



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЧАСТЬ 2

КОБЕЛЬКОВ  
ГЕОРГИЙ МИХАЙЛОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**ПОДКЛЕТНОВУ АННУ АЛЕКСАНДРОВНУ**



## Содержание

Лекция 1 .....	6
Метод сопряжённых градиентов (CGM) .....	6
Подпространство Крылова. Решение задачи для невязки .....	6
Модификации метода сопряжённых градиентов .....	10
Лекция 2 .....	11
Решение плохо обусловленных задач .....	11
Метод регуляризации Тихонова .....	12
Метод простой итерации .....	13
Метод Ньютона .....	14
Лекция 3 .....	18
Пример использования метода Ньютона .....	18
Численное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений .....	19
Методы Рунге-Кутты .....	21
Лекция 4 .....	24
Методы Рунге-Кутты .....	24
Неявные методы .....	25
Устройство вычислительных программ .....	25
Конечно-разностные методы .....	26
Лекция 5 .....	31
Введение и повторение .....	31
Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений .....	32
Линеаризация в точке .....	32
Метод Лебедева .....	33
Преимущества метода Лебедева .....	35
Лекция 6 .....	37
Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений .....	37
Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка .....	37
Устойчивость разностной схемы .....	38
Принцип максимума .....	39
Сходимость разностной схемы .....	41
Лекция 7 .....	43
Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка .....	43

Метод прогонки.....	43
Формулировка алгоритма метода прогонки .....	44
Метод пристрелки.....	45
Повышение порядка аппроксимации .....	45
Задача с краевыми условиями 3 типа .....	46
Обобщённое решение.....	47
Теорема существования и единственности обобщённого решения .....	48
Лекция 8.....	50
Формула суммирования по частям .....	50
Сеточный аналог теоремы вложения.....	51
Метод конечных элементов .....	52
Коэффициенты матрицы жёсткости .....	53
Оценка погрешности .....	54
Лекция 9.....	57
Метод Галеркина для полинома второй степени.....	57
Матрица жёсткости .....	57
Оценка погрешности .....	58
Аппроксимация уравнения теплопроводности.....	61
Лекция 10.....	62
Решение уравнения в частных производных .....	62
Спектральная устойчивость.....	63
Исследование схем на спектральную устойчивость.....	64
Неявные схемы.....	65
Правила аппроксимации .....	66
Лекция 11.....	68
Прямой метод решения системы сеточных уравнений.....	68
Алгоритм решения задачи:.....	69
Решение системы уравнений (для произвольного эллиптического оператора) .....	69
Лекция 12.....	72
Пространственно-краевая задача параболического уравнения с одной пространственной переменной.....	72
Необходимое и достаточное условие разностной схемы .....	73
Полностью неявная разностная схема .....	74
Построение разностной схемы с вторым порядком аппроксимации.....	74

---

<b>Оценка устойчивости схемы Кранка-Николсона.....</b>	<b>75</b>
<b>Лекция 13.....</b>	<b>77</b>
<b>Численные методы для эллиптических уравнений.....</b>	<b>77</b>
<b>Итерационные методы.....</b>	<b>80</b>



## Лекция 1

### Метод сопряжённых градиентов (CGM)

Conjugate gradient method (CGM)

#### Задача

Решим уравнение  $Ax = b$ .

$$A = A^* > 0$$

$\lambda(A) \in [\mu, M]$ , где  $\lambda(A)$  — спектр оператора  $A$ .

Решение:

Так как  $A = A^* > 0$ , то задачу можно свести к нахождению минимума квадратичного функционала.

$$F(x) = (Ax, x) - 2(b, x) = \|x - \bar{x}\|_A^2 - \|\bar{x}\|_A^2,$$

где  $\bar{x}$  — это решение системы,  $(Ax, x) =: (x, x)_A$ .

#### **Подпространство Крылова. Решение задачи для невязки**

Определение. Пусть  $x$  — вектор. Подпространством Крылова называется пространство, которое является линейной оболочкой  $\langle x, Ax, A^2x, \dots, A^n x, \dots \rangle$

#### Задача

Пусть у нас имеется вектор  $x^0$  — начальное приближение. Погрешность  $r^0 = x^0 - \bar{x}$ , начальная невязка  $\xi^0 = Ax^0 - b$ . Предположим, что погрешность на  $n$ -том шаге имеет вид:

$$r^n = P_n(A)r^0$$

Мы хотим найти многочлен  $P_n$  такой, чтобы

$$F(x^n) \rightarrow \min \text{ по всем } P_n$$

Ограничение на многочлен:

$$\text{Пусть } P_n(\lambda) = a_n^{(n)}\lambda^n + a_{n-1}^{(n)}\lambda^{n-1} + \dots + a_0^{(n)}$$

$$x^n - \bar{x} = a_n^{(n)}A^n(x^0 - \bar{x}) + \dots + a_0^{(n)}(x^0 - \bar{x})$$

Для того, чтобы  $\bar{x}$  сократилось в левой и правой части нужно, чтобы

$$a_0^{(n)} = 1$$

$A = A^* > 0$ , в таком случае разложим вектор  $x$  по собственным векторам матрицы  $A$ :

$$x = \sum_{j=1}^q c_j e_j$$

где  $c_j \neq 0$  &  $e_j$  отвечает различным собственным значениям.

Пусть, для примера,  $e_1$  и  $e_2$  отвечают одному и тому же собственному значению. Тогда

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} e_1 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} e_2 \right)$$

$\left( \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} e_1 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} e_2 \right)$  является единичным и соответствует собственному значению  $\lambda_1$

Поэтому  $e_j$  отвечает различным собственным значениям.

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_q e_q$$

$$Ax = c_1 \lambda_1 e_1 + c_2 \lambda_2 e_2 + \dots + c_q \lambda_q e_q$$

.....

$$A^{q-1} x = c_1 \lambda_1^{q-1} e_1 + c_2 \lambda_2^{q-1} e_2 + \dots + c_q \lambda_q^{q-1} e_q$$

Все эти вектора являются линейно независимыми. Поэтому они образуют базис в подпространстве Крылова. Значит это подпространство имеет размерность  $q$ .

Решение:

$$r^n = P_n(A) r^0$$

$$\xi^n = P_n(A) \xi^0$$

$$\xi^0 = \sum_{j=1}^q c_j e_j$$

где  $c_j \neq 0$  и  $e_j$  отвечает различным собственным значениям.

$$\xi^n = P_n(A) \left( \sum_{j=1}^q c_j e_j \right)$$

$$P_n(A) \left( \sum_{j=1}^q c_j e_j \right) = \sum_{j=1}^q c_j P_n(\lambda_j) e_j$$

$$\sum_{j=1}^q c_j P_n(\lambda_j) e_j = \sum_{j=1}^q c_j \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} \lambda_j^i e_j$$

$$F(x) = \|x - \bar{x}\|_A^2 - \|\bar{x}\|_A^2$$

Мы минимизируем  $\|x - \bar{x}\|_A^2$

$$\|x - \bar{x}\|_A^2 = (A(x - \bar{x}), x - \bar{x}) = (A^{-1}(Ax - b), Ax - b) = \|\xi\|_{A^{-1}}^2$$

$$\|\xi^n\|_{A^{-1}}^2 \rightarrow \min$$

$$\|\xi^n\|_{A^{-1}}^2 = \sum_{j=1}^q c_j^2 \sum_{i,k=1}^n a_i^{(n)} a_k^{(n)} \lambda_j^{i+k-1}$$

$$\sum_{j=1}^q c_j^2 \sum_{i,k=1}^n a_i^{(n)} a_k^{(n)} \lambda_j^{i+k-1} \rightarrow \min$$

Будем считать, что  $n < q$  и  $a_n^{(n)} \neq 0$

Находим минимальное значение для невязки:

$$\frac{\partial \|\xi^n\|_{A^{-1}}^2}{\partial a_i^{(n)}} = 0$$

$$\frac{\partial \|\xi^n\|_{A^{-1}}^2}{\partial a_i^{(n)}} = 2 \sum_{j=1}^q c_j^2 \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \lambda_j^{i+k-1}$$

$$2 \sum_{j=1}^q c_j^2 \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \lambda_j^{i+k-1} = 2(\xi^n, A^{i-1} \xi^0)_{A^{-1}}$$

$$\frac{\partial \|\xi^n\|_{A^{-1}}^2}{\partial a_i^{(n)}} = 2(\xi^n, A^{i-1} \xi^0)_{A^{-1}}$$

$$i = \overline{1, n}$$

$$\xi^n = a_n^{(n)} A^n \xi^0 + L_{n-1}$$

$$L_{n-1} = \langle \xi^0, A \xi^0, A^2 \xi^0, \dots, A^n \xi^0, \dots \rangle$$

$$\sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \left( \sum_{j=1}^q c_j^2 \lambda_j^{i-1} \lambda_j^k \right) = - \sum_{j=1}^q c_j^2 \lambda_j^{i-1}$$



$$\sum_{j=1}^q c_j^2 \lambda_j^{i-1} \lambda_j^k = (A^{-1} A^i \xi^0, A^k \xi^0) = (A^i \xi^0, A^k \xi^0)_{A^{-1}}$$

$$\xi^n \in L_n$$

$$L_n = \langle \xi^0, A\xi^0, A^2\xi^0, \dots, A^n\xi^0, \dots \rangle$$

В подпространстве  $L_n$  можно выбрать другой базис, а именно  $\langle \xi^0, \xi^1, \dots, \xi^n \rangle$

$$\xi^n \in L_n, \xi^n \notin L_{n-1}$$

Можно выбрать и базис

$$L_n = \langle \xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{n-1}, A\xi^{n-1} \rangle$$

$$AP_{n-1}(A)\xi^0 = a_{n-1}^{(n-1)} A^n \xi^0 + \dots$$

Разложим  $\xi^n$  по данному базису

$$\xi^n = \gamma_n A \xi^{n-1} + \gamma_{n-1} \xi^{n-1} + \gamma_{n-2} \xi^{n-2} + \sum_{k=0}^{n-3} \gamma_k \xi^k$$

$\xi^n$  ортогонально всем другим  $\xi$ , поэтому

$$\xi^n \perp \xi^{n-1}$$

$$\gamma_n (A \xi^{n-1}, \xi^{n-1}) + \gamma_{n-1} \|\xi^{n-1}\|^2 = 0$$

$$\xi^n \perp \xi^{n-2}$$

$$\gamma_n (A \xi^{n-2}, \xi^{n-2}) + \gamma_{n-2} \|\xi^{n-2}\|^2 = 0$$

$$\xi^n \perp \xi^k$$

$$\gamma_n (A \xi^{n-1}, \xi^k) = \gamma_n (\xi^{n-1}, A \xi^k) = 0$$

$$\xi^n = P_n(A)\xi^0 = \dots + \xi^0 = \gamma_n A(P_{n-1}(A)\xi^0) + \gamma_{n-1}(P_{n-1}(A)\xi^0) + \gamma_{n-2}(P_{n-2}(A)\xi^0)$$

$$\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} = 1$$

$$x^n - \bar{x} = \gamma_n (Ax^{n-1} - b) + \gamma_{n-1}(x^{n-1} - \bar{x}) + \gamma_{n-2}(x^{n-2} - \bar{x})$$

$$x^n = \gamma_n (Ax^{n-1} - b) + \gamma_{n-1}(x^{n-1}) + \gamma_{n-2}(x^{n-2})$$

$$x^1 = x^0 - \frac{\|\xi^0\|^2}{\|\xi^0\|_A^2} (Ax^0 - b)$$

Метод будет сходиться со скоростью

$$\frac{\sqrt{M} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{M} + \sqrt{\mu}}$$

и мы имеем конечность процесса за счет ортогонализации невязок.

Такого сорта методы называются методами, основанными на подпространстве Крылова.

### Модификации метода сопряжённых градиентов

#### 1) Метод бисопряжённых градиентов

Biconjugate gradient method (BiCG)

Является обобщением метода сопряжённых градиентов.

В отличие от МСГ на матрицу не накладывается условие самосопряжённости, то есть возможно, что

$$A \neq A^*$$

#### 2) Метод минимальных невязок

Minimal residuals method

Вместо того, чтобы минимизировать функционал  $F(x^n) \rightarrow \min$ , мы берем другой функционал, а именно:

$$\|Ax + b\|^2 \rightarrow \min$$

## Лекция 2

### Решение плохо обусловленных задач

Плохо обусловленной задачей назовем некорректно поставленную задачу (это задача, не обладающая каким-либо из свойств корректно поставленной задачи; корректно поставленная задача — прикладная задача, математическое решение которой существует, единственно и устойчиво).

#### Задача

Пусть  $Ax = b$ ,  $A = A^* > 0$

Собственные числа:

$$\lambda_{1,\dots,\lambda_k} = O(1)$$

$$\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m \ll 1$$

Решение:

$$b = \sum_{j=1}^m b_j e_j$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^m x_j e_j$$

$$x_j = \frac{b_j}{\lambda_j}$$

Рассмотрим случай наличия погрешности:

пусть  $Ax = \tilde{b}$

$$\tilde{b} = b + \delta b$$

$$\tilde{b} = \sum_{j=1}^m (b_j + \delta b_j) e_j$$

$$\tilde{x} = \bar{x} + \delta \bar{x}$$

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\lambda_j} e_j + \sum_{j=1}^m \frac{\delta b_j}{\lambda_j} e_j$$

Погрешность можно разделить на гладкую составляющую и сильно осциллирующую составляющую:

$$\delta \bar{x} = \sum_{j=1}^k \frac{\delta b_j}{\lambda_j} e_j + \sum_{j=k+1}^m \frac{\delta b_j}{\lambda_j} e_j$$

Порядок нормы гладкой части погрешности:

$$\left\| \sum_{j=1}^k \frac{\delta b_j}{\lambda_j} e_j \right\|^2 \sim \sum_{j=1}^k (\delta b_j)^2$$

Среднеквадратичная норма:

$$\|\delta b\| = \left( \sum_{j=1}^n (\delta b_j)^2 \right)^{1/2} = \delta$$

### Метод регуляризации Тихонова

Метод регуляризации Тихонова позволяет находить приближённое решение некорректно поставленных операторных задач вида  $Ax = b$ . Был разработан А. Н. Тихоновым.

В случае вышеописанной задачи сделаем дополнительное предположение: решение исходной задачи принадлежит гладкой части спектра.

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^k x_j e_j$$

$$\tilde{x} = \bar{x} + \delta \bar{x}$$

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^k \frac{b_j}{\lambda_j} e_j + \sum_{j=1}^m \frac{\delta b_j}{\lambda_j} e_j$$

#### Задача

$$A_\alpha x_\alpha \equiv (A + \alpha I)x_\alpha = \tilde{b},$$

где  $I$  — единичная матрица

Решение:

$$x_\alpha = \sum_{j=1}^m \frac{b_j + \delta b_j}{\lambda_j + \alpha} e_j$$

$$x_\alpha - \bar{x} = \sum_{j=1}^m \left( \frac{b_j + \delta b_j}{\lambda_j + \alpha} - \frac{b_j}{\lambda_j} \right) e_j$$

$$\sum_{j=1}^m \left( \frac{b_j + \delta b_j}{\lambda_j + \alpha} - \frac{b_j}{\lambda_j} \right) e_j = - \sum_{j=1}^k \frac{\alpha}{(\lambda_j + \alpha)\lambda_j} b_j e_j + \sum_{j=1}^k \frac{\delta b_j}{(\lambda_j + \alpha)} e_j + \sum_{j=k+1}^m \frac{\delta b_j}{(\lambda_j + \alpha)} e_j$$

Норма суммы меньше или равна сумме норм, поэтому

$$\|x_\alpha - \bar{x}\| \leq c_1 \alpha \|b\| + c_1 \|\delta b\| + \frac{1}{\alpha} \|\delta b\|$$

$$c_1 \alpha \|b\| + c_1 \|\delta b\| + \frac{1}{\alpha} \|\delta b\| \leq c_1 \alpha \|b\| + \frac{c_2}{\alpha} \|\delta b\|$$

$$c_1 \alpha \|b\| + \frac{c_2}{\alpha} \|\delta b\| \leq c_1 \alpha \|b\| + \frac{c_2}{\alpha} \delta$$

где  $c_1, c_2 = \text{const}$

$$c_1 \|b\| - \frac{c_2 \delta}{\alpha^2} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = O(\sqrt{\delta})$$

Погрешность будет иметь вид:

$$\|x_\alpha - \bar{x}\| = O(\sqrt{\delta})$$

Существуют и другие методы решения плохо обусловленных задач.

Например, Лаврентьев предложил искать так называемое нормальное решение, то есть искать минимум нормы невязки

$$\|Ax + b\|^2 \rightarrow \min$$

### Метод простой итерации

Пусть  $x = f(x)$  в банаховом пространстве. Будем говорить, что отображение  $f$  является сжимающим, если

$$\|f(x) - f(y)\| \leq q \|x - y\|$$

$$q < 1$$

Докажем, что в этом случае решение существует и оно единственно.

Предположим, что существует два решения этого уравнения:  $x$  и  $y$ . Тогда

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$$

$$\Rightarrow x = y$$

Рассмотрим итерационный процесс:

$$x^{n+1} = f(x^n), x^0$$

Докажем, что эта последовательность сходится (проверим критерий Коши).

$$\|x^{n+p} - x^n\| = \|f(x^{n+p-1}) - f(x^{n-1})\|$$

$$\|f(x^{n+p-1}) - f(x^{n-1})\| \leq q\|x^{n+p-1} - x^{n-1}\| \leq \dots \leq q^n\|x^p - x^0\|$$

$$q^n\|x^p - x^0\| \leq q^n[\|x^p - x^{p-1}\| + \|x^{p-1} - x^{p-2}\| + \dots + \|x^1 - x^0\|]$$

$$q^n[\|x^p - x^{p-1}\| + \|x^{p-1} - x^{p-2}\| + \dots + \|x^1 - x^0\|] \leq q^n(q^{p-1} + q^{p-2} + \dots + 1)\|x^1 - x^0\|$$

$$q^n(q^{p-1} + q^{p-2} + \dots + 1)\|x^1 - x^0\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x^1 - x^0\|$$

$$\frac{q^n}{1-q}\|x^1 - x^0\| < \varepsilon$$

Таким образом

$$\|x^{n+p} - x^n\| < \varepsilon$$

Следовательно последовательность сходящаяся, её предел существует, и он единственный.

Метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

## Метод Ньютона

Пусть

$$f(x) = 0$$

$\bar{x}$  — корень

Разложим  $f(\bar{x})$  в ряд Тейлора:

$$f(\bar{x}) = f(x) + f'(\xi)(\bar{x} - x)$$

$$f(\bar{x}) = 0$$

Тогда

$$\bar{x} = x - \frac{f(x)}{f'(\xi)}$$

Метод Ньютона (метод касательных):

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$$

Геометрическая интерпретация метода Ньютона (рис. 1):

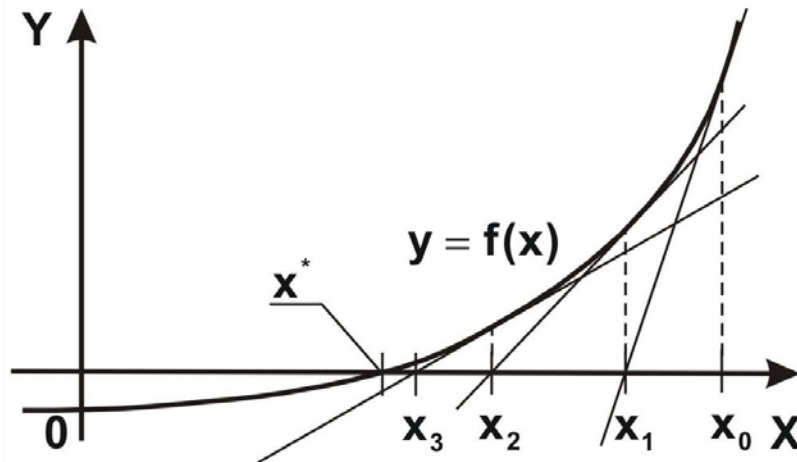


Рис. 1

Основная идея метода заключается в следующем:

- 1) задаём начальное приближение вблизи предположительного корня
- 2) строим касательную к графику исследуемой функции в точке приближения
- 3) находим пересечение касательной с осью абсцисс
- 4) берём точку пересечения в качестве следующего приближения
- 5) повторяем п.1-4 до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность

В общем случае имеем систему уравнений:

$$F(x) = 0$$

$$x = (x_1, \dots, x_m)$$

$$F = (F_1, \dots, F_m)$$

Выпишем итерационный процесс в следующей форме:

$$f(x^n) + f'(x^n)(x^{n+1} - x^n) = 0$$

$$F(x^n) + F'(x^n)(x^{n+1} - x^n) = 0$$

$$F'(x^n) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial F_j} \right)$$

На каждом шаге для реализации нам необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений с матрицей  $F'$ .

Исследуем сходимость этого метода.

Чтобы метод сходился, наложим некоторые требования на вектор-функцию  $F$ .

Пусть  $O_a = \{x: \|x - \bar{x}\| < a\}$  — окрестность радиуса  $a$ . Предположим, что в этой окрестности выполнены следующие условия:

- 1) норма обратной матрицы ограничена  
 $\|[F']^{-1}\| \leq M_1$
- 2) функция должна быть достаточно гладкой  
 $\|F(x) - F(y) - F'(y)(x - y)\| \leq M_2 \|x - y\|^2$

### Теорема о сходимости

Пусть в некоторой окрестности радиуса  $a$   $O_a$  выполнены условия 1), 2). Тогда существует окрестность радиуса  $b$   $O_b$ , где  $b \leq a$ , такая что метод будет сходиться, если начальное условие попадет в эту окрестность ( $x^0 \in O_b$ ).

Доказательство:

Из данного итерационного процесса

$$F(x^n) + F'(x^n)(x^{n+1} - x^n) = 0$$

можем записать, что

$$x^{n+1} = x^n - [F'(x^n)^{-1}]F(x^n)$$

$$x^{n+1} - \bar{x} = x^n - \bar{x} - [F'(x^n)^{-1}]F(x^n)$$

Оценим норму:

$$\|x^{n+1} - \bar{x}\| = \|[F'(x^n)^{-1}](F(x^n)(x^n - \bar{x}) - F(x^n))\|$$

$$\|[F'(x^n)^{-1}](F(x^n)(x^n - \bar{x}) - F(x^n))\| \leq M_1 \|F'(x^n)(x^n - \bar{x}) - F(x^n) + F(\bar{x})\|$$

$$M_1 \|F'(x^n)(x^n - \bar{x}) - F(x^n) + F(\bar{x})\| \leq M_1 M_2 \|x^n - \bar{x}\|^2$$

$$M_1 M_2 \|x^n - \bar{x}\|^2 < b$$

$$\|x^n - \bar{x}\|^2 = b^2$$

Для того, чтобы попасть в окрестность радиуса  $b$ , нужно чтобы было выполнено неравенство

$$M_1 M_2 b < 1$$

Тогда нужно выбирать  $b$  как минимум из двух величин:

$$b = \min \left\{ a, \frac{1}{M_1 M_2} \right\}$$

Оценим скорость сходимости:



$$M_1 M_2 \|x^{n+1} - \bar{x}\| \leq (M_1 M_2 \|x^n - \bar{x}\|)^2$$

$$M_1 M_2 \|x^n - \bar{x}\| \leq (M_1 M_2 \|x^0 - \bar{x}\|)^{2^n}$$

$$M_1 M_2 \|x^0 - \bar{x}\| < 1$$

Пример

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

Выберем начальное приближение:

$$x_0 = 1,5$$

И далее считаем до необходимой точности.

## Лекция 3

### Пример использования метода Ньютона

#### Задача

$$\begin{cases} -u'' + u^3 = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Разделим отрезок  $[0,1]$  сеткой с шагом  $h = \frac{1}{N}$  и приближенное решение будем искать в точках — узлах сетки.

Имеет место соотношение

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x) + O(h^4)$$

Запишем в каждой точке аппроксимацию уравнения:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i^3 = f_i, i = \overline{1, N-1} \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^3 \\ \vdots \\ u_{N-1}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Метод Ньютона:

$$F'(x^n)(x^{n+1} - x^n) + F(x^n) = 0$$

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right) = \left( 0, \dots, 0, -\frac{1}{h^2}, \frac{2}{h^2} + 3u_i^2, -\frac{1}{h^2}, 0, \dots, 0 \right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + 3(u_1^n)^2 & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 3(u_2^n)^2 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix} (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n) + F(u^n) = 0$$

где  $\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + 3(u_1^n)^2 & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 3(u_2^n)^2 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}$  — трёх диагональная матрица,

$$F(u^n) = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{h^2} + (u_i^n)^3 - f_i$$

$$(\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n) = z$$

Мы должны решить систему линейных алгебраических уравнений с трёх диагональной матрицей. Затем ищем  $\bar{u}^{n+1}$ :

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + z$$

При любом начальном приближении метод будет сходиться и сходимость будет иметь вид  $2^{-(2^n)}$ .

## Численное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

### Задача

Пусть есть система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \\ y = (y_1, \dots, y_m)^T \end{cases} \quad (1)$$

Решение существует тогда, когда  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица по  $y$ . То есть по  $y$  допускается рост не выше первой степени. Будем считать, что функция  $f(x, y)$  является гладкой.

Задачу можно решить разными методами.

Метод 1. Разложение в ряд Тейлора.

Пусть  $y(x)$  известно. Найти  $y(x + h)$

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)}{2}h^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x)}{n!}h^n + \dots$$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y''(x) = f_x + f_y f$$

$$y'''(x) = f_{xx} + f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + (f_y)^2 f$$

Метод 2. Метод Эйлера.

$$y(x + h) = y(x) + \int_0^h f((x + t), y(x + t)) dt$$

$$f((x + t), y(x + t)) = f(x, y(x)) + O(t)$$

$$\tilde{y}(x+h) = y(x) + hf(x, y(x))$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (2)$$

Ошибка:  $O(h^2)$

Метод 3. Замена интеграла квадратурной трапецией.

$$\tilde{y}(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}[f(x, y(x)) + f(x+h, y(x+h))]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

Ошибка:  $O(h^3)$

### Замечание

Пусть

$$\tilde{y}(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}[f(x, y(x)) + f(x+h, y^*)]$$

Возьмём  $y^*$  такое, что

$$|y(x+t) - y^*| = O(h^2)$$

Ошибка всё равно будет составлять  $O(h^3)$

$$\begin{cases} y^* = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*)] \end{cases} \quad (3)$$

Ошибка:  $O(h^2)$

Если заменим интеграл квадратурной формулой прямоугольников и возьмём узел в середине отрезка, то получим приближённую формулу

$$\tilde{y}(x+h) = y(x) + hf\left(x + \frac{h}{2}, y\left(x + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$\begin{cases} y^* = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y^*\right) \end{cases} \quad (4)$$

Ошибка:  $O(h^2)$

Формулы (3) и (4) называются модифицированным методом Эйлера. За счёт того, что мы правую часть вычисляем два раза в двух различных точках, мы получаем решение с точностью  $(h^2)$ .

Обобщение формул (1), (2), (3), (4).

Мы должны найти коэффициенты:

$$\begin{cases} \alpha_2, \dots, \alpha_q \\ \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{q,q-1} \\ p_1, \dots, p_q \end{cases}$$

Вычисляем совокупность величин:

$$\begin{cases} k_1(h) = hf(x, y) \\ k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1) \\ k_3(h) = hf(x + \alpha_3 h, y + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) \\ \vdots \\ k_q(h) = hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1 + \dots + \beta_{q,q-1} k_{q-1}) \end{cases}$$

Полагаем

$$y(x+h) \approx z(h)$$

$$z(h) = y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h)$$

## Методы Рунге-Кутты

Рассмотрим функцию

$$f(h) = y(x+h) - z(h)$$

Мы хотим, чтобы по  $h$  это выражение имело как можно более высокий порядок.

Предположим, что

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(s)}(0) = 0$$

$$\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$$

$$\varphi(h) = O(h^{s+1})$$

$s$  — порядок метода

Рассмотрим случай  $q = 1$

$$y(x+h) \approx z(h)$$

$$z(h) = y(x) + p_1 hf(x, y)$$

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 hf(x, y)$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi' = y'(x) - p_1 f(x, y)$$

Следовательно,  $p_1 = 1$

Рассмотрим случай  $q = 2$

Введём обозначения:

$$\bar{x} = x + \alpha_2 h$$

$$\bar{y} = y + \beta_{21} k_1$$

$$y(x + h) \approx z(h)$$

$$z(h) = y(x) + p_1 h f(x, y) + p_2 h f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\varphi(h) = y(x + h) - y(x) - p_1 h f(x, y) - p_2 h f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi' = y'(x) - p_1 f(x, y) - p_2 f(x, y)$$

Следовательно,  $p_1 + p_2 = 1$

$$\varphi'' = f_x(x + h, y(x + h)) + f(x + h, y(x + h))f_y(x + h, y(x + h)) - 2p_2 f_x(\bar{x}, \bar{y})\alpha_2 - 2p_2 f_y(\bar{x}, \bar{y})\beta_{21} f$$

$$\varphi'' = f_x + f_y f - \alpha_2 p_2 f_x - p_2 \beta_{21} f_y f = 0$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ \alpha_2 p_2 = 1 \\ \beta_{21} p_2 = 1 \end{cases}$$

Пример:

$$\begin{cases} p_2 = 1 \\ p_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \beta_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

В этом случае:

$$k_1(h) = h f(x, y)$$

$$k_2(h) = h f(x + h, y + h f(x, y))$$

$$\tilde{y}(x + h) = y + h f(x + h, y + h f(x, y))$$

Мы получили совокупность формул (4).

Пример:

$$\begin{cases} p_2 = \frac{1}{2} \\ p_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = 1 \\ \beta_{21} = 1 \end{cases}$$

В этом случае получаем совокупность формул (3).

## Лекция 4

### Методы Рунге-Кутты

Пусть  $y' = f(x, y)$  и  $y_0$  – начальное условие.

Последовательно вычисляем величины:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(h) = hf(x, y) \\ k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1) \\ k_3(h) = hf(x + \alpha_3 h, y + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) \\ \vdots \\ k_q(h) = hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1 + \dots + \beta_{q,q-1} k_{q-1}) \end{array} \right.$$

Полагаем, что

$$y(x+h) \approx z(h) = y + \sum_{i=1}^q p_i k_i$$

Неизвестные:  $\alpha_2, \dots, \alpha_q, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{2q} & \dots & 0 \end{pmatrix}, p_1, \dots, p_q$

Рассмотрим функцию и разложим её в ряд Тейлора:

$$\varphi(h) = y(x+h) - z(h)$$

$$y(x+h) - z(h) = \varphi(0) + \varphi'(0)h + \dots + \varphi^{(s)}(0) \frac{h^s}{s!} + \varphi^{(s+1)}(0) \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} + o(h^{s+1})$$

Чтобы погрешность была минимальной, потребуем, чтобы:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(s)}(0)$$

Предположим, что

$$\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$$

Тогда метод Рунге-Кутты имеет порядок  $s$ .

Был рассмотрен случай при  $q = 2, s = 2$  причём  $s$  не может быть равно 3.

Когда  $q = 3, s = 3$  и нельзя подобрать коэффициенты таким образом, чтобы  $s$  была равна 4.

Когда  $q = 4, s = 4, s \neq 5$

Когда  $q = 5, s = 4, s \neq 5$

На практике чаще всего используют методы Рунге-Кутты.



## Неявные методы

### Пример

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$y(x+h) = y(x) + \int_0^h f(x+t, y(x+t)) dt$$

$\frac{h}{2}$  — малый параметр, значит мы можем попробовать решить это уравнение методом простой итерации.

$$y_{n+1}^1 = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^0)]$$

$$y_{n+1}^0 = y_n + hf(x_n, y_n)$$

На предыдущей лекции мы называли это модифицированным методом Эйлера. Погрешность метода:  $O(h^3)$

### Устройство вычислительных программ

Пусть есть разложение

$$\varphi(h) = \frac{\varphi^{(s+1)}(0)}{(s+1)!} h^{s+1} + o(h^{s+1})$$

Главный член разложения:

$$\frac{\varphi^{(s+1)}(0)}{(s+1)!} h^{s+1}$$

Мы можем на шаге контролировать погрешность. Пусть мы имеем точку  $x$  и хотим вычислить  $x+h$ . Один раз вычислим по методу Рунге-Кутты и получим погрешность:

$$\frac{\varphi^{(s+1)}(0)}{(s+1)!} h^{s+1}$$

А теперь сделаем два шага: из точки  $x$  сделаем шаг на  $\frac{h}{2}$ , а затем еще раз  $\frac{h}{2}$  (то есть сначала попадем в точку  $x + \frac{h}{2}$ , а затем в точку  $x+h$ . Прделаем всё также по методу Рунге-Кутты, только с шагом  $\frac{h}{2}$ . На первом шаге получим:

$$\varphi\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\varphi^{(s+1)}(0)}{(s+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{s+1} + o(h^{s+1})$$

На втором шаге:

$$\varphi(h) = 2 \frac{\varphi^{(s+1)}(0)}{(s+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{s+1} + o(h^{s+1})$$

Получаем:

$$y_{n+1}^h \sim Mh^{s+1}$$

$$y_{n+1}^{h/2} \sim 2M \left(\frac{h}{2}\right)^{s+1}$$

$$M = \frac{\varphi^{(s+1)}(0)}{(s+1)!}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y(x+h) = y_{n+1}^h + Mh^{s+1} + o(h^{s+1}) \\ y(x+h) = y_{n+1}^{h/2} + 2M \left(\frac{h}{2}\right)^{s+1} + o(h^{s+1}) \end{cases}$$

Вычитаем из одного уравнения другое и находим значение  $M$ . Тогда имеем представление о погрешности на шаге. Надо помнить, что всё происходит в зоне действия асимптотики.

То есть мы ищем погрешность на шаге. Если она слишком большая, то шаг делим пополам и так далее. Эта процедура реализована в большинстве компьютерных программ.

## Конечно-разностные методы

Пусть

$$y' = f(x, y)$$

$$y_0 = y(0)$$

$$x = nh$$

Возьмём сетку с постоянным шагом  $h$  и будем искать приближённое решение в узлах сетки.

$$y'(x_n) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y_{n-i}$$

$$f(x_n, y_n) \approx \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{n-i}, y_{n-i})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y_{n-i} \right] = y'(x_n)$$

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y(x_{n-i}) = \left( \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} \right) y(x_n) + \left( - \sum_{i=0}^k i a_{-i} \right) y'(x_n) + \left( \frac{h}{2} \sum_{i=0}^k i a_{-i} \right) y''(x_n) + \dots$$

Для того, чтобы выражение, стоящее в правой части, стремилось к  $y'(x_n)$  при  $h \rightarrow 0$  в точке  $(x_n)$  необходимы следующие условия:

$$\sum_{i=0}^k a_{-i} = 0$$

$$- \sum_{i=0}^k i a_{-i} = 1$$

$$\sum_{i=0}^k b_{-i} = 1$$

Получаем расчетную формулу:

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y_{n-i} = \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{n-i}, y_{n-i})$$

Это выражение называется конечно-разностной схемой.

Для того, чтобы все рассчитать нам необходимо знать  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ . Будем считать, что мы их нашли (например, методом Рунге-Кутты).

Рассмотрим несколько случаев:

1)  $a_0 \neq 0, b_0 = 0$

В этом случае у нас явная разностная схема.

2)  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$

В этом случае возникает проблема нахождения  $y_n$  из нелинейного уравнения:

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y_{n-i} = \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{n-i}, y_{n-i})$$

Разностная схема называется неявной.

3)  $a_0 = 0, b_0 \neq 0$

Эта схема называется разностной схемой с забеганием вперед. На практике она не применяется, рассматривается только в теории.

Введем понятие погрешности аппроксимации. Погрешностью аппроксимации назовём функцию

$$r_n = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y(x_{n-i}) - \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{n-i}, y(x_{n-i}))$$

Эта функция показывает, какую ошибку мы совершаем, заменяя исходную дифференциальную задачу задачей разностной.

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y(x_{n-i}) - \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{n-i}, y(x_{n-i})) = O(h^p)$$

Для того, чтобы ошибка была как можно меньше, нужно подобрать коэффициенты таким образом, чтобы получилось максимальное  $p$ .

$$r_n = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y(x_{n-i}) - \sum_{i=0}^k b_{-i} y'(x_{n-i})$$

Раскладываем все  $y(x_{n-i})$  и  $y'(x_{n-i})$  в ряд Тейлора.

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y(x_{n-i}) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y(x_n) - \sum_{i=0}^k i a_{-i} y' + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^k i^2 a_{-i} y'' + \dots$$

$$\sum_{i=0}^k b_{-i} y'(x_{n-i}) = \sum_{i=0}^k b_{-i} y'(x_n) - h \sum_{i=0}^k i b_{-i} y'' + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^k i^2 b_{-i} y''' + \dots$$

С учетом вышеописанных условий:

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_{-i} y(x_{n-i}) = 1 + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^k i a_{-i} y'' + \dots$$

$$\sum_{i=0}^k b_{-i} y'(x_{n-i}) = -h \sum_{i=0}^k i b_{-i} y'' + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^k i^2 b_{-i} y''' + \dots$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^k i^2 a_{-i} + \sum_{i=0}^k i b_{-i} = 0$$

Рассмотрим метод на примерах. Пусть  $y' = 0 \Rightarrow f \equiv 0, y = const$

$$\sum_{i=0}^k a_{-i} y_{n-i} = 0$$

Мы получили уравнение в конечных разностях. Решение этого уравнения мы ищем в виде экспоненты с неизвестным основанием:

$$y_{n-i} = \mu^{n-i}$$

$$\sum_{i=0}^k a_{-i} \mu^{n-i} = 0$$

Сокращаем на  $\mu^{n-k}$ . Получаем

$$\sum_{i=0}^k a_{-i} \mu^{k-i} = 0$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением разностной схемы.

Предположим, что максимальный по модулю корень:  $\mu_1$

$$|\mu_1| > 1$$

Решение этого уравнения в конечных разностях будет иметь вид:

$$y_n = c_1 \mu_1^n + c_2 \mu_2^n + \dots$$

Рассмотрим случаи:

- 1)  $\mu_1$  — действительное,  $|\mu_1| > 1$   
В этом случае  $|\mu_1^n| \rightarrow \infty$ , следовательно этот случай не подходит.
- 2)  $\mu_1$  — комплексное,  $|\mu_1| > 1$   
В этом случае:  
$$\mu_1 = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$
$$y_n = c_1 \rho^n \cos n\varphi + c'_1 + \rho^n \sin n\varphi + \dots$$

Поскольку  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , то

$$|\cos n\varphi| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ либо } |\sin n\varphi| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Следовательно, данный случай тоже не подходит.

- 3)  $|\mu_1| = 1$  и корень кратный  
Рассмотрим  $y' + My = 0$ .  
Тогда решение будет иметь вид:  
$$y(x) = y_0 e^{-Mx}$$

Ограничение на коэффициенты разностной схемы (условие альфа):

коэффициенты разностной схемы должны быть такие, чтобы все корни характеристического уравнения лежали в единичном круге на комплексной плоскости и на границе круга не было кратных корней.

Пример.

$$\text{Пусть } y' + My = 0$$

Решение:

$$y(x) = y_0 e^{-Mx}$$

Рассмотрим разностную схему.

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + My_n = 0$$

Эта схема обладает вторым порядком аппроксимации  $O(h^2)$

Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\mu^2 + 2hM\mu - 1 = 0$$

$$\mu_1 = -Mh + \sqrt{M^2 h^2 + 1}$$

$$\mu_2 = -Mh - \sqrt{M^2 h^2 + 1}$$

Решение будет иметь вид:

$$C_1 \left(-Mh + \sqrt{M^2 h^2 + 1}\right)^n + C_2 (-1)^n \left(-Mh - \sqrt{M^2 h^2 + 1}\right)^n$$

## Лекция 5

### Введение и повторение

На прошлой лекции была рассмотрена модельная задача:

$$y' + My = 0$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$y(x) = y_0 e^{-Mx}$$

Рассмотрим разностную схему:

$$1. \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + My_n = 0; y_0, y_1 - \text{известны}$$

По данной схеме считать нельзя.

Рассмотрим метод Эйлера:

$$2. \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + My_n = 0 \Rightarrow y_{n+1} = (1 - Mh)y_n$$

Откуда,

$$|1 - Mh| \leq 1 \Rightarrow h \leq \frac{2}{M}$$

В этом случае, разностная схема является условно устойчивой. То есть, при наличии погрешности, она не будет возрастать.

Помимо этого, необходимо, чтобы выполнялось:

$$0 < 1 - Mh < 1 \Rightarrow h < \frac{1}{M}$$

Рассмотрим ещё одну схему:

$$3. \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \frac{M}{2}(y_{n+1} + y_n) = 0$$

Очевидно, что эта схема имеет порядок аппроксимации -  $O(h^2)$ . Непосредственно убедимся в этом:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{M}{2}(y(x+h) + y(x)) = y' \left( x + \frac{h}{2} \right) + My \left( x + \frac{h}{2} \right) + O(h^2)$$

$$y_{n+1} = \frac{1 - Mh/2}{1 + Mh/2} y_n$$

Причём,  $\frac{1 - Mh/2}{1 + Mh/2} < 1$ , следовательно, схема устойчива и ограничения на шаг сетки нет.

Или говорят, что схема безусловна устойчива.

Однако, необходимо учесть, что решение должно монотонно убывать с ростом  $x$ , следовательно,

$$\frac{1 - Mh/2}{1 + Mh/2} > 0 \Rightarrow h < \frac{2}{M}$$

Таким образом, ограничение на шаг сетки всё-таки есть, если учесть все условия.

В дальнейшем будем рассматривать “плохой” случай, когда  $M \gg 1$ .

### Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1' + y_1 = 0 \\ y_2' + My_2 = 0 \end{cases}$$

причем  $M \gg 1$ .

Соответствующие решения:

$$y_1(x) = y_1(0)e^{-x}$$

$$y_2(x) = y_2(0)e^{-Mx}$$

Предположим, что мы решали методом Эйлера, тогда есть ограничение на шаг сетки:

$$h \leq \frac{2}{M}$$

Первая компонента убывает плавно, а вторая очень быстро. Про вторую компоненту говорят, что это компонента пограничного слоя.

К сожалению, в общем случае, мы не знаем где эти точки находятся. Следовательно, мы должны делать шаг меньше. Зачастую, с учётом “жёсткого” условия, это невозможно: не хватает вычислительной мощности компьютера. Поэтому, для решения подобных уравнений рассмотрим специальные методы.

Рассмотрим некоторые из них.

Возьмём коэффициенты:  $\alpha_2, \dots, \alpha_q$ ;  $\beta_{ij}$  ( $\beta_{ij} = 0$ , если  $j > i$ ), и весовые коэффициенты -  $p_1, \dots, p_q$ .

### Линеаризация в точке

$$y' = f(x, y).$$

Если мы предполагаем, что уравнение жёсткое, то делаем линеаризацию. То есть, раскладываем в ряд Тейлора в точке  $(x_n, y_n)$  и рассматриваем от него только линейную часть:

$$y + Ay = 0$$



Или локально:

$$y(x) = y_n e^{-Ax}$$

Если у  $A$  большой разброс спектра, то возникают проблемы с расчётом экспоненты.

Для вычисления экспоненты, в таком случае, существуют методы, такие как: метод Ракитского, метод Gear.

### Метод Лебедева

Этот метод, в отличие от других, которые работают на эмпирике, получен с помощью фундаментальной математики.

Рассмотрим задачу:

$$y' + Ay = 0,$$

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

$$0 \leq \lambda_i \leq M \gg 1$$

Будем считать, что в этой матрице гладкие компоненты, то есть:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k = O(1)$$

И жёсткие компоненты:

$$\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m \gg 1$$

Попытаемся решить эту задачу методом Эйлера. Важно отметить, что если мы хотим получить правильное решение, то ограничение на шаг будет обязательно присутствовать.

Если мы сделаем  $N$  шагов, то по методу Эйлера мы сможем получить значение

$$x = \frac{2N}{M}.$$

Тогда, была предложена идея делать переменные шаги по схеме:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}} + Ay_n = 0$$

Тогда, за  $N$  шагов можно продвинуться на

$$\sum_{i=1}^N h_i$$

Мы хотим максимизировать данную величину, то есть, делать шаги как можно больше.

$$y_N = (I - h_n A)(I - h_{n-1} A) \dots (I - h_1 A)y_0$$

Или вводя обозначения:

$$y_N = P_N(A) y_0$$

$$P_N(A) = I - \sum_{i=1}^N h_i A + \dots$$

Важно, чтобы многочлен удовлетворял следующим условиям:

1.  $P_N(0) = 1$
2.  $P_N'(0) = -\sum_{i=1}^N h_i A \rightarrow \min$
3. Решение не возрастает, следовательно

$$|P_N(\lambda)| \leq 1,$$

$$0 \leq \lambda \leq M$$

Задача сформулирована.

$$T_N\left(\frac{M-2\lambda}{M}\right) = \arg \min P_N'(0): P_N(0) = 1 \text{ \& } |P_N| \leq 1$$

Оказалось, что этим условиям удовлетворяет многочлен Чебышёва. Проверим это.

Предположим, что это не так:

$$\exists P_N: P_N(0) = 1 \text{ \& } |P_N| \leq 1$$

$$\Rightarrow P_N'(0) < T_N'\left(\frac{M-2\lambda}{M}\right)\Big|_{\lambda=0}$$

Рассмотрим разность:

$$T_N\left(\frac{M-2\lambda}{M}\right) - P_N(\lambda) = Q_N(\lambda)$$

Рассмотрим свойства полученного многочлена:

$$Q_N(0) = 0$$

$$Q_N'(0) > 0$$

У многочлена Чебышёва имеются точки экстремума:

$$\xi_0 = 0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \xi_N = M$$

Следовательно,

$$\text{sign } Q_N(\xi_i) = \begin{cases} \geq 0, & i - \text{чётное} \\ \leq 0, & i - \text{нечётное} \end{cases}$$

В самом простом случае:

$$\text{sign } Q_N(\xi_i) = (-1)^i$$

Тогда, на отрезке  $[\xi_0, \xi_1]$  у нас два корня, учитывая

$$Q_N(0) = 0, Q_N'(0) > 0.$$

На остальных отрезках также существует как минимум один корень, из условий.

Следовательно, у многочлена степени  $N$  существует  $N + 1$  корней. Получили противоречие, следовательно, допущение неверно.

При нестрогом неравенстве противоречие получается аналогично (изменяется положение корней, но не их количество). Проверка завершена.

Пусть корни многочлена Чебышёва:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_N \in (0, M)$$

Таким образом,

$$h_n = \frac{1}{\lambda_n}$$

### Преимущества метода Лебедева

Рассмотрим преимущества метода Лебедева.

Возьмём производную от многочлена Чебышёва:

$$T_N(x) = \frac{1}{2} \left[ (x + \sqrt{x^2 - 1})^N + (x - \sqrt{x^2 - 1})^N \right]$$

$$x = \frac{M - 2\lambda}{M}$$

$$\frac{dT_N(x)}{d\lambda} =$$

$$\frac{N}{2} \left[ (x + \sqrt{x^2 - 1})^{N-1} \left( -\frac{2}{M} - \frac{2 \left( \frac{M - 2\lambda}{M} \right)}{M\sqrt{x^2 - 1}} \right) + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{N-1} \left( -\frac{2}{M} + \frac{2 \left( \frac{M - 2\lambda}{M} \right)}{M\sqrt{x^2 - 1}} \right) \right]$$

При  $\lambda = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dT_N(x)}{d\lambda} = \frac{N}{M} & \left[ - \left( x^{N-1} + (N-1)x^{N-2}\sqrt{x^2-1} + \dots \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right) \right. \\ & \left. + \left( x^{N-1} - (N-1)x^{N-2}\sqrt{x^2-1} + \dots \right) \left( -1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{dT_N(x)}{d\lambda} = \frac{N}{M} \left[ -x^{N-1} - (N-1)x^{N-2}\sqrt{x^2-1} - \frac{x^{N-1}}{\sqrt{x^2-1}} - (N-1)x^{N-2} + \dots - x^{N-1} \right. \\ \left. + (N-1)x^{N-2}\sqrt{x^2-1} + \frac{x^{N-1}}{\sqrt{x^2-1}} - (N-1)x^{N-2} + \dots \right]$$

$$\frac{dT_N(x)}{d\lambda} = \frac{N}{M} [-2 - 2(N-1)]$$

$$\frac{N}{M} [-2 - 2(N-1)] = -\frac{2N^2}{M}$$

Таким образом, за  $N$  шагов мы можем продвинуться на  $\frac{2N^2}{M}$ .

## Лекция 6

### Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений

**Определение.** Пусть  $y' = f(x, y)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Будем говорить, что на отрезке  $[0, 1]$  система является жёсткой, если существует точка  $x_0 \in [0, 1]$  такая, что матрица

$$A = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y(x))$$

обладает следующими свойствами:

- 1) Мнимая часть матрицы  $A$  ограничена  
 $|\operatorname{Im} \lambda(A)| \leq a$   
где  $a = O(1)$
- 2)  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) = O(1)$   
где  $j = 1, \dots, l$
- 3)  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) \gg 1$   
где  $j = l + 1, \dots, m$

### Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Задача

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u = f(x) \\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{cases} \quad (1)$$

$$p \geq 0$$

Введём на отрезке  $[0, 1]$  сетку

$$\Omega_h = \{x = jh, j = \overline{1, N-1}\}, h = \frac{1}{N}$$

$$\partial\Omega_h = \{0, 1\}$$

У нас появился малый параметр. Тогда заменим вторую производную  $u''$  второй разнесенной разностью, а именно

$$u''(x) \sim \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Разложение в ряд Тейлора:

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu' + \frac{h^2}{2}u'' \pm \frac{h^3}{6}u^{(3)} + \frac{h^4}{24}u^{(4)} \pm \frac{h^5}{120}u^{(5)} + O(h^6)$$

Подставим это выражение в  $u''(x)$ :

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4)$$

Будем искать приближённое решение в узлах сетки.

Заменяем вторую производную разделённой разностью:

$$\begin{cases} -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + p_n u_n = f_n, & p_n = p(nh), 1 \leq n \leq N-1 \\ u_0 = a, u_N = b \end{cases}$$

Определение. Погрешностью аппроксимации  $r_n$  называется следующая функция:

$$r_n \equiv \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))}{h^2} + p(x)u(x) - f(x)$$

Вернёмся к задаче:

$$r_n = \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4)$$

В данном случае погрешность аппроксимации имеет второй порядок.

### Устойчивость разностной схемы

Определение. Пусть мы имеем пространство сеточных функций  $V_h$  — пространство функций, определённых на  $\bar{\Omega}_h$ . И пусть задана норма  $\|\cdot\|_{V_h}$ . Будем говорить, что норма в пространстве  $V_h$  согласована с нормой функционального пространства  $V$ , если выполнено условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|[v]\|_{V_h} = \|v\|$$

Примеры:

$$\|[v]\|_{V_h} = \max_{i=0, N} |v_i|$$

Очевидно, что эта норма согласована с нормой пространства  $C$ .

$$\|[v]\|_{V_h} = \left( \sum_{j=0}^N h v_j^2 \right)^{1/2}$$

Эта норма будет согласована с нормой пространства  $L_2$

Определение. Пусть есть абстрактная разностная схема

$$L^h u^h = f^h$$

$$u^h \in U_h$$

$$u_h|_{\partial\Omega_h} = \varphi^h$$

$$\varphi^h \in \Phi_h$$

$$f^h \in F_h$$

Будем считать, что в пространствах  $U_h, \Phi_h, F_h$  заданы согласованные нормы.

Будем говорить, что разностная схема устойчива, если

$\exists C > 0$ , не зависящая от  $h$ , такая что выполнены условие

$$\|u^h\|_{U_h} \leq C(\|f^h\|_{F_h} + \|\varphi^h\|_{\Phi_h})$$

Вернёмся к задаче.

$U_h$  — пространство функций, определённых на  $\overline{\Omega}_h$

$$\|u^h\| = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j|$$

$F_h$  — пространство функций, определённых на  $\Omega_h$

$$\|f^h\| = \max_{0 \leq j \leq N-1} |f_j|$$

$\Phi_h$  — пространство функций, определённых на  $\partial\Omega_h$

$$\|\varphi^h\| = \max\{|a|, |b|\}$$

### Принцип максимума

Лемма. Пусть  $f_n \geq 0, n = \overline{1, N-1}$  и  $a, b \geq 0$ . Тогда решение разностной схемы тоже будет больше или равно нулю ( $u_n \geq 0$ ).

Доказательство:

Предположим, что это не так. Тогда существует отрицательный минимум

$$\exists n: u_n = \min_j (u_j) < 0$$

Точек минимума может быть несколько. Возьмём крайнюю левую точку. Эта точка не может быть нулём, значит это внутренняя точка.

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{h^2} + \frac{u_n - u_{n-1}}{h^2} + p_n u_n < 0$$

Получили противоречие.

Вернёмся к задаче.

Чтобы получить априорную оценку построим мажоранту.

Рассмотрим многочлен второй степени:

$$R(x) = \kappa \times (1-x) + |a|(1-x) + |b|x$$

В точке 0:

$$R(x) = |a|$$

В точке 1:

$$R(x) = |b|$$

Подставим  $R(x)$  в разностную схему:

$$L^h R(x) = 2\kappa + p(x)R(x) \geq \|f^h\|$$

Рассмотрим две функции:

$$v_n = R_n \pm u_n$$

Следовательно,  $v_0 \geq 0, v_N \geq 0$

Подставим  $v_n$  в разностную схему:

$$L_h v_n = \|f^h\| + p_n v_n \pm f_n$$

$$\|f^h\| + p_n v_n \pm f_n \geq 0$$

Следовательно,  $v_n \geq 0$

$$\max |u_n| \leq R_n \leq \frac{\|f^h\|}{8} + \max \{|a|, |b|\}$$

$$\|u^h\| = \max_{0 \leq n \leq N} |u_n| \leq \|f^h\| + \max \{|a|, |b|\}$$

Мы доказали устойчивость. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли данная система

$$\begin{cases} -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + p_n u_n = f_n, & p_n = p(nh), 1 \leq n \leq N-1 \\ u_0 = a, u_N = b \end{cases}$$

имеет решение при любой правой части и при любых граничных условиях.

Предположим, что имеет место какое-либо возмущение, то есть вместо этой задачи рассматриваем задачу с возмущёнными данными:

$$\begin{cases} -\frac{\tilde{u}_{n+1} - 2\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-1}}{h^2} + p_n \tilde{u}_n = \tilde{f}_n, & p_n = p(nh), 1 \leq n \leq N-1 \\ u_0 = \tilde{a}, u_N = \tilde{b} \end{cases}$$

Решение этой задачи существует, и оно единственно.

Покажем, что малому изменению правой части и малому изменению краевых условий соответствует малое изменение решения.



Вычтем из системы без возмущений систему с возмущением. Получаем уравнение для погрешности, а именно

$$L^h(\tilde{u}^h - u^h) = \tilde{f}^h - f^h$$

$$\tilde{u}^h - u^h|_{n=0} = \tilde{a} - a$$

$$\tilde{u}^h - u^h|_N = \tilde{b} - b$$

Для этой задачи у нас есть априорная оценка:

$$\|\tilde{u}^h - u^h\| \leq \|\tilde{f}^h - f^h\| + \max\{|\tilde{a} - a|, |\tilde{b} - b|\}$$

То есть малому изменению правой части и малому изменению граничных условий соответствует малое изменение решения.

### Сходимость разностной схемы

Выпишем уравнение для погрешности:

$$\begin{cases} L^h([u] - u^h) = r_n = O(h^2) \\ [u] - u^h|_{n=0} = 0 \\ [u] - u^h|_N = 0 \end{cases}$$

$$\|[u] - u^h\| \leq Ch^2$$

Если  $n \in C^4[0,1]$ , то приближенное решение сходится к точному решению в норме  $C$  со скоростью  $h^2$ .

В точке 1 уравнение имеет вид:

$$-\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} + p_1 u_1 = f_1$$

$$p_1 u_1 = f_1 + \frac{u_2 - 2u_1 + a}{h^2}$$

В точке N-1:

$$-\frac{u_N - 2u_{N-1} + u_{N-2}}{h^2} + p_{N-1} u_{N-1} = f_{N-1}$$

$$p_{N-1} u_{N-1} = f_{N-1} + \frac{b - 2u_{N-1} + u_{N-2}}{h^2}$$

Этот процесс называется исключением краевых условий.

Вектор неизвестных:  $(u_1, \dots, u_{N-1})^T$

Если бы мы нумеровали по-другому компоненты вектора, то у нас бы получалась другая матрица. То есть в зависимости от того, как мы будем переставлять компоненты, матрица будет менять свой вид, но оператор при этом остается тем же самым.

В этом случае первое уравнение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + p_1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p_2 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{a}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} + \frac{b}{h^2} \end{pmatrix}$$

Получилась система линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей.

## Лекция 7

### Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

В прошлый раз была рассмотрена задача:

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u = f \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases} \quad (1)$$

Была построена конечно-разностная схема:

$$\begin{cases} -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + p_n u_n = f_n \\ n = 1, N-1; \quad h = 1/N \\ u_0 = a; \quad u_N = b \end{cases} \quad (2)$$

Данная схема имеет порядок  $O(h^2)$ .

Решение данной системы сводится к решению:

$$A\bar{u} = \bar{\varphi}$$

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_2 & C_2 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{N-1} & C_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$C_i = \frac{2}{h^2}$$

$$A_i = B_i = -\frac{1}{h^2}$$

Необходимо найти алгоритм, который сможет найти решение системы уравнений с трёхдиагональной матрицей.

### Метод прогонки

$$\bar{u} = (u_1, \dots, u_{N-1})$$

Решение будем искать в виде

$$u_n = \alpha_{n+1}u_{n+1} + \beta_{n+1}$$

где  $\alpha_{n+1}$  и  $\beta_{n+1}$  — неизвестные коэффициенты.

Подставим данное представление в  $n$ -ое уравнение:

$$B_n u_{n-1} + C_n u_n + A_n u_{n+1} = \varphi_n$$

$$B_n (\alpha_n u_n + \beta_n) + C_n u_n + A_n u_{n+1} = \varphi_n$$

Приведём подобные слагаемые:

$$(B_n \alpha_n + C_n)u_n + A_n u_{n+1} = \varphi_n - B_n \beta_n$$

Откуда

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = -\frac{A_n}{B_n \alpha_n + C_n} \\ \beta_{n+1} = \frac{\varphi_n - B_n \beta_n}{B_n \alpha_n + C_n} B_n \end{cases}$$

Таким образом получена рекуррентная формула для вычисления коэффициентов.

Имеем:

$$u_1 = \alpha_2 u_2 + \beta_2$$

С другой стороны:

$$\left(\frac{2}{h^2} + p_n\right)u_1 + A_1 u_2 = \varphi_1$$

$$C_1 = \frac{2}{h^2} + p_n$$

Откуда:

$$u_1 = \frac{-A_1 + \varphi_1}{C_1}$$

Сравнивая формулы, получаем начальные условия:

$$\alpha_2 = \frac{-A_1}{C_1}$$

$$\beta_2 = \frac{\varphi_1}{C_1}$$

### Формулировка алгоритма метода прогонки

Для того, чтобы решить систему уравнений с трёх диагональной матрицей, необходимо:

1. Найти начальные условия:  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ .
2. Вычислить остальные коэффициенты по рекуррентным формулам.
3. Вычислить все значения  $u_n$ .

В  $(N - 1)$ -ой точке будет иметь место система уравнений:

$$\begin{cases} B_{N-1}u_{N-2} + C_{N-1}u_{N-1} = \varphi_{N-1} \\ u_{N-2} = \alpha_{N-1}u_{N-1} + \beta_{N-1} \end{cases}$$

После, решая систему и найдя значения:  $u_{N-2}$  и  $u_{N-1}$ , находим остальные значения аналогично.

Для осуществления данного алгоритма необходимо  $8N + O(1)$  операций.

Если же коэффициенты на матрице постоянны, то необходимо  $6N + O(1)$  операций.

### Метод пристрелки

Заметим, что если  $u_1$  известно, то остальные значения вычисляются рекуррентно.

Зададим  $u_1^{(1)}$  и вычислим  $\bar{u}^{(1)}$ :

$$u_1^{(1)} \rightarrow \bar{u}^{(1)}$$

При этом выполняются все уравнения кроме последнего. Аналогично можно сделать и для  $u_1^{(2)}$ :

$$u_1^{(2)} \rightarrow \bar{u}^{(2)}$$

Возьмём линейную комбинацию этих векторов:

$$\bar{u} = \alpha \bar{u}^{(1)} + (1 - \alpha) \bar{u}^{(2)}$$

где  $\alpha$  — неизвестный параметр.

Полученный вектор будет также удовлетворять всем уравнениям, кроме последнего (по построению). Выпишем последнее уравнение:

$$\alpha C_{N-1} u_{N-1}^{(1)} + (1 - \alpha) C_{N-1} u_{N-1}^{(2)} + B_{N-1} (\alpha u_{N-2}^{(1)} + (1 - \alpha) u_{N-2}^{(2)}) = \varphi_{N-1}$$

Неизвестное в данном уравнении только одно —  $\alpha$ .

Данный метод аналогичен методу прогонки, однако метод прогонки более устойчив.

Если  $u_0 = a$ , то можно взять

$$u_1^{(1)} = a$$

$$u_1^{(2)} = a + h$$

Обычно данный метод используется для решения нелинейных задач, в отличие от предыдущего метода.

### Повышение порядка аппроксимации

Данная схема

$$\begin{cases} -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + p_n u_n = f_n \\ n = \overline{1, N-1}; \quad h = 1/N \\ u_0 = a; \quad u_N = b \end{cases}$$

имела порядок аппроксимации -  $O(h^2)$ . Зададимся вопросом: как сделать порядок аппроксимации выше?

Введём обозначение:  $[u]$  – сужение решения дифференциальной задачи на сетку.

Пусть

$$nh = x$$

$$n = \overline{1, N-1}$$

Тогда

$$-\frac{[u](x+h) - 2[u](x) + [u](x-h))}{h^2} + p(x)[u](x) - f(x) = -\frac{h^4}{12} u^{(4)}(x) + O(h^4)$$

Найдём четвертую производную из (1):

$$u^{(4)} = (pu - f)''$$

$$\begin{aligned} & -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + p_n u_n + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{p_{n+1} u_{n+1} - 2p_n u_n + p_{n-1} u_{n-1}}{h^2} \right] = \\ & = f_n + \frac{1}{12} (f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) \end{aligned}$$

Данная схема будет иметь четвертый порядок аппроксимации.

### Задача с краевыми условиями 3 типа

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u = f \\ u'(0) + \gamma u(1) = a, u(1) = b \end{cases}$$

В данном случае есть проблема с аппроксимацией краевого условия. Порядок его аппроксимации –  $O(h)$ .

Аппроксимируем производную по трём точкам:

$$\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} + \gamma u_0 = a$$

Тогда структура матрицы изменится: нарушится трёхдиагональность системы. Для разрешения этого используется специальный приём.

Выпишем аппроксимацию по двум точкам:

$$\frac{u_1 - u_0}{2h} + \gamma u_0 = a$$

$$\frac{u(h) - u(0)}{2h} + \gamma u_0 - a = \frac{h}{2} u''(0) + O(h^2)$$

$$u''(0) = p(0)u(0) - f(0)$$

Тогда аппроксимация будет иметь следующий вид:

$$\frac{u_1 - u_0}{h} + \gamma u_0 - \frac{h}{2}(p_0 u_0 - f_0) = 0$$

### Обобщённое решение

Будем считать, что

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u = f \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

Пусть есть гладкая функция  $u(x)$ :

$$u(0) = 0$$

Следовательно,

$$u(x) = \int_0^x u'(\xi) d\xi$$

Возьмём модуль от обеих частей и оценим правую часть:

$$|u(x)| = \left| \int_0^x u'(\xi) d\xi \right|$$

$$\left| \int_0^x u'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^1 |u'| d\xi$$

$$\int_0^1 |u'| d\xi \leq \left( \int_0^1 (u')^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left( \int_0^1 (u')^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \|u'\|_{L_2}$$

$$|u(x)| \leq \|u'\|_{L_2}$$

$$\|u'\|_{C[0,1]} \leq \|u'\|_{L_2}$$

Введём пространство функций:

$$H_0^1 = \{v: v(0) = v(1) = 0 \text{ \& } \|u\|_1 = \|u'\|_{L_2}\}$$

Откуда следует:

$$H_0^1 \subset C[0,1] \text{ \& } \|u\|_C \leq \|u'\|_{L_2}$$

Умножим (1) на произвольную  $v \in H_0^1$ :

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + puv) dx = \int_0^1 f v dx \quad (3)$$

Полученное выражение – интегральное тождество,  $a \in H_0^1$  – слабое решение.

Предположим, что  $p$  – ограниченная неотрицательная функция. В этом случае справедливы неравенства:

$$a(u, v) \geq \|v\|_1^2$$

$$a(u, v) \leq \|v\|_1^2 + \max p \|v\|_1^2$$

$$\|v\|_1^2 + \max p \|v\|_1^2 = (1 + \max p) \|v\|_1^2$$

Получаем неравенство:

$$C_1 \|v\|_1^2 \leq a(u, v) \leq C_2 \|v\|_1^2$$

При такой оценке  $a(u, v)$  – коэрцитивная билинейная форма.

Таким образом, мы доказали, что в нашем случае мы приходим к билинейной коэрцитивной форме.

Докажем теорему существования и единственности обобщённого решения нашей задачи:

### Теорема существования и единственности обобщённого решения

Пусть имеется линейный ограниченный функционал  $l(u)$ . То есть,

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v)$$

$$|l| \leq C \|v\|_H$$

Теперь сформулируем теорему:

Пусть  $f$  такая, что  $(f, v)$  – ограниченный функционал то  $v \in H_0^1$ , следовательно обобщённое решение (1) существует и единственно.

Доказательство:

Введём в  $H_0^1$  скалярное произведение:



$$[u, v] \equiv a(u, v)$$

Тогда из (3):

$$a(u, v) = (f, v)$$

По теореме Риса:

$$\exists v \in H_0^1: (f, v) = [u, v] = a(u, v)$$

Теорема доказана.

## Лекция 8

### Формула суммирования по частям

На прошлой лекции была подробно разобрана задача с краевыми условиями:

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u = f \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Разностная схема для решения (1):

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + p_i u_i = f_i \\ i = 1, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Введём обозначение:

$$u_{\bar{x},i} \equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

$$u_{x,i} \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

Заметим, что

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

В дальнейшем индекс  $i$  будем опускать.

Введём скалярное произведение:

$$(u, v) \equiv \sum_{i=1}^{N-1} h u_i v_i$$

$$(u, v] \equiv \sum_{i=1}^N h u_i v_i$$

Имеет место следующая формула (суммирования по частям):

$$(u_x, v) = -(u, v_{\bar{x}}] + u_N v_N - u_1 v_0$$

Проверим её. Левая часть выражения:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (u_{i+1} - u_i) v_i = \sum_{i=1}^{N-1} u_{i+1} v_i - \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i$$

Правая часть выражения:

$$-\sum_{j=1}^N u_j v_j + \sum_{j=1}^N u_j v_{j-1} + u_N v_N - u_1 v_0$$

Сделаем замену  $j = i + 1$  для правой части:

$$-\sum_{j=1}^{N-1} u_j v_j + \sum_{j=2}^N u_j v_{j-1} = -\sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i + \sum_{i=1}^{N-1} u_{i+1} v_i$$

Формула доказана.

### Сеточный аналог теоремы вложения

Запишем (2) следующим образом (индексы опускаем):

$$\begin{cases} -u_{\bar{x}\bar{x}} + pu = f \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Скалярно умножим (3) на  $u$ :

$$(-u_{\bar{x}\bar{x}}, u) + (pu, u) = (f, u) \quad (4)$$

Преобразуем первое слагаемое, используя формулу суммирования по частям:

$$(u_{\bar{x}}, u_{\bar{x}}] + (pu, u) = (f, u)$$

Имеет место следующая формула:

$$u_i = \sum_{j=1}^i hu_{\bar{x},j}$$

Откуда

$$|u_i| \leq \sum_{j=1}^i h|u_{\bar{x},j}|$$

$$\sum_{j=1}^i h|u_{\bar{x},j}| \leq \sum_{j=1}^N h|u_{\bar{x},j}|$$

$$\sum_{j=1}^N h|u_{\bar{x},j}| \leq \left( \sum_{j=1}^N h \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^N hu_{\bar{x},j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Тогда, по определению:

$$\|u\|_1 = \left( \sum_{j=1}^N hu_{\bar{x},j}^2 \right)^{1/2}$$

Получаем оценку:

$$\|u\|_{C^h} \leq \|u\|_1$$

Возвращаясь к выражению, получим:

$$\|u\|_1^2 \leq (f, u) \leq \|u\|_{C^h}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} h|f_j| \leq \|u\|_1 \|f\|$$

Мы доказали, что имеет место следующая оценка:

$$\|u\|_1 \leq \|f\| \quad (5)$$

Оценим сходимость метода:

$$v = [u] - u^h$$

$$\begin{cases} -u_{\bar{x}\bar{x}} + pu = r = O(h^2) \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

Откуда:

$$\|u\|_1 \leq \|r\| \leq O(h^2)$$

## Метод конечных элементов

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Введём пространство Соболева:

$$H_0^1 = \left\{ v: \int_0^1 (v')^2 dx < \infty \text{ \& } v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

Обобщённым решением (1) является  $u$  такая что:

$$u \in H_0^1 \quad \& \quad \forall v \in H_0^1: (u', v') + (u, v) = (f, v) \quad (2)$$

Для таких задач используется проекционный метод.

Возьмём последовательность исчерпывающих подпространств  $V_n \subset H_0^1$ .

Приближенным решением задачи является:

$$u^h \in V: ((u^h)', v') + (u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (3)$$

Зададимся вопросом о выборе последовательности подпространств. Для этого, разобьём  $[0,1]$  на  $N$  частей с шагом  $h = \frac{1}{N}$ . Тогда,

$$V = \{v(x): v(x) \text{ — линейна на } [ih, (i+1)h], \quad v \text{ — непрерывна на } [0,1], \quad v(0) = v(1) = 0\}$$

Введём базис в подпространстве:

$$v_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{в } jh \\ 0, & \text{в } ih, i \neq j \end{cases}$$

Перепишем (3) следующим образом:

$$a(u^h, v) \equiv ((u^h)', v') + (u^h, v) = (f, v)$$

Эквивалентная форма записи:

$$a(u^h, v_j) = (f, v_j) \quad (4)$$

$$j = \overline{1, N-1}$$

Разложим  $u^h$  по базису:

$$u^h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i(x)$$

Подставим данное представление в (4), учитывая линейность билинейной формы:

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i a(v_i, v_j) = (f, v_j) \quad (5)$$

$$j = \overline{1, N-1}$$

Выражение (5) является СЛАУ. Заметим, что в (5) можно изменить пределы суммирования:

$$\sum_{i=j-1}^{j+1} u_i a(v_i, v_j) = (f, v_j)$$

$$j = \overline{1, N-1}$$

## Коэффициенты матрицы жёсткости

$a(v_i, v_j)$  — коэффициенты матрицы жёсткости. Вычислим их:

$$a(v_j, v_j) = \int_{(j-1)h}^{(j+1)h} [(v'_j)^2 + (v_j)^2] dx$$

$$\int_{(j-1)h}^{(j+1)h} [(v'_j)^2 + (v_j)^2] dx = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3}$$

$$a(v_{j-1}, v_j) = \int_{(j-1)h}^{jh} [v'_{j-1}v'_j + v_{j-1}v_j] dx$$

Воспользуемся тем, что

$$\int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right) \frac{x}{h} dx = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$$

Тогда,

$$a(v_{j-1}, v_j) = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

Разделим соотношение на  $h$ :

$$\frac{2}{h^2} u_j - \frac{1}{h^2} u_{j-1} - \frac{1}{h^2} u_{j+1} + \frac{2}{3} u_j + \frac{1}{6} u_{j-1} + \frac{1}{6} u_{j+1} = \frac{(f, u_j)}{h}$$

$$j = \overline{1, N-1}$$

Однако, мы уже отмечали, что:

$$\frac{2}{h^2} u_j - \frac{1}{h^2} u_{j-1} - \frac{1}{h^2} u_{j+1} = -u_{\bar{x}x}$$

### Оценка погрешности

Обобщённое решение дифференциальной задачи удовлетворяет соотношению:

$$\forall v \in H_0^1: a(u, v) = (f, v)$$

Приближенное решение удовлетворяет соотношению:

$$\forall v \in V \subset H_0^1: a(u^h, v) = (f, v)$$

Возьмём в первом соотношении  $v \in V$  и вычтем одно соотношение из другого:

$$\forall v \in V \quad a(u - u^h, v) = 0$$

Имеем:

$$\forall v \in V \quad a(u - u^h, u - u^h) = a(u - u^h, u - v)$$

Введём обозначение для погрешности:

$$u - u^h = r$$

Получаем:

$$\int_0^1 [(r')^2 + r^2] dx = \int_0^1 [r'(u - v)' + r(u - v)] dx$$

$$\int_0^1 [r'(u - v)' + r(u - v)] dx \leq \|r'\| \|u - v\|_1 + \|r\| \|u - v\|$$

Так как это верно  $\forall v \in V$ :

$$\|r'\| \|u - v\|_1 + \|r\| \|u - v\| \leq \inf_{v \in V} [\|r'\| \|u - v\|_1 + \|r\| \|u - v\|]$$

$$\inf_{v \in V} [\|r'\| \|u - v\|_1 + \|r\| \|u - v\|] \leq 2 \inf_{v \in V} \|r\|_1 \|u - v\|_1$$

Получаем оценку:

$$\|r\|_1 \leq 2 \inf_{v \in V} \|u - v\|_1$$

$$2 \inf_{v \in V} \|u - v\|_1 \leq 2 \|u - \hat{u}\|_1$$

$$\|r\|_1 \leq 2 \|u - \hat{u}\|_1$$

Где

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x = jh \\ \hat{u} - \text{линейна } \forall [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Пусть

$$w = u - \hat{u}$$

Имеем

$$\int_0^h [w'(x)]^2 dx = \int_0^h \left[ w'(x) - \frac{1}{h} \int_0^h w'(\xi) d\xi \right]^2 dx$$

$$\int_0^h \left[ w'(x) - \frac{1}{h} \int_0^h w'(\xi) d\xi \right]^2 dx = \int_0^h \left[ \frac{1}{h} \int_0^h (w'(x) - w'(\xi)) d\xi \right]^2 dx$$

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{h} \int_0^h (w'(x) - w'(\xi)) d\xi \right]^2 dx = \int_0^h \left[ \frac{1}{h} \int_0^h \left( \int_{\xi}^x w''(\zeta) d\zeta \right) d\xi \right]^2 dx$$

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{h} \int_0^h \left( \int_{\xi}^x w''(\zeta) d\zeta \right) d\xi \right]^2 dx \leq \int_0^h \left[ \frac{1}{h} \int_0^h \left( \int_0^h |w''| d\zeta \right) d\xi \right]^2 dx$$

Учтём, что

$$\int_0^h |w''| d\zeta = \sqrt{h} \|w''\|$$

Тогда

$$\int_0^h [w'(x)]^2 dx \leq h^2 \|w''\|_{L_2[0,h]}^2$$

Так как интеграл аддитивен, получим окончательную оценку:

$$\|r\|_1 \leq h \|u''\|_{L_2}$$



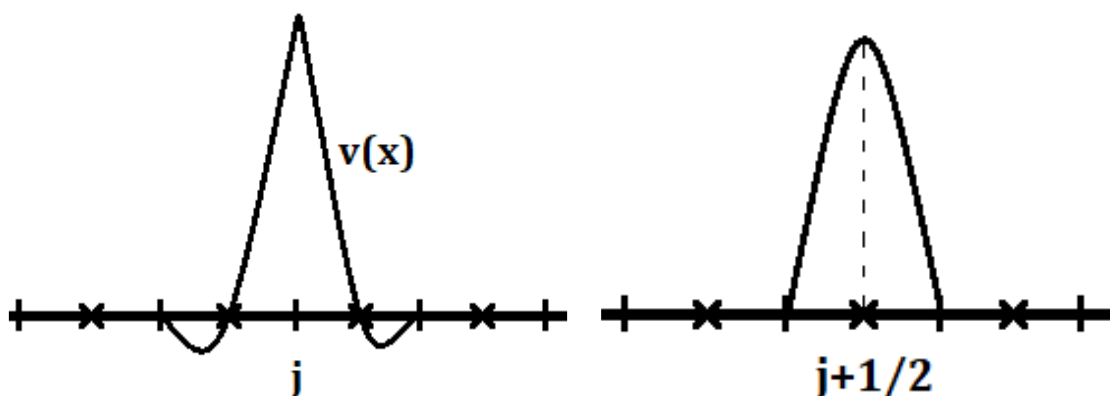
## Лекция 9

### Метод Галеркина для полинома второй степени

Введём подпространство

$$V_h = \{v(x): v(1) = 0 \wedge v \text{ — непрерывно } \& v \text{ — многочлен второй степени } \forall [x_i, x_{i+1}]\}$$

Введём промежуточные узлы, то есть в середине каждого отрезка поставим еще один узел (обозначим его крестиком). Тогда многочлен второй степени можно построить по трём точкам (две точки — узлы сетки, третья точка — промежуточный узел, середина отрезка). Тогда базисные функции будут устроены так:



### Матрица жёсткости

Выпишем интегральное тождество и получим матрицу жесткости.

$$\sum_i u_i a(v_i, v_j) = (f_j v_j)$$

Посмотрим, как устроена  $i$ -я строка матрицы, если индекс  $i$  — целый.

$$a(v_i, v_i) = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} [(v'_i)^2 + p v_i^2] dx$$

$$a(v_{i+1/2}, v_i) \neq 0$$

$$a(v_{i+1}, v_i) \neq 0$$

У нас получится строка матрицы, в которой пять элементов отличны от нуля:

$$(0 \cdot * \cdot * \cdot 0 \dots 0)$$

Посмотрим, как будет выглядеть соседняя строка.

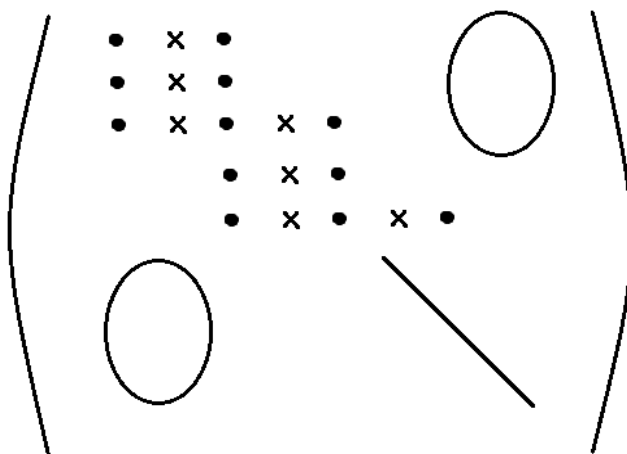
$$a(v_{j+1/2}, v_{j+1/2}) \neq 0$$

$$a(v_{j+1}, v_{j+1/2}) \neq 0$$

Получится строка матрицы, в которой три элемента отличны от нуля:

$$(0 \quad \dots \quad 0 \quad \cdot \quad * \quad \cdot \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

Матрица системы будет нерегулярной. Матрица жёсткости системы будет иметь следующий вид:



Из первого уравнения вычитаем второе, умноженное на соответствующий коэффициент таким образом, чтобы на позиции, которая соответствует промежуточному узлу (на месте «крестика»), стоял ноль. Из третьей строки вычитаем вторую строку, умноженную на соответствующий коэффициент, опять же, чтобы на позиции, соответствующей промежуточному узлу, стоял ноль. И так далее пока на месте всех позиций, которые соответствуют промежуточному узлу, должны стоять ноли. В итоге получается трёх диагональная матрица.

Проводя такие же рассуждения, как на предыдущей лекции, можно получить оценку:

$$\|u^h - u\|_1 \leq Ch^2$$

### Оценка погрешности

Выведем оценку погрешности для случая, когда решение приближённой задачи является линейной функцией на каждом элементарном отрезке.

Точное и обобщённое решение задачи удовлетворяет уравнениям:

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

$$a(u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h \subset V$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$a(u - u^h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$$

$$\|u - u^h\|_1^2 = w$$

$$w = \int_0^1 (w'(x))^2 dx$$

$$\int_0^1 (w'(x))^2 dx \leq a(w, w)$$

$$a(w, w) = \int_0^1 [(w')^2 + w^2] dx + \gamma w^2(0)$$

$$\int_0^1 [(w')^2 + w^2] dx + \gamma w^2(0) = a(u - u^h, u - u^h)$$

$$a(u - u^h, u - u^h) = a(u - u^h, u - v) \quad \forall v \in V_h$$

Дадим оценку сверху:

$$a(u - u^h, u - v) \leq \int_0^1 \{|w'(u - v)'| + |w(u - v)|\} dx + \gamma |w(0)| |u(0) - v(0)|$$

Введём обозначение:

$$u - v = q$$

$$\int_0^1 \{|w'(u - v)'| + |w(u - v)|\} dx + \gamma |w(0)| |u(0) - v(0)| \leq$$

$$\leq (1 + \|p\|_c) \|w\|_1 \|q\|_1 + \gamma \|w\|_1 \|q\|_1$$

$$(1 + \|p\|_c) \|w\|_1 \|q\|_1 + \gamma \|w\|_1 \|q\|_1 = (1 + \|p\|_c + \gamma) \|w\|_1 \|u - v\|_1 \quad \forall v \in V_h$$

Введём обозначения:

$$C_1 = (1 + \|p\|_c + \gamma)$$

Мы доказали, что имеет место оценка:

$$\|w\|_1 \leq C_1 \|u - v\|_1 \quad \forall v \in V_h$$

Возьмём в качестве  $v$  элемент наивысшего приближения. Получим оценку:

$$\|w\|_1 \leq C_1 \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_1$$

$$C_1 \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_1 \leq C_1 \|u - \hat{v}\|_1$$

где  $\hat{v}(x) \in V_h$  &  $\hat{v}(x_j) = u(x_j)$

Введём обозначения:

$$u - \hat{v} = r(x)$$

$$\int_0^h (r'(x))^2 dx = \int_0^h \left[ r'(x) - \frac{1}{h} \int_0^h r'(\xi) d\xi \right]^2 dx$$

$$\int_0^h r'(\xi) d\xi = 0$$

$$\int_0^h \left[ r'(x) - \frac{1}{h} \int_0^h r'(\xi) d\xi \right]^2 dx = \int_0^h \left[ \frac{1}{h} \int_0^h (r'(x) - r'(\xi)) d\xi \right]^2 dx$$

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{h_0} \int_0^h (r'(x) - r'(\xi)) d\xi \right]^2 dx = \int_0^h \left[ \frac{1}{h_0} \int_0^h \left( \int_{\xi}^x r''(\zeta) d\zeta \right) d\xi \right]^2 dx$$

Оценим это сверху.

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{h_0} \int_0^h \left( \int_{\xi}^x r''(\zeta) d\zeta \right) d\xi \right]^2 dx \leq \int_0^h \left[ \frac{1}{h_0} \int_0^h \left( \int_0^h r''(\zeta) d\zeta \right) d\xi \right]^2 dx$$

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{h_0} \int_0^h \left( \int_0^h r''(\zeta) d\zeta \right) d\xi \right]^2 dx \leq h \|r''\|_{L_2[0,h]}^2$$

$$h \|r''\|_{L_2[0,h]} = h^2 (\|u''\|_{L_2[0,h]})^2$$

Окончательная оценка будет иметь вид:

$$\|u^h - u\|_1 \leq h \|u''\|_{L_2[0,h]}$$

## Аппроксимация уравнения теплопроводности

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} -(k(x)u)' = f \\ + \text{краевые условия} \end{cases}$$

Как правильно аппроксимировать оператор  $-(k(x)u)'$  ?

Возьмём сетку с шагом  $h = \frac{1}{N}$ .

Аппроксимация теплового потока:

$$-\frac{\left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)}{h} = f_i$$

## Лекция 10

### Решение уравнения в частных производных

Рассмотрим модельную задачу:

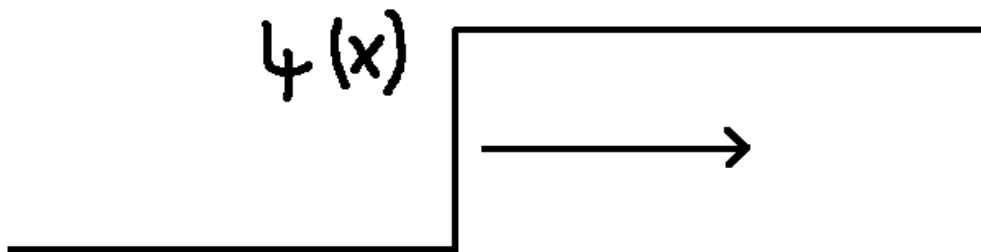
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ a > 0, \quad u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1)$$

Решение этого уравнения выписывается в явном виде:

$$u(x, t) = \psi(x - at)$$

Данное решение справедливо для гладкой функции. Однако, можно рассматривать это как обобщённое решение, даже в том случае, когда  $\psi$  – разрывная.

Допустим, что  $\psi$  – разрывная и имеет такой вид (уравнение плоской волны, движущейся вправо со скоростью  $a$ ):



Разобьём плоскость сеткой по пространству с шагами  $h$  и  $\tau$ :

$$h = \frac{1}{M},$$

где  $M$  – количество точек

$$\tau = \frac{T}{N}$$

Множество точек (узлов сетки) введём так:

$$(m, n) \equiv (mh, n\tau)$$

Приближенное решение в точке  $(m, n)$  –  $u_m^n$

Напишем аппроксимацию выражения (1):

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0$$

В аппроксимации участвуют три узла. Множество всех таких узлов будем называть шаблоном:

$$(m, n), (m + 1, n), (m, n + 1) \quad (2)$$

Однако, можно было взять и другой шаблон, например:

$$(m - 1, n), (m, n), (m, n + 1) \quad (3)$$

Тогда, аппроксимирующее выражение с учётом (3) имеет вид:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

Очевидно, что обе схемы аппроксимирует с порядком  $-O(\tau + h)$ . Рассматривая краевые задачи, мы старались добиться аппроксимации с порядком  $-O(h^2)$ . Этого же можно добиться и здесь. Рассмотрим следующий шаблон:

$$(m - 1, n), (m + 1, n), (m, n + 1)$$

Тогда, соответствующая аппроксимация имеет вид:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что данная схема имеет порядок аппроксимации  $-O(\tau + h^2)$ .

Наилучшая из разностных схем будет та, которая будет правильно отражать решение дифференциальной задачи. Изначально, мы договорились, что решение уравнения переноса (1) допускает разрывные функции, поэтому априорных оценок придумать не удаётся. Найдём критерии, которые отражают устойчивость разностной схемы.

### Спектральная устойчивость

Введём понятие спектральной устойчивости. Заметим, что если  $\psi(x)$  из (1) является гармоникой:

$$\psi(x) = \sin(\alpha k x)$$

Тогда решение всегда будет ограничено единицей.

Потребуем и от нашей разностной схемы ограниченность (не обязательно единицей). Тогда, можно ввести определение спектральной устойчивости.

Пусть решение разностной схемы ищется в виде:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi},$$

где  $\varphi$  – произвольное число. Будем говорить, что разностная схема спектрально устойчива, при законе  $h, \tau$  стремящихся к нулю –  $g(h, \tau) = \text{const}$ , если

$$\max_{\varphi} |\lambda(\varphi)| \leq 1 + c\tau,$$

где  $c$  – не зависит от  $h$  и  $\tau$ .

За  $N$  шагов:

$$|u_m^N| \leq (1 + c\tau)^{\frac{T}{\tau}} \leq e^{cT}$$

Исследуем введённые схемы на спектральную устойчивость.

### Исследование схем на спектральную устойчивость

Рассмотрим схему (2). Ищем решение в виде:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

Тогда имеем при подстановки в разностную схему:

$$\lambda - 1 + \frac{\alpha\tau}{h}(e^{i\varphi} - 1) = 0$$

Пусть

$$\kappa \equiv \frac{\alpha\tau}{h}$$

Тогда

$$\lambda(\varphi) = 1 + \kappa - \kappa e^{i\varphi}$$

Найдём максимум  $|\lambda(\varphi)|$ :

$$\varphi = \pi \Rightarrow \lambda(\pi) = 1 + 2\kappa = 1 + 2\frac{\alpha\tau}{h} \leq 1 + c\tau$$

Откуда

$$2\frac{\alpha}{h} \leq c$$

Противоречие, так как  $c$  – не зависит от  $h$  и  $\tau$ . Следовательно, схема (2) спектрально не устойчива.

Исследуем схему (3) на спектральную устойчивость. Подставим в разностную схему:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

Получим:

$$\lambda - 1 + \kappa(1 - e^{i\varphi}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\varphi) = 1 - \kappa + \kappa e^{i\varphi}$$

Найдём максимум  $|\lambda(\varphi)|$ :

$$|1 + 2\kappa| \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - 2\kappa \geq -1$$



$$\Rightarrow \kappa = \frac{\alpha\tau}{h} = \text{const} \leq 1$$

Значит, схема спектрально устойчива при

$$\frac{\alpha\tau}{h} = \text{const} \leq 1$$

Исследуем схему (4) на спектральную устойчивость. Подставим в разностную схему:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

Получим:

$$\lambda - 1 + \kappa \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = 0$$

Учтём, что

$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = i \sin \varphi$$

Получим:

$$\lambda(\varphi) = 1 - \kappa i \sin \varphi$$

$$|\lambda|^2 = 1 + \kappa^2 \sin^2 \varphi$$

$$|\lambda_{\max}|^2 = 1 + \kappa^2 = 1 + \frac{\alpha^2\tau}{h^2} \tau \leq (1 + c\tau)^2 \leq 1 + 2c\tau + O(\tau^2)$$

Получим, что (4) спектрально устойчива при следующем законе  $h, \tau$  стремящихся к нулю –  $g(h, \tau)$ :

$$\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$$

Данные условия накладывают сильные ограничения на шаг сетки. Схема не очень хороша из-за данного ограничения. Оказывается, что у схемы есть ещё недостатки, которые мы обсудим далее.

### Неявные схемы

Схемы (2), (3) и (4) заданы явным образом. Рассмотрим неявную схему (3). Вида шаблона будет иметь следующий вид:

$$(m-1, n+1), (m, n), (m, n+1) \quad (3')$$

Соответствующая разностная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = 0$$

Исследуем данную схему. Подставим в неё:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

Получим:

$$\lambda - 1 + \kappa\lambda(1 - e^{-i\varphi}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\varphi) = \frac{1}{1 + \kappa - \kappa e^{-i\varphi}}$$

Видно, что

$$|1 + \kappa - \kappa e^{-i\varphi}| \geq 1$$

$$\Rightarrow |\lambda(\varphi)| \leq 1$$

То есть, разностная схема устойчива для любого закона стремления –  $g(h, \tau)$ .

### Правила аппроксимации

Заметим, что, когда мы аппроксимировали производную в (2) по потоку, то получили, что разностная схема спектрально неустойчива. Однако, когда мы аппроксимировали производную против потока в (3), то получили, что разностная схема спектрально устойчива.

Сформулируем правила:

- Аппроксимация производной должна производиться против потока “upwind”
- Центральная разность влечёт за собой резкое уменьшение шага сетки по времени

Отметим ещё некоторые условия разностных схем.

Рассмотрим уравнение переноса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = \psi(x), \quad u(0, t) = 0 \end{cases}$$

Спектральные функции должны удовлетворять краевому условию. Тогда, ищем решение в виде:

$$u_m^n = \lambda^n (e^{im\varphi} - 1)$$

Также отметим, что разностная схема (4) вызывает осцилляции, однако, при моделировании задачи они отсутствовали. Поэтому, ввели понятие монотонности разностной схемы:

Схема является монотонной, если на  $n$  – ом слое функция монотонна, и разностная схема переводит функцию на  $(n + 1)$  – ый слой, где она также монотонна.

Оказывается, что схема (4) не является монотонной.

Отметим последнее замечание.

Предположим, что мы имеем задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0, t) = 0 \end{cases}$$

Причём,  $a(x)$  меняет знак. Тогда, при  $a(x) > 0$  нужно брать аппроксимацию против потока – назад, при  $a(x) < 0$  нужно брать аппроксимацию против потока – вперёд. Однако, что делать на отрезке, где  $a(x)$  – меняет знак?

Данная задача нетривиальна.

Вывод:

1. Если мы имеем гиперболическое уравнение, то надо аппроксимировать против потока.
2. Производную по пространству нельзя аппроксимировать центральной разностью, так как данная схема не монотонна и возникают существенные ограничения на шаг сетки по времени.

## Лекция 11

### Прямой метод решения системы сеточных уравнений

Система имеет вид:

$$-\Delta^h u^h \equiv -\frac{u_{m+1,n} - 2u_{mn} + u_{m-1,n}}{h^2} - \frac{u_{m,n+1} - 2u_{mn} + u_{m,n-1}}{h^2} = f_{mn}$$

$$1 \leq m, n \leq N - 1$$

$$Nh = 1$$

$$u^h|_{\partial\Omega_h} = 0$$

Не уменьшая общности, можно считать, что на границе — 0. Если мы имеем ненулевые краевые условия, то мы их просто перенесём в правую часть.

Разложим функцию в дискретный ряд Фурье по первой переменной  $m$ :

$$u_{mn} = \sum_{k=1}^{N-1} C_k(n) \sin \pi k(mh) \quad (2)$$

Правую часть тоже разложим в дискретный ряд Фурье. Получим

$$f_{mn} = \sum_{k=1}^{N-1} F_k(n) \sin \pi k(mh) \quad (1)$$

Подставим в разностную схему:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left[ C_k(n) \lambda_k \sin \pi k(mh) - \frac{C_k(n+1) - 2C_k(n) + C_k(n-1)}{h^2} \sin \pi k(mh) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} F_k(n) \sin \pi k(mh)$$

$$\lambda_k = \frac{4 \sin^2 \frac{\pi k}{2}}{h^2}$$

Получаем систему вида

$$C_k(n) \lambda_k - \frac{C_k(n+1) - 2C_k(n) + C_k(n-1)}{h^2} = F_k(n)$$

При  $n = 0$  и  $n = N$  (точки границы) функция  $u_{mn}$  должна обращаться в ноль. Это означает, что

$$C_k(0) = C_k(N) = 0$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} C_k(n)\lambda_k - \frac{C_k(n+1) - 2C_k(n) + C_k(n-1)}{h^2} = F_k(n) \\ C_k(0) = C_k(N) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$k = \overline{1, N-1}$$

### Алгоритм решения задачи:

- 1) Берём правую часть и раскладываем её в дискретный ряд Фурье. То есть находим коэффициенты ряда Фурье. Коэффициенты ряда Фурье находятся по формуле:

$$F_k(n) = \left( \sum_{k=1}^{N-1} h f_{mn} \sin \pi k(mh) \right) / \|\sin \pi k(mh)\|^2$$

$$\|\sin \pi k(mh)\|^2 \equiv \sum_{k=1}^{N-1} h \sin^2 \pi k(mh) = \frac{2}{\pi}$$

$$n = \overline{1, N-1}$$

- 2) Для каждого фиксированного  $n$  мы должны найти коэффициенты разложения в ряд Фурье. Для этого применим алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье. Для этого нам потребуется  $N \ln N$  арифметических операций.
- 3) Для каждого  $k$  мы должны решить систему линейных алгебраических уравнений с нулевыми начальными условиями. Решение этой системы требует  $6N$  операций. Для того, чтобы найти все коэффициенты  $C_k(n)$  нам потребуется  $6N^2$  операций.
- 4) Все коэффициенты  $C_k(n)$ . Из представления (2) надо восстановить функцию. Применяем алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье. Для каждого фиксированного  $n$  мы должны вычислить

$$u_{mn} = \sum_{k=1}^{N-1} C_k(n) \sin \pi k(mh)$$

Это потребует  $N^2 \ln N$  операций.

В итоге получаем  $O(N^2 \ln N)$  — оценку арифметической сложности алгоритма.

### Решение системы уравнений (для произвольного эллиптического оператора)

Задача

$$-\Delta u + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$|\alpha| < 1$$

Эта задача методом Фурье не решается, поскольку присутствует смешанная производная.

Запишем разностную схему для этой задачи:

$$-\Delta^h u_{mn} + \frac{\alpha}{2h^2} [u_{m+1,n+1} - u_{m-1,n+1} + u_{m-1,n-1} - u_{m+1,n-1}] = f_{mn}$$

$$1 \leq m$$

$$n \leq N - 1$$

$$u^h|_{\partial\Omega} = 0$$

Мы получили разностную схему с порядком аппроксимации  $h^2$ .

Сведём эту задачу к предыдущей задаче (для дифференциального случая).

Введём обозначение:

$$L = -\Delta + 2\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$\exists \gamma_1, \gamma_2: -\gamma_1 \Delta \leq L \leq -\gamma_2 \Delta$$

Имеет место неравенство:

$$\gamma_1 \|\nabla v\|^2 \leq (Lv, v) \leq \gamma_2 \|\nabla v\|^2 \quad \forall v \in H_0^1$$

$H_0^1$  — пространство Соболева.

В этом случае оператор  $L$  называется коэрцитивным.

$$(Lv, v) = \|\nabla v\|^2 - 2\alpha \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Дадим оценку сверху:

$$\|\nabla v\|^2 - 2\alpha \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \geq (1 - \alpha) \|\nabla v\|^2$$

В данном случае

$$\gamma_1 = 1 - \alpha$$

$$\gamma_2 = 1 + \alpha$$

Рассмотрим итерационный процесс. Применим метод Ричардсона с оптимальным параметром. В качестве переобуславливателя возьмём оператор  $-\Delta^h$ . Получим

$$B = -\Delta^h$$

$$B \frac{u^{k+1} - u^k}{\tilde{L}} + Au^k = f$$

$$\text{где } A = -\Delta^h u_{mn} + \frac{\alpha}{2h^2} [u_{m+1,n+1} - u_{m-1,n+1} + u_{m-1,n-1} - u_{m+1,n-1}]$$

$\tau = 1$  — оптимальный параметр

Этот метод будет сходиться со скоростью геометрической прогрессии и показатель прогрессии будет равен

$$\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} = \alpha$$

Имеет место такая оценка:

$$\|r^{k+1}\|_B \leq \alpha \|r^k\|_B$$

На каждом шаге нам надо обращать сеточный оператор Лапласа. Это требует  $O(N^2 \ln N)$  количества операций.

Мы хотим получить решение с относительной точностью  $\varepsilon$ . Это означает, что метод требует  $O(N^2 \ln N |\ln \varepsilon|)$  арифметических операций.

Алгоритмы такого сорта, с числом операций, пропорциональным количеству неизвестных, называются экономичными.

## Лекция 12

### Пространственно-краевая задача параболического уравнения с одной пространственной переменной

На отрезке  $[0,1]$  рассмотрим параболическое уравнение:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, & u(x, 0) = u^0(x) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Построим сетку в области, где мы ищем решение. Зададим шаги следующим образом:

$$h = \frac{1}{M}$$

$$\tau = \frac{T}{N}$$

Рассмотрим множество точек:

$$(mh, n\tau) \equiv (m, n)$$

Будем искать приближённое решение в узлах сетки.

Рассмотрим разностную схему, шаблон которой:

$$(m-1, n), (m, n+1), (m+1, n)$$

Разностная схема в точке  $(m, n)$  имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n + 2u_m^n - u_{m-1}^n}{h^2} = f_m^n, & 1 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1 \\ u_0^{n+1} = u_M^{n+1} = 0, & u_m^0 = u^0(m, h) \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что разностная схема является явной. Проверим, является ли эта схема спектрально устойчивой. Положим,

$$f_m^n \equiv 0$$

В качестве начального условия положим:

$$u_m^0 = \sin \pi j(m, h)$$

$$\lambda_j = \frac{4 \sin^2(\pi j h / 2)}{h^2}$$

Тогда, можно выписать в явном виде:

$$u_m^1 = \sin \pi j(m, h) - \lambda_j \tau \sin \pi j(m, h)$$

$$\sin \pi j(m, h) - \lambda_j \tau \sin \pi j(m, h) = (1 - \tau \lambda_j) \sin \pi j(m, h)$$



Для остальных шагов всё аналогично. Решение в явном виде имеет вид:

$$u(x, t) = e^{-\lambda t} \sin \pi j x$$

$$\lambda = \pi^2 j^2$$

Откуда, решение в сеточном случае решение должно не возрастать, то есть:

$$\forall j: 1 - \tau \lambda_j \geq 1$$

Положим  $j = M - 1$ , при этом

$$(M - 1)h \approx 1$$

Откуда:

$$\tau \frac{4}{h^2} \leq 2$$

### Необходимое и достаточное условие разностной схемы

Получаем необходимое условие устойчивости разностной схемы:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}$$

Оказывается, это условие не только необходимое, но и достаточное. Докажем это.

Выберем норму пространства  $C$ . Введём обозначение:

$$\frac{\tau}{h^2} \equiv \rho$$

Получим:

$$u_m^{n+1} = (1 - 2\rho)u_m^n + \rho u_{m+1}^n + \rho u_{m-1}^n + \tau f_m^n$$

Пусть точка в левой части выражения та, на которой достигается максимум модуля решения сеточной задачи на  $(n + 1)$ -ом слое. Введём норму по определению:

$$\|u^{n+1}\| \equiv \max_m |u_m^{n+1}|$$

Считаем, что  $1 - 2\rho \geq 0$ , и подставим в выражение выше нормы, тогда:

$$\|u^{n+1}\| \equiv \max_m |u_m^{n+1}|$$

$$\max_m |u_m^{n+1}| \leq \|u^n\| + \tau \|f^n\|$$

Из последнего неравенства следует теорема:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N} \|u^n\| \leq \|u^0\| + \sum_{j=0}^N \tau \|f^j\|$$

### Полностью неявная разностная схема

Рассмотрим шаблон:

$$(m-1, n+1), (m, n+1), (m+1, n+1)$$

Разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^{n+1} + 2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = f_m^n, & 1 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1 \\ u_0^{n+1} = u_M^{n+1} = 0, & u_m^0 = u^0(m, h) \end{cases} \quad (2')$$

При применении оператора получим:

$$u_m^1 = (1 + \tau \lambda_j) \sin \pi j(m, h)$$

Откуда

$$u_m^n = \frac{1}{(1 + \tau \lambda_j)^n} \sin \pi j(m, h)$$

Нетрудно увидеть, что

$$\forall h, \tau: \frac{1}{(1 + \tau \lambda_j)^n} < 1$$

Получаем, что полностью неявная разностная схема (2') безусловно спектрально устойчива.

Также, имеем соотношение:

$$(1 + 2\rho)u_m^{n+1} - \rho u_{m+1}^{n+1} - \rho u_{m-1}^{n+1} = u_m^n + \tau f_m^n$$

Выберем точку  $(m, n+1)$  где достигается максимум модуля. Получаем оценку:

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| + \tau \|f^n\|$$

Разностная схема (2') безусловно устойчива.

Очевидно, что (2) и (2') имеют порядок аппроксимации  $O(\tau + h^2)$

### Построение разностной схемы с вторым порядком аппроксимации

В качестве шаблона рассмотрим шесть точек:

$$(m-1, n), (m, n), (m+1, n)$$

$(m - 1, n + 1), (m, n + 1), (m + 1, n + 1)$

Соответствующая разностная схема в точке  $(m, n)$  имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h^2} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n - u_{m-1}^n}{2h^2} = f_m^{n+1/2}, & 1 \leq m \leq M - 1, 0 \leq n \leq N - 1 \\ u_0^{n+1} = u_M^{n+1} = 0, & u_m^0 = u^0(m, h) \end{cases}$$

Очевидно, что данная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации. Данная схема Кранка-Николсона является наиболее популярной. Проверим спектральную устойчивость:

$$u_m^n = \sin \pi j(m, h)$$

$$\Rightarrow u_m^{n+1} = \frac{1 - \frac{\tau}{2} \lambda_j}{1 + \frac{\tau}{2} \lambda_j} \sin \pi j(m, h)$$

$$u_m^n = \left( \frac{1 - \frac{\tau}{2} \lambda_j}{1 + \frac{\tau}{2} \lambda_j} \right)^n \sin \pi j(m, h)$$

Следовательно разностная схема безусловно спектрально устойчива.

Можно доказать и априорную устойчивость.

### Оценка устойчивости схемы Кранка-Николсона

Введём обозначения:

$$u_m^n = u, u_m^{n+1} = \hat{u}, \frac{\hat{u} - u}{\tau} = u_t$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2}$$

Разностная схема имеет вид:

$$u_t - \frac{1}{2}(\hat{u}_{\bar{x}x} + u_{\bar{x}x}) = f$$

Введём скалярное произведение на слое:

$$(u, w) \equiv \sum_{i=1}^{M-1} h u_i w_i$$

Умножим скалярно разностную схему на  $2\tau(\hat{u} + u)$ :

$$2\|\hat{u}\|^2 - 2\|u\|^2 + \tau\|(\hat{u} + u)_x\|^2 = 2\tau(f, \hat{u} + u)$$

$$2\tau(f, \hat{u} + u) \leq 2\tau\|f\|\|\hat{u} + u\|$$

$$2\tau\|f\|\|\hat{u} + u\| \leq 2\tau\|f\|\|(\hat{u} + u)_x\|$$

$$2\tau\|f\|\|(\hat{u} + u)_x\| \leq \tau\|f\|^2 + \tau\|(\hat{u} + u)_x\|^2$$

Получим оценку:

$$\|\hat{u}\| \leq \|u\| + \tau\|f\|$$

Просуммируем полученное рекуррентное соотношение:

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|u^n\| \leq \|u^0\| + \sum_{j=0}^{N-1} \tau\|f^j\|$$

Получили оценку устойчивости схемы Кранка-Николсона.

## Лекция 13

### Численные методы для эллиптических уравнений

#### Задача

Пусть у нас есть единичный квадрат.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \alpha \end{cases} \quad (1)$$

Разобьем область сеткой с шагом  $h = \frac{1}{N}$

Точки  $(m, n) \equiv (mh, nh)$  назовём узлами. Те точки, которые попали внутрь области назовем внутренними узлами, а те, которые попали на границу назовём граничными узлами.

Напишем аппроксимацию нашей задачи.

$$-\Delta^h u^h|_{(m,n)} = -\frac{u_{m+1,n} - 2u_{mn} + u_{m-1,n}}{h^2} - \frac{u_{m,n+1} - 2u_{mn} + u_{m,n-1}}{h^2} = f_{mn} \quad (2)$$

$$1 \leq m, n \leq N - 1$$

$$u^h|_{\partial\Omega_h} = \alpha$$

Число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Аппроксимация:

Очевидно, что разностная схема аппроксимирует исходную задачу с порядком  $O(h^2)$ .

Исследуем устойчивость разностной схемы в сеточной норме пространства  $C$ .

Построим сеточный аналог принципа максимума.

Лемма. Пусть  $-\Delta^h v|_{(m,n)} \geq 0$  &  $v|_{\partial\Omega_h} \geq 0$ . Тогда  $v \geq 0$  в  $\Omega_h$ .

Доказательство (от противного):

Предположим, что утверждение леммы неверное. Это означает, что

$$\exists(m, n) = \arg \min v_{mn} \text{ \& } v_{mn} < 0$$

Если таких узлов несколько, то возьмём крайний левый. И в этом узле выписываем разностную схему:

$$-\Delta^h v_{mn} = \frac{(v_{mn} - v_{m+1,n}) + (v_{mn} - v_{m-1,n}) + (v_{mn} - v_{m,n+1}) + (v_{mn} - v_{m,n-1})}{h^2}$$

В нашей точке:

$$(v_{mn} - v_{m+1,n}) \leq 0$$

$$(v_{mn} - v_{m-1,n}) < 0$$

$$(v_{mn} - v_{m,n+1}) \leq 0$$

$$(v_{mn} - v_{m,n-1}) < 0$$

$$\frac{(v_{mn} - v_{m+1,n}) + (v_{mn} - v_{m-1,n}) + (v_{mn} - v_{m,n+1}) + (v_{mn} - v_{m,n-1})}{h^2} < 0$$

Получаем противоречие.

Построим мажоранту.

Рассмотрим функцию

$$v(x, y) = \frac{1}{4} \left( R^2 - \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \|f^h\| + \|\alpha^h\|$$

Где  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$  — радиус области.

$$\|f^h\| \equiv \max_{(m,n) \in \Omega_h} |f_{mn}|$$

$$-\Delta^h v_{mn} = -\Delta v_{mn} = \|f^h\|$$

$$\left( R^2 - \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \geq 0$$

Таким образом

$$v(x, y)|_{\partial\Omega_h} \geq \|\alpha^h\|$$

Рассмотрим две функции:

$$v \pm u^h$$

$$-\Delta^h(v \pm u^h) = \|f^h\| \pm f^h \geq 0$$

На границе:

$$(v \pm u^h)|_{\partial\Omega_h} \geq \|\alpha^h\| \pm \alpha^h \geq 0$$

Таким образом мы находимся в условиях леммы принципа максимума.

$$v \pm u^h \geq 0$$

Следовательно,

$$|u^h| \leq v$$

$$|u_{mn}| \leq v(mh, nh)$$

Найдём максимум  $v$ .

$$v(mh, nh) \leq \frac{1}{8} \|f^h\| + \|\alpha^h\|$$

Получаем оценку для решения разностной схемы:

$$\|U^h\| \equiv \max_{\Omega_h} |u_{m_n}| \leq \frac{1}{8} \|f^h\| + \|\alpha^h\|$$

Таким образом мы доказали устойчивость функции.

Исследуем сходимость функции. Пусть  $u \in C^4(\bar{\Omega})$ , то есть решение имеет непрерывную четвёртую производную в замкнутой области. Тогда погрешность будет удовлетворять уравнениям:

$$w = u - u^h$$

$$-\Delta^h w = -\Delta^h u + \Delta^h u^h$$

$$\Delta^h u^h = -f^h$$

$$-\Delta u = f$$

$$-\Delta^h w = -\Delta^h u + (-f^h) = -\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \Delta u$$

$$-\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \Delta u + O(h^4) = r_{mn} = O(h^2)$$

Функция  $w$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} -\Delta^h w = r = O(h^2) \\ w|_{\partial\Omega_h} = 0 \quad \|w\| \leq \frac{1}{8} \|r\| = O(h^2) \end{cases}$$

Таким образом мы доказали, что решение сеточной задачи сходится к решению дифференциальной задачи со скоростью  $h^2$  при условии, что решение имеет непрерывную четвёртую производную в замкнутой области  $\Omega$ .

Как решать полученную систему сеточных уравнений?

Исключим из рассмотрения граничные условия Дирихле.

Выберем естественную нумерацию компонент вектора неизвестных, а именно будем нумеровать узлы слева направо и снизу вверх. Вектор неизвестных будет иметь вид

$$(u_{11}, u_{21}, \dots, u_{N-1,1}, u_{12}, u_{22}, \dots, u_{N-1,N-1})^T$$

Матрица будет трехдиагональной и ленточной. Ширина ленты —  $N$ . В двухмерном случае размерность вектора неизвестных будет порядка  $N^2$ .

Попробуем решить задачу методом Гаусса. Метод Гаусса требует  $O(N^6)$  арифметических операций, что очень много. Метод Гаусса для ленточной матрицы потребует  $O(N^4)$  арифметических операций. Количество ненулевых элементов при методе Гаусса будет увеличиваться. В трёхмерном случае метод Гаусса для ленточной матрицы требует  $O(N^7)$  арифметических операций.

### Итерационные методы

Нетрудно видеть, что собственные значения оператора  $-\Delta^h$  будут равны

$\lambda_{ij} \equiv \lambda_i + \lambda_j \sim$  собственным значениям  $-\Delta^h$

$$\lambda_i = \frac{4 \sin 2\pi i h / 2}{h^2} \sim \sin \pi i (mh) \sin \pi i (nh)$$

$$\lambda_{min} = \lambda_{11} \approx 2\pi$$

$$\lambda_{max} = \lambda_{N-1, N-1} \approx \frac{8}{h^2}$$

Выпишем итерационный процесс. Начнём с метода Рундсона. Метод Рундсона будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \Delta^h u^k + f^h$$

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

$$\frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} \approx \frac{h^2}{4}$$

Скорость сходимости есть геометрическая прогрессия с показателем

$$\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} = \frac{1 - \frac{1}{4}\pi^2 h^2}{1 + \frac{1}{4}\pi^2 h^2}$$

Эта величина по порядку будет равна

$$1 - \frac{1}{2}\pi^2 h^2 = 1 - ch^2$$

#### Задача

Сколько нужно сделать шагов итерационных процессов по методу Рундсона с оптимальным параметром, чтобы получить решение с относительной точностью  $\varepsilon$ ?



$$\|w^0\|(1 - ch^2)^n \leq \varepsilon \|w^0\|$$

$$(1 - ch^2)^n \leq \varepsilon$$

$$cnh^2 \geq |\ln \varepsilon|$$

$n = O(N^2 \ln \varepsilon)$  — число итераций



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ