МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 1

КОБЕЛЬКОВ
ГЕОРГИЙ МИХАЙЛОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
АСПИРАНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МАСЛАКОВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ

Содержание

Семинар 1

Теория интерполяции

Постановка задачи

Пусть у нас n точек

$$a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

в этих точках заданы значения функции

$$f(x_1),\ f(x_2), ...f(x_n)$$

Требуется построить многочлен

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^{n-1}$$

такой что

$$L_n(x_j) = f(x_j),\ j = 1...n$$

у нас есть n неизвестных и n уравнений, если выписать все эти уравнения, мы получим систему линейных алгебраических уравнений с матрицей, определитель которой является определителем Вандермонда. Так как все x_j различны, то эта система всегда имеет единственное решения для любой функции f. Самый примитивный способ построения многочлена - это решить систему уравнений. Если n невелико ($n \leqslant 3$), то это не сложно, но в общем случае этот метод неэкономичен. Проще строить многочлен следующим способом.

Рассмотрим многочлен $\Phi_j(x)$ - многочлены степени $n-1$ и

$$\Phi_j(x_i) = \delta_i^j$$

можно выписать и в явном виде

$$\Phi_j(x) = \frac{(x-x_1)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)} = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)}$$

Тогда мы можем записать L_n - интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Phi_j(x)$$

Мы выписали явный вид многочлена, который не требует решения системы линейных алгебраических уравнений. В общем случае эта формула может быть выбрана для вычисления интерполяционного многочлена Лагранжа.

Можно использовать другую форму записи (каждый раз у нас один многочлен, могут быть только различные формы записи).

Введем понятие разденной разности. Разделенные разности нулевого порядка:

$$f(x_1), ...f(x_n)$$

Разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i;x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$$

Разделенные разности n-ного порядка:

$$f(x_1;x_2;...x_n)=\frac{f(x_1;...x_{n-1})-f(x_2;...x_n)}{x_1-x_n}$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа можно записать в форме Ньютона с разделенными разностями

$$L_n(x)=f(x_1)+f(x_1;x_2)(x-x_1)+f(x_1;x_2;x_3)(x-x_1)(x-x_2)+...$$

$$+f(x_1;...x_n)(x-x_1)...(x-x_n)$$

Чем эта форма записи более предпочтительна? Если, например добавилась новая точка, то не надо ничего персчитывать, нужно посчитать только одну новую разделенную разность. Эта форма еще удобна тем, что ее можно распространять на случаи, когда у нас есть кратные узлы (то есть когда известно не только значения функции, но и значения производных).

Оценка погрешности

Если мы построили интерполяционный многочлен Лагранжа, то оценка погрешности имеет следующий вид. Будем оценивать погрешность в точке x. Введем функцию

$$f(x)-L_n(x)-\varkappa\omega_n(x)=\phi(x)$$

$$\omega_n(x)=(x-x_1)...(x-x_n)$$

$\varkappa$ - неизвестная постоянная, которую мы выбираем из условия того, что $\phi(x)=0$. Функция $\phi(z)$ имеет $n+1$ корень: $x_1,\ x_2,...x_n,\ x$. Будем считать, что f дифференцируема необходимое нам число раз. ϕ' имеет n корней, $\phi^{(n)}$ имеет один корень, то есть

$$\phi^{(n)}(\xi)=0$$

$$f^{(n)}(\xi)-\varkappa n!=0$$

$$\varkappa=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x),\ \xi=\xi(x)$$

$$\|f-L_n(x)\|_{C[a,b]}\leqslant\frac{\|f^{(n)}\|}{n!}\|\omega_n\|,\ x_1,...x_n\in[a,b]$$

Пример 1. Пусть у нас отрезок $[0,1]$ и рассмотрим функцию $f(x)=e^x$. Разделим отрезок на n равных частей с шагом $h=\frac{1}{n}$, получаем $n+1$ точку интерполяции, тогда оценка будет следующая

$$\|e^x-L_{n+1}\|_{C[0,1]}\leqslant\frac{e}{n!}\max_x|x(x-x_1)...(x-1)|\leqslant\frac{e}{n!}\max_x|x(x-1)|\cdot|(x-x_1)(x-x_{n-1})|...$$

у многочлена второй степени мы легко можем найти максимум, но надо еще проверить концы.

Возьмем $n=5,\ x_1=0,\ x_2=\frac{1}{4},\ x_3=\frac{1}{2},\ x_4=\frac{3}{4},\ x_5=1$

$$|x(x-1)|\leqslant\frac{1}{4}$$

$$\left|\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\right|\leqslant\frac{3}{16}$$

$$\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

$$\|e^x-L_5\|\leqslant\frac{e}{120}\cdot\frac{3}{128}=\frac{e}{5120}$$

Оказывается, что интерполяционный многочлен Лагранжа приближает функцию e^x по пяти точкам с точностью меньше $0,001$.

Эту оценку можно еще уточнить, если брать, например, $\left|x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|$

$$x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

$$3x^2-3x+\frac{1}{2}=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot\frac{3}{2}}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$$

Теперь надо подставить и посчитать, и оценка уточнится.

Обратная задача

У нас задана погрешность, необходимо найти степень интерполяционного многочлена Лагранжа, чтобы он приближал функцию с заданной погрешностью.

Рассмотрим всё на нашем предыдущем примере. На равномерной сетке найдем количество узнов, чтобы погрешность была 0,01, то есть

$$\|f-L_n\|_{C[0,1]}\leqslant 10^{-2}$$

$$f(x)=e^x$$

Попробуем $n=4,\ x_1=0,\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=\frac{2}{3},\ x_4=1$

$$\|r\|\leqslant\frac{e}{24}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left\|\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\right\|\leqslant\frac{e\cdot 2}{24\cdot 4\cdot 9}<\frac{1}{48\cdot 3}<0,01$$

Для того, чтобы закончить задачу, надо проверить $n = 3$, из общих соображений понятно, что по-видимому погрешность будет больше.

При $n = 3$

$$\|r\| \leqslant \frac{e}{n!} \left\| x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \right\| \leqslant \frac{e}{6 \cdot 8} < \frac{1}{16}$$

Ответ: $n = 4$.

Семинар 2

Задача аппроксимации функций

У нас есть формула

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x)$$

из этой формулы получается оценка

$$\|f(x) - L_n\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|}{n!}\|\omega_n\|,\ x_1, ...x_n \in [a,b]$$

причем эта оценка точная, то есть существуют функции, для которых в формуле будет знак равенства, например, многочлен степени n.

Узлы интерполяции мы выбираем сами, поэтому мы можем попытаться уменьшить $\|\omega_n\|$ за счет изменения узлов интерполяции.

Можем поставить задачу следующим образом: требуется найти $x_1, ...x_n \in [a,b]$ такие, что на $x_1, ...x_n$ достигается минимум $\|\omega_n\|$

$$\omega_n = (x - x_1)...(x - x_n) = x^n + ...$$

Коэффициент при старшем члене равен 1, поэтому можем поставить более общую задачу: введем R - множество многочленов вида $x^n + ...$ и мы хотим найти на этом множестве многочлен с минимальной нормой, то есть мы ищем

$$(Q_n \in R) = \arg\min_{P_n \in R} \|P_n\|_{C[a,b]}$$

Эта задача была решена П.Л. Чебышевым и оказывается, что такой многочлен существует и это будет многочлен Чебышева, приведенный к отрезку $[a,b]$, нормированный таким образом, что коэффициент при старшем члене равен 1, то есть

$$(Q_n \in R) = \arg\min_{P_n \in R} \|P_n\|_{C[a,b]} = T_n\left(\frac{2x - (a+b)}{b-a}\right) \cdot 2^{1-2n}(b-a)^n$$

Значит, если в качестве $x_1, ...x_n$ брать корни многочлена $T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) \cdot 2^{1-2n}(b-a)^n$, то $\|\omega_n\|$ будет минимальна и

$$\|\omega_n\| = 2^{1-2n}(b-a)^n$$

Корни этого многочлена:

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2j-1}{2n}\pi$$

То есть в качестве узлов интерполяции мы можем брать эти точки и минимизировать норму ω_n.

В этом случае оценка погрешности выглядит следующим образом

$$\|f - L_n^{\text{ч}}\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|}{n!}2^{1-2n}(b-a)^n$$

Посмотрим, что это дает по сравнению с равномерным распределением узлов. Рассмотрим все тот же пример $f = e^x$ на $[0, 1]$, $n = 5$

$$\|f - L_5^{ч}\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{e}{120} 2^{-9} < \frac{1}{2^{12} \cdot 5 = \frac{1}{20480}}$$

Получилась оценка примерно в 4 раза лучше, чем была при равномерном распределении узлов.

Перейдем к произвольным многочленам. Предположим, что мы проближаем функцию $f(x)$ не интерполяционным многочленом Лагранжа, а каким - то другим многочленом, но мы хотим найти многочлен, который приближает нашу функцию наилучшим образом.

Сформулируем задачу: Найти $Q_n^0(x)$ такую, что

$$Q_N^0(x) = \arg\min_{P_n} \|f - P_n\|_C$$

Если такой многочлен существует, то он называется многочленом наилучшего равномерного приближения.

Есть теорема о том, что если f непрерывна, то многочлен наилучшего равномерного приближения существует и он единственный.

Теорема 1 (Чебышева об альтернансе)**.** Q_n^0 *- многочлен наилучшего равномерного приближения* $\Leftrightarrow$
$\exists\, x_0 < x_1 < ... < x_{n+1} \in [a, b]$ *такие, что выполняются соотношения*

$$f(x_i) - Q_n^0(x_i) = \alpha(-1)^i \|f - Q_n^0\|, \ \alpha = 1 \text{ или } -1.$$

То как ведет себя данная разность изображено на Рис. 1. Точек можем быть

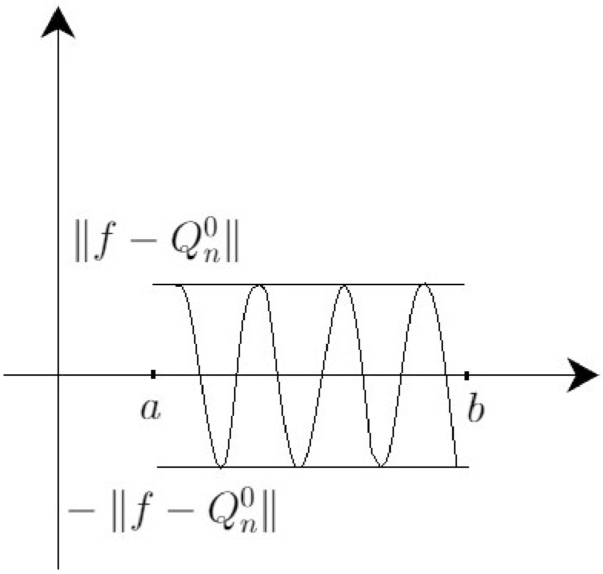

Рис. 1.

больше, но не меньше.

Пример 2. Пусть $f(x) = e^x$ на $[0, 1]$. Найдем многочлен наилучшего равномерного приближения первой степени. Изобразим график функции $f(x)$, соединим $f(0)$ и $f(1)$ хордой и проведем касательную к графику параллельно данной хорде и проведем среднюю линию. (Рис. 2.) Из построения видим, что средняя линия - это

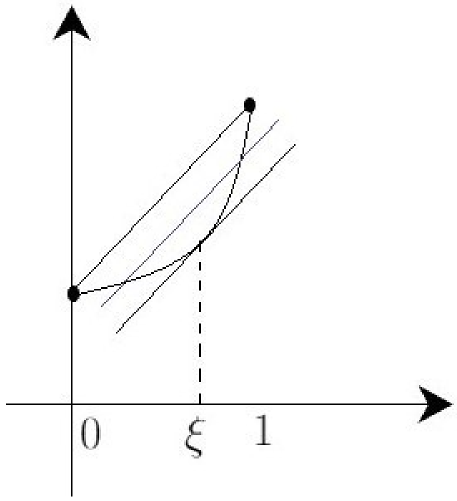

Рис. 2.

многочлен наилучшего равномерного приближения.

Точки альтернанса: 0, ξ, 1.

$$Q_1^0(x) = ax + b$$

$$a = e - 1$$

Условие альтернанса:

$$1 - b = a\xi + b - e^\xi$$

$$a - e^\xi = 0$$

$$e - 1 = e^\xi$$

$$\xi = \ln(e - 1)$$

$$b = \frac{1}{2}(1 - a\xi + e^\xi)$$

Оценка погрешности

Q_n^0 интерполяционный многочлен Лагранжа. Рассмотрим разность $f - Q_n^0$, разность на отрезке $[a, b]$ меняет знак $n + 2$ раза, значит существует $n + 1$ корень, обозначим эти точки $x_1, ...x_{n+1} \in (a, b)$, таким образом

$$f(x_i) = Q_n^0(x_i)$$

значит

$$Q_n^0 = L_{n+1}(x)$$

для интерполяционного многочлена Лагранжа мы уже получили все оценки, таким образом у нас выполнено равенство для погрешности. Возьмем в качестве узлов интерполяции корни многочлена Чебышева. Этот многочлен будет приближать хуже, чем многочлен наилучшего равномерного приближения, но у нас для него есть оценка

$$\|f - Q_n^0\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} 2^{-1-2n}(b-a)^n$$

Оказывается, что мы можем получить ещё и оценку снизу

$$f(x) - Q_n^0(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$|f(x) - Q_n^0(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \geqslant \frac{\min\limits_x |f^{(n)}(x)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

Так как неравенство справедливо для любого $x \in [a, b]$, то выберем точку, где ω_{n+1} принимает свое максимальное значение, пусть это будет точка $\overline{x}$, тогда

$$|f(\overline{x}) - Q_n^0(\overline{x}) \geqslant \frac{\min\limits_x |f^{(n)}(x)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(\overline{x})| = \frac{\min\limits_x |f^{(n)}(x)|}{(n+1)!}\|\omega_{n+1}\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\min\limits_x |f^{(n)}(x)|}{(n+1)!}| \cdot 2^{-1-2n}(b-a)^{n+1}$$

Мы получили оценки и снизу и сверху. Исходя из них, если $n+1$ производная меняется не слишком сильно, то многочлен наилучшего равномерного приближения дает приблизительно такую же оценку, как многочлен узлами интерполяции которого являются корни многочлена Чебышева.

Пример 3. $f(x) = e^x$ на отрезке $[0, 1]$, многочлен наилучшего равномерного приближения степени 4.

$$\|f - Q_4^0\|_{C[0,1]} \leqslant \frac{e}{120} \cdot 2^{-9}$$

$$\|f - Q_4^0\|_{C[0,1]} \geqslant \frac{1}{120} \cdot 2^{-9}$$

Семинар 3

Примеры построения многочленов

Пример 4. Пусть у нас есть отрезок $[-1, 1]$, $f(x) = \cos x$. Построим многочлен наилучшего равномерного приближения нулевой степени.

Нарисуем график, соединим концы дуги хордой, делим расстояние от $\cos 1$ до 1 пополам и проводим прямую. (Рис. 3.)

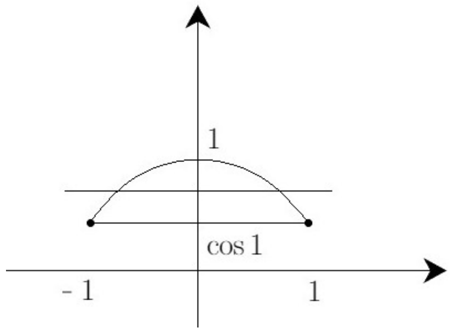

Рис. 3.

Получаем

$$Q_0^0(x) = \frac{1 + \cos 1}{2}$$

Точки альтернанса: -1, 0, 1. По теореме Чебышева у нас должно быть две точки альтернанса, но может быть и больше, в данном случае их 3.

Имеет место следующее свойство: если $f(x)$ четная (нечетная) относительно $\frac{a+b}{2}$, значит $Q_n(x)$ - четная (нечетная) функция относительно $\frac{a+b}{2}$. То есть, если бы мы для cos искали многочлен наилучшего равномерного приближения первого порядка, то он бы совпал с нулевым порядком.

Пример 5. Требуется оценить сверху норму разности, отрезок $[-1, 1]$, $f(x) = \cos x$

$$\| \cos x - Q_2^0(x) \|_{C[-1,1]} \leqslant \frac{\sin 1}{3!} 2^{-2}$$

На самом деле эту оценку можно существенно улучшить. Заметим, что у нас тут стоит Q_2^0, он совпадает с Q_3^0, но оценка будет существенно лучше

$$\| \cos x - Q_2^0 \| \leqslant \frac{\cos 1}{4!} 2^{-3}$$

Пример 6. Выписать Q_2^0 для $f(x) = \cos x$ на $[-1, 1]$.

У нас будет 5 точек альтернанса. Приблизительный вид изображен на Рис. 4.

Так как cos - четная функция

$$Q_2^0(x) = ax^2 + b$$

$$\cos 0 - b = \cos 1 - a - b$$

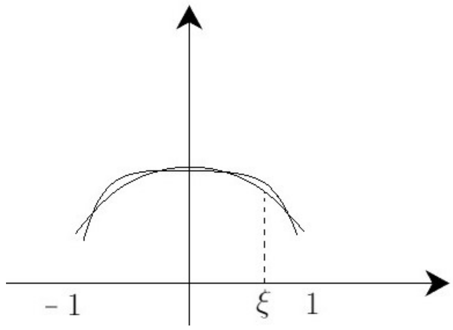

Рис. 4.

$$1 = \cos 1 - a$$

$$a = \cos 1 - 1$$

В точках альтернанса разность достигает максимального значения

$$\begin{cases} 1 - b = a\xi^2 + b - \cos\xi \\ 2a\xi + \sin\xi = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение трансцендентно, изобразим ее графически (Рис. 5.).

$$2a\xi = -\sin\xi$$

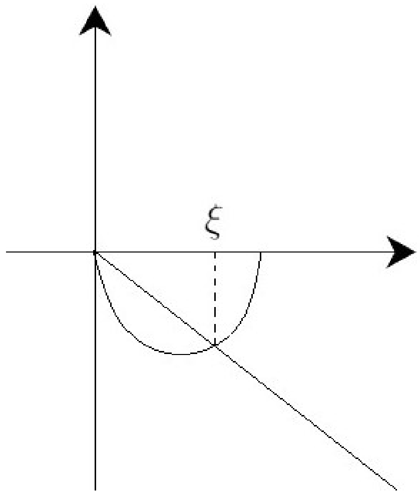

Рис. 5.

Решение этого уравнения мы можем найти с помощью компьютера. То есть считаем, что ξ - это решение нашего уравнения.

$$b = \frac{1}{2}(1 + \cos\xi - a\xi^2)$$

Пример 7. Пусть у нас есть отрезок $[a, b]$, $f(x) = P_n(x)$. Построим Q^0_{n-1}.

Пусть P_n имеет вид

$$P_n(x) = a_n x^n + ...$$

Рассмотрим

$$P_n(x) - Q^0_{n-1} = a_n x^n + ... = a_n(x^n + ...)$$

Поставим задачу так: среди всех многочленов степени n с известным a_n, тредуется найти многочлен с минимальной нормой, но эта задача уже была решена. Это многочлен Чебышева, приведенный к отрезку $[a, b]$ и нормированный соответствующим образом

$$P_n(x) - Q^0_{n-1}(x) = a_n T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) \cdot 2^{1-2n}(b-a)^n$$

$$Q^0_{n-1}(x) = P_n(x) - a_n T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) \cdot 2^{1-2n}(b-a)^n$$

Можем оценить норму разности

$$\|P_n(x) - Q^0_{n-1}(x)\| \leqslant |a_n| \cdot 2^{1-2n}(b-a)^n$$

Пример 8. Пусть у нас отрезок $[0, 1]$, $f(x) = e^x$. Самая простейшая аппроксимация:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{\xi^7}{7!}$$

$$P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

Попробуем аппроксимировать этот многочлен с помощью Q^0_5

$$Q^0_5 = P_6(x) - \frac{1}{720}2^{-11}T_6(2x-1)$$

Q^0_5 приближает P_6 с погрешностью $\frac{1}{720} \cdot 2^{-11}$. Посчитаем общую погрешность

$$\|e^x - Q^0_5\|_{C[0,1]} \leqslant \|e^x - P_6\| + \|P_6 - Q^0_5\| \leqslant \frac{\xi^7}{7!} + \frac{1}{6!} \cdot 2^{-11}$$

Можно ещё уменьшать степень, но порядок аппроксимации не изменится.

Такой метод построения многочлена, аппроксимирующего исходную функцию, называется телескопическим.

Пример 9. Пусть отрезок $[-1, 1]$, $f(x) = x^7 + x^4$. Построим $Q^0_5(x)$.

Сначала будем строить $Q^0_6(x)$

$$Q^0_6(x) = x^7 + x^4 - 2^{-6}T_7(x)$$

$$T_7(x) = 2^6 x^7 + C_5 x^5 + ...$$

$$Q^0_6(x) = x^7 + x^4 - x^7 - \frac{C_5}{2^6}x^5 + ... = -\frac{C_5}{2^6}x^5 + x^4 + ...$$

Получили многочлен пятой степени.

Можем сформулировать задачу в общем виде: пусть у нас отрезок $[-1,1]$, $f(x) = x^n + P_{n-2}(x)$. Требуется найти $Q^0_{n-2}(x)$.

Ищем

$$Q^0_{n-1}(x) = x^n - P_{n-2}(x) - 2^{1-n} \cdot T_n(x)$$

и этот многочлен, в силу того, что если n - четное, то T_n - четная функция, если n - нечетное, то T_n - нечетная функция, то есть

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + C_{n-2}x^{n-2} + ...$$

Получаем, что в этом случае

$$Q^0_{n-1}(x) = Q^0_{n-2}(x)$$

Задачу можно усложнить, взяв вместо $[-1,1]$ отрезок $[a,b]$, $P_n(x) = f(x)$, найти $Q^0_{n-2}(x)$.

В общем случае эта задача аналитически не решается. Если она решается, то алгоритм действий следующий

1) Делаем замену переменных $[a,b] \to [-1,1]$.

2) Далее пытаемся проделать все, что делали выше. Если после замены структура многочлена будет иметь вид $f(x) = x^n + P_{n-2}(x)$, то задача решается и мы можем выписать ее решения в явном виде.

Пример 10. На $[-1,1]$ рассматриваем функцию $f(x) = \cos x$ и требуется найти $P_4(x)$ такой, что

$$\|f - P_4\| \leqslant 10^{-4}$$

Можем попробовать строить различные многочлены

1) Интерполяционный многочлен Лагранжа на равномерной сетке

2) Интерполяционный многочлен Лагранжа по корням многочлена Чебышева

$$cosx - L^{ч}_5\|_{C[-1,1]} \leqslant \frac{\sin 1}{120} 2^{-4} < 10^{-4}$$

то есть нам подходит этот многочлен.

3) Разложим функцию в ряд Тейлора

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{\xi^8}{8!}$$

после этого попробуем аппроксимировать многочленом степени на 1 меньше, в силу четности получим многочлен четвертой степени, очевидно, что он тоже даст приемлимую оценку.

На равномерной сетке оказывается, что нужной оценки не получается.

Семинар 4

Построение ортогональных многочленов

Пусть $p(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, она может быть равна 0 и $+\infty$ в конечном числе точек, на всем остальном множестве точек функция непрерывна. Введем скалярное произведение на $[a,b]$

$$(f,g) \equiv \int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

Так как у нас есть скалярное произведение, то определено понятие ортогональности. Функции являются ортогональными, если $(f,g)=0$. Система многочленов $P_0(x),\ P_1(x),...P_n(x)$ называется ортогональной, если

$$(P_i,P_j)=0,\ i\neq j$$

Ортогональные многочлены удовлетворяют следующему рекурентному соглашению

$$P_{n+1}=(x+\alpha_n)P_n(x)+\beta_n P_n$$

то есть существует всего две константы такие, что ортогональный многочлен степени $n+1$-ой степени выражется через ортогональные многочлены степени n и $n-1$.

Докажем это. Согласно теореме Грамма-Шмидта система ортогональных многочленов существует, покажем, что формула имеет место. $P_{n+1}(x)$ должен быть ортогонален всем многочленам меньшей степени. То есть нужно доказать, что мы можем подобрать α_n и β_n таким образом, что

$$P_{n+1}\perp P_j,\ j=0,\ 1,...n$$

1) $j<n-1$
$$(P_{n+1},P_j)=(xP_n,P_j)+\alpha_n(P_n,P_j)+\beta_n(P_{n-1},P_j)$$

2) $j=n$
$$(P_{n+1},P_n)=(xP_n,P_n)+\alpha_n\|P_n\|^2+\beta_n(P_{n-1},P_n)=(xP_n,P_n)+\alpha_n\|P_n\|^2=0$$
получили одно уравнение с одной неизвестной, причем коэффициент при α_n не равен 0.

3) $j=n-1$
$$(P_{n+1},P_{n-1})=(xP_n,P_{n-1})+\alpha_n(P_n,P_{n-1})+\beta_n\|P_{n-1}\|^2=(xP_n,P_{n-1})+\beta_n\|P_{n-1}\|^2$$
получили одно уравнение с одной неизвестной, причем коэффициент при β_n не равен 0.

Теорема 2. *Если P_n - ортогональный многочлен степени n, то существуют различные $x_1,\ x_2,...x_n\in(a,b)$ такие, что $P(x_j)=0$.*

Квадратурные формулы

Постановка задачи: требуется вычислить

$$I(f)=\int\limits_a^b p(x)f(x)dx$$

$p(x)$ - весовая функция. Нам необходимо научиться вычислять интегралы, так как существуют интегралы, которые не выражаются в элементарных функциях, например

$$\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$$

Вторая причина: предположим, что мы можем выразить интеграл в элементарных функциях, но подынтегральная функция записывается на несколько страниц и его вычисление требует большое количество времени и сил.

Возьмем и приблизим $f \sim L_n$ с узлами $x_1, ...x_n$, подставим вместо f интерполяционный многочлен Лагранжа и то, что получается будем называть приближенным значением интеграла

$$K_n(f)=\int\limits_a^b p(x)\sum_{j=1}^n f(x_j)\frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)}dx=\sum_{j=1}^n C_j f(x_j)$$

получили квадратурную формулу.

Сформулируем задачу построения квадратурной формулы.

Первая постановка: пусть $x_1 < x_2 < ... < x_n \in [a,b]$ - узлы квадратурной формулы известны. Требуется найти коэффициенты $C_1, ...C_n$.

Для всех многочленов степени $n-1$ квадратурная формула должна быть точна

$$I(1)=\sum_{j=1}^n C_j$$

$$I(x)=\sum_{j=1}^n C_j x_j$$

$$I(x^2)=\sum_{j=1}^n C_j x_j^2$$

$$.......$$

$$I(x^{n-1})=\sum_{j=1}^n C_j x_j^{n-1}$$

Получили систему линейных уравнений с матрицей, определитель которой является определителем Вандермонда, то есть C_j находятся однозначно.

Выпишем оценку погрешности. Интеграл точно также как и квадратурная формула является линейным функционалом. Тогда для погрешности имеет место следующее соотношение

$$R_n(f) = I(f) - K_n(f)$$

Предположим, что $K_n(f)$ точна для P_m, тогда

$$R_n(f) = I(f - P_m) - K_n(f - P_m)$$

$$|R_n(f)| \leqslant |I(f - P_m)| + |K_n(f - P_m)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_a^b p(x)(f(x) - P_m(x))dx \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} C_j (f(x_j) - P_m(x_j)) \right|$$

Так как это верно для любого многочлена, то возьмем многочлен наилучшего равномерного приближения

$$P_m = Q_m^0$$

$$|R_n(f)| \leqslant \left(\int\limits_a^b |p(x)|dx + \sum_{j=1}^{n} |C_j| \right) E_m(f)$$

Если f непрерывна, то оценку $E_m(f)$ мы знаем.

Пусть $p(x) \geqslant 0,\ C_j \geqslant 0$

$$I(1) = \sum_{j=1}^{n} C_j = \int\limits_a^b p(x)dx$$

$$|R_n(f)| \leqslant 2 \int\limits_a^b p(x)dx \cdot E_m(f)$$

Вторая постановка задачи: найти $C_1, ... C_n$ и $x_1 < x_2 < ... < x_n$ таким образом, чтобы K_n была точна для многочленов наиболее высокой степени.

У нас $2n$ степеней свободы, можем ожидать, что квадратурная формула, которую мы хотим построить будет точна для многочленов степени $2n-1$, но это необходимо доказать.

Предположим, что такая квадратурная формула существует. Считаем, что $p(x) \geqslant 0$ и обращается в 0 и в бесконечность в конечном числе точек. Имеем следующее соотношение

$$P_{2n-1}(x) = P_{n-1}\omega_n(x) + r_{n-1}(x)$$

Запишем условие того, что квадратурная формула точна для многочленов степени $2n-1$

$$I(P_{2n-1}) = \int\limits_a^b p(x)P_{n-1}(x)\omega_n(x)dx + \int\limits_a^b p(x)r_{n-1}(x)dx = \sum_{j=1}^{n} C_j r_{n-1}(x_j)$$

Правая часть не зависит от $P_{n-1}(x)$ значит это будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_a^b p(x)P_{n-1}(x)\omega_n(x)dx = 0$$

значит $\omega_n(x)$ - ортогональный многочлен степени n.

Квадратурная формула строится следующим образом: мы должны построить ω_n - ортогональный многочлен степени n в скалярном произведении:

$$(f,g) = \int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

корни ω_n $x_1, ...x_n$ - узлы квадратурной формулы. После этого находим C_j по алгоритму, описанному ранее. Эта квадратура называется квадратурой Гаусса.

Третья постановка задачи: предположим, что у нас легко вычисляются значения функции в концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$. В этом случае естественно включать a и b в узлы квадратурной формулы. То есть требуется найти коэффициенты квадратурной формулы $C_1, ...C_n$ и узлы квадратурной формулы $x_2, ...x_{n-1}$, чтобы квадратурная формула была точна для многочленов наиболее высокой степени.

У нас $2n-2$ степени свободы. Можно ожидать, что квадратура точна для многочленов степени $2n-3$. Квадратура выглядит следующим образом

$$K_n(f) = C_1 f(a) + C_n f(b) + \sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j)$$

$$\omega_n(x) = (x-a)(b-x)\prod_{j=2}^{n-1}$$

$$P_{2n-3}(x) = P_{n-3}\omega_n(x) + r_{n-1}(x)$$

$$I(P_{2n-3}) = \int\limits_a^b p(x)P_{n-3}(x)\omega_n(x)dx + \int\limits_a^b p(x)r_{n-1}(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b p(x)(x-a)(b-x)\omega_{n-2}(x)P_{n-3}dx + \int\limits_a^b p(x)r_{n-1}(x)dx = \sum_{j=1}^{n} C_j r_{n-1}(x_j)$$

значит

$$\int\limits_a^b p(x)(x-a)(b-x)\omega_{n-2}(x)P_{n-3}(x)dx = 0$$

получаем, что ω_{n-2} - ортогональный многочлен степени $n-2$ в скалярном произведении

$$(f,g) = \int\limits_a^b p(x)(x-a)(b-x)f(x)g(x)dx$$

Квадратурная формула строится следующим образом: мы должны построить ω_{n-2} - ортогональный многочлен степени $n-2$ в скалярном произведении:

$$(f,g)=\int\limits_a^b p(x)(x-a)(b-x)f(x)g(x)dx$$

корни ω_{n-2} $x_2,...x_{n-1}$ - узлы квадратурной формулы. После этого находим C_j по алгоритму, описанному ранее.

Также можно рассмотреть задачу, где только один из концов отрезка входит в квадратурную формулу, все рассуждения аналогичны.

Пример 11. Рассмотрим

$$\int\limits_0^1 f(x)dx$$

весовая функция $p(x)\equiv 1$, хотим построить квадратурную формулу с узлами $x_1=a,\ x_2=b,\ n=2$

$$K_2(f)=C_1f(a)+C_2f(b)$$

Она должна быть точна для многочленов степени 1

$$1=C_1+C_2$$

$$\frac{1}{2}=C_2$$

$$C_1=\frac{1}{2}$$

Получаем квадратурную формулу трапеций

$$K_2(f)=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

Пример 12. Рассматриваем

$$\int\limits_0^1 f(x)dx$$

Будем строить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами. Надо построить ортогональный многочлен второй степени

$$P_0(x)\equiv 1$$

$$P_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

$$P_2(x)=\alpha\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\beta$$

P_2 имеет такой вид, так как $p(x)$ четная относительно середины отрезка.

$$\alpha\int\limits_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx + \beta\int_0^1 dx = \alpha\frac{y^3}{3}\bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \beta = \frac{\alpha}{12} + \beta = 0$$

P_2 автоматически ортогонален P_1, пусть

$$\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \beta = -\frac{1}{12}$$

$$P_2(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

Ищем корни

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$x-\frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Теперь ищем константы

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ \frac{1}{2} = C_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + C_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

Пример 13. Рассматриваем

$$\int\limits_0^1 xf(x)dx$$

Хотим построить квадратурную формулу $C_1f(0) + C_2f(x_2)$. Надо построить многочлен первой степени с весовой функцией $p(x) = x^2$

$$\int\limits_0^1 x^2(x-\alpha)dx = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{3} = 0$$

$$\alpha = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = C_1 + C_2 \\ \frac{1}{3} = C_2 \cdot \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{4}{9}$$

$$C_1 = \frac{1}{18}$$

Можно решить по-другому, просто подставив в лоб

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = C_1 + C_2 \\ \frac{1}{3} = C_2 x_2^2 \\ \frac{1}{4} = C_2 x_2^2 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

$$C_2 = \frac{4}{9}$$

$$C_1 = \frac{1}{18}$$

Все это время подразумевалось, что

$$\int\limits_a^b p(x) P_n(x) dx$$

вычисляется в явном виде.

Семинар 5

Квадратурные формулы

Построим примеры построения квадратурных формул для интегралов с особенностью.

Пример 14. Пусть нам необходимо вычислить интеграл

$$I(f)=\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$$

Будем считать, что это интеграл с весовой функцией $p(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Значит особенность будет заключаться в константах квадратурной формулы.

Разобьем отезок с шагом $h=\frac{1}{N}$ и разобьем интеграл на сумму, для вычисления интеграла на каждом из этих отрезков будем применять квадратурную формулу трапеций с $p(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Рассматриваем отрезок $[mh,(m+1)h]$

$$\int\limits_{mh}^{(m+1)h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = C_1 f(mh)+C_2 f((m+1)h)$$

$$\int\limits_{mh}^{(m+1)h} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{mh}^{(m+1)h} = 2(\sqrt{(m+1)h}-\sqrt{mh}) = C_1+C_2$$

$$\int\limits_{mh}^{(m+1)h} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{mh}^{(m+1)h} = \frac{2}{3}\left(((m+1)h)^{\frac{3}{2}}+(mh)^{\frac{3}{2}}\right) = C_1 mh + C_2(m+1)h$$

Получаем

$$\begin{cases} 2(\sqrt{(m+1)h}-\sqrt{mh}) = C_1+C_2 \\ \frac{2}{3}\left(((m+1)h)^{\frac{3}{2}}+(mh)^{\frac{3}{2}}\right) = C_1 mh + C_2(m+1)h \end{cases}$$

Два уравнения с двумя неизвестными, решать не будем, решение существует, то есть существуют C_1 и C_2, причем они зависят от m.

Обозначим

$$I_{m+1}(f) = C_1^{(m+1)} f(mh) + C_2^{(m+1)} f((m+1)h)$$

Тогда

$$K_N^2(f) = \sum_{j=1}^{N} I_j(f)$$

Будем считать, что $|f''| \leqslant M$

$$\left|\int\limits_{mh}^{(m+1)h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx - I_{m+1}(f)\right| \leqslant \left(\int\limits_{mh}^{(m+1)h} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \left|C_1^{(m+1)}\right| + \left|C_2^{(m+1)}\right|\right) E_m(f) \leqslant$$

$$\leqslant 4\left(\sqrt{(m+1)h}-\sqrt{mh}\right)\frac{\max|f''|}{16}h^3$$

Общая оценка будет величиной порядка $O(h^2)$.

Пример 15.

$$I(f)=\int\limits_1^{\infty}\frac{f(x)}{x^2}dx$$

Считаем, что $f(x)$ непрерывная, положительная и ограниченная. Сведем задачу к предыдущей. Сделаем замену

$$t=\frac{1}{x}\in[0,1]$$

$$I(f)=-\int\limits_0^1 f\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

Пример 16. Вычислим интеграл от сильно осцилорующей функции

$$I(f)=\int\limits_0^1 e^{i\omega x}f(x)dx,\ \omega\gg 1$$

$$p(x)=e^{i\omega x}$$

Применяем разбиение отрезка на части, на каждом из отрезков ищем квадратурную формулу достаточно низклго порядка (2 - 3 узла) и строится квадратурная формула с весовой функцией $p(x)=e^{i\omega x}$.

В случае, если на каждом из маленьких отрезков берем по три узла, такая квадратурная формула называется формулой Филона.

Вычислительные методы линейной алгебры

Пусть у нас есть система уравнений

$$Ax=b$$

$$x=(x_1,...x_m)^T$$

$$b=(b_1,...b_m)^T$$

$$A=(a_{ij})$$

Пусть у нас есть нормированное пространство векторов размерности m, будем рассматривать три основные нормы

1)

$$\|x\|_\infty=\max_i|x_i|$$

2)
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$$

3)
$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

Если мы рассматриваем матрицу как оператор над векторами, то ее норма будет зависить от того, как было нормированно исходное векторное пространство.

Оценим нормы.

1)
$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right| \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty$$
$$\|A\|_\infty \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Покажем, что в последнем неравенстве на самом деле равенство. Пусть равенство достигается в какой-то i-той строке, берем i-тую строку и выберем $x_j = sign\, a_{ij}$, тогда неравенство переходит в равенство.
$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

2)
$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_j \left(\sum_i |a_{ij}|\right) |x_j| \leqslant \max_j \sum_i |a_{ij}| \cdot \sum_{j=1}^{m} |x_j| =$$
$$= \max_j \sum_i |a_{ij}| \cdot \|x_j\|_1$$

Нетрудно видеть, что можно подобрать вектор x, на котором выполняется равенство. Пусть максимум достигается при каком-то фиксированном j, берем $x_j = 1$, а остальные 0.

3)
$$\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^TAx, x)$$
$$x = \sum_j x_j e_j$$

e_j - собственный вектор A^TA, а λ_j - собственное значение, тогда
$$(A^TAx, x) = \sum_j \lambda_j x_j^2 \leqslant \max_j \lambda_j \cdot \|x\|_2^2$$
$$\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda(AA^T)}$$

Если A - симметрична, то λ_j -квадраты собственных значений матрицы A, тогда
$$\|A\|_2 = \max |\lambda(A)|$$

Оценка собственных значений матрицы

Пусть x - собственный вектор, тогда

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda)x = 0$$

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + \sum_{j \neq 1} a_{1j}x_j = 0$$

$$(a_{22} - \lambda)x_2 + \sum_{j \neq 2} a_{2j}x_j = 0$$

$$\ldots\ldots$$

Среди всех компонент вектора x возьмем компоненту с максимальным значением, пусть это x_i

$$|a_{ii} - \lambda| \cdot |x_i| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot |x_i|$$

$$|a_{ii} - \lambda| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Мы должны рассмотреть все такие интервалы по всем i. λ, удовлетворяющие этому условию, образуют круги в комплексной плоскости, таких кругов будет m, эти круги называются круги Гершгорина.

Метод простой итерации

Пусть исходная система преобразуется к виду

$$x = Bx + c \;\Leftrightarrow\; Ax = b$$

То методом простой итерации называется итерационный процесс

$$x^{n+1} = Bx^n + c$$

Достаточным условием сходимости этого процесса является

$$\|B\| < 1 \;\Rightarrow\; \text{метод сходится}$$

В этом случае берем любую норму, так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то в другой норме тоже будет иметь место сходимость.

Критерий сходимости метода простой итерации:

$$x^{n+1} = Bx^n + c \text{ сходится } \;\Leftrightarrow\; \text{ все собственные значения } |\lambda(B)| < 1$$

Пример 17. Пусть

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0,1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} x = b$$

Будем выписывать итерационный процесс для решения данной системы. Умножим обе части на $\tau \neq 0$ и прибавим и вычтем решение.

$$x + \tau(Ax - b) = x$$

$$x = (I - \tau A)x + \tau b$$

Итерационный процесс:

$$x^{n+1} = (I - \tau A)x^n + \tau b$$

Найти τ, при котором процесс сходится, вывишем b и оценим собственные значения.

$$B = \begin{pmatrix} 1-2\tau & -\tau & -0,1\tau \\ -\tau & 1-3\tau & -\tau \\ -2\tau & -2\tau & 1-5\tau \end{pmatrix}$$

Оценим норму, считаем, что $\tau > 0$

$$|1-2\tau| + |\tau| + 0,1|\tau| < 1$$

$$|1-2\tau| + \tau + 0,1\tau < 1$$

$0 < \tau < \frac{1}{2}$

$$1 - 2\tau + \tau + 0,1\tau < 1$$

$$-0,9\tau < 0$$

$$|1-3\tau| + |\tau| + |\tau| < 1$$

$$|1-3\tau| + \tau + \tau < 1$$

$0 < \tau < \frac{1}{3}$

$$1 - 3\tau + \tau + \tau < 1$$

$$-\tau < 0$$

$$|1-5\tau| + 2|\tau| + 2|\tau| < 1$$

$$|1-5\tau| + 2\tau + 2\tau < 1$$

$0 < \tau < \frac{1}{5}$

$$1 - 5\tau + 2\tau + 2\tau < 1$$

$$-\tau < 0$$

Достаточное условие сходимости $\tau \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$. Если бы брали сумму по столбцам, то рассуждение бы не прошло, то есть выбираем нужную нам норму.

Семинар 6

Вычислительные методы линейной алгебры

Пусть есть система уравнений

$$Ax = b$$

1)

$$A = A^T > 0,\ \lambda(A) \in [\mu, M]$$

. В этом случае мы можем использовать метод Ричардсона:

$$x^{n+1} = x^n - \tau(Ax^n - b)$$

x^0 задано.

$$\tau = \frac{2}{M+\mu}$$

$$\|r^n\|_2 < \left(\frac{M-\mu}{M+\mu}\right)^n \|r^0\|_2$$

2) Пусть $A = A^T > 0,\ \lambda_1(A) < 0$ - известно, а $\lambda_j(A) \in [\mu, M]$. Можно ли используя эту информацию построить итерационный процесс типа метода Ричардсона, чтобы он сходился.

Заметим, что раз матрица A симметрична, то у нее существует полная система собственных векторов. То есть заметим, что если у нас

$$r^n = \sum_{j=1}^{m} C_J e_j,\ e_j \sim \lambda_j$$

$$C_1 = 0\ \Rightarrow\ r^n \perp e_1\ \Rightarrow r^k \perp e_1,\ k \geqslant n$$
$$r^{n+1} = (I - \tau A) r^n$$

Так как $C_1 = 0$, то для всех последующих разложений

$$r^k = \sum_{j=2}^{m} (1 - \tau\lambda_j)^{m-k} e_j \perp e_1$$

Таким образом, если мы хотим построить итерационный процесс для $Ax = b$ и $\lambda_1 < 0$ известно, а остальные принадлежат отрезку, границы которого известны, то попробуем поступить следующим образом.

x_0 задано, значит надо найти τ_1 такое, что

$$r^1 = (I - \tau_1 A) r^0 \perp e_1$$

Пусть

$$r^0 = \sum_{j=1}^{m} C_j e_j$$

значит

$$r^1 = (I - \tau_1 A)\sum_{j=1}^{m} C_j e_j = \sum_{j=1}^{m} C_j (1 - \tau_1\lambda_j) e_j$$

$$1 - \tau_1\lambda_1 = 0$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda_1}$$

Если в первом шаге берем параметр $\tau_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, то у нас последующие погрешности будут ортогональны e_1, мы будем находиться в подпространстве и это подпространство будет инвариантно относительно оператора перехода $I - \tau A$. Заметим, что τ можно менять от шага к шагу, инвариантность не меняется, то есть мы свели задачу к предыдущей.

3) Пусть $\lambda(A) \in [-M, -\mu] \cup [\mu, M],\ \mu > 0,\ A = A^T$. Требуется построить метод на основе метода Ричардсона, чтобы он сходился.

Рассмотрим итерационный процесс

$$r^{n+1} = P_2(A) r^n$$

Требуется найти многочлен второй степени такой, чтобы этот метод сходился.

$$P_2(\lambda) = \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2$$

$$x^{n+1} - \overline{x} = \alpha(x^n - \overline{x}) + \beta A(x^n - \overline{x}) + \gamma A^2(x^n - \overline{x})$$

$\overline{x}$ - решение исходной задачи.

$$A(x^n - \overline{x}) = Ax - b$$

Для того, чтобы исключить $\overline{x}$ надо брать $\alpha = 1$ (уравнение должно быть разрешимо). $\beta = 0$, так как отрезок симметричен относительно 0.

$$r^{n+1} = (I + \gamma A^2) r^n$$

$$\|r^{n+1}\|_2 \leqslant \|I + \gamma A^2\| \cdot \|r^n\|$$

Надо выбрать γ так, что

$$|1 + \gamma\lambda^2| < 1 \text{ на } [\mu, M]$$

$$1 - \gamma\mu^2 = \gamma M^2 - 1$$

$$\gamma = \frac{2}{M^2 + \mu^2}$$

Таким образом, у нас получился итерационный процесс

$$x^{n+1} = x^n - \frac{2}{M^2 + \mu^2}(Ax^n - b)$$

Скорость сходимости этого метода будет $\frac{M^2 - \mu^2}{M^2 + \mu^2}$. Процесс сходится, но если имеем систему с матрицей, у которой большой разброс спектра, то этот метод не является эффективным.

4) $\lambda(A) \in [-M_1, \mu_1] \cup [\mu, M]$. В этом случае условие $\beta = 0$ исчезает и надо опять искать многочлен второй степени.

5) Задача с седловой точкой. Предположим, что A имеет следующую блочную структуру

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$x = (x_1, x_2),\ b = (b_1, b_2)$$

Считаем, что $A = A^T,\ A_{11} > 0,\ A_{22} \leqslant 0$, в этом случае матрица A называется оператором с седловой точкой. Будем рассматривать случай, когда A_{11} легко обратима, то есть мы легко можем решить систему уравнений и $\dim A_{22} \sim 1$. Считаем, для простоты, $A_{22} < 0$.

Применим к первому уравнению A_{11}^{-1}

$$A_{11}^{-1}(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) = A_{11}^{-1}b_1$$

$$x_1 = -A_{11}^{-1}A_{12}x_2 + A_{11}^{-1}b_1$$

Подставим это в уравнение

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

$$-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}x_2 + A_{22}x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1$$

$$(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})x_2 = A_{21}A_{11}^{-1}b_1 - b_2$$

Оператор $A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}-A_{22}$ называется дополнением по Шуру (Shur complement).

Нетрудно видеть, что дополнение по Шуру является симметричным и положительно определенным. Мы умеем считать применение этой матрицы к вектору. Если мы не знаем спектр или не можем его оценить, то, например, можем например запустить метод сопряженных градиентов, который является самонастраивающимся. Для этого надо один раз посчитать правую часть, там стоят A_{11}^{-1}, на самом деле не надо считать обратную матрицу, нам надо уметь применять обратную матрицу к известному вектору.

Пример 18. Рассмотрим интеграло-дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} -u'' + \int\limits_0^1 u dx = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Возьмем отрезок $[0, 1]$, разобьем его на части с шагом $h = \frac{1}{N}$, будем считать приблизительные значения u в узлах сетки.

Запишем аппроксимацию в n - том узле

$$\begin{cases} -\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2} + \sum\limits_{j=1}^{N-1} hu_j = f_n,\ n = 1, ...N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

Получили разностную схему для исходной задачи, которая аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(h^2)$.

Получили систему линейных уравнений с полностью заполненой матрицей и если будем решать в лоб, то нам понадобится $O(N^3)$ операций.

Введем новую переменную C

$$\begin{cases} \frac{-u_{n+1}+2u_n-u_{n-1}}{h^2} + \sqrt{h}C = f_n \\ \sum\limits_{j=1}^{N-1} \sqrt{h}u_j - C = 0 \end{cases}$$

Считаем, что u_0 и u_N из системы исключены.

$$x = (x_1, x_2) = ((u_1, ...u_{N-1}), C)$$

$$b = (b_1, b_2) = ((f_1, ...f_{N-1}), 0)$$

$$f^n = (f_1, ...f_{N-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & ... & ... & 0 & \sqrt{h} \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & ... & ... & 0 & \sqrt{h} \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & ... & 0 & \sqrt{h} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & \sqrt{h} \\ \sqrt{h} & ... & ... & ... & ... & ... & \sqrt{h} & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица A_{11} трехдиагональная

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} \sqrt{h} & ... & ... & ... & ... & ... & \sqrt{h} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ ... \\ ... \\ ... \\ ... \\ ... \\ \sqrt{h} \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)$$

Исходная система имела полностью заполненную матрицу, а тут матрица разреженная. A_{11} - симметричная, положительно определенная и мы знаем все ее собственные значения.

Применим A_{11}^{-1} к первому уравнению

$$\left(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}\right)C = A_{21}A_{11}^{-1}f^n$$

Имеем одно уравнение с одной неизвестной.

Рассмотрим алгоритм

I. Находим правую часть
$$\phi = A_{21}A_{11}^{-1}f^n = const$$
Потом вычислим $A_{11}^{-1}f^n$, то есть надо решить систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{-v_{n+1}+2v_n-v_{n-1}}{h^2} = f^n,\ n = 1, ...N-1 \\ v_0 = v_N = 0 \end{cases}$$
И умножим найденный вектор на A_{21} слева.

II. Возьмем $C = 1$. Обозначим
$$S = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}$$
и вычислим $S \cdot 1$
$$A_{12} \cdot 1 = \begin{pmatrix} \sqrt{h} & ... & ... & ... & ... & ... & \sqrt{h} \end{pmatrix}^T$$
Вычислим $A_{11}^{-1}A_{12} \cdot 1$, то есть решим систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{-v_{n+1}+2v_n-v_{n-1}}{h^2} = \sqrt{h},\ n = 1, ...N-1 \\ v_0 = v_N = 0 \end{cases}$$
и умножив результат слева на A_{21}, получим число, потом прибавим 1.
$$S \cdot 1 = \phi_1 = const$$
$$S\alpha = \alpha\phi_1$$
Найдем α
$$S \cdot \alpha = \alpha\phi_1 = \phi$$
$$\alpha = \frac{\phi}{\phi_1}$$
$$S \cdot C = \phi$$
$$C = \alpha$$

III.

$$A_{11}\overline{u} + A_{12}C = f^n$$

C известно, для нахождения $\overline{u}$ необходимо решить систему с трехдиагональной матрицей.

Нетрудно видеть, что у нас будет $24N + O(1)$, а если бы решали в лоб, то было бы $O(N^3)$.

Нам надо было решить систему уравнений с матрицей, которая является дополнением по Шуру, по большому счету мы не умеем решать такую систему, так как мы не знаем A_{11}^{-1}, но если $\dim C$ маленькая (1, 2, 3), то можно просто в лоб брать различные начальные вектора (например $(0, 1)$, $(1, 0)$, если $\dim C = 2$) и искать как линейную комбинацию известных решений. В данном случае этот метод является эффективным, в общем случае мы запускаем что-то типа метода сопряженных градиентов или метод наискорейшего спуска.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ