МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ. СЕМИНАРЫ

ЛЕМАК
СТЕПАН СТЕПАНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
АНДРЕЕВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ

Содержание

Семинар 10

Семинар 1
Основные понятия механики управляемых систем. Физическая и математическая модели системы. Программное управление и управление при помощи обратной связи. Устойчивость

Динамический объект. Система управления динамическим объектом

Для того чтобы система была управляемой, необходимо, чтобы в ее составе присутствовали 4 элемента (рис. 1.1).

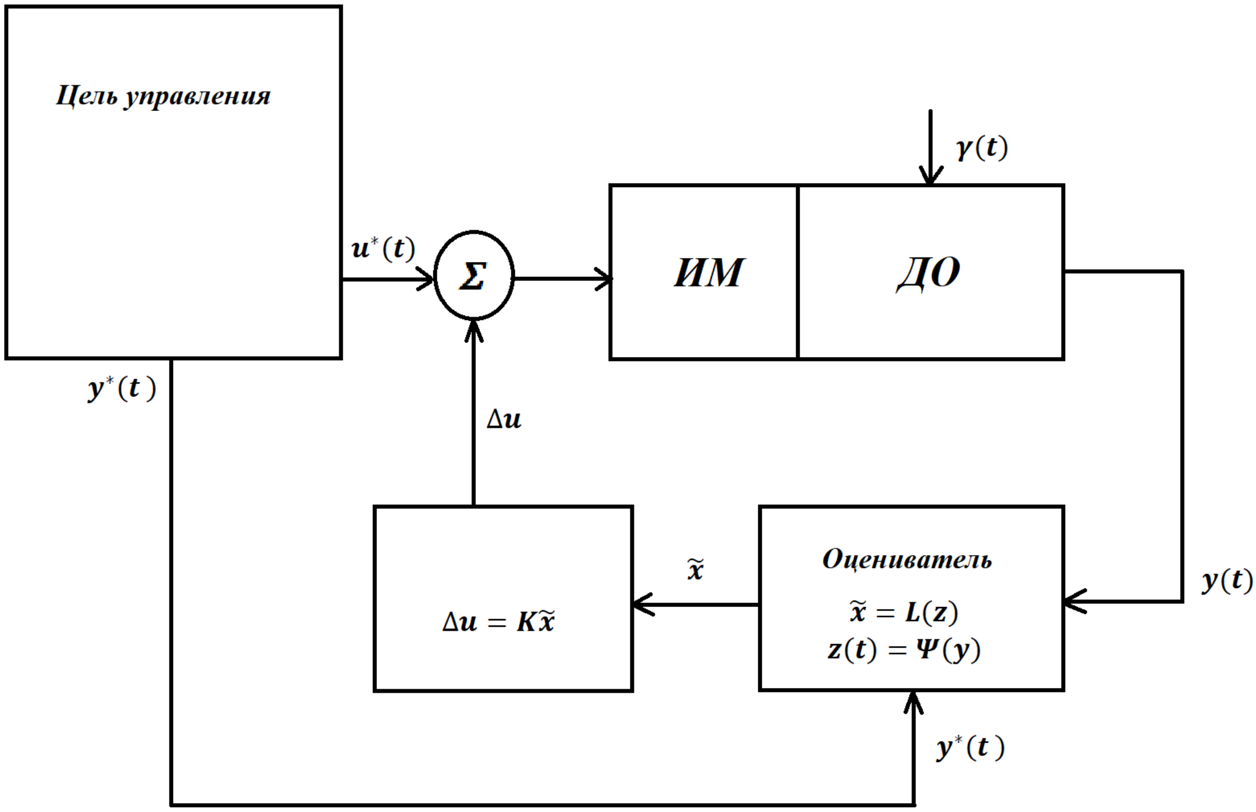

Рис. 1.1. Блок-схема управляемой системы.

1) *Динамический объект (ДО)* – некоторая механическая система, состояние которой может быть описано фазовым вектором, имеющим n координат:

$$y(t) \in R^{n}.$$

Изменение во времени этого фазового вектора подчиняется некоторому дифференциальному уравнению:

$$\dot{y} = f(y, u, \gamma). \quad (1.1)$$

Исполнительные механизмы (ИМ) – элементы, позволяющие изменить состояние фазового вектора динамического объекта. В курсе принят информационный подход, в котором исполнительные элементы выступают в роли управляющих сигналов или управлений:

$$u(t) \in R^m.$$

Ими могут быть изменяемые силы и моменты, действующие как на ДО, так и на промежуточные механические объекты (электромоторы, приводы, у которых может быть своя математическая модель, и фазовый вектор этой математической модели с ИМ включается в фазовый вектор состояния всего ДО).

$u(t)$ с точки зрения математики не любые переменные: $u(t) \in \Omega \subset R^m$, где Ω представляет собой ресурсы управления (не могут быть безграничными).

$\gamma(t) \in R^s$, некоторые *немоделируемые возмущения*, которые не вошли в описание этой математической модели, но могут действовать внешним образом (например, порывы ветра).

2) Условия управления. З*адана цель.*

Цель задана *явно*:

Есть желаемое движений: $\dot{y}^* = f(y^*, u^*, 0)$. (1. 2)
Известны при этом начальные условия: $y^*(t_0) = y_0^*$.
$u^*(\tau) \subset int\ \Omega$ – *программное управление,* $\tau \in [t_0, t_k]$.
Будем считать, что существует такое программное управление $u^*(\tau)$, которое реализует это программное движение.

Цель управления может быть задана более сложным образом, например, заданы не все фазовые координаты, которые надо реализовать.

Самый сложный случай: $y^*(t\ )$ находятся из некоторой экстремальной задачи.

Пример (задача быстродействия):

$y^*(t_0) = y_0^*,\ \ y^*(t_k) = y_k^*$

И надо так найти программное управление $u^*(\tau)$, чтобы минимизировать время прихода в конечное состояние: $t_k \to min$.

Задача курса – построить систему управления ДО в купе с ИМ.

Чтобы построить хорошую систему управления объектом, как правило, не достаточно использовать только программное управление. Даже в том случае, когда начальные условия в системе не совпадают с желаемыми:

$$y(t_0) \neq y^*(t_0),$$

то решение системы (1.1) может сильно различаться с решением системы (1.2), и мы не получим хорошую систему управления. Поэтому, как правило, управление системой (1.1) строится как *двухуровневое управление*:

$$u = u^*(t) + \Delta u(x, t),$$

где $\Delta u(x, t)$ – дополнительное позиционное управление, которое, как правило, строится в виде обратной связи от позиции.

$x(t) = y(t) - y^*(t)$ – отклонение от программного движения. Для того чтобы строить позиционное управление, надо знать отклонение, которое можно получить путем измерения некоторых функций, зависящих от состояния системы => нужно знать состояние системы => необходима *система измерений.*

Известна вектор функция $z(t)$, которая может нелинейно зависеть от фазового состояния:

$$z(t) = \Psi(y) + r(t) \text{ - уравнение измерителей,}$$

где $r(t)$ - ошибка измерений.

3) *Оцениватель*

Поскольку мы знаем программное движение, то можем составить вектор отклонения $x(t)$. Тогда можем построить оценку отклонения, построив некоторую систему, позволяющую получить информацию о всех отклонениях вектора состояния от желаемого состояния:

$$\tilde{x} = L(z).$$

4) *Позиционное управление* строим, например, в виде обратной связи:

$$\Delta u = K\tilde{x},$$

где K – матрица обратной связи дополнительного управления. Позиционное управление призвано стабилизировать программное движение.

Итак, будем считать, что нам даны уравнения динамического объекта в купе с исполнительными механизмами и необходимо построить блоки оценивателя и позиционного управления.

Пример (перевернутый маятник)

Пусть есть тележка, которая может двигаться по горизонтальной плоскости с заданным ускорением w (рис. 1.2). Для простоты будем считать, что тележка невесомая. На тележке установлен перевернутый маятник длины l и массы m. Построим систему управления заданной механической системы и выведем уравнение движения.

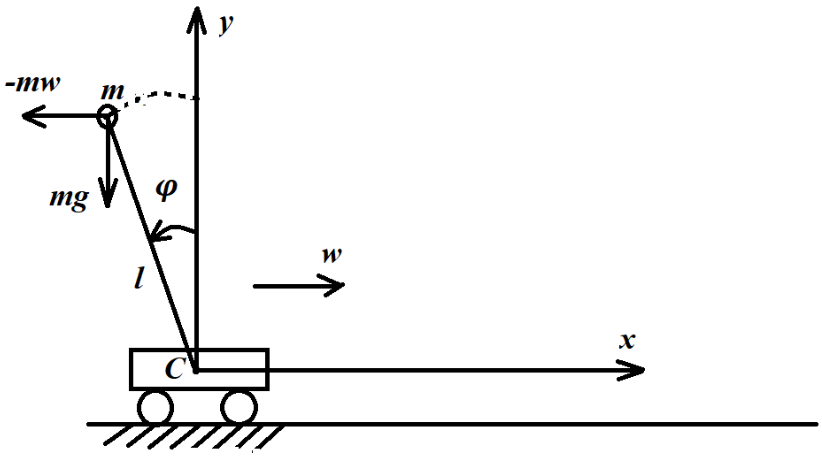

Рис.1.2.

Пусть C - точка подвеса. Удобно писать уравнение движения системы в подвижной системе координат, связанной с точкой C, поскольку нас интересует угол φ отклонения маятника от вертикали.

Цель: $\varphi^*(t) = \dot{\varphi}^*(t) \equiv 0$ => задано программное движение.

Уравнение изменения кинетического момента системы:

$$\frac{dK}{dt} = M_z.$$

Система координат неинерциальная, поэтому действующим активным силам (в данном случае сила тяжести) необходимо добавить силы инерции (переносная и Кориолисова), чтобы правильно записать правую часть уравнения.

$\Omega_z \equiv 0$ => Кориолисовы силы инерции отсутствуют. Остаются только переносные силы.

Уравнение моментов для заданной системы:

$$K = J_z\dot{\varphi},$$

$$J_z = ml^2 \quad =>$$

$$ml^2\ddot{\varphi} = mgl\sin\varphi + mwl\cos\varphi.$$

Отклонения от желаемого движения:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi^*,$$

$$\Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^*.$$

Программное управление:

$$\text{т. к.} \quad \varphi^*(t_0) = \dot{\varphi}^*(t_0) = 0 \;=>\; \quad w^*(t) = 0.$$

Преобразуем уравнение в отклонениях:

Предположим, что $\varphi^*(t_0) \neq \dot{\varphi}^*(t_0) \neq 0$.

Исследуем устойчивость нулевого решения нелинейной системы в отклонениях.

Устойчивость нулевого решения нелинейной системы в отклонениях

Устойчивость по Ляпунову

$x(t) = \begin{pmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\dot{\varphi}\end{pmatrix}$ – отклонение от программного движения, удовлетворяет $\dot{x} = g(x)$ при нулевом дополнительном управлении. Устойчивость по Ляпунову означает следующее:

при $x(t_0) \neq 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \; |x(t)| \leq \varepsilon \;\; \exists\delta > 0 \; |x(t_0)| \leq \delta$ (см. рис.1.3).

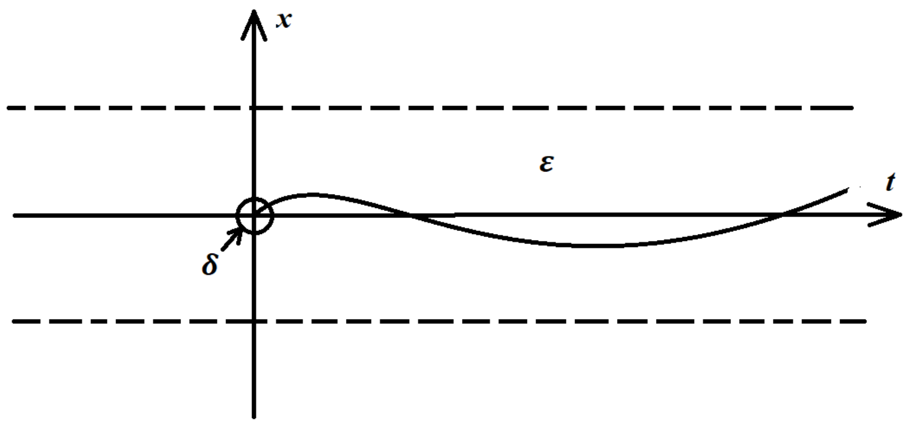

Рис. 1.3.

Тогда мы реализуем программное движение с точностью до ε, а нам необходимо с точностью до нуля.

Асимптотическая устойчивость

Система является асимптотически устойчивой, если она устойчива по Ляпунову и при этом $x(t) \to 0$, то есть убывает с течением времени.

На систему действуют всевозможные возмущения, которые мы не учли, следовательно, асимптотической устойчивости недостаточно.

Экспоненциальная устойчивость

$|x(t)| \leq Ce^{-\alpha t}$, то есть быстро убывает со временем.

Линеаризуем нелинейное уравнение в отклонениях, поскольку напрямую будем пользоваться теоремой Ляпунова об устойчивости. Оказывается, чтобы получить условия устойчивости системы бывает достаточно исследовать устойчивость линеаризованной системы в отклонениях.

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$\text{где } A(t) = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Часто система бывает стационарна (когда матрица A не зависит от времени). Выпишем в таком случае линеаризованную систему в отклонениях:

$$u = \frac{w}{l} \text{ – дополнительное управление,}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \text{ – параметр,}$$

$$\Delta\ddot{\varphi} = \omega^2 \Delta\varphi + u.$$

Проверим устойчивость системы при $u \equiv 0$. Устойчивость нулевого решения $\dot{x} = Ax$ - это устойчивость матрицы A или гурвицева устойчивость.

Запишем систему в виде Коши:

$$x_1 = \Delta\varphi, \qquad x_2 = \Delta\dot{\varphi}.$$

Система имеет второй порядок. Запишем уравнения в отклонениях системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \omega^2 x_1 + u \end{cases}$$

Из записи видно, что в системе будет асимптотическая устойчивость.

Характеристическое уравнение системы:

$$det|A - \lambda E| = 0.$$

1) Если действительная часть всех корней характеристического уравнения $Re\,\lambda_j < 0,\ j = 1, \dots, n,$ то система будет асимптотически устойчива.
2) Если $Re\,\lambda_j > 0, j = 1, \dots, n$ => неустойчивость.

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0$$

$$\begin{cases}\lambda_1 = \omega \\ \lambda_2 = -\omega\end{cases} \Rightarrow \text{неустойчива.}$$

Следовательно, необходимо сконструировать дополнительное управление u, которое строится в виде обратной связи как $u = Kx$ в том случае, если известны все отклонения. Иначе необходимо строить оцениватель.

Критерий устойчивости асимптотической системы

Характеристическое уравнение матрицы А: $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$

Составим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & \ddots & a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

Если: $\begin{cases}\Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} > 0 \\ \quad \vdots \\ \Delta_n = \det \Gamma > 0\end{cases}$, то система устойчива, $Re\,\lambda_j < 0.$

Рассмотрим системы $n = 2, 3.$

Для $n = 2$: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$

$a_1 > 0,$

$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow a_1 a_2 > 0 \Rightarrow a_2 > 0 \Rightarrow$ необходимое и достаточное условие устойчивости системы второго порядка – положительность коэффициентов характеристического уравнения.

Для $n = 3$: $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_1 = 0,$

$a_1 > 0,$

$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} > 0 \;\; => \;\; a_1 a_2 - a_3 > 0 \;\; => \;\; a_2 > 0,$

$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} > 0 \;\; => \;\; a_3 > 0 \;\; =>$ необходимое и достаточное условие устойчивости системы третьего порядка – положительность коэффициентов характеристического уравнения и дополнительное условие $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

Таким образом, мы получили критерий, позволяющий судить об асимптотической устойчивости системы, не вычисляя корней характеристического уравнения.

Пример

Управляемая система второго порядка:

$$\dot{y}_1 = y_1^2 \sin y_1 + a y_2 \cos y_1$$

$$\dot{y}_2 = -\sin y_1 + b(1 - y_1^2) y_2 + u$$

Исследуем устойчивость системы при $u \equiv 0$.

Уравнение в отклонениях:

$$x = \overline{y} - \overline{0} \; \Big| \; \begin{cases} \dot{x}_1 = a x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + b x_2 + u \end{cases}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & a \\ -1 & b - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(b - \lambda) + a = 0$$

$$\lambda^2 - b\lambda + a = 0$$

$\begin{cases} b < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ => асимптотически устойчива.

Запас устойчивости. Критерий запаса устойчивости

Если решение системы можно представить в виде:

$$\overline{x}(t) = \overline{\xi}(t) e^{-\alpha t},$$

где $\xi(t)$ - асимптотически устойчивое решение, $\alpha > 0$ - *запас устойчивости.*

$$\dot{\xi} e^{-\alpha t} - \alpha E \xi e^{-\alpha t} = A \xi e^{-\alpha t}$$

$$\dot{\xi} = (A + \alpha E)\xi$$

$$\det(A + \alpha E - \lambda E) = 0$$

$$\det(A - (\lambda - \alpha)E) = 0$$

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

$$(\lambda - \alpha)^n + a_1(\lambda - \alpha)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(\lambda - \alpha) + a_n = 0, \qquad \alpha > 0$$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 \end{cases}$$

$$u_1 = K_1 x_1$$

$$u_2 = K_2 x_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + K_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + K_2 x_2 \end{cases}$$

Попробуем найти такие коэффициенты K_1, K_2, которые обеспечивают запас устойчивости $\alpha = 2$.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} K_1 - \lambda & 1 \\ 1 & K_2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - (K_1 + K_2)\lambda + K_1K_2 - 1 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 - (K_1 + K_2)(\lambda - 2) + K_1K_2 - 1 = 0$$

Условие устойчивости:

$$\begin{cases} (K_1 + K_2) + 4 < 0 \\ (K_1 + 2)(K_2 + 2) > 1 \end{cases}$$

Задание на дом:

1) $\dddot{y} + 2\ddot{y} + k_1\dot{y} + k_2 y = 0$

   Определить область устойчивости (k_1, k_2) нулевого решения системы.

2) $\ddot{x} + k_1\dot{x} + k_2 x = 0$

   Определить область устойчивости нулевого решения системы с запасом 1.

3) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$

   Найти все положения равновесия и определить их устойчивость.

Семинар 2
Управляемость. Критерий управляемости. Контрвариантные координаты

Управляемость. Критерий управляемости

На прошлом семинаре был рассмотрен пример перевернутого маятника на подвижной тележке. Было показано, что уравнение в отклонениях для такой системы записывается следующим образом:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = u.$$

При $u \equiv 0$ система неустойчива и надо встроить дополнительное управление, чтобы обеспечить реализуемость желаемого движения:

$$x^* = \dot{x}^* \equiv 0.$$

Возникает математический вопрос: всегда ли можно подобрать такое управление, чтобы перевести систему в ноль, если в начальный момент она находится не в нуле? Решить этот вопрос помогает понятие *управляемости*. Рассмотрим общий случай.

$\dot{x} = Ax + Bu$ - некоторая система в отклонениях, где A и B известные матрицы.

Пусть в начальный момент система находится в положении $x(t_0) = \xi_1$.

Если $\exists$ конечный момент $t > t_0$ и управление $u(\tau) \in [t_0, t]$, то систему из положения ξ_1 можно перевести в любое положение ξ_2. Такая система называется *полностью или вполне управляемой*.

Пусть $u \in R^1$ - скалярное управление, тогда:

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{2.1}$$

где b – заданный вектор-столбец.

Посмотрим, как ведет себя решение линейной системы. Воспользуемся формулой свертки. Рассмотрим случай, когда A, b - постоянные матрицы. Формула свертки:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\xi_1 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} bu(\tau)d\tau, \tag{2.2}$$

Где $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ - переходная матрица системы в общем случае. По определению это некоторая матрица, удовлетворяющая матричному уравнению:

$$\dot{\Phi} = A\Phi.$$

С начальным условием: $\Phi(t, t_0) = E$.

Рассмотрим разложение в рад Тейлора матричной экспоненты $e^{A(t-\tau)}$:

$$e^{A(t-\tau)} = E - A(t-\tau) + \frac{A^2}{2}(t-\tau)^2 + \cdots \tag{2.3}$$

Подставим (2.3) в (2.2):

$$z = x(t) - e^{A(t-t_0)}\xi_1 = \sum_{j=0}^{\infty} A^j b \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^j}{j!} u(\tau)d\tau = \sum_{j=0}^{\infty} A^j b\alpha_j$$

$$z = (b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b, \dots)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

По теорема Гамильтона-Кэли матрица А является корнем своего характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

$$A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE = 0 \ \Rightarrow$$

в уравнении (2.4) всего n независимых компонент $(E, A, A^2, \dots, A^{n-1})$. Тогда это соотношение становится конечным, и по условию разрешимости должно быть разрешимо для любых векторов z, следовательно:

$$\det(b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b) \neq 0,$$

$$\mathrm{U} = (b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b) - \textit{матрица управляемости}.$$

Условие управляемости: $\det \mathrm{U} \neq 0$.

Аналогично можно показать, что в общем случае $\dot{x} = Ax + Bu$ получим следующий критерий:

матрица управляемости $U(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$ удовлетворяет условию управляемости

$$rank\ U = n.$$

В случаем переменных матриц $A(t), B(t)$ на лекции было показано, что если составить грамиан управляемости

$$W(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau, t_0)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(\tau, t_0)d\tau,$$

То $\exists t, W(t, t_0) \neq 0$ – условие управляемости в нестационарном случае.

Примеры

Перевернутый маятник

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \omega^2 x_1 + u \end{cases}$$

Выясним управляемость системы.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ => $\det U \neq 0$ => управляемость.

Двойной перевернутый маятник

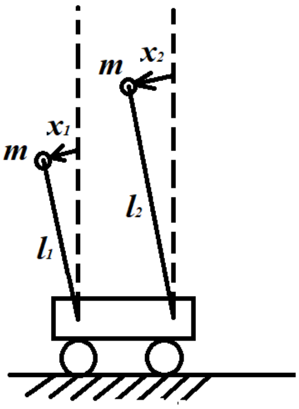

Рис. 2.1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \omega_1^2 x_1 + u \\ \dot{x}_4 = \omega_2^2 x_2 + u \end{cases}$$

Выпишем матрицу и проверим, в каких случаях система является управляемой.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \omega_1^2 \\ 0 & 1 & 0 & \omega_2^2 \\ 1 & 0 & \omega_1^2 & 0 \\ 1 & 0 & \omega_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det U = -det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega_1^2 \\ 1 & 0 & \omega_2^2 \\ 0 & \omega_1^2 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega_1^2 \\ 1 & 0 & \omega_2^2 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \end{pmatrix} = (\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$\det U \neq 0 \text{ при } \omega_1 \neq \omega_2$$

То есть система управляема только с том случае, когда длины маятников неравны.

Контрвариантные координаты

Рассмотрим частный случай (случай скалярного управления).

Пусть есть управляемая система:

$$\dot{x} = Ax + bu.$$

Проверим управляемость. Для этого рассмотрим систему векторов:

$$g_1 = b, g_{i+1} = Ag_i$$

$$U = (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

Если детерминант матрицы не равен нулю, то система векторов линейно независимая – необходимое и достаточное условие управляемости.

Запишем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E)$ матрицы в другом виде:

$$\lambda^n = \alpha_1 + \alpha_2\lambda + \dots + \alpha_n\lambda^{n-1}.$$

Оказывается, если взять вектор $g_{n+1} = Ag_n$, то поскольку система векторов линейно независима, то g_{n+1} обязан быть линейной комбинацией набора базисных векторов. То есть:

$$g_{n+1} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n.$$

Допустим, что система полностью управляема, то есть набор векторов линейно независим. Выпишем некоторое преобразование вектора x, то есть представим вектор x контрвариантным образом:

$$x = G\xi,$$

Где G – некоторая невырожденная матрица. Если рассматриваем случай полностью управляемой системы, то в качестве матрицы G можно взять матрицу управляемости:

$$G = U.$$

$\overline{x} = \xi_1\overline{g}_1 + \xi_2\overline{g}_2 + \dots + \xi_n\overline{g}_n$ – контрвариантное разложение вектора $\overline{x}$ по векторам базиса $\overline{g}_1, \dots, \overline{g}_n$

$$\dot{\xi}_1\overline{g}_1 + \dot{\xi}_2\overline{g}_2 + \dots + \dot{\xi}_n\overline{g}_n = A\left(\xi_1\overline{g}_1 + \xi_2\overline{g}_2 + \dots + \xi_n\overline{g}_n\right) + \overline{g}_1 u = \\ = \xi_1\overline{g}_2 + \xi_2\overline{g}_3 + \dots + \xi_{n-1}\overline{g}_n + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n + \overline{g}_1 u$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha_1\xi_n + u \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \alpha_2\xi_n \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = \xi_{n-1} + \alpha_n\xi_n \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 1 & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *каноническая форма по управлению.*

Существует еще одно преобразование, которое позволяет представить систему в следующем виде:

$$\begin{cases} f_n = g_1 \\ f_{n-1} = g_2 - \alpha_1 g_n \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + u \end{pmatrix}$$

Вторая каноническая форма (форма Сильвестра):

$$A'' = \begin{pmatrix} \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix},\ b'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что систем n-го порядка, записанная в форме Коши, эквивалентна дифференциальному уравнению n-го порядка:

$$y_1^{(n)} + \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n y_1 = u.$$

Иногда это можно использовать как критерий управляемости. Если можно представить систему в виде уравнения n-го порядка, то такая система является полностью управляемой.

Пример (обратная задача)

$\ddot{y} - 2\dot{y} - y = \dot{u} + u$ – уравнение управляемой системы.

Представим систему в виде Коши. Воспользуемся тем, что матрица данной системы (матрица второго порядка) имеет форму Фробениуса.

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + \beta_2 u \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение:

$$\ddot{x}_1 = 2\dot{x}_2 + \beta_1 \dot{u} \ \ =>$$

$$2x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$\ddot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 + 2\beta_2 u + \beta_1 \dot{u} \ \ =>$$

$$\ddot{x}_1 = 2x_1 + \dot{x}_1 - \beta_1 u + 2\beta_2 u + \beta_1 \dot{u}$$

Из вида уравнения: $\beta_1 = 1, \quad 2\beta_2 - \beta_1 = 1 \quad => \quad \beta_2 = 1.$

$$=> \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u \end{cases} -$$ эквивалентная система в форме Коши.

Задание на дом

1) Привести к каноническому виду по управлению управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 - y_2 - y_3 - u \\ \dot{y}_2 = y_1 + 2y_2 + y_3 + u. \\ \dot{y}_3 = y_1 + 2y_2 + u \end{cases}$$

Семинар 3

Декомпозиция по вектору управления

Критерий управляемости (повторение материала предыдущего семинара)

Если рассмотреть систему общего вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

И характеристическое уравнение матрицы A:

$$\lambda^n = \alpha_1 + \alpha_2\lambda + \dots + \alpha_n\lambda^{n-1},$$

Тогда некоторым контрвариантным преобразованием можно привести систему к каноническому виду.

Пусть есть контрвариантное преобразование: $x = G\xi \quad =>$

$$\xi = G^{-1}AG\xi + G^{-1}Bu$$

$$A' = G^{-1}AG, \qquad b' = G^{-1}B.$$

В скалярном случае $G = U$ мы действовали иначе – через систему специально подобранных векторов получали решение. Был рассмотрен случай, когда система векторов записывалась следующим образом:

$$g_1 = b, g_{i+1} = Ag_i,$$

$$g_{n+1} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ совпадают с коэффициентами характеристического уравнения. Это случай полностью управляемой системы.

Частый случай (когда нет полной управляемости)

Если нет полной управляемости, то $\exists m < n$ (система векторов $(g_1, \dots, g_m)$ линейно независима), такое что $g_{m+1} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_m g_m$. Тогда появляется возможность разделить систему на две подсистемы, дополнив матрицу G любыми линейно независимыми векторами до базиса:

$$G = \{g_1, \dots, g_m, f_1, \dots, f_k\},$$

Где $k = n - m$.

Представим систему контрвариантным способом:

$$\overline{x} = G\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix},$$

Где ξ- n-мерный вектор, η - k-мерный вектор.

Вывод опустим. В новых координатах:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_{11}\xi + A_{12}\eta + B_1 u - \text{вполне управляемая в своем подпространстве система} \\ \dot{\eta} = A_{22}\eta - \text{полностью неуправляемая подсистема} \end{cases}$$

(A_{11}, B_1) – полностью управляемая. В силу второго уравнения, если в начальный момент точка находится в управляемом подпространстве:

$$\eta(t_0) = 0 \;\; => \;\; \eta(t) \equiv 0 \;\; =>$$

A_{12} пропадает => траектория не выходит из подпространства описываемого координатами ξ, и можно ставить вопрос об управляемости системы в этом подпространстве.

Итак, система распадается на две: полностью управляемую в своем подпространстве и неуправляемую. Составим декомпозицию, которая крайне важна для анализа системы и последующего синтеза управления u, причем оказывается, что теперь u можно строить в виде обратной связи не по всем переменным, а только по управляемым переменным. Это понижает порядок системы, позволяет построить более простое управление.

Пример (проверить управляемость, декомпозировать систему)

Задана управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u. \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3 \end{cases}$$

Требуется проверить управляемость и в случае необходимости декомпозировать систему по вектору управления.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; g_2 = Ag_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; g_3 = Ag_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что полной управляемости нет, потому что g_3 линейная комбинация g_1, g_2:

$$g_3 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, \quad \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0.$$

Дополним до базиса. Матрицу G выберем следующим образом:

$$G = \{g_1, g_2, f_1\}.$$

Рассмотрим один из способов выбора f_1:

$$f_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

f_1 ортогонален двум первым векторам базиса =>

$$g_1^T f_1 = 0 \quad => \quad \beta_2 = 0,$$

$$g_2^T f_1 = 0 \quad => \quad \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 0.$$

Таким образом, f_1 можно задать в следующем виде:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем вид декомпозированной системы. Для этого проведем контрвариантное преобразование:

$$x = g_1\xi_1 + g_2\xi_2 + f_1\eta_1$$

$$\dot{x} = g_1\dot{\xi}_1 + g_2\dot{\xi}_2 + f_1\dot{\eta}_1 = Ag_1\xi_1 + Ag_2\xi_2 + Af_1\eta_1 + g_1 u.$$

$$Ag_2 = g_3 = 2g_1,$$

$$f_2 = Af_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_1 f_1,$$

Где $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1,\ \gamma_1 = 0.$

Выпишем вид декомпозированной системы:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 2\xi_2 + u \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 = 0 \end{cases}.$$

Получается, есть неуправляемая система первого порядка, асимптотически неустойчивая, и есть вторая система, которая является полностью управляемой при $\eta_1 = 0$ (при $\eta_1 \neq 0$ может вести себя произвольно, что не позволяет эффективно управлять системой).

Пример (декомпозиция управляемой системы четвертого порядка)

Задана управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_3 - u \\ \dot{x}_2 = x_2 + 4x_4 \\ \dot{x}_3 = x_1 + u \\ \dot{x}_4 = -x_2 - 3x_4 \end{cases}$$

Требуется проверить управляемость и в случае необходимости декомпозировать систему по вектору управления.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g_1,$$

$$g_2 = Ag_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_3 = Ag_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1 \ \ =>$$

Полной управляемости нет.

Дополним до базиса. Матрицу G выберем следующим образом:

$$G = \{g_1, g_2, f_1, f_2\},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = Af_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

<u>Дома: проверить независимость.</u>

Для того чтобы декомпозировать систему надо вычислить f_3:

$$f_3 = Af_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2, \ \gamma_1 = -1, \gamma_2 = 2 \ => \ \ \beta_1 = \beta_1 = 0.$$

Проведем преобразование системы, запишем систему в новых координатах.

$$\overline{x} = \xi_1 \overline{g}_1 + \xi_2 \overline{g}_2 + \eta_1 \overline{f}_1 + \eta_2 \overline{f}_2$$

$$\dot{\overline{x}} = \dot{\xi}_1 \overline{g}_1 + \dot{\xi}_2 \overline{g}_2 + \dot{\eta}_1 \overline{f}_1 + \dot{\eta}_2 \overline{f}_2 = A\xi_1 \overline{g}_1 + A\xi_2 \overline{g}_2 + A\eta_1 \overline{f}_1 + A\eta_2 \overline{f}_2 + g_1 u,$$

$$A\overline{g}_1 = \overline{g}_2, \qquad A\overline{g}_2 = \alpha_1 \overline{g}_1 + \alpha_2 \overline{g}_2, \ A\overline{f}_1 = \overline{f}_2, \qquad A\overline{f}_2 = \beta_1 \overline{g}_1 + \beta_2 \overline{g}_2 + \gamma_1 \overline{f}_1 + \gamma_2 \overline{f}_2 \, .$$

Полностью управляемая в своем подпространстве подсистема будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + u \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 - \xi_2 \end{cases}$$

Можно выбрать u в виде обратной связи таким образом, чтобы стабилизировать систему.

Неуправляемая подсистема (можно ли ее стабилизировать, выясним позднее):

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_1 - 2\eta_2 \end{cases}$$

Декомпозиция для не скалярного управления

Рассмотрим общий случай, когда управление не скалярно $(m > 1)$.Тогда управляемая система имеет следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Чтобы проверить управляемости, надо составить матрицу управляемости:

$$U = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B).$$

Условие управляемости: $rank\ U = n$.

Если $rank\ U < n$, то система распадается на две подсистемы (на управляемую и неуправляемую).

Рассмотрим двумерный случай: $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

Система: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2 \\ \dot{x}_3 = 2x_3 + x_4 + u_2 \\ \dot{x}_4 = 2x_4 + u_1 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$rank\ U = 4 \quad => \quad$ матрица полностью управляемая.

Дома: проверить результат.

Убедимся, что если будет работать только одна компонента управления, то полной управляемости нет.

Пусть работает только u_1.

$$g_1 = b_1, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad g_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3,$$

Где $\alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = -8,\ \alpha_3 = 5 \ \ => $ нет управляемости.

Исследуем вторую компоненту u_2:

$$f_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = Ag_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Последняя строка нулевая, следовательно, полной управляемости нет.

Проведем декомпозицию.

$$f_4 = \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \beta_2 + 2\beta_3 = 3 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 = 8 \end{cases}$$

$$\beta_1 = 3 - \frac{18}{4} = -\frac{3}{2}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{4}, \qquad \beta_3 = \frac{9}{4}.$$

Возможны два способа получения декомпозиции.

Последовательная декомпозиция

По каждой из компонент система не является управляемой, но в целом управляема. В качестве базиса можно выбрать систему векторов:

$$G = \{g_1, g_2, g_3, f_1\},$$

$$f_2 = Af_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = 1,$$

$$\begin{cases} \beta_2 + 4\beta_3 + 1 = 2 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \\ \beta_1 + \beta_2 + 4\beta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \beta_1 = -\frac{6}{7}, \ \ \beta_2 = -\frac{1}{7}, \ \ \beta_3 = \frac{2}{7}.$$

Используем контрвариантное разложение:

$$g_1\dot{\xi}_1 + g_2\dot{\xi}_2 + g_3\dot{\xi}_3 + f_1\dot{\eta}_1 = Ag_1\xi_1 + Ag_2\xi_2 + Ag_3\xi_3 + Af_1\eta_1 + g_1u_1 + f_1u_2,$$

$$Ag_1 = g_2, \qquad Ag_2 = g_3, \qquad Ag_3 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3,$$
$$Af_1 = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3 + \gamma_1 f_1 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 4\xi_3 + u_1 - \frac{6}{7}\eta_1 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 - 8\xi_3 - \frac{1}{7}\eta_1 \\ \dot{\xi}_3 = \xi_2 + 5\xi_3 + \frac{2}{7}\eta_1 \\ \dot{\eta}_1 = \eta_2 + u_2 \end{cases}$$

Система является полностью управляемой со всеми вытекающими свойствами. Для стабилизации достаточно выбрать:

$$u_2 = K_4\eta_1,$$
$$u_1 = K_1\xi_1 + K_2\xi_2 + K_3\xi_3.$$

Задание на дом:

Провести параллельную декомпозицию. Для этого в качестве матрицы преобразования выбирается система векторов:

$$G = \{g_1, f_1, g_2, f_2\}.$$

Семинар 4
Задача наблюдения и оценивания. Критерий наблюдаемости. Ковариантные координаты

Задача наблюдения и оценивания

Мы рассматривали линейную управляемую систему:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

где управление строится позиционным образом по информации об отклонениях x от программного движения. Позиционное управление u хотим построить как некую линейную обратную связь от отклонений x:

$$u = Kx.$$

Но для того, чтобы реализовать такое управление, надо знать отклонения x. Чтобы их узнать, необходимо на управляемом объекте иметь измерители, измерять некоторые линейные функции координат, которые можно линеаризовать относительно известного программного движения. Тогда всю информацию от измерителей можно записать в следующем виде:

$$z(\tau) = H(\tau)x(\tau),$$

где $\tau \in [t_0, t],\ x(t) \in R^n,\ u(t) \in R^s,\ z(t) \in R^m,$ на практике, как правило, $m \ll n.$ За счет того, что измерений много, то по этой информации можно восстановит x. Это и есть определение наблюдаемости.

Так, линейная система называется *полностью наблюдаемой*, если $\exists t$, что по измерению $z(\tau)$ на отрезке $\tau \in [t_0, t]$ можно точно восстановить вектор $x(t)$.

Критерий наблюдаемости. Сопряженность понятий управляемости и наблюдаемости

Здесь есть полная аналогия с задачей управления. Для того, чтобы получить критерий наблюдаемости, надо вычислить *матрицу наблюдаемости*:

$$N = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Система называется полностью наблюдаемой, если:

$$rank\ N = n - \textit{критерий полной наблюдаемости}.$$

Более того, можно показать, что если есть две системы, то задача двойственная (разбивается на две системы, аналогичные по записи):

$$\boldsymbol{I}: \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = Hx \end{cases} \qquad \boldsymbol{II}: \quad \begin{cases} \dot{y} = -A^T + H^T w \\ \xi = B^T y \end{cases}.$$

Если система I полностью управляема, то система II полностью наблюдаема и наоборот. Можно было бы обойтись только одним понятием, но это неудобно.

Пример

Пусть известна линейная система следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \end{cases}$$

и известна информация: $z = x_1$ на $\tau \in [t_0, t]$.

Выясним наблюдаемость системы.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad H = (1 \quad 0 \quad 0 = h^T),$$

$$g_1^T = h^T, \qquad g_2^T = h^T A, \quad \dots, \qquad g_{i+1}^T = g_i^T A.$$

Пусть система векторов $\{g_1, \dots, g_n\}$ – линейно независима. Тогда матрица наблюдаемости имеет следующий вид:

$$N = \begin{pmatrix} g_1^T \\ g_2^T \\ \vdots \\ g_n^T \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что определитель этой матрицы не равен нулю и система является полностью наблюдаемой.

Рассмотрим способ составления алгоритма проверки этого условия и приведения системы к каноническому виду.

Ковариантные координаты

Здесь при изучении наблюдаемости проведем ковариантное разложение системы по векторам базиса, которые совпадают с матрицей N. Сделаем следующее преобразование:

$$\begin{cases} \xi_1 = x^T g_1 = g_1^T x \\ \xi_2 = x^T g_2 \\ \quad \vdots \\ \xi_n = x^T g_n \end{cases}$$

Систему $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ z = h^T x \end{cases}$ нужно представить в новых координатах, то есть провести декомпозицию.

Вектора $g_1, \dots, g_n$ составляют базис => $g_{n+1} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – коэффициенты характеристического уравнения матрицы A.

$$\begin{cases} g_1^T \dot{x} = g_1^T A x \\ z = h^T x \end{cases}$$

Запишем уравнение в новых координатах:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \quad \vdots \\ \dot{\xi}_n = g_{n+1}^T x = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n \end{cases}$$

Поскольку измерение скалярно, то:

$$z = \xi_1.$$

Таким образом, мы записали *канонический вид* полностью наблюдаемой системы.

$$A' = \begin{pmatrix} \ddots & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, \ h' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ - *каноническая форма Сильвестра.*

Получим канонический вид нашей системы:

$$g_1^T = (1 \quad 0 \quad 0)$$

$$g_2^T = (0 \quad 1 \quad 0)$$

$$g_3^T = (1 \quad 1 \quad 1)$$

$$g_4^T = (2 \quad 2 \quad 0)$$

$$g_4 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3, \ \alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = 2, \qquad \alpha_3 = 0 \ =>$$

канонический вид нашей системы:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = 2\xi_1 + 2\xi_2 \\ z = \xi_1 \end{cases}$$

Пример (перевернутый маятник)

См. рис. 1.2.

Линеаризованное уравнение колебаний маятника:

$$\ddot{x} - x = u$$

$$\varphi^* = \dot{\varphi}^* = 0$$

$$x_1 = \Delta\varphi = \varphi$$

$$x_2 = \Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi}$$

Будем решать задачу стабилизации вертикального положения. При этом надо формировать u как обратную связь от отклонения x.

Управляемая система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$$

Чтобы получить информацию об отклонениях нужно поставить на тележку измеритель, позволяющий отследить отклонение маятника от вертикали. Тогда измерение можно представить в следующем виде:

$$z = x_1.$$

Выясним, является ли система наблюдаемой.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = (1 \quad 0), \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определитель не равен нулю => есть полная наблюдаемость.

Рассмотрим второй случай. На платформе закреплен датчик угловой скорости (ДУС):

$$z = x_2.$$

$$H = (0 \quad 1), \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Определитель не равен нулю => есть полная наблюдаемость. Таким образом, имея на борту только ДУС можно восстановить и координату, и угловую скорость маятника.

Усложним задачу. Измеряем угол отклонения маятника от вертикали, но теперь с некоторой ошибкой r:

$$z = x_1 + r - \textit{формирующее уравнение}.$$

r- неизвестна, но не меняется во времени ($r = const$).

Расширим систему, введем новую координату: $x_3 = r$.

Для исследования наблюдаемости примем $u \equiv 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

(когда есть некая информация об ошибках измерения, то размерность системы повышается с тем, чтобы описать эти ошибки)

$$z = x_1 + x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ H = (1 \quad 0 \quad 1),$$

$$N = \begin{pmatrix} g_1^T = (1 \quad 0 \quad 1) \\ g_2^T = (0 \quad 1 \quad 0) \\ g_3^T = (1 \quad 0 \quad 0) \end{pmatrix} \ =>$$

система полностью наблюдаемая.

Дома: проверить, является ли система полностью наблюдаемой для $z = x_2 + x_3$.

Пример (формирующее уравнение)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ z = x_1 + \gamma \sin \omega t \end{cases}$$

$$\omega = const - \text{ известна},$$

$$\gamma = const - \text{неизвестна}.$$

Проверим наблюдаемость системы. Введем формирующее уравнение:

$$x_3 = \gamma \sin \omega t$$

$$x_4 = \gamma \cos \omega t$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \omega x_4 \\ \dot{x}_4 = \omega x_3 \end{cases} - \text{ необходимо добавить к исходной системе,}$$

$$z = x_1 + x_3.$$

Мы свели задачу к предыдущей.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} H = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) = g_1^T \\ g_2^T = (0 \quad 1 \quad 0 \quad \omega) \\ g_3^T = (-1 \quad 0 \quad -\omega^2 \quad 0) \\ g_4^T = (0 \quad -1 \quad 0 \quad -\omega^3) \end{pmatrix} =>$$

$$\det N = \omega(\omega^2 - 1)^2 \neq 0 \quad => \quad \omega \neq 0, 1, -1.$$

Полной наблюдаемости нет. Значит матрицу преобразования

$$N = \begin{pmatrix} g_1^T \\ \vdots \\ g_m^T \\ f_1^T \\ \vdots \\ f_k^T \end{pmatrix},$$

$$g_1 = h, \qquad g_{i+1}^T = g_i^T A, \dots m < n$$

$g_1, \dots, g_m$ - линейно независимы, дополним до базиса:

$$\{g_1, \dots, g_m, f_1, \dots, f_k\}.$$

В общем случае:

$$\dot{x} = Ax$$

$$z = Hx = h^T x$$

$$g_{m+1} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_m g_m.$$

Система разбивается на две подсистемы:

$$\boldsymbol{I}: \quad \begin{cases} \dot{\xi} = A_{11}\xi \\ z = H_\xi \xi \end{cases} \qquad \boldsymbol{II}: \quad \begin{cases} \dot{\eta} = A_{21}\xi + A_{22}\eta \end{cases}$$

Рассмотрим более простой случай – измерение скалярно.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$$

$$z = x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_3^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} => \quad g_3 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 2 \ =>$$

система не является наблюдаемой.

Выпишем наблюдаемую подсистему (имеет канонический вид):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = 2\xi_2 \end{cases}, \qquad z = \xi_2$$

Для получения ненаблюдаемой подсистемы введем вектор f, линейно независимый с первыми двумя векторами:

$$f_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f_2^T = f_1^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ =>$$

$$\beta_1 = -1, \qquad \beta_2 = 1, \qquad \gamma = 0.$$

Выпишем декомпозированную систему:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = 2\xi_2 \\ \dot{\eta} = -\xi_1 + \xi_2 + 0 \cdot \eta \end{cases}, \qquad z = \xi_2.$$

Задание на дом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \qquad z = x_1 + ce^{\alpha t}$$

$\alpha = const -$ известная, $\qquad c = const -$ неизвестная

Определить наблюдаемость системы.

Семинар 5
Стабилизация системы при полной информации об отклонениях

Стабилизация управляемой системы

Пусть есть некоторая линейная управляемая система:

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Мы хотим, чтобы решение системы было асимптотически устойчивым. Для этого выбирается управление в виде *линейной обратной связи* от координат системы:

$$u = Kx.$$

Мы предполагаем, что координаты известны.

$$\dot{x} = (Ax + BK)x => \text{замкнутая система} =>$$

Все сводится к тому, чтобы выбрать коэффициент обратной связи K так, чтобы матрица замкнутой системы $A_K = A + BK$ была устойчива (гурвицева). Возникает вопрос: всегда ли можно выбрать такие коэффициенты? Рассмотрим пример.

Пример (перевернутый маятник)

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = x_1 + u = x_1 + k_1x_1 + k_2x_2\end{cases}$$

Система полностью управляема, значит, ее можно представить в виде одного уравнения:

$$\ddot{x} - x = k_1x + k_2\dot{x} \ =>$$

$$\ddot{x} - (1 + k_1)x - k_2\dot{x} = 0 \ =>$$

$$\lambda^2 - k_2\lambda - (1 + k_1) = 0 \ =>$$

Необходимое и достаточное условия устойчивости:

$$\begin{cases}-k_2 > 0\\ -(1 + k_1) > 0\end{cases}$$

Кроме того, мы знаем, что если система полностью управляема, то эти коэффициенты можно выбрать таким образом, что замкнутая система будет иметь какие угодно корни характеристического уравнения. Таким образом, можно обеспечить любой запас устойчивости в системе, то есть, чтобы все решения x_i удовлетворяли неравенству:

$$|x_i| < ce^{-\alpha t}.$$

Предположим, мы хотим получить $\alpha = 1 \ =>$

$$(\lambda+1)^2=\lambda^2+2\lambda+1=0 \;\;=>$$

$$\begin{cases}-k_2=2\\ -(1+k_1)=1\end{cases} \;\;=>$$

Находим необходимые коэффициенты обратной связи.

Пример (система третьего порядка)

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1-x_2-x_3-u\\ \dot{x}_2=x_1+2x_2+x_3+u\\ \dot{x}_3=x_1+2x_2+u\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&2&1\\1&2&0\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Построим управление в виде обратной связи $u=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3$,

$$U=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\1&2&4\\1&1&3\end{pmatrix},\ \det U\neq 0\ \ =>\ \text{система полностью управляемая,}$$

Таким образом, мы можем выбрать коэффициенты k_1, k_2, k_3 так, чтобы характеристическое уравнение имело любые корни и соответственно любые коэффициенты. Предположим, мы хотим получить следующее характеристическое уравнение:

$$(\lambda+2)(\lambda+1)^2=0.$$

Запас устойчивости здесь 1: $\alpha=1$.

$$\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2=0 \text{ (в видеоматериале допущена ошибка).}$$

Чтобы выбрать коэффициенты, приведем систему к каноническому виду.

$$g_4=Ag_3=\begin{pmatrix}-5\\9\\6\end{pmatrix}=\alpha_1g_1+\alpha_2g_2+\alpha_3g_3\ \ =>\ \alpha_1=1,\qquad \alpha_2=2,\qquad \alpha_3=3\ \ =>$$

Используя предыдущие результаты, можем выписать вид управляемой системы в новых переменных:

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_2\\ \dot{y}_1=y_3\\ \dot{y}_3=y_1+2y_2+3y_3+u\end{cases}\qquad \text{- канонический вид.}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3=\alpha_1+\alpha_2\lambda+\alpha_3\lambda^2=1+2\lambda+3\lambda^2.$$

Скалярное уравнение, соответствующее этой системе, можно получить дифференцированием:

$$\dddot{y}_1 - 3\ddot{y}_1 - 2\dot{y}_1 - y_1 = k_1 y_1 + k_2\dot{y}_1 + k_3\ddot{y}_1$$

$$\dddot{y}_1 + (-3 - k_3)\ddot{y}_1 + (-2 - k_2)2\dot{y}_1 + (-1 - k_1)y_1 = 0$$

Характеристическое уравнение имеет те же коэффициенты =>

$$\begin{cases} -1 - k_1 = 4 \\ -2 - k_2 = 5 \\ -3 - k_3 = 2 \end{cases} => \begin{cases} k_1 = -5 \\ k_2 = -7 \\ k_2 = -5 \end{cases}$$

Так, мы научились подбирать коэффициенты обратной связи управляемой системы так, чтобы обеспечить требуемое характеристическое уравнение замкнутой системы и соответственно требуемые корни характеристического уравнения.

Стабилизация не полностью управляемой системы

Но что делать, если полной управляемости нет? Тогда система распадается на две подсистемы:

$\dot{\xi} = A_{11}\xi + A_{12}\eta + B_\xi u$ – управляемая система в своем подпространстве (если η=0, то пара (A_{11}, B_ξ) - полностью управляемая),

$\dot{\eta} = A_{22}\eta$ – автономная неуправляемая подсистема.

Исходная система: $\dot{x} = Ax + Bu$.

Когда можно подбирать управление в виде обратной связи $u = Kx$ так, чтобы стабилизировать систему?

1) Когда система полностью управляемая
2) Когда система неуправляемая, надо провести декомпозицию => система представляется в виде двух подсистем. Одна полностью управляемая в своем подпространстве, другая полностью неуправляемая. Вопрос о возможности стабилизации полностью зависит от матрицы A_{22}.

$$\det(A_{22} - \lambda E) = 0$$

Если $\max_j Re\lambda_j = -\alpha_0 < 0$, то систему стабилизировать можно, матрица A_{22} устойчива с запасом α_0.

Как выбирать управление? Здесь есть упрощение, поскольку понижается размерность системы. Управление можно выбирать как обратную связь от управляемых переменных:

$$u = K\xi,$$

причем матрицу K можно выбрать так, чтобы замкнутая управляемая система имела любые корни.

Уравнение $\dot{\xi} = A_{11}\xi + A_{12}\eta + B_\xi u$ неоднородное, слагаемые $A_{12}\eta$ определяют скорость, с которой решение ξ может стремиться к нулю. То есть система будет стабилизируемая, но K можно выбрать так, что запас устойчивости будет $\alpha_0 - \varepsilon,\ \ \varepsilon > 0$.

Пример

Требуется выяснить возможность стабилизации и стабилизировать при наличии полной информации с максимальным запасом устойчивости следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_2 + 2x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - u \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = g_1 \ =>$$

$$g_2 = Ag_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2,$$

$$\alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = 1 \ =>$$

Система не является полностью управляемой.

Проведем декомпозицию, чтобы узнать, можно ли стабилизировать систему.

Матрица преобразования: $G = (g_1 \quad g_2 \quad f_1),\ f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f_2 = Af_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_1 f_1 \ =>$$

$$\beta_1 = 1, \qquad \beta_2 = 1, \qquad \gamma_1 = -2$$

Запишем декомпозированную подсистему. Управляемая часть имеет канонический вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 2\xi_2 + u + \eta_1 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \xi_2 + \eta_1 \\ \dot{\eta} = -2\eta_1 \end{cases}.$$

Последняя подсистема отделяется и видно, что она устойчивая с запасом устойчивости $\alpha_0 = 2$.

Теперь имеет смысл подбирать u как линейную обратную связь по управляемым переменным:

$$u = k_1\xi_1 + k_2\xi_2.$$

Теперь подберем коэффициенты так, чтобы характеристическое уравнение управляемой подсистемы имело вид:

$$(\lambda + 2)^2 = 0 \quad => \quad \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

$$\det(A_{11} - \lambda E) = \det A'$$

$$A' = \begin{pmatrix} k_1 - \lambda & 2 + k_2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad => \quad \lambda^2 - (k_1 + 1)\lambda + (k_1 - 2 - k_2) = 0 \quad =>$$

$$\begin{cases} -(k_1 + 1) = 4 \\ k_1 - 2 - k_2 = 4 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} k_1 = -5 \\ k_2 = -11 \end{cases}$$

Задание на дом:

Есть управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - 2x_3 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + 2u, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 + u \end{cases}$$

Проверить, стабилизируема ли она, и если стабилизируема, подобрать коэффициенты обратной связи так, чтобы обеспечить максимальный запас устойчивости в этой системе.

Семинар 6
Асимптотически устойчивый алгоритм оценивания

Случай полной наблюдаемости

Рассмотрим случай полной наблюдаемости. Пусть есть некая управляемая система, линейная система в отклонениях:

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Есть информация об отклонениях: $z(\tau) = Hx(\tau),\ \ \tau \in [t_0, t]$.

Фазовый вектор: $x(t) \in R^n$.

Вектор измерений: $z(t) \in R^m,\ \ m \ll n$.

Мы хотим восстановить вектор x. Для этого используется несмещенный линейный оцениватель, который имеет следующий вид:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + \widetilde{K}(z - H\tilde{x})$$
$$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений, можем получить $\tilde{x}$ оценку отклонений x.

Если пара матриц (A, H) – полностью управляемая, то можно выбрать любые начальные условия в системе и можно подобрать коэффициент обратной связи таким образом, что ошибки оценки будут асимптотически стремиться к нулю:

$$\Delta x = x - \tilde{x} \to 0.$$

То есть если теперь записать систему для ошибки оценки

$$\Delta \dot{x} = \left(A - \widetilde{K}H\right)\Delta x,$$

то матрицу $A_H = \left(A - \widetilde{K}H\right)$ можно выбрать таким образом, что она будет гурвицевой. Более того, если есть полная наблюдаемость, то можно получить характеристическое уравнение матрицы A_H с любыми корнями и запасом устойчивости.

Задача (перевернутый маятник, построение оценивателя)

$$\ddot{x} - x = u$$

Требуется построить оцениватель по информации $z = x + r$ – измеряется угол отклонения маятника, но с некоторой постоянной неизвестной ошибкой $r = const$.

Для того, чтобы решить эту задачу, необходимо добавить формирующее уравнение для ошибки r:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = r \end{cases} \;=>\; \text{в форме Коши} \; \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u\,, z = x_1 + \mathrm{x}_3 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Как мы уже знаем, эта система является полностью наблюдаемой. Убедимся в этом.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = (1 \quad 0 \quad 1) \;=>$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = g_1^T \\ = g_2^T \\ = g_3^T \end{matrix} \;=>\; \det N \neq 0 \;=>\; \text{система полностью наблюдаемая,}$$

то есть мы можем построить наблюдатель таким образом, чтобы добиться любого характеристического уравнения для ошибок оценки. На практике, чтобы найти коэффициенты обратной связи в наблюдателе, лучше перейти к каноническому виду по наблюдению.

$$\begin{cases} \xi_1 = g_1^T x \\ \xi_2 = g_2^T x \\ \xi_3 = g_3^T x \end{cases}$$

$$g_4^T = A g_3^T = (0 \quad 1 \quad 0)$$

$$g_4 = A g_3 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 \;=>\; \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \alpha_3 = 0 \;=>$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 + u\,,\;\; z = \xi_1 \\ \dot{\xi}_4 = \xi_2 \end{cases}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=>\; b'^T = (g_1^T b, g_2^T b, g_3^T b) = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Построим оцениватель. $\tilde{y}$ - оценка $\tilde{\xi}$.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_2 + \tilde{k}_1(\xi_1 - \tilde{y}_1) \\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3 + u + \tilde{k}_2(\xi_1 - \tilde{y}_1) \\ \dot{\tilde{y}}_3 = \tilde{y}_2 + \tilde{k}_3(\xi_1 - \tilde{y}_1) \end{cases}$$

Теперь мы можем выбрать коэффициенты обратной связи таким образом, чтобы добиться любой степени устойчивости системы в отклонениях.

Ошибки оценки: $\Delta y = \xi - y$.

$\begin{cases} \Delta\dot{y}_1 = \Delta y_2 - \tilde{k}_1\Delta y_1 \\ \Delta\dot{y}_2 = \Delta y_3 - \tilde{k}_2\Delta y_1 \\ \Delta\dot{y}_3 = \Delta y_2 - \tilde{k}_3\Delta y_1 \end{cases}$ - система уравнений, описывающая ошибки оценивания.

Например, подберем коэффициенты обратной связи так, чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы имело следующий вид:

$$(\lambda + 1)^3 = 0 \;\; => \;\; \text{запас устойчивости } \alpha_0 = 1.$$

$$\det(A' - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\tilde{k}_1 - \lambda & 1 & 0 \\ -\tilde{k}_2 & -\lambda & 1 \\ -\tilde{k}_3 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + \tilde{k}_1\lambda^2 + (\tilde{k}_2 - 1)\lambda + \tilde{k}_3 - \tilde{k}_1 = 0 =>$$

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = 3 \\ (\tilde{k}_2 - 1) = 3 \\ \tilde{k}_3 - \tilde{k}_1 = 1 \end{cases} => \begin{cases} \tilde{k}_1 = 3 \\ \tilde{k}_2 = 4 \\ \tilde{k}_3 = 4 \end{cases}$$

Итак, мы построили систему, которая дает асимптотически точные оценки фазовых переменных. Причем убывание ошибки происходит с запасом устойчивости $\alpha_0 = 1$.

Случай отсутствия полной наблюдаемости

В случае отсутствия полной наблюдаемости построить замкнутую систему с любым характеристическим уравнением не удастся.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z(\tau) = Hx(\tau), \qquad \tau \in [t_0, t] \end{cases}$$

Пара (A, H) - не является полностью наблюдаемой, $rank\, N < n$. Тогда, как известно, можно провести декомпозицию по вектору наблюдения. В результате в новых координатах система распадется на управляемую и неуправляемую подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = A_{11}\xi \quad z = H_\xi \xi \\ \dot{\eta} = A_{12}\xi + A_{22}\eta \end{cases}$$

Вопрос о том, можно ли построить оцениватель, целиком зависит от матрицы A_{22}.

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$\det(A_{22} - \mu E) = 0.$$

Если $\max\limits_j Re\, \mu_j = -\alpha_0 < 0$, то можно построить асимптотически точный оцениватель.

Если $\max\limits_j Re\, \mu_j = -\alpha_0 > 0$, то этого сделать нельзя.

Причем как бы ни выбирали коэффициенты обратной связи, не удастся достичь запаса устойчивости больше α_0.

Пример

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - x_3\\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - x_3\\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_3\end{cases}$$

$$z = x_1 - x_3$$

Требуется проверить, возможно ли построить оцениватель,и если возможно, то построить такой, который дает максимальный запас устойчивости для ошибок оценки.

Для того, чтобы убедиться в детектируемости системы (ошибки оценки могут стремиться к нулю), нужно провести декомпозицию.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad H = (1 \quad 0 \quad -1) = g_1^T$$

$$g_2^T = (1 \quad 1 \quad 0)$$

$$g_3^T = (1 \quad -1 \quad -2)$$

$$g_3 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \;\; => \;\; \alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = -1 \;\; =>$$

$rank\, N = 2$ => нет наблюдаемости.

Уравнение наблюдаемой подсистемы:

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1 = \xi_2\\ \dot{\xi}_2 = 2\xi_1 - \xi_2\end{cases}, \quad z = \xi_1$$

Для того, чтобы провести декомпозицию, выберем f_1.

$$f_1^T = (0 \quad 2 \quad 1)$$

$$f_2^T = Af_1^T = (1 \quad -4 \quad -3) = \beta_1 g_1^T + \beta_2 g_2^T + \gamma_1 f_1^T \;\; =>$$

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_1 = -2 =>$$

Уравнение ненаблюдаемой подсистемы:

$$\dot{\eta}_1 = \xi_1 - 2\xi_1.$$

Оцениватель:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_1 = \tilde{\xi}_2 + \tilde{k}_1(\xi_1 - \tilde{\xi}_1) \\ \dot{\tilde{\xi}}_2 = 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \tilde{k}_2(\xi_1 - \tilde{\xi}_1) \\ \dot{\tilde{\eta}}_1 = \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\eta}_1 \end{cases}$$

Степень устойчивости системы не может быть больше 2, поскольку $\eta_1 \sim ce^{-2t}$.

Уравнение ошибок оценок:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\xi}_1 = \Delta\xi_2 - \tilde{k}_1\Delta\xi_1 \\ \Delta\dot{\xi}_2 = 2\Delta\xi_1 + \Delta\xi_2 - \tilde{k}_2\Delta\xi_1 \end{cases}$$

$$\Delta\dot{\eta} = \Delta\xi_1 - 2\Delta\eta_1 \quad => \quad \Delta\eta_1 \sim \eta_1 \quad => \quad \Delta\xi_1 \sim ce^{-2t} \quad =>$$

Характеристическое уравнение:

$$(\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4.$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} -\tilde{k}_1 & 1 \\ 2 - \tilde{k}_2 & 1 \end{pmatrix} =>$$

$$\det(A_{12} - \lambda E) = \lambda^2 + \left(\tilde{k}_1 - 1\right)\lambda + \tilde{k}_2 - \tilde{k}_1 - 2 = 0 \; =>$$

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 - 1 = 4 \\ \tilde{k}_2 - \tilde{k}_1 - 2 = 4 \end{cases} => \begin{cases} \tilde{k}_1 = 5 \\ \tilde{k}_2 = 11 \end{cases}$$

Оцениватель в задаче движения ЛА по глиссаде

Мы хотим построить автомат, который стабилизирует движение летательного аппарата (ЛА) по глиссаде.

Рассмотрим задачу посадки ЛА по глиссаде (см. рис. 6.1).

Модель летательного аппарата будем рассматривать упрощенно. Будем считать, что корпус – это симметричное твердое тело, плоскость симметрии которого совпадает с вертикальной плоскостью. Тогда достаточно рассматривать движение ЛА в вертикальной плоскости. Время движения не велико => рассматриваем задачу в приближении плоской земли.

Изучать движение этого летательного аппарата выгодно в скоростной системе координат.

Угол глиссады – ε.

$Cx_1x_2x_3$ – скоростная система координат.

Наклон вектора скорости к горизонтали - угол наклона траектории θ.

Наклон корпуса к горизонтали – угол тангажа ЛА φ.

Угол между корпусом и вектором скорости – угол атаки α, $\quad \varphi = \theta + \alpha$.

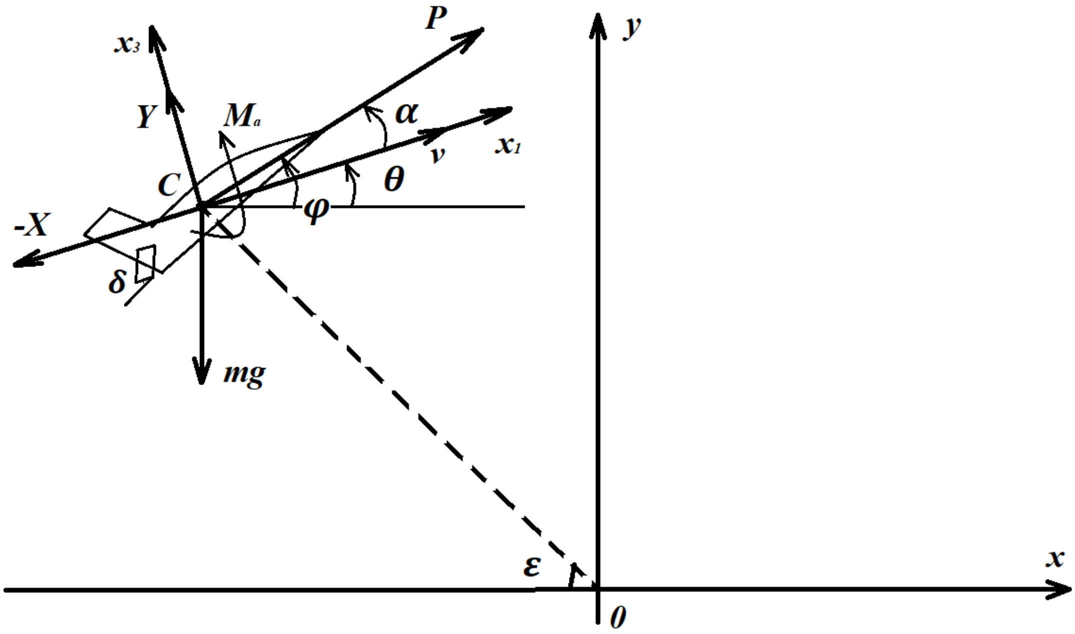

Рис. 6.1

Вектор скорости: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Вектор угловой скорости системы: $\vec{\Omega}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$.

Угловая скорость вращения корпуса: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим аэродинамические силы и выпишем уравнение движения центра масс. Будем считать, что за время посадки масса ЛА меняется незначительно => расходом топлива будем пренебрегать.

Уравнение движения: $$\begin{cases} m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{A} - mg \\ J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = M_a \end{cases} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} -X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}$$, где

-X – аэродинамическая сила сопротивления,

Y – подъемная аэродинамическая сила,

M_a - момент аэродинамических сил, зависит от угла δ отклонения руля высоты.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v} + [\vec{\Omega}_c \times \vec{v}]$$ – *формула Эйлера.*

Уравнение движения системы в проекции на ось x_1: $m\dot{v} = P\cos\alpha - X(v,\alpha) - mg\sin\theta$.

Уравнение движения системы в проекции на ось x_3: $mv\dot{\theta} = P\sin\alpha + Y(v,\alpha) - mg\cos\theta$.

Движение вокруг центра масс: $\dot{\varphi} = \omega, \quad J\dot{\omega} = M_a(v,\alpha,\omega,\delta)$.

Желаемое движение:

$$v^*(t) = v_0 -$$ скорость постоянная,

$$\omega^*(t) \equiv 0 -$$ корпус не вращается,

$$\varphi^*(t) \equiv 0 -$$ корпус самолета горизонтален,

$$\theta^*(t) = -\varepsilon -$$ центр масс движется по глиссаде,

$$\alpha^*(t) = \varepsilon.$$

Будем считать, что тяга формируется автоматом тяги, который будем считать идеальным:

$$P^* = \frac{1}{\cos\alpha}[X(v_0,\alpha) + mg\sin\theta].$$

Программное движение руля высоты, которое обеспечивает спуск по комфортабельной глиссаде: $\delta_0 = M_a^{-1}(v_0,\varepsilon,0)$.

Подъемная сила: $Y = \frac{gv^2}{2}Sc_\alpha\alpha$, где $c_\alpha = const > 0$.

Сила сопротивления: $X = \frac{gv^2}{2}Sc_0$.

Аэродинамический момент: $M_a = -\frac{gv^2}{2}Sb(m_\alpha \alpha + m_\omega \omega + m_\delta \delta),$ где $m_\alpha, m_\omega, m_\delta > 0.$

Отклонения от программного движения:

$$\begin{cases} \Delta\theta = \theta - \theta^* \\ \Delta\varphi = \varphi - \varphi^* \\ \Delta\omega = \omega - \omega^* \\ \Delta\delta = \delta - \delta_0 \end{cases}$$

Линейное уравнение в отклонениях:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\theta} = -c_\alpha \Delta\theta + c_\alpha \Delta\varphi \\ \Delta\dot{\varphi} = \Delta\omega \\ \Delta\dot{\omega} = m_\alpha \Delta\theta - m_\alpha \Delta\varphi - m_\omega \Delta\omega - m_\delta \Delta\delta \end{cases}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = \Delta\delta, \qquad A = \begin{pmatrix} -c_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m_\alpha & -m_\alpha & -m_\omega \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_\delta \end{pmatrix}$$

Можно убедиться, что система эквивалентна одному уравнению третьего порядка.

Дома: проверить полную управляемость системы.

Только управляя отклонением руля высоты, можно асимптотически обеспечить движение ЛА по глиссаде при наличии всей информации об отклонениях. Но на практике такого не бывает.

а)

Рассмотрим вопрос о том, как получить информацию об отклонениях. Добавим в состав системы некоторые измерения. Будем считать, что на борту аппарата есть измеритель, который точно меряет угол атаки α.

$$\alpha = \varphi - \theta$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ z = Hx \end{cases}, \text{ где } H = (-1 \quad 1 \quad 0).$$

Проверим, можем ли мы построить оцениватель, который даст асимптотически точные оценки отклонений от программного движения. Для этого проверим наблюдаемость системы и в случае ненаблюдаемости проведем декомпозицию.

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ c_\alpha & -c_\alpha & 1 \\ m_\alpha - c_\alpha^2 & c_\alpha^2 - m_\alpha & m_\omega - c_\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} = g_1^T \\ = g_2^T \\ = g_3^T \end{matrix}$$

Дома: убедиться, что $\det N = 0$, откуда следует отсутствие полной наблюдаемости.

Более того можно убедиться:

$$g_3 = (c_\alpha m_\omega - m_\alpha) g_1 + (m_\omega - c_\alpha) g_2$$

Дополним систему векторов до базиса $\{g_1, g_2, f_1\}$, где $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$f_2 = A^T f_1 \ => \ f_2^T = f_1^T A = (c_\alpha \quad -c_\alpha \quad 0) = \beta_1 g_1^T + \beta_2 g_2^T + \gamma f_1^T \ =>$$

$$\beta_1 = c_\alpha, \beta_2 = 0, \gamma = 0.$$

Канонический вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = (c_\alpha m_\omega - m_\alpha)\xi_1 + (m_\omega - c_\alpha)\xi_2 \\ \dot{\eta} = c_\alpha \xi_1 + 0 \cdot \eta \end{cases} \qquad z = \xi_1$$

Если рассмотреть систему уравнений ошибок ненаблюдаемой части, то $\dot{\eta} = 0$, откуда следует, что в этой системе асимптотической устойчивости нет, а есть только устойчивость по Ляпунову. Поэтому нельзя получить оценки. Следовательно, система не детектируемая.

Задание на дом

б) В качестве измерителя используется датчик угловой скорости (ДУС)

$$z = Hx, \qquad x = \begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix}, \qquad H = (0 \quad 0 \quad 1).$$

Можно ли в таком случае асимптотически точно получить отклонения?

г) Пусть установлена гиростабилизирующая платформа, которая держит горизонтальное направление, что дает измерить угол тангажа. Проверить, есть ли в этом случае полная наблюдаемость.

Семинар 7

Построение алгоритма оценивания в задаче выставки ИНС

Задача выставки гиростабилизированной платформы

Рассмотрим земной шар, ось вращения Земли совпадает с вертикалью. ω_0 - угловая скорость вращения Земли, О – центр Земли (см. рис.7.1). В каком-то месте на земной поверхности находится летательный аппарат, М – центр масс ЛА, известна широта места, в котором находится ЛА, он некоторое время стоит на земле.

На борту ЛА стоит гиростабилизированная платформа. И если есть акселерометр, который меряет силу, действующую по осям этой платформы, то дважды интегрируя систему, можно получить координаты центра масс нашего аппарата. Поэтому чрезвычайное значение имеет точность выставки системы координат в начальный момент, чтобы не накапливалась ошибка.

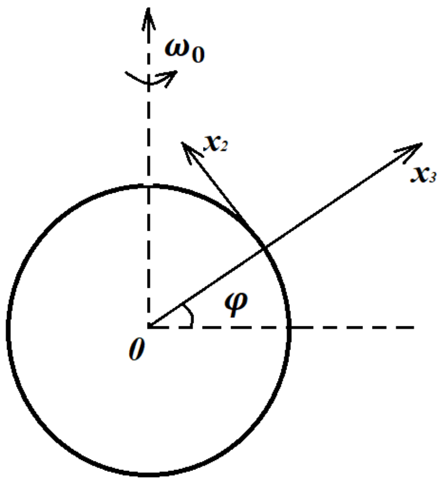

Рис. 7.1

Рассмотрим орбитальную систему координат $Mx_1x_2x_3$ - *идеальный трехгранник*.

$Mz_1z_2z_3$ - *приборный трехгранник* – ориентирован по осям стабилизированной платформы.

Наша задача – в начальный момент выставить инерциальную систему по осям орбитальной системы, или получить информацию о том, на сколько один трехгранник повернут относительно другого, чтобы сделать поправку.

Рассмотрим орбитальную систему координат. С течением времени она меняет свое положение в пространстве, что помогает восстановить положение одного трехгранника относительно другого.

Пусть ω - угловая скорость трехгранника Mx.

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \cos\varphi \\ \omega_0 \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим ориентацию приборного трехгранника относительно идеального. Для этого нужно знать матрицу перехода от одного трехгранника к другому:

$$l_z = Al_x, \text{где}$$

А – ортогональная матрица, матрица поворота одной системы относительно другой =>

$$l_x = A^T l_z.$$

Рассмотрим следующий случай: пусть из каких-то соображений мы грубо выставили приборный трехгранник (то есть трехгранники почти совпадают). Тогда матрицу поворота одной системы относительно другой можно записать в следующем виде:

$$A = E + \hat{\alpha}, \text{где}$$

$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ – некоторый постоянный вектор малого поворота, $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметричная матрица.

Условия постоянства: $\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = 0$.

Теперь пусть вектор α – вектор-столбец проекции α на оси системы $Mx_1x_2x_3$ =>

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \dot{\alpha}_x + [\vec{\omega} \times \vec{\alpha}_x] = 0 \text{ - } \textit{формула Эйлера}.$$

Рассмотрим поворот одной системы относительно другой (см. рис.7.2). α_1, α_2 задают положение вертикали, α_3 – азимут. Допустим, что на борту системы есть подвес – нитка с грузиком. И теперь очевидно, что если мы померяем отклонение шарика от точки М от вертикали, то оно пропорционально α_1, α_2. Таким образом, мы получим информацию о положении вертикали приборного трехгранника:

$$\begin{cases} z_1 = \alpha_1 \\ z_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

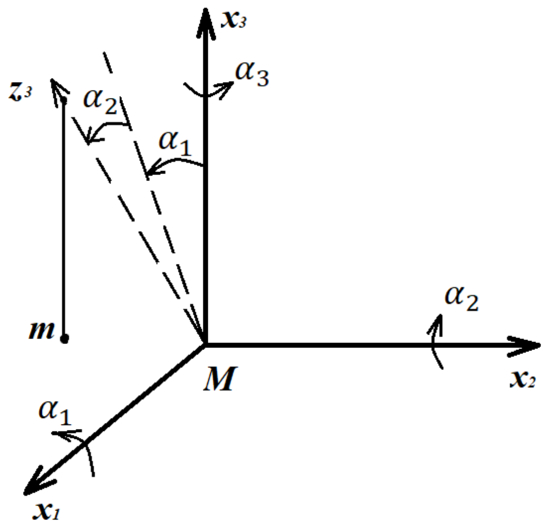

Рис. 7.2

Итак, есть некоторый вектор, уравнение движения в проекциях и измерения:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \omega_3\alpha_2 - \omega_2\alpha_3 \\ \dot{\alpha}_2 = -\omega_3\alpha_1 \\ \dot{\alpha}_3 = \omega_2\alpha_1 \end{cases}$$

$$z_1 = \alpha_1$$

$$z_2 = \alpha_2$$

Необходимо построить оцениватель.

Дома: убедиться, что:

если брать только z_1, то полной наблюдаемости нет,

если только z_2, то полной наблюдаемости тоже нет,

если используются оба измерения, то система полностью наблюдаемая.

Таким образом, есть возможность построить асимптотически точный оцениватель, который дает ошибки оценки, стремящиеся к нулю с любой скоростью, можно обеспечить любой запас устойчивости.

Задача управления и оценивания

Изучаемая система выписана, теперь построим оцениватель. Мы знаем, что система полностью наблюдаемая, поэтому можем, формально находясь в старых координатах, выписать оцениватель:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\alpha}}_1 = \omega_3\tilde{\alpha}_2 - \omega_2\tilde{\alpha}_3 + k_{11}(z_1 - \tilde{\alpha}_1) + k_{12}(z_2 - \tilde{\alpha}_2) \\ \dot{\tilde{\alpha}}_2 = -\omega_3\tilde{\alpha}_1 + k_{21}(z_1 - \tilde{\alpha}_1) + k_{22}(z_2 - \tilde{\alpha}_2) \\ \dot{\tilde{\alpha}}_3 = \omega_2\tilde{\alpha}_1 + k_{31}(z_1 - \tilde{\alpha}_1) + k_{32}(z_2 - \tilde{\alpha}_2) \end{cases}$$

$\Delta\alpha_i = \alpha - \tilde{\alpha}_i$ - ошибки оценки, $i = 1, 2, 3.$

Упростим систему, разделим ее на две. Объединим в систему выражения для $\dot{\tilde{\alpha}}_1$ и $\dot{\tilde{\alpha}}_3$, отбросив части с $(z_2 - \tilde{\alpha}_2)$. Из выражения для $\dot{\tilde{\alpha}}_2$ отбросим $k_{21}(z_1 - \tilde{\alpha}_1)$, $\tilde{\alpha}_2 = z_2 = \alpha_2$, $\tilde{\alpha}_1 = z_1$ =>

$$\begin{cases} \Delta\dot{\alpha}_1 = -\omega_2\Delta\alpha_3 - k_{11}\Delta\alpha_1 \\ \Delta\dot{\alpha}_3 = \omega_2\Delta\alpha_1 - k_{31}\Delta\alpha_1 \\ \Delta\dot{\alpha}_2 = -k_{22}\Delta\alpha_2 \end{cases}$$

Итак, хоть в исходных переменных это не ясно, но уравнения ошибок распались на две группы. Таким образом мы провели некоторую декомпозицию, которая позволяет упростить выбор обратной связи.

При $k_{22} > 0,\ \omega_2 - k_{31} < 0,\ k_{11} > 0$ система будет асимптотически устойчивой по всем трем переменным.

Итак, нами рассмотрен еще один способ декомпозиции, который сильно упрощает посторенние оценивателя на борту ЛА. Когда ресурсы вычислителей были слабыми, это было важной задачей, поскольку максимально нужно было упростить систему, чтобы она работала в реальном времени.

Пример (перевернутый маятник)

$$\ddot{x} - x = u$$

Требуется подобрать управление маятником так, чтобы стабилизировать верхнее положение маятника. Но здесь случай неполной информации, но есть измерение:

$$z = \dot{x} + r, \quad r = const.$$

Перепишем систему в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \\ \dot{x}_3 = 0 \\ z = x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Видно, что система не является полностью управляемой. Более того неуправляемая часть (представлена уравнением 3 системы) неустойчива, стабилизацию расширенной системы провести нельзя. Управление будем искать в виде:

$$u = k_1\tilde{x}_1 + k_2\tilde{x}_2 + k_3\tilde{x}_3.$$

Для этого найдем оценки.

Построим оцениватель, дающий асимптотически точные оценки координат (вообще говоря, достаточно x_1 и x_2). Для этого необходимо провести декомпозицию.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} =g_1^T \\ =g_2^T \\ =g_3^T \end{matrix} \;=>$$

полная наблюдаемость, то есть мы можем построить сколь угодно точные оценки.

Для того, чтобы выбрать коэффициенты обратной связи, приведем все к каноническому виду.

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3 \;=>\; \beta_1 = 0, \qquad \beta_2 = 1, \qquad \beta_3 = 0,$$

$$b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =>$$

Канонический вид по наблюдению:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + u \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_2 + u \end{cases} \qquad z = y_1 \quad =>$$

Запишем оцениватель:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_2 + u + \tilde{k}_1(y_1 - \tilde{y}_1) \\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3 + \tilde{k}_2(y_1 - \tilde{y}_1) \\ \dot{\tilde{y}}_3 = \tilde{y}_2 + u + \tilde{k}_3(y_1 - \tilde{y}_1) \end{cases}$$

Перейдем к y и Δy => система распадется на систему по наблюдению и систему по управлению => $\tilde{k}$ можно выбирать независимо от u.

Уравнение ошибок оценки:

$$\begin{cases} \Delta\dot{y}_1 = \Delta y_2 - \tilde{k}_1 \Delta y_1 \\ \Delta\dot{y}_2 = \Delta y_3 - \tilde{k}_2 \Delta y_1 \\ \Delta\dot{y}_3 = \Delta y_2 - \tilde{k}_3 \Delta y_1 \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -\tilde{k}_1 & 1 & 0 \\ -\tilde{k}_2 & 0 & 1 \\ -\tilde{k}_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + \tilde{k}_1\lambda^2 + \left(\tilde{k}_2 + 1\right)\lambda + \tilde{k}_3 - \tilde{k}_1 = 0$$

Отсюда видно, что коэффициенты можно выбрать любыми, например:

$$(\lambda + 1)^3 = 0 \quad =>$$

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = 3 \\ \tilde{k}_2 = 2 \\ \tilde{k}_3 = 4 \end{cases}$$

Можно было бы дальше работать с системой оценивателя, но мы знаем, что она не является стабилизируемой. Нас интересует исходная система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$$

$$u = k_1\tilde{x}_1 + k_2\tilde{x}_2$$

Но мы построили оцениватель в других координатах, и у нас есть оценки $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3$.

Мы перешли от одной системы к другой с помощью невырожденного преобразования =>

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} y_j$$

Аналогично для оценок и ошибок оценок:

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \tilde{y}_j$$

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \Delta y_j$$

Δy_i убывает как $c_i e^{-t}$ => Δx_i убывает как $b_i e^{-t}$ =>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 \end{cases}$$

Для того, чтобы найти оценки $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, нужно оценить все три координаты $\tilde{y}$, но при этом ошибки оценки стремятся к нулю со степенью не меньше 1. Поэтому можно выбрать коэффициенты обратной связи так, как будто мы знаем точные координаты.

Теперь просто подобрать коэффициенты k_1, k_2 так, чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы имело запас устойчивости 1:

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Дома: доделать задачу.

Семинар 8

Совместная задача управления и оценивания

Совместная задача управления и оценивания (повторение материала предыдущего семинара)

У нас есть линейная управляемая система и вектор-функция измерения, линейно связанная с фазовыми координатами системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = Hx \end{cases}$$

В отличие от случая наличия полной информации об отклонениях, управление здесь строится как обратная связь от оценок:

$$u = K\tilde{x}$$

$\tilde{x}$ – оценка x, $\Delta x = x - \tilde{x}$.

Оценка находится из линейного несмещенного оценивателя, который имеет следующий вид:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + \widetilde{K}(z - H\tilde{x}),$$

Система интегрируется с некоторыми начальными условиями, получаются реализации $\tilde{x}$, а ошибка оценки при этом удовлетворяет следующей системе:

$$\Delta\dot{x} = \left(A - \widetilde{K}H\right)\Delta x.$$

Если пара (A, B) стабилизируема, а пара (A, H) детектируема, то тогда можно уравнением, сформированным следующим образом:

$$u = K\tilde{x},$$

добиться устойчивости замкнутой системы.

Частный случай: пара (A, B) полностью управляемая, а пара (A, H) полностью наблюдаемая, тогда можно добиться того, что:

$$|x(t)| \le ce^{-\alpha t},$$

где α любое число, то есть мы можем добиться экспоненциальной устойчивости с любым запасом устойчивости системы.

Если полной управляемости нет, то нужно провести декомпозицию системы как по вектору управления, так и по вектору наблюдения. Все зависит от того, какой вид имеет неуправляемая подсистема.

При декомпозиции по вектору управления система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_{11}\xi + A_{12}\eta + B_\xi u \\ \dot{\eta} = A_{22}\eta \end{cases},$$

то есть система распалась на две подсистемы. Верхняя подсистема полностью управляемая в своем подпространстве (пара (A_{11}, B_ξ) управляемая), нижняя – неуправляемая, и все зависит от того, какова матрица A_{22}:

Если $\max\limits_j Re\,\lambda_j = -\alpha < 0$, то можно привести систему в ноль с запасом устойчивости α.

Если $\max\limits_j Re\,\lambda_j = -\alpha > 0$, то этого сделать нельзя.

Выигрыш в том, что теперь в декомпозированном виде проще подобрать коэффициенты обратной связи управления K таким образом, чтобы добиться устойчивости α (большего запаса добиться нельзя).

Второй результат таков: если мы перейдем к системе $\begin{pmatrix} x \\ \Delta x \end{pmatrix}$, то коэффициенты обратной связи для стабилизатора K и коэффициенты для оценивателя $\widetilde{K}$ можно подбирать независимо.

Для нахождения $\widetilde{K}$ нужно декомпозировать систему по вектору измерения, тогда она принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi}' = A'_{11} \qquad z = H_\xi \xi \\ \dot{\eta}' = A'_{21}\xi + A'_{22}\eta \end{cases}$$

Пара (A'_{11}, H_ξ) полностью наблюдаемая, тогда результат зависит от вида матрицы A'_{22}:

$$\det\left(A'_{22} - \mu E\right) = 0.$$

Если $\max\limits_j Re\,\mu_j = -\alpha_1 < 0$, то возможно оценивание всех состояний $\tilde{x}$ таким образом, чтобы ошибка оценки удовлетворяла неравенству: $|\Delta x| \leq ce^{-\alpha_1 t}$

Оказывается, что коэффициенты, обеспечивающие нужный запас устойчивости или нужные корни характеристического уравнения, легко подбирать, переходя к каноническому виду как по управлению, так и по возмущению.

Заметим, что мы проделали разные преобразования исходной системы, и коэффициенты обратной связи находятся в новых координатах. Но тем не менее поскольку преобразование невырожденное, то есть возможность пересчитать эти коэффициенты и в исходную систему. Мы этого делать не будем, поскольку главное проанализировать систему и получить результат.

Пример

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - 7x_3 - 5x_4 + u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_4 + u\\ \dot{x}_3 = -x_1 \qquad\quad - 5x_3 - 4x_4 + u\\ \dot{x}_4 = 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2u\end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 + x_4$$

Требуется выяснить, можно ли стабилизировать эту систему, и если можно, то добиться максимального запаса устойчивости.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 & -5\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -5 & -4\\ 2 & -1 & 7 & 6\end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

$$H = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$$

Составим матрицу управляемости:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots\\ -2 & -4 & -6 & \cdots\end{pmatrix}$$

$$g_{i+1} = Ag_i$$

$$g_3 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \ => \ \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2,$$

$$rank\, U = 2 \ =>$$

Управляемая подсистема имеет второй порядок, неуправляемая тоже второй.

Дополним систему до базиса.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -7\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & -5\\ -2 & -4 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad f_2 = Af_1 = \begin{pmatrix}-7\\0\\-5\\7\end{pmatrix} \ =>$$

$\{g_1, g_2, f_1, f_2\}$ – линейно независимый набор векторов, которые составляют контрвариантную матрицу преобразования.

Чтобы выписать уравнение исходной системы в новых координатах, необходимо найти еще разложение вектора f_3:

$$f_3 = Af_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 \ =>$$

$$\beta_1 = 0, \qquad \beta_2 = 0, \qquad \gamma_1 = -1, \qquad \gamma_2 = -1.$$

Тогда легко выписать канонический вид системы по управлению:

$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\xi_2 + u \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + 2\xi_2 \end{cases}$ – управляемая подсистема,

$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 - \eta_2 \end{cases}$ - неуправляемая подсистема.

Характеристическое уравнение неуправляемой подсистемы:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \ => \ \lambda_{12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \ =>$$

Запас устойчивости в системе: $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

Осталось подобрать коэффициенты обратной связи. Пользуемся тем фактом, что это можно было сделать независимо, считая, что в системе есть полная информация обо всех координатах. Тогда:

$$u = k_1\xi_1 + k_2\xi_2.$$

Коэффициенты k_1, k_2 нужно выбрать так, чтобы запас устойчивости замкнутой системы был не меньше 1/2, например, добиться того, чтобы характеристическое уравнение было следующим:

$$\det(A_{11} - \lambda E) = 0 <=> \ (\lambda + 1)^2 = 0,$$

где $A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Подбор коэффициентов вы легко можете проделать дома.</u>

Допустим, мы нашли коэффициенты в новых координатах. Но на самом деле для того, чтобы все работало, мы должны строить управление по оценке:

$$u = k_1\tilde{\tilde{\xi}}_1 + k_2\tilde{\tilde{\xi}}_2.$$

Соответственно должны быть известны оценки $\tilde{\tilde{\xi}}_1, \tilde{\tilde{\xi}}_2$. Для того, чтобы найти оценки, необходимо построить оцениватель, позволяющий получить асимптотически устойчивые оценки параметров. Для этого декомпозируем исходную систему по вектору измерения:

$$H = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1) = g_1^T.$$

Матрица наблюдаемости:

$$N = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} =g_1^T \\ =g_2^T \\ =g_3^T \\ =g_4^T \end{array}$$

$$g_2^T = g_1^T A$$

$$\vdots$$

$$g_3 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \ => \ \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2 \ =>$$

$$rank\, N = 2 =>$$

полной наблюдаемости нет, система распадется на две подсистемы второго порядка, наблюдаемую и ненаблюдаемую.

$$f_1^T = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

$$f_2^T = f_1^T A = (-1 \quad 0 \quad -5 \quad -4)$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} =g_1^T \\ =g_2^T \\ =f_1^T \\ =f_2^T \end{array}$$

$$f_3^T = f_2^T A = (-2 \quad 3 \quad 4 \quad 1)$$

$$f_3 = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 \ =>$$

$$\beta_1 = -3, \qquad \beta_2 = 6, \qquad \gamma_1 = -1, \qquad \gamma_2 = -1.$$

$$b'^T = (g_1^T b, g_2^T b, f_1^T b, f_2^T b) = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 2).$$

Запишем декомпозированную по вектору наблюдения систему в новых координатах.

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1' = \xi_2' \\ \dot{\xi}_2' = -\xi_1' + 2\xi_2' + u \end{cases}$$ $z = \xi_1'$ - наблюдаемая подсистема,

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1' = \eta_2' + u \\ \dot{\eta}_2' = -\eta_1' - \eta_2' - 3\xi_1' + 6\xi_2' + 2u \end{cases}$$ - ненаблюдаемая подсистема.

Выпишем оцениватель:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_1 = \tilde{\xi}_2 + \tilde{k}_1(z - \tilde{\xi}_1) \\ \dot{\tilde{\xi}}_2 = -\tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2 + \tilde{k}_2(z - \tilde{\xi}_1) + u \\ \dot{\tilde{\eta}}_1 = \tilde{\eta}_2 + \tilde{k}_3(z - \tilde{\xi}_1) + u \\ \dot{\tilde{\eta}}_2 = -\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2 - 3\tilde{\xi}_1 + 6\tilde{\xi}_2 + \tilde{k}_2(z - \tilde{\xi}_1) + 2u \end{cases}$$

Если записать ошибки оценки для ненаблюдаемой подсистемы, то получим следующее:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\eta}_1 = \Delta\eta_2 \\ \Delta\dot{\eta}_2 = -\Delta\eta_1 - \Delta\eta_2 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение ненаблюдаемой подсистемы:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \ => \ \lambda_{12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \ =>$$

Запас устойчивости в системе: $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ =>

Коэффициенты $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ нужно подобрать таким образом, чтобы ошибки оценки $\Delta\xi_1, \Delta\xi_2$ стремились к нулю с запасом >1/2, например $(\lambda + 1)^2 = 0$, откуда легко найти коэффициенты $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$.

Поскольку есть невырожденное преобразование, то если бы мы выписывали все в изначальных координатах, то ошибка оценки $\tilde{x}$, $\Delta x = x - \tilde{x}$:

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^{4} (\Delta\xi_i', \Delta\eta_i') c_{ij}$$

Итак, мы полностью провели анализ системы и выяснили возможность стабилизации с максимальным запасом устойчивости равным 1/2 в данном случае.

Семинар 9
Стохастические модели управляемых систем

Случайные величины

Все это время мы строили алгоритм стабилизации системы, при этом предполагалось, что в качестве возмущений выступают только начальные условия. Сейчас рассмотрим некоторое расширение, когда в системе присутствует изменяющееся во времени постоянно действующее возмущение. На лекции была выписана следующая модель:

$$\dot{x} = Ax + Bu + q(t), \tag{9.1}$$

где $q(t)$ - некоторый *случайный процесс типа белого шума*.

Свойства $q(t)$:

1) $M[q(t)] \equiv 0$;
2) $M[g(t)g^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$, где, $\delta(t-\tau)$ – дельта-функция Дирака $\begin{pmatrix} \text{при } t=\tau & \delta=\infty \\ \text{при } t\neq\tau & \delta=0 \end{pmatrix}$, $Q(t) = Q(t)^T \geq 0$ - симметричная неотрицательная матрица.

Забегая вперед, отметим, что запись 9.1 математически не корректна, потому что несмотря на то, что $q(t)$ имеет нормальное распределение, пусть даже u=0, получается что x – случайный процесс, но если $q(t)$ обладает вышеуказанными свойствами, то процесс x не дифференцируем в среднеквадратичном. Поэтому писать уравнение 9.1 нельзя. Но в лекциях объясняется, в каком смысле понимается это уравнение, и оно оказывается очень удобным инструментом, поскольку позволяет оперировать случайным процессом x так, как будто система была детерминирована, не задумываясь о корнях.

Кроме того процесс типа белого шума тоже является математической абстракцией – процесс с бесконечной энергией. Его реализации обладают свойством: если в начальный момент времени точка находится в сколь угодно малой окрестности начала координат, то за бесконечно малый промежуток времени она может выйти за границы любой сколь угодно большой сферы радиуса R, и вернуться назад. То есть получается некий физически нереализуемый процесс, оказавшийся удобным инструментом для того, чтобы описывать процесс ошибки измерений и процесс управления при наличии рассмотренных случайных воздействий.

Теперь вернемся к вопросу о том, что такое случайная величина. Для того, чтобы определить случайную величину, нужно определить:

1) Ω - множество элементарных событий,
2) $A_i \subset \Omega$ - подмножества в нем
3) сигма-алгебру подмножеств - определить операции пересечения, объединения, и с каждым множеством связать меру (*вероятность*): $P(A) \geq 0,\ P(\Omega) = 1,$ причем:

$$P\left(A_i \bigcap A_j\right) = 0$$

$$P\left(\bigcup A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Функция распределения вероятности: $P(x \leq \xi) = F(\xi)$ - монотонная функция, кроме того будем считать, что если она имеет производную, то определена *плотность вероятности*:

$$\frac{dF}{dx} = f(x),$$

и известно, что $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$.

Математическое ожидание случайной величины: $M[x] = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Дисперсия: $D[x] = \sigma_x^2 = \sigma M[(x-\mu_x)^2] = M[\dot{x}^2]$, где $\dot{x} = x - \mu_x$ – центрированная величина.

Нормальное распределение: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$.

Случайные векторные величины

Рассмотрим вектор, содержащий две компоненты: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Поведение векторной случайной величины описывается векторной плотностью вероятности $f(x_1, x_2)$.

Если $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$ => x_1, x_2 - *независимы*.

Если выполняется свойство $M[\dot{x}_1, \dot{x}_2] = 0$ => x_1, x_2 *не коррелированны*.

Можно вести *коэффициент корреляции*, который представляет собой меру линейной связи между x_1, x_2:

$$r_{12} = \frac{M[\dot{x}_1, \dot{x}_2]}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}.$$

Если x_1, x_2 независимы, то они не коррелированны. Обратное не верно. Не коррелированные величины могут быть зависимыми, но не может быть линейной связи между ними:

$$r_{12} = 1 \quad => \quad x_2 = ax_1 + b.$$

Характеристики связанных между собой случайных величин, случайных векторов

Ковариационная матрица: $P_x = M[\dot{x}\dot{x}^T]$

$$P_x = \begin{pmatrix} M[\dot{x}_1^2] & M[\dot{x}_1\dot{x}_2] \\ M[\dot{x}_1\dot{x}_2] & M[\dot{x}_2^2] \end{pmatrix}$$

$$P_x = P_x^T$$

Примеры

Пример 1

$x \in R^3,\ x_i$ - независимые случайные величины.

Характеристики:

$$\mu_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y \in R^2,\ \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 - x_3 \end{cases}$ – линейная зависимость.

Найти: $\mu_y,\ \sigma_y,\ r_{y_1 y_2}$

Из линейности оператора мат.ожидания следует справедливость записанной для y системы и для центрированных величин:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - \dot{x}_3 \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_3 \end{cases}$$

$$M[y_1] = M[x_1 + 2x_2 - x_3] = M[x_1] + 2M[x_2] - M[x_3] = \\ 1 + 4 - 1 = 4$$

$$M[y_2] = M[x_1 - x_3] = M[x_1] - M[x_3] = 0$$

$$M[\dot{y}_1^2] = M[(\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2] = \{M[\dot{x}_i\dot{x}_j] = 0 \text{ для } i \neq j\} \\ = M[\dot{x}_1^2 + 4\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2] = 9 + 16 + 1 = 26$$

$$M[\dot{y}_2^2] = 9 + 1 = 10$$

$$r_{y_1 y_2} = \frac{M[\dot{y}_1, \dot{y}_2]}{\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}} = \frac{1}{\sqrt{26}\sqrt{10}} M[(\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - \dot{x}_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)] = \frac{10}{\sqrt{260}}.$$

Пример 2

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$M[x] = 0, \qquad \sigma_1 = 2, \qquad \sigma_2 = 1, \qquad r_{12} = \frac{1}{2}$$

Требуется найти такое ортогональное преобразование A $(y = Ax)$, чтобы в новых координатах компоненты вектора стали независимыми.

Воспользуемся тем результатом, что А – матрица поворота и определена одним параметром φ:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Выпишем преобразование в явном виде:

$$\dot{y}_1 = \cos\varphi\,\dot{x}_1 - \sin\varphi\,\dot{x}_2$$
$$\dot{y}_2 = \sin\varphi\,\dot{x}_1 + \cos\varphi\,\dot{x}_2$$

$$\sigma_1 = 2, \qquad \sigma_2 = 1, \qquad r_{12} = \frac{1}{2} \;=>\; M[\dot{x}_1\dot{x}_2]$$
$$M[\dot{y}_1\dot{y}_2] = M[(\cos\varphi\,\dot{x}_1 - \sin\varphi\,\dot{x}_2)(\sin\varphi\,\dot{x}_1 + \cos\varphi\,\dot{x}_2)]$$
$$= \cos\varphi\sin\varphi\,M[\dot{x}_1^2] + \cos^2\varphi\,M[\dot{x}_1\dot{x}_2] - \sin^2\varphi\,M[\dot{x}_1\dot{x}_2] - \sin\varphi\cos\varphi\,M[\dot{x}_2^2]$$
$$= 3\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{3}{2}\sin 2\varphi + \cos 2\varphi = 0$$
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}} \;=>$$
$$\sin(\alpha + 2\varphi) = 0$$

Таким образом, мы нашли преобразование, которое в новых координатах дает независимые компоненты y_1, y_2.

Пример 3

Пусть есть дискретная случайная величина x.

x	-1	0	1
P	1/6	1/3	1/2

Рассмотрим случайную величину $y = x^2$.

Найти: μ_y, D_y, r_{xy}.

y	1	0
P	2/3	1/3

$$\mu_x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \quad \mu_y = \frac{2}{3}$$

$$D_x = M[x^2] - \mu_x^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$x \;<=>\; x^3 : \; \mu_{x^3} = \frac{1}{3}, \qquad D_{x^3} = \frac{5}{9}$$

$$r_{xy} = \frac{M[\dot{x}\dot{y}]}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{M[(x-\mu_x)(x^2-\mu_{x^2})]}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{1/9}{\frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{9}}.$$

Пример 4

Рассмотрим двумерную случайную величину $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x и y распределены равномерно (см. рис. 9.1) и независимы.

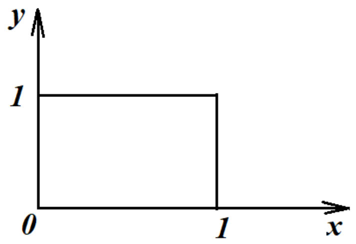

Рис. 9.1

Пусть $z = xy$. Найти: $\mu_z,\ D_z$.

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mu_y = \frac{1}{2}$$

$$\mu_{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D_z = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}.$$

Общий случай

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть есть случайный вектор $x, x \in R^n$ с известными характеристиками $\overline{\mu}_x,\ P_x,\quad y = Ax, y \in R^m$. Как высчитать характеристики y?

В силу линейности мат.ожидания (среднее также линейно):

$$\mu_y = A\mu_x.$$

В силу линейности:

$$\dot{y} = A\dot{x} \quad => \quad P_y = M[\dot{y}\dot{y}^T] = M[A\dot{x}\dot{x}^T A^T] = AM[\dot{x}\dot{x}^T]A^T = AP_xA^T.$$

Задача коррекции (первый вариант)

Пусть есть случайные векторы $x \in R^n$, $z \in R^m$. Известны *априорные характеристики* (известны до измерения) μ_x, P_{xx}, μ_z и то, что эти вектора между собой связаны:

$$P_{xz} = P_{zx}^T = M[\dot{x}\dot{z}^T], \quad \dot{x} = x - \mu_x, \dot{z} = z - \mu_z.$$

Произведено измерение вектора z, то есть мы получили дополнительную информацию. Попробуем получить *апостериорные характеристики*, то есть полученные после измерения вектора z.

Мы можем построить линейную несмещенную оценку вектора x:

$$\tilde{x} = \mu_x + K(z - \mu_z).$$

Введем $\alpha = c^T x$, построим оценку $\tilde{\alpha}$ такую, что $\min\limits_K[(\alpha - \tilde{\alpha})^2]$.

На лекции был получен результат: $K = P_{xz}P_{zz}^{-1}$ - не зависит от выбора c, поэтому можно говорить об оценивании каждой компоненты.

Рассмотрим частный случай. Пусть теперь x, z линейно связаны:

$$z = Hx + r.$$

Будем считать, что r – случайные ошибки, причем:

$$M[r] = 0, \;\; M[rr^T] = R > 0.$$

Пусть есть априорные оценки: $x^- = \mu_x$.

Матрица, характеризующая точность оценки: $P^- = P_x$.

Апостериорная оценка после измерения вектора z: $x^+ = x^- + K(z - Hx^-)$, где

$$K = P^- H^T (HP^- H^T + R)^{-1}.$$

Точность апостериорной оценки: $P^+ = (E - KH)P^-$.

Итак, мы рассмотрели задачу коррекции оценки.

Задача коррекции (второй вариант)

Эту же задачу можно трактовать несколько по-другому.

Рассмотрим систему переопределенных линейных уравнений

$$z = Hx.$$

Чтобы получить решение, необходимо найти такую оценку x, чтобы невязка $z - Hx$ была в каком-то смысле минимальной.

Например, пусть известна некоторая матрица весов

$$R = R^T > 0,$$

и мы можем ввести функционал от оценки, определяющий точность оценки, например, в виде квадратичной функции:

$$J(x) = (z - Hx)^T R^{-1}(z - Hx) = \|z - Hx\|_R.$$

Если R=E, то получаем *метод наименьших квадратов (МНК)*.

Решим задачу поиска минимума: $J(x) \to \min\limits_x$.

Необходимое условие: $\frac{dJ(x)}{dx} = 0 \quad =>$

$$\frac{dJ(x)}{dx} = -2(z - Hx)^T R^{-1} H = 0 \ =>$$

$$x^T R^{-1} H = x^T H^T R^{-1} H \quad =>$$

$$H^T R^{-1} H = H^T R^{-1} z$$

$$\hat{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} z$$

Линейная оценка

Будем искать *линейную оценку* $\hat{x} = \widehat{K} z$

Покажем, что этот подход эквивалентен подходу, использованному выше:

$$\hat{x} = \widehat{K}(Hx + r) = \widehat{K}Hx + \widehat{K}r$$

Должно выполняться *условие несмещенности:*

если ввести ошибку оценки $\Delta x = x - \hat{x}$, то $M[\Delta x] = 0$.

$\Delta x = \left(E - \widehat{K}H\right)x - \widehat{K}r \ =>$ из условия несмещенности $E - \widehat{K}H = 0$

Точность оценки: $P_{\Delta x} = \widehat{K}R\widehat{K}^T = (H^T R^{-1} H)^{-1}$.

Таким образом, получаются одни и те же формулы для случайного подхода и метода обобщенных наименьших квадратов.

Примеры

Пример 1

Пусть есть скалярная величина x с известными характеристиками $\mu_x = 1, \sigma_x = 1$. Сформируем величину с некоторой ошибкой $z = 3x + r$, $\sigma_r = 1$. И известен результат измерений $z = 9$.

Надо построить апостериорную оценку $\tilde{x}^+$ и найти ее точность $P_{\Delta x}$.

$$\begin{cases} x^- = \mu_x = 1 \\ P^- = 1 \end{cases}$$

$$x^+ = x^- + K(z - Hx^-)$$

$$K = P^- H^T (HP^- H^T + R)^{-1} = 1 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 3 + 1)^{-1} = \frac{3}{10}$$

$$x^+ = 1 + \frac{3}{10(9 - 3 \cdot 1)} = 1 + \frac{18}{10} = 2.8$$

Точность оценки: $P^+ = (E - KH)P^- = (1 - 0.3 \cdot 3)1 = 0.1$

Итак, изменилась сама оценка, но при этом существенно повысилась точность.

Изменим эту же задачу. Будем считать, что есть два измерения:

$$\begin{cases} z_1 = 3x + r_1 \qquad \sigma_{r_1} = 1 \\ z_2 = x + r_2 \qquad \sigma_{r_2} = 1 \end{cases}$$

r_1, r_2 – независимы или как минимум не коррелированны. Построим оценку в этом случае.

Рассмотрим, какую информацию дает второе измерение.

$$\begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_x = 1 \\ P_x^- = 1 \end{cases}$$

Получается, измерение эквивалентно некоторой априорной информации, если считать, что модель измерения такая, что ошибка случайная, нормально распределена и т.д. Тогда подход сводится к предыдущей задаче.

Можно поступить по-другому и рассматривать задачу как некую переопределенную систему:

$$z = Hx + r,$$

где $H = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = M[rr^T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При таком подходе можно применять обобщенную формулу МНК. Для начала попробуем найти решение из МНК напрямую.

$$J = (z_1 - 3x)^2 + (z_2 - x)^2 \to \min_x$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 2(9-3x)(-3) + 2(1-x)(-1) = 0$$

$$27 - 9x + 1 = 0 \quad => \quad x = 2.8$$

Здесь можно воспользоваться и формулой обобщенных квадратов, потому что измерения могут быть коррелированны. Попробуем применить формулу МНК. Тогда $z = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\hat{x} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{10}(27+1) = 2.8$$

$$P_{\Delta x} = \frac{1}{10}$$

Итак, мы рассмотрели несколько подходов нахождения апостериорной оценки.

Пример 2

Рассмотрим следующую переопределенную систему:

$$z_1 = x_1 + x_2 = 2$$
$$z_2 = x_1 - x_2 = 0$$
$$z_3 = x_1 + 2x_2 = 5$$

Точность одинакова, среднеквадратичные отклонения примем равными 1.

$$z = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad R = E_3 \; =>$$

$$\hat{x} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{\Delta x} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Очевидно обобщение случая неравноточных ошибок, связанных, коррелированных между собой.

Допустим, известна априорная информация: $\sigma_{x_1} = 10, \sigma_{x_2} = 10$. Ее можно использовать двумя путями.

1) Пересчитать априорную информацию с использованием двух измерений.

2) Добавить измерения $\begin{cases} z_4 = 0.1x_1 = 0 \\ z_5 = 0.1x_2 = 0 \end{cases}$, что эквивалентно априорной информации о дисперсии первых двух компонент вектора *x*.

Рассмотрим случай, когда матрица R вырождена. Это означает, что какое-то из измерений точное, например, третье: $r_3 = 0$. Возможны два способа решения.

1) Из третьего уравнения найти линейную связь между x_1 и x_2 и подставить в остальные, свести задачу к стандартной.

2) Принять r_3 как угодно малой величиной, например, $r_3 = 0.001$, и тогда можно получить решение с большой точностью.

Задание на дом

Есть некая величина, линейная по времени:

$$y(t) = a + bt.$$

Есть не точное измерение этой величины:

$$z(t_i) = y(t_i) + r(t_i),$$

где $r(t_i)$ - равноточны и независимы.

Известен результат: $\begin{matrix} z(0) = 2 \\ z(1) = 1. \\ z(2) = 4 \end{matrix}$

Найти a, b.

Семинар 10
Дискретный фильтр Калмана

Дискретный фильтр Калмана

Рассмотрим случайную последовательность:

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + q_i,$$

где Φ_i - матрица перехода, q_i - последовательность случайных нормально распределенных величин типа дискретного белого шума.

$$M[q_i] = 0$$
$$M\left[q_i q_j^T\right] = Q_i \delta_{ij},$$

где δ_{ij} - символ Кронекера $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $Q_i = Q_i^T \geq 0$ – симметричная неотрицательная матрица.

Вектор измерений:

$$z_i = H_i x_i + r_i,$$

где $M\left[r_i r_j^T\right] = R_i \delta_{ij}$, $R_i = R_i^T > 0$ – положительная симметричная матрица.

Тогда требуется построить несмещенные оптимальные оценки вектора x.

Если случайные величины связаны линейно, то известно, как связаны их мат.ожидания и коэффициенты ковариации.

Пусть в некоторый нулевой момент известны оценки и ошибка ковариации: x_0^-, P_0^-.

Процедура оценивания состоит из двух этапов.

1) Коррекция

   Построим линейный несмещенный оцениватель (апостериорную оценку):
   $x_i^+ = x_i^- + K_i(z_i - H_i x_i^-)$.

   Коэффициенты обратной связи: $K_i = P_i^- H_i^T (H_i P_i^- H_i^T + R_i)^{-1}$.

   Ошибка оценки: $P_i^+ = (E - K_i H_i) P_i^-$.

   На этапе коррекции мы уточняем характеристики x по поступившим текущим измерениям. Далее нужно пересчитать характеристики на момент времени $i+1$.

2) Прогноз

   Априорная оценка: $x_{i+1}^- = \Phi_i x_i^+$.

   Погрешность оценки: $P_{i+1}^- = \Phi_i P_i^+ \Phi_i^T + Q_i$.

Выписанный алгоритм называется *дискретным фильтром Калмана*.

Стационарный случай

$$\Phi_i = \Phi = const$$
$$H_i = H$$
$$Q_i = Q$$
$$R_i = R$$

Эта система имеет некую стационарную точку: $\exists P_\infty^+, P_\infty^-$ - оценки и характеристики тоже стационарны.

Для того, чтобы существовала стационарная точка, нужно чтобы матрица

$$|(E - K_\infty H)\Phi|$$

была устойчива (<1). Если это условие выполняется, то есть стационарное решение

$$K_i \to K_\infty, P_i^+ \to P_\infty^+, P_i^- \to P_\infty^- \ldots$$

При этом ошибки оценки $\Delta x_i^+ \to 0, \Delta x_i^- \to 0$.

Пример

Пусть есть система

$$x_{j+1} = x_j + q_j,$$

где q_j - белый шум –

$$M[q_j] = 0, M[q_j q_i] = Q\,\delta_{ij}.$$

$$z_j = 2x_j + r_j,$$
$$M[r_j] = 0, M[r_j r_i] = R\,\delta_{ij}.$$

$Q = 2, R = 4$

Построим дискретный фильтр Калмана для этой системы. Очевидно, что Ф=1, H=2.

$$K_j = P_j^- H_j^T \left(H_j P_j^- H_j^T + R_j\right)^{-1} = \frac{2P_j^-}{4P_j^- + 4}$$

$$P_j^+ = P_j^- - \frac{2P_j^-}{2P_j^- + 2} = \frac{P_j^-}{2P_j^- + 2}$$

$$P_{j+1}^- = \frac{P_j^-}{2P_j^- + 2} + 2$$

при $j \to \infty$ $P_{j+1}^- = P_j^-$ - условие стационарности.

$$P_\infty^- = \frac{P_0^-}{2P_\infty^- + 2} + 2 \;=>\; 2P_\infty^{-2} + 2P_\infty^- = P_\infty^- + 4P_\infty^- + 2$$

$$=>\; 2P_\infty^{-2} - 3P_\infty^- - 2 = 0 \;=>\; P_\infty^- > 0$$

Таким образом, мы найдем стационарное значении ошибки оценки.

$$K_\infty = \frac{2P_\infty^-}{4P_\infty^- + 4}$$

Дома: проверить выполнение условия сжимаемости решения, то есть проверить, что ошибки оценки стремятся к нулю.

Непрерывные случайные процессы

Рассмотрим условную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + q,$$

q – процесс типа белого шума.

$$M[q\,(t)] = 0$$
$$M[q\,(t)q^T(\tau)] = Q\,(t)\delta\,(t,\tau),$$

$Q\,(t) = Q^T(t) \geq 0$ – матрица интенсивности белого шума.

Дисперсия при $t = \tau$ бесконечна.

$$\begin{cases} \mu_x = M[x] \\ P_x = M[\dot{x}\dot{x}^T] \end{cases}$$

Будем считать, что эти две характеристики полностью характеризуют вектор x, то есть вектор x является нормально распределенным вектором. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\mu}_x = A\mu \\ \dot{P}_x = AP_x + P_xA^T + Q - \text{дисперсионное уравнение.} \end{cases}$$

Известно, что если $A = const, A -$ гурвицева, то есть матрица устойчива, оказывается, что у системы есть стационарное решение и случайный процесс, получающийся на выходе из этой системы стационарный, и можно вычислить характеристики $P_x(t) \to P_\infty$.

Пример

Пусть есть обобщенное дифференциальное уравнение для случайного процесса

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = q,$$

где q – скаляр, белый шум единичной интенсивности

$$M[q\,(t)q^T(\tau)] = 1 \cdot \delta\,(t,\tau),$$

.

Известны начальные условия

$$\begin{cases} \mu_x = 0 \\ P_x(0) = P_{11} \\ P_{\dot{x}}(0) = P_{22} \end{cases}$$

$x, \dot{x}$ – не коррелированны в начальный момент времени.

Вычислим стационарные характеристики $x, \dot{x}$. Для этого перепишем систему в форме Коши:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + q\end{cases}$$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix}0\\ q\end{pmatrix}$$

$$\mu_x(t) \equiv 0$$

Для вычисления матрицы ковариации используем дисперсионное уравнение.

$$P_x = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$AP_x = \begin{pmatrix}p_{12} & p_{22}\\ -2p_{11} - 3p_{12} & -2p_{12} - 3p_{22}\end{pmatrix}$$

$$P_x A^T = (AP_x)^T$$

$$Q = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}0= \\ 0= \\ 0=\end{matrix}\begin{cases}\dot{p}_{11} = 2p_{12} + 0\\ \dot{p}_{12} = p_{22} - 2p_{11} - 3p_{12} + 0\\ \dot{p}_{22} = -4p_{12} - 6p_{22} + 1\end{cases}$$

- система имеет стационарное решение, убедимся в этом.

$$p_{12}^{\infty} = 0$$

$$p_{22}^{\infty} = \frac{1}{6}$$

$$p_{11}^{\infty} = \frac{1}{12}$$

$$P^{\infty} = \begin{pmatrix}\frac{1}{12} & 0\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ