ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

ЧИЖОВ
ГЕННАДИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

Содержание

Лекция 1. Кинематика движения сплошной среды

Кинематика движения сплошной среды

Вместо того, чтобы следить за каждой частицей среды, которую можно маркировать каким-то цветом, подкрасить жидкость, газ или сделать кусок радиоактивным и следить за ним, удобнее и содержательней ввести полевые представления о поле скорости, поле плотности, поле давления или температуры, и каким-то образом описывать среду. Для того, чтобы ставить задачу предсказания результата по известным состояниям среды, нужно уметь представлять и предсказывать движение жидкости, газов или твердых тел.

Фигура равновесия гравитирующей жидкости, связанная с обсуждением Ньютона и Кассини формы

Описание движения сред проводим с помощью формулы:

$$\vec{u} = \vec{v}(\vec{r}, t) \tag{1.1}$$

— скорость, зависящая от положения, момента времени и других характеристик, которые могут быть получены (ускорение, которое может зависеть от положения, момент времени и характеристики деформации):

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}, t) \tag{1.2}$$

Второй закон Ньютона связывает ускорение частицы, массу частицы и действующие на частицу силы:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{1.3}$$

Механика точки: в обычных ситуациях движение тел происходит не только под действием известных сил (например, сила тяжести), но и под действием неизвестных заранее сил, ограничивающих движение.

Определение 1.1. *Сила реакции*

– сила, которую заранее не знаем и которая возникает для того, чтобы обеспечить определенный тип движения, (например, покоя).

Силы бывают *дальнодействующими* (сила тяжести) и *контактными* (сила реакции). Одни действуют на любом расстоянии и на каждый участок среды. Силы (объемные или дальнодействующие) устроены так: сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ определяется законом тяготения Ньютона. Масса равняется сумме масс квантовых частиц, входящих в тело, которое взаимодействует: $m = \sum_i m_i$. Но каждая масса элементов занимает свой элементарный объем: $m_i = \rho_i \Delta V_i$. Поэтому такие силы, как сила тяжести, оказываются пропорциональными:

$$\vec{F} = \sum_i m_i \rho_i \Delta V_i \tag{1.4}$$

Такие силы будут пропорциональны объему. Если объемы будут одинаковыми, то придется считать сумму элементарных объемов ΔV. Сила тяжести пропорциональна выделенному объёму: $\Delta \vec{F}_{\text{тя}} \sim \Delta V$ — чем больше объем, тем больше сила тяжести. Если объем маленький (элементарный), сила тяжести будет пропорциональна элементарному объему. Такие силы называются *объемными силами*.

Коэффициент пропорциональности — векторная величина. Коэффициент обозначается как $\vec{f}$ и называется *плотностью силы*:

$$\Delta \vec{F} = \vec{f} \Delta V \tag{1.5}$$

Возможно выбирать объемы маленькими для удобства описания силы. Такой способ хорош для объемных (сила тяжести), электромагнитных (действующих на заряженные тела, если заряд распределен равномерно) или магнитных сил (действуют на токи, которые могут быть распределены определенным образом). Все описывается единообразно. Если хотим использовать тензорные описания, можем это сделать, записав уравнение (1.5) в выбранных ортах. Представим как произведение проекции F_i и соответствующего орта $\vec{n}_i$:

$$\vec{F} = F_i \cdot \vec{n}_i \tag{1.6}$$

соотношение для проекций:

$$\Delta F_i = f_i \cdot \Delta V \tag{1.7}$$

Контактные силы возникают со стороны твердых поверхностей, действующих на какие-то тела (твердые, жидкие, газообразные). Они действуют при непосредственном взаимодействии. Текучесть жидкостей или газов приводит к замечательному результату: чем больше площадь поверхности при прочих равных условиях, тем больше сила, действующая на тело.

Столкновение струн и кумулятивный эффект

Сила поверхности – сила, действие которой рассматривается на небольших участках. При больших участках существенно меняются характеристики среды — плотность, действие сил тяжести, электромагнитных полей, поэтому соотношение проекций перестает действовать. Если оно действует, то такие контактные силы называют *поверхностными*, потому что они пропорциональны площади поверхности:

$$\Delta \vec{F}_{\text{пов}} \sim \Delta S \tag{1.8}$$

Это силы, действующие со стороны жидкости в состоянии покоя. Они характеризуются давлением, коэффициент пропорциональности оказывается величиной, которая имеет определенное направление в зависимости от ориентации участка. В таком случае над площадью можем поставить вектор, а коэффициент пропорциональности будет скаляром. Если рассматривается замкнутая поверхность, то принято выбирать внешнюю нормаль. Тогда сила, действующая на эту поверхность со стороны окружающей жидкости, направлена в обратную сторону и ставится знак минус:

$$\Delta\vec{F}_{\text{пов}} = -p\Delta\vec{S} \tag{1.9}$$

Пример поверхностных сил: такие силы действуют в покоящихся жидкости или газе. Эти силы определяются только площадью поверхности, но не ориентацией, и коэффициент p оказывается постоянным, что отражается в законе Паскаля. Если рассматривается жидкость, в ней пластинка может поворачиваться под любым углом, модуль силы не меняется. Если этот коэффициент не зависит от направления вектора, то имеем дело с такими силами. Соотношение (1.9) можем записать в тензорных обозначениях:

$$\Delta F_{\text{пов}\ k} = -p\Delta S_k \tag{1.10}$$

При рассмотрении тела, движущегося по поверхности, возникают касательные силы. Направление силы реакции, действующей на движущееся тело, будет уже другим. В жидкостях и газах соотношение (1.8) продолжает действовать (не во всех). Пропорциональность будет, но коэффициент пропорциональности не обязан быть скалярной величиной.

Если поверхностная сила, действующая на элементарный участок, пропорциональна коэффициентам, описывающим площадку, но они не направлены в одну сторону, то пропорциональность задаётся набором коэффициентов:

$$\Delta F_{\text{пов}\ i} = \tau_{ik}\Delta S_k \tag{1.11}$$

Эти коэффициенты связывают проекции векторов и описывают тензорные свойства. При поворотах системы координат она меняется по тензорным правилам. Описание в этом случае производится с помощью тензора натяжения. Результат в соотношении (1.10) может быть получен, если напишем $\tau_{ik} = -p\delta_{ik}$ (где δ_{ik} — символ Кронекера). Получим следующее:

$$\tau_{ik} \cdot \Delta S_k = -p\delta_{ik} \cdot \Delta S_k = -p\Delta S_k \tag{1.12}$$

Тензорные обозначения удобны простотой и возможностью описать пропорциональность векторов, которые не совпадают по направлению (что с помощью векторов выразить трудно).

Запишем уравнение Ньютона, используя терминологию полевых величин. Главную полевую величину, поле скоростей, можно задать с помощью проекцией на соответствующий орт.

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t) = v_i\vec{n}_i, \quad \text{где} \quad v_i = v_i(x_k,t) \tag{1.13}$$

Если взять небольшую (элементарную) массу и умножить её на вектор скорости, то получим величину, называемую *вектором импульса частицы.*

$$\vec{p} = p_i\vec{n}_i, \quad \text{где} \quad p_i = \Delta m v_i \tag{1.14}$$

Скорость изменения импульса равняется всем действующим на тело силам:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \vec{F}_{\text{об}} + \vec{F}_{\text{пов}} \tag{1.15}$$

Дифференцирование по времени произведения (1.14), вообще говоря, приведёт к дифференцированию первого слагаемого, умноженного на величину $\vec{n}_i$, и второго слагаемого, умноженного на величину p_i. Если в процессе движения переходим от одной точки к другой, то рассматриваемые векторы могут изменяться от точки к точке (например, в цилиндрических координатах или сферических), и уравнения будут сложными. Ограничимся декартовыми координатами, где направляющий вектор будем обозначать как $\vec{n}_i$. Соотношение (1.15) можно записать в проекциях:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i = F_{\text{об }i} + F_{\text{пов }i} \tag{1.16}$$

Перейдём к полевому описанию. Можно записать массу таким образом, чтобы ввести полевую величину. Для этого рассматриваем элементарные объемы, вводим понятие плотности. Импульс:

$$p_i = \Delta m v_i = \rho v_i \Delta V \tag{1.17}$$

Величина ρv_i называется *плотностью импульса.* В левой части выражения (1.16): дифференциал от $\rho v_i \Delta V$ по t можно раскрыть. Будем рассматривать движение частицы постоянной массы. Хотим, чтобы масса участка Δm была постоянна в процессе движения (из второго закона Ньютона).

ρ и ΔV можно вынести за знак производной как Δm и начать вычисление производной $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_i$. Эта производная имеет смысл в гидродинамике, но не имеет математического смысла, так как $v_i = v(x_k,t)$. При движении должны сравнивать скорости в двух соседних точках, но не в произвольных (откуда частица вышла и куда пришла). Эти точки связаны соотношением, обеспечивающим перемещение частиц по направлению вектора скорости. Получится частная производная $\frac{\partial v_i}{\partial t}$, которая определяет изменения, происходящие с полем скорости с течением времени, и возникнет второе слагаемое $v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ — конвективный член. Вместе эти слагаемые называются *субстанциональной производной.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho v_i \Delta V) = \Delta m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_i = \Delta m\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) \tag{1.18}$$

Рассматриваем элементарный объём, силу будем писать введя плотность объёмной силы, как в выражении (1.6). Δm содержит ΔV. Рассматриваем частицу, окруженную определенной поверхностью, и сила действует на каждый кусочек этой частицы. Поэтому поверхностная сила, которая действует на элементарную частицу, является суммой «более элементарных» ΔF_i, действующих на каждый элемент поверхности:

$$\Delta\vec{F}_{\text{пов}} = \sum_\alpha \Delta\vec{F}_\alpha$$

$\Delta\vec{F}_\alpha$ можно представить в виде набора i-ых проекций и умножить на направляющие векторы:

$$\Delta\vec{F}_\alpha = \Delta F_i^\alpha \cdot \vec{n}_i$$

сумму можем расписать по проекциям:

$$\Delta\vec{F}_{\text{пов}} = \sum_\alpha \Delta\vec{F}_\alpha = \sum_\alpha \Delta F_i^\alpha \cdot \vec{n}_i \tag{1.19}$$

Силы элементарных площадок пропорциональны

$$\Delta F_i^\alpha = \tau_{ik} S_k^\alpha$$

При суммировании по всем площадкам можем перейти к интегрированию по всей поверхности:

$$\Delta\vec{F}_{\text{пов}} = \oint \tau_{ik}\mathrm{d}S_k \tag{1.20}$$

Уравнение движения для гидродинамики «сухой» жидкости

Если запишем уравнение для частицы, которая движется, то получится преобразованное из (1.15) уравнение с $\oint$ в правой части. Попробуем интегрирование по поверхности заменить интегрированием по объему (объём элементарный). Нужно интегрировать $\frac{\partial}{\partial x_k}\tau_{ik}$ по $\mathrm{d}V$. Получаем интеграл

$$\int\limits_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x_k}\tau_{ik}\mathrm{d}V$$

Объем очень маленький, интегрирование можно заменить выражением $\frac{\partial}{\partial x_k}\tau_{ik}\Delta V$. Получаем уравнение, преобразованное из (1.15):

$$\Delta m\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = f_i\Delta V + \frac{\partial}{\partial x_k}\tau_{ik}\Delta V$$

Данное уравнение можно сократить на ΔV, и в итоге получаем уравнение, описывающее движение жидкости:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=f_i+\frac{\partial}{\partial x_k}\tau_{ik} \tag{1.21}$$

У нас получилось уравнение, которое может описывать движение частицы под действием объемных и поверхностых сил, но с помощью полевых переменных. Это второй закон Ньютона, записанный удобным для сплошной среды способом.

Плотность силы тяжести запишем как $f_i=\rho g_i$. Если имеем дело с идеальной средой, подчиняющейся закону Паскаля, то тензор $\tau_{ik}=-p\delta_{ik}$. Это матрица, в которой имеется всего 3 диагональных элемента, и эти элементы одинаковы. Получается уравнение вида:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=g_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k} \tag{1.22}$$

Получили простейшее уравнение, описывающее движение идеальной жидкости без трения (ее называют сухой водой). Все записано в декартовых координатах. При использовании цилиндрических или сферических координат, переходя от точки к точке, направление на этих единичных векторах не меняется. Оператор $v_k\frac{\partial}{\partial x_k}$ записывают в векторной форме:

$$v_k\frac{\partial}{\partial x_k}=(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}),\quad \frac{\partial}{\partial x_i}=\vec{\nabla} \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=\vec{g}-\frac{\vec{\nabla}}{\rho}p \tag{1.24}$$

получаем ***уравнение Эйлера*** для движения идеальной жидкости в поле тяжести.

Нам нужно построить модель решения, написать полную систему уравнений. В этом случае конкретизировать и жёстко себя заставлять писать все в декартовых координатных неразумно. Поэтому для начала на первом шаге составления уравнений пишут их как (1.24). p в уравнении (1.24) – это распространённый случай, когда убрали тензор.

Масса элементарная сохраняется и с течением времени не меняется: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta m=0$. Перейдем к полевым переменным. Записанную субстанциальную производную следует написать так:

$$\frac{\partial(\rho\Delta V)}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\rho\Delta V)=0 \tag{1.25}$$

Объем, вероятно, будет меняться. Можем записать соотношение (первое слагаемое из (1.25)) :

$$\Delta V\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+\rho\frac{\partial\Delta V}{\partial t}=0 \tag{1.26}$$

Рассмотрим величину отношения производной ΔV по времени к величине ΔV. Она имеет размерность обратную времени. Эту размерность можно получить, если применить оператор скорости:

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta V}{\Delta V} = \frac{\Delta\dot{V}}{\Delta V} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

Вместо сомножителя второго слагаемого в уравнении (1.26) появляется произведение ΔV на величину $(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$. Получаем

$$\Delta V\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \rho(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\Delta V = 0 \qquad (1.27)$$

Помня утверждение, что масса не меняется в процессе движения, следует записать уравнение (1.25) как:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho + (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\rho = 0$$

Величина является суммой, возникшей в результате дифференцирования двух сомножителей:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (1.28)$$

Получили дополнительное соотношение, которое использовали, когда получали результат (1.24). Получили систему уравнений (1.24) и (1.28) в частных производных. Решение такой системы разумно, если накладываем граничные условия. Жидкость где-то движется, обтекая какие-то тела, или у нее есть открытая поверхность (ручей или река).

Давление: $p = p(x_k, t)$. Изотермическое движение газа:

$$p\Delta V = \frac{\Delta m}{\mu}RT, \quad p = \rho rT, \quad \text{где} \quad r = \frac{R}{\mu}$$

Получаем, что p пропорционально ρ. Необходимо добавить зависимость от плотности: $p = p(\rho)$. Система уравнений замкнется, и сумеем решить задачу.

Рассматриваем ситуацию, в которой среда не сжимается. Она сплошная, будем считать, что всюду плотность одинакова: $(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = 0$, $\rho_0 = \rho$. Первое уравнение (1.24) останется таким же. Второе уравнение вместо (1.28) будет:

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = 0 \qquad (1.29)$$

К уравнениям (1.24) и (1.29) нужно добавлять граничные условия. Если удастся решить уравнение (1.29) вместе с граничными условиями, чтобы найти скорость, то по этому уравнению (1.24) можно определить давление. Проще, когда течение жидкости является потенциальным, то есть существует скалярная функция $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$, называемая *потенциалом скорости*. Тогда задача выглядит как $(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = \Delta\varphi = 0$. Если к этой задачи добавить граничные условия, то найдем течение жидкости.

Итак, если течение жидкости потенциально, то задача о движении жидкости — это задача об определении решения уравнения Лапласа. Задача является корректной при заданных граничных условиях, значит где-то на границе нужно задать, как устроена скорость. Например, есть труба сложной формы. Если знаем, что на входе, на выходе и вдоль стенок скорость известна (соотношение непроницаемости), получим полное решение задачи. Обращаться к уравнению Эйлера нужно только для того, чтобы определить неизвестное давление.

Условие на скорость в дифференциальной форме (1.29) накладывается на скорости частиц в той или иной форме. Из механики материальных точек, дифференциальное условие на скорости частиц называется *уравнением связи*. Связи бывают голономные, когда их удается записать в конечной форме, и неголономные, когда их вынуждены оставлять как соотношение между скоростями. (1.29) – это определенная форма неголономной связи. А уравнение (1.24) есть движение системы, на которую наложены неголономные связи.

Система идеальная, ведь много частиц, которые движутся без трения. Они связаны между собой условием несжимаемости и внешними условиями, накладываемыми на среду. Динамика жидкости – это динамика в определенной форме неголономных систем огромного числа частиц.

Для решения задачи можно воспользоваться уравнением (1.24), а можно немного преобразовать в ***уравнение Громеки-Лэмба***. *Гораций Лэмб* (1849-1934 гг.) — английский математик и гидродинамик. Известен как учёный, описавший волны, распространяющиеся в тонком слое твердого тела. *Ипполит Громека* (1851-1889) — российский учёный-механик, профессор Казанского университета; дал оригинальное изложение теории капиллярных явлений.

Удобно выражение в левой части уравнения (1.24) записать в форме, которая позволяет выделять разные течения. Течения бывают потенциальными:

$$\vec{v}_{pot} = \vec{\nabla}\varphi, \quad [\vec{\nabla}\times\vec{v}_{pot}] = 0$$

а бывают вихревыми

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}[\vec{\nabla}\times\vec{v}]$$

Для вращающегося твердого тела важна дробь $\frac{1}{2}$, а ω — угловая скорость вращающегося твердого тела. Если рассматривается течение, в котором есть и потенциальная часть и вихревая $\vec{v} = \vec{v}_{pot} + \vec{v}_{rot}$, то удобно показать, что вихревая часть существует. Слагаемое $(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\vec{v}$ из уравнения (1.24) можно представить таким образом, чтобы выделить вихревую часть. Для этого нужно рассмотреть двойное векторное произведение и получить из этого двойного векторного произведения соотношение, в которое входит скорость. Оператор $\vec{\nabla}$ действует только на один множитель $\vec{v}$.

$$\left[\vec{v}\times[\vec{\nabla}\times\vec{v}]\right]=\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v})-\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})$$

$$\left[\vec{v}\times[\vec{\nabla}\times\vec{v}]\right]=\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)-(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$

Величина $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$ называется конвективным членом.

$$-\left[\vec{v}\times[\vec{\nabla}\times\vec{v}]\right]=2[\vec{\omega}\times\vec{v}]$$

выразим конвективный член:

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=2[\vec{\omega}\times\vec{v}]+\vec{\nabla}\frac{v^2}{2} \tag{1.30}$$

Теперь уравнение (1.24) в форме Громеки-Лэмба выглядит так:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+2[\vec{\omega}\times\vec{v}]=\vec{g}-\frac{\vec{\nabla}}{\rho_0}p-\vec{\nabla}\frac{v^2}{2} \tag{1.31}$$

Сжатие сплошной среды обязательно ведет к тому, что деформацию среды нужно рассматривать вместе с изменением количества теплоты (первое начало термодинамики). Всё вместе приводит к изменению внутренней энергии. Ограничимся случаем $\vec{g}=-\vec{\nabla}\phi$, введём потенциал гравитационного поля. Можем записать дивергенцию от $\vec{g}$, она равняется 0, если гравитационное поле создается внешними телами. Получим уравнение, в правой части которого будет плотность.

Уравнение Эйлера в форме Громеки-Лэмба (баланса импульса)

В правой части уравнения (1.31) можно вынести оператор $\vec{\nabla}$ за скобки, получим:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+2[\vec{\omega}\times\vec{v}]=-\vec{\nabla}\left(\phi+\frac{p}{\rho_0}+\frac{v^2}{2}\right) \tag{1.32}$$

В этом уравнении, если поле внешнее, можем задать потенциал ϕ произведением $\vec{g}\vec{r}$ и описывать движение во внешнем поле. Если поле создаётся текущими массами, необходимо добавить в правую часть уравнения (1.32) уравнение для ϕ (ситуация, когда жидкость несжимаемая, а плотность постоянная).

Пример 1.1. *Можно применить к условию равновесия воды, которая наливается в кастрюлю.*

Решение.

Будем считать, что среда успокоилась. Идеальная жидкость изначально должна быть такой, но реальная жидкость успокаивается спустя некоторое время после диссипации. Предположим, что $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Поле скоростей не меняется с течением времени, но движение не запрещено. Предположим, что среда как-то движется:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Кастрюлю с водой, которая стоит на столе, поставим на какую-нибудь карусель, покрутим её. Считаем, что $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$, то есть ω в каждой точке одинаково и не зависит ни от времени, ни от координат. Чтобы задача была не самой сложной, будем считать, что $\vec{\omega} = \omega \vec{n}_z$, а ускорение свободного падения $\vec{g} = -g\vec{n}_z$.

Вопрос. Как будет устроено поле давление внутри жидкости? Какую форму примет поверхность жидкости, если давление на поверхности одинаково и равно атмосферному? Какие силы будут действовать на частичку твердого тела каких-то небольших размеров, которое находится в жидкости где-то в точке $\vec{r}_0$?

Если тело опустить в жидкость так, чтобы оно покоилось, то действующие на неё силы называются *силами Архимеда*. Есть закон Архимеда: архимедова сила равняется весу тела. Придётся найти силу давления в произвольной точке и сумму сил давления, приложенных к этой частице.

Раз первое слагаемое уравнения (1.32) уходит, то будем рассматривать второе слагаемое. Движение происходит как у твёрдого тела:

$$[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}) - \vec{r}\omega^2$$

Рассмотрим $v^2 = [\vec{\omega} \times \vec{r}]^2$. Сюда входят ω^2, r^2 и квадрат синуса угла между ними. Для любой точки можем записать

$$\omega^2 r^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\vec{r})^2$$

Продифференцируем выражение и вычислим градиент:

$$\vec{\nabla} v^2 = 2\left(\omega^2 \vec{r} - (\vec{\omega}\vec{r})\vec{\omega}\right)$$

получаем, что

$$-2\,[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = \vec{\nabla} v^2$$

Если подставим в уравнение (1.32), то получим

$$\nabla v^2 = \vec{\nabla}\left(\phi + \frac{p}{\rho_0} + \frac{v^2}{2}\right), \quad \Rightarrow \quad 0 = \vec{\nabla}\left(\phi + \frac{p}{\rho_0} - \frac{v^2}{2}\right)$$

Поскольку знаем, как устроено ϕ, мы можем найти поле давлений как функцию положения точки (написали v^2). В качестве упражнения нужно довести задачу до конца самостоятельно. ■

Лекция 2. Парадокс Даламбера

Способы применение интегралов для описания движения

Движение жидкости (плотность которой постоянна, поле скоростей потенциальное) можно выразить вводя скалярную функцию потенциала вектора скорости. Поле зависит от координат и времени, соответствующая скалярная функция зависит от времени.

$$\vec{v} = \vec{v}^{pot} = \vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) \tag{2.1}$$

Если вычисляем дивергенцию от этой величины и есть какие-то заряды, то дивергенция от $\vec{v}$ не равна 0. Если заряды отсутствуют, то дивергенция скорости, например, электрического поля: div $\vec{v} = 0$. Это получается из уравнений непрерывности.

Скорость изменения элементарного объема пропорциональна самому объему, а коэффициент пропорциональности есть дивергенция вектора скорости:

$$\Delta\dot{V} = \Delta V \cdot \mathrm{div}\ \vec{v} = \Delta V(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \tag{2.2}$$

Утверждение, что дивергенция вектора скорости равна нулю в каждой точке, означает, что имеем дело с несжимаемой средой, объем не может меняться. Физически это означает, что не накачивают в эту среду какое-то вещество и не отбирают, то есть источники отсутствуют. У нас имеется потенциальное поле скоростей несжимаемой среды.

Первое соотношение (2.1) описывает тип течения, второе соотношение (2.2) описывает свойство среды. Объединим их вместе. Чтобы объединить вместе, достаточно вычислить дивергенцию от уравнения (2.1). Получим следующее утверждение:

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^{\mathrm{pot}}) = \Delta\phi = 0 \tag{2.3}$$

Уравнение дополнено граничными условиями, полностью определяет поведение этого поля. Максимум или минимум такого поля достигается только на границе. Решение такого типа задач (так как тип вещества и тип течения фиксированы) позволяет полностью определить течение, если известны граничные условия.

Вычисление течения и давления

Получилось соотношение, которое позволяет определить тип течения (течение вычисляется). Если решаем задачу, в которой движение чем-то ограничено, то одна часть задачи — найти характер движения частиц, а вторая — найти силы реакции и понять, как они действуют на связи.

Восстанавливаем с помощью уравнения Эйлера. Перепишем уравнение (1.24):

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}}{\rho}p + \vec{g}$$

Заметим, что если имеем дело с полем тяжести, то это поле потенциальное. Как закон Кулона, так и закон Ньютона. Значит, это поле может быть задано градиентом от потенциала, например, гравитационного поля: $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}}{\rho}p - \vec{\nabla}\phi$$

ρ – это константа:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \phi\right)$$

$\vec{v}$ равняется градиенту величины ϕ: $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$, можем вместо скорости написать в левой части в первом слагаемом $\vec{\nabla}\phi$ и вынести этот градиент из знака дифференциала (это независимые операции — дифференцирование по времени и дифференцирование по координате: $\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}$).

Рассмотрим слагаемое $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$. Есть замечательная форма записи уравнения формы Громеки-Лэмба. Она, вообще-то говоря, обобщается не только на идеальной жидкости, но и на сжимаемую среду, поэтому можно спрятать все под знак градиента (см. полный вывод (1.30)):

$$\left[\vec{v}\times[\vec{\nabla}\times\vec{v}]\right] = 2[\vec{v}\times\vec{\omega}] = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}, \quad \text{где} \quad 2\vec{\omega} = [\vec{\nabla}\times\vec{v}]$$

Перепишем выведенную раннее уравнение формы Громеки-Лэмба (1.32) в преобразованном виде:

$$2[\vec{\omega}\times\vec{v}] = -\vec{\nabla}\left(\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

Это общее выражение с правой стороны для потенциальных течений, а с левой стороны: $[\vec{\nabla}\times\vec{v}] = [\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi] = 0$, следовательно, левая часть равняется 0 и получаем уравнение:

$$0 = \vec{\nabla}\left(\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \tag{2.4}$$

Получили утверждение, которое называется ***интегралом Коши-Гельмгольца***. Величина, стоящая под знаком градиента, никак не зависит от координат. Куда бы не перемещались, зависимости от координат отсутствуют. Результат (2.4) можно записать так: сумма в скобках равняется константой *по координате*, но *не по времени*. Значит, эта величина может быть функцией времени. Поэтому можем записать:

$$\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = f(t) \tag{2.5}$$

Если в какой-нибудь точке пространства, где задано поле скоростей, известны давление, гравитационный потенциал, скорость и величина ϕ, то функция $f(t)$ будет сохраняться в любой точке пространства. Это позволит написать p в любой точке пространства, в любой момент времени.

$$p(\vec{r},t) = \rho f(t) - \rho\left(\phi + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + p_{\vec{r}_0} - \rho\left(\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0} + \left.\frac{v^2}{2}\right|_{\vec{r}_0}\right) \tag{2.6}$$

Одна часть описывает характер течения, другая описывает распределение давления в нем. Зная давление, можно найти силу реакции на стенки сосуда или на тела, погруженные в жидкость.

Случай ограниченного течения жидкости

Рассмотрим простейший случай ограниченного движения жидкости. Она может быть ограничена стенками сосуда и поверхностями твердых тел, которые в этой жидкости находятся, например, шар (Рис. 2.1). Скорость придется задавать всюду: и со стороны натекающего потока, и там, где поток уходит.

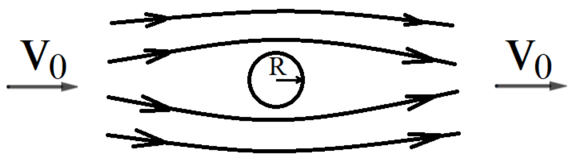

Рис. 2.1. Случай ограниченного течения жидкости

Поверхность шара и будет тем ограничением, которое задаем, говоря о поверхности. Пусть $f(\vec{r},t) = 0$ — это функция, описывающая самую поверхность. Если есть какая-нибудь труба, то будет две поверхности. Поверхности могут быть самые разные.

Непроницаемая поверхность

Рассмотрим те задачи, которые встречаются при течении жидкости по всяким трубам, обтекании тел. Непроницаемая поверхность: предположим, что у нас нарисован кусок криволинейной поверхности. Если поверхность непроницаема, то жидкость сквозь неё течь не может. Может течь только так, чтобы скорость на поверхности была параллельна любой линии, принадлежащей поверхности, т.е. обтекать ее. Можно нарисовать нормаль к поверхности и записать $(\vec{n}\cdot\vec{v}_{\text{пов}})$.

Получится условие непроницаемости. Зафиксируем момент времени и пошевелим точку (момент времени 0). Одна точка находится на поверхности:

$$f(\vec{r}_1, 0) = 0,$$

вторая точка находится рядом в этот же самый момент времени:

$$f(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}, 0) = 0$$

$$f(\vec{r}_1+\delta\vec{r},0) = f(\vec{r}_1,0) + \left(\vec{\nabla} f(\vec{r}_1,0)\cdot\delta\vec{r}\right) = 0 \tag{2.7}$$
$$f(\vec{r}_1,0) = 0 \Rightarrow \left(\vec{\nabla} f(\vec{r}_1,0)\cdot\delta\vec{r}\right) = 0$$

Сделали следующее утверждение: вектор-градиент в точке поверхности в какой-то выбранный момент времени перпендикулярен любому вектору, принадлежащему поверхности: $\vec{\nabla} f(\vec{r},t) \perp \delta\vec{r}$, ведь перемещение совсем маленькое, и поэтому вектор фактически принадлежит поверхности с точностью до членов более высокого порядка малости. Это означает, что условие непроницаемости можно записать в таком виде:

$$\left(\vec{\nabla} f\cdot\vec{v}\right)\Big|_{\text{пов}} = 0 \tag{2.8}$$

Получили свойство непроницаемости. Добавив время, позволили себе рассматривать поверхности, меняющиеся с течением времени (частным случаем такой поверхности, меняющейся с течением времени, является поверхность, которая, например, перемещается поступательно). Необходимо написать свойства непроницаемости поверхности тела для воздуха.

Приведём пример простой задачи. Точка съезжает с наклонной плоскости со скоростью $\vec{v}$. Если наклонная плоскость гладкая, то сила реакции перпендикулярна скорости движения точки. Рассмотрим точку на поверхности наклонной плоскости – клина, который может двигаться со скоростью $\vec{u}$ (Рис. 2.2). Будет ли скорость точки, скользящей по поверхности клина, оставаться перпендикулярной нормали поверхности? Спустя время Δt клин переместился на величину $u\Delta t$. Точка, если она находится на поверхности клина, оказалась где угодно, но только на поверхности. Это означает, что скорость $\vec{v}$ (обтекающей поверхности жидкости) перестала быть перпендикулярной нормали поверхности.

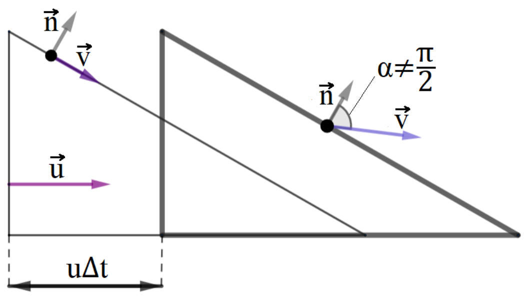

Рис. 2.2. Клин

Скорость частицы, обтекающей поверхность, должна учитывать, что поверхность за это время смещается. Значит, вместо соотношения (2.7) должны написать следующее:

$$\begin{aligned} f(\vec{r},0) &= 0 \\ f(\vec{r}+\delta\vec{r},dt) &= 0 \end{aligned}$$

Проведя то же самое разложение, получаем:

$$f(\vec{r},0) + \left(\vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}dt = f(\vec{r},0)$$

Сократив $f(\vec{r},0)$ в обеих частях уравнения, приходим к готовому изменённому условию:

$$\left(\vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 \tag{2.9}$$

Если тело двигалось поступательно, то любая точка этого тела (пусть оно движется, например, со скоростью $\vec{v}_0$) перемещается как $\delta\vec{r} = \vec{v}_0 dt$:

$$\left(\vec{\nabla} f \cdot \vec{v}_0\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{2.10}$$

Если частицы жидкости обтекают это тело, возникает простая скорость частиц жидкости. Она не совпадает со скоростью тела, но проекция скорости будет одинакова. Если тело перемещается поступательно, какая-то выбранная точка сместилась, то направление векторов скорости этой точки твердого тела на нормаль должно быть таким же, как и направление вектора скорости частицы на нормаль, равной нулю. Такие изменения стоит внести для того, чтобы получить возможность описывать не только движение жидкости по трубам или движение жидкости, обтекающей неподвижное непроницаемое твердое тело, но и движущиеся тела. Жидкости необязательно бывают такие текучие, что они легко скользят по поверхности тела. Возможны липкие жидкости.

1) обтекаемые (гладкие):

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f\right)\Big|_{\text{пов}} = \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} f\right)\Big|_{\text{пов}}$$

   где $\vec{V}$ — скорость точек, отдельно взятых на поверхности;

2) условие прилипания: $\vec{v}\big|_{\text{пов}} = \vec{V}$

Условие прилипания годится, когда собираемся рассматривать жидкости, обладающие вязкостью, которые прилипают к твердому телу, друг к другу.

Задача: обтекание неподвижного гладкого шара

Вернемся к простой задаче: обтекание неподвижного гладкого шара (Рис. 2.3). Шар радиуса a. Возьмем жидкость, границы у нас $|x|$ много больше a, ось Z выберем по направлению вверх и зададим течение вдоль оси Z.

После того, как жидкость обогнула этот шар, она вернулась в почти исходное состояние. Уравнение, описывающее движение такой жидкости, удобно представить так: возьмём поток невозмущенной жидкости и будем описывать его потенциал φ.

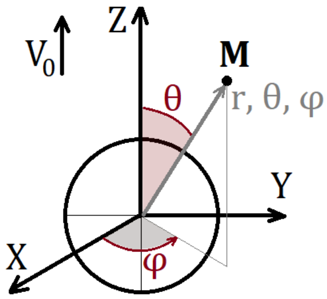

Рис. 2.3. Обтекание неподвижного гладкого шара

А действие шара на жидкость – это однородный поток φ_0. Возмущение, вносимое шаром, обозначим как φ_1. Если уйдём достаточно далеко, то поток жидкости забудет о существовании шара и просто не заметит его.

Поле скоростей имеет вид в декартовых координатах: $\vec{v}_{\text{н}} = v_0\vec{n}_Z$ Потенциал можем записать в этих же координатах: $\varphi_0 = (\vec{v}_{\text{н}} \cdot \vec{r})$, где $\vec{v}_{\text{н}}$ — скорость невозмущённого потока. Продифференцируем по координатам и получим вектор скорости:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\varphi_0 &= v_{\text{н}} \cdot \vec{n}_Z \\ \varphi_0 &= (\vec{v}_{\text{н}} \cdot \vec{r}) \\ \vec{v}_{\text{н}} &= v_0\vec{n}_Z \end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\varphi_0 = v_0 r \cos\theta \tag{2.11}$$

В результате находим потенциал невозмущенного течения. Пусть вдали от шара натекающий поток однородный. Если взять простейшую модель, и если полный потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi_1 = 0$, то и невозмущенный потенциал удовлетворяет этому уравнению (плюс граничные условия для возмущений). Граничные условия для возмущения могут быть:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f)\Big|_{\Sigma} = 0 \tag{2.12}$$

Частицы жидкости на шаре могут только скользить по поверхности и не могут проникать. Это условие непроницаемости. Но в соотношении (2.12) полная скорость. Значит, полную скорость следует представить как $\vec{v} = \vec{v}_{\text{н}} + \vec{v}_1$, где $\vec{v}_1$ — скорость возмущения. Поэтому здесь в (2.12) граничное условие будет следовать из этого соотношения. Значит, если будем говорить о том, как устроены граничные условия для $\vec{v}_1$, то должны записать следующее:

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} f)\Big|_{\Sigma} = -(\vec{v}_{\text{н}} \cdot \vec{\nabla} f)\Big|_{\Sigma} \tag{2.13}$$

Надеемся, что вдали от шара течение жидкости будет незаметным, а значит, потенциал этого течения будет стремиться к нулю, если только r стремится к бесконечности:

$$\varphi_1\Big|_{r\to\infty} \to 0 \tag{2.14}$$

Как устроен оператор Δ, если воспользуемся сферическими координатами:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{2.15}$$

Для простоты мы проигнорируем зависимость от угла φ (Рис. 2.3). Выберем простейшую модель. Такие потоки рассматриваются, но гидродинамика таких закрученных потоков очень сложна. Не будем рассматривать закрученные потоки. Решение задачи можно искать методом разделения переменных:

$$\varphi_1 = R(r)\Theta(\theta)$$

Переменная φ_1 будет обеспечивать затухание возмущения (см. соотношение (2.14)). Если посмотрим на соотношение (2.13), то скорость невозмущенного потока $\vec{v}_{\text{н}}$ возникает из потенциала φ_0 (см. соотношение (2.11)). Значит, угловая зависимость, которая войдет в (2.13), заключена в $\cos\theta$ и должна появиться в левой части (2.13).

Если хотя бы в одной точке обнаружили такую зависимость, то эта зависимость будет глобальной. Сама идея разделения переменных означает, что зависимость от угла глобальная: и вблизи шара, и вдали (и где угодно). Вблизи шара она должна быть как в соотношении (2.11), потому что граничные условия для одной функции и для другой получаются дифференцированием. Можем писать $\cos\theta$ вместо $\Theta(\theta)$. Можем применить полный метод разделения переменных. Подставим функцию $\Theta(\theta) = \cos\theta$ в (2.15). Получим:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{R}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{2.16}$$

Выполним дифференцирование от $\cos\theta$ и посмотрим, что при этом получится.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\right) = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta) = -2\cos\theta$$

Подставив в (2.16), получим уравнение для радиальной части:

$$\frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) - \frac{2R}{r^2}\cos\theta = 0$$

Или по-другому (домножив обе части на r^2 и вынеся $\cos\theta$ за скобки):

$$r^2R'' + 2rR' - 2R = 0 \tag{2.17}$$

Если возьмём подстановку $R(r) = Ar^s$ (с любым коэффициентом A), то получим следующее:

$$\begin{aligned} s(s-1)+2s-2 &= 0 \\ s^2+s-2 &= 0 \end{aligned}$$

Два решения у этого уравнения $s = 1$ и $s = -2$, поэтому итоговое решение дифференциального уравнения:

$$R(r) = A_1 r + A_2 r^{-2}$$

Решение $A_1 r$ нам не годится из условия (2.14), остается только вторая часть. Значит решение, которое мы ищем и которое удовлетворяет граничному условию:

$$\varphi_1 = \frac{A}{r^2}\cos\theta \tag{2.18}$$

Как только решение найдено, можем попытаться отыскать радиальную скорость возмущённого движения $v_r^{(1)}$ и невозмущённого движения $v_r^{\text{н}}$:

$$v_r^{(1)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\frac{2A\cos\theta}{r^3} \qquad v_r^{\text{н}} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = v_0\cos\theta \tag{2.19}$$

Потребуем, чтобы сумма $v_r^{(1)}$ и $v_r^{\text{н}}$ обращалась в ноль на поверхности шара:

$$v_0\cos\theta - \frac{2A\cos\theta}{a^3} \equiv 0$$

Если вынесем $\cos\theta$ за скобки, то сможем выразить A как $A = \frac{a^3}{2}v_0$. Если выберем такой коэффициент A, то сразу получим потенциал возмущенного течения:

$$\varphi_1 = v_0\frac{a^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{2.20}$$

Поле возмущения теперь известно, как и невозмущенное поле. Полный потенциал получаем как:

$$\varphi = v_0\cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right) \tag{2.21}$$

Найдем давление. Воспользуемся уравнением Бернулли:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}$$

Необходимо посчитать v^2. Возьмем $v_r^2 + v_\theta^2$ и вычислить эту величину:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_0\cos\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = v_0\sin\theta\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)$$

Запишем результат:

$$p\Big|_{\Sigma} = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right) \tag{2.22}$$

Если хотим найти силу, действующую на поверхность шара, то нам нужно эту силу сосчитать как сумму элементарных сил, действующих на каждый элементарный участок. Возьмём шар, выделим на нём элементарный участок $d\vec{s} = a^2 d\Omega$ (Рис. 2.4). Направлен вдоль радиус-вектора. Можем найти силу давления $d\vec{F}$, действующую на этот участок: нужно взять p в данной точке участка, умножить на $a^2 d\Omega \vec{e}_r$.

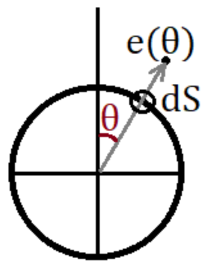

Рис. 2.4. Шар, на котором выделили элементарный участок

Проинтегрируем все по поверхности:

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i = -pa^2 \int \mathrm{d}\Omega \vec{e}_r(\theta)$$

Получили силу, и этот интеграл сильно упрощается. Мы ввели аксиальную симметрию поля, поэтому все точки на параллелях устроены одинаково. Если вычислим силу, то останутся только проекции на ось Z:

$$F_Z = -a^2 \int p(\theta)\mathrm{d}\Omega(\vec{e}_r(\theta) \cdot \vec{n}_Z)$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$$

$$(\vec{e}_r(\theta) \cdot \vec{n}_Z) = \cos\theta$$

Так как в p входит в $\sin^2\theta$, то обратим внимание на то, что силы, действующие снизу в центр и сверху в центр, сокращаются. Действительно, давление зависит от $\sin^2$. В верхней и в нижней полусфере в симметричных точках давление одинаково. Вывод:

$$F_Z = 0$$

Парадокс Даламбера

Сложившаяся ситуация называется ***парадоксом Даламбера***. Для шара впервые это утверждение было получено в 1744 году, а чуть позже в 1745 Эйлер сформулировал утверждение о том, что сила давления на тело, погруженное в поток идеальной однородной жидкости, будет равна 0 независимо от того, как устроена форма тела (если поток однороден на бесконечностях). Если после обтекания тела поток остается однородным, то сила давления и сила сопротивления равны нулю.

Поток несет с собой импульс, если в единицу времени количество импульсов вносимого (перешедшего через контрольную поверхность внизу) и выносимого (перешедшего вверху) одинаково. Задача касается обтекания шара. Эта задача о течении потока тесно связана с движением тела. Остановим этот поток и будем рассматривать движение тела. Утверждение: если покоящееся в идеальной жидкости тело движется равномерно, никакого сопротивления движению нет. Как только поток будет нестационарным, интегрирования для давления в соотношении (2.22) приведут к появлению сил, т.е. при появлении ускорения возникает сила.

Пусть вдоль оси X движется любое тело, например, шар. При движении шара жидкость, которая была на месте возникшего шара, теперь должна занять то место, которое раньше занимал шар. Но если шар перемещается с какой-то скоростью, то жидкость тоже перемещается с какой-то скоростью, причем каждая частица жидкости перемещается со своей скоростью. Значит, перемещающаяся жидкость и шар обладают энергией, а энергия системы равняется сумме энергии шара и жидкости.

Что происходит, когда тело движется ускоренно? Если скорость v_1 не равняется v_0, то у тела и вытесненной им жидкости существует ненулевое ускорение. Чтобы двигать это тело, придется приложить силу, равную произведению массы тела на ускорение плюс добавление, которое называется ***присоединенной массой***.

Скорость жидкости и скорость шара всегда пропорциональны. Поэтому кинетическая энергия движущейся жидкости всегда пропорциональна кинетической энергии тела. Полную кинетическую энергию систему можно представить как кинетическую энергию тела, умноженную на какой-то коэффициент.

Лекция 3. Уравнение движения

Задача: пузырёк газа в жидкости

Две простейшие задачи.

1) воздушный пузырек, плотность воздуха приблизительно в 800 раз меньше плотности воды, плотность пузырька $\rho_0 \simeq 1.2$ кг/м^3, а плотность среды 10^3 кг/м^3. Событие происходит в поле тяжести, в сосуде, который настолько велик, что пузырек не чувствует ни дна сосуда, ни стенок, ни поверхности. Законом движения пузырька называем зависимость координаты от времени.

Считаем, что радиус такого пузырька постоянен и не меняется. Это не вполне корректное допущение. По мере всплытия пузырек расширяется, а если он образовался вследствие кипения воды, то, попав в более холодную (хотя бы на полградуса) жидкость, он схлопнется и исчезнет, потому что давление насыщенного пара будет равно атмосферному только при 100°C. При этом такой пузырек будет издавать звуки, часть которых слышим (только часть, потому что при кипении в обычных условиях такие пузырьки будут издавать звуки в районе 20-30 кГц) и слышим, как закипает вода в сосуде. Когда вся вода прогревается равномерно, этот эффект уходит и звук пропадает. Поэтому слышим именно начало кипения, когда на дне пузырьки образуются, а в середине исчезают.

На пузырек действует сила тяжести и сила Архимеда. Исследуем, чем определяется масса шарика m_0 на ускорение $\ddot{y}$. Наивно полагать, что силой Архимеда и силой тяжести: $m_0\ddot{y} = F_A - m_0 g$, сила Архимеда $F_A = \rho g V$, а масса определяется как $m_0 = \rho_0 V$. Пузырек был в одном положении, спустя время t оказался в другом. При таком рассуждении исключается движение воды. Ведь пузырек, чтобы попасть из положения A в B, должен был пройти все точки, соединяющие эти положения, и вытеснить отсюда воду.

Если продолжим следовать логике, описанной выше, то получим следующие результаты:

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{\rho}{\rho_0}\rho_0 V g \\ F_A &= m_0 g\frac{\rho}{\rho_0} \\ m_0\ddot{y} &= m_0 g\frac{\rho}{\rho_0} - m_0 g \end{aligned}$$

$$\ddot{y} = g\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) \simeq 800g \tag{3.1}$$

Получился абсурдный результат. Например, пуля вылетает из ствола винтовки длиной меньше полметра со скоростью 500 м/с. Какое ускорение у пули? Сколько времени нужно пуле, чтобы пролететь равноускоренно полметра и достичь при этом скорости 500 м/с? Можно рассуждать так: средняя скорость движения пули 250 м/с.

Ей нужно полметра. Делим 0.5 на 250, получаем 0.002 секунды, и за это время пуля должна разогнаться до скорости 500 м/с. Значит, ускорение получается $a = 2.5 \cdot 10^5$ м/с$^2 \simeq 2.5 \cdot 10^4 g$.

Пузырек не так быстро разгоняется, как пуля, поэтому результат $\ddot{y} = 800g$ нам не подходит. Попробуем устранить ошибку в наших рассуждениях. Про сопротивление будем говорить отдельно, существует несколько результатов по реальным экспериментам, в этих экспериментах обычно рассматривают несколько сил: поверхностные силы, кроме той части поверхности, сила которой называется силой Архимеда; силы сопротивления. Если жидкость вязкая, то, когда пузырек движется нестационарно, слои жидкости цепляются друг за друга. По мере того, как происходит движение, все больше жидкости налипает. Оказывается, что сила сопротивления будет обладать памятью о том, что было, когда пузырек начал только налеплять на себя эти частицы жидкости. Это называется ***силой Бассе*** или ***эффект памяти*** и он тоже значим. Поэтому, разбираться, как по-настоящему всплывает пузырек, крайне сложно.

Метод Лагранжа предполагает, что необходимо уметь записать кинетическую энергию системы тел, если у нас есть система с идеальными голономными связями (связи не будут совершать работу). Наша система является идеальной, но неголономной в общем случае, потому что движение жидкости задается движением тела, но только в дифференциальной форме, т.к. скорости частиц жидкости связаны со скоростью шарика.

Метод Лагранжа может позволить обработать и неголономные связи, которыми является идеальная среда. Кинетическая энергия системы T выражается как сумма кинетической энергии пузырька $T_{\text{п}}$ и кинетической энергии жидкости $T_{\text{ж}}$. Движение всей жидкости в этом объеме можно свести к движению жидкости в объеме пузырька, потому что движение потенциально. Решение определяется граничными условиями на поверхности шара и сосудов. Если сосуд очень большой, то граничное условие на поверхности сосуда — скорость равна нулю (почти не играет роли). Если ищем решение снаружи, то должны знать граничное условие на поверхности шара. Если захотим найти движение жидкости внутри: раз граничные условия одинаковы, то кинетическая энергия внутри и снаружи оказываются пропорциональными. Движение полностью определяется условиями на границах.

Второй момент: когда вычисляем кинетическую энергию, пользуемся результатом обтекания шара или движения шара, считая, что поле скорости, создаваемое движущимся шаром, мгновенно изменилось во всем пространстве. На самом деле такого не бывает, мы пренебрегали сжимаемостью, значит, пренебрегли скоростью распространения возмущений. Никаких волновых решений нет, в операторе Δ нет дифференцирования по переменной t, и поэтому скорость мгновенно определяется в любой точке.

Кинетическая энергия жидкости равна половине кинетической энергии движущейся жидкости, если бы эта жидкость заполняла шар. Масса жидкости равняется плотности жидкости, умноженной на объем шара: $m_{ж} = \rho_{ж} V_{шара}$. Получаем, что кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{v^2}{2}\left(m_0 + \frac{1}{2}\rho_{ж} V_{шара}\right)$$

где $m_0 = \rho_0 V_{шара}$. Подставив $V_{шара} = \frac{m_0}{\rho_0}$, получим:

$$T = \frac{m_0 v^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho_{ж}}{\rho_0}\right) \tag{3.2}$$

Если у нас имеется сосуд с жидкостью, то у этого сосуда с жидкостью имеется какая-то потенциальная энергия U_0. Её нетрудно сосчитать, если найти положение центра масс и массу жидкости. Пусть в этом сосуде на высоте y будет находиться центр шара, плотность которого ρ_0, а плотность жидкости ρ. Неважно, расталкивает шар жидкость или нет, положение центра масс от скорости никак не зависит.

Уравнение движения

Поэтому к системе нужно добавить потенциальную энергию добавки. Добавка будет $(\rho_0 - \rho) V_{шара} g y$. Составляем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{m_0 \dot{y}^2}{2}\left(1 + \frac{\rho}{2\rho_0}\right) - (\rho_0 - \rho) V_{шара} g y \tag{3.3}$$

Можем воспользоваться выражением $V_{шара} = \frac{m_0}{\rho_0}$, чтобы у нас было меньше констант: исключим $V_{шара}$:

$$L = \frac{m_0 \dot{y}^2}{2}\left(1 + \frac{\rho}{2\rho_0}\right) - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) m_0 g y \tag{3.4}$$

Раз функция Лагранжа не зависит явно от времени, то существует интеграл обобщенной энергии:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{3.5}$$

$$m_0 \ddot{y}\left(1 + \frac{\rho}{2\rho_0}\right) + \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) m_0 g = 0$$

$$\ddot{y}\left(\frac{2\rho_0 + \rho}{2\rho_0}\right) + 2\left(\frac{\rho_0 - \rho}{2\rho_0}\right) g = 0$$

В итоге выражаем $\ddot{y}$:

$$\ddot{y} = g\frac{2\rho - 2\rho_0}{2\rho_0 + \rho} \tag{3.6}$$

$\rho_0 << \rho$, поэтому получается:

$$\ddot{y} \simeq g\frac{2\rho}{\rho} = 2g \tag{3.7}$$

Пузырек ведет себя спокойно, ускоряется нормально и естественно. Виновата в этом присоединенная масса. Необходимо правильно сформулировать задачу о движении математического маятника в такой среде, ведь вязкости и сил Бассе нет — жидкость идеальная. Нужно написать функцию Лагранжа. Рассматривали движение вытянутого цилиндра внутри другого цилиндра, заполненного жидкостью: для того, чтобы грузик двигался ускоренно, обтекающая жидкость должна двигаться ускоренно, а для этого необходимо, чтобы давление сверху цилиндра было больше чем снизу, чтобы проталкивать в щель между цилиндрами вытесняемую жидкость. Поэтому, если шарик движется равномерно, то давление везде будет одинаково. А если он начинает двигаться ускоренно, чтобы проталкивать жидкость между шариками и стенками сосуда, даже если сосуд безграничный, необходим перепад давлений. Поэтому возникает дополнительное давление, дополнительная сила. В методе Лагранжа достаточно написать энергию.

Пусть пузырек будет всплывать внутри цилиндра, радиус которого сопоставим с радиусом самого пузырька. Ускорение в этом случае окажется меньше, чем в той ситуация, когда шарик всплывает в неограниченном объеме. Коэффициент $m_0\dot{y}^2$ попадает в присоединённую массу, и чем больше кинетическая энергия, тем больше присоединённая масса. А масса на ускорение определяется действующей силой или потенциальной энергией, которая зависит только от положения пузырька.

Метод качественных исследований и размерных оценок механики сплошных сред

Метод качественных исследований и размерных оценок механики сплошных сред – это универсальный метод, его нужно активно применять всюду во всех задачах физики. *Джон Арчибальд Уилер* (1911-2008, американский физик-теоретик), который придумал название «черная дыра», в одной своих популярных книг для детей написал: «Никогда не начинайте вычисление задачи до тех пор, пока вы не знаете ответ».

Задача: цилиндр, движущийся в цилиндрическом объёме жидкости

Возьмем движущийся в жидкости цилиндр радиуса R, а жидкость находится в цилиндре большего радиуса $R_ж$. Перемещение тела вверх со скоростью v приводит к течению жидкости в зазоре (Рис. 3.1).

Существует уравнение непрерывности, и нельзя затолкать больше или меньше

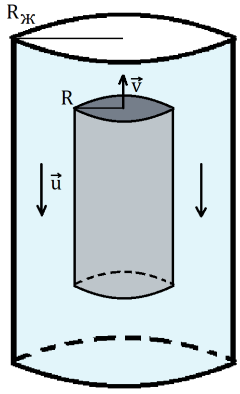

Рис. 3.1. Цилиндр, движущийся в цилиндрическом объёме жидкости

жидкости, чем ее вытеснит это тело. Цилиндр полностью заполнен жидкостью.

$$vS_1 = u(S_0 - S_1) \tag{3.8}$$

где $S_0 = \pi R_ж^2$, $S_1 = \pi R^2$.

Кинетическая энергия системы T_{sys} складывается из кинетической энергии тела $T_{тела}$ плюс кинетическая энергия жидкости $T_ж$. Примем ρ_0 — плотность тела, ρ — плотность жидкости. Если хотим разобраться в характере движения, можно положить $\rho = \rho_0$. Но если хотим аккуратно, то плотности можно задать разными. Кинетическая энергия движущейся жидкости рассчитываем как $\frac{\widetilde{m}_ж u^2}{2}$. Кинетическая энергия системы:

$$T_{sys} = \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{\widetilde{m}_ж u^2}{2} \tag{3.9}$$

$m_0 = \rho_0 S_1 h$. С жидкостью не совсем так. Когда цилиндр вытесняет жидкость, по торцам этого цилиндра возникает какое-то течение. Но если h много больше R (любого), то область этого течения будет невелика и кинетическая энергия тоже будет невелика. Поэтому не сильно ошибёмся, если возьмем жидкость только в той части, где есть цилиндр. Масса жидкости будет равна

$$\widetilde{m}_ж = \rho(S_0 - S_1)h$$

Разберемся со скоростями. Из (3.8) выразим $u = v\frac{S_1}{S_0 - S_1}$, подставим в (3.9) и у нас получается:

$$\begin{aligned} T_{sys} &= \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{\rho(S_0 - S_1)h}{2}\frac{v^2 S_1^2}{(S_0 - S_1)^2} = \\ &= \frac{\rho_0 S_1 h}{2}v^2 + \frac{\rho_0 S_1 h}{2}v^2 \cdot \frac{\rho}{\rho_0}\frac{S_1}{S_0 - S_1} \end{aligned}$$

Второе слагаемое описывает присоединённую массу. Значит, можем вынести $\frac{m_0 v^2}{2}$ за скобки и получим:

$$T_{sys} = \frac{m_0 v^2}{2}\left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\frac{S_1}{S_0 - S_1}\right) \tag{3.10}$$

присоединённая масса m^* выражается как:

$$m^* = m_0 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{S_1}{S_0 - S_1} \tag{3.11}$$

Чем меньше становится щель, тем быстрее должна течь жидкость, чтобы успеть просочиться в эту щель. Масса текущей жидкости при этом уменьшается линейно, а скорость увеличивается квадратично. В итоге кинетическая энергия жидкости растет. Если эту величину сделаем достаточно малой, то кинетическая энергия движущейся жидкости может стать гораздо больше, чем кинетическая энергия тела. Как только ограничиваем движение жидкости, которая перетекает, вытесняя тело, кинетическая энергия этой жидкости растет.

Если движение происходит равномерно, кинетическая энергия не меняется, ни о каком ускоренном движении речь не идет. Но если движение происходит с ускорением, то движение жидкости тоже происходит с ускорением. Левая (рис. 3.1) часть жидкости ускоряется за счет возникновения перепада давления. Силы давления F_1 и F_0 на тело (Рис. 3.2) будут разными.

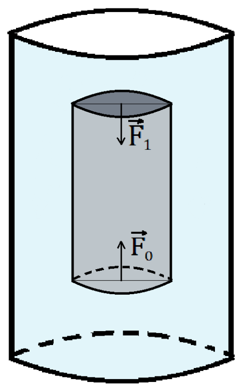

Рис. 3.2. Силы давления F_1 и F_0 на тело

если $F_1 > F_0$, нам придётся двигать тело с бóльшим усилием, чтобы компенсировать сопротивление. Но оно возникло не из-за того, что жидкость за что-то цепляется. Сила, действующая со стороны стенок, перпендикулярна им и вклад в вертикальное движение они не дают. Мы имеем дело с системой, в которой есть одно твёрдое тело и сплошная среда, все части которой находятся во взаимном движении. Учитывать это движение довольно сложно.

Течение со свободной поверхностью

До сих пор рассматривали движение жидкости или газа, ограниченных поверхностями: неподвижными, движущимися, но жестко заданными. Часто бывают ситуации, когда форма поверхности не задается твердыми телами, а значит она возникает в результате взаимодействия либо жидкости и газа, либо двух жидкостей и формируется в процессе этого взаимодействия. То есть форма ограничивающих поверхностей движения в общем оказывается не известной до решения задач.

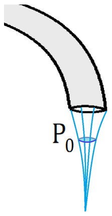

Рис. 3.3.

Бывают такие случаи: например, если у нас есть какой-нибудь кран, из которого капает или течёт вода (Рис. 3.3). Простейший пример движения со свободной поверхностью — жидкость вытекает из крана и образуется струя определенной формы. При решении задач необходимо найти поле скоростей и форму поверхности.

В каждом поперечном сечении скорости частиц жидкости различны. Если труда цилиндрическая, то можно воспользоваться уравнением непрерывности и сказать, что в каждом сечении произведение скорости на площадь поперечного сечения величина постоянная, а значит, скорость одинакова.

Пусть жидкость – это частицы, не взаимодействующие между собой, и значит каждая капля свободно падает. Это то же самое, что использовать закон Бернулли. Если вдоль вертикальной координаты X скорость $v = \sqrt{2gX}$, значит можем найти площадь сечения S как функцию от X. Поскольку в каждом поперечном сечении имеется окружность, ограничивающая эту струю, можем записать:

$$\begin{aligned} Sv &= const \\ v &= \sqrt{2gX} \\ S = S(X) &= \pi r^2(x) \end{aligned}$$

Совсем примитивный пример того, как задача ставится и как она может быть решена.

Задача: течение с преградой на дне

Положим на дно канавы, по которой течет вода, какую-нибудь преграду. Первый вариант такой, что из-за этого препятствия скорость увеличится, за счет чего из уравнения Бернулли давление над преградой будет меньше, чем перед преградой. Другой способ рассуждения заключается в том, что если жидкость движется со скоростью v_0, то, встретив препятствие, она затормозится. Её скорость уменьшилась, давление в жидкости увеличится, и будем наблюдать совсем другую картину.

Пусть есть пруд, перегороженный плотиной, и жидкость из огромного резервуара провода, у которого поверхность имеет определенный уровень, который на (Рис. 3.4) отмечен осью X. Дно этого пруда $z = z(x)$. Жидкость (вода) течет, что с ней дальше происходит не знаем, может, она продолжает убывать, потом возрастать. У нее есть поверхность $h(x)$, и слой жидкости характеризуется $H(x)$ — это глубина жидкости от поверхности до дна в данной точке с координатой x.

Пусть существует уравнение неразрывности. Будем считать ширину ручья везде

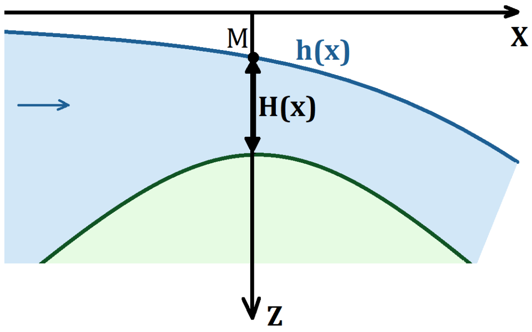

Рис. 3.4. Течение с преградой на дне

одинаковой. Секундный расход жидкости Q в любом сечении выразим как:

$$Q = Hv \tag{3.12}$$

Произведение скорости на площадь поперечного сечения (константу ширины ручья всюду будем убирать, чтобы не загромождать последующие уравнения).

Что знаем про течение жидкости? Течь она может как угодно, но будем считать движение течения *ламинарным* и потенциальным. Пусть течение потенциальное и стационарное. Для этого случая годится закон сохранения энергии в форме закона Бернулли.

$$const = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p \tag{3.13}$$

Мы вычислили скорость в точке M (Рис. 3.4). Будем считать, что скорость в любом поперечном сечении одинакова. Понятно, что в любой точке скорость определяется перепадом уровней, поэтому можно считать, что скорость в любом сечении будет одинакова.

Если идём вдоль поверхности, то на поверхности текущей жидкости давление не может быть никаким другим, кроме как p_0, т.к. жидкость соприкасается с воздухом. Если давление будет больше, то воздух будет сжимать струю, если меньше, она будет расширяться, но ее форма будет меняться с течением времени. Раз рассматриваем стационарный процесс, значит давление в точке M, то есть силы, действующие на любую выделенную частицу со стороны воздуха и со стороны жидкости, уравновешиваются. Давление, которое рассматриваем, ни на что не влияет, его можно положить равным нулю, а уравнение (3.10) (без давления в правой части) можно приравнять к константе, которую обозначим как $\rho g h_0$:

$$\rho g h_0 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h$$

Ось Z направлена вниз, поэтому с ростом z растет и $\frac{\rho v^2}{2}$. Чтобы правильно записать эти соотношения, нужно позаботиться о знаках. По мере того, как растет z, отсчитывая давление от поверхности, можем получить следующий результат:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g h \tag{3.14}$$

(помним о том, что $z = h + H$).

Мы выкинули атмосферное давление, учли направление координаты (хотим написать скорость как функцию координаты z). Потенциальная энергия при таком выборе с ростом z будет уменьшаться.

Получилась система двух уравнений (3.12) и (3.14). Перепад уровней вызывает изменение скорости, если здесь система покоилась и скорость была равна нулю, то в точке M жидкость разгоняется, она разгоняется до скорости v. Эта скорость v зависит от количества жидкости, которая прошла, и от сечения. Исследуем эту систему. H можно попытаться исключить, если знаем профиль. Знаем z как функцию от x и хотим понять, как устроена скорость. Можем H исключить, например, из (3.12). Тогда $vH = vz - vh$. Подставим в (3.14) и посмотрим, что получится. Получается новая система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho v^2}{2} = \rho g h \\ vh = vz - Q \end{cases} \tag{3.15}$$

Подставив в первое уравнение выражение для h (vz у нас получено в произвольном сечении), получим связь между скоростью:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g \left(\frac{Q}{v} - z \right) = 0$$

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g \frac{Q}{v} = \rho g z$$

$$\frac{v(z)^2}{2g} + \frac{Q}{v(z)} = z \tag{3.16}$$

Мы получили основное уравнение, которое теперь можем исследовать для того, чтобы понять, как скорость зависит от течения. Исследование этого уравнения проводится графически, потому что оно кубическое. График изображён на (Рис. 3.5).

Для одной и той же глубины (то расстояния до дна) могут быть две скорости течения. Если z одинаково, это не означает, что слой жидкости одинаков. Это добрались до дна от поверхности пруда. У v_1 будет H_1, у v_2 будет H_2. Если $v_1 > v_2$, то $H_1 < H_2$. Но ведь Q равняется vH. Поэтому, зная расход и нарисовав такой график, можем определить глубину слоя жидкость, который течет через эту платину.

Сделаем следующее: будем уменьшать уровень воды в этом пруде. Соответственно, до дна будет все меньше и меньше, z будет уменьшаться и при некоторой высоте

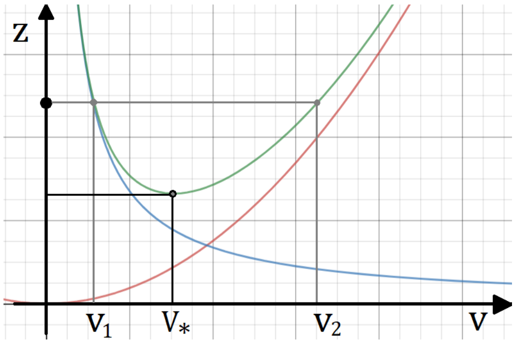

Рис. 3.5. Красная линия — функция $\frac{v^2}{2g}$, синяя линия — функция $\frac{Q}{v}$, зелёная линия — сумма этих двух функций

заполнения этого пруда будет одно единственное решение v_* (Рис. 3.5). Попробуем уменьшить уровень пруда. Расход жидкости фиксирован. Если уровень будет слишком мал, то не хватит энергии, чтобы с достаточно большой скоростью проталкивать жидкость, поэтому уровень ограничен и скорость v_* называется *критической*.

В критической точке $\frac{\partial z}{\partial v}$ обращается в 0. Поэтому эта скорость немедленно получается из самого простейшего уравнения:

$$\frac{v_*}{g} - \frac{Q}{v_*^2} = 0$$

Получаем значения:

$$v_* = \sqrt[3]{gQ} \quad \text{и} \quad H_* = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g}} \tag{3.17}$$

Подставив найденные значения в (3.16), сможем найти z_* критическое и найти полное решение задачи.

Использование двух законов — закона сохранения объема жидкости и закон сохранения энергии — позволило нам рассчитать это течение. Если для каждой глубины жидкости или для каждого расстояния до дна существует две скорости, а не возможна ли такая ситуация, когда жидкость текла, а потом она течет с другой скоростью так, что $v_1 H_1 = v_2 H_2$ (Рис. 3.6)? Или другая ситуация (Рис. 3.7).

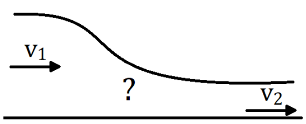

Рис. 3.6. Течение жидкости 1

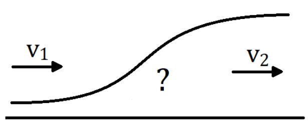

Рис. 3.7. Течение жидкости 2

Когда жидкость течет по каналу с плотиной (см. рис. 3.4), плотина действует на жидкость дном с силами, перпендикулярными в каждой точке поверхности дна.

Эти силы могут выкинуть жидкость наверх и одновременно они могут изменить скорость течения. Но на (Рис. 3.6) и (Рис. 3.7) дно плоское. Поскольку давление воздуха равным 0, нет ни одной внешней силы, которая притормозит или ускорит жидкость. Значит, появляется возможность утверждать, что проекция импульса в любом сечении остается постоянной.

Лекция 4. Вихревое движение

Основные понятия

Определение 4.1. ***Вихревое движение*** *– это движение среды, в котором вектор вихря* $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla} \times \vec{v}\right]$, *ротор скорости не равен нулю.*

Линии вектора вихря строятся так же, как линии скорости, если задан вектор поля. Мы можем провести линию, касательная в каждой точке которой совпадает по направлению в каждой точке с вектором вихря. Если нужно вычислить дивергенцию от вектора вихря, то, поскольку в векторе вихря стоит ротор, дивергенция вектора вихря как дивергенция от ротора равняется нулю.

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}\right) = \left(\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{v}\right]\right) = 0$$

Это полная аналогия с магнитным полем: отсутствие магнитных зарядов и отсутствие источников вектора вихря. У вектора вихря нет источников. Линии вектора вихря должны быть либо замкнутыми, либо начинаться неизвестно где и уходить на бесконечность, других альтернатив нет (как в магнитном поле). Как и в электрическом магнитном поле разумно ввести *поток вектора вихря* – это элементарный поток через элементарную площадку:

$$d\Phi = (\vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma})$$

А поток через произвольную площадку Σ:

$$\Phi = \int (\vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma})$$

Элементарный поток: площадка маленькая и вектор вихря на ней приблизительно постоянен, направлен в одну сторону и в каждой точке одинаков.

Утверждение 4.1. *Поток вектора вихря через любую замкнутую поверхность* Σ, *окружающую произвольный выделенный объём* V, *равен нулю.*

Если выделим произвольный объем, то внутри нет источников, линия замкнута. Полезно выделять объем таким образом, чтобы он был ограничен линиями (боковыми поверхности трубочки) таким образом: берем контур произвольный, проводим через него линии вектора вихря и получаем трубочку (рис. 4.1). Делаем два сечения такой трубочки. Такая трубка – это аналог трубки тока для текущей жидкости. Она устроена так, что поток через боковые поверхности по определению равен нулю, остается только поток через сечение этой трубочки. Полный поток через замкнутую поверхность равен нулю, потоки через сечение S_1 и через сечение S_2 одинаковы с точностью до знака.

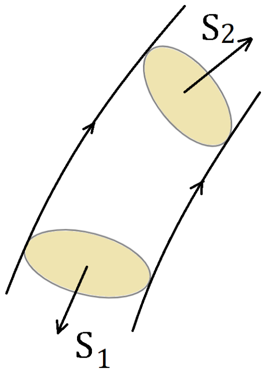

Рис. 4.1. Элементарная вихревая трубка

Основные теоремы о вихревом движении идеальной среды

Можно сформулировать ***теорему Гельмгольца***: поток вектора вихря в любом поперечном сечении трубки одинаков. Это означает, что с помощью потока можно ввести инвариантную характеристику трубки вихря. Инвариантно в том плане, что в любом сечении, где бы ее не разрезали, величина одинакова.

$$\int(\vec{\omega}\cdot d\vec{\sigma}) = \int_{S_1}(\vec{\omega}\cdot d\vec{\sigma}) + \int_{S_2}(\vec{\omega}\cdot d\vec{\sigma}) = 0 \tag{4.1}$$

Поток тесно связан с циркуляцией при обходе по контуру, ограниченного сечением S_1 или S_2:

Простая теорема говорит, что циркуляция и поток просто равны друг другу. У нас они получились не равными, а с коэффициентом 2, потому что омега выбрали с $\frac{1}{2}$ для того, чтобы сохранить в соответствии с твердотельным движением.

Поскольку $\mathbf{\Phi}$ всюду константа, трубка непрерывна и возможна только в следующей конфигурации: либо трубка начинается на поверхности жидкости или сосуда, либо она образует ручку, если о 2-х поверхностях, либо она образует замкнутые поверхности типа тороида.

Рассмотренная теорема и свойства на самом деле статичны. Мы берём один момент времени и утверждаем, что есть инвариантная характеристика трубки вихря и соответствующая топология. В другой ситуации движение жидкости с течением времени описывается уравнением Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla}}{\rho} p \tag{4.2}$$

В идеальной среде, движущейся под действием только потенциальных массовых сил $\vec{g} = -\vec{\nabla} U$ и движение баротропно (плотность среды является функцией только давления):

$$\rho = \rho(p) \quad \text{и} \quad \frac{\vec{\nabla} p}{\rho(p)} = \vec{\nabla} P \quad \text{где} \quad P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

При этих ограничениях циркуляция вектора скорости происходит по жидкому контуру, то есть контур теперь движется вместе с жидкостью. В первом случае рассматривается контур, не связанный с движением. Во втором случае контур отметим красителем и будем смотреть, как частицы жидкости увлекают этот контур. Он будет деформироваться. Циркуляция вектора скорости по замкнутому деформируемому контуру, который движется в соответствии с уравнением (4.2), будет сохраняться.

Теперь у нас рассматривается динамика жидкости. Если эта величина сохраняется, то производная по времени от этой величины должна быть равна нулю. Но, когда будем вычислять производную по времени, должны будем продифференцировать эту величину и меняющийся контур. Используют лагранжево описание, вводя положение точки на контуре, который задан в начальный момент. Выбирается контур C_0, где задан начальный момент, и фиксировано положение точки каким-то параметром S. Следим за положением каждой точки контура, выбирая параметр S (начальное положение). Время t позволяет нам отследить закон движения в выбранной точке. Можем дифференцировать, теперь r как функция S и t.

Дифференцируем скорость и dr, начальный контур жестко закреплен, его дифференцировать не надо. А дальше дифференцируем r, получая при этом скорость. Получается 2 части интеграла: с первым поступаем как в (4.2), а во втором пользуемся приёмом, как в законе сохранения энергии.

Если отпустить такой жидкий контур плавать и начать вычислять циркуляцию вектора скорости по этому плавающему контуру, окажется, что в том случае, если объем носил потенциальную жидкость, плотность фиксирована. Циркуляция не изменится, хотя контур будет деформироваться.

Уравнение Гельмгольца

Еще одна теорема — уравнение Гельмгольца.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} \tag{4.3}$$

Уравнение записано для того, чтобы получить аналогию с уравнением Эйлера и узнать, как меняется с течением времени вектор вихря. Рассмотрим уравнение Эйлера:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla}}{\rho} p - \vec{\nabla} U$$

Из этого уравнения с помощью вычисления ротора от v и учитывая, что $rot\vec{v} = 2\vec{\omega}$, можно получить следующее уравнение:

$$2\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\left[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}p\right] = 0$$

Оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})$ может быть преобразован к виду, который называли формой Громеки-Лэмба:

$$\frac{d}{dt}\vec{\omega} = \left(\vec{\omega}\vec{\nabla}\right)\vec{v} \tag{4.4}$$

Вычислим ротор от уравнения Эйлера в форме Громеки-Лэмба:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + 2[\vec{\omega}\times\vec{v}] = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + P + U\right)$$

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \left[\vec{\nabla}\times[\vec{\omega}\times\vec{v}]\right] = 0$$

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\omega} = \left(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} - \vec{\omega}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)$$

Учитывая уравнение непрерывности $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$, получим:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\omega} = \left(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} - \frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Так как $\frac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})$, получим окончательное условие вырожденности:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} \tag{4.5}$$

Уравнение (4.4) или (4.5) это ***уравнение вмороженности***. Вмороженным называется такое поле, что линия этого поля, проведенная через любую пару точек, спустя время t, вновь пройдут через эту же пару точек. Поэтому это утверждение (4.3) о вмороженности поля единиц $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$ или просто $\vec{\omega}$. Отсюда следует теорема Лагранжа.

Теорема Лагранжа

Если жидкость движется без трения под действием потенциальных сил, то любой жидкий контур в ней будет сохранять циркуляцию. Контур будет деформироваться, а циркуляция будет сохраняться. Линии вектора вихря оказываются *вмороженными* в это вещество.

Локализованное вихревое движение (концентрированные вихри)

Обсудим локализованные вихри. Мы рассмотрели общие свойства среды, но не локальные движения, связанные, например, с вращением. Если в среде есть ротор не равный нулю, то получим вихревое движение. Пусть есть канал, в котором имеется текущая вода, и ее скорость у дна меньше, чем на поверхности (вода на дне цепляется за дно). Скорость воды падает, потому что она обладает вязкостью. Тогда $\vec{\omega} \neq 0$.

Довольно часто в небольшой области возникает интенсивное вихревое движение среды. В силу того, что линии вихря вморожены в вещество, эта область может довольно долгое время жить своей жизнью, и вихревое движение будет сохраняться. Поэтому рассмотрим модели локализованного вихревого движения. Иногда их еще называют *концентрированные вихри*.

Круговой вихрь Рэнкина

Одна из простейших моделей — круговой вихрь Рэнкина. Рассматривается плоское двумерное движение в плоскости x, y. В рассматриваемом канале образуется область, в которой происходит интенсивное движение с $\vec{\omega} = \omega \vec{n}_Z$ (см. рис. 4.2). Предположим, что радиус этой области равен a. Она называется ядром вихря.

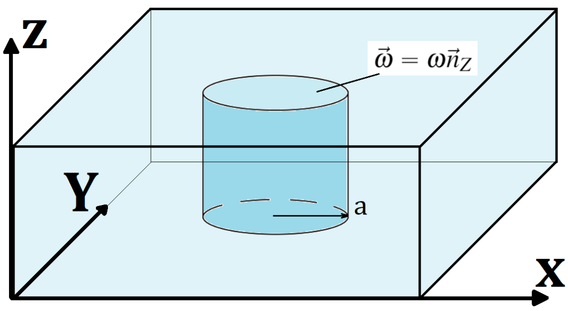

Рис. 4.2. Круговой вихрь Рэнкина

Раз $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla} \times \vec{v}\right]$ нулю не равно, это означает, что и $\vec{v}$ не равно нулю.

Если же вне вихря $\vec{\omega}$ равно 0, то $\vec{v}$ может быть равна 0. Течение является потенциальным. Если есть вязкость, то на границе области не бывает скачков скорости. Они размываются за счет вязкости. Поэтому в правдоподобной модели, пройдя по контуру вихря, обнаружим, что существует $\Gamma \neq 0$, а пройдя рядом, обнаружим, что Γ тоже существует. Если в вихре $\Gamma \neq 0$, то и вне вихря Γ точно такое же. Иными словами, Γ равняется константе всюду по контуру, охватывающему этот вихрь. А это означает, что $\vec{v} \neq 0$, и $\vec{v}$ можем найти.

Действительно, циркуляция – это интеграл по выбранному контуру:

$$\Gamma = \oint\limits_C (\vec{v} \cdot d\vec{l}) = 2\pi r \cdot v(r)$$

Окажется, что в области, где течение потенциально, $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. Однако эта скорость существует:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\theta$$

Конечно, это направление будет в том случае, если поместим ось Z в центр вихря. Если у нас есть локализованный вихрь, в ядре которого $\vec{\omega}$ не равна нулю, то вокругвозникает течение, поэтому разумно, когда течение уже возникло, рассматривать модель с исчезающе малой вязкостью, вокруг которой существует циркуляция при $r > a$. Внутри циркуляция линейно растет, потому что она связана с $\vec{\omega}$. Поэтому, по мере роста радиуса, площадь внутри ядра возрастает. $\vec{\omega} \cdot \pi r^2$ – это поток вектора $\vec{\omega}$. Удвоенный поток равняется циркуляции.

Получается следующий результат. Пока живём внутри вихря, если всюду $\vec{\omega}$ – константа от заданной области, то площадь сечения, охватываемая контуром πr^2 от Γ, равняется этой величине (рис. 4.3). И скорость линейно нарастает. Добрались до границы. Мы наложили уравнение непрерывности, и, как только вышли за области этого ядра, возникает индуцированное течение (оно потенциально), циркуляция которого такая же, как и здесь в пике, которая будет спадать как $\frac{1}{r}$.

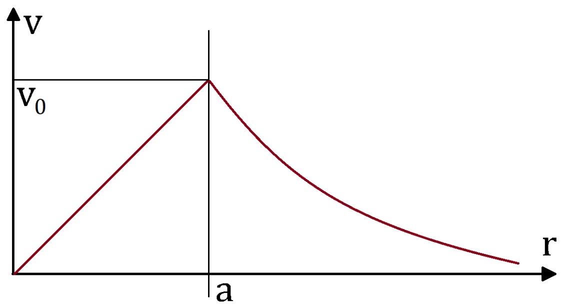

Рис. 4.3. Локализованный вихрь

Кроме распределения скорости интересно знать, как устроено давление. Давление входит в уравнение Эйлера, и поэтому если известно распределение скорости, то можем это давление вычислить. Там, где течение потенциально, давление удобно вычислить с помощью уравнения Бернулли, т. к. им описывается потенциальное течение жидкости. Зная распределение скорости, найдем зависимость давления от расстояния до центра и от глубины погружения. Подставляем значение скорости вне вихря в уравнение Бернулли:

$$p(r,z) = p_0 - \frac{\rho v_0^2}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \rho g z \tag{4.6}$$

В ядре нельзя пользоваться уравнением Бернулли, но никто не запрещает нам уравнение Громеки-Лэмба, в котором есть $\vec{\omega}$. У нас стационарное течение $\frac{\partial}{\partial t} = 0$:

$$2[\vec{\omega} \times \vec{v}] + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p(r)}{\rho}\right) = 0$$

Поскольку связь между v_0 и ω нам известна, сразу можем проинтегрировать это выражение, результат интегрирования:

$$p(r,z) = \frac{\rho v_0^2}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \rho gz + const$$

Из условия непрерывности давления на границе ядра получаем:

$$p(r,z) = p_0 - \rho v_0^2 + \frac{\rho v_0^2}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \rho gz \tag{4.7}$$

Из условий непрерывности в этой точке получим следующий результат на поверхности: если p_0 давление атмосферы, то давление будет в вихре понижаться в области индуцированного течения, а добравшись до ядра, давление не понижается дальше, оно выравнивается в ядре, ведь вращение и циркуляция становятся меньше (рис. 4.4).

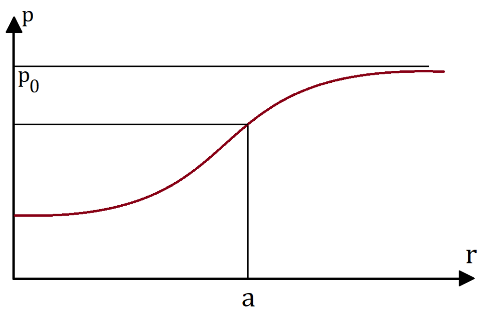

Рис. 4.4. Область индуцированного течения

Это форма поверхности вихря Рэнкина. Если p_0 — атмосферное давление, оно уменьшается здесь, а потом выравнивается таким образом.

Часто вместо модели вихря Рэнкина используют модель, в которой добавляют экспоненту. Γ не сохраняется, потому что добавляется затухание, модель становится более правдоподобной. Модель Рэнкина удобна, хотя не всё совпадает с экспериментом, нужно следить за тем, как устроено ядро вихря. Можно использовать более простую модель: циркуляцию сохраним, а ядро вихря сделаем маленьким. Конечно, сразу придем к противоречию, потому что, уменьшая ядро вихря при сохранении циркуляции, должны увеличивать ω. И в итоге дойдем до того, что скорость вращения будет очень большой, и ядро выродится в тонкую ось.

Можно использовать аналогию с электродинамикой: $\boldsymbol{\omega}$ — ротор v, соответственно, j — ротор $\boldsymbol{h}$. Умеем определять элементы кусочка линейного тока. С помощью Био-Савара-Лапласа можно сосчитать поле, создаваемое распределенными плотностями токов, просто проинтегрировав по ним. Соответственно, если заменим переменные h на v, j на $\boldsymbol{\omega}$, то получим возможность вычислять индуцированную скорость. Ниточки очень тонкие, поэтому внутрь их не лезем. Все скорости индуцированные, а течение потенциально, и мы, пользуясь аналогией, вычисляем скорость индуцированного течения в любой точке, сколько бы вихревых нитей там не поместилось.

Удобно использовать представление о вихревой нити. Если нить не кривая, а ориентирована вдоль оси Z, то скорость устроена как $v(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{e}_{\theta}$. Если никаких других нитей нет, то можно ввести потенциал, так как течение потенциально. Соответственно, градиент можем вычислять в полярных координатах.

Мы получаем довольно удобную, компактную форму, которая позволяет описывать поведение нити. Мы рассматриваем потенциальное течение, которое можно описывать суммой потенциалов, например, потенциал невозмущенного течения плюс возмущение. То есть справедлив принцип суперпозиции.

Система нитей

Можем, умея описывать единственную нить, описывать систему нитей. Пусть две нити с циркуляциями Γ_1 и Γ_2, нити имеют совпадающие по направлению циркуляции (рис. 4.5). Если у нас внизу одна нить, она создает индуцированное поле скоростей, центр второй нити оказывается в индуцированном поле скорости, созданном этой первой нитью. Значит, эта конструкция будет двигаться со скоростью.

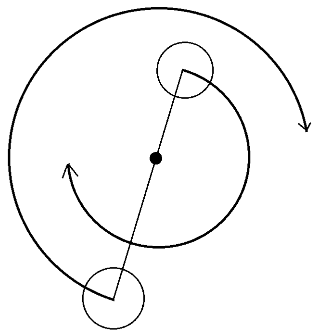

Рис. 4.5. Система нитей

Верхний вихрь находится в потоке, создаваемом нижнем вихрем. Этот верхний центр поплыл, но недалеко. Потому что этот вихрь, в свою очередь, создает поток, в котором сидит центр нижнего вихря. Центр нижнего вихря тоже начинает плыть. В итоге вся конструкция начинает поворачиваться.

Два вихря будут вращаться вокруг общей точки, скорость которой равна нулю. Вся конструкция будет вращаться с единой угловой скоростью вокруг центра, который удален от первого вихря на d_1, от второго на d_2, а расстояние между вихрями всегда фиксированно. Это простейший пример взаимодействия вихрей.

Вихревая пара

вихревая пара – это два вихря, которые вращаются в противоположные стороны и находятся в жидкости (рис. 4.6).

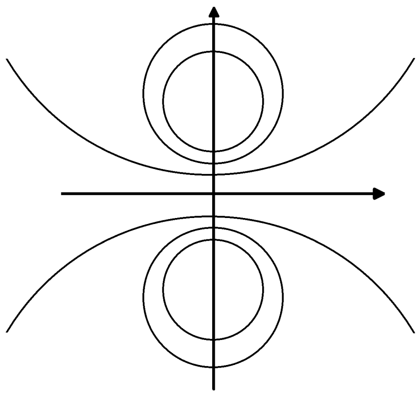

Рис. 4.6.

В качестве примера: посадили один вихрь в точку $y_2 = -\frac{d}{2}$ со знаком минус, а наверх в точку $y_1 = \frac{d}{2}$, чтобы расстояние между центрами этих вихрей было одинаково. Нижний вихрь, вращаясь, гонит верхний вправо, верхний, вращаясь в противоположную сторону, гонит нижний вправо. В итоге, оба вихря движутся с одинаковыми скоростями. Скорость движения $v = \frac{\Gamma}{2\pi d}$. Расстояние и циркуляция известны.

Если вихревая пара будет двигаться с такой скоростью, то потенциал индуцированного течения будет не только функцией координат, но и функцией времени. Мы движемся от точки к точке, и об этом надо будет помнить при рассчете течения такой системы.

Вихревая дорожка (цепочка Кармана)

Рис. 4.7. Вихревая дорожка

Если есть тело, которое находится в потоке (жидкость должна быть вязкой), то при обтекании возникает цепочка таких вихрей (рис. 4.7), которая называется

цепочкой Кармана. Если скорость обтекания невелика (рис. 4.7), то за цилиндром возникает пара вихрей, которые никуда не убегают, а крутятся. Жидкость обтекает эту пару вихрей и область за ней.

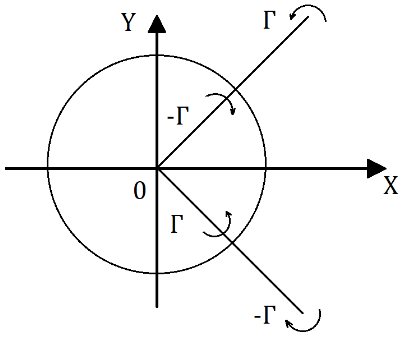

Рис. 4.8. Цепочка Кармана

Если смоделировать такую пару вихрей вихревыми нитями, то по хочется поставить пару вихрей (рис. 4.8). Но этого недостаточно, ведь цилиндр имеет непроницаемую стенку, и линии тока будут натыкаться на нее, если поставим вихри наверх и вниз. Нужно добавить внутрь цилиндра в точке инверсии еще по паре вихрей, чтобы они, вращаясь в противоположные стороны, исправляли потоки так, чтобы скорость была касательной к этому цилиндру. С помощью набора таких вихрей можно рассмотреть, как будут вести себя вихри рядом со стенкой и как они будут взаимодействовать с этой стенкой.

Если мы, посадив нужное количество вихрей, удовлетворили граничным условиям, то значит, знаем скорости в любой точке. Знаем скорости, течение здесь индуцированное и потенциальное, а значит с помощью уравнения Бернулли рассчитаем давление. Как только рассчитали с помощью набора четырех вихрей картину течения, она будет модельной, сразу рассчитаем давление. Мы будем знать, какое влияние течение оказывает на стенки вот этой конструкции, на этот цилиндр. Поэтому на самом деле тот способ с вихревыми нитями очень эффективен, потому что он позволяет быстро смоделировать достаточно сложные ситуации.

Кольцевой вихрь

Более сложная модель, которая часто используется и наблюдается: ***кольцевой вихрь*** (рис. 4.9). Вращение кольцевого вихря вызывает индуцированное течение. У нас были прямолинейные нити, индуцированные скорости было легко считать. Теперь, чтобы сосчитать влияние индуцированных течений на каждую часть этого тора, нужно проинтегрировать. Интегрирование показывает, что такой вихрь распространяется со скоростью, определяемой циркуляцией, радиусом этой баранки и размером ядра.

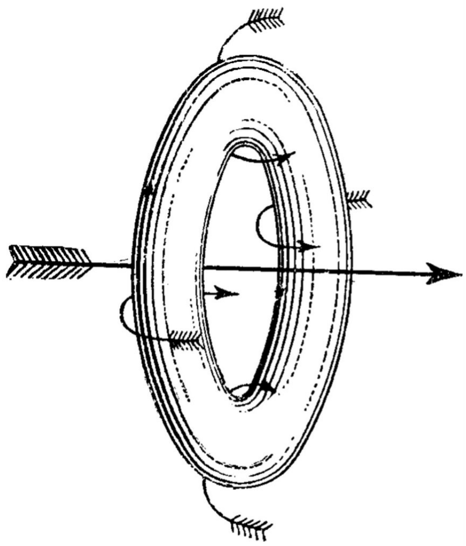

Рис. 4.9. Кольцевой вихрь

Без размера ядра ничего не получается: чем меньше размер ядра, чем туже этот тор собран, тем больше скорость. Интересный момент наблюдается с кольцевыми вихрями — чехарда вихрей.

ТФКП

Метод ТФКП позволяет рассчитать вихревое течение, и, с помощью метода конформных преобразований, рассчитав один раз какую-то простейшую структуру, получить правильный ответ. Если рассчитывать обтекание цилиндра, то можно сделать профиль Жуковского и рассчитать обтекание крыла самолета.

Этот метод позволяет не просто рассчитывать течение, он нам поможет обсудить проблему переноса. Вихри интересны тем, что могут переносить вещество, разгоняя его до большой скорости. Значит, они переносят импульс (произведение массы на скорость), но $\frac{mv^2}{2}$ — это энергия. Значит, вихри переносят и массу, и импульс, и кинетическую энергию той среды, в которой они существуют.

Плоское течение

Вычисляя вектор скорости с помощью потенциала, нужно брать градиенты или роторы. Если воспользуемся методом ТФКП, а эффективен он только в двумерном случае, потому что вводятся только две переменные x и y, оказывается, что всякие операции с векторами и вычислениями градиентов можно заменить вычислением обыкновенной производной, только по комплексной переменной.

Если у нас есть потенциальное течение, то условие несжимаемости приводит к уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$. В декартовых координатах это так, но если думать, что x и y – это действительная и мнимая части комплексной переменной $z = x + iy$, то уравнение Лапласа можно обсуждать как условие гармоничности.

Эквипотенциальные линии ортогональны скорости и линиям тока. Мы хотим взять плоскость XOY, нарисовать линию $\varphi(x,y) = const$, выбрать точки x и y и выбрать сдвинутые точки $x+\delta_x$ и $y+\delta_y$ (рис. 4.10).

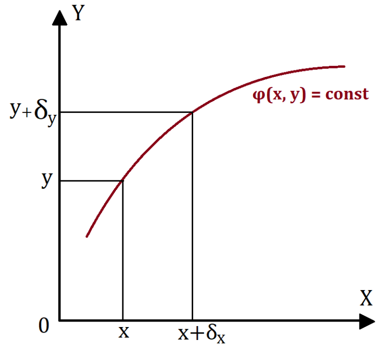

Рис. 4.10. Потенциальное течение

Результат этого сдвига:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta_y = 0$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ – это скорость v_x, а $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ – это скорость v_y. Здесь записано простое утверждение $v_x\delta_x + v_y\delta_y = 0$. Вектор скорости $\vec{v} = (v_x v_y)$ и вектор $\delta\vec{r} = (\delta_x\delta_y)$ взаимно ортогональны.

Функция тока – это функция, которая задает линию тока. Если есть какая-то функция $\psi(x,y) = C$, то ее можно приравнять к константе и эта функция называется ***функцией тока***, если линия является *линией тока*. Вектор $d\vec{r}$, который принадлежит линии, равен $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Любой отрезок, принадлежащий этой линии, совпадает с вектором $\vec{v}$ с точностью до пропорциональности. Тот факт, что $d\vec{r}$ принадлежит этой линии запишем как:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}v_x dt + \frac{\partial\psi}{\partial y}v_y dt = 0$$

Так как $dt \neq 0$, получаем следующее утверждение:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}v_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}v_y = 0 \tag{4.8}$$

Если функция φ определяет линию тока, то должно выполняться такое условие. Оно должно выполняться всегда и в любой точке этой линии. Отсюда следуют $d\varphi$ и $d\psi$:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{4.9}$$

Функция φ является потенциалом, потому что ее дифференцирование дает скорость. Дифференцирование ψ дает скорость. И то и другое называют потенциалами: одно потенциал, другое функция тока.

Уравнение непрерывности, которое писали для потенциала, дает $\Delta\varphi = 0$. Здесь нет уравнения непрерывности, но есть условия потенциальности течения. Благодаря условию потенциальности, для двумерного течения можем записать:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega \tag{4.10}$$

$\left[\vec{\nabla} \times \vec{v}\right] = 2\vec{\omega}$. Если рассматриваем двумерное движение, то ротор вырождается в:

$$\begin{vmatrix} \vec{n}_X & \vec{n}_Y & \vec{n}_Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega$$

Если вспомним, как устроены v_x и v_y, то получим:

$$-\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\Delta\psi = 2\omega$$

Если рассматривать потенциальное течение, то $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$ удовлетворяют одному уравнению. Если рассматривать вихревое течение, то $\Delta\psi$ позволяет его описать, а $\Delta\varphi$ нет.

Комплексный потенциал

Если забудем о действительных переменных, о векторах, и введём комплексное число $z = x + iy$, то можно ввести комплексный потенциал:

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z) \tag{4.11}$$

Если продифференцируем по x, то получим:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y$$

Если это функция аналитическая, то дифференцировать можно и по x, и по y, разницы нет. Поэтому для аналитических функций можно написать $\frac{dw}{dz} = \widehat{v} = v_x - iv_y$. Разумно ввести некоторую новую величину $\widehat{v}$, которую назовем ***комплексной скоростью***.

Структура этого потенциала определяется тем, как его построили. По определению и построению он будет аналитическим. Если выберем именно такую структуру и продифференцируем, то получим то же самое, что получили при дифференцировании с точностью до i:

$$\frac{dw}{dy} = i\widehat{v}$$

Особые точки

Неаналитичность функции этого комплексного потенциала – это *особые точки*: *точечный источник* и *вихревая нить*. Точечный источник – это источник, скорость которого направлена по радиусу и который определяется интенсивностью.

Если расход жидкости или количество жидкости, протекающей через любою поверхности, охватывающую источник, одинаково, то скорость должна убывать соответствующим образом. Она убывает по модулю как $\frac{1}{r}$. Для обычной действительной скорости можем посмотреть, как устроена комплексная скорость. Мы знаем течение $\widehat{v}$. Если известна скорость, можем записать в декартовых координатах и посчитать комплексный потенциал такого источника.

Если вихревая нить, то течение направлено вокруг этой нити, индуцированное течение спадает, скорость спадает как $\frac{1}{r}$. Можно легко найти комплексную скорость прямой подстановкой.

Рассмотрим изолированную вихревую нить. Для простоты $z_0 = 0$, тогда находятся действительная часть потенциала и мнимая часть. Как только построили комплексный потенциал и выделили действительную и мнимую части, нашли линии тока.

Чуть усложним задачу. Пусть пара нитей (одна сидит в точке z_1, другая в точке z_2) имеют разную интенсивность или циркуляцию. Получаем соотношение между скоростями. Взяв мнимую часть, можем посмотреть, как устроено движение.

Комплексный потенциал для комплексной вихревой пары.

Как устроена вихревая пара: одна крутится в одну сторону, другая другую сторону Получаем комплексный потенциал, движение со скоростью V позволяет ввести зависимость от времени. У нас есть потенциал, отделили от него мнимую часть и говорим, что если это константа, то у нас линии тока. Это окружности, но они сдвинуты и центр у них все время сдвигается (см. рис. 4.6).

Явление переноса

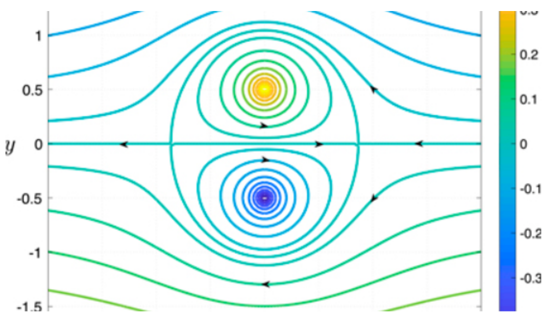

Рис. 4.11. Атмосферы вихревой пары

Перенос массы: вихрь может что-то перетащить, захватить вещество. Простейший вихрь – который перемещается, например вихревая пара (см. рис. 4.11). Определим, сколько вещества может захватить вихревая пара? Мы можем написать потенциал.

В среде, которая где-то далеко покоится, вихревая пара может двигаться со скоростью $V = \frac{\Gamma}{2\pi}$. У нас Эйлерово описание, и поэтому за движением частиц следить не можем. Перейдем в систему отсчета, где вихрь покоится. Движение вещества будет определяться линиями тока, но только в том случае, если нет зависимости от времени. Уберем зависимость от времени, и линии тока станут неподвижными. Движение вещества определяется этими линиями тока.

Есть линии тока, накрученные вокруг двух нитей, и линии тока, которые протекают. Мы перешли в другую систему отсчета. Пусть однородный поток течет вдоль оси x. Вдоль оси x течет какая-то среда со скоростью V. Скорость $\vec{v} = (V, 0)$. Потенциал устроен так:

$$V = v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \varphi = V \cdot x$$

Комплексный потенциал устроен так:

$$w = \varphi + i\psi = V(x + iy) = V \cdot z$$

Вернёмся к паре вихрей. Функция тока вычисляется как мнимая часть. Как только ее получили, можем найти те точки, где линия шла и попала в особую точку, где скорость равна нулю. Линия проходит через точки, в которых скорость равна нулю. Полученная линия является овалом с осями, объёмом внутри и массой.

Импульс переноса

Раз переносится масса, то переносится и импульс. У нас есть потенциал:

$$w(z,t) = \varphi(x,y,t) + i\psi(x,y,t) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z - \dfrac{id}{2} - Vt}{z + \dfrac{id}{2} - Vt} \tag{4.12}$$

Это значит, что в любой момент можем определить скорость. Если у нас есть область, занятая вихрями, то с помощью ψ можем ввести $\Delta\psi = -2\omega$ и вычислить потенциал. Пропустим промежуточные шаги и перейдём непосредственно к результату. Нужно скорость умножить на объем вещества, вовлеченного в движение. Тогда остается только область вихревого движения ω и только y.

Лекция 5. Методы решения задач гидродинамики

Методы решения задач гидродинамики

Мы использовали метод ТФКП для того, чтобы описывать движения поля скорости при заданных источниках. Пространство было безграничным, а такое бывает достаточно редко. В гидродинамике также приходится искать, как устроено течение в ограниченных областях. Если есть области, ограниченные, например, непроницаемыми стенками, эти стенки будут заметным образом влиять на характер течения.

Краевая задача методом разделения переменных

Одна из задач гидродинамики связана с тем, чтобы отыскать течения в присутствии стенок. Если у нас имеется потенциальное течение и никаких источников нет: $\Delta\varphi = 0$. Если зададим потенциал на границе области с помощью каких-то функций, то можем сформулировать краевую задачу и надеяться получить решение этой задачи. Первое, это метод разделения переменных. Если граница устроена таким образом, что можно разделить переменные, то можно определить $\varphi(r,t)$.

Механика точки

Можем записать уравнение движения $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$. Если известно начальное условие $\vec{r} = r(t,\vec{r}_0,\dot{\vec{r}})$, то можно определить закон движения, решая такое уравнение. Если сила обладает потенциальной энергией $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, то можно построить функцию Лагранжа $L = L(q,\dot{q},t)$, которая учтёт не только действие сил, но еще и связи.

Производящая точка

Функцию Лагранжа строим для того, чтобы заменить переменные. Замена переменных нужна, чтобы привести уравнение к виду, где следующие уравнения легко интегрируются:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{5.1}$$

Идея связана с тем, чтобы, заменяя переменные, упростить уравнение настолько, чтобы их интегрирование не составляло проблемы. Развитие этой идеи связано с переходом от переменных q и t к переменным p и q и от функции Лагранжа L к функции Гамильтона $H = H(p,q,t)$. Развитие идеи замены переменных связано в механике точки с преобразованием координат. Записав такую функцию, можем записать уравнение в простом виде, и добиться того, чтобы с помощью какой-то функции (например, $f(q,Q,t)$) от одних уравнений перейти к новым уравнениям:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q} \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial P} \end{cases}$$

Основным способом решения задач является поиск набора новых переменных. Это делается с помощью производящий функции. Если у нас есть переменная q, то импульс

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = p(q, Q)$$

— с помощью такого трюка связываем новые координаты со старыми и получаем возможность ввести новые координаты как функции этих величин: $Q = Q(p,q)$. Следующий шагом вводим новые импульсы $P = -\dfrac{\partial F}{\partial Q}$ и связываем новые импульсы со старыми: $P = P(p,q)$. Можем придумать производящую функцию, осуществляющую преобразование от одних переменных к другим, и построить новые уравнения.

Первая возможность заключается в том, чтобы потребовать $\dot{P} = 0$ и $\dot{Q} = 0$. Тогда $P = P_0$ и $Q = Q_0$. Можно сделать настолько простые уравнения, что их интегрирование будет простым. Это называется ***метод Гамильтона-Якоби***.

Способ сложнее. Потребуем, чтобы $\dot{P} = \dot{P}_0 = const \neq 0$. Если функция зависит только от константы, то $\dot{Q} = \dot{Q}_0 = const$. Есть вторая возможность: $Q = Q_0 + \dot{Q}_0 t$. Это способ ***переменные действие-угол***, когда половину переменных считаем исключенными, а вторую половину оставляем функции Гамильтона. Эту процедуру можно рассматривать в обратную сторону. Если точка покоится, её импульс равен нулю в каких-то координатах, то можем использовать те же самые преобразованиями, но в обратную сторону: придумать задачу, решение которой уже знаем.

Задача с двумерным течением

Попробуем ввести новые переменные. Например, вместо переменных x, y и z ввести новые переменные ξ, η, ζ так, чтобы подражая каноническим преобразованиям, вид оператора не изменился:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots \to \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \ldots$$

Функция φ, которая зависела от x, y, z или, другими словами, от

$$x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)$$

теперь будет зависеть от переменных ξ, η, ζ, то есть $\varphi(x,y,z) = \widetilde{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)$ Мы можем найти решение, когда границы области преобразуются в какую-то другую границу: $\Sigma \to \Sigma'$. Раз заменили переменные, то граница как-то изменится, и, возможно, граница будет настолько простой, что решение получится само собой.

Используем эту идею для решения задач об определении течения. Задача: от одних переменных x, y, z перейти к другим переменным и получить решение. Такая задача слишком сложна и в общем случае не решается, но решается в случае двумерного течения.

Предположим, что рассматриваем потенциальное течение. Мы можем рассматривать с источником и без источника. При желании можем поставить источник: $\varphi(x,y) = 4\pi I(x,y,z)$ и обсуждать решение однородного уравнения. Первая и главная задача, которую нужно разобрать – это преобразование оператора Δ. Если у нас имеются функции, осуществляющие переход: $\xi = \xi(x,y)$ и $\eta = \eta(x,y)$ или наоборот $x = x(\xi,\eta)$ и $y = y(\xi,\eta)$, введём новые переменные. Преобразование φ:

$$\varphi(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) = \Phi(\xi,\eta)$$

Если

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = -\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

то оператор, который в двумерном случае был устроен таким образом: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ превращается в оператор $C^2(\xi,\eta)\widetilde{\Delta}\Phi$:

$$\widetilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

Есть исходная система уравнений. Мы хотим провести преобразования функции и границ области. Введём обозначения: $\xi_x = \frac{\partial\xi}{\partial x}$ и схожие. Далее дифференцируем.

Осталось перейти от обычных переменных x и y на методы ТФКП. Для этого надо рассматривать x,y и ξ,η как действительную и мнимую часть: $z = x+iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда условие, которое у нас фигурировало как необходимое условие перевода функции оператора Лапласа в такой же для сохранения вида уравнения, и вид уравнения сохраняются. Оказываются совершенно одинаковые по виду уравнения.

Условие, что $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y}$ и $\frac{\partial\xi}{\partial y} = -\frac{\partial\eta}{\partial x}$ на языке ТФКП – это ***условие Коши-Римана***. Если пользуемся языком ТФКП, то фактически осуществляем преобразование переменных с помощью аналитической функции. Если при замене переменных переходим к методу ТФКП и используем аналитическую функцию, чтобы связать переменные z и ζ, то любая функция, которая являлась потенциалом (а значит, удовлетворяла уравнению Лапласа), вновь станет удовлетворять уравнению, но только в переменных ξ, потому что функция C несущественна до тех пор, если $C^2 = 0$. $C^2 = |f'| \neq 0$.

В прошлый раз говорили о функциях, которые являются потенциалом течения и функцией тока. Обе функции могут быть использованы. Если у нас нет источников и завихрений, то обе функции можно использовать для описания скорости. Обе являются потенциалами, но одна функция позволяет определить скорость таким образом:

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ и } v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

А другая функция позволяет определить таким образом:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \; u \; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Если пользоваться функцией ψ, то можно усугубить аналогию с теоретической механикой. Если рассматриваем течение и следим за движением частиц, то $v_x \equiv \dot{x}$ и $v_y = \dot{y}$:

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.3}$$

Может быть, переменные $\dot{p}$ и $\dot{q}$ играют роль импульсов и координат, а функция ψ будет играть роль функции Гамильтона. Это просто аналогия. Но если не знаем, как устроена функция ψ в простейших системах, то можем написать эту функцию для нити вихря, использовать метод канонических преобразований для описания движение вихря и легко проинтегрировать задачу. Она будет интегрируема для двух и трех нитей, а для четырех уже не получится.

Переходя к новым переменным, добиваемся преобразования границы: $\Sigma \to \Sigma'$. Мы можем добиться с помощью преобразования границы перехода от одних переменных к другим. Комплексный потенциал w, который рассматривали как функцию переменных x и y, и перейдем к новой функции:

$$W = w(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta)$$

Можем сказать, что в результате преобразования потенциал течения стал Φ, функция тока стала Ψ. Линии тока были $\psi = const$, а стали $\Psi = const$. Если эти линии тока в какой-то задаче нам известны, то с помощью аналитических функций можем преобразовать область и не только границу области, но и достаточно сложным образом найти течение, например, линий тока. Зная функцию ψ, можем найти скорость в каждой точке и все остальное.

Одна из самых простых функций, у которой можно осуществлять такое преобразование – это возведение в степень. Пусть ζ равняется z^n. Пусть течение в плоскости XOY происходит вдоль оси X. Будем считать, что движение течения происходит только в верхней полуплоскости, а ось OX это граница области — дно ручья, по которому течет вода (рис. 5.1).

Как устроен потенциал φ и функция тока ψ? Поскольку $v_x = U$ и $v_y = 0$, то потенциал устроен так:

$$\begin{cases} v_x = U = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_y = 0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi = Ux$$

$$\begin{cases} v_x = U = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ v_y = 0 = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \psi = Uy$$

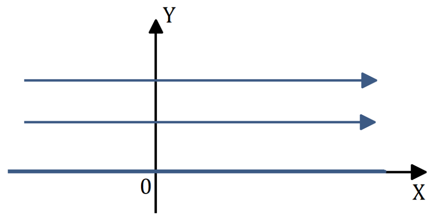

Рис. 5.1. Движение течения

Это означает, что комплексный потенциал такого течения устроен так:

$$w = \varphi + i\psi = Ux + iUy = Uz$$

Теперь вводим $\zeta = z^n$. Ради определенности возьмём $\zeta = z^3$. Если $z = re^{i\alpha}$:

$$\zeta = r^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)$$

Новый потенциал:

$$W(\zeta) = \Phi + i\Psi = Ur^3\cos 3\alpha + iUr^3\sin 3\alpha$$

С функцией тока весьма наглядно. Граница и линия тока должны совпадать. Граница сначала была устроена как $\psi = 0$, то есть $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$. Граница новая: $\Psi = 0$, и граница превращается в $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Значит, наше течение, которое соответствует $\Psi = const > 0$, все сосредоточено в углу $\frac{\pi}{3}$. Линии тока изображены на рис. 5.2.

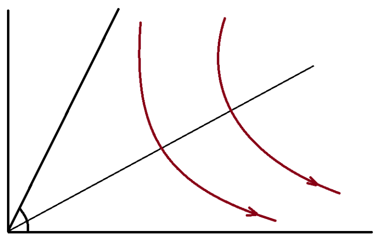

Рис. 5.2. Линии тока

Мы взяли готовое решение и преобразовали его. Возможны варианты определения таких решений — метод преобразования.

Рассмотрим обтекание цилиндра, решение которого умеем находить методом разделения переменных. Положим $z = \zeta + \frac{R^2}{\zeta}$. Знаем, что $w = Uz$. Чтобы выделить эти линии тока, нужно построить функцию W, взяв старый потенциал:

$$W(\zeta) = w(z(\zeta)) = \Phi + i\Psi$$

В итоге выделить отсюда линии тока, взяв мнимую часть комплексного потенциала:

$$\Psi = Im(W(\zeta))$$

Будем пользоваться комплексной формой $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\alpha}$. Новый комплексный потенциал будет:

$$W = U\left(re^{i\alpha} + \frac{R^2}{re^{i\alpha}}\right) = Ur\left(e^{i\alpha} + \frac{R^2}{r^2}e^{-i\alpha}\right)$$

$$W = Ur\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\alpha + iUr\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\alpha = \Phi + i\Psi$$

Получим функцию тока:

$$\Psi = Ur\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\alpha = U\xi\left(1 - \frac{R^2}{\xi^2 + \eta^2}\right)$$

Линии тока изображены на (рис. 5.3).

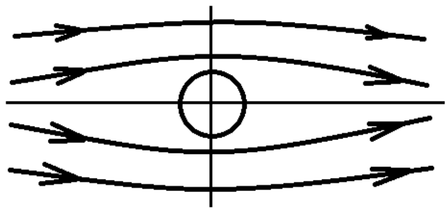

Рис. 5.3. Линии тока

Задача №3 (течение, обтекающее пластинку)

Когда рассматриваем наше преобразование, стоит обратить внимание на то, чему соответствуют каждые точки.

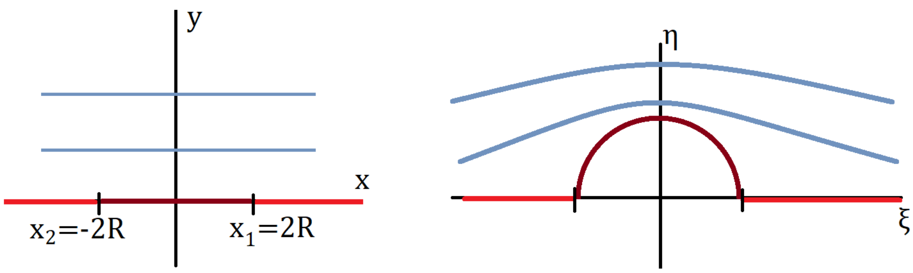

Рис. 5.4. Линии тока в старых и новых координатах

Точки дуги, изображённой справа на (рис. 5.4), соответствуют точкам $x_1 = 2R$ и $x_2 = -2R$, между ними отрезок, соответствующий данной дуге. Поэтому решение можно рассматривать как течение, обтекающее пластинку шириной $b = 4R$, которая находится в потоке. Будем рассматривать y от $-\infty$ до $+\infty$. Получаем следующую картину на (рис. 5.5).

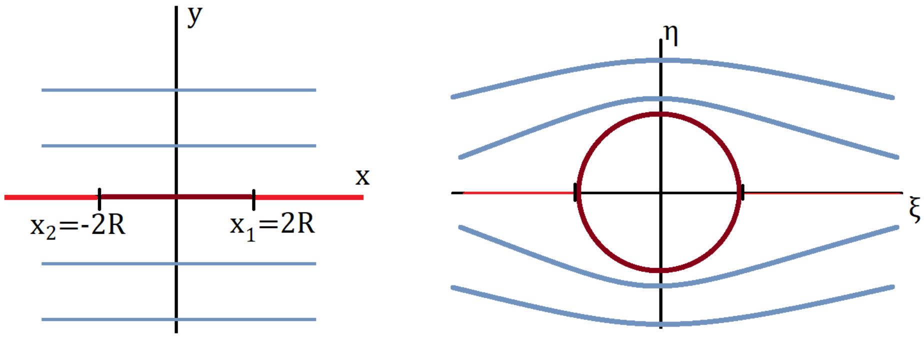

Рис. 5.5. Линии тока в старых и новых координатах

Как пластинка будет обтекаться потоком при повороте на какой-нибудь угол? Комплексный потенциал такого течения $w = Uz$ описывает линии тока, идущие параллельно оси OZ, поэтому он не подходит для случая с пластинкой, повёрнутой на угол. При повороте осей в системе координат $\eta O \xi$ (рис. 5.6) в системе координат XY линии тока и направление скорости тоже изменятся.

Такое построение соответствует тому, что выбрали новый комплексный потенциал:

$$\widetilde{W} = U\left(i\zeta + \frac{R^2}{i\zeta}\right) = iU\left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta}\right)$$

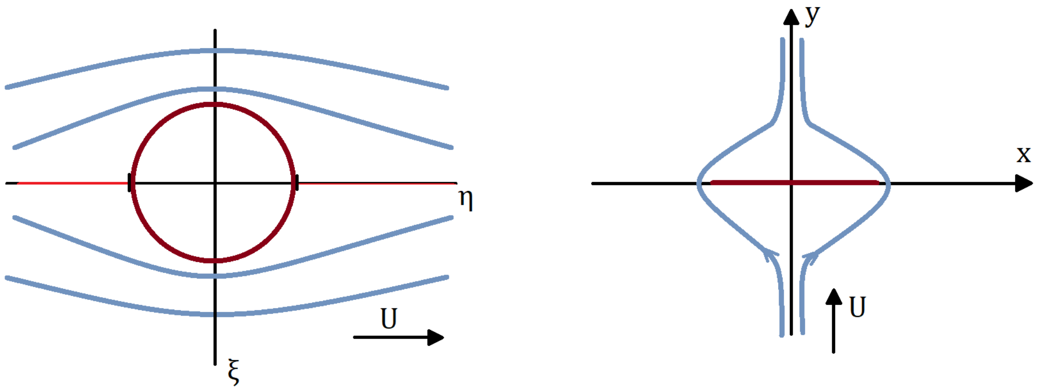

Рис. 5.6. Поворот осей в системе координат $\eta O \xi$

Раз есть новый потенциал, то линии тока в системе $\xi\eta$ изменятся так, как нарисовали. Надо взять новый комплексный потенциал и выразить его через переменные x и y. Мы взяли новый потенциал, заменив ζ на $i\zeta$, чтобы повернуть комплексную скорость. Ввели соответствующий новый комплексный потенциал. Его легко построить на плоскости $\xi\eta$, а на плоскости XY это трудно. После этого возвращаемся к старым переменным. Для этого достаточно выразить ζ, поскольку у нас есть уравнение $z = \zeta + \frac{R^2}{\zeta}$. Отсюда:

$$\zeta^2 - z\zeta + R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - R^2}$$

Тогда получаем при подстановке (учитывая, что $\frac{R^2}{\zeta} = z - \zeta$):

$$\widetilde{W} = iU\left(\frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - R^2} - z + \frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - R^2}\right) = U\sqrt{4R^2 - z^2} = w$$

Дальше, выделяя мнимую часть и приравнивая её к константе $\psi = Im(w) = const$, можем построить линию тока. Далее можем определить скорость.

После замены $x \to y$, $y \to -x$ получаем $w = U\sqrt{4R^2 + z^2}$ — потенциал неподвижной пластинки. Каким образом описать движущуюся пластинку? У нас была пластинка, обтекаемая потоком (рис. 5.7). Скорость на бесконечности была U. Необходимо

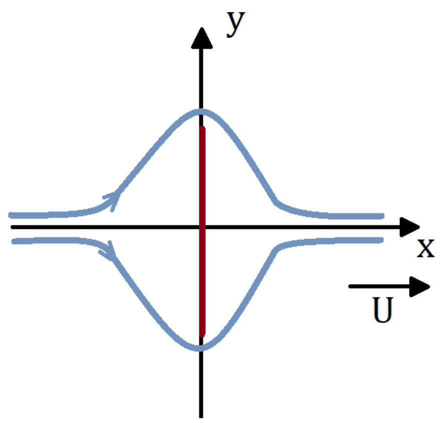

Рис. 5.7. Пластинка, обтекаемая потоком

добавить поток, чтобы остановить поток на бесконечности. Будет $\widehat{w} = \widetilde{w} + w_0$. w_0 и будет содержать поток.

$$\widehat{w}(z, t = 0) = U\left(-z + \sqrt{4R^2 + z^2}\right)$$

Рассмотрим движущуюся со скоростью U пластинку в неподвижной жидкости. Когда пластинка движется вправо, непосредственная скорость пластинки вдоль оси X будет направлена вправо, но кроме этого она будет вытеснять воду. Направление потока изображено на (рис. 5.8) синими линиями.

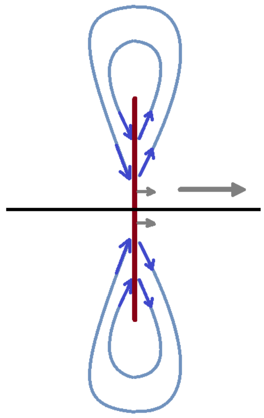

Рис. 5.8. Направление потока

Теперь можем определить комплексную скорость $\widehat{v}$, дифференцируя вновь полученный потенциал $\widehat{w}$: $\widehat{v} = \frac{d\widehat{w}}{dz} = v_x + iv_y$, и получить течение. Если хотим записать кинетическую энергию, мы должны умножить массу на квадрат скорости:

$$T = \frac{\rho h}{2} \int\limits_V \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy$$

Надо знать частные производные во всём пространстве.

Забыли о том, что функции удовлетворяют условию $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\psi = 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, а скорость $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. Квадрат скорости будем вычислять как скалярное произведение $v^2 = \left(\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi\right)$. А если захотим посчитать интеграл $\int_V v^2 dV$, сначала нужно расписать скалярное произведение:

$$\left(\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi\right) = \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi\right)\right) = \left(\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi\right) + \varphi\Delta\varphi$$

Но $\Delta\varphi = 0$. Значит, эту конструкцию можно вычислить, зная величину $\int \vec{\nabla}\left(\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi\right) dV$. Проинтегрировать можно не по всему объёму, а по поверхности, окружающей этот объём:

$$\int\limits_V \vec{\nabla}\left(\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi\right) dV = \oint\limits_\Sigma \varphi \left(\vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s}\right)$$

Решение уравнения Лапласа в заданной области полностью определяется условиями на границе области. А значит, все функции, которые нам понадобятся, тоже полностью определяются заданием на границе области. Если знаем на границе области потенциал и его производную, нам достаточно знать только ситуацию на границе. Чтобы определить течение, создаваемое движущейся пластинкой, нам достаточно пробежаться по границе области, ограничивающую эту жидкость. На внешней границе скорость равна 0, значит останется только внутренняя граница пластинки.

Достаточно знать потенциал только на поверхности пластинки. Для этого достаточно положить $x = 0$ и двигаться по пластинке от $-2R$ до $2R$. В силу симметрии задачи, достаточно пробежать только по одной стороне от 0 до $2R$.

Для того чтобы вычислить импульс, нам надо знать проекцию скорости на контур. Чтобы вычислить кинетическую энергию, нужно знать функцию прямо на границе области, скорость, циркуляцию.

Лекция 6. Газовая динамика. Система уравнений

Газовая динамика. Система уравнений

Уравнение непрерывности $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho\vec{v})=0 \tag{6.1}$$

Уравнение Эйлера $$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+2\left[\vec{\omega}\times\vec{v}\right]+\frac{\vec{\nabla}v^2}{2}+\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}=0 \tag{6.2}$$

Уравнения состояния $$p=(\gamma-1)\rho e \qquad e=e_V T \tag{6.3}$$

Уравнения процесса $$T\,ds=de+pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{6.4}$$

где $e=\frac{U}{m}$ в (6.4) — удельная внутренняя энергия, а $s=\frac{S}{m}$ — удельная энтропия.

Рассмотрим деформируемую среду и учтем изменение состояния этой среды, связанное с деформацией. Когда рассматривали механическое движение твердого тела или материальной точки, называли всё это механикой. Когда рассматривали только деформации среды и при этом говорили об изменении таких величин, как энергия системы большого числа частиц, называли это областью термодинамики, потому что коллектив из большого числа частиц, которые составляют деформируемую систему с помощью молекул, обладает свойством: вследствие хаотического движения молекул устанавливается равное распределение по степеням свободы, каждая степень свободы обладает в среднем одной и той же самой энергией, и это связано с температурой (энергия пропорциональна температуре).

Таким образом, попадаем из чистой механики в область термодинамики: у нас появляется уравнение, описывающее вещество (уравнение (6.3) Менделеева-Клапейрона), и уравнение процессов.

Уравнение непрерывности

Когда плотность постоянна, есть утверждение о несжимаемости среды, которое выглядит так: дивергенция вектора скорости обращается в 0. Теперь ситуация другая: рассматриваются изменения такой величины, как масса: $dm=d(\rho V)$. Это изменение обусловлено изменением плотности и изменением объема:

$$dm=V\,d\rho+\rho\,dV$$

$$dV=V\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)dt$$

Поскольку будем выбирать в дальнейшем объем постоянного состава, полагая, что выделили границу и не пускаем частицы через этот объем, то у нас получается, что $dm=0$, а значит получаем следующее утверждение:

$$dm=V(d\rho+\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)dt)=0$$

Поделив обе части на dt, получаем уравнение непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) = 0$$

Оператор $\frac{d\rho}{dt}$ надо расшифровывать. Ведь у нас независимыми переменными являются координата и время. Могут появляться только частные производные. $\frac{d\rho}{dt}$ появилось из-за того, что когда рассматривали перемещение за время t, могли посмотреть изменение поля плотности за время t в любой точке соседней, но выбирали среди всех возможных соседних точек только такую, куда наша частица перебирается, обладая какой-то скоростью. И поэтому у нас возникает необходимость этот оператор представить следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)$$

Поэтому записанное раннее выражение нужно записать как:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\rho + \rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) = 0$$

А так как $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho + \rho(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = \vec{\nabla}(\rho\vec{v})$, то получаем окончательную форму уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \tag{6.5}$$

В полевых переменных ρ и t независимые величины, и здесь стоят частные производные, которые говорят, что и как нужно делать.

Уравнение Эйлера

С уравнением Эйлера рассматривали изменение импульса элементарной массы маленькой частицы постоянного состава. Импульс равен массе, умноженной на скорость. Изменение массы частицы, умноженное на её скорость, определяется суммой сил, действующих на эту частицу (объёмные и поверхностные):

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{g} + \oint\limits_{\Sigma} d\vec{f}_{\text{пов}}$$

Надо дифференцировать всё, но поскольку выделили массу постоянного состава, то можем обе части уравнения поделить на m. У нас получится известная величина:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \vec{g} + \frac{1}{\rho V}\oint\limits_{\Sigma} d\vec{f}_{\text{пов}}$$

Конструкция $\frac{1}{\rho V}$ неудобна, потому что она содержит элементарный объем. У нас есть единственная возможность преобразовать величину $\oint$ к объемному интегралу и по теореме о среднем сократить объем. Мы это делали, когда рассматривали жидкость или газ, так что давление было изотропным по всем направлениям:

$d\vec{f}_{\text{пов}} = -pd\vec{s}$. Нормаль выбирали внешнюю, а сила, действующая на поверхность, направлена внутрь к центру тела, поэтому ставится знак минус. Тогда получаем:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{1}{V}\oint\limits_{\Sigma} pd\vec{s} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{V}\int\limits_{V}\vec{\nabla}p\cdot dV$$

Так как в элементарном объёме градиент давления отличается не очень сильно, то можем воспользоваться теоремой о среднем:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{1}{V}\int\limits_{V}\vec{\nabla}p\cdot dV = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{V}\vec{\nabla}p\cdot V = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \vec{g} + -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

В этом выражении объемные силы рассматривать не будем, газ легкий. Если он не гравитирующий, то объёмными силами можно пренебречь. А слагаемое $\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}$ можно представить как $2\left[\vec{\omega}\times\vec{v}\right] + \frac{\vec{\nabla}v^2}{2}$ (подробный разбор см. в соотношении (1.30)). Окончательная форма уравнения Эйлера в нашем случае:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + 2\left[\vec{\omega}\times\vec{v}\right] + \frac{\vec{\nabla}v^2}{2} + \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} = 0 \tag{6.6}$$

Принципиальное отличие заключается в том, что ρ — не константа, в $\vec{\nabla}$ её внести нельзя. Если у нас есть уравнение в такой форме и $\rho = \rho_0 = const$, в том случае, когда $\omega = 0$, то величину $\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0}\right)$ можно собрать вместе. Если $\vec{\omega} \equiv 0$, то $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ и получаем уравнение:

$$\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0}\right) = const \tag{6.7}$$

из которого также получаем интеграл:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = const \tag{6.8}$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона

Если давление непостоянно, то понадобятся дополнительные соотношения, которые позволят нам понять, что с этими давлением можно делать — уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \tag{6.9}$$

Внутренняя энергия для идеального газа: $U = c_V T$, где $C_V = mc_v$ — теплоёмкость газа, c_V — удельная теплоёмкость. Но это уравнение неудобно, потому что входит объем. Сделаем преобразования. Во-первых, перейдём к плотности, поделив обе части на V. Во-вторых, для каждого газа введём свою универсальной постоянную $\frac{R}{\mu} = r$. В-третьих, используем удельную теплоёмкость. Вспомним, что $C_p - C_V = R$ и $c_p - c_v = r$. Тогда получится утверждение:

$$p = \rho r T = \rho(c_p - c_V)T = \rho r T = \rho\left(\frac{c_p}{c_V} - 1\right)c_v T \tag{6.10}$$

Так как $U = mc = mc_V T$ и $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$, то получим:

$$p = (\gamma - 1)\rho c \tag{6.11}$$

Точно также можно обработать уравнение процесса (6.4) с помощью первого начала термодинамики, если перейти к удельным величинам, в том числе к удельной энтропии.

Равновесие газа в поле тяжести

Простой пример использования системы уравнений (6.1) — (6.4) — это атмосфера — равновесие в поле тяжести. Если рассматривать равновесие, скорость равновесия равна нулю по определению, и у нас уравнение непрерывности тождественно удовлетворяет случаю. $\frac{\partial\rho}{\partial t}$. Уравнение Эйлера в данном случае сильно упрощается: $\frac{dp}{dz} = -\rho g$. У нас есть давление и плотность и их надо как-то связать. Для этого нам надо обратиться к термодинамике. В термодинамике у нас есть уравнение состояния — термическое и калорическое, то есть Клапейрона-Менделеева и внутренней энергии. Есть уравнение процесс процесса.

Первый рассматриваемый случай – это изотермическая атмосфера. Если положим $T = const$, то p оказывается $\rho r T$ и у нас получается $rT\frac{d\rho}{dz} = -\rho g$. Примем $\frac{rT}{g} = z_*$ за константу — *высотка атмосферы*. Получим, что $\rho = \rho_0 e^{-\frac{z}{z_*}}$. Чем больше энергия частиц, тем больше эта высота. Чем больше сила тяжести, тем атмосфера становится тоньше, она становится плотной.

Мы знаем про барометрическую форму $p = p_0 e^{-\frac{z}{z_*}}$, но попробуем взять другие случаи. Например, адиабата. Чтобы получить адиабату, нужно воспользоваться термодинамическим уравнением, положить теплообмен равным нулю, воспользоваться уравнением состоянии идеального газа и все это обработать. Сразу запишем результат:

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

Этот результат берётся из соотношения $PV^\gamma = const$. Поскольку объем равняется массе, деленной на плотность, то получаем $p\rho^{-\gamma} = const = p_0\rho_0^{-\gamma}$. Домножив обе части на ρ^α, получим результат, записанный раннее.

Адиабата – это частный случай. Чтобы немного обобщить процесс, можем сказать: пусть в $p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n$ у нас n — произвольное. Обобщим и случай с адиабатой

($n = \gamma$), и случай с изотермой ($n = 1$). Объединить два случая (изотерму и адиабату) можно, если ввести *политропу*, не фиксируя n.

Политропный процесс

Если выбираем политропный процесс, то дифференцирование $\frac{dp}{dz}$ – это $\frac{dp}{d\rho}$, значит, «вылезет» n, дальше выразим $\frac{p(\rho)}{\rho}$ и $\frac{d\rho}{dz}$. В итоге получаем уравнение с разделяющимися переменными: $p(\rho)$ задали, значит, фактически получаем:

$$\frac{d\rho}{dz} \sim -\frac{g\rho}{p(\rho)}$$

Переменные разделились, уравнение элементарно интегрируется и получаем результат:

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

z_0 теперь тоже какой-то параметр, характеризующий размер атмосфера. Если $z = z_0$, то наша атмосфера имеет резкую границу. Она просто дальше не существует, в отличие от изотермы. Изотерма плавно будет меняться, это условная граница; а это — резкая граница. Соответственно, имеем зависимость

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$$

(всё при $n \neq 1$), где $z_0 = \frac{n}{n-1}\frac{rT_0}{g} = \frac{n}{n-1}z_*$. Температура линейно падает с высотой. Для политропы: она задается показателем n, зависимость температуры от высоты изображена на (рис. 6.1).

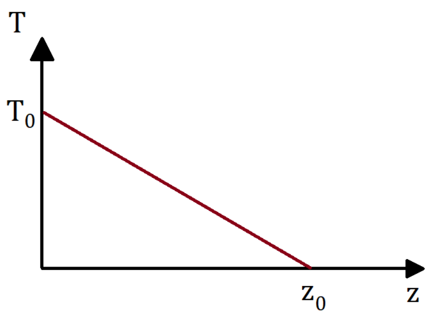

Рис. 6.1. Зависимость температуры от высоты для политропы

Осталось посмотреть, какие реальные параметры принимает эта конструкция z_0. Если возьмём воздух $\mu = 29$ г/молль, $g = 10$ м/с^2, $T_0 = 300$ К, то величину z_* для воздуха легко можем сосчитать и это будет $z_* = 8$км. Соответственно, если возьмём адиабатную атмосферу и двухатомный газ, то $n = \gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1.4$, Тогда $\frac{n}{n-1} = 3.5$ и получаем, что $z_0 = 28$ км. Если атмосфера адиабатная, то она заканчивается на высоте 30 километров.

На самом деле, атмосфера не изотермическая и не адиабатная. Если атмосферу считать адиабатной, то температура за 30 километров должна спасть до нуля. Значит, температура уменьшается со скоростью 10 К/км. На самом деле, реальная скорость это 6 К/км. Атмосфера неоднородная — есть водяной пар, он начинает конденсироваться, при конденсации выделяется тепло и она замерзает, охлаждается при адиабатном расширении не так быстро, как предписывает чистая адиабата. Почему не изотерма? Между большими слоями воздуха теплообмен происходит крайне медленно, гораздо медленнее, чем происходит механическое перемещение воздушных масс, и тогда эти воздушные массы (скажем, кубический километр воздуха переместился на километр вверх) не успевают обменяться своим теплом с другими воздушными массами. Фактически, если они переместились вверх, охлаждаются за счет адиабатного расширения.

Квазиодномерное движение

Рассматриваем течение газа по трубе переменного сечения, считая, что поперечное сечение трубы меняется достаточно медленно, так что при движении газа по трубе скорости радиального движения к оси или от оси невелики. Возьмём в качестве примера случай, изображённый на (рис. 6.2). Будем считать, что скорость имеет только одну компоненту: $\vec{v} = v(x)\vec{n}_x$. Есть радиальные компоненты, но они малы, и энергия невелика.

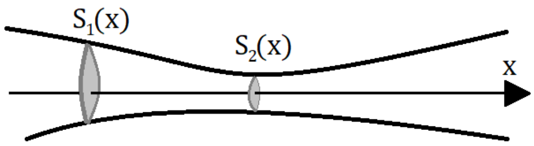

Рис. 6.2. Движение газа по трубе

Если выберем 2 сечения $S_1(x)$ и $S_2(x)$, в трубе масса не рождается и не исчезает. Никаких зазоров в трубе у нас не наблюдается. Сколько вещества стекает из $S_1(x)$ со скоростью v_1, столько вытекает из $S_2(x)$ со скоростью v_2. Между двумя сечениями в выделенном объеме масса сохраняется. Масса втекаемая равняется

$$\Delta m = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t$$

За время Δt частицы, которые находились на расстоянии $\Delta L = v\Delta t$. Если величина $\Delta m = const$ в любом сечении, то можем написать, что $\rho S v = const$. Это и есть уравнение непрерывности.

Для жидкости писали закон сохранения энергии. За время Δt слой вещества массой m, обладающий скоростью v_1, приносит энергию, равную $T_1 = \frac{mv_1^2}{2}$. В слое S_2 та же самая масса, но она движется с другой скоростью, она вносит другую энергию. Для жидкости такое несоответствие изменения кинетической энергии объясняли так: изменение кинетической энергии системы равняется работе всех сил, действующих в этой системе (и внешних, и внутренних).

Какие силы действуют в такой системе? У нас идеальная жидкость, значит, работа внутренних сил равна 0. Внешние силы действуют со стороны стенок сосуда. Если жидкость идеальная, то силы, действующие со стороны стенок, перпендикулярны этим стенкам. А стенки непроницаемые, жидкость течёт вдоль стенок, силы перпендикулярны. Работа этих сил равняется 0. Остаются силы $F_1 = p_1 S_1$ и $F_2 = p_2 S_2$, которые действуют на выделенные частицы, направлены друг к другу. Жидкое тело деформируется, и при деформации правая часть от первого сечения сжимается меньше, а правая часть второго сечения растягивается больше. Значит, суммарная работа обязана быть равна

$$\Delta E_{\text{кин}} = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t$$

Мы получаем, что p_1 и p_2 различны, а S_1 и S_2 можно убрать за счет уравнения непрерывности. Отсюда получим уравнение Бернулли, которое утверждает, что изменение кинетической энергии жидкости, движущейся по трубе, происходит за счет работы сил давления, которые действуют в разном сечении по-разному. В нашем случае они ускоряют жидкость, а если труба расширяется — то замедляют. Получается, что $p + \frac{\rho v^2}{2} = const$. Значит, скорость растет, а давление падает. Скорость растет тогда, когда труба расширяется.

В газовый динамике будет не просто работа сил давления. Вводится *удельная энтольпия*, которая определяется как $h = e + \frac{p}{\rho}$. Если внутренняя энергия не меняется, то уравнение, которое записали, есть следствие уравнения Эйлера: $\frac{v^2}{2} + h = const$. Тогда, если внутренняя энергия не меняется, имеем дело с идеальной жидкостью. $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const$. При $\rho = const$ это есть уравнение Бернулли.

А если имеем дело с газом, внутренняя энергия газа может меняться. Тогда в этом уравнении появляется внутренняя энергия газа:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + c = const$$

Вспомним, что идеальный газ – это материальные точки, не взаимодействующие между собой и движущиеся хаотически, а на хаотическое движение накладывается поступательное. Мы знаем теорему Кёнига, которая утверждает, что кинетическая энергии системы равняется массе всей системы, умноженной на скорость центра масс, плюс кинетическая энергия движения относительно центра масс. Мы выделим небольшой объем газа. Кинетическая энергия выделенного объема газа как целого плюс внутренняя энергия:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv_{\text{цм}}^2}{2} + E'_{\text{кин}} = \frac{mv_{\text{цм}}^2}{2} + U \tag{6.12}$$

Внутреннюю энергию можно написать введя температуру. Таким образом и возникает обобщение интеграла энергии по сравнению с тем, который изучали при рассмотрении жидкости.

Вернёмся к раннее написанному уравнению. Что такое $\frac{p}{\rho}$? Это rT. Получим $\frac{v^2}{2} + (r + c_V)T = const$. А величина $r + c_V$ это теплоемкость при постоянном давлении. Получаем $\frac{v^2}{2} + c_pT = 0$. Благодаря тому, что $\frac{p}{\rho}$ связана с работой газа, скорость движения и температура газового потока связаны. Если поток вначале покоится, то поток затем постепенно ускоряется. Скорость больше 0, а температура в этом сечении падает. Поэтому можно сказать, что если в начале газ был в большом баке и практически покоился, имел какую-то температуру, то он будет постепенно вытекать, температура будет постепенно уменьшаться. Можно найти такое сечение, в котором газ практически остынет и будет иметь максимально возможную скорость $v_{max} = \sqrt{2c_pT_0}$.

c_p знаем, T_0 знаем. Когда создавали паровые турбины, выяснилось, что после преодоления определённого сечения скорость перестала увеличиваться, не достигая максимальной.

Уравнение Гюгонио

Исследования можно провести в общем виде, рассматривая просто уравнение Эйлера. Перемещение частиц среды вдоль трубы со скоростью v приводит к изменению координат, и поэтому дифференцирования по t можно заменить дифференцированием по x. Получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{\partial x}{\partial t} = v\frac{dv}{dx}$$

Газ течёт с адиабатным процессом, так как рассматриваем паровую турбину, где газ движется с огромной скоростью. Получаем

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S \frac{dp}{dx} = c^2\left(\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right)$$

где c — скорость звука. Домножив обе части получившегося уравнения на v, получим ***Уравнение Гюгонио***:

$$(v^2 - c^2)\frac{dv}{dx} = \frac{v}{S}\frac{dS}{dx} \tag{6.13}$$

Из этого уравнения следует, что $(v^2 - c^2)\frac{dv}{dS} > 0$. Теперь частный случай. Если v величина маленькая по сравнению со скоростью звука в данном сечении, то $v^2 -$

$c^2 < 0$. Тогда получается, что изменение скорости имеет знак минус. Если труба расширяется, то скорость падает. А если скорость превышает звуковую, то чтобы газ разгонять, нужно трубу расширять.

Выводы

Построить турбину можно в том случае, если сначала сужаем трубу до тех пор, пока в этой трубе скорость потока не достигнет скорости звука локально. Квадрат скорости звука – это температура. Когда труба сужается, высокая температура постепенно падает и скорость потока растет, а локальная скорость звука падает вместе с температурой. А значит локальная скорость звука равняется скорости потока. После этого момента надо поменять трубу.

Сопло Лаваля

При очень больших скоростях движения молекул возможно возникновение неравновесных ситуаций. Поступательная степень свободы довольно быстро приводит к равновесию, молекулы сталкиваются друг с другом. А при вращательных или колебательных степенях свободы они гораздо медленнее разгоняются, тормозятся и релаксация немного задерживается. Возьмем скорости, которые достигаются при движении газа (это сотни метров в секунду). Можно взять не одно такое сопло, а набор, решетку. Тогда будет много вытекать газа, но сопла будут короткие. Вытекающий газ сразу после того, как он прошёл сечения, попадает в область, где релаксация между колебательными и столкновительными степенями свободы еще не наступает, возникают высоковозбужденные уровни, которые не успевают отдать свою энергию. Тогда имеем систему, в которой есть возбужденные молекулы, и эти молекулы могут отдать свою энергию. Таким образом, можно сконструировать лазер.

Такие лазеры пытались использовать в качестве оружия. Они обладают довольно высокой мощностью, но сравнительно невысоким кпд, порядка десяти процентов. Интеграл Бернулли закрывает возможность существования точечного источника газа. Для несжимаемой жидкости говорили о точечных источниках. Жидкость вытекает, в начале скорость жидкости велика. Точечный источник. Для газа ничего подобного не получается. Если заложим мощность определенного источника и сферически симметричное распределение поля скоростей и воспользуемся интегралом Бернулли, то можно определить зависимость скорости течения от расстоянии от источника. Существует такая ситуация: точечный источник, если интенсивность заданного течения, то скорость существует, но только при r больше какого-то критического значения $r_{\text{кр}}$. Значит, не можем получить размер источника, который испускает газ с заданным сечением, меньше чем $r_{\text{кр}}$. Значит, ни о каких точечных источниках речь не идёт.

Каждому значению r там, где существует течение, соответствует медленная скорость и быстрая. И существует такая точка, где эти скорости совпадают и скорость становится равной локальной скорости звука.

Разрывное течение газа

Течение газа обладает рядом парадоксов. Если берем трубу постоянного сечения и речь идет о жидкости, то нет никаких сомнений в том, что скорость в любом сечении такой трубы одинакова. А для газа ситуация иная. Если плотность может меняться, то возможна такая ситуация, когда скорость до точки $x = 0$ и скорость после будет разными. Соответственно, температура, плотность и давление будут разные. А труба будет постоянного свечения. Причем переход от одного значения параметра к другому происходит скачком. Это называется *нормальный разрыв плотности*. Это явление связано с ударной волной.

Поскольку слева и справа от точки $x = 0$ газ, этот раздел массу не съедает и не производит. Значит, сколько массы здесь втекает в этот разрыв, столько вытекает. Поэтому можно написать закон сохранения массы. Сечение здесь одинаковое. Масса m, которая за время Δt протекает через поперечное сечение левого участка, несет импульс $p_1 = mv_1 = \rho_1 v_1 S\Delta t$. Справа тоже импульс $p_2 = mv_2 = \rho_2 v_2 S\Delta t \neq p_1$. Значит, импульсы не сохраняются. А что же меняет импульс массы, которая, двигаясь слева, перешла вправо?

Мы можем выделить эту массу и наблюдать, как за время t она перейдёт в правый участок трубы. На эту массу действуют окружающие ее тела. На эту поверхность действует сила давления $F_1 = p_1 S$, а навстречу действует $F_2 = p_2 S$. Они действуют столько, чтобы выделенный кусок вещества успел перейти вправо. Если l выделим, значит, время t равняется $\frac{l}{v_1}$. Разность сил приводит к изменению импульса за это время, получаем закон изменения импульса.

С энергией всё то же самое, только в энергии необходимо учитывать изменение внутренней энергии, связанное с изменением температуры. Поэтому у нас здесь не $p\rho$, а $\frac{p}{\rho}$, потому что кинетическая энергия меняется за счет действия этих сил p_1 и p_2. За счет этих сил меняется не только кинетическая энергия, но и происходит деформация. Тело деформировалось. Работа этих сил привела к изменению и кинетической энергии и внутренней энергии за счет деформации.

Ударная адиабата возникает из-за изменения энергии и запрета теплообмена с внешними телами. При обычных адиабатах, если запретили теплообмен, то изменение внутренней энергии осуществляется за счет механических деформаций. Здесь теплообмен с внешними телами запретили, но в процессе перехода через эту границу $x = 0$ температура слева T_1 оказалась меньше, чем T_2 справа, сжатый газ нагревается. У нас получились два кусочка вещества, обладающих разной температурой, которые находятся в непосредственном контакте. Как только два тела с разной температурой соприкасаются, происходит теплообмен, и внутри между этими двумя кусочками возникают потоки тепла.

Но как только возникают потоки тепла между сильно нагретым телом и телом с маленькой температурой, процесс является необратимым. Самопроизвольный переход теплоты возможен только в сторону от большей температуры тела к телу с меньшей температурой, процесс необратим. В итоге, когда слой газа просочился вправо, мы запретили теплообмен с внешними телами, а внутренний теплообмен запретить не можем. Это привело к росту энтропии, поэтому получилось различие.

В ударной волне газ очень трудно сжать, он чрезвычайно сильно нагревается, энергия переходит в энергию теплового движения, а вовсе не в кинетическую энергию.

Свойства ударной адиабаты

1) Ударное сжатие необратимо. Вернув давление к исходному значению, не вернём вещество в исходное состояние.

2) После скачка плотность газа может лишь возрастать, но не может быть сколь угодно большой.

3) Для идеального одноатомного газа $z_{max} = 4$, для воздуха $z_{max} = 6$.

4) Прохождение поверхности разрыва сопровождается ростом энтропии.

5) Для идеального газа...

6) **Торможение потока**: газ, втекающий в разрыв, имеет сверхзвуковую скорость, а поток затормозившегося газа — дозвуковую.

Лекция 7. Волновые процессы. Определение волны

Волновые процессы. Определение волны

Волновое движение включает в себя несколько разделов, связанных с волновыми процессами в упругих средах, таких как газы и как твердые тела, и волновые процессы, которые происходят на границе разделов сред. Рассмотрим пример простейшей упругой среды — это идеальный газ, (воздух или другой газ), который описывается уравнением Менделеева-Клапейрона, внутренняя энергия которого не зависит от объема, а определяется только температурой. Учитывая тот факт, что теплообмен обычно происходит сравнительно медленно по сравнению с механическим движением. Этот газ будем рассматривать в адиабатическом приближении. Будем полагать, что теплообмен между разными частями этого газа не происходит.

Волной называем движение сплошной среды. Можно рассматривать поля, электромагнитное, гравитационное и так далее, но речь идет, так или иначе, о физическом пространстве, характеристики которого могут меняться от одной точки к другой. Эти характеристики — электромагнитные или гравитационные поля, плотность. Эти характеристики могут каким-то образом меняться.

Определение 7.1. *Если говорить о кинематике процессов, то* ***волновой процесс*** *— это изменение состояния среды, например, температуры, плотности, или давления, которая изменяется от точки к точке таким образом, что эта характеристика перемещается.*

Мы можем в момент времени $t = 0$ задать какую-то характеристику среды, например, плотность как функцию координаты. Мы задаём эту характеристику как функцию координаты и устанавливаем момент времени $t = 0$: $\rho = f(x,0)$. Существует изначальная нулевая плотность ρ_0 во всем пространстве. А на участке от 0 до l, который рассматриваем, зададим изменение плотности. На этом участке плотность увеличивается вблизи какой-то точки — это начальное состояние. Если говорим о волновом процессе, то с течением времени это распределение меняется, сдвигается на какое-то расстояние b, не меняя формы. В момент времени $t_1 > 0$ должны будем написать ту же самую функцию, но сдвинутую на b: $\rho = f(x,t_1) = f(x-b)$. Если сдвиг происходит с течением времени постоянно: $b = vt$, то в каждой точке пространства в каждый момент времени есть плотность. Эта плотность — не вещество, а только характеристика. Плотность, например, перемещается с какой-то скоростью: $\rho(x,t) = f(x-vt)$. Это одно из самых примитивных представлений — движение с постоянной скоростью. Это и можно назвать волной.

Под это определение подходит изменяющийся профиль стола, который перемещается (это волна). Поэтому кинематическое определение нужно дополнить. Когда говорим о волне, то фактически имеем в виду следующую ситуацию — движение частиц среды связано. Изменение состояния связано с изменением движения среды и с движением этих частиц. Если у имеется волна, которая распространяется по поверхности воды, то движение частиц жидкости происходит, но не в ту сторону, куда волна распространяется, и не с такой скоростью, с которой она движется. Пусть скорость волны будет v, а скорость частиц — u. Но движение происходит не с той скоростью, а значит речь идет о движении изменений, которые характеризуют данную среду.

Движение вещества непосредственно не связано с перемещением характеристик среды. Возможно существование механизма типа эстафеты. Мы воздействуем внешним образом на соседние частицы, таким образом порождая волну. Это внешнее возмущение, но это типичная волна, потому что изменение состояния, которое происходит при перемещении от одной точки к другой, не связано непосредственно с тем, что ровно на такое же расстояние перемещаются частицы вещества.

Кинематические характеристики в таком интегральном виде задавать неудобно. Чтобы не расшифровывать задаваемую функцию, предпочитают дифференциальное уравнение, которое описывает свойство представимости аргумента простой волны в виде комбинации:

$$\rho = f(x - vt) = f(\xi), \qquad \xi_{\pm} = x \mp vt$$

Со знаком плюс написали волну, которая распространяется в положительном направлении оси X, а со знаком минус — в отрицательном. Распространение волны возможно и в обе стороны, если договоримся и будем считать $v = 0$.

Тот факт, что аргумент функции f может быть представлен в двух видах, можно записать с помощью дифференциального уравнения. Надо взять и продифференцировать функцию, задающую плотность:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = f' \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = f'$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = f' \frac{\partial \xi}{\partial t} = -vf'$$

Как только выполним дифференцирование, можем заметить, что умножение первого уравнения на v и добавление ко второму уравнению, приведёт ко второму утверждению:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{7.1}$$

Будем давайте считать, что $V > 0$, и волна распространяется в положительном направлении. Если хотим рассмотреть волну, распространяющуюся в отрицательном направлении, знаки надо поменять и опять продифференцировать. Во втором уравнении в правой части получится знак минус. Значит, придётся вычитать, и получится:

$$\frac{\partial \rho_{-}}{\partial t} - v\frac{\partial \rho_{-}}{\partial x} = 0 \tag{7.2}$$

Каким образом описать волновое движение, если у нас изотропная среда? Если допустим принцип суперпозиции, то можем считать, что волна $\rho 9x,t)$ может быть представлена в виде волны, распространяющейся в одном направлении с каким-то коэффициентом A, и волна, распространяющаяся в противоположном направлении с коэффициентом B:

$$\rho(x,t) = A\rho_+ + B\rho_-$$

в одном случае аргумент $x - vt$, в другом — аргумент $x + vt$. Две волны друг другу никак не мешают. Если предположить, что среда у нас устроена так, что одно движение другому не мешает, это утверждение можно записать так:

$$\rho(x,t) = A\rho(\xi_+) + B\rho(\xi_-)$$

Чтобы описать волную с ξ_+, должны подействовать этим оператором $\frac{\partial}{\partial t}$, получим:

$$\widehat{D}_+\rho_+ = \frac{\partial \rho_+}{\partial t} + v\frac{\partial \rho_+}{\partial x} = 0$$

$$\widehat{D}_- = \frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x} \qquad \widehat{D}_-\rho_- = 0$$

Если подействуем последовательно этими операторами

$$\widehat{D}_+\widehat{D}_- = \widehat{D}^2 = \widehat{D}_-\widehat{D}_+$$

Действие такого оператора на произвольное решение даст 0, то есть волны могут распространяться в любую сторону. Остается посмотреть, как устроен оператор $\widehat{D}^2$. Двукратное дифференцирование:

$$\widehat{D}^2 = \tfrac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \square$$

— оператор Д'Аламбера, который и будет волновым оператором, позволяющим записать утверждение: волна может распространяться либо в положительном, либо в отрицательном направлении с постоянной скоростью, и любая функция, будь то синус, удовлетворяющая этому оператору, будет волной. Сюда можно подставлять суперпозицию:

$$f(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Волновое движение – если используем эйлеровы координаты, то это перемещение вправо означает, что в контролируемой от x_1 до x_2 области пространства одномерное движение. Сначала плотность была ρ_0, затем появляется вещество большей плотности. Если втаскиваем какое-то количество вещества, то существует поток вещества в положительном направлении через границу Σ_1 и Σ_2. Затем этот поток вещества уходит через эту границу, разность потоков между этими двумя границами будет связана с изменением массы вещества на этой границе. Поэтому кинематически те же самые выражения уравнения простой волны можем получить, рассматривая такую терминологию: пусть масса в выделенном объем между x_1 и x_2, определяется как интеграл от плотности $\rho(x,t)$:

$$m(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx$$

Соответственно, изменение, вызванное движением, определяется потоком массы через границу:

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx = -V\int_{x_2} \rho(x)dS_2 + V\int_{x_1} \rho(x)dS_1 = -\oint_{\Sigma} \rho(x)\vec{V}d\vec{S}$$

Используя теорему Гаусса:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x),V)\right)dx$$

придём к дифференциальному уравнению простой волны. Получаем уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + v\frac{\partial}{\partial x}\rho = 0$$

В итоге опять приходим к уравнению простой волны. В природе почти никогда не бывает, чтобы волна распространялась с постоянной скоростью, и форма волны сохранялась. У нас есть поверхность жидкости и волна. Если пустили волну, например, в положительном направлении, то форма сохраняться не будет. А с течением времени эта волна как-то расплывется. Ширина d_0 в первый момент времени и d_1 во второй момент времени не меняется. При описании изменения формы волны необходимо решить, какие свойства волны хотим сохранить, и какие дополнительные свойства изменения профиля этой волны добавить.

Принцип суперпозиции

Одно из важнейших качеств — ***принцип суперпозиции***. Принцип суперпозиции предполагает, что наши дифференциальные операторы должны быть линейными. Они не должны содержать никаких дополнительных функций, квадратов этих функций и т.д. Если хотим сохранить принцип суперпозиции, то можем поступить очень просто. Представим волну в виде суперпозиции каких-то волн. Воспользуемся разложением Фурье:

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\rho}(k,t)e^{ikx}dk$$

причём Фурье-компонента $\widetilde{\rho}(k,\omega)$ для любого k удостоверяет уравнению:

$$\ddot{\widetilde{\rho}}(k,t)+V^2k^2\widetilde{\rho}(k,t)=0$$

Форма будет меняться по понятной причине, если скорость распространения каждой компоненты будет отличаться от другой. Раз разложение Фурье связано с разложением синуса и косинуса, задача заключается в том, чтобы эти монохроматические волны имели разную скорость. Каждая из волн характеризуется своим k. Это волновое число, параметр, тогда потребуем, чтобы каждая из волн имела свою скорость, определяемую тем параметром, который ей приписали. Получится расплывающийся пакет.

Возьмем набор частот или этих параметров, близких к какому-то основному, так что $k_0-\Delta<k<k_0+\Delta$, и попробуем определить ω — частоту. Раз амплитуды этих волн почти одинаковы, функцию $\omega(k)$ удобно разложить в ряд окрестности k_0, ограничиваясь первыми членами разложения:

$$\omega=\omega(k)=\omega_0+\frac{\partial\omega}{\partial k}(k-k_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}(k-k_0)^2+o\left((k-k_0)^2\right)$$

где $\omega_0=|Vk_0|$.

Волновое уравнение у нас:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-V^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

Функция $f(x,t)=\int dke^{ikx}\widetilde{f}(k,t)$. Подставляем, выполняем дифференцирование, получим:

$$\int dke^{ikx}\left(\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial t^2}+k^2V^2\widetilde{f}\right)=0$$

Так как $ke^{ikx}\neq 0$, то $\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial t^2}+k^2V^2\widetilde{f}=0$, получим:

$$\ddot{\widetilde{f}}+k^2V^2\widetilde{f}=0$$

У нас получится условие на функцию f, на эти коэффициенты разложения, на их зависимость от времени. $\widetilde{f}(t)=\widetilde{f}_0e^{-i\omega t}$. Двукратное дифференцирование даст нам дисперсионное соотношение $\omega^2=kV$, которое будет определять, как должна зависеть, по какому закону должна меняться зависимость f от t для того, чтобы у нас получилась распространяющаяся волна. Каждая Фурье компонента имеет вид

$$\widetilde{f}=\widetilde{f}_0e^{-i\omega t+ikx}$$

Итак, хотим из монохроматических волн собрать *волновой пакет* путем интегрирования, то есть суммированием всех входящих сюда волн. Будем считать, что $\omega(k)$

есть константа. Это будет означать, что движение происходит с постоянной скоростью. Пусть сюда войдут еще члены линейные по отклонению от этой постоянной скорости. Получим следующий результат:

$$\rho(x,t) = A(x,t)exp\{ik_0(x - Vt)\}$$

$$A(x,t) = \tilde{\rho}(k_0)\int\limits_{-\Delta}^{+\Delta} exp\{i(x-\omega_0' t)k\}dk = \tilde{\rho}(k_0)\frac{2\sin\left((x-\omega_0' t)\Delta\right)}{(x-\omega_0' t)\Delta}$$

Волна представима в виде медленно меняющихся амплитуд из-за того, что ограничились набором частот, близких друг к другу, или набором скоростей волн, которые близки друг к другу. Поэтому изменение амплитуды происходит медленно по сравнению с колебаниями монохроматической волны. Поэтому возникает монохроматическая волна, которая движется со скоростью V, соответствующая выбору k_0. Волна представима в виде произведения двух волн. Одна движется с большой скоростью, другая — с маленькой. Огибающая этой волны движется со своей скоростью – *групповой скоростью пакета.* Наличие квадратичных членов приводит к расплыванию:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{i(x-\omega_0' t)k - i\left(\frac{\omega_0'' t}{2}\right)k^2\right\}dk = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0'' t}}exp\left\{-i\frac{(x-\omega_0' t)^2}{2\omega_0'' t} + i\frac{\pi}{4}\right\}$$

Определение 7.2. ***Дисперсия*** *— явление расплывания волнового пакета из волн с различной фазовой скоростью.*

Уравнение Клейна-Гордона

Волновое уравнение можно изменить. Мы договаривались, что уравнение должно быть линейным, поэтому можно добавить саму функцию. Получается уравнение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + C^2 f = 0$$

Это ***уравнение Клейна-Гордона***. Оно явилось первым релятивистским уравнением, которое было придумано для описания движения частиц в квантовой механике. Появилось раньше, чем уравнение Шредингера.

Импульс фотона и энергия фотона связаны таким соотношением: $E_ф = p_ф c$. Энергия фотона связана с частотой волны $E_ф = \hbar\omega_ф$. Уравнение квадратичное, чтобы движение происходило в любую сторону (в положительном, в отрицательном направлении). Энергия всегда положительна, импульс может быть положительным и отрицательным: $E_ф^2 = p_ф^2 c^2$. Эта величина спрятана в волне. Если у нас есть какая-то волна, то частота этой волны и импульс: $e^{-i\omega t+ikx}$. Если два раза продифференцируем эту функцию по времени, то получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -\omega^2\psi$$

Если два раза продифференцируем по координате, то получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = -k^2\psi$$

Если между этими двумя величинами существует связь, то можем записать ее в виде дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$$

Сопоставим энергию этой части и импульс другой части и получим волновое уравнение. Но Альберт Эйнштейн приблизительно в это же время (все это относится к 1900-м годам) заметил, что для массивных частиц добавляется константа. Надо это выражение дополнить соответствующей константной:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\psi = 0$$

Знаки разные, потому что здесь были мнимые единицы. Поэтому уравнение Клейна-Гордона появилось раньше, чем уравнение Шредингера. Для такого уравнения можем искать решение в виде Фурье разложения и установить связь между ω и волновым числом, определяющим длину волны. Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2(k) = c^2k^2 + \omega_0^2$$

фазовая скорость – это отношение:

$$\frac{\omega}{k} = c\sqrt{1+\omega_0^2/c^2k^2}$$

групповая скорость:

$$V(k) = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1+\omega_0^2/c^2k^2}}$$

— это то, что определяет, как перемещается амплитуда вот этих быстрых колебаний. Оказывается, что перемещается совсем иначе, с другой скоростью.

Фазовая скорость $> c$, групповая скорость $< c$, а их произведение, фазовое или групповое, $= c^2$. Это уравнение Клейна-Гордона. Если бегаем все время вдоль одной оси, то полученное выражение более или менее правильно описывает ситуацию. Если бегали в пространстве, то вместо волнового числа, определяющего геометрию волны (длину волны), используем волновой вектор, который указывает не только пространственный период, но и направление распространения волны.

Квазилинейные уравнения. Метод характеристик

Описание второй группы явлений может быть правильно получено только с помощью нелинейных уравнений. До сих пор полагали, что скорость перемещения всех точек вершин на поверхности воды приблизительно одинакова, а вершину можно сложить из монохроматических волн. Тогда скорости монохроматических волн одинаковы до тех пор, пока они имеют одинаковые частоты и не зависят от амплитуды: $\frac{\partial V}{\partial A} = 0$. В другой ситуации скорость распространения волны как раз и определяется амплитудой. Например, пусть чем больше амплитуда, тем быстрее бежит волна. Тогда форма волны будет меняться, т.к. через некоторое время возмущенный участок пройдет расстояние в два раза большее, чем невозмущенный.

Зададим на начальном участке от 0 до l профиль, задаваемый функцией $f(x)$. Зададим скорость и будем считать, что она определяется зависимостью $v = v(\rho(x))$. Спустя некоторое время при $t \neq 0$ каждая точка будет перемещаться и займет положение $S + V(\rho(s)) \cdot t$. Мы знаем, чему равняется плотность, определили скорость, с которой движется выделенная точка, и расстояние, на которое она переместится. Мы можем задать координату точки, которую отметили на начальном распределении, как функцию времени. Итак, координата точки отмечена на начальном распределении буквой S, движется со скоростью V, которая зависит от характеристик среды. Если скорость больше ни от чего не зависит, то ее можно просто умножить на t.

Волновое уравнение получается тогда, когда мы связываем изменение плотности с координатой и временем. Волновое уравнение — уравнение для функции координат и времени. Чтобы получить его, дифференцируем по времени и по координате:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \rho'\frac{\partial s}{\partial x} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \rho'\frac{\partial s}{\partial t}$$

Чтобы решить эту задачу, нужно найти связи между $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial t}$. Сделать это легко благодаря соотношению $x(s,t) = s + V(\rho(s))t$:

$$dx = ds\left(1 + V'\frac{\partial \rho}{\partial s}t\right) + V dt$$

Теперь можем найти $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial t}$:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{1 + V't} \qquad \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{V}{1 + V't}$$

Подставим в исходное уравнение $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial t}$ и получить ***квазилинейное уравнение***:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Окончательное это квазилинейное уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V(\rho)$$

Похоже на то уравнение, с которого начинали — уравнение простой волны. Но здесь скорость зависит от свойств функции. Такое уравнение называется квазилинейным. Разберём пример на рис. 7.1.

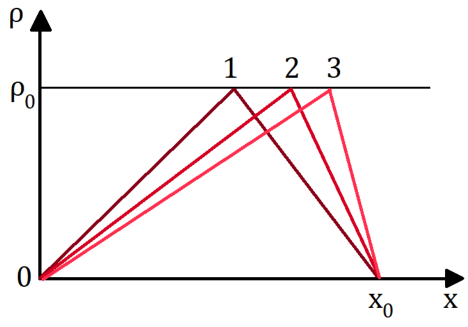

Рис. 7.1. Пример

На участке от 0 до x_0 треугольное распределение: если плотность равна 0, то скорость равна 0 и линейно растет($V(\rho) = V_0\frac{\rho}{\rho_0}$). Самая большая скорость достигается на ρ_0, за время t можем попасть в точку 3. Расстояние между точками 1 и 3 равно половине расстояния между 0 и ρ_0, то есть смещение прямо пропорционально амплитуде волны.

Следующий «треугольник» будет иметь вершину правее точки x_0 - это называется *укручением волн*, которые перехлестываются. Укручение происходит тогда, когда у нас есть высота волны, а в случае плотности такой ситуации со сдвигом треугольника быть не может. При $t < t_1$ волна абсолютно нормальная. Что произойдет, когда волна придет к предельному состоянию (вершина треугольника будет в точке с координатой x_0) в момент времени t_1? В момент времени t_1 плотность не определена, следовательно, разрыв возникает всегда, когда имеем дело с квазилинейным уравнением.

Движение каждого участка волны обычно связано с локальными свойствами этого участка. Если частицы ничего не знают о том, что происходит на фронте волны, то они будут продолжать двигаться с теми же самыми скоростями, с которыми двигались до разрыва. Судьбу участка вблизи x_0 можно определить на основе уравнения непрерывности, ведь масса, которая была в волне, никуда деться не может, поэтому импульс не может ни возникнуть ни исчезнуть. Следовательно, закон сохранения массы позволит нам спрогнозировать судьбу этого участка. Сформировавшаяся волна с разрывом:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\rho_0 x}{l} & 0 < x < l \\ 0 & x > l \end{cases}$$

Амплитуда ρ_1 в момент времени $t = t_1$ связана с начальной ρ_0 соотношением $\frac{\rho_1}{x_1} = \frac{\rho_0}{x_0+V_0t}$ (следует из подобия треугольников на 7.2).

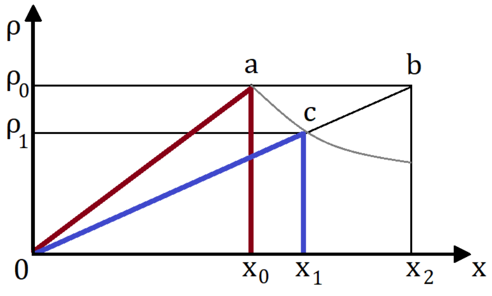

Рис. 7.2. Сформировавшаяся волна с разрывом

Закон сохранения массы даёт соотношение

$$\rho_0 x_0 = \rho_1 x_1$$

получаем закон движения разрыва — «фронта ударной волны»

$$x_1(t) = x_0\sqrt{1+\frac{v_0t}{x_0}}$$

Движение взрыва происходит со скоростью

$$\dot{x}_1(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{1+\frac{V_0t}{l}}}$$

Амплитуда волны с течением времени убывает:

$$\rho_1(t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{1+\frac{V_0t}{l}}}$$

Лекция 8. Волна в неоднородной среде

Солитоны

Рассмотрим солитон, который возбуждается в канале. Пусть нелинейность такова, что волна не расплывается. Она распространяется и сталкивается с солитоном, идущим навстречу. В момент столкновения возникает острый пик. Влияние нелинейности может приводить к тому, что какой-то момент волны за счет взаимодействия могут создать очень сильную волну, которая резко отличается от остальных по своему поведению.

Волны в газах. Малые возмущения в газах

Рассмотрим волну, которая возникает в изотропной среде — в газе. Будем считать, что газ адиабатный, то есть существует связь между давлением и объемом, и рассматрим малые возмущения (отклонения от положения равновесия). Скорость потока будем считать постоянной. Равновесное состояние p_0, ρ_0, V, а возмущения малы p, ρ, u:

$$p = p_0 + p \qquad \rho = \rho_0 + \rho \qquad v_k = V_k + u_k$$

Уравнение непрерывности и уравнение Эйлера в линейном приближении приводят к системе:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho V_k)}{\partial x_k} = 0 \qquad \rho_0 \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho_0 V_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0$$

Для адиабатных процессов, где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$, введём *скорость* c.

Система уравнений для возмущённой плотности и скорости является линейной:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + V_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \qquad \rho_0 \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho_0 V_k \frac{u_k}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_k}$$

Решается с помощью разложения возмущений скорости и интеграла Фурье:

$$\rho(x_k, t) = \int \widetilde{\rho}(k_k) exp\{i\omega t - i k_k x_k\} d^3 k$$

$$u_k(x_k, t) = \int \widetilde{u}_k(k_k) exp\{i\omega t - i k_k x_k\} d^3 k$$

Для трансформант Фурье получим алгебраическую систему

$$(\omega - V_k k_k)\widetilde{\rho} - \rho_0 k_k \widetilde{u}_k = 0$$

$$-c^2 k_k \widetilde{\rho} + \rho_0(\omega - V_k k_k)\widetilde{u}_k = 0$$

Нетривиальное решение системы существует, если определитель матрицы обращается в 0 (дисперсионное уравнение).

Умножая второе уравнение на k_k, рассмотрим нетривиальные решения системы относительно величин $\widetilde{\rho}$ и $\widetilde{z} = (k_i \widetilde{n}_i)$, что и приведёт к дисперсионному уравнению

$$(\omega - V_k k_k)^2 = c^2 k^2$$

Вводя угол ϑ между вектором скорости потока и волновым вектором, приведём уравнение к виду

$$(\omega - V k \cos\vartheta)^2 = c^2 k^2$$

Решение этого уравнения удобно представить в виде

$$\omega = \omega_0 (1 + V\cos\vartheta / c)$$

где $\omega_0 = ck$.

Если $V < c$, решение с $\omega > 0$ существует для любых направлений волнового вектора. Можно ввести фазовую скорость, которая вычисляется как $V_{ph} = \frac{\omega}{k} = c + V\cos\vartheta$, то есть волна «сносится» потоком.

Из уравнения непрерывности для возмущений следует, что вектор скорости возмущения u_i направлен вдоль волнового вектора, то есть волны являются продольными.

Если $V > c$, распространение волны ограничено углами $c + V\cos\vartheta > 0$. Для волн, распространяющихся пол углом $\cos\vartheta_0 = -\frac{c}{V}$ с направлением скорости среды V, фазовая скорость $V_{ph} = 0$. Волновой фронт такой волны составляет с $\vec{V}$ угол φ такой, что $\sin\varphi = \frac{c}{V}$ — *угол Маха.*

Энергия акустической волны

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну и пример с поршнем и водой. Если мы подвинем поршень, то в среде возникнет область, в которой частицы будут иметь скорость u, равную скорости поршня, т.е. среда будет покоиться относительно него. Граница среды распространяется с большой скоростью $c >> u$. Раз вещество стало двигаться, то у него будет кинетическая энергия $E = \frac{mu^2}{2}$, где масса $m = \rho_0 ctS$. Раз воздух сжат, то существует и потенциальная энергия. Расчёты показывают, что для линейной волны кинетическая и потенциальная энергии равны. Возникновение волны обязательно будет связано с энергией, которая равна $E_{\text{волны}} = 2 \cdot E = mu^2$. Если перестанем двигать поршень, то «сгусток» этой волны будет двигаться дальше самостоятельно, а его масса будет иметь скорость u.

Распространение волны сопровождается переносом энергии и импульса. Энергия элементарного объема среды V_0 есть сумма внутренней энергии вещества и кинетической энергии его движения. Скорость частиц среды — сумма невозмушенного движения среды со скоростью $\vec{V}$ и возмущения скорости $\vec{u}$, $(u << V)$.

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$$

Плотность и давление среды — сумма плотности и давления невозмущенной среды ρ_0 и p_0 и волновых возмунений

$$p = p_0 + p_1 \qquad \rho = \rho_0 + \rho_1$$

где $p_1 << p_0$, $\rho_1 << \rho_0$.

Для удельной внутренней энергии среды e, внутренняя энергия элементарного объема $E = e\rho V_0$. Кинетическая энергия такого объёма $E_{\text{кин}} = \rho(\vec{V} + \vec{u})v_0/2$.

С точностью до квадратичных по возмущению членов изменение объемной плотности кинетической энергии в волне:

$$\Delta E = \frac{\rho_0 u^2}{2} + (\rho_0 + \rho_1)(\vec{V}\vec{u})$$

В адиабатном процессе изменение внутренней энергии заданной массы m определяется работой сил давления:

$$dE = mde = -pdV$$

Учитывая, что $v = \frac{m}{\rho}$, в изэнтропийном процессе:

$$de = \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

Изменение внутренней энергии элементарного объема V_0

$$dE = V_0 d(\rho e) = V_0(ed\rho + \rho de) = V_0\left(e + \frac{p}{\rho}\right)d\rho$$

Изменение объемной плотности внутренней энергии с точностью до членов второго порядка имеет вид:

$$\Delta(\rho e) = \frac{\partial(\rho e)}{\partial\rho}\rho_1 + \frac{\partial^2(\rho e)}{\partial\rho^2}\cdot\frac{\rho_1^2}{2} + o\left(\rho_1^2\right)$$

Изменение энергии содержит линейные члены по скоростям и по возмущению плотности, а также квадратичные члены. Т. к. мы рассматриваем монохроматическую волну, линейные члены усредняются и не дают вклад во внутреннюю энергию. Значит, нужно провести вычисления с точностью до квадратичных членов. Учитывая соотношения

Теорема Пойтинга

Этот эффект известен в теории как процесс рождения частиц.

Теорема Пойтинга — изменение энергии сплошной среды в выделенном объёме (в отсутствие объёмных сил) обусловлено потоками энергии через границу.

Положим для простоты $\vec{V}=0$. Из уравнения Эйлера, умноженного на скорость, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{u^2}{2}=-\frac{c^2}{\rho_0}u_k\frac{\partial\rho_1}{\partial x_k}$$

С учётом уравнения непрерывности преобразуем правую часть:

$$u_k\frac{\partial\rho_1}{\partial x_k}=\frac{\partial(\rho_1 u_k)}{\partial x_k}-\rho_1\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=\frac{\partial(\rho_1 u_k)}{\partial x_k}+\frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial t}$$

В итоге получаем возможность сравнить изменение кинетической энергии, потенциальной энергии и дивергенции от потока энергии.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\rho_0 u^2}{2}+\frac{c^2\rho_1^2}{2\rho_0}\right\}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\{c^2\rho_1 u_k\}$$

где $E_{\text{волн}}=\frac{\rho_0 u^2}{2}+\frac{c^2}{2\rho_0}\rho_1^2$ — объёмная плотность энергии.

Введём $\vec{S}=c^2\rho_1\vec{u}$ — вектор плотности потока энергии. Получим теорему об изменении энергии среды в волне:

$$\frac{\partial E_{\text{волн}}}{\partial t}=-div\vec{S}$$

В стационарном случае $div\vec{S}=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right)=0$, что и приводит к теореме Пойтинга.

Предположим, что у нас есть волна, которая распространяется в какой-то трубе. Движение воздуха в этой трубе происходит вдоль трубы, возьмём 2 сечения S_1 и S_2. Плотность потока энергии $c_1^2\rho_1 u_1 S_1=c_2^2\rho_2 u_2 S_2$. Если в волне меняется плотность, то соответствующим образом могут меняться амплитуды скорости.

Волна в неоднородной среде. Лучевая акустика

Будем рассматривать такую среду, параметры которой меняются очень медленно, мало, на расстояниях порядка длины волны.

Определение 8.1. ***Луч*** *— линия, касательные к которой в каждой точке определяют направление распространения волны, задаваемое волновым вектором* $\vec{k}$.

Как найти траекторию луча, если знаем, что скорость распространения фронта волны определена в каждой точке и меняется довольно медленно? Для определения лучей в среде удобен ***принцип Ферма***: время распространения луча между двумя точками среды максимально.

Пусть луч в среде задан параметрически $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где $ds = \sqrt{(\vec{r}\cdot\vec{r})}$. И пусть скорость звука зависит от времени, но не зависит от параметров среды, например, от температуры газа в данной точке:

$$c^2(\vec{r}) = \frac{r}{\gamma}T(\vec{r}) = \frac{\gamma-1}{\gamma}c_V T(\vec{r})$$

где $r = \frac{R}{\mu}$. Время прохождения элементарного участка траектории:

$$dt = \frac{ds}{c(\vec{r})} = \frac{\sqrt{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')}}{c(\vec{r})}ds$$

Время распространения луча:

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{c(\vec{r})}ds = \int_1^2 \frac{\sqrt{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')}}{c(\vec{r})}ds$$

Время t_{12} минимально, так что получаем:

$$\delta t = \delta\int_1^2 \frac{\sqrt{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')}}{c(\vec{r})}ds = 0$$

Выполним варьирование в декартовых координатах (обозначив $x' = \frac{dx}{ds}$):

$$\int_{n_1}^{n_2}\left\{\frac{x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z'}{c(x,y,z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - \frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{c^2(x,y,z)}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\delta x + \frac{\partial c}{\partial y}\delta y + \frac{\partial c}{\partial z}\delta z\right)\right\}ds = 0$$

После интегрирования по частям получим уравнения кривой

$$\frac{d}{ds}\frac{x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z'}{c(x,y,z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} + \frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{c^2}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\delta x + \frac{\partial c}{\partial y}\delta y + \frac{\partial c}{\partial z}\delta z\right) = 0$$

которые удобно записать в векторной форме

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{r}'}{c(\vec{r})r'}\right) + \frac{r'}{c^2(\vec{r})}\vec{\nabla}c = 0$$

где $\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{n}$ — единичный вектор, касательный к траектории, $r' = |\vec{r}'| = 1$.

Нагляднее записать уравнение для касательного вектора $\vec{n}(s)$:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{n}}{c(\vec{r})}\right) + \frac{\vec{\nabla}c}{c^2(\vec{r})} = 0$$

С учётом соотношения $\frac{d}{ds}\frac{1}{c(\vec{r})} = -\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{\vec{\nabla}c}{c^2}\right) = -\frac{(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}c)}{c^2}$ получим уравнение для определения формы луча:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}c) - \vec{\nabla}c(\vec{r})}{c}$$

Звук в атмосфере

В политропной атмосфере с показателем политропы $n \neq 1$ температура изменяется с высотой по соотношению $T = T_0(1-\alpha z)$, где $\alpha = \frac{n-1}{n}\gamma\frac{g}{c_0^2} = \frac{1}{z_0}$, что приводит к уменьшению скорости звука.

Для земной атмосферы $n = 1.23$, $\gamma = 1.4$, $c_0 = 330$ м/с — скорость звука вблизи поверхности, где температура максимальна $T_0 = 300$ К. Высота атмосферы в этой модели равна $z_0 = 44$ км (на самом деле порядка 10 км). Считаем, что атмосфера изотропна и изменяется только с высотой. Следовательно, мы всегда можем провести в вертикальной плоскости плоский луч, форма которого задаётся функцией высоты $z = z(x)$ так, что $ds = \sqrt{dx^2+dz^2} = ds\sqrt{1+z'^2}$.

Вариационная задача аналогична отысканию экстремума функционала действия в механике точки:

$$\delta t = \delta \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{c(z)} dx = 0$$

Не выписывая уравнений Эйлера для функции Лагранжа $L(z,z') = \frac{\sqrt{1+z'^2}}{c(z)}$, воспользуемся интегралом «энергии», т.к. $\frac{\partial L(z,z')}{\partial x} = 0$:

$$z'\frac{\partial L(z,z')}{\partial z'} - L = E$$

Выполним вычисления:

$$\frac{z'^2}{c(z)\sqrt{1+z'^2}} - \frac{\sqrt{1+z'^2}}{c(z)} = -\frac{1}{c(z)\sqrt{1+z'^2}} = E$$

и получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1-E^2c^2(z)}}{Ec(z)}$$

которое интегрируется как:

$$x = \pm\int \frac{Ec(z)}{\sqrt{1-E^2c^2(z)}} dz + C$$

Получаем траекторию в общем случае.

Учитывая зависимость скорости звука от ысоты $c^2(z) = c_0^2(1-\alpha z)$, получим:

$$x = \pm\int \frac{Ec_0\sqrt{1-\alpha z}}{\sqrt{1-E^2c_0^2(1-\alpha z)}} dz + C$$

Заменив переменные $\xi = Ec_0\sqrt{1-\alpha z}$ и $dz = -\frac{2}{\alpha E^2 c_0^2}\xi d\xi$, придём к интегралу:

$$x = \mp\frac{2}{\alpha E^2 c_0^2}\int\frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi + C \qquad z = \frac{1}{\alpha} - \frac{\xi^2}{\alpha E^2 c_0^2}$$

Для вычисления интеграла введём переменную $\xi = \sin\vartheta$:

$$\int\frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = \int\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}d\cos\vartheta d\vartheta = \int\sin^2\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2\vartheta)d\vartheta = \frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{2}$$

$$x = \mp\frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{2\alpha E^2 c_0^2} + C \qquad z = \frac{1}{\alpha} - \frac{1-\cos 2\vartheta}{2\alpha E^2 c_0^2}$$

Для горизонтального направления луча в нижней точке $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$, получим перевёрнутую циклоиду (рис. 8.1).

$$x = R(\varphi - \sin\varphi) \qquad z = z_0 - R(1-\cos\varphi) \qquad R = \frac{z_0}{2}$$

Радиус кривизны этой циклоиды в десять раз больше высоты, с которой должно падать тело для приобретения скорости равной скорости звука.

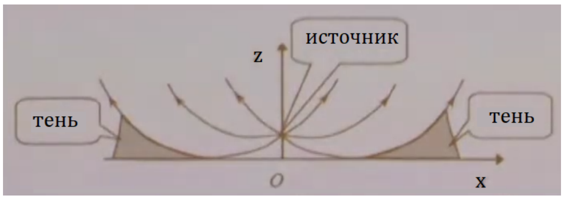

Рис. 8.1. Горизонтальное направление луча

Задача о распространении звукового луча в политропной атмосфере совпадает с задачей о брахистохорне, сформулированной Иоганном Бернулли в 1696 году. Рассмотрим аномальное распространение при инверсии температуры. Сильный звук бывает слышен за 25 – 45 км от источника. В ряде случаев очень сильные источники (извержения вулканов, сильные взрывы) бывают слышны в нескольких кольцевых зонах, окружающих источник, разделённых зонами акустической тени (рис. 8.2).

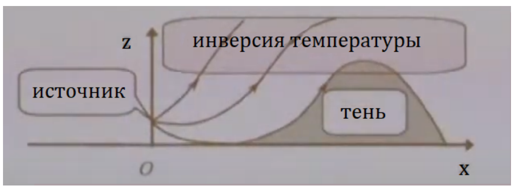

Рис. 8.2. Инверсия температуры

С чем связано возникновение аномалий при сильных звуках и отсутствие этих аномалий при слабых? Расчёт показывает, что инверсии температуры не хватает.

Дело в том, что при распространении звука из среды с высокой скоростью в среду с малой скоростью волна замедляется, а амплитуда скорости растёт. Мы знаем, что существуют ударные волны. В сильной волне происходит сильное сжатие высокой температуры и скорость распространения сильной волны с большой амплитудой увеличивается. Чем сильнее волна, тем больше увеличивается её скорость и тем сильнее проявляется эффект преломления.

Поговорим о ***волновой акустике***. Первым дело стоит затронуть ***приближение эйконала***. В среде, неоднородности которой значительно больше длины волны, амплитуда и волновой вектор медленно изменяются на длине волны. Потенциал скорости представим в виде произведения медленно меняющейся амплитуды $a(\vec{r},t)$ и экспоненты от фазы $\psi(\vec{r},t)$ — функции, близкой к линейной:

$$\varphi(\vec{r},t) = a(\vec{r},t)e^{i\psi(\vec{r},t)}$$

где $\psi = (\vec{k}\cdot\vec{r}) - \omega t + \alpha$ — *эйконал.*

Введём следующее разложение для небольших участков пространства и интервалов времени:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0 + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial t}t$$

Определим в каждой точке пространства волновой вектор и частоту волны:

$$\vec{k} = \vec{\nabla}\psi \qquad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Дисперсионное соотношение $\omega^2 = c^2k^2$ приводит к уравнению:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = c^2\left(\vec{\nabla}\psi\right)^2$$

которое подобно уравнению Гамильтона-Якоби релятивистской частицы, энергия которой в ультрарелятивистском случае равна $H^2 = c^2(\vec{r})p^2$. Производящая функция $S(\vec{r},t)$, преобразующая к новым (циклическим) переменным, удовлетворяет условиям (причем ω играет роль функции Гамильтона):

$$\vec{p} = \vec{\nabla}S \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = c^2\left(\vec{\nabla}S\right)^2$$

где третье соотношение совпадает с уравнением для эйконала. Следовательно, для волнового вектора можно записать канонические уравнения:

$$\dot{\vec{k}} = -\vec{\nabla}\omega \qquad \dot{\vec{r}} = \vec{\nabla}_k\omega$$

Явления на границе раздела

Поговорим об отражении и преломлении звука на границе раздела двух сред со скоростью звука c_1 и c_2.

При падении звуковой волны

$$\omega \qquad \vec{k}_1 = (k_1 \sin\vartheta_1, k_1 \cos\vartheta_1)$$

возникает отражённая волна

$$\omega \qquad \vec{k}'_1 = (k'_1 \sin\vartheta'_1, -k'_1 \cos\vartheta'_1)$$

и преломлённая

$$\omega \qquad \vec{k}_2 = (k_2 \sin\vartheta_2, k_2 \cos\vartheta_2)$$

Связь между волновым вектором и частотой волны в каждой среде определяется волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial 62\varphi}{\partial y}\right) = 0$$

для потенциала скорости $\varphi = \varphi(t,x,y)$. Волновые векторы всех трёх волн лежат в одной плоскости:

$$k'_1 = k_1 \qquad \vartheta'_1 = \vartheta_1$$

Граничные условия: равенство нормальных составляющих скоростей

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi_1(t,x,0) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi_2(t,x,0)$$

равенство давлений $p_1(t,x,0) = p_2(t,x,0)$ по обе стороны границы. Используя интеграл Коши $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = F(t)$ получим уравнения для амплитуд волн на границах:

$$\frac{\cos\vartheta_1}{c_1}\left(A_1 - A'_1\right) = \frac{\cos\vartheta_2}{c_2}A_2 \qquad \rho_1(A_1 + A'_1) = \rho_2 A_2$$

и коэффициент отражения

$$R = \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2} = \left(\frac{\rho_2 \operatorname{tg}\vartheta_2 - \rho_1 \operatorname{tg}\vartheta_1}{\rho_2 \operatorname{tg}\vartheta_2 + \rho_1 \operatorname{tg}\vartheta_1}\right)^2$$

Давление волны на границу раздела. При отражении волны от границы раздела она оказывает давление на эту границу. Сумма потоков энергии в отражённой и преломлённой волнах равна потоку энергии падающей волны (как мгновенному, так и среднему):

$$c_1 W_1 \cos\vartheta_1 = c_1 W'_1 \cos\vartheta_1 + c_2 W_2 \cos\vartheta_2$$

Учитывая коэффициент отражения $R = \frac{W_1'}{W_1}$, для среднего потока энергии во второй среде получим:

$$W_2 = \frac{c_1 \cos\vartheta_1}{c_2 \cos\vartheta_2}(1-R)W_1$$

С помощью тензора плотности потока импульса найдём давление на границу как «потерянную» y-компоненту импульса:

$$p = (W_1 + W_1')\cos^2\vartheta_1 - W_2 \cos 62\vartheta_2$$

С учётом выражения для W_2 получим:

$$p = W_1 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1 \left[(1+R)\operatorname{ctg}\vartheta_1 - (1-R)\operatorname{ctg}\vartheta_2\right]$$

При нормальном распределении получается:

$$p = 2W_1 \frac{(\rho_1 c_1)^2 + (\rho_2 c_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 c_1^2}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2}$$

Лекция 9. Излучение звука. Эффект Доплера

Звуковое давление на границе раздела сред

Волна оказывает давление на границу раздела сред при расщеплении потока энергии падающей волны на поток отражённой и прошедшей волн

$$c_1 W_{\text{пад}} \cos\vartheta_1 = c_1 W_{\text{отр}} \cos\vartheta_1 + c_2 W_{\text{прош}} \cos\vartheta_2$$

Зная коэффициент отражения $R = \frac{W_{\text{отр}}}{W_{\text{пад}}}$, можно вычислить поток энергии во второй среде

$$W_{\text{прош}} = \frac{c_1 \cos\vartheta_1}{c_2 \cos\vartheta_2}(1-R)W_{\text{пад}}$$

и давление на границу

$$p = \left\{(1+R)\cos\vartheta_1 - (1-R)\frac{c_1}{c_2}\cos\vartheta_2\right\}\cos\vartheta_1 W_{\text{пад}}$$

пропорциональное падающему потоку.

Отражение на границе с движущейся средой

Мы рассматривали слабую звуковую волну, которая падала на границу раздела двух сред (рис. 7.2). Мы брали единичную амплитуду, падающая и отраженная волны не помечены, V — прошедшая волна.

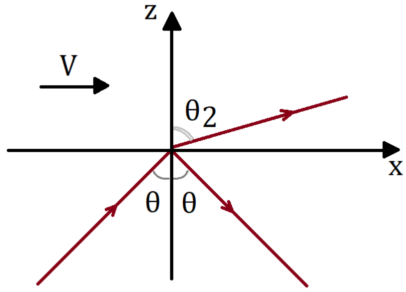

Рис. 9.1. Слабая звуковая волна, падающая на границу раздела двух сред

Когда у этих двух сред разные плотности или скорости звука, происходит обычное преломления света и отражения света. Усложним задачу тем, что верхняя полуплоскость представляет из себя среду, которая движется со скоростью, а нижняя, для определенности, покоится. Если возьмём одинаковые среды, то при неподвижной верхней полуплоскости преломления и отражения нет. Но, как только включаем какую-то скорость, ситуация резко меняется.

Если среда в полупространстве $z > 0$ движется со скоростью V вдоль оси OX, то падающая волна $\vec{k} = \frac{\omega}{c}(\sin\vartheta, \cos\vartheta)$ возбуждает в покоящейся среде $z < 0$ отражённую волну. Давление здесь равно сумме

$$p_1 = e^{-i\omega t + ik_x x}\left(e^{ik_z z} + Ae^{-ik_z z}\right)$$

а в преломлённой волне

$$p_1 = Be^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z}$$

Частоты падающей, отражённой и преломлённой волн совпадают, потому что движение источника создает возмущение, одинаковое во всех точках среды. Вместо x-компоненты можно брать проекцию волнового вектора на плоскость границы раздела сред k_x, k_y. Для z-компоненты падающей волны получаем положительные проекции волнового вектора на оси x и z положительная. В отражённой волне меняется знак проекции на ось z, но сохраняется для оси x.

Преломленная волна устроена примерно так же. Мы расписали давление, но то же самое можно написать для скоростей. Подставим всё в волновое уравнение. В неподвижной среде волновое уравнение $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$ (обычный оператор Д‘Аламбера). Дифференцирование по времени приводит к дисперсионному соотношению, связывающему длину вектора и частоту: $\omega^2 - c^2k^2 = 0$, а в движущейся среде, проведя галилеево преобразование, получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{V}{c}\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

которое даёт дисперсионное соотношение

$$(\omega - Vk_x)^2 = c^2\left(k_x^2 + \kappa^2\right)$$

С помощью дисперсионного соотношения, связывающего ω и k, определим фазовую скорость по оси z.

$$v_z^{ph} = \frac{\omega}{k} = \pm\frac{c}{\sqrt{(1 - M\sin\vartheta)^2 - \sin^2\vartheta}}$$

Режимы отражения:

- Если движение среды медленное, то будет обычный закон отражения $M < 1/\sin\vartheta - 1$, κ — действительная величина, $\omega - Vk_x > 0$. При этом $|A| < 1$ — обычное отражение.
- $1/\sin\theta - 1 < M < 1/\sin\theta + 1$, κ — чисто мнимая величина. При этом $|A| = 1$ - полное внутреннее отражение
- $M > 1/\sin\theta + 1$, κ — действительная величина, но $\omega - Vk_x < 0$ и $v_z^{ph} = \frac{\omega}{\kappa} < 0$. При этом $|A| > 1$ - сверхотражение.

Требуя 2 условия — непрерывность давления и возмущения скорости на границе раздела сред — получаем связь между коэффициентами A и B.

$$1 + A = B \qquad \frac{\kappa}{(\omega - Vk_x)^2}B = \frac{k_z}{\omega^2}(1 - A)$$

Отсюда амплитуда отражённой волны

$$A = \frac{(\omega - Vk_x)^2/\kappa - \omega^2/k_z}{(\omega - Vk_x)^2/\kappa + \omega^2/k_z}$$

(считаем амплитуду падающей единицей). А прошедшей

$$B = \frac{2(\omega - Vk_x)^2/\kappa}{(\omega - Vk_x)^2/\kappa + \omega^2/k_z}$$

Решение дисперсионного уравнение даёт условие, определяющее κ:

$$\kappa = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{(1 - M\sin\theta)^2 - \sin^2\theta}$$

(здесь число Маха $M = V/c$).

κ может иметь оба знака, поэтому возможно 2 варианта на рис. 9.2 (S_z — z-компонента потока энергии, Вектор Пойнтинга).

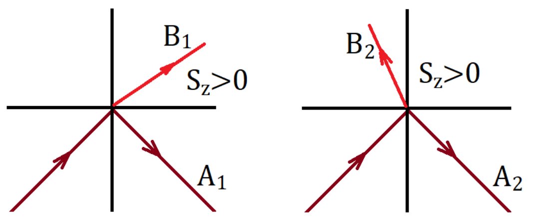

Рис. 9.2. 2 варианта

Поток энергии в полупространстве $z > 0$ направлен к границе раздела

$$q = v_z^? W_z = \frac{c^2\kappa}{\omega - Vk_x}\frac{\omega}{\omega - Vk_x}\frac{|B|^2}{2\rho c^2}$$

При $\omega = Vk_x$ знаменатели выражений для амплитуды отражённой и преломлённой волн обращаются в 0. В системе возможно ***спонтанное возникновение звука***.

Принцип Гюйгенса

В чём принципиальное различие этих двух случаев, почему они возникают, и что происходит в среде, когда скорость звука одинаковая, но одна среда покоится, а другая движется? Будем рассматривать одну волну, которая падает под углом α, пересекает границу раздела, проходит расстояние ct, и точка пересечения с границей раздела бежит со скоростью $v_0 = \frac{c}{\sin\alpha} > c$. Граница раздела, возмущаемая волной, бежит со скоростью больше волны. (рис. 9.3)

Синие круги на рис. 9.4 — поверхности равной фазы в какой-то момент времени. Огибающие этих фаз образуют фронт отражённой волны.

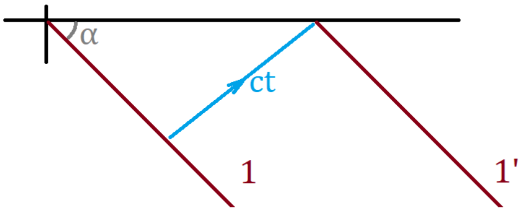

Рис. 9.3. Принцип Гюйгенса

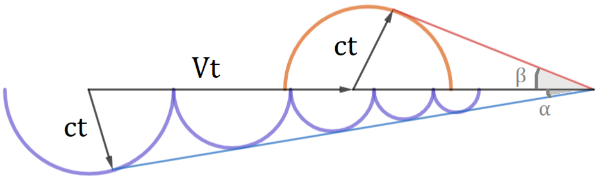

Рис. 9.4. Нормальное преломление

Т. к. среда движется, то точка, в которой начался процесс возмущения, успеет переместиться (оранжевый круг). Огибающая всех волновых фронтов в верхней полуплоскости образует волну, идущую уже под другим углом β.

V — скорость течения, Vt — снос волны течением, ct — перемещение фронта волны. $\sin\alpha = ct/l$ — отражённая волна. $\sin\beta = ct/(l - Vt)$ — преломлённая волна, $n = \sin\beta/\sin\alpha = 1 - M\sin\alpha$ — показатель преломления.

Полное внутренне отражение

Из геометрии:

$$\frac{ct}{\sin\alpha} - vt = \frac{ct}{\cos\beta}$$

$\frac{v}{c} = M$ — число Маха, нам интересно, чтобы скорость потока была больше скорости звука, то есть $M < 1$

$$\frac{1}{\sin\alpha} - M = \frac{1}{\cos\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{1 - M\sin\alpha}$$

$$n(\alpha) = 1 - M\sin\alpha$$

$0^\circ > \alpha > 90^\circ$, $n(\alpha) > 0$, то есть получаем обычное преломление. А теперь либо увеличим скорость потока, либо изменим угол наклона, в любом случае будет происходить перемещение точки пересечения волны и линии раздела сред. Подвинем эту точку так, чтобы она оказалась внутри оранжевой полусферы. То есть выполнено условие $1 - \sin\alpha < M\sin\alpha < 1 + \sin\alpha$ (рис. 9.5).

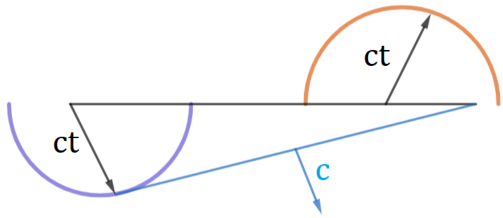

Рис. 9.5. Перемещение точки пересечения волны и линии раздела сред

Получается, что все промежуточные волны, которые создавались бы периодическим возмущением, оставались бы внутри этой полусферы. Но на самом деле шла плоская падающая волна, у которой сечение было всюду одинаковым, а значит, отражённая волна также всюду одинакова. Никаких изменений при перемещении возмущения вдоль среды в верхней полуплоскости не возникает. Это и есть полное внутреннее отражение.

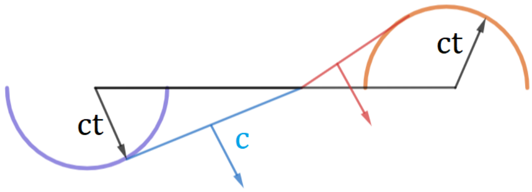

Рис. 9.6. Фронт волны

Сверхотражение

Если немного увеличим скорость потока (или изменим угол падения), то поток так быстро будет увлекать это возмущение, что можно будет снова нарисовать огибающую. Снова сформируется фронт волны (рис. 9.6).

Если перейти к рисованию волновых векторов, получится (рис. 9.7).

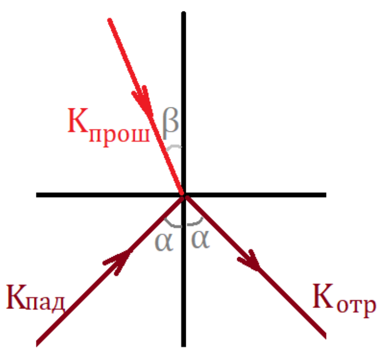

Рис. 9.7. Волновые векторы

Если заменить знак времени, поменять направления векторов, то увидим более привычную картину с обычной падающей волной. Если для такого развёрнутого варианта распишем энергию $A^2 = 1 + B^2$, то получим, что $A > 1$ (A — энергия отражённой волны, B — прошедшей, энергию падающей считаем за единицу).

Это явление было изучено и названо ***сверхотражением***. Если волна распространяется под определенным углом в движущейся среде, то энергия системы оказывается в меньше, чем энергия движущегося потока. На языке волн это сформулировали так: если волна распространяется в сверхзвуковом потоке под определёнными углами, то полная энергия волны оказывается отрицательной — она позаимствовалась из потока. Когда пытаемся возмущать на границе раздела движущийся поток, то реакция потока приводит к возникновению сил со стороны потока, совершающих положительную работу. В итоге поток отдает энергию, а приобретает ее возникшая волна. Можно сказать, что эта волна несёт отрицательную энергию и уменьшает энергию потока.

Можно рассмотреть упрощенную модель: на границе раздела перемещается поршень, который вызывает это возмущение. И тогда на этот поршень со стороны среды будет действовать некоторая сила. Она будет забираться у среды и передаваться поршню, возникающей волне.

Нормальное и аномальное преломление

Ещё раз посмотрим на формулу коэффициента преломления $n = 1 - M \sin\alpha$ — показатель преломления. Если $M < 1$, то всё понятно, если $M = 1$, то при $\alpha = 90^\circ$ n станет нулём. А теперь берём $M > 1$ и n может становиться отрицательным, при больших скоростях потока переходим в область аномального преломления.

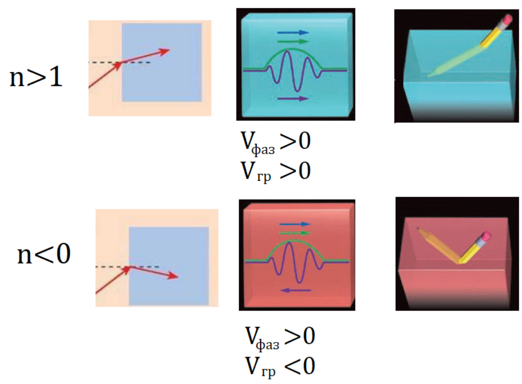

Рис. 9.8. Метаматериалы. Эффекты Веселаго (УФН, 1967 г., т. 92, с. 517)

Это связано с тем, что в 67 году Веселаго опубликовал работу, где решил пофантазировать о том, что будет, если возникнут среды, у которых показатель преломления будет отрицательным. (рис. 9.8) В такой ситуации оказывается, что плоская пластинка выполняет роль линзы. *Суперлинза* — плоская пластинка метаматериала (рис. 9.9). Вклад неволновой зоны обеспечивает преодоление дифракционного предела.

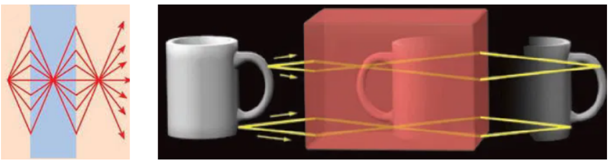

Рис. 9.9. Суперлинза

Изображение для постоянной n, у нас же она зависит от α, так что стоит добавить «если принимаем узкий пучок лучей и α невелико, то». Расчеты в электродинамике показывают, что дифракционный предел здесь можно преодолевать, потому что поля ближней волновой зоны, которые не являются волновыми полями, прекрасно такой пластинкой преобразуются в поля за этой пластинкой. Разрешающая способность такой оптики может преодолеть дифракционный предел.

В акустике также возможно создание таких сред не с помощью потока, а с помощью накачки энергии падающей волной таким образом, что отражённая волна имеет бо́льшую энергию, чем падающая. Здесь игра идёт на резонансных явлениях. Если у нас имеются какие-то резонансные включения, то вблизи частоты резонанса фаза может меняться практически на π, когда чуть не доходим до точки резонанса или чуть переходим. И соответственно, если не добираемся до точки резонанса, то закачиваем энергию, если переходим её, то забираем из волны. Поэтому если волна не строго монохроматическая, как бывает, то возможна перекачка энергии из одной области спектра в другую и тогда можно наблюдать усиление при отражении, но уже связанное не со свойствами потока. Мы забираем энергию из той же самой падающей волны, просто из других частей её спектра.

Излучение звука. Эффект Доплера

Эффект Доплера был открыт в 1845 г. Волновое уравнение движущегося со скоростью V вдоль оси Oz колеблющегося источника (ось z берём, чтобы было привычнее переходить в сферические координаты):

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\varphi = 4\pi q c^2 \delta(x)\delta(y)\delta(z - Vt)\cos\Omega t \tag{9.1}$$

Монохроматическая волна $\varphi(\vec{r}, t) = Ae^{-i\omega t + ?}$ является решением при условии $\omega^2 = k^2c^2$. Для движущегося источника

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z - Vt)e^{-i\Omega t} = \frac{e^{-i\Omega t}}{(2\pi)^3}\int dk_x dk_y dk_z e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z - ik_z Vt}$$

что даёт связь между частотой ω волны, волновым вектором $\vec{k}$ и частотой колебаний Ω источника:

$$\omega = \Omega + kc\cos\vartheta$$

где c — скорость волны в неподвижной среде, V — скорость источника, $M = V/c$. Используя дисперсионное уравнение, получим связь между Ω и ω:

$$\omega = \frac{\Omega}{1 - M\cos\vartheta}$$

Нормальный эффект Доплера (при $V <$, т.е. $M < 1$, частоты обязаны быть положительными). Подразумеваются положительные частоты. Эти 2 частоты положительны, знаменатель содержит минус, дальше всё определяется величиной M и углом. Если величина $M < 1$, то будет нормальный эффект Допплера.

Конус Маха

При $V < c$ существует нетривиальное решение и для источника, не совершающего колебания $\Omega = 0$, если угол ϑ_0 между скоростью источника и волновым вектором определяется условием (конус Маха)

$$\cos\vartheta_0 = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}$$

где ϑ_0 — угол раствора конуса.

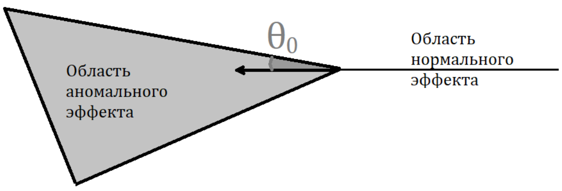

Рис. 9.10. Эффекты

Если $\Omega \neq 0$, то существует связь между частотой волны и частотой колебаний

$$\omega = \frac{\Omega}{|1 - M\cos\vartheta_0|}$$

Связь разная внутри и вне конуса Маха (разность в раскрытии модуля). Внутри конуса (при $\vartheta < \vartheta_0$) наблюдается *аномальный эффект Доплера* — частота волны ω возрастает с ростом ϑ и при $\vartheta \to \vartheta_0$ выполнено $\omega \to \infty$. Вне конуса эффект Доплера называется нормальным, так как частота уменьшается с ростом ϑ (рис. 9.10).

Реакция излучения

Если формально частота становится отрицательной, то это как-то связано с энергией волны. Чтобы посмотреть, каким образом связана энергия волны и энергия источника, рассмотрим старую работу Гинзбурга 40-ых годов. Гинзбург рассуждал о черенковском излучении, привлекая простейшие квантово-механические соображения. При излучении волна уносит энергию и импульс, поэтому энергия и импульс источника изменятся в соответствии с законами сохранения энергии и импульса.

$$E_0 - E_1 = E_{\text{волн}} \qquad \vec{p}_0 - \vec{p}_1 = \vec{p}_{\text{волн}}$$

Для плоской волны в неподвижной среде энергия и импульс связаны соотношением $E_{\text{волн}} = cp_{\text{волн}}$. Поэтому

$$E_0 - E_1 = E_{\text{волн}} \qquad c(\vec{p}_0 - \vec{p}_1) = E_{\text{волн}}\vec{n}$$

Для частицы с массой m и скоростью V:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = E_{\text{волн}} \qquad m\vec{V} - m\vec{V}_1 = \frac{E_{\text{волн}}}{c}\vec{n}$$

Исключая скорость источника после излучения, получим

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \frac{E_{\text{волн}}}{mc}\vec{n} \qquad V_1^2 = V^2 - 2\frac{E_{\text{волн}}}{mc}(\vec{n}\cdot\vec{V}) + \left(\frac{E_{\text{волн}}}{mc}\right)^2$$

Учитывая, что $(\vec{n}\cdot 0\vec{V}) = V\cos\vartheta$, из закона сохранения энергии определим ϑ:

$$\cos\vartheta = \frac{c}{V}\left(1 - \frac{E_{\text{волн}}}{2mc^2}\right)$$

Энергия волны мала $E_{\text{волн}} << mc^2$. Если её учтём, получится кантонский эффект, если нет — получим:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{M} = \frac{c}{V}$$

При дозвуковой скорости источника $M < 1$ не существует углов, удовлетворяющих этому уравнению, излучение невозможно. Закон сохранения импульса запрещает излучение равномерно движущемуся телу. При сверхзвуковой скорости $M > 1$ существуют углы, под которыми источник будет терять энергию и замедляться. С равномерным источником всё понятно, но пусть источник сложный. Если источник обладает «внутренней» энергией ε, то его полная энергия E равна сумме кинетической и внутренней энергии $E = \frac{mV^2}{2} + \varepsilon$.

Законы сохранения приводят к уравнению

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 = E_{\text{волн}}(1 - M\cos\vartheta)$$

Энергия волны в неподвижной среде положительна $E_{\text{волн}} > 0$. Поэтому при выполнении условия $\cos\theta < \frac{1}{M} = \cos\theta_0$ излучение сопровождается потерей энергии источника. При $M > 1$ это условие выполняется для любых углов, а при $M > 1$ — для углов $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, то есть внутри конуса Маха, излучение приводит к росту энергии источника: $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$.

Вывод: если равномерно движущийся источник, обладающий внутренними степенями свободы (если среда движется со сверхзвуковой скоростью по отношению к источнику), надумает испустить волну, то его энергия возрастёт.

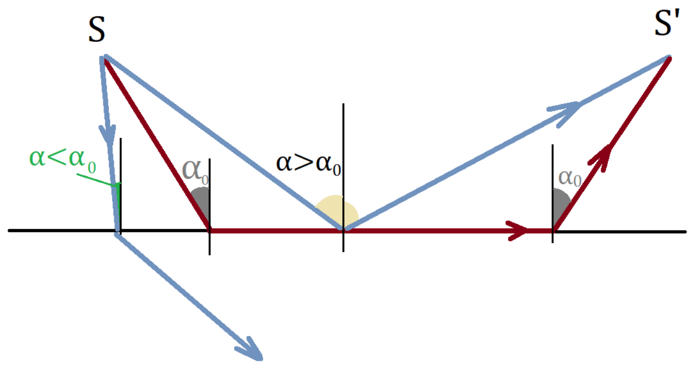

Рис. 9.11. Волна под углом полного внутреннего отражения

Если источник посылает волну ровно под углом полного внутреннего отражения (рис. 9.11), то он пойдёт вдоль границы раздела сред. Если обратить время, он может ползти по границе раздела сред и вылететь под углом внутреннего отражения. Это называется «боковая волна». Она распространяется быстрее, чем падающая плюс отражаемая, поэтому приходит быстрее.

У нас 2 среды. Волна, распространяющаяся параллельно границе разделов, обычно не хочет переходить между средами. Чтобы это всё-таки произошло, нам нужно в каждой точке подталкивать её с периодом $t = \frac{\lambda}{c}$, что не получится, если скорости разные. Если скорости близки, то может получиться интенсивный обмен энергии. Это можно наблюдать на практике. Если вода покрыта тонкой корочкой льда, скорость изгибной волны в ней близка к скорости звука. Если слегка стукнуть по льду, то возмущённое пространство, образованное изгибной волной, будет интенсивно обмениваться энергией с воздухом, и мы сможем услышать звук на большом расстоянии в воздухе. Поскольку групповая скорость вдвое превышает фазовую, мы будем слышать довольно долгий «шлейф». При этом услышать мы сможем только узкую прослойку частот, которые обладают нужным свойством.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ