следовательно, схема с повышенным порядком точности удовлетворяет принципу максимума.

## ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Будем решать ту же задачу, однако рассматриваемую область разобьём на треугольники следующим образом (Рисунок 7.5):

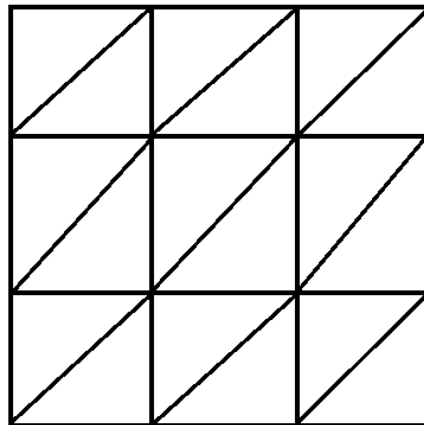


Рисунок 7.5

Каждый элемент разбиения на Рисунке 7.5 будем называть элементарным треугольником.

Решение задачи будем искать в пространстве:

$$V_h = \{v(x, y) - \text{линейна на } \forall \text{ элементарном треугольнике}\}$$

Добавим к уравнению неоднородность:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ u|_{\partial\Omega} = \alpha(x, y) \end{cases}$$

Введём следующую билинейную формулу в данном пространстве:

$$a(u^h, v) = \int_{\Omega} \nabla u^h \nabla v \, dx dy = (f, v) \quad \forall v \in V_h$$

Естественный базис в данном пространстве – функции, значение которых равно 1 в одной из вершин треугольника и 0 в остальных.

Носителем является функция -  $v_{mn}(x, y)$  (Рисунок 7.6):

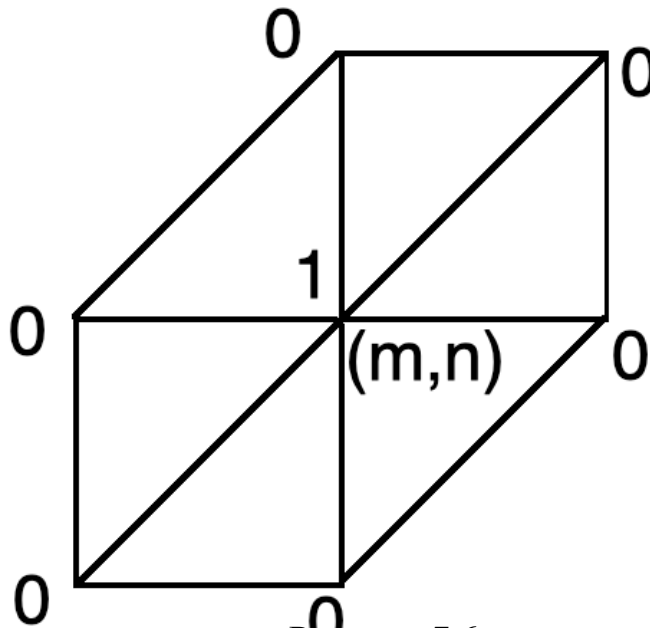


Рисунок 7.6



Распишем данную функцию:

$$u^h(x, y) = \sum_{m,n} u_{m,n} v_{m,n}(x, y)$$

Если мы аккуратно посчитаем все интегралы, то получим ту же схему крест. Классическая проекционная схема не даст ничего нового – принцип максимума для неё выполняется.

Предположим, что сетка устроена иным образом (Рисунок 7.7):

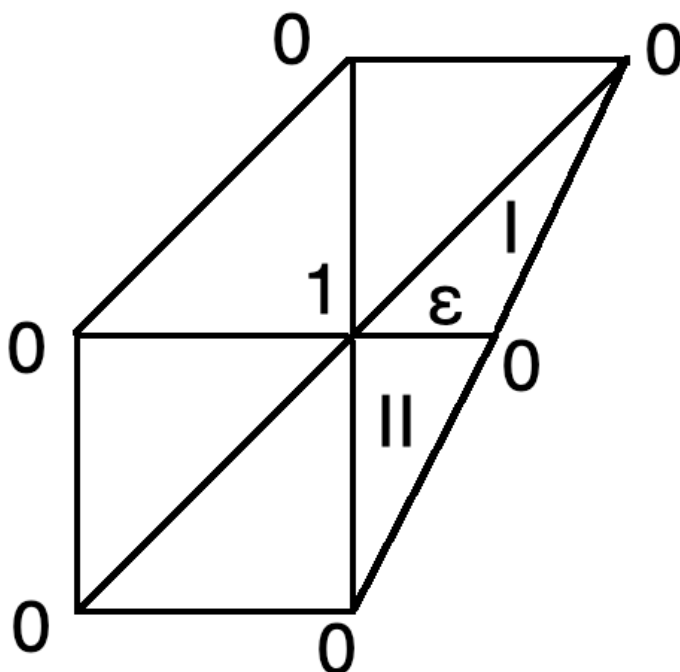


Рисунок 7.7

В данном случае будут появляться тупоугольные прямоугольники и принцип максимума выполняться не будет. Действительно, рассмотрим вклад треугольников I и II. Для определённости, будем считать, что начало координат находится в узле, где функция равна единице. В итоге, получим следующую функцию:

$$u^h(x, y) = \frac{u_0(\varepsilon - x)}{\varepsilon} + \frac{u_\varepsilon x}{\varepsilon}$$

Именно такой вид имеет функция при  $y = 0$ .

## СЕМИНАР 8. ПРИМЕР ДИСКРЕТИЗАЦИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### ПРИМЕР ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим в качестве примера дискретизации простейшее уравнение в частных производных для двух переменных:

$$-\Delta u = f,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \alpha$$

В дифференциальном случае для данной задачи справедлив принцип максимума. В сеточном случае, построенном неудачно, данный принцип может не наблюдаться. Напоминаем, что принцип максимума в дискретном случае заключается в диагональном преобладании матрицы системы уравнений.

Рассмотрим следующий пример, где приближенное решение задачи ищется в подпространстве функций, непрерывных и линейных в каждом элементарном треугольнике. Соответствующий носитель имеет вид (Рисунок 8.1):

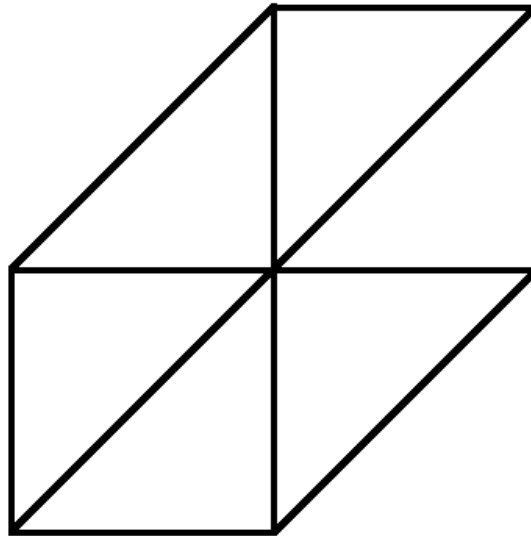


Рисунок 8.1

Таким образом функция представима в виде:

$$u^h(x, y) = \sum u_{ij} v_{ij}(x, y)$$

Где  $v_{ij}(x, y) = 1$  в центре шаблона и нулю в остальных его узлах.

Использование равномерной сетки и проекционного метода (метода Галёркина) даёт нам стандартную схему крест – 5-точечный шаблон (Рисунок 8.2):

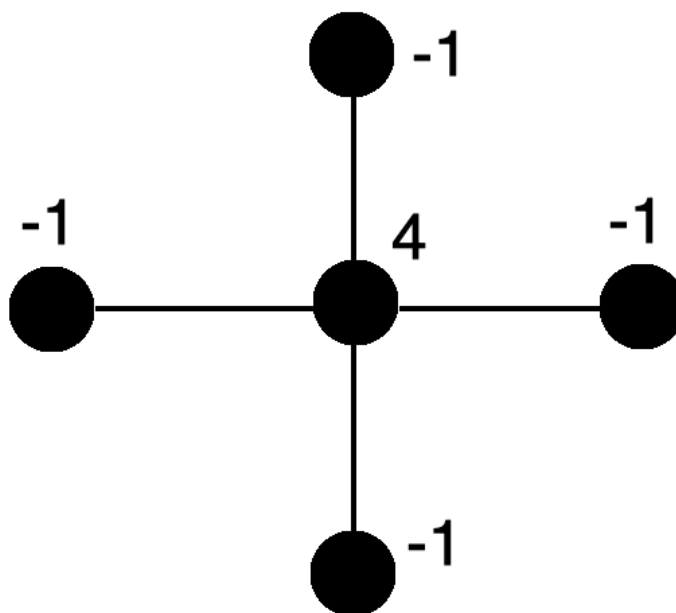


Рисунок 8.2

Рассмотрим иной носитель (Рисунок 8.3). Введём следующие обозначения:

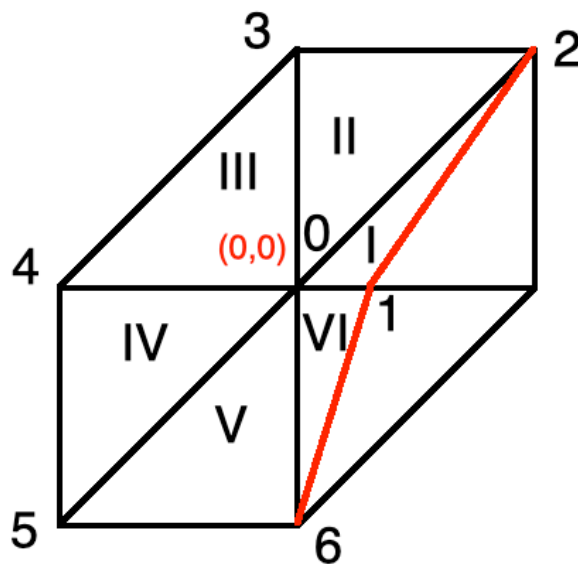


Рисунок 8.3

В центральном узле введём систему координат, все узлы пронумеруем. Первый узел сдвинем от своего исходного положения, образовавшиеся элементарные треугольники занумеруем в соответствии с рисунком. Заметим, что в подинтегральное выражение все треугольники, кроме  $I$  и  $VI$  дают тот же вклад, что и ранее.

Построим линейную функцию, которая будет линейна во всех элементарных треугольниках, а её значения в узлах - 0, 1, 2 и 6 соответственно равны значениям функции в этих узлах.

Имеем представление функции  $u$  в треугольнике  $I$ :

$$u^h(x, y) = \frac{u_0(\varepsilon - x)}{\varepsilon} + \frac{u_\varepsilon x}{\varepsilon} + \left[ u_2 - \frac{u_0(\varepsilon - h)}{\varepsilon} - \frac{u_\varepsilon h}{\varepsilon} \right] \frac{y}{h}$$

Аналогично, для  $VI$  треугольника имеем:

$$u^h(x, y) = \frac{u_0(\varepsilon - x)}{\varepsilon} + \frac{u_\varepsilon x}{\varepsilon} + \frac{u_0 - u_6}{h} y$$

Для базисного элемента имеем:

$$v_0(x, y) = \begin{cases} \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon - h}{\varepsilon} y, & I \text{ треугольник} \\ \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon} + \frac{y}{h}, & VI \text{ треугольник} \end{cases}$$

Вместо этого также можно было выписать соответствующие элементы матрицы жёсткости. Вычислим интеграл по первому треугольнику:

$$\int_I \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u^h}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) dx dy = \left( -\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon^2} + \left[ u_2 - \frac{u_0(\varepsilon - h)}{\varepsilon} - \frac{u_\varepsilon h}{\varepsilon} \right] \frac{1}{h} \frac{h - \varepsilon}{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon h}{2}$$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon^2} + \left[ u_2 - \frac{u_0(\varepsilon - h)}{\varepsilon} - \frac{u_\varepsilon h}{\varepsilon} \right] \frac{1}{h} \frac{h - \varepsilon}{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon h}{2} \\ &= u_0 \left( \frac{h}{2\varepsilon} + \frac{(h - \varepsilon)^2}{\varepsilon} \right) + u_2 \frac{h - \varepsilon}{2} + u_\varepsilon \left( -\frac{h}{2\varepsilon} - \frac{h(h - \varepsilon)}{2\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Аналогично, вычисляя интеграл по шестому треугольнику, получим:

$$\int_{VI} \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u^h}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) dx dy = \left( -\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon^2} + \frac{u_0 - u_6}{h^2} \right) \frac{\varepsilon h}{2}$$

$$\left( -\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon^2} + \frac{u_0 - u_6}{h^2} \right) \frac{\varepsilon h}{2} = u_0 \left( \frac{h}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2h} \right) + u_\varepsilon \left( -\frac{h}{2\varepsilon} \right) - u_6 \frac{\varepsilon}{2h}$$

Выпишем ненулевые строки соответствующей матрицы:

$$\left[ \frac{h}{2\varepsilon} + \frac{(h-\varepsilon)^2}{\varepsilon} + \frac{h}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2h} \right] u_0 + u_\varepsilon \left( -\frac{h}{\varepsilon} - \frac{h(h-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{h}{2\varepsilon} \right) + u_2 \frac{h-\varepsilon}{2} - u_6 \frac{\varepsilon}{2h}$$

Заметим, что первый коэффициент строго положительный. Рассмотрим асимптотику  $\varepsilon \rightarrow 0$ , главный член разложения диагонального элемента имеет вид:

$$\frac{h}{\varepsilon} + \frac{h^2}{\varepsilon}$$

Множитель при втором члене имеет главную асимптотику:

$$\frac{3h}{2\varepsilon} + \frac{h^2}{2\varepsilon}$$

Множитель при третьем слагаемом имеет вид:

$$\frac{h}{2}$$

Последним слагаемым пренебрегаем вовсе.

Получаем, что недиагональный элемент, который больше по модулю, чем диагональный.

**Вывод:** если в сетке имеются тупоугольные треугольники, с тупым углом выше некоторого значения, то принцип максимума для такой сетки выполняться не будет.

Поэтому в практических целях во всех генераторах сеток стараются делать так, чтобы соответствующие треугольники были остроугольными. При небольшом количестве тупоугольных треугольников задача всё равно решается, однако если их количество превышает порядка десяти процентов, то на такой сетке считать нельзя.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ

В уравнениях механики сплошных сред имеется гипотеза о неразрывности, которое имеет вид в одномерном случае:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

Данное уравнение указывает на то, что в рассматриваемой среде отсутствует разрыв. В данном уравнении  $\rho$  – плотность среды,  $u$  – скорость среды. Из физических соображений  $\rho > 0$  на всей рассматриваемой области.

В многомерном случае, данный вывод не следует непосредственно из уравнения. Действительно, встаёт вопрос: если в начальный момент времени имели  $\rho(x, 0) > 0$  будет ли плотность положительна в последующие моменты времени?

Выписывая аппроксимацию данного уравнения в сеточном виде, мы можем выполнить условие не отрицательности плотности. Однако, задача нелинейная и данный результат нельзя распространить на непрерывный случай с дискретного.

Используем явную разностную схему с аппроксимацией против потока, в этом случае необходимо, чтобы:

$$\rho_i^{n+1} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{H}} a_{ij} \rho_j^n,$$

$$a_{ij} > 0$$

Таким образом, имеем два условия на разностную схему: условие аппроксимации и не отрицательность коэффициентов в выражении выше.

В случае неявной схемы на равномерной сетке имеем, учитывая сдвиг индексов, а также то, что в каждом случае необходимо аппроксимировать против потока:

$$(\rho u)_{x,i} = \begin{cases} \frac{\rho_i u_{i+1} - \rho_{i-1} u_i}{h}, & u_i, u_{i+1} > 0 \\ \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_i u_i}{h}, & u_i, u_{i+1} < 0 \\ \frac{\rho_i (u_{i+1} - u_i)}{h}, & u_i < 0, u_{i+1} > 0 \\ \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_i u_i + (\rho_i - \rho_{i-1}) u_i}{h}, & u_i > 0, u_{i+1} < 0 \end{cases}$$



Рассмотрим аппроксимацию  $\rho_i$  относительно верхнего слоя, тогда получим некоторую матрицу системы –  $A$  –  $M$ -матрица.  $M$ -матрица – матрица с диагональным преобладанием, на главной диагонали которой стоят элементы больше нуля, а вне неё элементы меньше нуля.

Из данного утверждения следует, что обратная матрица к  $A$  содержит все положительные элементы, данный факт непосредственно обеспечивает положительность плотности.

Вывод: при практическом решении реальных задач зачастую одного требования аппроксимации недостаточно. Могут возникать, например, требования монотонности, откуда появляется ограничение на разностную схему, положительность решения или шаг сетки.



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ